Processo de exclusão simples com taxas variáveis

Adriana Uquillas Andrade

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Adilson Simonis

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, junho de 2008

Processo de exclusão simples
com taxas variáveis

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Adriana Uquillas Andrade
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Adilson Simonis - IME/USP.
- Prof. Dr. Claudio Landim - IMPA.
- Prof. Dr. Pablo Ferrari - IME/USP.
- Profa.Dra.Nancy Lopes Garcia-IMECC/UNICAMP.
- Prof.Dr. Rafael A. Rosales Mitowsky -FFCLRP/USP.

Agradecimentos

Ao meu orientador Adilson Simonis pelo tempo e apoio na realização deste trabalho, e especialmente pela sua amizade.

Ao Professor Claudio Landim por ter reservado tempo e dedição inestimáveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Pablo Ferrari pela atenção que recebi dele sempre que precisei.

Aos meus pais, Elena e Roberto, pelo amor, apoio e força que recebi deles durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus irmãos, pelo exemplo que sempre me deram.

Resumo

Nosso trabalho considera o processo de exclusão simples do vizinho mais próximo evoluindo com taxas de salto aleatórias $\beta = \{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$. Demonstramos o limite hidrodinâmico deste processo. Este resultado é obtido através do limite hidrodinâmico do processo de exclusão onde as taxas de salto $\{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$ são substituidas pelas taxas $\{c_{x,N} : x \in \mathbb{Z}\}$ que tem a mesma distribuição que $\{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$ para cada $N \geq 1$.

Fazemos algumas suposições no meio c_N e consideramos que as partículas estão inicialmente distribuidas de acordo à medida produto de Bernoulli associada a um perfil inicial $\rho_0 : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Palavras-chave: limite hidrodinâmico, meio aleatório, sistemas de partículas.

Abstract

Consider a Poisson process with rate equal to 1 in $I\!R$. Consider the nearest neighbor simple exclusion process with random jump rates $\beta = \{\beta_x : x \in Z\!\!\!Z\}$, where $\beta_x = \lambda, \lambda > 0$ if there is a Poisson mark between $(x, x+1)$ and $\beta_x = 1$ otherwise. We prove the hydrodynamic limit of this process. This result follows from the hydrodynamic limit in the case that the jump rates $\{\beta_x : x \in Z\!\!\!Z\}$ are replaced by an array $\{c_{x,N} : x \in Z\!\!\!Z\}$ having the same distribution for each $N \geq 1$.

Keywords: hydrodynamic limit, random environment, interacting particle system.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Passeios aleatórios em meios aleatórios tem sido muito estudado nos últimos anos. Nosso trabalho considera o processo de exclusão simples do vizinho mais próximo evoluindo num meio aleatório que chamaremos de β. Isto é:

Considere um processo de Poisson com taxa 1 na reta $I\!R$. Vamos denotar suas marcas por $\ldots, \gamma_{-n} < \gamma_{-n+1} < \ldots < \gamma_{-1} < 0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots$.

Considere o processo de exclusão simples com taxas $\beta = \{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$, onde $\beta_x = \lambda, \lambda > 0$ se existir uma marca de Poisson entre $(x, x+1)$ e $\beta_x = 1$ caso contrário. Denotamos por η as configurações em $\{0,1\}^{\boldsymbol{Z}}$ tais que $\eta(x) = 1$ se o sítio x está ocupado e $\eta(x) = 0$ caso contrário. Com taxa β_x os valores das variáveis $\eta(x)$ e $\eta(x+1)$ são intercambiados.

Dada uma função f cilíndrica e um campo aleatório $\beta = \{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$, o gerador L do processo pode ser escrito como:

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in \boldsymbol{Z}} \beta_x \{f(\sigma^{x,x+1}\eta) - f(\eta)\}, \tag{1.1}$$

onde $\sigma^{x,x+1}\eta$ é a configuração obtida de η ao intercambiar as variáveis $\eta(x)$ e $\eta(x+1)$, isto é,

$$\sigma^{x,x+1}\eta(y) = \begin{cases} \eta(x+1) & \text{se } y = x, \\ \eta(x) & \text{se } y = x+1, \\ \eta(y) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

O resultado principal neste trabalho consiste na demonstração do limite hidrodinâmico deste processo.Enunciaremos este resultado na sequência.

Vamos substituir as taxas de salto $\{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$ pelas taxas $c_N = \{c_{x,N} : x \in \mathbb{Z}\}, N \geq 1$ que tem a mesma distribuição que $\{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$ para cada $N \geq 1$, e a partir do limite hidrodinâmico obtido para este processo vamos obter o limite hidrodinámico "annealed"para o processo de exclusão em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que com taxa β_x os valores das variáveis $\eta(x)$ e $\eta(x+1)$ são intercambiados.

