

Árvores em processos pontuais

Iesus Carvalho Diniz

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio FAPESP processo 04/15864-1

São Paulo, abril de 2008

Resumo

Neste trabalho é construído um *grafo aleatório* conexo e sem ciclos, *árvore*, com um único caminho infinito auto-evitante, *fim*, cujos vértices são pontos de uma sequência de infinitos processos pontuais de Poisson definidos em \mathbb{R}^d ou em quaisquer conjuntos de medida finita (algoritmo A) e de um único processo pontual de Poisson definido em \mathbb{R}^d (algoritmo B); ademais, esta última árvore será invariante por qualquer isometria.

Palavras-chave: Árvore Poissoniana de Único Fim, Processo Pontual de Poisson, Árvore Aleatória, Linha de Sucessão, Coalescência.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that proper record-keeping is essential for the success of any business or organization. The text then goes on to describe various methods and techniques for organizing and storing these records effectively. It also touches upon the legal implications of record-keeping and the role of auditors in verifying the accuracy of the data.

The second part of the document provides a detailed overview of the accounting cycle. It explains the ten steps involved in the process, from identifying the accounting entity to preparing financial statements. Each step is described in detail, including the necessary documents and procedures. The text also discusses the importance of double-entry bookkeeping and how it helps in maintaining the balance of the accounting system.

The final part of the document discusses the role of the accountant in the business. It highlights the various responsibilities of an accountant, such as preparing financial statements, managing taxes, and providing financial advice to the business owner. It also discusses the importance of staying up-to-date with the latest accounting standards and regulations.

Abstract

In this work is constructed a connected and without cycles *random graph*, a *tree*, with a single infinite self-avoiding path, an *end*, whose vertices are points of an infinite sequence of independent Poisson point processes defined on \mathbb{R}^d or any finite measure sets (algorithm **A**) and by a unique poisson point Process defined on \mathbb{R}^d (algorithm **B**); moreover, this tree is invariant for any isometry. **Keywords:** One-Ended Poissonian Tree, Poisson Point Process, Random Tree, Random Matching, Succession Line, Coalescing.

The first part of the appendix contains a list of the authors' names and their affiliations. The second part contains a list of the authors' addresses and their telephone and fax numbers. The third part contains a list of the authors' e-mail addresses. The fourth part contains a list of the authors' web pages. The fifth part contains a list of the authors' publications. The sixth part contains a list of the authors' awards and honors. The seventh part contains a list of the authors' memberships in professional organizations. The eighth part contains a list of the authors' other activities. The ninth part contains a list of the authors' other information. The tenth part contains a list of the authors' other information.

Sumário

Lista de Figuras	vii
1 APUFIP - Processos de Poisson Definidos em \mathbb{R}^d.	1
1.1 Introdução e Descrição do Modelo	1
1.2 APUFIP - Processos Definidos em \mathbb{R}	3
1.2.1 Critérios para Determinação da APUFIP como Função da Sequência de Taxas.	6
1.3 APUFIP - Processos Definidos em $\mathbb{R}^d, d \geq 2$	9
2 APUF - Processo de Poisson Definido em \mathbb{R}.	15
3 APUF - Processo de Poisson Definido em \mathbb{R}^d.	25
A Árvore Poissoniana em Conjuntos de Medida Finita.	45
B	49
B.1 Cota Inferior para a Probabilidade Condicional de Coalescência.	49
B.2	51
C	55
Referências Bibliográficas	57

Sumário

10	Índice de Figuras
1	1. INTRODUÇÃO
2	1.1. Motivação e Justificação
3	1.2. Objetivos
4	1.3. Estrutura do Trabalho
5	1.4. Metodologia
6	1.5. Conclusões
7	2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS
8	2.1. Conceitos Básicos
9	2.2. Evolução da Teoria
10	2.3. Aplicações
11	2.4. Conclusões
12	3. METODOLOGIA
13	3.1. Descrição do Procedimento
14	3.2. Instrumentos de Medição
15	3.3. Amostragem
16	3.4. Análise Estatística
17	3.5. Conclusões

Lista de Figuras

1.1	Linha de sucessão de uma sequência de processos pontuais de Poisson e independentes.	2
1.2	Região que determina a coalescência entre os ancestrais de a_k e b_k em função da distribuição da distância $R_{a_k}^{a_{k+1}}$ e D_k .	10
3.1	Posições relativas de distâncias máximas dos três primeiros ancestrais de a_1 , dada as posições dos pontos dos tipos 2, 3 e 4 mais próximos à origem.	26
3.2	$\mathcal{H}_{2t_k}^1$ é o conjunto dos hipercubos hachurados contidos em $\mathcal{H}_{r_k}^d(a_1)$.	28
3.3	Respectivas posições relativas para distância máxima e mínima de ξ_{k+1} e $\xi_{k+1}^{(2)}$ em relação a a_k sob à condição $\left \xi_{k+1}^{(2)} - a_1 - \xi_{k+1} - a_1 \right > 2R_k$.	36
3.4	Respectivas posições relativas para distância máxima e mínima de ξ_{k+1} e $\xi_{k+1}^{(2)}$ em relação a b_k sob à condição $\left \xi_{k+1}^{(2)} - a_1 - \xi_{k+1} - a_1 \right > 2R_k + 2D_1$.	37
3.5	Cada seta duplamente orientada corresponde ao “diâmetro” de cada um dos “hiperanéis”, cujas interseções são hachuradas e tem comprimento $2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}$.	38

Figura 1.1

- (a) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional.
- (b) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional e derivativo.
- (c) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional, derivativo e integral.
- (d) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional e integral.
- (e) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional e derivativo e integral.
- (f) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional e derivativo e integral e um elemento de atraso.
- (g) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional e derivativo e integral e um elemento de atraso e um elemento de saturação.
- (h) Diagrama de um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional e derivativo e integral e um elemento de atraso e um elemento de saturação e um elemento de não linearidade.

Capítulo 1

APUFIP - Processos de Poisson Definidos em \mathbb{R}^d .

1.1 Introdução e Descrição do Modelo

Neste capítulo construiremos um grafo conexo e sem ciclos, *árvore*, com um único caminho infinito autoevitante, *fim*. Os vértices da árvore são pontos de uma sequência infinita de processos pontuais de Poisson independentes definidos em \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$), tais que para todo $k \in \mathbb{N}^*$, a taxa do k -ésimo processo X_k é λ_k . Chamaremos tal grafo de *APUFIP*.

Para cada ponto $\xi_k \in X_k$, o ponto $\xi_{k+1} \in X_{k+1}$ mais próximo de ξ_k é o seu *ancestral*. Chamaremos o algoritmo **A** ao procedimento que a partir de uma realização de uma sequência de infinitos processos pontuais de Poisson e independentes $(X_k)_{k \geq 1}$ gera um grafo cujos vértices são pontos de cada uma das realizações desses processos e cada *elo* é formado por $\xi_k \in X_k$ e o seu ancestral $\xi_{k+1} \in X_{k+1}$. Este mecanismo é ilustrado na figura 1.1 para uma sequência de processos unidimensionais. Considere que cada ponto ξ_k também determina sua posição, i.e. $X_k^{\xi_k} = \xi_k$, e que $D_k = |b_k - a_k|$ é a distância entre os k -ésimos ancestrais de a_1 e b_1 , escolhidos arbitrariamente em X_1 .

Para provarmos a existência de um único caminho infinito autoevitante, no grafo gerado pelo algoritmo **A**, é suficiente provar que dados quaisquer dois pontos em X_1 , a_1 e b_1 , a seguinte condição é satisfeita:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_k \neq 0) = 0$$

Diremos então que a_1 e b_1 *coalescem em probabilidade*. Desde que poderíamos escolher qualquer par de pontos de pontos a_j e b_j de X_j , denotaremos a condição acima por

$$\begin{aligned} a_k \stackrel{\mathbb{P}}{=} b_k &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_k \neq 0) = 0 \quad \text{se, e somente se,} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a_k = b_k) &= 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Observação 1 A condição estabelecida em (1.1) nos diz que escolhidos dois pontos quaisquer na "geração 1"; isto é, a_1 e b_1 são dois pontos selecionados arbitrariamente em X_1 , a probabilidade do evento da não coalescência entre os seus respectivos k -ésimos ancestrais, a_k e b_k , para k suficientemente grande, tende a zero. Poderíamos considerar em lugar de a_1 e b_1 , dois pontos quaisquer a_m

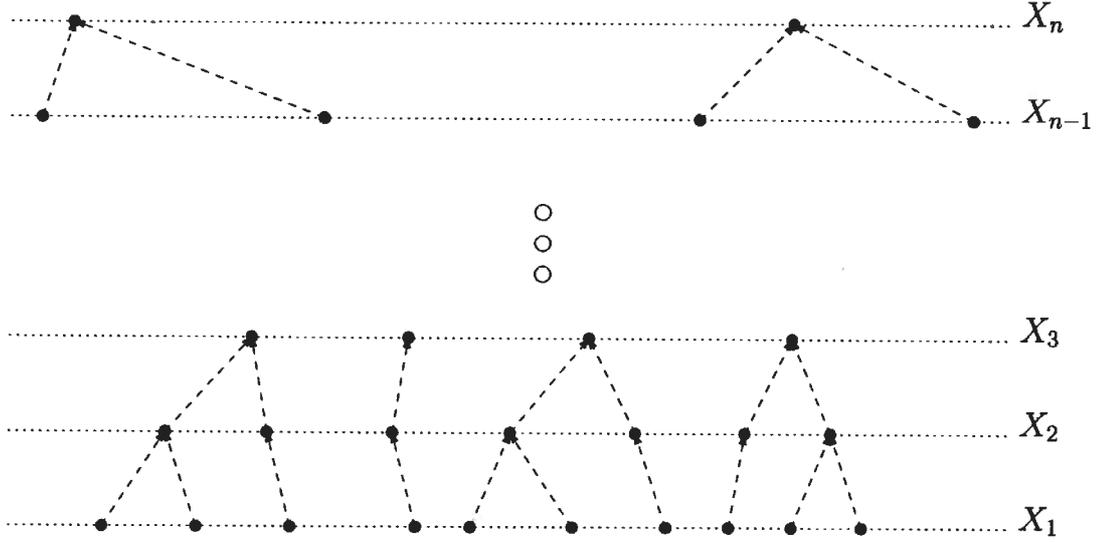


Figura 1.1: Linha de sucessão de uma sequência de processos pontuais de Poisson e independentes.

e b_m de X_m , pois a coalescência destes pontos, implicará a coalescência de quaisquer outros de seus sucessores em X_j , em que $1 \leq j < m$.

Definição 1 Diremos que a_k e b_k coalescem quase certamente ($a_k \stackrel{qc}{=} b_k$), se o conjunto das trajetórias $\mathcal{T} = \cup_{k \geq 1} \mathcal{T}_k$ nas quais a_k e b_k coalescem em alguma "geração $l, l \geq k$ ", \mathcal{T}_l , tem probabilidade um no espaço produto definido pela sequência $(X_k)_{k \geq 1}$.

Lema 1 $a_k \stackrel{P}{=} b_k := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a_k = b_k) = 1$ se, e somente se, $a_k \stackrel{qc}{=} b_k$.

Demonstração: Seja $a_1, b_1 \in X_1$. Da condição que a_k coalesce em probabilidade com b_k , tem-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{a_1, b_1}(a_k = b_k) = 1,$$

i.e. para todo $\epsilon = \epsilon(k_n) > 0$ existe k_n tal que para todo $k \geq k_n$ verifica-se que $\mathbb{P}(a_k = b_k) > 1 - \epsilon(k_n)$.

Denote por

- $\Omega = \{ \text{Conjunto de todas as trajetórias dos ancestrais de } a_1 \text{ e } b_1 \text{ das infinitas realizações de cada um dos } X_k \};$
- $\epsilon(n) = \frac{1}{n}$ e $\mathcal{T}_{k_n} = \{ \omega \in \Omega \mid a_k(\omega) = b_k(\omega), \forall k \geq k_n \}.$

Tem-se então que $\mathcal{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_{k_n}$ é tal que $\mathbb{P}(\mathcal{T}) = 1$, pois para qualquer n

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}) \geq \mathbb{P}(\mathcal{T}_{k_n}) = 1 - \frac{1}{n},$$

então $\mathbb{P}(T) = 1$.

(\Leftarrow) Imediato.

Se os processos pontuais de Poisson forem definidos em \mathbb{R} e $\liminf \lambda_k = 0$, a determinação da APUFIP é feita com relativa facilidade, pois neste caso, pode-se determinar a probabilidade de coalescência na "geração $k+1$ " dada a posição dos k -ésimos ancestrais de a_1 e b_1 , ou seja,

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k) = e^{-2\lambda_{k+1}D_k} (1 + \lambda_{k+1}D_k)$$

Por outro lado, se cada um dos processos X_k estiverem definidos em \mathbb{R}^d ($d \geq 2$), teremos apenas um limitante inferior para $\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k)$, neste caso a determinação da APUFIP só será obtida através da condição dada no lema 6, o qual estabelece que o limite da probabilidade de coalescência condicional é uniformemente limitado por baixo por uma constante $\epsilon(d, \alpha, \beta)$ que depende da dimensão d em que os processos estão definidos, da razão entre os decaimentos das taxas α dos processos e do valor β associado à deriva ou "drift" do processo reescalado $d_k := (\alpha)^{\frac{k}{d}} D_k$.

1.2 APUFIP - Processos Definidos em \mathbb{R}

Vimos na secção 1 que a condição suficiente para a determinação da APUFIP era que dados quaisquer dois pontos em X_m , a_m e b_m , eles coalesceriam em algum ponto $\xi = \xi(a_m, b_m) \in X_k$ em que $k = k(a_m, b_m) > m$. Obviamente, a construção da APUFIP dependerá da dimensão d em que os processos estejam definidos e da sequência de taxas $(\lambda_k)_{k \geq 1}$. No teorema 1 será demonstrada a construção da APUFIP quando para todo $k \geq 1$ os processos X_k forem definidos em \mathbb{R} e $\liminf \lambda_k = 0$.

Proposição 1 *Seja $X_{k+1}^{a_{k+1}}$ a posição do ancestral de a_k em X_{k+1} . A distribuição de $X_{k+1}^{a_{k+1}}$ condicionada a a_k tem lei dada por*

$$f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) = \lambda_{k+1} e^{(-2\lambda_{k+1}|x-a_k|)}. \quad (1.2)$$

Demonstração: Seja a_k a posição do k -ésimo ancestral de a_1 em X_k , segue-se pela independência dos processos $(X_k)_{k \geq 1}$ que $\forall t > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k - a_k| > t) &= \mathbb{P}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k > a_k + t) + \mathbb{P}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k < a_k - t) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+1}^{a_{k+1}} \notin [a_k - t, a_k + t]) = e^{-\lambda_{k+1}2t}. \end{aligned}$$

Como o processo é homogêneo

$$\mathbb{P}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k > a_k + t) = \mathbb{P}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k < a_k - t) = \frac{1}{2} e^{-\lambda_{k+1}2t}.$$

Se $x = a_k + t$, então $\mathbb{P}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k > x) = \frac{1}{2} e^{-\lambda_{k+1}2(x-a_k)} \mathbb{1}_{(x > a_k)}$, então

$$f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) = \lambda_{k+1} e^{2\lambda_{k+1}a_k} e^{-2\lambda_{k+1}x} \mathbb{1}_{(x > a_k)}.$$

Analogamente, tem-se que

$$f_{X_{k+1}^{a_{k+1}}|a_k}(x) = \lambda_{k+1} e^{-2\lambda_{k+1}a_k} e^{2\lambda_{k+1}x} \mathbb{1}_{(x < a_k)}.$$

□

Lema 2 *Seja X_{k+1} um Processo Pontual de Poisson de taxa λ_{k+1} independente de X_k . Se a_k e b_k são dois pontos de X_k , então para todo $k \geq 1$ tem-se*

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k) = e^{-2\lambda_{k+1}D_k} (1 + \lambda_{k+1}D_k), \quad (k \geq 1). \quad (1.3)$$

Demonstração: De acordo com o que foi convenionado no segundo parágrafo da secção 1.1, temos que para todo $k \geq 1$, cada partícula determina a sua posição. Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | X_k^{a_k}, X_k^{b_k}) &= \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | X_k^{a_k} = a_k, X_k^{b_k} = b_k) \\ &= \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k). \end{aligned}$$

Condicionando-se $\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k)$ na posição do ancestral de a_k , $X_{k+1}^{a_{k+1}}$, e tomando o seu valor esperado, resulta que

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k, X_{k+1}^{a_{k+1}})). \quad (1.4)$$

Tem-se respectivamente que

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k, X_{k+1}^{a_{k+1}} = x) = \begin{cases} e^{-\lambda_{k+1}(2b_k - 2a_k)} & \text{se } x \leq a_{k-1} \\ e^{-\lambda_{k+1}(2b_k - 2x)} & \text{se } a_{k-1} < x < b_{k-1} \\ 1 & \text{se } x \geq b_{k-1} \end{cases} \quad (1.5)$$

De (1.2), (1.4) e (1.5) resulta que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k, X_{k+1}^{a_{k+1}})) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k, b_k}(x) \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k, x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k, x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{a_k} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) e^{(-\lambda_{k+1}(2b_k - 2a_k))} dx \\
&\quad + \int_{a_k}^{b_k} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) e^{(-\lambda_{k+1}(2b_k - 2x))} dx \\
&\quad + \int_{b_k}^{+\infty} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) dx = e^{(-\lambda_{k+1}(2D_k))} \int_{-\infty}^{a_k} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) dx \\
&\quad + \int_{a_k}^{b_k} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) e^{(-\lambda_{k+1}(2b_k - 2x))} dx + \int_{b_k}^{+\infty} f_{X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k}(x) dx.
\end{aligned}$$

portanto, $\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k) = e^{-2\lambda_{k+1}D_k} (1 + \lambda_{k+1}D_k)$.

Proposição 2 $\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \mathbb{P}(D_{k+1} = 0)$ para todo $k \geq 1$.

Demonstração: Do cálculo de $\mathbb{P}(D_{k+1} = 0)$ a partir do condicionamento em D_k , tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_{k+1} = 0) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k)) \\
&= \mathbb{P}(D_k = 0) \cdot \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k = 0) + \mathbb{P}(D_k \neq 0) \cdot \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k \neq 0) \\
&= \mathbb{P}(D_k = 0) + \mathbb{P}(D_k \neq 0) \cdot \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k \neq 0) \\
&\geq \mathbb{P}(D_k = 0).
\end{aligned}$$

□

Proposição 3 Seja $X_{k+1}^{\xi_{k+1}}$ a posição do ancestral de ξ_k em X_{k+1} , então $\mathbb{E}(X_{k+1}^{\xi_{k+1}} | \xi_k) = \xi_k$.