A seqüência $\{c_{x,N} : x \in \mathbb{Z}\}$ é construida da seguinte maneira:

$$c_{y,N} = \frac{1}{N\{W(\frac{y+1}{N}) - W(\frac{y}{N})\}}$$

onde $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como

$$W(\frac{k}{N}) = \frac{k}{N} + \sigma(k)(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{N})\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\gamma_j \in [0,k/N]\}}$$

e $\sigma(k) = 1$ se $k \geq 0$ e $\sigma(k) = -1$ se $k < 0$.

Assim, a seqüência $\{c_{x,N} : x \in \mathbb{Z}\}$ definida como função de W tem a mesma distribuição de $\{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$.

Portanto, o processo que iremos estudar se comporta da seguinte maneira: Seja $x \in \mathbb{Z}$ e N inteiro positivo, consideramos o processo de exclusão simples do vizinho mais próximo onde uma partícula que está em x (respectivamente $x+1$) vai para $x+1$ (respectivamente x) com taxa $c_{x,N} = N^2$ se não houver marca de Poisson entre os sítios x e $x+1$, e caso contrário salta com taxa $c_{x,N} = \lambda N$, para algum $\lambda > 0$.

Sob algumas suposições no meio c_N provamos que se as partículas estão inicialmente distribuidas de acordo com a medida produto de Bernoulli associada ao perfil inicial $\rho_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$, então o perfil de densidade,$\rho = \rho(t,x)$, evolui como a solução da equação de difusão com fronteiras

$$\begin{cases} \partial_t \rho & = & \Delta\rho \text{ nos intervalos } (\gamma_j, \gamma_{j+1}) \\ \partial_x \rho(t, \gamma_j+) & = & \partial_x \rho(t, \gamma_j-) \\ \partial_x \rho(t, \gamma_j+) & = & \lambda[\rho(t, \gamma_j-) \ - \ \rho(t, \gamma_j+)] \end{cases}$$

onde $\Delta\rho$ é o Laplaciano de ρ.

Este resultado permite, entre outras coisas, uma aplicação no estudo da formação de conglomerados no nosso processo. Especificamente, apresentamos uma cota superior e uma inferior para a distribuição do que chamamos de tempo de escape da partícula na origem. Mais precisamente, dado que consideramos um perfil inicial onde, com probabilidades altas as partículas são posicionadas nos sítios $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$, j inteiro positivo e com probabilidades próximas de zero fora desses sítios, determinamos uma estimativa da distribuição do tempo em que a partícula que está inicialmente na origem consegue se movimentar pela primeira vez.

Alguns resultados existentes na literatura serão necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho, que serão referenciados ao longo do texto como Resultados, em quanto que as nossas contribuições serão referenciadas como Lemas, Proposições e Teoremas.

Capítulo 2

Limite Hidrodinâmico

Considere o espaço quociente $\mathbb{T}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, onde N é um inteiro positivo. Os pontos de $\mathbb{T}_N$ serão representados pelas letras x, y, z. Considere um processo de Poisson com taxa 1 na reta $\mathbb{R}$. Vamos denotar suas marcas por $\ldots, \gamma_{-n} < \gamma_{-n+1} < \ldots < \gamma_{-1} < 0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots$.

A dinâmica que iremos estudar é um processo de exclusão simples evoluindo em $\mathbb{Z}$ que pode ser descrito informalmente como segue. Denote por η as configurações de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tais que $\eta(x) = 1$ se o sítio x está ocupado e $\eta(x) = 0$ caso contrário. Se não existir uma marca de Poisson entre os sítios $\frac{x}{N}$ e $\frac{x+1}{N}$ a partícula se comporta como um processo de exclusão simples simétrico evoluindo com taxa N^2; caso contrário, com taxa λN, $\lambda > 0$, os valores das variáveis $\eta(x)$ e $\eta(x+1)$ são intercambiados. O principal objetivo é descrever o limite hidrodinâmico do processo.

Utilizaremos as seguintes notações: dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $D(I, \mathbb{R})$ indicará o espaço das funções $f : I \to \mathbb{R}$ tais que os limites laterais $f(x+)$ e $f(x-)$ existem e $f(x+) = f(x)$, para cada $x \in I$, munido com a métrica de Skorohod (veja definição a seguir); estas funções são importantes no estudo de processos estocásticos que admitem ou requerem saltos. $\mathbb{D}(f)$ indicará o conjunto das discontinuidades de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ e f^{-1} indicará a inversa de f, definida por

$$f^{-1}(y) = \sup\{x \in I : f(x) \leq y\}.$$

Finalmente, para $x, y \in \mathbb{R}$, o máximo e o mínimo entre x e y serão indicados por $x \vee y := max\{x, y\}$ e $x \wedge y := min\{x, y\}$.

A métrica de Skorohod d_S em $D(I, \mathbb{R})$ é apresentada na seguinte definição:

Definição 1 *Para $f, g \in D(I, I\!R)$, a métrica no espaço $D(I, I\!R)$ é dada por*

$$d_S(f,g) = \inf_{\kappa}[\phi(\kappa) \vee \int_0^{\infty} e^{-u} d(f,g,\kappa,u)du],$$

onde

$$\phi(\alpha) = \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \frac{\alpha(s)-\alpha(t)}{s-t} \right| < \infty$$

e

$$d(f,g,\alpha,u) = \sup_{t\geq 0} q(f(t \wedge u), g(\alpha(t) \wedge u))$$

com $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ função (estritamente) crescente e q a métrica definida por $q(x,y) = min\{|x-y|, 1\}$.

Da definição acima temos que duas trajetórias na topologia de Skorohod estão próximas se em qualquer intervalo de tempo limitado, estas trajetórias estão uniformemente próximas depois de uma pequena distorção α no eixo do tempo. No subespaço de funções contínuas, convergência na métrica d_S, é o mesmo que convergência uniforme nos intervalos compactos.

Definição 2 *Considere um movimento Browniano $B(t,\omega)$ definido num espaço de probabilidade $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, I\!P)$. Definimos o tempo local $L : I\!R^+ \times I\!R \to I\!R^+$ por*

$$\int_0^t \mathbf{1}\{B(s,.) \in A\} ds = \int_A L(t,x)dx$$

para todo conjunto de Borel $A \subset (-\infty, \infty)$ e todo $t \geq 0$. Isto é, o tempo local é uma medida de quanto tempo $B(s,.)$ permanece no conjunto A no intervalo de tempo $[0,t]$

Por simplicidade, escreveremos $B(t,\omega) = B(t)$. Para todos os processos definidos na seqüência deste trabalho, que são função do movimento Browniano $B(t)$, usaremos esta mesma notação.

Considere a função de salto $W : I\!R \to I\!R$ definida por

$$W(\frac{k}{N}) = \frac{k}{N} + \sigma(k)(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{N}) \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\gamma_j \in [0,k/N]\}}$$

onde $\sigma(k) = 1$ se $k > 0$ e $\sigma(k) = -1$ caso contrario.

Fixe $N \geq 1, x \in \mathbb{Z}$ e uma realização de W. Considere o passeio aleatório $X_N(t,x)$ definido nos inteiros começando no ponto x que salta de x a $x+1$ e de $x+1$ a x com taxa N^2 se não houver uma marca de Poisson entre x e $x+1$. Caso contrário salta com taxa λN. O gerador deste processo, para f cilíndrica, é dado por

$$(\mathbb{L}_N f)(x/N) = N^2 c_{x,N}\{f(x+1) - f(x)\} + N^2 c_{x-1,N}\{f(x-1) - f(x)\} \tag{2.1}$$

onde

$$c_{y,N} = \frac{1}{N\{W(\frac{y+1}{N}) - W(\frac{y}{N})\}}. \tag{2.2}$$

Por simplicidade omitiremos a dependência de N em $c_{y,N}$ e escreveremos c_y.

Vamos descrever o comportamento assintótico deste passeio aleatório e, para isto, alguns resultados obtidos por Stone [16] (1962) serão úteis:

Seja υ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Considere a medida $\upsilon\, \mathbf{1}\{E\} := \upsilon_E$, para E de Borel, onde $E^C = \big\{ \left(W\left(\frac{x-}{N}\right), W\left(\frac{x}{N}\right)\right) :$ existe pelo menos

$$\text{uma marca de Poisson no elo } (\frac{x-1}{N}, \frac{x}{N})\big\}.$$

A medida υ_E tem suporte, denotado por $supp(\upsilon_E)$, dado por

$$supp(\upsilon_E) = \{W(x), W(x-) : x \in \mathbb{R}\}$$

onde $W(x-) := \lim_{y \to x-} W(y)$. Para cada $u \in supp(\upsilon_E)$ e $t \geq 0$ definimos

$$\varphi(t|u, \upsilon_E) = \int_{\mathbb{R}} L(t, y-u)\upsilon_E(dy),$$

$$\varphi^{-1}(t|u, \upsilon_E) = sup\{s \geq 0 : \varphi(s|u, \upsilon_E) \leq t\}$$

e

$$Z(t|u, \upsilon_E) = B(\varphi^{-1}(t|u, \upsilon_E)) + u.$$

Observação: Para toda função f contínua em $\mathbb{R}$ com suporte compacto, temos

$$\int_a^b f(u)\upsilon_E(du) = \int_{W^{-1}(a)}^{W^{-1}(b)} f(W(x))dx.$$

Considere as seguintes definições

Definição 3 *Seja* $X_t(f) = f(t)$ *para* $f \in D([0,\infty), I\!M)$*, onde* $I\!M$ *é um espaço métrico separável. Considere o processo de Markov* P_x*, onde* $\{P_x : x \in I\!M\}$ *são as medidas de probabilidade no espaço* $D([0,\infty), I\!M)$*. Para* g *mensurável e limitada em* $I\!M$*, seja* $S(t)g(x) = I\!E^x g(X_t)$*. O processo* P_x *é dito processo de Feller se* $S(t)g \in C_b(I\!M)$*, para todo* $t \geq 0$ *e* $f \in C_b(I\!M)$*.*