Demonstração: O resultado segue diretamente da proposição 1, pois da lei condicional dada em (1.2), segue-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k+1}^{\xi_{k+1}} | \xi_k) &= \int_{-\infty}^{\xi_k} x \lambda_{k+1} e^{-2\lambda_{k+1}\xi_k} e^{2\lambda_{k+1}x} dx \\
&\quad + \int_{\xi_k}^{\infty} x \lambda_{k+1} e^{2\lambda_{k+1}\xi_k} e^{-2\lambda_{k+1}x} dx = \xi_k.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4 Seja $(X_k)_{k \geq 1}$ uma sequência de processos pontuais de Poisson (independentes) definidos em \mathbb{R} , com a_1 e b_1 escolhidos arbitrariamente em X_1 , então $\mathbb{E}(D_{k+1}) = \mathbb{E}(D_k) = D_1$, ($k \geq 1$).

Demonstração: Do fato de a_1 e b_1 serem escolhidos de maneira determinística, tem-se $\mathbb{E}(D_1) = \mathbb{E}(X_1^{b_1} - X_1^{a_1}) = b_1 - a_1 = D_1$.

Pela independência dos $(X_k)_{k \geq 1}$ e da proposição 3, seguem-se as respectivas igualdades em cada um dos termos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{k+1}^{b_{k+1}} | a_k, b_k) &= \mathbb{E}(X_{k+1}^{b_{k+1}} | b_k) = b_k; \\ \mathbb{E}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k, b_k) &= \mathbb{E}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k) = a_k.\end{aligned}$$

Assim, para todo $k \geq 1$ tem-se que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_{k+1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_{k+1} | a_k, b_k)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k+1}^{b_{k+1}} - X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k, b_k)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k+1}^{b_{k+1}} | a_k, b_k)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k, b_k)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k+1}^{b_{k+1}} | b_k)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k+1}^{a_{k+1}} | a_k)) \\ &= \mathbb{E}(b_k) - \mathbb{E}(a_k) = \mathbb{E}(b_k - a_k) = \mathbb{E}(D_k).\end{aligned}$$

Segue-se que $\mathbb{E}(D_k) = \mathbb{E}(D_1) = D_1$, para todo $k \geq 1$. □

Teorema 1 *Seja $(X_k)_{k \geq 1}$ uma sequência de processos pontuais de Poisson independentes definidos em \mathbb{R} tais que λ_k é a taxa de X_k . Se $\liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$; então, quase certamente, o algoritmo A constrói uma APUFIP.*

Demonstração: Tomando o valor esperado em (1.3), segue-se que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_{k+1} = 0) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k)) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-2\lambda_{k+1} D_k} [1 + \lambda_{k+1} D_k] \right) \\ &\geq \mathbb{E} \left(e^{-2\lambda_{k+1} D_k} \right) \geq e^{-2\lambda_{k+1} \mathbb{E}(D_k)} = e^{-2\lambda_{k+1} D_1}.\end{aligned}$$

Pela proposição 2 tem-se que $\mathbb{P}(D_k)$ é uma sequência não decrescente, donde resulta que

$$\begin{aligned}1 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_k = 0) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_k = 0) \\ &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} e^{-2\lambda_{k+1} D_1} = e^{-2 \liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda_{k+1} D_1} = 1.\end{aligned}$$

□

1.2.1 Critérios para Determinação da APUFIP como Função da Sequência de Taxas.

Do resultado estabelecido na equação (1.3), vemos que para todo $k \geq 1$, a probabilidade condicional de coalescência na k -ésima “iteração” decai com o aumento da taxa λ_{k+1} para qualquer valor positivo fixado u de D_k . O Teorema 1 dá uma condição suficiente da sequência de taxas $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ para a existência de um grafo conectado, sem ciclos e com um único fim. É possível obter uma outra

condição sobre as taxas e obter o mesmo resultado do teorema 1? Há uma sequência de taxas para a qual o grafo não é conectado? É possível obter limites inferiores para a probabilidade que o grafo seja não conectado?

As respostas para estas três questões serão dadas no teorema 2, teorema 3 e corolário 1. Para qualquer $k \geq 1$, seja $G : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ definida da seguinte maneira.

$$G(\lambda_{k+1}, k) := \mathbb{P}(a_{k+1} = b_{k+1} | D_k \neq 0) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-2\lambda_{k+1}u} (1 + \lambda_{k+1}u) f_{D_k}(u) du$$

se, e somente se,

$$\mathbb{P}(a_{k+1} \neq b_{k+1} | D_k \neq 0) = 1 - \int_{0^+}^{\infty} e^{-2\lambda_{k+1}u} (1 + \lambda_{k+1}u) f_{D_k}(u) du$$

Os eventos relacionados a não-coalescência entre os ancestrais de a_1 e b_1 em cada um dos estágios, ponderados pela distribuição da distância da “geração” passada, são independentes. Portanto, a probabilidade de não termos a coalescência entre os ancestrais de a_1 e b_1 , e portanto que o grafo seja não conectado, é dada por:

$$\left[1 - e^{-2\lambda_2 D_1} (1 + \lambda_2 D_1) \right] \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \int_{0^+}^{\infty} e^{-2\lambda_{k+1}u} (1 + \lambda_{k+1}u) f_{D_k}(u) du \right)$$

Para todo $k \geq 1$, $G(\lambda_{k+1}, k)$ é uma função contínua para todo $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^+$. Além disso, $G(\lambda_{k+1} = 0, k) = 1$ e $G(\lambda_{k+1} = \infty, k) = 0$, portanto, para todo $z_k \in (0, 1)$, existe $G(\lambda_{k+1}, k) = z_k$.

Teorema 2 Se $G(\lambda_{k+1}, k) > \frac{1}{k}$, então com probabilidade um, algoritmo A gera uma APUFIP cujos vértices são todos os pontos dos processos $(X_k)_{k \geq 1}$.

Demonstração:

$$\mathbb{P}(\forall k \ a_k \neq b_k \ | D_1 \neq 0) =$$

$$\left[1 - e^{-2\lambda_2 D_1} (1 + \lambda_2 D_1) \right] \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \int_{0^+}^{\infty} e^{-2\lambda_{k+1}u} (1 + \lambda_{k+1}u) f_{D_k}(u) du \right) \leq$$

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\text{existe } n_0; \forall n > n_0 a_n = b_n | D_1 \neq 0) = 1$$

□

Teorema 3 Se $G(\lambda_{k+1}, k) < \frac{1}{e^k}$, então há uma probabilidade positiva que o algoritmo **A** gere um grafo não conectado e sem ciclos.

Demonstração:

$$\mathbb{P}(\forall k a_k \neq b_k | D_1 \neq 0) =$$

$$\left[1 - e^{-2\lambda_2 D_1} (1 + \lambda_2 D_1)\right] \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \int_{0^+}^{\infty} e^{-2\lambda_{k+1} u} (1 + \lambda_{k+1} u) f_{D_k}(u) du\right) >$$

$$\left[1 - e^{-2\lambda_2 D_1} (1 + \lambda_2 D_1)\right] \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{e^k}\right)$$

□

Corolário 1 Para qualquer $p \in (0, 1)$ é sempre possível obter uma sequência de taxas $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ tal que a probabilidade de não existência de uma APUFIP é maior do que p .

Demonstração: Para qualquer $p \in (0, 1)$, existe uma sequência $(z_k)_{k \geq 1}$ que satisfaz:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) = p$$

Assim, se $G(\lambda_{k+1}) < z_k$ e $[1 - e^{-2\lambda_2 D_1} (1 + \lambda_2 D_1)] < z_1$, então:

$$\mathbb{P}(\forall k a_k \neq b_k | D_1 \neq 0) = \left[1 - e^{-2\lambda_2 D_1} (1 + \lambda_2 D_1)\right] \prod_{k=2}^{\infty} (1 - G(\lambda_{k+1})) >$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - z_k) = p$$

□

1.3 APUFIP - Processos Definidos em \mathbb{R}^d , $d \geq 2$

Apresentaremos nesta secção a construção da APUFIP quando os processos $(X_k)_{k \geq 1}$ estiverem definidos em \mathbb{R}^d , para $d \geq 2$ e $\lambda_k = (\alpha)^k$, em que $\alpha \in (0, 1)$. Em comparação ao problema de se determinar a construção da APUFIP descrita na secção 1.2, as principais dificuldades que surgem agora são:

1. Não há uma "expressão fechada" para $\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k)$, diferentemente do que ocorre em (1.3).
2. A distribuição D_k não tem mais a propriedade descrita na proposição 4.

A obtenção de uma cota inferior para a probabilidade condicional de coalescência, $\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k)$, será a alternativa ao resultado apresentado na equação (1.3). Quanto ao segundo item, consideraremos uma reescala determinística do processo D_k , de tal forma que no novo processo cujas distâncias serão denotadas por d_k , ter-se-á a seguinte característica: se a_k e b_k estiverem "suficientemente distantes", $d_k > \mathcal{L}_d = f(\alpha, \beta, d)$, então $\mathbb{E}(d_{k+1} | d_k) < \beta d_k$. A partir disto, o teorema 11 garantirá que $d_k \leq \mathcal{L}_d$ para infinitos k . Este fato e a condição dada no lema 6, que estabelece um limitante inferior positivo para o limite da probabilidade condicional de coalescência, serão suficientes para demonstrar a existência da APUFIP para processos definidos em \mathbb{R}^d .

Observação 2 *Conforme será mostrado em (1.9), \mathcal{L}_d é um valor constante que dependerá: da razão de decaimento α das taxas dos processos, da dimensão d em que processos estão definidos e do valor β que está relacionado ao "drift" médio do processo reescalado d_k . Como α e β poderão ser escolhidos "a priori" satisfazendo (1.9) para qualquer sequência $(X_k)_{k \geq 1}$, indicaremos apenas o "índice" d em \mathcal{L}_d .*

Determinaremos uma cota inferior para a probabilidade de coalescência, lema 4, a partir do condicionamento dado em (1.6), em que $R_{a_k}^{a_{k+1}}$ é a distribuição da distância entre um ponto a_k de X_k e o seu ancestral a_{k+1} de X_{k+1} e cuja densidade é dada no lema 3.

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | a_k, b_k, R_{a_k}^{a_{k+1}})) \quad (1.6)$$

Lema 3 *Para todo $k \geq 1$, $(R_{a_k}^{a_{k+1}})^d \sim \text{Exp}(\lambda_{k+1} v_d(1))$, em que $v_d(1)$ é o volume da bola d -dimensional de raio unitário.*

Demonstração: Para todo $r > 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \{R_{a_k}^{a_{k+1}} > r\} \quad \text{se, e somente se,} \quad \{(R_{a_k}^{a_{k+1}})^d > r^d\}, \quad \text{então} \\ \mathbb{P}(R_{a_k}^{a_{k+1}} > r) = \mathbb{P}((R_{a_k}^{a_{k+1}})^d > r^d) = e^{(-\lambda_{k+1} v_d(1) r^d)}, \quad \text{portanto} \\ f_{R_{a_k}^{a_{k+1}}}(r) = d \lambda_{k+1} v_d(1) r^{d-1} e^{(-\lambda_{k+1} v_d(1) r^d)} \mathbb{1}_{(r \geq 0)}. \end{aligned}$$

□

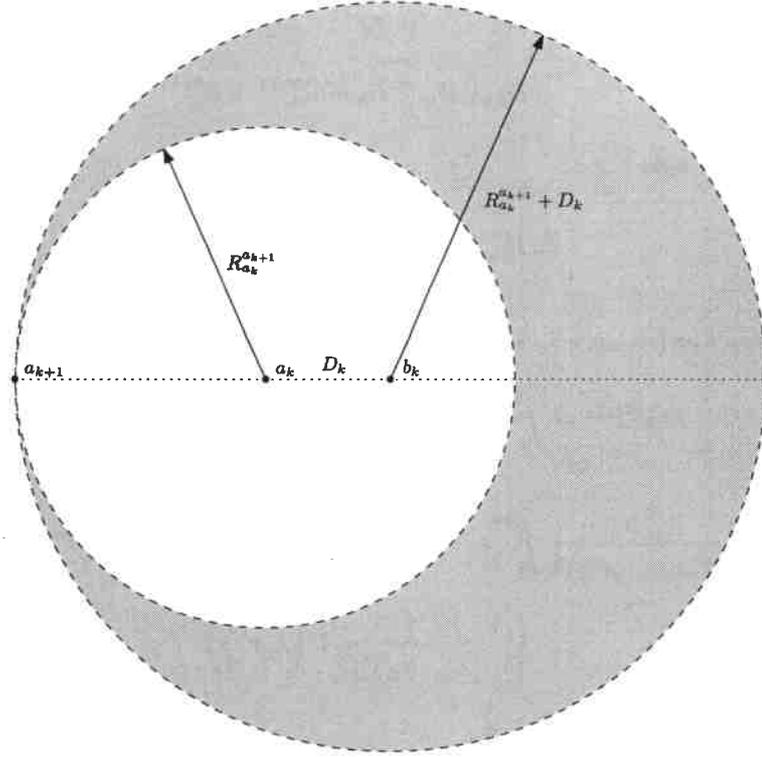


Figura 1.2: Região que determina a coalescência entre os ancestrais de a_k e b_k em função da distribuição da distância $R_{a_k}^{a_{k+1}}$ e D_k .

Observação 3 Para qualquer $R_{a_k}^{a_{k+1}} = r > 0$, se não houver nenhum ponto de X_{k+1} na região hachurada na figura 1.2, então necessariamente a_{k+1} é o ponto mais próximo de a_k e b_k , determinando a coalescência destes últimos em X_{k+1} .

Lema 4 (Cota Inferior para a Probabilidade Condicional de Coalescência)

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k) = \mathbb{P}(a_{k+1} = b_{k+1} | D_k) \geq e^{(-\lambda_{k+1} D_k^d v_d(1))} + \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-D_k v_d(1) \right)^j \lambda_{k+1}^{\frac{1}{d}} \lambda_{k+1}^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1} D_k^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} e^{(-w^d)} w^{d-1-j} dw$$

Demonstração: Ver apêndice B.1. □

Apesar da dificuldade citada no item 2, isto é, que não se tem mais que $\forall k \geq 1 \mathbb{E}(D_k) = D_1$, pode-se obter um limitante superior para $\mathbb{E}(D_{k+1} | D_k)$ o qual depende de D_k e λ_{k+1} a partir de (1.7) e do corolário 2.

$$D_{k+1}|D_k \leq D_k + R_{a_k}^{a_{k+1}} + R_{b_k}^{b_{k+1}} \quad (1.7)$$

Corolário 2 Para todo $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}(R_{a_k}^{a_{k+1}}) = \frac{1}{(\lambda_{k+1}v_d(1))^{\frac{1}{d}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

Demonstração: Do lema 3, com $u = \lambda_{k+1}v_d(1)x^d$, segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_{a_k}^{a_{k+1}}) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(R_{a_k}^{a_{k+1}} > x) dx = \int_0^\infty e^{(-\lambda_{k+1}v_d(1)x^d)} dx = \\ &= \frac{1}{d(\lambda_{k+1}v_d(1))^{\frac{1}{d}}} \int_0^\infty e^{(-u)u^{\left(\frac{1}{d}-1\right)}} du = \frac{1}{d(\lambda_{k+1}v_d(1))^{\frac{1}{d}}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right) = \\ &= \frac{1}{(\lambda_{k+1}v_d(1))^{\frac{1}{d}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{d}\right) \end{aligned}$$

□

Disto tem-se que

$$\mathbb{E}(D_{k+1}|D_k) \leq D_k + \frac{1}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}}} c(d) \quad \text{em que } c(d) = 2 \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{d})}{(v_d(1))^{\frac{1}{d}}}$$

Para todo $k \geq 2$, considere o seguinte reescalonamento para as distâncias entre os k -ésimos ancestrais de a_1 e b_1 .

$$d_k := (\alpha)^{\frac{k}{d}} D_k \quad \alpha \in (0, 1). \quad (1.8)$$

Assim, tem-se que para

$$\mathcal{L}_d = \frac{c(d)}{(\beta - (\alpha)^{\frac{1}{d}})} = \frac{2 \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{d})}{(v_d(1))^{\frac{1}{d}}}}{(\beta - (\alpha)^{\frac{1}{d}})} \quad \text{em que } \beta \in (\alpha^{\frac{1}{d}}, 1), \quad (1.9)$$

$$\mathbb{E}(d_{k+1}|d_k) < \beta d_k \quad \text{sempre que } d_k \in (\mathcal{L}_d, \infty). \quad (1.10)$$

1. \mathcal{L}_d é uma constante positiva, e como falado anteriormente, depende: da dimensão d em que os processos estão definidos, da razão α de decaimento das taxas dos processos e do valor β

- dado em (1.9) e (1.10) associado a "derivada média" do processo reescalado d_k (1.8).
2. De (1.10), tem-se que a "derivada média" de d_{k+1} em relação a d_k é pelo menos $(1 - \beta)$, se $d_k \in (\mathcal{L}_d, \infty)$.
 3. Para uma dada dimensão d , para que se possa estabelecer uma "derivada" de pelo menos $1 - \beta$, quanto maior for α , maior será o valor de \mathcal{L}_d .
 4. Se $d_k \in [0, \mathcal{L}_d]$, então $D_k \in \left[0, \frac{\mathcal{L}_d}{(\alpha)^{\frac{k}{d}}}\right]$.
 5. $\{d_k = 0\} \Leftrightarrow \{D_k = 0\} \forall k \geq 2$.

Observação 4 Do teorema 11 dado no apêndice C, pode-se estabelecer que para todo $k \geq 1$, a variável d_k na qual se mede a distância escalonada entre os k -ésimos ancestrais de a_1 e b_1 sempre assumirá um valor menor ou igual que \mathcal{L}_d num tempo finito.

Observação 5 Os comentários sobre a distribuição D_k se estendem a d_k , uma vez que d_k é simplesmente uma reescala determinística de D_k .

Lema 5 Se $L \geq l$, então para todo $k \geq 1$

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k = L) \leq \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k = l)$$

Demonstração: Sejam a_k, b_k, a'_k e b'_k pontos de X_k definido em \mathbb{R}^d tais que $L = |a_k - b_k|$ e $l = |a'_k - b'_k|$.