Definição 4 *Considere o processo de Feller* P_x *definido acima. Vamos definir a propiedade forte de Markov. Seja* $\tau : D([0,\infty), I\!M) \to [0,\infty]$ *um tempo de parada com respeito à filtração* $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$*, e defina* $\theta_\tau f(x) := f(\tau(f) + x)$*.* P_x *é fortemente Markov se e somente se*

$$P_x[\theta_\tau^{-1} A | \mathcal{F}_\tau](f) = P_{f(\tau)}(A)$$

para P_x*-quase toda* f *tal que* $\tau(f) < \infty$*, para todo* $x \in I\!M$ *e* $A \in \mathcal{F}$*.*

Temos que, para cada $u \in supp(\upsilon_E)$, $\varphi(t|u, \upsilon_E)$ é não decrescente e contínua em t, estritamente positiva para $t > 0$. A função φ^{-1} é uma função não decresecente contínua à direita com limite à esquerda e $\varphi^{-1}(0, u) = 0$. Como função de t o processo $Z = \{Z(t|u, \upsilon_E) : t \geq 0\}$ é contínuo à direita com limite à esquerda, definido no mesmo espaço do movimento Browniano $B(t)$, o espaço $(supp(\upsilon_E), \mathcal{B}, I\!P)$. Além disso Z é um processo forte de Markov com espaço de estados $supp(\upsilon_E)$ e estado inicial u. Como o $supp(\upsilon_E)$ é um conjunto enumerável, então Z é um processo de nascimento e morte.

Para $N \geq 1$, seja $\upsilon_N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \boldsymbol{Z}} \delta_{W(x/N)}$; υ_N coloca uma massa de $\frac{1}{N}$ em cada ponto $W(x/N)$. Observe que υ_N converge fracamente para υ_E, pois $\lim_{N\to\infty} \int f d\upsilon_N = \int f d\upsilon\, \mathbf{1}\{E\}$.

Como conseqüência dos resultados de Stone (1963)[16] temos que se $\{u_i\}_{i\in\boldsymbol{Z}}$ é uma seqüência de números reais estritamente crescente tal que $\lim_{i\to\pm\infty} u_i = \pm\infty$ e definimos $\upsilon = \sum_{i\in\boldsymbol{Z}} w_i \delta_{u_i}$ onde $\{w_i\}_{i\in\boldsymbol{Z}}$ são pesos fixados. Então $Z(.|u_j, \upsilon)$ é um passeio aleatório a tempo contínuo em $\{u_i\}_{i\in\boldsymbol{Z}}$ começando em u_j, e dado que está na posição u_i, salta para u_{i-1}, u_{i+1}, respectivamente, com taxas

$$\frac{1}{w_i(u_i - u_{i-1})} \quad \text{e} \quad \frac{1}{w_i(u_{i+1} - u_i)}$$

Pela definição de υ_N e pelo resultado, acima o passeio aleatório $X_N(., x)/N$ tem a mesma lei que o processo $W^{-1}(Z(.|W(x/N), \upsilon_N))$.

Para todo $x \in I\!R$, seja

$$Y_N(t,x) = W^{-1}\left(Z\left(t|W\left(\frac{\lceil xN \rceil}{N}\right), \upsilon_N\right)\right)$$

onde $\lceil xN \rceil$ é o maior inteiro menor ou igual a xN. Segue que

$$\frac{X_N(.,\lceil xN \rceil)}{N} \text{ tem a mesma lei que } Y_N(.,x)$$

para todo $N \geq 1$.

Observação: Uma medida μ é dita uma medida de Radon se todo ponto do espaço da medida tem uma vizinhança com medida μ finita, e se a medida do conjunto A, $\mu(A)$, pode ser aproximada por subconjuntos compactos mensuráveis $\{K_n : n \geq 1\}$. Isto é : $\mu(A) = \sup\{\mu(K_n) | K_n \subseteq A \quad \text{compactos}\}$.

O seguinte resultado foi obtido por Stone [16] (1962)

Resultado 1 *Seja $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ uma seqüência de medidas e μ uma medida de Radon em $I\!R$ com suporte não limitado nem por baixo nem por cima, tais que*

- *$\mu_n \to \mu$ fracamente*
- *se $y_n \in supp(\mu_n)$ é uma seqüência convergente quando $n \uparrow \infty$, então $\lim_{n\uparrow\infty} y_n \in supp(\mu)$*

Seja $x_n \in supp(\mu)$ uma seqüência convergente com $\lim_{n\uparrow\infty} x_n = x$. Então

$$\lim_{n\uparrow\infty} d_S(Z(.|x_n,\mu_n), Z(.|x,\mu)) = 0 \qquad \mu \; q.c \tag{2.3}$$

Temos que $supp(\upsilon_N)$ consiste dos valores de $W(x/N)$. Seja $y_N = W(\lceil uN \rceil/N)$. Como $W(\lceil uN \rceil/N) \to W(u)$ na métrica d_S quando $N \to \infty$; existe uma seqüência de funções contínuas $h_N : I\!R \to I\!R$ tal que, para todo conjunto $K \subset I\!R$ compacto, temos:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{u\in K} |u - h_N(u)| = 0$$

e

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{u\in K} |W(\lceil uN \rceil/N) - W(h_N(u)) = 0.$$

Isto implica que $y_N \to y$, onde $y = W(u)$ ou $W(u-)$, e portanto $y \in supp(\upsilon_E)$.
Dado que $\lim_{N\uparrow\infty} W(\lceil xN \rceil /N) = W(x)$ e que υ_N converge fracamente para υ_E, segue do Resultado 1 que, com probabilidade 1,

$$\lim_{N\uparrow\infty} d_S(Z(.|W(\lceil xN \rceil /N), \upsilon_n), Z(.|W(x), \upsilon \mathbf{1}\{E\})) = 0.$$

Considere agora o processo $Y(t,x)$, com $t \geq 0$ e $x \in I\!R$ definido por:

$$Y(t,x) = W^{-1}(Z(t|W(x), \upsilon \mathbf{1}\{E\})).$$

Segue também de [15] que para todo $x \in I\!R$, com probabilidade 1,

$$\lim_{N\to\infty} d_S(Y_N(.,x) - Y(.,x)) = 0.$$

Além disso, $Y(.,x)$ tem trajetórias contínuas quase certamente e, para todo $x \in I\!R$ e $T > 0$, com probabilidade 1, temos

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |Y_N(t,x) - Y(t,x)| = 0.$$

2.1 O Processo $Z(t|u, \upsilon_E)$

Como definido anteriormente,

$$Z(t|u, \upsilon_E) = B(\varphi^{-1}(t, u, \upsilon_E)) + u$$

tem espaço de estados $supp(\upsilon_E) = \{W(x), W(x-) : x \in I\!R\}$. Um dos objetivos aqui é descrever como são as funções que pertencem ao domínio $\mathcal{D}_W^Z$ do gerador do processo Z. Para isto vamos descrever o gerador $\mathcal{L}_W^Z$ do processo Z:

Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo de Markov associado a $Z(t|u, \upsilon_E)$, isto é, seja

$$S(t)f(u) = I\!E[f(Z(t|u, \upsilon_E))],$$

para f função real, contínua, limitada em $\{W(x), W(x-) : x \in I\!R\}$ e tal que, para todo $\epsilon > 0$, a função f tem módulo menor que ϵ fora de um subconjunto limitado F do espaço de estados de $Z(t, u, \upsilon \mathbf{1}\{E\})$.

Vamos denotar por

$C(A)$ ao espaço de funções reais contínuas em A,

$C_b(A)$ o espaço de funções reais contínuas e limitadas em A,

$C_c(A)$ o espaço de funções reais contínuas em A com suporte compacto e

$C_0(A)$ o espaço de funções reais contínuas, limitadas em A, tais que para todo $\epsilon > 0$ a funções tenham módulo menor que ϵ fora de um subconjunto limitado $F \subset A$ (funções que se anulam no infinito).

Considere a função de densidade de transição p do Processo de Markov $Z(t|u, \upsilon_E)$ definida em $(0, \infty) \times supp(\upsilon_E)$. A seguir, coletamos alguns resultados relacionados com processos de Markov, que serão utilizados na sequência. A demonstração desses resultados pode ser vista em Petr Mandl (1968) [17].

Para $u \in supp(\upsilon_E)$ e $\delta > 0$, p satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\lim_{t \to 0} t^{-1} \left[1 - \int\limits_{|u-w|<\delta} p(t, u, w) \upsilon_E(dw) \right] = 0$
2. $\lim_{t \to 0} t^{-1} \int\limits_{|u-w|<\delta} (w - u) p(t, u, w) \upsilon_E(dw) = b(u)$
3. $\lim_{t \to 0} t^{-1} \int\limits_{|u-w|<\delta} (u - w)^2 p(t, u, w) \upsilon_E(dw) = 2a(u)$
4. Para toda função $f \in C_0(supp(\upsilon_E))$ e com segunda derivada contínua,

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} \left[\int f(w) p(t, u, w) \upsilon \mathbf{1}\{E\}(dw) - f(u) \right] = a(u) f"(u) + b(u) f'(u),$$

onde a e b são os coeficientes de difusão e o *drift*, respectivamente.