Podemos considerar, pelas propriedades de invariância por rotação e translação do processo de Poisson, os quatro pontos sobre a mesma reta de um plano $\pi \subset \mathbb{R}^2$, com a_k e a'_k sobre a mesma posição. Seja $\xi_{k+1}^{a_k, b_k}$ o ancestral comum de a_k e b_k em X_{k+1} , isto é, a_k e b_k pertencem a Célula de Voronoi de $\xi_{k+1}^{a_k, b_k}$, implicando portanto que a'_k e b'_k também pertencerão, ou seja, a coalescência de a_k e b_k implicará a coalescência entre a'_k e b'_k . □

Lema 6 (Limite inferior para a probabilidade condicional de coalescência)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(d_{k+1} = 0 | d_k \in [0, \mathcal{L}_d]) \geq \exp(-\alpha(\mathcal{L}_d)^d v_d(1)) = \epsilon(\alpha, \beta, d) > 0$$

Demonstração: A prova deste lema é dada no apêndice B.2, sendo uma adaptação de [2]. □

Teorema 4 Seja $(X_k)_{k \geq 1}$ uma sequência de processos pontuais de Poisson independentes definidos em \mathbb{R}^d e $\lambda_k = \alpha^k$, $\alpha \in (0, 1)$, a taxa de X_k . Então quase certamente algoritmo A constrói uma APUFIP consistindo dos pontos de todos os processos.

Demonstração: Da observação 4 e do lema 6, segue-se que há infinitos instantes nos quais a probabilidade de coalescência entre os k -ésimos ancestrais de a_1 e b_1 é uniformemente limitada por baixo, implicando o resultado. □

Capítulo 2

APUF - Processo de Poisson Definido em \mathbb{R} .

Consideraremos neste capítulo a construção de uma árvore de um único fim cujos vértices são todos os pontos de um único processo pontual de Poisson X_0 de taxa λ . Designaremos daqui em diante tal grafo por APUF. Para tanto, seja a partição dos pontos de X_0 dada na definição 2.

Definição 2 *Sejam $B(\xi, r)$ bola centrada em ξ de raio r e $\{t_k\}_{k \geq 1}$ uma sequência decrescente com $t_1 = \infty$. Um ponto ξ do processo pontual de Poisson (X_0) será do tipo $k, k \geq 1$ se:*

$$N(B(\xi, t_{k+1})) = 0 \quad e \quad N(B(\xi, t_k) - B(\xi, t_{k+1})) \geq 1. \quad (2.1)$$

Ademais, consideremos que a sequência $(t_k)_{k \geq 1}$ é tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 0 \quad (2.2)$$

Definição 3 (Ponto Típico) *Um ponto ξ é dito típico do tipo k , se:*

$$N(B(\xi, t_{k+1})) = 0 \quad e \quad N(B(\xi, t_k) - N(B(\xi, t_{k+1}))) = 1. \quad (2.3)$$

Um ponto do tipo k é não típico, se e somente se, ocorrerem um ou mais "pontos extras" em um dos intervalos de comprimento $\Delta t_k := t_k - t_{k+1}$ determinados pelo ponto típico.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \text{ ser não típico} \mid \xi \text{ é do tipo } k) &= \frac{\mathbb{P}(\xi \text{ ser não típico e } \xi \text{ é do tipo } k)}{\mathbb{P}(\xi \text{ é do tipo } k)} \\ &= \frac{e^{-2\lambda t_{k+1}} (1 - e^{-2\lambda \Delta t_k} - e^{-2\lambda \Delta t_k} 2\lambda \Delta t_k)}{e^{-2\lambda t_{k+1}} (1 - e^{-2\lambda \Delta t_k})} = 1 - \frac{e^{-2\lambda \Delta t_k} 2\lambda \Delta t_k}{1 - e^{-2\lambda \Delta t_k}} \leq \\ &= 1 - \frac{e^{-2\lambda \Delta t_k} 2\lambda \Delta t_k}{2\lambda \Delta t_k} = 1 - e^{-2\lambda \Delta t_k} \leq 2\lambda \Delta t_k \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observação 6 *Tem-se da equação (2.4) que a probabilidade de um ponto do tipo k ser não típico, é da ordem de Δt_k . Pode-se com isso fazer com que a densidade de tais pontos seja tão pequena quanto desejarmos, uma vez que a sequência dos t_k é decrescente.*

Observação 7 *Os pontos típicos do tipo k ocorrem como pares de pontos cuja distância entre eles está entre t_{k+1} e t_k , e são tão menos densos, quanto maior for o valor de k .*

Observação 8 *A partir da desigualdade (2.4) é razoável esperar que dado um ponto do tipo k , o ponto mais próximo a ele seja típico e também do tipo k . Tal configuração é tanto mais provável, quanto maior for k .*

Lema 7 (Pontos Típicos com Vizinhaça Simétrica) *Seja $V_{\delta(k)}x$ o evento que representa a existência de uma vizinhaça simétrica de raio $\delta(k) := t_k + t_{k+1}$ em torno de um ponto x de um par de pontos típicos do tipo k , isto é, considerando-se um ponto do par de pontos típicos, não haja outros pontos do processo, exceto o outro ponto formador do par. Então, $\forall k \geq 1$:*

$$\mathbb{P}(V_{\delta(k)}x) \geq \exp(-2\lambda\delta(k)) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\bar{V}_{\delta(k)}x) \leq 2\lambda\delta(k) \quad (2.5)$$

Convencionaremos que pontos do mesmo tipo pertencerão a uma mesma geração. Assim, os pontos do processo pontual de Poisson serão particionados numa "sucessão de gerações", em que o ancestral de um ponto ξ_k da geração k , será o ponto mais próximo a ele da $(k+1)$ -ésima geração.

Definição 4 (Algoritmo de Construção) *Da partição dada na definição 2 dos pontos do processo pontual de Poisson, definiremos para todo $k \geq 1$, o algoritmo \mathbb{B} de construção do grafo aleatório cujos vértices são todos os pontos de X_0 e cada elo é formado por $\xi_k \in X_k$ e o seu ancestral $\xi_{k+1} \in X_{k+1}$.*

Para mostrarmos que o algoritmo \mathbb{B} gera uma árvore, é necessário verificarmos que o grafo resultante é conexo e sem ciclos. A não existência de ciclos é evidente; pois para haver ciclos, um ponto de uma geração j , teria que ter um ancestral numa geração $k : k < j$, mas isto é absurdo pela definição do algoritmo \mathbb{B} de construção do grafo. Resta mostrar a conexidade; isto é, dados dois pontos quaisquer, há sempre um caminho entre eles. Para isto, analogamente ao descrito na seção 1.1, é suficiente mostrar que tais pontos sempre apresentam um ancestral comum, ficando assim provado mais até do que a conexidade, mais também a existência de um único fim.

Lema 8 (Ancestrais Típicos) *Sejam a_1 um ponto qualquer da geração inicial e $(a_k)_{k \geq 2}$ a sequência dos ancestrais de a_1 . Se $\sum_{k=2}^{\infty} \Delta t_k < \infty$, então existe k_1 suficientemente grande tal que a_k é ponto típico, para todo $k \geq k_1$.*

Demonstração: Da equação (2.4) segue-se que:

$$\mathbb{P}(a_k \text{ é não típico}) = \mathbb{P}(a_k \text{ é não típico} | a_k \text{ é do tipo } k) \leq 2\lambda\Delta t_k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(a_k \text{ é não típico}) \leq \sum_{k=2}^{\infty} 2\lambda\Delta t_k < \infty \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(\text{existir infinitos ancestrais não típicos de } a_1) = 0 \quad (2.6)$$

□

Do lema 8 segue-se que escolhido um ponto em uma geração qualquer, a partir de uma certa geração, todos os seus ancestrais serão pontos típicos.

Lema 9 (Ancestrais Típicos e de Vizinhança Simétrica) *Se $\sum_{k=2}^{\infty} \delta(k) < \infty$, então existe k_2 suficientemente grande, tal que para todo $k \geq k_2$, a_k é ponto típico do tipo k , e numa região centrada em a_k de raio δ_k não há outro ponto do processo, exceto o outro ponto formador do par de pontos típicos.*

Demonstração: A condição $\sum_{k=2}^{\infty} \delta(k) < \infty$ implica $\sum_{k=2}^{\infty} \Delta t_k < \infty$, e portanto a existência de um número finito de ancestrais não típicos. De (2.5) e do lema 8, tem-se que:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(\bar{V}_{\delta(k)} x) \leq \sum_{k=2}^{k_1-1} \mathbb{P}(\bar{V}_{\delta(k)} x) + \sum_{k=k_1}^{\infty} 2\lambda\delta(k) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{V}_{\delta(k)} x \text{ i.v.}) = 0$$

□

Observação 9 *A partir de agora, quando nos referirmos a um ponto do tipo k na linha de sucessão de um ponto escolhido arbitrariamente na "geração inicial", estaremos admitindo ser típico e admitir uma vizinhança simétrica de raio $\delta(k)$.*

Sejam x'_{k+1} e x_{k+1} dois pontos consecutivos do tipo $k+1$, tais que $x'_{k+1} < x_{k+1}$ com x_{k+1} sendo o ponto mais próximo de x'_{k+1} à sua direita, à exceção do outro ponto formador do par de pontos típicos do tipo $k+1$ com x'_{k+1} , o qual já sabemos estar distante entre t_{k+2} e t_{k+1} de x'_{k+1} .

Qual seria então a lei que mede a distância $d_{k+1,k+1}$ entre x'_{k+1} e x_{k+1} ? Sem perda de generalidade, considere a sequência de pontos ordenados do processo pontual de Poisson $x'_{k+1} = \xi_{k+1}^0 < \xi^1 < \xi^2 < \dots < \xi_{k+1}^{N_{k+1,k+1}^*} = x_{k+1}$ e variáveis aleatórias $Y_i, i \in \{1, \dots, N_{k+1,k+1}^*\}$ tais que:

1. $N(x'_{k+1} + \delta(k+1), \xi^1] = 1$ e $N(\xi^{i-1}, \xi^i) = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, N_{k+1,k+1}^*\}$
2. $Y_1 = \xi^1 - (x'_{k+1} + \delta(k+1))$ e $Y_i = \xi^i - \xi^{i-1}, i \in \{2, \dots, N_{k+1,k+1}^*\}$
3. $N_{k+1,k+1}^* := \left\{ \inf_{n \geq 1} : \xi^n = x_{k+1}, x'_{k+1} = \xi_k^0 \right\}$

Uma primeira tentativa para se determinar a lei da distância entre x'_{k+1} e x_{k+1} seria uma soma aleatória de variáveis exponenciais com um número geométrico de termos. Acontece que o número de termos não é exatamente geométrico, pois ξ^i ser do tipo $k+1$ dependerá não somente de $t_{k+2} < Y_{i+1} \leq t_{k+1}$, mas também de $Y_i > t_{k+2}$ para todo $i \in 2, \dots, N_{k+1,k+1}^*$, pois se $Y_i = |\xi^i - \xi^{i-1}| \leq t_{k+2}$, tem-se que $\mathbb{P}(\xi^i \neq x_{k+1}) = 1$.

Por x'_{k+1} admitir uma vizinhança simétrica de raio $\delta(k+1) := t_{k+1} + t_{k+2}$, temos que $\mathbb{P}(N[\xi^1 - t_{k+2}, \xi^1] = 0) = 1$, ou seja, ξ^1 ser do tipo $k+1$ é dado apenas em função de $t_{k+2} < Y_2 \leq t_{k+1}$.

Acontece que $\forall i \geq 1$, $\mathbb{P}(Y_i > t_{k+1}) = e^{-\lambda t_{k+1}}$, ou seja, com alta probabilidade, o "rótulo" de ξ^i dependerá apenas de Y_{i+1} , sendo portanto independente de ξ^{i-1} . Logo, para todo $i \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi^i \text{ ser do tipo } k+1 | Y_{i-1} > t_{k+1}) &= \mathbb{P}(Y_{i+1} \in (t_{k+2}, t_{k+1})) = \\ &= e^{-\lambda t_{k+2}}(1 - e^{-\lambda(t_{k+1}-t_{k+2})}) = e^{-\lambda t_{k+2}} - e^{-\lambda t_{k+1}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para todo $j \geq 1$, sejam

1. $E_{j;k+1,k+1} := \{Y_2 > t_{k+1}, \dots, Y_j > t_{k+1}, t_{k+2} < Y_{j+1} \leq t_{k+1}\}$
2. $N_{k+1,k+1} := \left\{ \inf_{j \geq 1} : \xi^j = x_{k+1}, Y_2 > t_{k+1}, \dots, Y_j > t_{k+1}, \xi^0 = x'_{k+1} \right\}$

ou seja, $E_{j;k+1,k+1}$ é o evento que ξ^j é o primeiro ponto do tipo $k+1$ à direita do par de pontos típicos ao qual x'_{k+1} pertence e as distâncias entre todos os pares de pontos consecutivos entre $x'_{k+1} + \delta(k+1)$ e ξ^j são superiores a t_{k+1} . Esta última condição, implica que o rótulo de ξ^j ser do tipo $k+1$ é determinado tão somente pelo fato de $\xi^{j+1} \in (\xi_j + t_{k+2}, \xi_j + t_{k+2} + t_{k+1}]$. $N_{k+1,k+1}$ é a variável aleatória que representa o número de pontos do processo até a ocorrência do primeiro ponto do tipo $k+1$, nas configurações cujas distâncias entre os pontos compreendidos entre $x'_{k+1} + \delta(k+1)$ a x_{k+1} é sempre superior a t_{k+1} .

Da definição de $E_{j;k+1,k+1}$, seguem-se que:

1. $E_{i;k+1,k+1} \cap E_{j;k+1,k+1} = \emptyset$ para todo $i \neq j$.
2. Para todo $j \geq 1$, $\mathbb{P}(E_{j;k+1,k+1}) = (e^{-\lambda t_{k+1}})^{j-1} (e^{-\lambda t_{k+2}} - e^{-\lambda t_{k+1}})$.

Seja α_{k+1} a probabilidade de ocorrer algum $E_{j;k+1,k+1}$ tem-se da condição dada em (2.2) sobre a sequência $(t_k)_{k \geq 1}$, que:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &:= \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j;k+1,k+1} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{j;k+1,k+1}) = \sum_{j=1}^{\infty} (e^{-\lambda t_{k+1}})^{j-1} (e^{-\lambda t_{k+2}} - e^{-\lambda t_{k+1}}) = \\ &= \frac{e^{-\lambda t_{k+2}} - e^{-\lambda t_{k+1}}}{1 - e^{-\lambda t_{k+1}}} = \frac{\lambda t_{k+1} - \lambda t_{k+2} + o(t_{k+2}) + o(t_{k+1})}{\lambda t_{k+1} + o(t_{k+1})} \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j;k+1,k+1} \right) = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+2}}{t_{k+1}} = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Lema 10 (Distribuição de $N_{k+1,k+1}$)

$$N_{k+1,k+1} \sim \text{Geo}(p_{k+1,k+1} = 1 - e^{-\lambda t_{k+1}})$$

Demonstração: tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{k+1,k+1} = j) &= \mathbb{P}(E_{j;k+1,k+1} | \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{i;k+1,k+1}) = \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(E_{j;k+1,k+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{i;k+1,k+1}\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{i;k+1,k+1}\right)} = \frac{\mathbb{P}(E_{j;k+1,k+1})}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{i;k+1,k+1})} = (e^{-\lambda t_{k+1}})^{j-1} (1 - e^{-\lambda t_{k+1}}) \end{aligned}$$

□

Sejam $\tilde{d}_{k+1,k+1} := \delta(k+1) + \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i$ e $d_{k+1,k+1} = |x_{k+1} - x'_{k+1}|$, então:

Corolário 3 (Distância entre pontos típicos adjacentes do tipo $k+1$, $d_{k+1,k+1}$)

$$d_{k+1,k+1} = \begin{cases} \tilde{d}_{k+1,k+1} & \text{com probabilidade } \alpha_{k+1} \\ G_{k+1,k+1} & \text{com probabilidade } 1 - \alpha_{k+1} \end{cases}$$

Observação 10 Do corolário 3, segue-se que com alta probabilidade, α_{k+1} , a lei da distância entre pontos consecutivos do tipo $k+1$ é dada por $\tilde{d}_{k+1,k+1}$.

Observação 11 Em $\tilde{d}_{k+1,k+1} = \delta(k+1) + \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i$ tem-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (t_{k+1} + t_{k+2}) = 0$$

Com isso, resulta que:

$$\tilde{d}_{k+1,k+1} \approx \bar{d}_{k+1,k+1} := \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i \text{ quando } k \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

A partir do resultado estabelecido em (2.9), tem-se uma aproximação assintótica para $\tilde{d}_{k+1,k+1}$ dada por $\bar{d}_{k+1,k+1}$. Por outro lado, de (2.8) segue-se que para k suficientemente grande, com alta probabilidade $d_{k+1,k+1} = \tilde{d}_{k+1,k+1}$.

Lema 11 (Soma Geométrica de Exponenciais iid) Sejam $N_{k+1,k+1}$, Y_i e $p_{k+1,k+1}$ como defi-

nidos anteriormente, então:

$$\bar{d}_{k+1,k+1} = \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i \sim Geo(\lambda p_{k+1,k+1} = \lambda [1 - e^{-\lambda t_{k+1}}])$$

Demonstração: seja $M_{\bar{d}_{k+1,k+1}}(t)$ a função geradora de momentos de $\bar{d}_{k+1,k+1}$ em t .

$$M_{\bar{d}_{k+1,k+1}}(t) = \mathbb{E}(e^{t \cdot \bar{d}_{k+1,k+1}}) = \mathbb{E} \left[\exp \left(t \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i \right) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i \right) \middle| N_{k+1,k+1} \right) \right]$$

Acontece que:

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i \right) \middle| N_{k+1,k+1} = n \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n Y_i \right) \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n \exp(t Y_i) \right) =$$

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{E} \exp(t Y_i) = \prod_{i=1}^n M_{Y_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n \Rightarrow \mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i \right) \middle| N_{k+1,k+1} \right) =$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^{N_{k+1,k+1}} \Rightarrow M_{\bar{d}_{k+1,k+1}}(t) = \mathbb{E} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^{N_{k+1,k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n p_{k+1,k+1} (1 - p_{k+1,k+1})^{n-1} =$$

$$\frac{\lambda p_{k+1,k+1}}{\lambda p_{k+1,k+1} - t} \Rightarrow \bar{d}_{k+1,k+1} = \sum_{i=1}^{N_{k+1,k+1}} Y_i \sim Exp(\lambda p_{k+1,k+1})$$

□

Sejam então a_k e b_k dois pontos típicos do tipo k , com uma vizinhança simétrica de raio $\delta(k)$ em torno de cada um deles, tais que $D_k = |b_k - a_k|$. Considere \tilde{D}_k , \bar{D}_k e D_k a distribuição da distância entre os k -ésimos ancestrais de a_1 e b_1 quando a distância entre dois pontos consecutivos de X_k é dada respectivamente sob as leis $\tilde{d}_{k,k}$, $\bar{d}_{k,k}$ e $d_{k,k}$.