Comparando a definição de gerador com o item 4 acima, tem-se que, num processo satisfazendo as condições $1, 2$, e 3, existe uma estreita relação entre o gerador $\mathcal{L}_W^Z$ e o operador diferencial

$$a(u) \frac{d^2}{du^2} + b(u) \frac{d}{du} = \frac{d}{d\upsilon_E} \frac{d}{du}.$$

Sejam $f, g \in C_0(supp(\upsilon_E))$ tais que

$$g(u) = \frac{d}{d\upsilon_E}\frac{d}{du} f(u) = \mathcal{L}_W^Z f(u).$$

Então,

$$f(u) = \int_0^u \int_0^w g(a)\upsilon_E(d\,a)dw + f(0) + uf'(0).$$

Segue que

$$f(u) = \int_0^u \int_0^w g(a)\upsilon_E(da)dw + c + u\,e, \tag{2.4}$$

onde na equação acima $c = f(0)$ e $e = f'(0)$. Assim, o domínio do gerador do processo Z, denotado por $\mathcal{D}_W^Z$, é o conjunto de funções $f \in C_0(supp(\upsilon_E))$ tais que $f'(u)$ é derivável com respeito a υ_E, e para as quais existe uma função $g \in C_0(supp(\upsilon_E))$ que satisfaz a equação (2.4).

Portanto, $\mathcal{L}_W^Z : \mathcal{D}_W^Z \to C_0(supp(\upsilon_E))$ é o gerador do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ e

$$\mathcal{L}_W^Z = \frac{d}{d\upsilon_E}\frac{d}{du}.$$

Observação. Dada uma função contínua, (estritamente) crescente W e uma função real f, definimos a derivada generalizada de f em relação a W por

$$\frac{df}{dW}(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y) - f(x)}{W(y) - W(x)}$$

sempre que este limite exista.

2.2 O Processo $Y(t,u)$

Observação. Dos resultados obtidos em [15], temos que o processo $Y(t,u) = Y_t$ não é fortemente Markov com respeito à filtração $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y_s : s \leq t)$ e, em particular, não é um processo de Feller.

Denote por $\{x_j : j \geq 1\}$ os pontos de salto de W. Temos que

$$W^{-1}(W(x_j)) = W^{-1}(W(x_j-)).$$

Para achar o gerador do processo Y_t, vamos colocar mais pontos dividindo em dois pontos, os pontos de salto de W, e assim obteremos uma função bijetora W_b. Isto é, seja $\{x_j^- : j \geq 1\}$ e W_b tal que

$W_b : I\!R \bigcup \{x_j^- : j \geq 1\} \to supp(\upsilon_E)$ tal que $W_b(x) = W(x)$ para $x \in I\!R$, e $W_b(x_j^-) = W(x_j-)$ para $j \geq 1$.

A função inversa $W_b^{-1} : supp(\upsilon_E) \to I\!R \bigcup \{x_j^- : j \geq 1\}$, é dada por $W_b^{-1}(W(x)) = x, W_b^{-1}(W(x_j-)) = x_j^-$.

Considere os espaços $(I\!R \bigcup \{x_j^- : j \geq 1\}, d_{W_B})$ e $(supp(\upsilon_E), d)$, onde d_{W_B} é definida da seguinte maneira:

$$d_{W_B}(x_j^-, x_k^-) = |W(x_j-) - W(x_k-)|, \quad d_{W_B}(x_j^-, y) = |W(x_j-) - W(y)|.$$

Então W_b é uma isometría entre os dois espaços métricos acima definidos, pois conserva as distâncias entre os pontos. Assim, os resultados obtidos no processo Z valem também para o processo $U_t = W_b^{-1}(Z_t)$ com espaço de estados $I\!R \bigcup \{x_j^- : j \geq 1\}$.

Vamos estudar o gerador $\mathcal{L}_W^U$ do processo U_t. O domínio $\mathcal{D}_W^U$ do gerador do processo U_t é dado por

$$\mathcal{D}_W^U = \{f \circ W_b : f \in \mathcal{D}_W^Z\},$$

onde $f \circ W_b$ denota a composição de f com W_b.

Sejam $f, g \in C_0(supp(\upsilon_E))$ com $c = f(0)$ e $e = f'(0)$ tais que

$$f(u) = \int_0^u \int_0^w g(a) \upsilon_E(d\,a) dw + c + u\,e.$$

Uma simples troca de variáveis permite escrever

$$f(W_b(x)) = \int_0^{W_b(x)} \int_0^{W_b(y)} g(W_b(z))dW^{-1}(W_b(z))dW_b(y) + c + W_b(x)\, e.$$

Assim, para $x \in I\!R$, $f \circ W_b$, é dada por

$$f \circ W_b(x) = \int_0^{x} \int_0^{y} g \circ W_b(z)d(z)dW(y) + c + W(x)\, e$$

e, escrevendo $F = f \circ W_b$ e $G = g \circ W_b$, segue que

$$F(x) = \int_0^{x} \int_0^{y} G(z)d(z)dW(y) + c + e\, W(x). \tag{2.5}$$

A continuidade em x permite escrever

$$F(x_j^-) = F(x_j-), \quad \forall j \geq 1.$$

Segue que $\mathcal{D}_W^U$ é o conjunto de funções $F \in C_0(I\!R \cup \{x_j^- : j \geq 1\})$ para as quais existe $G \in C_0(I\!R \cup \{x_j^- : j \geq 1\})$ satisfazendo a equação (2.5). Segue que

$$\mathcal{L}_W^U = \frac{d}{dx}\frac{d}{dW} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_W^U\, F = G.$$

Retomando o processo $Y_t = Y(t,x)$, denotamos por $\{T(t) : t \geq 0\}$ ao semigrupo do processo de Markov Y_t, cujo domínio são as funções Borel mensuráveis limitadas $f : I\!R \to I\!R$.

Seja $C_{W,0}(I\!R)$ o conjunto das funções contínuas a direita com limite a esquerda, limitadas e que se anulam em $\pm\infty$, tais que o conjunto de discontinuidades é um subconjunto do conjunto formado pelos pontos de salto de W. Seja $\varphi : I\!R \cup \{x_j^- : j \geq 1\} \to I\!R$ tal que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in I\!R$ e $\varphi(x_j^-) = x_j$ para todo $j \geq 1$. Então podemos escrever $Y_t = \varphi(U_t)$.

Dada a função $H : I\!R \to I\!R$, defina a função

$$H \circ \varphi : I\!R \bigcup \{x_j^- : j \geq 1\} \to I\!R.$$

Temos que

$$\mathcal{L}_W^Y H = \pi \mathcal{L}_W^U H \circ \varphi, \qquad H \in \mathcal{D}_W^Y, \tag{2.6}$$

onde $\pi f : I\!R \to I\!R$ é definida por $\pi f(x) = f(x)$ e $f : I\!R \to I\!R$. $\mathcal{D}_W^Y$ é o conjunto de funções $H \in C_{W,0}(I\!R)$ para as quais existe $G \in C_{W,0}(I\!R)$ e constantes $c, e \in I\!R$ satisfazendo a equação

$$H(x) = \int_0^x \int_0^y G(z)d(z)dW(y) + c + e\,W(x), \qquad x \in I\!R. \tag{2.7}$$

Assim, considerando o operador linear $\mathcal{L}_W^Y : \mathcal{D}_W^Y \to C_{W,0}(I\!R)$ dado por

$$\mathcal{L}_W^Y H = \frac{d}{dx}\frac{d}{dW} H = G,$$

de (2.7) temos que H satisfaz

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x_j+) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_j-) \tag{2.8}$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0+) = \lambda[H(x_j+) - H(x_j-)]. \tag{2.9}$$

Mais algumas definições e resultados são necessárias para o desenvolvimento de nosso trabalho:

Definição 5 *Seja $\mathcal{M}_+$ o espaço de medidas positivas, finitas em $I\!\!T = [0,1)$ e $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ o espaço das funções contínuas à direita com limite à esquerda tomando valores em $\mathcal{M}_+$. Uma trajetória determinística é definida como o suporte de uma medida de probabilidade de Dirac no espaço $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ concentrada nesta trajetória.*

Definição 6 *Um conjunto é relativamente compacto se toda seqüência de pontos do conjunto possui uma subseqüência convergente (cujo limite não precisa pertencer necessariamente ao conjunto).*

Resultado 2 ***(Prohorov)***. *Defina uma métrica no espaço $\mathcal{M}_+$ introduzindo uma família densa enumerável de funções contínuas $\{f_k : k \geq 1\}$ em $I\!\!T$, e definindo a distância $\delta(.,.)$ por:*

$$\delta(\mu,\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{| < \mu, f_k > - < \nu, f_k > |}{1 + | < \mu, f_k > - < \nu, f_k > |},$$

onde $< \mu, f >$ é a integral de f com respeito a μ.

Uma seqüência de medidas de probabilidade $\{Q^N, N \geq 1\}$, no espaço $D([0,T],\mathcal{M}_+)$, é relativamente compacta se e somente se para todo $\epsilon > 0$ e todo $t \in [0,T]$, existe $K_{\epsilon,t} \subset \mathcal{M}_+$, conjunto compacto, tal que

$$Q^N(K_{\epsilon,t}) \geq 1 - \epsilon, \quad N \geq 1$$

e

$$\lim_{\gamma\to 0} \limsup_{N\to\infty} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_T, \theta\leq\gamma} Q^N[\delta(\mu_\tau, \mu_{\tau+\theta}) > \epsilon] = 0 \tag{2.10}$$

para todo $\epsilon > 0$, onde $\mathcal{T}_T$ é a família de tempos de parada limitados por T.