Sejam $X_{\tilde{a}_k}$ e $X_{\tilde{b}_k}$ as posições dos k -ésimos ancestrais de a_1 e b_1 respectivamente com $\tilde{d}_{k,k}$ a lei da distância entre pontos consecutivos da k -ésima geração, tem-se:

Lema 12 *Sejam $L_k(\tilde{b}_k)$, $L_k(\tilde{a}_k)$ e p_{k+1} assim definidos:*

1. $L_k(\tilde{b}_k) := [\tilde{b}_k + \tilde{D}_k - \delta(k), \tilde{b}_k + \tilde{D}_k + \delta(k)]$, ou seja, $L_k(\tilde{b}_k)$ é a região simétrica em relação a \tilde{b}_k de $[\tilde{a}_k - \delta(k), \tilde{a}_k + \delta(k)]$.
2. $L_k(\tilde{a}_k) := [\tilde{a}_k - \tilde{D}_k - \delta(k), \tilde{a}_k - \tilde{D}_k + \delta(k)]$, ou seja, $L_k(\tilde{a}_k)$ é a região simétrica em relação a \tilde{a}_k de $[\tilde{b}_k - \delta(k), \tilde{b}_k + \delta(k)]$.

3. $\mathbf{1}_{L_k(\tilde{a}_k)}$ e $\mathbf{1}_{L_k(\tilde{b}_k)}$ as respectivas variáveis indicadoras dos ancestrros de a_k e b_k pertencerem às regiões $L_k(\tilde{a}_k)$ e $L_k(\tilde{b}_k)$.

4. $\tilde{p}_{k+1,L_k} := \mathbb{P}(X_{\tilde{b}_{k+1}} \in L_k(\tilde{b}_k)) = \mathbb{P}(X_{\tilde{a}_{k+1}} \in L_k(\tilde{a}_k))$

segue-se então que

$$\mathbb{E}(X_{\tilde{b}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \tilde{b}_k + \tilde{D}_k \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k} \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \tilde{a}_k - \tilde{D}_k \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k} \quad (2.10)$$

Demonstração: Condicionando $X_{\tilde{b}_{k+1}}$ a \tilde{a}_k , \tilde{b}_k e $\mathbf{1}_{L_k(\tilde{b}_k)}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tilde{b}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{\tilde{b}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \mathbf{1}_{L_k(\tilde{b}_k)})\right) = \tilde{b}_k(1 - \tilde{p}_{k+1,L_k}) + (\tilde{b}_k + \tilde{D}_k) \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k} \\ &= \tilde{b}_k + \tilde{D}_k \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \mathbf{1}_{L_k(\tilde{a}_k)})\right) = \tilde{a}_k(1 - \tilde{p}_{k+1,L_k}) + (\tilde{a}_k - \tilde{D}_k) \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k} \\ &= \tilde{a}_k - \tilde{D}_k \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k} \end{aligned}$$

□

Do lema 12, seguem os corolários 4, 5 e o lema 13.

Corolário 4 $\mathbb{E}(\tilde{D}_{k+1} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \tilde{D}_k (1 + 2 \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k})$

Demonstração:

$$\mathbb{E}(\tilde{D}_{k+1} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \mathbb{E}(X_{\tilde{b}_{k+1}} - X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \mathbb{E}(X_{\tilde{b}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) - \mathbb{E}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) =$$

$$\tilde{b}_k + \tilde{D}_k \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k} - (\tilde{a}_k - \tilde{D}_k \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k}) = \tilde{D}_k (1 + 2 \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k})$$

□

Corolário 5 Para todo $k \geq 2$, $\mathbb{E}(\tilde{D}_k) < 3^{k-1} D_1$

Demonstração: Do corolário 4, tem-se que

$$\mathbb{E}(\tilde{D}_{k+1}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\tilde{D}_{k+1} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k)\right) = \mathbb{E}(\tilde{D}_k) (1 + 2 \cdot \tilde{p}_{k+1,L_k}) \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(\tilde{D}_k) = D_1 (1 + 2 \cdot \tilde{p}_{2,L_2}) (1 + 2 \cdot \tilde{p}_{3,L_3}) \dots (1 + 2 \cdot \tilde{p}_{k,L_k}) < 3^{k-1} D_1$$

□

Lema 13 Se $t_{k+1} = o\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-2\lambda p_{k+1, k+1} \tilde{D}_k}) = 1$.

Demonstração: Da desigualdade de Jensen e do corolário 5, segue-se que:

$$\mathbb{E}(e^{-2\lambda p_{k+1, k+1} \tilde{D}_k}) \geq e^{\mathbb{E}(-2\lambda p_{k+1, k+1} \tilde{D}_k)} = e^{-2\lambda p_{k+1, k+1} \mathbb{E}(\tilde{D}_k)} \geq e^{-2\lambda p_{k+1, k+1} 3^{k-1} D_1} =$$

$$e^{-2\lambda(1-e^{-\lambda t_{k+1}})3^{k-1} D_1} \geq e^{-2\lambda \lambda t_{k+1} 3^{k-1} D_1} \Rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-2\lambda p_{k+1, k+1} \tilde{D}_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-2\lambda \lambda t_{k+1} 3^{k-1} D_1} = 1.$$

□

Lema 14 A probabilidade de coalescência, condicionada nas posições de \tilde{a}_k e \tilde{b}_k , é limitada por baixo em $e^{-2\lambda p_{k+1, k+1} \tilde{D}_k}$.

Demonstração: Sejam $X_{\tilde{a}_{k+1}} = x$ e ξ_{k+1}^1 o ponto à direita mais próximo de x e do tipo $k+1$. Tem-se então que,

▷ Se $X_{\tilde{a}_{k+1}} = x < \tilde{a}_k - \delta(k)$, tem-se que:

$$\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) = \mathbb{P}_{\tilde{d}}(\xi_{k+1}^1 - x \geq 2\tilde{b}_k - 2x | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) \geq$$

$$\mathbb{P}_{\tilde{d}}(\xi_{k+1}^1 - x \geq 2\tilde{b}_k - 2x | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) \geq \mathbb{P}_{\tilde{d}}(N(2\tilde{a}_k - x, 2\tilde{b}_k - x) = 0) = e^{-2\lambda p_{k+1, k+1} \tilde{D}_k} \quad (2.11)$$

▷ Se $\tilde{a}_k + \delta(k) < X_{\tilde{a}_{k+1}} = x < \tilde{b}_k - \delta(k)$, então

$$\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) = \mathbb{P}_{\tilde{d}}(\xi_{k+1}^1 - x \geq 2\tilde{b}_k - 2x | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) \geq$$

$$\mathbb{P}_{\tilde{d}}(\xi_{k+1}^1 - x \geq 2\tilde{b}_k - 2x | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) = e^{-\lambda p_{k, k+1} (2\tilde{b}_k - 2x)} \geq e^{-\lambda p_{k+1, k+1} (2\tilde{b}_k - 2\tilde{a}_k)} \quad (2.12)$$

▷ Se $X_{\tilde{a}_{k+1}} = x > \tilde{b}_k + \delta(k)$, segue-se que

$$\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) = 1 \quad (2.13)$$

De (2.11), (2.12) e (2.13) segue o resultado.

□

Lema 15 Se $t_{k+1} = o\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0) = 1$.

Demonstração: O resultado é obtido a partir dos lemas 13 e 14, pois

$$\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, X_{\tilde{a}_{k+1}})) =$$

$$\int_{-\infty}^{\tilde{a}_k - \delta(k)} f_{X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k}(x) \mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) dx + \int_{\tilde{a}_k + \delta(k)}^{\tilde{b}_k - \delta(k)} f_{X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k}(x) \mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) dx +$$

$$\int_{\tilde{b}_k + \delta(k)}^{\infty} f_{X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k}(x) \mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, x) dx$$

$$\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) \geq \mathbb{P}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k \leq \tilde{a}_k - \delta(k)) e^{-2\lambda p_{k,k+1} \tilde{D}_k} +$$

$$\mathbb{P}(\tilde{a}_k + \delta(k) \leq X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k \leq \tilde{b}_k - \delta(k)) e^{-2\lambda p_{k,k+1} \tilde{D}_k} + \mathbb{P}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k \geq \tilde{b}_k + \delta(k)) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) \geq \mathbb{P}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k \leq \tilde{a}_k - \delta(k)) e^{-2\lambda p_{k,k+1} \tilde{D}_k} +$$

$$\mathbb{P}(\tilde{a}_k + \delta(k) \leq X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k \leq \tilde{b}_k - \delta(k)) e^{-2\lambda p_{k,k+1} \tilde{D}_k} + \mathbb{P}(X_{\tilde{a}_{k+1}} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k \geq \tilde{b}_k + \delta(k)) e^{-2\lambda p_{k,k+1} \tilde{D}_k} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0 | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) \geq e^{-2\lambda p_{k,k+1} \tilde{D}_k} \Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0) = \mathbb{E} \left(e^{-2\lambda p_{k,k+1} \tilde{D}_k} \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tilde{D}_{k+1} = 0) = 1 \quad (2.14)$$

□

Teorema 5 *Seja X_0 um processo pontual de Poisson de taxa λ e t_k uma sequência determinística tal que $t_{k+1} = o\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 0$. Nestas condições, o algoritmo \mathbb{B} gera uma APUF quase certamente.*

Demonstração: De (2.14) e da relação dada no corolário 3, segue-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_{k+1} = 0) = 1$$

□

Capítulo 3

APUF - Processo de Poisson Definido em \mathbb{R}^d .

Neste capítulo, construiremos um grafo conexo, sem ciclos e de único fim, cujos vértices são pontos de um único processo pontual de Poisson X_0 de taxa λ definido em \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. O algoritmo de construção do grafo, será o mesmo descrito na definição 4, i.e., o algoritmo \mathbb{B} .

Tal grafo foi construído, de maneira invariante por translações, em [4], para pontos de um processo de Poisson estacionário quando ele é definido em $S \subset \mathbb{R}^d$, para $d \leq 3$ e para $d \geq 4$ o grafo resultante tinha infinitas componentes conexas, uma floresta. Em [5] uma árvore de único fim, invariante por qualquer isometria foi construída para qualquer processo de Poisson d -dimensional. Em [1] é estabelecido um emagrecimento independente e invariante por translações por meio de uma função determinística de um processo de Poisson definido em \mathbb{R} de taxa λ_1 em um outro processo de Poisson também definido em \mathbb{R} de taxa λ_2 , tal que $\lambda_1 > \lambda_2$.

Sejam a_1 e b_1 dois pontos do tipo 1, e sem perda de generalidade, consideremos a_1 como sendo a origem dos pontos do processo pontual de Poisson X_0 de taxa λ . Para todo $k \geq 2$, defina: ξ_k o ponto de X_0 do tipo k cuja distância à origem é mínima, em que denotamos tal distância por $r'_k = |\xi_k - a_1|$ e a_k o k -ésimo ancestral de a_1 . Notemos que necessariamente $\xi_2 = a_2$, mas que para $k \geq 3$, não necessariamente $\xi_k = a_k$. Entretanto, se soubermos as posições de ξ_2, \dots, ξ_k , poderemos determinar no máximo quão distante a_k está da origem a_1 .

Lema 16 Se $r_{2,\dots,k}^* := \max_{2 \leq l \leq k} r'_l$, então $|a_k - a_1| < 2^{k-1} r_{2,\dots,k}^*$

Demonstração: Considerando a configuração na qual os k -ésimos ancestrais de a_1 encontram-se nas posições antípodas dos respectivos pontos do tipo k mais próximos da origem, segue-se que

$$|a_k - a_{k-1}| \leq r'_k + r'_{k-1} + 2r'_{k-2} + 4r'_{k-3} + \dots + 2^{k-3} r'_2 \quad (3.1)$$

De (3.1), do fato de $|a_k - a_1| \leq \sum_{l=2}^k |a_l - a_{l-1}|$ e da definição de $r_{2,\dots,k}^*$ tem-se que:

$$|a_k - a_1| \leq 2^0 \cdot r'_k + 2^1 \cdot r'_{k-1} + \dots + 2^{k-2} \cdot r'_2 < 2^{k-1} r_{2,\dots,k}^*$$

□

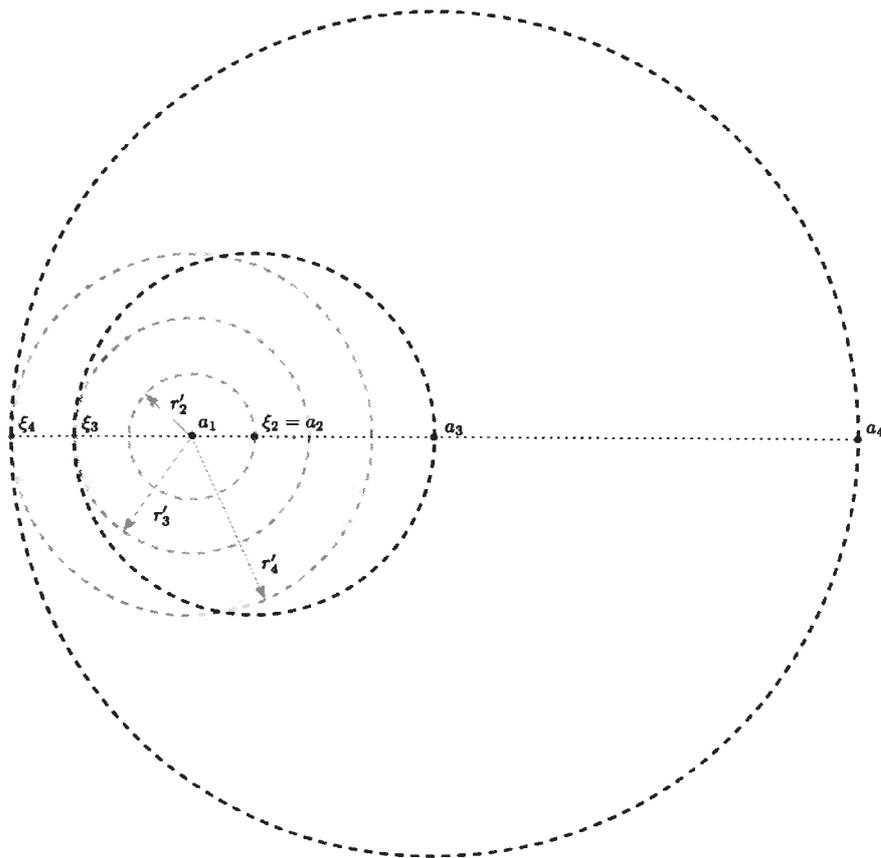


Figura 3.1: Posições relativas de distâncias máximas dos três primeiros ancestrais de a_1 , dada as posições dos pontos dos tipos 2, 3 e 4 mais próximos à origem.

Sejam $\mathcal{N}_k = \{\xi \in X_0 : \xi \text{ é do tipo } k\}$, $B(a_1, r_k)$ a bola centrada em a_1 de raio r_k e \tilde{p}_k tais que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_k \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) < \tilde{p}_k \quad (3.2)$$

Seria possível escolher r_k tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{p}_k < \infty$? A resposta é sim, e será obtida a partir de uma cota inferior da probabilidade de que exista ponto do tipo k em um hipercubo d -dimensional de lado $2t_k$, o qual denotaremos por \mathcal{H}_{2t_k} . Sejam $\mathcal{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k = \{\xi : \xi \in X_0\}$ o conjunto dos pontos do processo pontual de Poisson X_0 e os seguintes eventos:

- $A_k = \{\text{há dois pontos de } X_0 \text{ contidos em } \mathcal{H}_{2t_k}\}$;
- $B_k = \{\text{nenhum destes pontos dista menos que } t_{k+1} \text{ um do outro}\}$;
- $C_k = \{\text{não há pontos de } X_0 \text{ exteriores a } \mathcal{H}_{2t_k} \text{ a uma distância inferior a } t_{k+1} \text{ da fronteira de}\}$

\mathcal{H}_{2t_k} };

- $D_k = \{\text{existe } \xi \text{ do tipo } k \text{ pertencente ao hipercubo de lado } 2t_k\} = \{|\mathcal{N}_k \cap \mathcal{H}_{2t_k}| \geq 1\}$.

Tem-se portanto que para todo $k \geq 2$ os eventos A_k , B_k e C_k são tais que:

$$(A_k \cap B_k \cap C_k) \subset D_k \quad \text{e portanto} \quad \mathbb{P}(D_k) \geq \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B_k | A_k)\mathbb{P}(C_k | A_k \cap B_k). \quad (3.3)$$

Das propriedades do processo pontual de Poisson, segue-se que para $c_1(k, d) \rightarrow 2^{2d-1}\lambda^2$ e $c_2(k) \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &= \frac{e^{-\lambda(2t_k)^d} (\lambda(2t_k)^d)^2}{2!} \\ &= c_1(k, d)t_k^{2d}. \\ \mathbb{P}(B_k | A_k) &\geq \frac{(2t_k)^d - v_d(1)(t_{k+1})^d}{(2t_k)^d} \\ &= 1 - \frac{v_d(1)}{2} \cdot \frac{(t_{k+1})^d}{t_k^d} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_k | A_k \cap B_k) &= \mathbb{P}(C_k) \\ &\geq e^{-\lambda[(2t_k+2t_{k+1})^d - (2t_k)^d]} \\ &= c_2(k) \left(1 - \lambda \left[(2t_k + 2t_{k+1})^d - (2t_k)^d\right]\right) \end{aligned}$$

Logo, de (3.4) em (3.3) tem-se que para $c_3(k, d) \rightarrow 2^{2d-1}\lambda^2$

$$\mathbb{P}(D_k) = \mathbb{P}(|\mathcal{N}_k \cap \mathcal{H}_{2t_k}| \geq 1) \geq c_1(k, d) \cdot t_k^{2d} + o(t_k^{2d}) = c_3(k, d) \cdot t_k^{2d} = O(t_k^{2d}) \quad (3.5)$$

Seja $\mathcal{H}_{r_k}(a_1)$ um hipercubo d -dimensional centrado em a_1 de lado r_k e os dois conjuntos formados de hipercubos d -dimensionais de lado $2t_k$, $\mathcal{H}_{2t_k}^1$ e $\mathcal{H}_{2t_k}^2$, tais que:

1. $\mathcal{H}_{r_k}(a_1) = \mathcal{H}_{2t_k}^1 \cup \mathcal{H}_{2t_k}^2$;
2. Para quaisquer i e j , se $\mathcal{H}_{2t_k,i}^1$ e $\mathcal{H}_{2t_k,j}^1$ são respectivamente o i -ésimo e j -ésimo hipercubos pertencentes a $\mathcal{H}_{2t_k}^1$, tem-se que eles não apresentam nenhuma aresta comum.

Note que para todo $k \geq 1$ e quaisquer ξ e $\xi' \in X_0$, o seguinte fato é válido: ξ ser do tipo k , independe de pontos ξ' tais que $|\xi' - \xi| > t_k$. Ou seja, se considerarmos o evento $D_{k,1(i)} = \{\text{há ponto do tipo } k \text{ em } \mathcal{H}_{2t_k,i}^1\}$, tem-se que para todo $i \neq j$, $D_{k,1(i)}$ é independente de $D_{k,1(j)}$.

Segue-se que se não houver nenhum ponto do tipo k no interior de $B(a_1, r_k)$, então necessariamente nenhum dos hipercubos pertencentes a $\mathcal{H}_{2t_k}^1$ conterá tais pontos. Seja $c_4(k, d)$ a proporção de hipercubos do primeiro tipo, isto é,

$$c_4(k, d) = \frac{|\mathcal{H}_{2t_k}^1|}{|\mathcal{H}_{2t_k}^1 \cup \mathcal{H}_{2t_k}^2|} \geq \frac{1}{3^d} \quad (3.6)$$

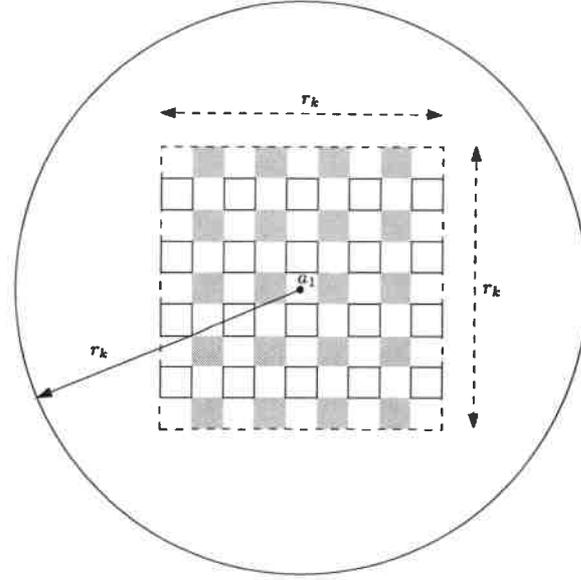


Figura 3.2: $\mathcal{H}_{2t_k}^1$ é o conjunto dos hipercubos hachurados contidos em $\mathcal{H}_{r_k}^d(a_1)$.

Tem-se portanto a partir de (3.5) que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\mathcal{N}_k \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) &\leq \left(1 - c_3(k, d)t_k^{2d}\right)^{|\mathcal{H}_{2t_k}^1|} \\
 &= \left(1 - c_3(k, d)t_k^{2d}\right)^{c_4(k, d)[r_k^d(2t_k)^{-d}]} \\
 &\leq \left(1 - c_3(k, d)t_k^{2d}\right)^{\frac{1}{3^d}[r_k^d(2t_k)^{-d}]} \\
 &= e^{\left[\frac{1}{6^d} \cdot \ln(1 - c_3(k, d)t_k^{2d})\right] \cdot [r_k^d t_k^{-d}]} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Do fato de $c_3(k, d) \rightarrow 2^{2d-1}\lambda^2$ e $t_k \rightarrow 0$, resulta que $c_3(k, d)t_k^{2d} \rightarrow 0$. Logo para $c_5(k) \rightarrow 1$ e $c_6(k, d) \rightarrow \frac{1}{6^d} \cdot 2^{2d-1}\lambda^2$, segue-se que:

$$\left(\frac{1}{6^d}\right) \ln\left(1 - c_3(k, d)t_k^{2d}\right) = \frac{1}{6^d} \left[-c_5(k) \cdot c_3(k, d)t_k^{2d}\right] = -c_6(k, d)t_k^{2d} \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), tem-se que

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_k \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) \leq e^{-c_6(k, d)[r_k^d t_k^d]} := \tilde{p}_k \tag{3.9}$$

Observação 12 O valor de t_2 pode ser escolhido tão pequeno quanto desejarmos, implicando portanto que para todo $k \geq 2$ $c_6(k, d) \in \left(\frac{1}{6^d} \cdot 2^{2d-1}\lambda^2 - \epsilon(t_2), \frac{1}{6^d} \cdot 2^{2d-1}\lambda^2 + \epsilon(t_2)\right)$, em que $\epsilon(t_2) \rightarrow 0$

quando $t_2 \rightarrow 0$.

Lema 17 Se r_k é fixado e $1 \leq m \leq k$, então a probabilidade de não termos ponto do tipo m em $B(a_1, r_k)$ é limitada superiormente por \tilde{p}_k , isto é,

$$\text{se } 1 \leq m \leq k, \text{ então } \mathbb{P}(\mathcal{N}_m \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) \leq \tilde{p}_k.$$

Demonstração: Para $m = 1$ ou $m = k$, o resultado segue das definições, pois:

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_1 \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) = 0 \leq \tilde{p}_k \quad \mathbb{P}(\mathcal{N}_k \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) \leq \tilde{p}_k$$

Para $2 \leq m \leq k-1$ observemos que o resultado segue a partir da observação (12) em que podemos obter \tilde{p}_m^* , uma cota superior para \tilde{p}_m , substituindo $c_6(m, d)$ por $c_6^*(m, d) = \frac{1}{6^d} \cdot \lambda^2 \cdot 2^{2d-1} - \epsilon(t_2)$ em (3.9), obtendo então $\tilde{p}_m < \tilde{p}_m^*$. Acontece que \tilde{p}_m^* pode ainda ser tornada inferior a \tilde{p}_k , pelo fato de a sequência $(t_k)_{k \geq 1}$ ser decrescente e podermos escolhê-la de modo que tenhamos $\tilde{p}_m^* < \tilde{p}_k$. \square

Corolário 6 Seja r_k fixado, a probabilidade de que não exista algum ponto do tipo $l : l \in \{1, \dots, k\}$ em $B(a_1, r_k)$, é limitada superiormente por $k \cdot \tilde{p}_k$.

Demonstração: Tem-se que

$$\mathbb{P}(\exists l \leq k : \mathcal{N}_l \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{l=1}^k \mathcal{N}_l \cap B(a_1, r_k) = \emptyset\right) \leq \sum_{l=1}^k \mathbb{P}(\mathcal{N}_l \cap B(a_1, r_k) = \emptyset) \leq k \cdot \tilde{p}_k.$$

\square

Proposição 5 (Densidade de pontos do tipo k (λp_k)) Seja X_0 um processo pontual de Poisson de taxa λ e $v_d(1)$ o volume da bola d -dimensional de raio unitário. A densidade de pontos do tipo k é λp_k , em que para $c = \lambda v_d(1)$, p_k é dado por:

$$\begin{aligned} p_k &:= \left[e^{-c \cdot t_{k+1}^d} \right] \left[1 - e^{-c \cdot [t_k^d - t_{k+1}^d]} \right] \\ &= e^{-c \cdot t_{k+1}^d} - e^{-c \cdot t_k^d} \\ &= c \cdot t_k^d + o(t_k^d) - c \cdot t_{k+1}^d + o(t_{k+1}^d) \\ &= \lambda v_d(1) \cdot t_k^d + o(t_k^d) = O(t_k^d). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observação 13 De (3.10) e da definição da sequência $(t_k)_{k \geq 1}$, seguem-se que:

1. A densidade de pontos do tipo k é decrescente em k ;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, pois representa a soma das proporções de todos os tipos de pontos de X_0 . Ou diretamente da definição, tem-se também:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j p_k &= \left(e^{-c \cdot (t_2)^d} - e^{-c \cdot (t_1)^d} \right) + \left(e^{-c \cdot (t_3)^d} - e^{-c \cdot (t_2)^d} \right) + \dots + \left(e^{-c \cdot (t_{j+1})^d} - e^{-c \cdot (t_j)^d} \right) \\ &= e^{-c \cdot (t_{j+1})^d} \quad \text{e isto implica que} \\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j p_k = \lim_{j \rightarrow \infty} e^{-c \cdot (t_{j+1})^d} = 1. \end{aligned}$$

Teorema 6 Se $r_k^d = \frac{1}{c_6(k,d)} \cdot \ln(k^3) \cdot t_k^{-d} e^{\frac{t_{k+1}}{t_k}} = [2^k \cdot 2^{2kd} \cdot \ln^2((k+1)^3)]^{-1}$, então existe $n_0 = n_0(\omega)$ tal que para todo $k \geq n_0$, $B(a_1, r_k)$ contém quase certamente os pontos do tipo $1, \dots, k$ e não contém ponto do tipo $k+1$.

Demonstração: Do corolário 6 e da definição de \bar{p}_k dada em (3.9), tem-se que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{l=1}^k \mathcal{N}_l \cap B(a_1, r_k) = \emptyset \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{p}_k = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\ln(k^3)} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pelo lema de Borel-Cantelli, segue-se que existe $n'_0 = n'_0(\omega)$ tal que para todo $k \geq n'_0$, a bola de raio r_k contém de maneira quase certa todos os pontos do tipo 1 ao k , ou seja

$$\mathcal{N}_1 \cap B(a_1, r_k) \neq \emptyset, \dots, \mathcal{N}_k \cap B(a_1, r_k) \neq \emptyset \quad (3.11)$$

Da desigualdade de Markov e de (3.10), segue-se para $c_7(k) \rightarrow 1$, $c_8(k, d) \rightarrow (\lambda v_d(1))^2$ e $c_9(k, d) \rightarrow 3^d 2^{1-d} (v_d(1))^2$ que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, r_k)| \geq 1) &\leq \frac{\mathbf{E}(|\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, r_k)|)}{1} \\ &= O(\lambda \cdot p_{k+1} \cdot |B(a_1, r_k)|) \\ &= c_7(k) \cdot \lambda \cdot p_{k+1} \cdot |B(a_1, r_k)| \\ &= c_8(k, d) \cdot (r_k)^d \cdot (t_{k+1})^d \\ &= c_9(k, d) \cdot \ln(k^3) \left[\frac{t_{k+1}}{t_k} \right]^d \\ &< c_9(k, d) \cdot \ln(k^3) \cdot [2^k \cdot 2^{2kd} \cdot \ln^2((k+1)^3)]^{-1} \\ &< \frac{c_9(k, d)}{2^k} \quad \text{donde segue-se que} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, r_k)| \geq 1) &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_9(k, d)}{2^k} < \infty \quad (3.12) \end{aligned}$$

De (3.12), o lema de Borel-Cantelli nos assegura que existe $n_0'' = n_0''(\omega)$ tal que para todo $k \geq n_0''$ não existe ponto do tipo $k + 1$ em $B(a_1, r_k)$, isto é,

$$\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, r_k) = \emptyset. \quad (3.13)$$

O teorema segue então de (3.11) e (3.13) tomando $n_0 = \max \{n_0', n_0''\}$. \square

Teorema 7 *Sejam $R_k = 2^{k-1} \cdot r_k$ e $(t_k)_{k \geq 1}$ nas condições do teorema 6, então existe $n_1 = n_1(\omega)$ tal que para todo $k \geq n_1$.*

1. $|a_k - a_1| \leq R_k;$

2. $\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, R_k) = \emptyset.$

Demonstração: 1) Do lema 16 tem-se que $|a_k - a_1| < 2^{k-1} r_{2, \dots, k}^*$. Desde que para $k \geq n_0$, $B(a_1, r_k)$ contém pontos do tipo $1, \dots, k$; isto implica que $r_{2, \dots, k}^* \leq r_k$, e portanto

$$|a_k - a_1| < 2^{k-1} \cdot r_{2, \dots, k}^* \leq 2^{k-1} \cdot r_k$$

2) Tem-se para $c_{10}(k) \rightarrow 1$, $c_{11}(k, d) \rightarrow (\lambda v_d(1))^2$ e $c_{12}(k, d) \rightarrow 3^d 2^{1-d} (v_d(1))^2$ que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, 2^{k-1} r_k)| \geq 1) &\leq \mathbb{E}(|\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, 2^{k-1} r_k)|) \\ &= O\left(\lambda \cdot p_{k+1} \cdot |B(a_1, 2^{k-1} r_k)|\right) \\ &= c_{10}(k) \cdot \lambda \cdot p_{k+1} \cdot |B(a_1, 2^{k-1} r_k)| \\ &= c_{11}(k, d) 2^{(k-1)d} (r_k)^d (t_{k+1})^d \\ &= c_{12}(k, d) 2^{(k-1)d} \ln(k^3) \left[\frac{t_{k+1}}{t_k}\right]^d \\ &< c_{12}(k, d) 2^{(k-1)d} \ln(k^3) \left[2^k \cdot 2^{2kd} \cdot \ln^2((k+1)^3)\right]^{-1} \\ &< c_{12}(k, d) \frac{1}{2^k} \quad \text{donde resulta que} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, 2^{k-1} r_k)| \geq 1) &< \sum_{k=1}^{\infty} c_{12}(k, d) \frac{1}{2^k} < \infty. \quad (3.14) \end{aligned}$$

De (3.14), o lema de Borel-Cantelli nos assegura que existe $n_1 = n_1(\omega)$ tal que para todo $k \geq n_1$ não existe ponto do tipo $k + 1$ em $B(a_1, 2^{k-1} r_k)$, isto é,

$$\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, 2^{k-1} r_k) = \emptyset. \quad (3.15)$$

Observação 14 *Se $(t_k)_{k \geq 1}$ satisfaz às condições do teorema 6, então para $D_1 = |b_1 - a_1| \in \mathbb{R}$,*

tem-se que existe $n_2 = n_2(\omega)$, tal que para todo $k \geq n_2$,

$$\mathcal{N}_{k+1} \cap B(a_1, 2^{k-1}r_k + D_1) = \emptyset.$$

Lema 18 *Sejam $C > 0$ e $\mathcal{N}_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(Ct_k) = \{\zeta_1, \zeta_2 \text{ e } \zeta_3 \in X_0 : |\zeta_1 - \zeta_2| + |\zeta_1 - \zeta_3| + |\zeta_2 - \zeta_3| \leq Ct_k\}$, então existe n_0''' tal que para $k \geq n_0'''$ $B(a_1, R_k) \cap \mathcal{N}_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(Ct_k) = \emptyset$ quase certamente.*

Demonstração: Se $N(B(a_1, R_k), \mathcal{H}_{t_k})$ é o número de hipercubos de lado t_k contidos em $B(a_1, R_k)$, então tem-se que

$$N(B(a_1, R_k), \mathcal{H}_{t_k}) = c_{13}(k, d) \frac{R_k^d}{t_k^d} \quad \text{em que } c_{13}(k, d) \rightarrow v_d(1).$$

Seja $\mathcal{H}_{t_k, i} \cap B(a_1, R_k)$ o i -ésimo hipercubo de lado t_k contido em $B(a_1, R_k)$. Desde que a distância entre três pontos de X_0 não seja superior a Ct_k , então necessariamente teremos estes pontos em \mathcal{H}_{Ct_k} . Tem-se que a probabilidade de que exista pelo menos um ponto da tríade de pontos cuja soma das distâncias entre eles é não superior a Ct_k em $\mathcal{H}_{t_k, i}$ é tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(Ct_k) \cap \mathcal{H}_{t_k, i}| \geq 1) &< \left(1 - e^{-\lambda(Ct_k)^d}\right) \frac{e^{-\lambda(Ct_k)^d} \lambda^2 (Ct_k)^{2d}}{2!} \\ &< \lambda(Ct_k)^d \cdot \frac{\lambda^2 C^{2d}}{2!} t_k^{2d} \\ &< \lambda^3 C^{3d} t_k^{3d} \end{aligned}$$

Seguem-se da desigualdade de Bonferroni para $c_{14}(k, d) = c_{13}(k, d) \cdot \lambda^3 C^{3d} \rightarrow v_d(1) \lambda^3 C^{3d}$ e das definições de $(t_k)_{k \geq 1}$ e R_k dadas nos teoremas 6 e 7 que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(Ct_k) \cap B(a_1, R_k)| \geq 1) &\leq c_{14} \frac{R_k^d}{t_k^d} t_k^{3d} \\ &= c_{14}(k, d) R_k^d t_k^{2d} \\ &= c_{14}(k, d) (R_k t_k)^d t_k^d \ll \frac{c_{14}(k, d)}{2^k}, \text{ e portanto,} \\ &\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}(Ct_k) \cap B(a_1, R_k)| \geq 1) < \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De (3.16) o lema de Borel-Cantelli nos assegura que existe $n_0''' = n_0'''(\omega)$ tal que para todo $k \geq n_0'''$ $B(a_1, R_k)$ não contém tríades de pontos cujas somas das distâncias sejam inferiores a Ct_k . \square

Pode-se estabelecer uma cota superior para a probabilidade de que haja ponto do tipo k em \mathcal{H}_{2t_k} , isto é, num hipercubo d -dimensional de lado $2t_k$. Para tanto, consideremos a variável aleatória N que representa o número de pontos de X_0 em \mathcal{H}_{2t_k} ; ou seja, $N = |\mathcal{N} \cap \mathcal{H}_{2t_k}|$, e para cada valor

assumido por N , exibiremos uma condição necessária que maximiza a probabilidade de existência de ponto do tipo k em \mathcal{H}_{2t_k} .

Teorema 8 Se $\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}}$ é o indicador da existência de ponto do tipo k em \mathcal{H}_{2t_k} , então para $c_{15}(k, d) \rightarrow 2^{2d-1}\lambda^2 + 2^d\lambda$

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1) = \mathbb{P}(|\mathcal{N}_k \cap \mathcal{H}_{2t_k}| \geq 1) \leq c_{15}(k, d) \cdot t_k^{2d} \quad (3.17)$$

Demonstração: $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1)$ pode ser estimada a partir do condicionamento em N , pois:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = i) \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = i) \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = i) \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \mathbb{P}(N = i) \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = i) + \sum_{i=3}^{\infty} \mathbb{P}(N = i) \\ &< \sum_{i=1}^2 \mathbb{P}(N = i) \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = i) + \sum_{i=3}^{\infty} (\lambda(2t_k)^d)^i \\ &= \sum_{i=1}^2 \mathbb{P}(N = i) \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = i) + o(t_k^{2d}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Acontece que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = 2) &= e^{-\lambda(2t_k)^d} \frac{(\lambda(2t_k)^d)^2}{2!} = O(t_k^{2d}) \\ \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = 2) &\leq \frac{\lambda v_d(1)(t_k)^d - \lambda v_d(1)(t_{k+1})^d}{\lambda v_d(1)(t_k)^d} = 1 - \frac{(t_{k+1})^d}{(t_k)^d} \end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.19) segue-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = 2) \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = 2) &\leq O(t_k^{2d}) - O(t_k^{2d}) \cdot \frac{(t_{k+1})^d}{(t_k)^d} \\ &= O(t_k^{2d}) - o(t_k^{2d}) = O(t_k^{2d}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

De maneira quase análoga, obtém-se que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = 1) &= e^{-\lambda(2t_k)^d} \left(\lambda(2t_k)^d \right) = O(t_k^d) \\ \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = 1) &\leq 1 - e^{-\lambda v_d(1)[t_k^d - (t_{k+1})^d]} = O(t_k^d)\end{aligned}\tag{3.21}$$

De (3.21) tem-se que:

$$\mathbb{P}(N = 1)\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\zeta_k, \mathcal{H}_{2t_k}} = 1 \mid N = 1) \leq O(t_k^d) \cdot O(t_k^d) = O(t_k^{2d})\tag{3.22}$$

O resultado estabelecido em (3.17) é obtido de (3.20) e (3.22) em (3.18). \square

Para qualquer região \mathcal{R} que possa ser particionada em i regiões \mathcal{R}_i , pela desigualdade de Bonferroni tem-se que

$$\mathbb{P}(|\mathcal{N}_k \cap \mathcal{R}| \geq 1) \leq \sum_{j=1}^i \mathbb{P}(|\mathcal{N}_k \cap \mathcal{R}_j| \geq 1)\tag{3.23}$$

Se para todo $j \in \{1, \dots, i\}$ tivermos $\mathcal{R}_j = \mathcal{H}_{2t_k}$ e desde que a probabilidade de existir ponto do tipo k num hipercubo de lado $2t_k$ é $O(t_k^{2d})$, então neste caso (3.23) é limitada superiormente por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\mathcal{N}_k \cap \mathcal{R}| \geq 1) &\leq \frac{|\mathcal{R}|}{|v|} \cdot \mathbb{P}(|\mathcal{N}_k \cap \mathcal{R}_1| \geq 1) = \frac{|\mathcal{R}|}{2^d t_k^d} \cdot c_{15}(k, d) t_k^{2d} \\ &= c_{16}(k, d) \cdot \left(|\mathcal{R}| \cdot t_k^d \right) \quad \text{em que } c_{16}(k, d) \rightarrow 2^{d-1} \lambda^2 + \lambda.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Observação 15 *A cota superior da probabilidade de existência de pontos do tipo k em uma região \mathcal{R} obtida em (3.24) “coincide”, isto é, tem a mesma ordem de grandeza, da estimativa usada nos teoremas 6 e 7. Temos a partir da “discretização” de uma região \mathcal{R} e do uso de (3.17), uma segunda forma de obter os resultados de tais teoremas.*

Mesmo que a região \mathcal{R} não seja semelhante a \mathcal{H}_{2t_k} , por exemplo: uma hiperesfera ou um “hiperanel”, ainda assim teremos que a estimativa dada em (3.24) é correta, a menos de constantes que convergem para um valor que depende apenas da dimensão, uma vez que o número de hipercubos que interceptam a fronteira de \mathcal{R} é um infinitésimo de ordem inferior aos que estão em seu interior. Ademais, como estamos interessados em uma cota superior para o valor esperado do número de pontos de determinado tipo no interior de \mathcal{R} , podemos ainda considerar uma região \mathcal{R}' que contém \mathcal{R} que nos seja mais “conveniente”, isto é, que nos facilite expressar explicitamente para qual valor que depende tão somente da dimensão d ou eventualmente de d e λ , a sequência de constantes converge.

Lema 19 *Existe $n_3 = n_3(\omega)$ tal que para todo $k \geq n_3$, $D_k := |b_k - a_k| \leq 2R_k + D_1$.*

Demonstração: Do teorema 7 tem-se que existe $n_1 = n_1(\omega)$ e $n'_1 = n'_1(\omega)$ tal que para todo $k \geq n_3 = \max\{n_1, n'_1\}$ $|a_k - a_1| \leq R_k$ e $|b_k - b_1| \leq R_k$. Isto implica o resultado, pois.

$$\begin{aligned} D_k = |b_k - a_k| &= |b_k - b_1 - a_k + a_1 + b_1 - a_1| \leq |b_k - b_1| + |-(a_k - a_1)| + |b_1 - a_1| \\ &\leq R_k + R_k + D_1 = 2R_k + D_1 \end{aligned}$$

□

Observação 16 Nas condições do lema 19, com ξ_k e $\xi_k^{(2)}$ respectivamente o primeiro e segundo ponto mais próximos de a_1 do tipo k , vemos da figura 3.9 que $|\xi_{k+1} - a_k| \leq R_{k+1} + R_k$. Se a diferença das distâncias em relação a a_1 entre ξ_{k+1} e $\xi_{k+1}^{(2)}$ for maior que $2R_k$, então teremos necessariamente que $|\xi_{k+1}^{(2)} - a_k| > R_{k+1} + R_k$, e portanto o ponto do tipo $k+1$ mais próximo a origem, é também o $(k+1)$ -ésimo ancestral de a_1 . Ou seja,

$$\text{se } \left| |\xi_{k+1}^{(2)} - a_1| - |\xi_{k+1} - a_1| \right| > 2 \cdot R_k, \quad \text{então } \xi_{k+1} = a_{k+1} \quad (3.25)$$

De maneira análoga obtemos que

$$\text{se } \left| |\xi_{k+1}^{(2)} - a_1| - |\xi_{k+1} - a_1| \right| > 2 \cdot R_k + 2D_1, \quad \text{então } \xi_{k+1} = a_{k+1} = b_{k+1} \quad (3.26)$$

Considere a seguinte sequência de hiperesferas centradas em a_1 , em que $R_{k+1} \gg R_k$:

$$B(a_1, 2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}), \quad B(a_1, 2 \cdot (2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})), \quad \dots, \quad B(a_1, R_{k+1}) \quad (3.27)$$

A partir das hiperesferas dadas em (3.27), defina os seguintes "hiperanéis" de "diâmetro" $2 \cdot (2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})$ para todo $i \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor\right\}$.

$$A_i = B(a_1, (i+1) \cdot (2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})) \setminus B(a_1, i \cdot (2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})) \quad (3.28)$$

Estes "hiperanéis" apresentam volumes crescentes à medida que se distanciam da origem a_1 , sendo que cada um deles tem volume menor que o "hiperanel" centrado em a_1 de raios R_{k+1} e $R_{k+1} + 2(2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})$, o qual denotaremos por $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1} + 2(2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})}^*$.

Definição 5 Para todo $i \in \mathbb{N}^*$, diremos que os pontos $\zeta_k^{i'}$ e $\zeta_k^{i''}$ "pertencem ao mesmo par" se $|\zeta_k^{i'} - \zeta_k^{i''}| \leq t_k$.

A partir da definição 5, segue-se que $\zeta_k^{i''}$ é do tipo $j \geq k$; e à medida que k cresce, tão mais provável de ser do tipo k , ou seja,

1. $\zeta_k^{i''} \in \mathcal{N}_j$ em que $j \geq k$;

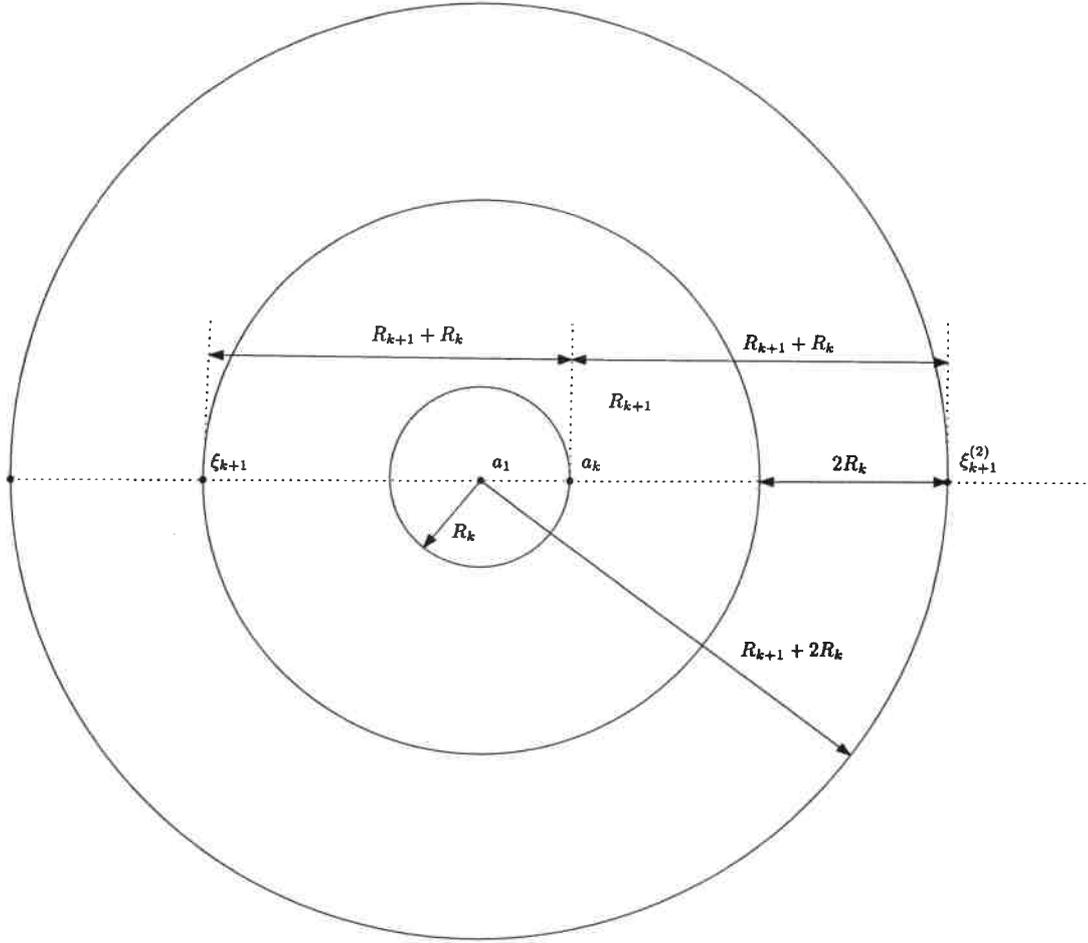


Figura 3.3: Respectivas posições relativas para distância máxima e mínima de ξ_{k+1} e $\xi_{k+1}^{(2)}$ em relação a a_k sob à condição $|\xi_{k+1}^{(2)} - a_1| - |\xi_{k+1} - a_1| > 2R_k$.

$$2. \mathbb{P}(\zeta^{i''} \in \mathcal{N}_k \mid \zeta_k^{i'} \in \mathcal{N}_k) > e^{-\lambda v_d(1)t_k^d}.$$

3. Para todo $k \geq n_0'''$, se $\{\zeta_k^{i'}, \zeta_k^{i''}\} \subset B(a_1, R_k)$, então o lema 18 nos garante que quase certamente $\zeta_k^{i''} \in \mathcal{N}_k$.

Definição 6 Definiremos a distância entre dois pares de pontos em que pelo menos um dos pontos de cada par é do tipo k , $(\zeta_k^{i'}, \zeta_k^{i''})$ e $(\zeta_k^{j'}, \zeta_k^{j''})$, como a mínima das distâncias de cada um dos pontos de um dos pares em relação aos pontos do outro par. Isto é

$$\mathcal{D}_{(\zeta_k^{i'}, \zeta_k^{i''}), (\zeta_k^{j'}, \zeta_k^{j''})} := \min \left\{ |\zeta^i - \zeta^j| : (\zeta^i, \zeta^j) \in \{\zeta_k^{i'}, \zeta_k^{i''}\} \times \{\zeta_k^{j'}, \zeta_k^{j''}\} \right\}.$$

Observação 17 Salvo menção em contrário, quando nos referirmos a dois pontos ζ_k^i e ζ_k^j do tipo k , estaremos sempre considerando que eles não pertencem ao “mesmo par”, ou seja, $|\zeta_k^i - \zeta_k^j| > t_k$.

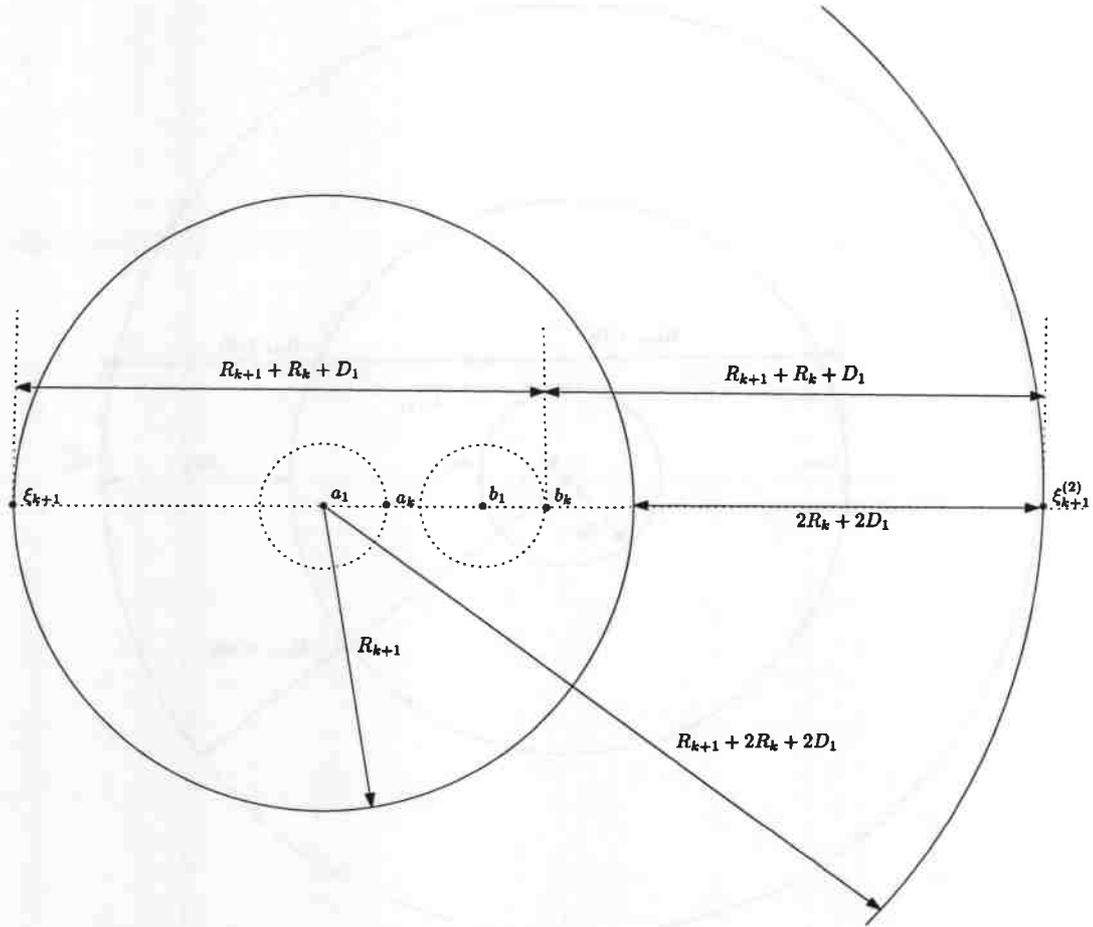


Figura 3.4: Respectivas posições relativas para distância máxima e mínima de ξ_{k+1} e $\xi_{k+1}^{(2)}$ em relação a b_k sob à condição $\left| |\xi_{k+1}^{(2)} - a_1| - |\xi_{k+1} - a_1| \right| > 2R_k + 2D_1$.

Também ao escrevermos par de pontos em que pelo menos um ponto do par é do tipo k , estaremos sempre considerando que são pontos pertencentes ao mesmo par, isto é, a distância entre eles é não superior a t_k . Além disso, do item 3 segue-se que para $k \geq n_0'''$, se houver um par de pontos em $B(a_1, R_k)$, em que pelo menos um deles é do tipo k , então os dois pontos serão do tipo k quase certamente.

Da figura 3.5 vemos que se nenhum dos hiperanéis \mathcal{A}_i contiver dois ou mais pares de pontos em que pelo menos um dos pontos de cada par seja do tipo $k+1$, então a distância entre quaisquer dois pontos do tipo $k+1$ em $B(a_1, R_{k+1})$ é superior $2R_k + 2D_1$.

Sejam $\mathbb{1}_{\mathcal{R},k}$ o indicador da existência de dois pares de pontos na região \mathcal{R} em que pelo menos um dos pontos de cada par é do tipo k e g_k a probabilidade de que haja dois pares de pontos em $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^*$ tais que em cada par pelo menos um dos pontos seja do tipo k .

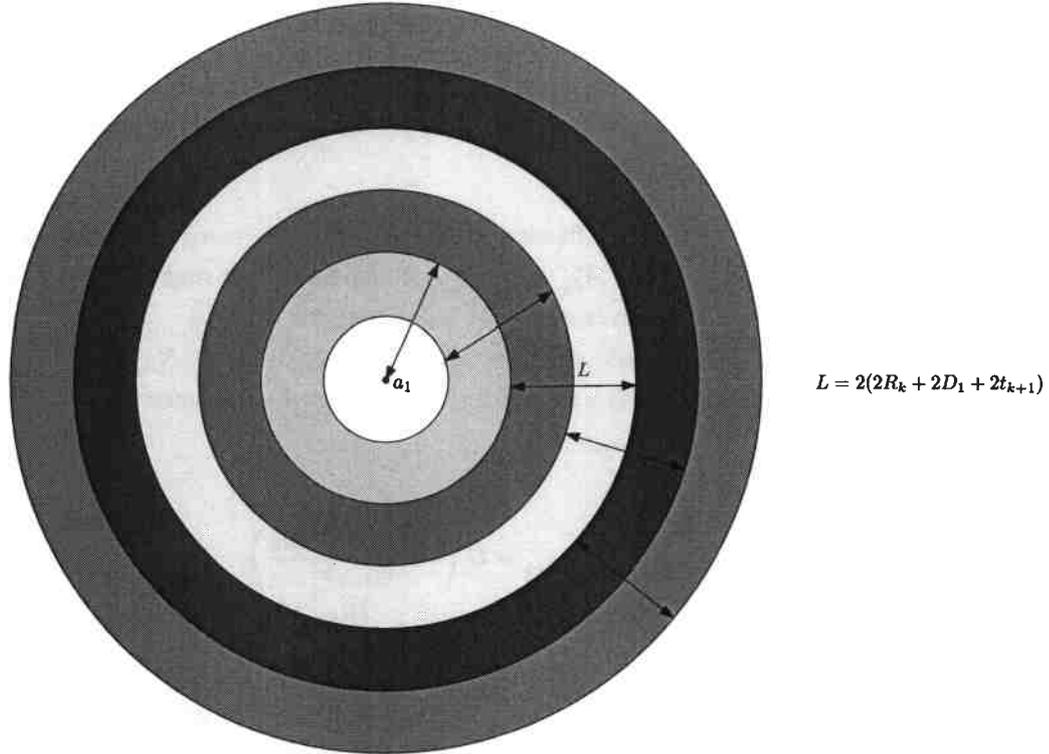


Figura 3.5: Cada seta duplamente orientada corresponde ao “diâmetro” de cada um dos “hiperanelis”, cujas interseções são hachuradas e tem comprimento $2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}$.

$$g(k) := \mathbb{P} \left(\mathbf{1}_{\mathcal{A}_{[R_{k+1}, R_{k+1} + 2(2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})]}^*}^{k+1} = 1 \right) \quad (3.29)$$

A probabilidade de que haja dois pares de pontos do tipo $k+1$ em que pelo menos um dos pontos de cada par é do tipo $k+1$ em algum “hiperanel” \mathcal{A}_i , $i \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor \right\}$ é então limitada superiormente por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\exists i \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor \right\} : \mathbf{1}_{\mathcal{A}_{i,k+1}} = 1 \right) &\leq \left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor \cdot g(k+1) \\ &< \frac{R_{k+1}}{R_k} \cdot g(k+1) \end{aligned} \quad (3.30)$$

A fim de estimarmos uma cota superior para $g(k+1)$, consideremos uma partição do “hiperanel” de raio interno R_{k+1} e raio externo $R_{k+1} + 2 \cdot (2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})$ em hipercubos de lados $4t_{k+1}$ e as duas possíveis configurações relacionadas às distâncias entre os dois pares de pontos em que pelo menos um dos pontos de cada par é do tipo $k+1$ em $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1} + 2(2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1})}^*$; isto é, as configurações em que os pares de pontos distam até $4t_{k+1}$ “pares próximos” e aquelas nas quais os

dois pares de pontos estão distantes mais que $4t_{k+1}$, “pares distantes”.

Observação 18 *Escreveremos somente “pares próximos” (“pares distantes”) para indicar a existência de dois pares de pontos em que pelo menos um dos pontos de cada par é do tipo $k+1$ em cada uma das configurações acima especificadas.*

Note que para qualquer valor de D_1 fixado inicialmente, existe $n_4 = n_4(\omega)$ tal que $R_k > 2D_1 + 2t_{k+1}$ para todo $k \geq n_4$. Seja então $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*$ o “hiperanel” de raios R_{k+1} e $R_{k+1} + 6R_k$ centrado em a_1 . O número de hipercubos de lado $4t_{k+1}$ contidos em $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^*$ é obviamente menor que a quantidade deles em $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*$. Sejam $N_{\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*; 4t_{k+1}}$ a quantidade destes hipercubos e $s_{d-1}(1)$ a superfície da hipersfera $d-1$ dimensional de raio unitário. Tem-se para $c_{17}(k, d) \rightarrow \frac{6}{4^d} \cdot s_{d-1}(1)$ que

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*; 4t_{k+1}} &= O\left(\frac{(R_{k+1})^{d-1} \cdot R_k}{(t_{k+1})^d}\right) \\ &= c_{17}(k, d) \cdot \frac{(R_{k+1})^{d-1} \cdot R_k}{(t_{k+1})^d} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Considere a partição do hiperanel $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*$ em hipercubos de lado $4t_{k+1}$, com $\mathcal{H}_{4t_{k+1}, i} \cap \mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*$ sendo o i -ésimo hipercubo de lado $4t_{k+1}$ contido em $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*$. Segue-se que a probabilidade de que haja algum ponto de X_0 no i -ésimo hipercubo é limitada superiormente por $\lambda(4t_{k+1})^d$, pois:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{H}_{4t_{k+1}, i} \cap X_0| \geq 1) &= 1 - e^{-\lambda(4t_{k+1})^d} \\ &\leq \lambda(4t_{k+1})^d. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Se existem dois “pares próximos” em que pelo menos um dos pontos de um dos pares pertence a $\mathcal{H}_{4t_{k+1}, i}$, então necessariamente teremos três ou mais pontos de X_0 em $\mathcal{H}_{6t_{k+1}}$, ou seja:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(2 \text{ “pares próximos”} \mid |\mathcal{H}_{4t_{k+1}, i} \cap X_0| \geq 1) \\ &\leq \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{k+1} \cap \mathcal{H}_{6t_{k+1}}^d| \geq 3) \\ &= \frac{e^{-\lambda(6t_{k+1})^d} (\lambda(6 \cdot t_{k+1})^d)^3}{3!} + o((t_{k+1})^{3d}) \\ &= \frac{\lambda^3 6^{3d}}{3!} (t_{k+1})^{3d} + o((t_{k+1})^{3d}) \\ &= c_{18}(k, d)(t_{k+1})^{3d} \quad \text{em que } c_{18}(k, d) \rightarrow \lambda^3 6^{3d-1}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para quaisquer dois “pares próximos” pertencentes a $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^*$, tem-se que a probabilidade de eles pertencerem a hipercubos adjacentes é a mesma, independentemente dos

hipercubos considerados. Segue-se de (3.31), (3.32) e (3.33) a partir da desigualdade de Bonferroni que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(2 \text{ "pares próximos" em } \mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^* \right) \\ & \leq c_{17}(k, d) \cdot \frac{(R_{k+1})^{d-1} \cdot R_k}{(t_{k+1})^d} \cdot \lambda(4t_{k+1})^d \cdot c_{18}(k, d)(t_{k+1})^{3d} \\ & = c_{19}(k, d) \cdot (R_{k+1})^{d-1} R_k (t_{k+1})^{3d} \text{ em que } c_{19}(k, d) \rightarrow 6^{3d} \lambda^4 s_{d-1}(1). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Note que cada ponto do tipo $k+1$ é independente de outros pontos do processo que distam mais que t_{k+1} unidades dele, pois se adicionarmos ou retirarmos pontos de X_0 cujas distâncias ao referido ponto do tipo $k+1$ seja superior a t_{k+1} , seu "rótulo" é inalterado. Assim, se considerarmos a partição de $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^*$ em hipercubos de lado $4t_{k+1}$ e definirmos a variável aleatória Y que representa o número de "pares distantes" em $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^*$, temos que Y é estocasticamente menor que uma variável aleatória $X \sim \text{Binomial} \left(\left[c_{16}(k, d) \frac{(R_{k+1})^{d-1} R_k}{(t_{k+1})^d} \right], 3^{4d} \lambda^2 (t_{k+1})^{2d} \right)$, uma vez que X está definida no conjunto de todos os pares de pontos ("pares distantes" e "pares próximos") de $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+6R_k}^*$ e ademais, esta região contém $\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^*$. Assim, segue-se que

$$\mathbb{P} \left(2 \text{ "pares distantes" em } \mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+2D_1+2t_{k+1})}^* \right) = \mathbb{P}(Y = 2) \leq \mathbb{P}(X \geq 2) \quad (3.35)$$

Lema 20 Se $X \sim \text{Binomial} \left(\left[c_{16}(k, d) \frac{(R_{k+1})^{d-1} R_k}{(t_{k+1})^d} \right], 3^{4d} \lambda^2 (t_{k+1})^{2d} \right)$, então

$$\mathbb{P}(X \geq 2) < 2 \cdot (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d} \text{ em que } c_{20}(k, d) \rightarrow 3^{4d} \lambda^2 \cdot \frac{6}{4^d} s_{d-1}(1)$$

Demonstração: Observe que para todo $i \geq 2$, tem-se das definições de $(t_k)_{k \geq 1}$ e R_k dadas nos teoremas 6 e 7 que para $c_{21}(k, d) \rightarrow 3^{5d+1} 2^{2-d} s_{d-1}(1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) & < (c_{20}(k, d))^i (R_{k+1})^{(d-1)i} (R_k)^i (t_{k+1})^{id} \\ & = (c_{20}(k, d))^i (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)i} (R_k t_{k+1})^i \\ & = \left[c_{20}(k, d) (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)} (R_k t_{k+1}) \right]^i \\ & < \left[\frac{c_{21}(k, d)}{\ln(k+1)^3 \cdot 2^{kd} \cdot 2^{(k+1)}} \right]^i \end{aligned} \quad (3.36)$$

De (3.36) tem-se que $c_{20}(k, d) (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)} (R_k t_{k+1}) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &< (3^{4d}\lambda^2 c_{16}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d} \\ &= (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d}\end{aligned}\quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= \sum_{i=3}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) \\ &< \sum_{i=3}^{\infty} \left[c_{20}(k, d) (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)} (R_k t_{k+1}) \right]^i \\ &= \frac{\left[c_{20}(k, d) (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)} (R_k t_{k+1}) \right]^3}{1 - c_{20}(k, d) (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)} (R_k t_{k+1})} \\ &< \frac{\left[c_{20}(k, d) (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)} (R_k t_{k+1}) \right]^3}{c_{20}(k, d) (R_{k+1} t_{k+1})^{(d-1)} (R_k t_{k+1})} \\ &= (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d}\end{aligned}\quad (3.38)$$

O lema 20 segue de (3.37) e (3.38), pois:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X \geq 3) \\ &< 2 \cdot (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1} t_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d}\end{aligned}\quad (3.39)$$

□

De (3.35) e (3.39) segue-se que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(2 \text{ "pares distantes" em } \mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+D_1+2t_{k+1})}^*\right) &\leq \mathbb{P}(X \geq 2) \\ &< 2 \cdot (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d}\end{aligned}\quad (3.40)$$

De (3.34) e (3.40) segue-se que para $c_{22}(k, d) \rightarrow 2 \cdot \left[3^{4d}\lambda^2 \cdot \frac{6}{4^d} s_{d-1}(1) \right]^2$

$$\begin{aligned}g(k+1) &:= \mathbb{P}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{A}_{R_{k+1}, R_{k+1}+2(2R_k+D_1+2t_{k+1})}^*}^{k+1} = 1\right) \\ &< c_{17}(k, d) \cdot (R_{k+1})^{d-1} \cdot R_k \cdot (t_{k+1})^{3d} + 2 \cdot (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d} \\ &= 2 \cdot (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d} + o(2 \cdot (c_{20}(k, d))^2 (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d}) \\ &= c_{22}(k, d) (R_{k+1})^{2d-2} (R_k)^2 (t_{k+1})^{2d}\end{aligned}\quad (3.41)$$

Substituindo a cota obtida em (3.41) na desigualdade (3.30) segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\exists i \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor \right\} : \mathbb{1}_{\mathcal{A}_i, k+1} = 1 \right) < \\ \frac{R_{k+1}}{R_k} \cdot c_{22}(k, d)(R_{k+1})^{2d-2}(R_k)^2(t_{k+1})^{2d} = \\ c_{22}(k, d)(R_{k+1})^{2d-1} \cdot (R_k)(t_{k+1})^{2d} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Lema 21 *Existe $n_5 = n_5(\omega)$, tal que para todo $k \geq n_5$ e $i \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor \right\}$ nenhum "hiperanel" \mathcal{A}_i contém dois pares de pontos em que pelo menos um dos pontos de cada par é do tipo $k+1$.*

$$\left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + 2D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor \sum_{i=1} \mathbb{1}_{\mathcal{A}_i, k+1} = 0$$

Demonstração: Do lema de Borel-Cantelli segue-se o resultado. Para tanto, se $c_{23}(k, d) \rightarrow 2^{5-6d} \cdot 3^{10d+2} \cdot s_{d-1}^2(1)$, então de (3.42)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\exists i \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{R_{k+1}}{2R_k + D_1 + 2t_{k+1}} \right\rfloor \right\} : \mathbb{1}_{\mathcal{A}_i, k+1} = 1 \right) < \sum_{k=1}^{\infty} c_{22}(k, d)(R_{k+1})^{2d-1} \cdot (R_k)(t_{k+1})^{2d} \\ < \sum_{k=1}^{\infty} c_{23}(k, d) \left[2^{2kd-1} \cdot \ln^2(k+1)^3 \right] \left[\frac{t_{k+1}}{t_k} \right] \\ = \sum_{k=1}^{\infty} c_{23}(k, d) \frac{1}{2^{k+1}} < \infty \end{aligned}$$

□

Corolário 7 *Nas condições do lema 21, para quaisquer dois pares de pontos $(\zeta_{k+1}^{i'}, \zeta^{i''})$ e $(\zeta_{k+1}^{j'}, \zeta^{j''})$ contidos em $B(a_1, R_{k+1})$ tais que pelo menos um dos pontos de cada par é do tipo $k+1$, tem-se que a distância entre dois pontos (ζ^i, ζ^j) não pertencentes ao mesmo par é maior que $2R_k + D_1$, isto é:*

$$\left| |\zeta^i - a_1| - |\zeta^j - a_1| \right| > 2 \cdot R_k + D_1 \quad \text{em que} \quad (\zeta^i, \zeta^j) \in \left\{ \zeta_{k+1}^{i'}, \zeta^{i''} \right\} \times \left\{ \zeta_{k+1}^{j'}, \zeta^{j''} \right\}$$

Teorema 9 *Sejam X_0 um processo pontual de Poisson de taxa λ , \mathcal{P} a partição de seus pontos segundo a definição (2) e $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ uma seqüência real tal que $t_1 = \infty$, $t_2 = 1$ e para todo $k \geq 2$ $\frac{t_{k+1}}{t_k} = [2^k \cdot 2^{2kd} \cdot \ln^2((k+1)^3)]^{-1}$. Nestas condições o algoritmo \mathbb{B} gera uma única árvore invariante por qualquer isometria de um único caminho infinito autoevitante e cujos vértices são todos os pontos de X_0 .*

Demonstração: Seja $k \geq \max\{n_0, \dots, n_5\}$. Do corolário 7 e (3.26) tem-se que em $B(a_1, R_{k+1})$ há o par de pontos $(\xi_{k+1}^{1'}, \xi^{1''})$ em que pelo menos um dos pontos deste par é do tipo $k+1$ e cuja

distância ao par (a_k, b_k) é menor que a distância entre quaisquer dois outros pares de pontos em que pelo menos um é do tipo $k + 1$ a (a_k, b_k) .

Se $(\xi_{k+1}', \xi^{1''})$ contiver apenas um ponto do tipo $k + 1$, isto é, $\xi^{1''}$ for de um tipo maior que $k + 1$, então ξ_{k+1}' será o ancestral de a_k e b_k e o teorema está demonstrado.

Suponhamos agora que $(\xi_{k+1}', \xi^{1''})$ são do tipo $k + 1$ e que nunca coalesçam, isto é, existe uma sequência (ξ_j', ξ_j'') de pares de pontos do tipo $j \geq k + 2$ tais que $|\xi_j' - \xi_j''| \leq t_j$ são os $(j - (k + 1))$ -ésimos ancestrais de $(\xi_{k+1}', \xi^{1''})$. Mas isto é um absurdo, desde que a probabilidade de que cada um destes pares de pontos do tipo $j - 1$ tenha um ancestral comum do tipo j é uniformemente limitada por baixo em $(\frac{1}{4})^d$, e portanto a probabilidade de que $(\xi_{k+1}', \xi^{1''})$ não coalesçam é zero.

□

Apêndice A

Árvore Poissoniana em Conjuntos de Medida Finita.

Seja o algoritmo de construção do grafo descrito na secção 1.1, e a sequência de processos $(X_k)_{k \geq 1}$ definidos em um conjunto de medida finita $\mathcal{M}(A)$. Nesta secção será demonstrado o teorema 10, que estabelece a existência de uma APUFIP, quase certamente. Além disso, serão apresentados dois lemas nos quais em um deles existe uma APUFIP quase certamente e no outro há uma probabilidade positiva de não termos tal grafo, em função da sequência de taxas consideradas em cada um dos lemas.

Teorema 10 *Se $\liminf \lambda_k = c \in \mathbb{R}$, então quase certamente o algoritmo A constrói um grafo conexo, sem ciclos e de um único fim cujos vértices são todos os pontos de uma sequência infinita $(X_k)_{k \geq 1}$ de processos pontuais de Poisson independentes definidos em um conjunto de medida finita $\mathcal{M}(A)$.*

Demonstração: A existência de um único ponto em X_k garante a coalescência entre quaisquer dois pontos da geração anterior, não importando portanto quão grande seja a distância entre eles. Se $D_1 = |b_1 - a_1|$ é a distância entre dois pontos escolhidos arbitrariamente em X_1 , $N_{X_k}(A)$ é o número de pontos de X_k em A e $C_k := \{a_k(\omega) = b_k(\omega) | D_{k-1}\}$, então para todo $k \geq 2$ e $D_{k-1} \geq 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \{\omega : N_{X_k}(\omega) = 1\} &\subset \{\omega : a_k(\omega) = b_k(\omega) | D_{k-1}\} \quad \forall D_{k-1}, \text{ donde segue que,} \\ \mathbb{P}(D_k \neq 0) &\leq \mathbb{P}(N_{X_k}(\omega) \neq 1) \leq 1 - \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(A)) \lambda_k \mathcal{M}(A) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

De (A.1) segue-se que

$$\mathbb{P}(\forall k \ a_k \neq b_k) \leq \prod_{k=2}^{\infty} [1 - \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(A)) \lambda_k \mathcal{M}(A)] \quad (\text{A.2})$$

Seja $a_k = 1 - \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(A)) \lambda_k \mathcal{M}(A)$. Como os a'_k s $\in (0, 1)$, então $\prod_{k=2}^{\infty} (1 - a_k)$ independente da ordem dos a'_k s.

Para todo $k \geq 2$, $\ln a_k < 0$, o que implica que podemos alterar a ordem dos termos da série $\sum \ln a_k$. Temos portanto que o mesmo vale para $\prod_{k=2}^{\infty} a_k$, pois:

$$\prod_{k=2}^{\infty} a_k = \prod_{k=2}^{\infty} \exp(\ln a_k) = \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} \ln a_k\right)$$

Sejam $J := \{j \in \mathbb{N} : \lambda_j \in (c - \delta, c + \delta)\}$ e $L := \{j \in J^c\}$. Então:

$$\prod_{k=2}^{\infty} a_k = \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} \ln a_k\right) = \exp\left(\sum_{j \in J} \ln a_j\right) \exp\left(\sum_{l \in J^c} \ln a_l\right)$$

Do fato de $\liminf \lambda_k = c$, tem-se que $a_j < M = M(c + \delta) < 1$ para todo $j \in J$ e que $|J| = \infty$. Disso segue-se imediatamente que:

$$\mathbb{P}(\forall k \ a_k \neq b_k | D_1 \neq 0) \leq \prod_{k=2}^{\infty} (a_k) = \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} \ln a_k\right) = \exp\left(\sum_{j \in J} \ln a_j\right) \exp\left(\sum_{l \in J^c} \ln a_l\right) =$$

$$\prod_{j \in J} a_j \prod_{l \in L} a_l < \prod_{j \in J} \{(1)^j M\} \prod_{l \in L} a_l = 0$$

□

Observação 19 *O resultado estabelecido no teorema 10 poderia ser obtido considerando-se dois pontos arbitrários de X_m (a_m e b_m), mostrando a coalescência de maneira quase certa deles a partir da desigualdade (A.2), neste caso o produtório infinito ainda teria valor zero, apenas o seu limite inferior seria $m + 1$ em lugar de 2. Para mostrar a existência da Árvore Poissoniana com um único caminho infinito auto evitante é suficiente mostrar a coalescência entre dois pontos quaisquer a_m e b_m de X_m , pois a coalescência destes implicará a coalescência de todos os seus sucessores não coalescidos até a "geração m ".*

Lema 22 *Se $\lambda_k > k \frac{2^k}{l}$ e $D_1 = l > 0$, então com uma probabilidade positiva (γ) o algoritmo \mathbb{A} gera um grafo não conectado e sem ciclos cujos vértices são todos os pontos de uma sequência infinita $(X_k)_{k \geq 1}$ de processos pontuais de Poisson independentes definidos em um conjunto de medida finita $\mathcal{M}(\mathbb{A})$.*

Demonstração: Se em X_2 houver pelo menos um ponto em cada um dos semi intervalos à direita de a_1 e à esquerda de b_1 de comprimento $\frac{l}{4}$, podemos garantir que não haverá coalescência entre os ancestrais de a_1 e b_1 em X_2 . Assim teremos uma cota inferior para probabilidade de não coalescência em X_2 em função da distância entre os pontos a_1 e b_1 em X_1 .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_2 > \frac{l}{2} | D_1 = l) &\geq \left[1 - \exp\left(-\lambda_2 \frac{l}{4}\right) \right]^2 \\ \mathbb{P}(D_3 > \frac{l}{4} | D_2 \geq \frac{l}{2}) &\geq \left[1 - \exp\left(-\lambda_3 \frac{l}{2}\right) \right]^2 = \left[1 - \exp\left(-\lambda_3 \frac{l}{2^3}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

Segue-se de forma análoga que para todo $k \geq 3$,

$$\mathbb{P}(D_k > \frac{l}{2^{k-1}} | D_{k-1} \geq \frac{l}{2^{k-2}}) \geq \left[1 - \exp\left(-\lambda_k \frac{l}{2^k}\right) \right]^2 \quad (\text{A.3})$$

De (A.3) tem-se que:

$$\mathbb{P}(\forall k \geq 2 \ a_k \neq b_k) \geq \prod_{k=2}^{\infty} \left[1 - \exp\left(-\lambda_k \frac{l}{2^k}\right) \right]^2 \quad (\text{A.4})$$

Pelo fato de

$$\prod_{k=2}^{\infty} (1 - \exp(-k)) = \gamma > 0$$

Segue-se então que

$$\text{se } \lambda_k > k \frac{2^k}{l}, \text{ então } \mathbb{P}(\forall k \geq 2 \ a_k \neq b_k) > \gamma.$$

□

Observação 20 O resultado apresentado no lema 22 dá uma cota inferior (γ) para a probabilidade de não coalescência entre os ancestrais de a_1 e b_1 para uma sequência de taxas $\lambda_k = k \frac{2^k}{l}$ em que $k \geq 2$ e $D_1 = l$, continuará válido se para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$ tivermos $\lambda'_k \geq \lambda_k = k \frac{2^k}{l}$ para todo $k \geq n_0$.

Lema 23 Se $\lambda_k = \frac{\ln k}{\mathcal{M}(\mathbb{A})}$, então quase certamente o algoritmo A constrói um grafo conexo, sem ciclos e de um único fim cujos vértices são todos os pontos de uma sequência infinita $(X_k)_{k \geq 1}$ de processos pontuais de Poisson independentes definidos em um conjunto de medida finita $\mathcal{M}(\mathbb{A})$.

Demonstração: A condição suficiente para a coalescência entre a_{k+1} e b_{k+1} , qualquer que seja $D_k = |b_k - a_k|$, é que $N_{X_{k+1}} = 1$; isto é, se houver exatamente um ponto em X_{k+1} , então haverá a coalescência entre a_k e b_k qualquer que seja a distância entre eles.

Para todo $k \geq 2$ tem-se que

$$\mathbb{P}(a_k = b_k | D_{k-1}) \geq \lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A}) \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A})) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(\forall k \ a_k \neq b_k) \leq \prod_{k=2}^{\infty} (1 - \lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A}) \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A}))) \quad (\text{A.5})$$

A partir da série:

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 0$$

Tem-se que uma condição suficiente para que haja a coalescência entre a_1 e b_1 , é dada por

$$\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A}) \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A})) > \frac{1}{k}$$

Se $\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A}) > 1$, então $\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A}) \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A})) > \exp(-\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A}))$.

Fazendo $\exp(-\lambda_k \mathcal{M}(\mathbb{A})) = \frac{1}{k}$ obtemos $\lambda_k = \frac{\ln k}{\mathcal{M}(\mathbb{A})}$ e o resultado segue. □

Observação 21 *Note que para podermos assegurar que o algoritmo A gere um grafo conexo, sem ciclos e de único fim, é necessário apenas que exista n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\lambda_k = \frac{\ln k}{\mathcal{M}(\mathbb{A})}$ ou para qualquer outra sequência de taxas $(\lambda'_k)_{k \geq 1}$ tais que para algum n_0 $\lambda'_k \leq \lambda_k$ para todo $k \geq n_0$.*

Apêndice B

B.1 Cota Inferior para a Probabilidade Condicional de Coalescência.

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k) = \mathbb{P}(a_{k+1} = b_{k+1} | D_k) \geq e^{(-\lambda_{k+1} D_k^d v_d(1))} + \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-D_k v_d(1)^{\frac{1}{d}} \right)^j \lambda_{k+1}^{\frac{1}{d}} \lambda_{k+1}^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1} D_k^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} e^{(-w^d)} w^{d-1-j} dw$$

Da observação 3 segue-se que

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k, R_{a_k}^{a_{k+1}} = r) \geq e^{(-\lambda_{k+1} v_d(1) [(r+D_k)^d - r^d])} \quad (\text{B.1})$$

A partir do condicionamento dado em (1.6), (B.1) e lema 3, obtem-se

$$\mathbb{P}(a_{k+1} = b_{k+1} | D_k) \geq \int_0^{\infty} e^{(-\lambda_{k+1} v_d(1) [(r+D_k)^d - r^d])} \lambda_{k+1} v_d(1) dr^{d-1} e^{(-\lambda_{k+1} v_d(1) r^d)} dr$$

Seja $v = v_d(1) r^d$ and $dv = dr^{d-1} v_d(1) dr$, isto implica que

$$\mathbb{P}(a_{k+1} = b_{k+1} | D_k) \geq \lambda_{k+1} \int_0^{\infty} e^{\left[-\lambda_{k+1} \left(v^{\frac{1}{d}} + ((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}} \right)^d \right]} dv$$

Considere a seguinte mudança de variáveis:

$$\text{Se } u^{\frac{1}{d}} = v^{\frac{1}{d}} + \left((D_k)^d v_d(1) \right)^{\frac{1}{d}} \text{ então } dv = \left(\frac{u}{v} \right) \left(\frac{1}{d} - 1 \right) du$$

A partir disto, tem-se que,

$$\mathbb{P}(a_{k+1} = b_{k+1} | D_k) \geq e^{(-\lambda_{k+1}(D_k)^d v_d(1))} +$$

$$\sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} \int_{(D_k)^d v_d(1)}^{\infty} \lambda_{k+1} e^{(-\lambda_{k+1} u)} (-1)^j \left(\frac{(D_k)^d v_d(1)}{u} \right)^{\frac{j}{d}} du$$

Fazendo uma mudança final de variáveis,

$$\text{If } w = (u)^{\frac{1}{d}} \text{ then } dw = \frac{1}{d} (u)^{\left(\frac{1}{d} - 1\right)} du$$

$$\mathbb{P}(a_{k+1} = b_{k+1} | D_k) \geq e^{(-\lambda_{k+1}(D_k)^d v_d(1))} +$$

$$\sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-D_k v_d(1)^{\frac{1}{d}} \right)^j \int_{((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} w^d} w^{d-1-j} dw \quad (\text{B.2})$$

Seja a seguinte integral:

$$\text{If } F(y) = \int_0^y e^{-w^d} w^{d-1-j} dw \text{ then } \frac{d}{dy} F(\lambda^{\frac{1}{d}} y) = e^{(-\lambda y^d)} (\lambda)^{1-\frac{1}{d}-\frac{j}{d}} y^{d-1-j} \quad (\text{B.3})$$

A integral em (B.2) com a notação dada em (B.3), pode ser expressa como

$$\lambda_{k+1} \int_{((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} e^{(-\lambda_{k+1} w^d)} w^{d-1-j} dw =$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (\lambda_{k+1})^{\frac{j}{d}} \int_{((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} e^{(-\lambda_{k+1} w^d)} (\lambda_{k+1})^{1-\frac{1}{d}-\frac{j}{d}} w^{d-1-j} dw =$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (\lambda_{k+1})^{\frac{j}{d}} \int_{((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} \frac{d}{dw} F((\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} w) =$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (\lambda_{k+1})^{\frac{j}{d}} \left[F(\infty) - F((\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} ((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}) \right] =$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (\lambda_{k+1})^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} ((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} e^{(-w^d)} w^{d-1-j} dw =$$

$$(\lambda_{k+1}) \int_{((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} e^{(-\lambda_{k+1} w^d)} w^{d-1-j} dw =$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (\lambda_{k+1})^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} ((D_k)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} e^{(-w^d)} w^{d-1-j} dw \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (B.4) em (B.2) o resultado segue.

B.2 Limite Inferior para a Probabilidade Condicional de Coalescência.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(d_{k+1} = 0 | d_k \in [0, \mathcal{L}_d]) \geq \exp(-\alpha(\mathcal{L}_d)^d v_d(1)) = \epsilon(\alpha, \beta, d) > 0$$

Demonstração: Seja $l_{k,d}^*$ o valor assumido por D_k quando $d_k = \mathcal{L}_d$, ou seja,

$$l_{k,d}^* = \frac{\mathcal{L}_d}{(\alpha)^{\frac{k}{d}}} \quad (\text{B.5})$$

do lema 5 e pelo fato de $D_k = 0 \Leftrightarrow d_k = 0$, item (5), segue-se que

$$\mathbb{P}(d_{k+1} = 0 | d_k \in [0, \mathcal{L}_d]) \geq \mathbb{P}(d_{k+1} = 0 | d_k = \mathcal{L}_d) = \mathbb{P}(D_{k+1} = 0 | D_k = l_{k,d}^*) \quad (\text{B.6})$$

O limite inferior para a probabilidade de coalescência dado no lema 4 com $D_k = l_{k,d}^*$ e da equação (B.6), segue-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(d_{k+1} = 0 | d_k \in [0, \mathcal{L}_d]) &\geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(d_{k+1} = 0 | D_k = l_{k,d}^*) \geq \\ &\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-l_{k,d}^* v_d(1)^{\frac{1}{d}} \right)^j \lambda_{k+1}^{\frac{1}{d}} \lambda_{k+1}^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1}(l_{k,d}^*)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} \exp(-w^d) w^{d-1-j} dw + \\ &\lim_{k \rightarrow +\infty} \exp(-\lambda_{k+1}(l_{k,d}^*)^d v_d(1)) = \exp(-\alpha(\mathcal{L}_d)^d v_d(1)) + \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-l_{k,d}^* v_d(1)^{\frac{1}{d}} \right)^j \lambda_{k+1}^{\frac{1}{d}} \lambda_{k+1}^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1}(l_{k,d}^*)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} \exp(-w^d) w^{d-1-j} dw & \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Para concluir a prova do lema 6, mostraremos agora que o limite dado em (B.7) vale zero. Observe inicialmente que para $u = w^d$, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-l_{k,d}^* v_d(1)^{\frac{1}{d}} \right)^j \lambda_{k+1}^{\frac{1}{d}} \lambda_{k+1}^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1}(l_{k,d}^*)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} \exp(-w^d) w^{d-1-j} dw = \\ (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} (-1)^j \left(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1) \right)^{\frac{j}{d}} \int_{\lambda_{k+1}(l_{k,d}^*)^d v_d(1)}^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{j}{d}} du \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-l_{k,d}^* v_d(1)^{\frac{1}{d}} \right)^j \lambda_{k+1}^{\frac{1}{d}} \lambda_{k+1}^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} \exp(-w^d) w^{d-1-j} dw \right| \leq$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \left| \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} (-1)^j \left(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1) \right)^{\frac{j}{d}} \int_{\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1)}^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{j}{d}} du \right| <$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \left| \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} \left(\left(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1) \right)^{\frac{1}{d}} \right)^j \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{j}{d}} du \right| =$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} \left(\left(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1) \right)^{\frac{1}{d}} \right)^j \Gamma \left(1 - \frac{j}{d} \right) <$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} \left(\left(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1) \right)^{\frac{1}{d}} \right)^j <$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \left(\left(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1) \right)^{\frac{1}{d}} \right)^j =$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \left(1 + (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (l_{k,d}^*) (v_d(1))^{\frac{1}{d}} \right)^{d-1} \Rightarrow$$

$$-(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \left(1 + (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (l_{k,d}^*) (v_d(1))^{\frac{1}{d}} \right)^{d-1} \leq$$

$$\sum_{j=1}^{d-1} \binom{d-1}{j} d \left(-l_{k,d}^* v_d(1)^{\frac{1}{d}} \right)^j \lambda_{k+1}^{\frac{1}{d}} \lambda_{k+1}^{\frac{j}{d}} \int_{(\lambda_{k+1} (l_{k,d}^*)^d v_d(1))^{\frac{1}{d}}}^{\infty} \exp(-w^d) w^{d-1-j} dw \leq$$

$$(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \left(1 + (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (l_{k,d}^*) (v_d(1))^{\frac{1}{d}} \right)^{d-1}$$

Acontece que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \left(1 + (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (l_{k,d}^* (v_d(1))^{\frac{1}{d}}) \right)^{d-1} \right] =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} (l_{k,d}^* (v_d(1))^{\frac{1}{d}}) \right)^{d-1} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1})^{\frac{1}{d}} \left(1 + \alpha^{\frac{1}{d}} \mathcal{L}_d (v_d(1))^{\frac{1}{d}} \right)^{d-1} = 0$$

Pelo teorema do confronto, concluímos a prova de que o limite dado em (B.7) vale zero, e por conseguinte o lema 6. □

Apêndice C

Tempo de Retorno para uma Região de Comprimento Fixo em um Processo com Deriva “ τ ”.

Seja $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{\mathbf{F}_n, n \geq 0\}$ uma família crescente de σ -álgebras $\mathbf{F}_0 \subset \mathbf{F}_1 \subset \dots \subset \mathbf{F}_n \subset \dots \subset \mathbf{F}$. Seja $\{S_i, i \geq 0\}$ uma sequência real de variáveis aleatórias não-negativas, tais que S_i é \mathbf{F}_i mensurável, $\forall i \geq 0$. Ademais, Considere S_0 constante. Denote por τ o \mathbf{F}_n -tempo de parada que representa o instante da primeira visita a $[0, C)$, i.e. $\tau(\omega) := \inf \{n \geq 1 : S_n(\omega) \leq C\}$. Introduza a sequência $\tilde{S}_n = S_{n \wedge \tau}$, em que $n \wedge \tau$ é o mínimo entre n and τ .

Teorema 11 *Assuma que $S_0 > C$ e, para algum $\epsilon > 0$ e todo $n \geq 0$,*

$$\mathbf{E}(\tilde{S}_{n+1} | \mathbf{F}_n) \leq \tilde{S}_n - \epsilon 1_{\{\tau > n\}} \text{ a.s.} \quad (\text{C.1})$$

Então:

$$\mathbf{E}(\tau) < \frac{S_0}{\epsilon} < \infty$$

A prova deste teorema é dada em [3], p. 17.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Ball, *Poisson thinning by monotone factors*, Electron. Comm. Probab. **10** (2005), no. 11, 60–69.
- [2] I.C. Diniz, *A limit of an improper integral depending on one parameter.*, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem **34** (2008), no. 8, 478–480.
- [3] Malyshev & Menshikov Fayolle, *Topics in the constructive theory of countable markov chains.*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [4] Landim & Thorisson Ferrari, *Poisson trees, succession lines and coalescing random walks*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **40** (2007), no. 2, 141–152.
- [5] Holroyd & Peres, *Trees and matchings from point processes.*, Electron. Comm. Probab. **8** (2003), no. 2, 17–27.