Observação. Convergência fraca induz uma topologia sobre o espaço de probabilidade, e aparece na literatura com o nome de topologia fraca. Certas propriedades do espaco métrico induzido na topologia se transferem para o espaço de probabilidade, e uma aplicacão desse conceito é demonstrar que uma seqüência de probabilidades converge a uma probabilidade específica. O método geralmente empregado para demonstrar este resultado é caracterizado por 3 etapas:

- Mostrar que a seqüência é relativamente compacta.
- Mostrar que o limite é único.
- Caracterizar o limite.

Resultado 3 *([7], capítulo 2) Seja $\{g_k; k \geq 1\}$ uma subfamília densa em $C(I\!\!T)$ com $g_1 = 1$. A família de medidas de probabilidade $(Q^N)_{N\geq 1}$ em $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ é relativamente compacta se para todo inteiro positivo k, a família $Q^N g_k^{-1}$ é relativamente compacta. Aqui $Q^N g_k^{-1}$ é definida por*

$$Q^N g_k^{-1}[A] = Q^N[\pi^N; < \pi^N, g_k > \in A].$$

Definição 7 *Seja $\{T_N(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo associado ao processo $\{Y_N(t) : t \geq 0\}$. Temos que para toda $F \in C_c(\mathbb{R})$ e $\alpha > 0$, o resolvente associado ao semigrupo $\{T_N(t) : t \geq 0\}$, que denotaremos por R_α^N, é definido por*

$$R_\alpha^N F = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_N(t) F dt.$$

O resultado a seguir estabelece algumas propriedades e resultados de convergência do semigrupo $\{T_N(t) : t \geq 0\}$.

Resultado 4 *([15]) Fixe $F \in C_c(\mathbb{R})$. Então*

$$\lim_{t\to 0} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} |T_N(t)F(x/N) - F(x/N)| = 0,$$

e para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} |\alpha R_\alpha^N F(x/N) - F(x/N)| = 0,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} |\alpha R_\alpha^N F(x/N)| \leq \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} |F(x/N)|.$$

Resultado 5 *(Scheffe) Para $h \in L^1(\mathbb{R})$, seja $h_n \in L^1(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^+$, uma seqüência de funções satisfazendo,*

- $h_n \geq 0$
- $h_n(x) \to h(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} h(x)dx.$

Então $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) - h(x)|dx = 0$

Resultado 6 *([7]) Considere uma função limitada $F : \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{R}$, suave, isto é; com a primeira derivada contínua e a segunda derivada quadrado integrável. Para cada $x \in E$, $F(.,x) \in C^2$, onde C^2 é o espaço das funções duas vezes diferenciáveis, existe uma constante finita $C > 0$ tal que*

$$\sup_{(s,x)} |(\partial_s^j F)(s,x)| \leq C$$

para $j = 1, 2$. Denote por $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ a filtração canônica do processo de Markov X_t, isto é, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, e por L o gerador de tal processo. Os processos $M^F(t)$ e $N^F(t)$ definidos por

$$M^F(t) = F(t, X_t) - F(0, X_0) - \int_0^t ds(\partial_s + L)F(s, X_s)$$

$$N^F(t) = (M^F(t))^2 - \int_0^t ds[LF(s, X_s)^2 - 2F(s, X_s)LF(s, X_s)]$$

são $\mathcal{F}_t$ martingais relativos a esta filtração.

2.3 Estudo do Limite Hidrodinâmico

Apresentamos a seguir a demonstração do limite hidrodinâmico do processo em estudo, sendo este o principal resultado de nosso trabalho.

Teorema 1 *Seja $\rho_0 : \mathbb{R} \to [0, 1]$ um perfil de densidade inicial, contínuo, limitado e que se anula no infinito e seja μ^N uma seqüência de medidas produto de Bernoulli tais que:*

$$\mu^N\{\eta; \eta(x) = 1\} = \rho_0(x/N).$$

Então, para todo $t > 0$, a seqüência de medidas empíricas

$$\pi_t^N(du) = \frac{1}{N} \sum_x \eta_t(x) \delta_{x/N}(du)$$

converge em probabilidade à medida $\pi_t(du) = \rho(t, u)du$ cuja função de densidade ρ é a solução da seguinte equação:

$$\begin{cases} \partial_t \rho & = \Delta\rho \text{ nos intervalos } (\gamma_j, \gamma_{j+1}) \\ \partial_x \rho(t, x_j+) & = \partial_x \rho(t, x_j-) \\ \partial_x \rho(t, x_j+) & = \lambda[\rho(t, x_j-) - \rho(t, x_j+)] \end{cases}, \tag{2.11}$$

onde $\rho(t, u) = T(t)\rho_0(u)$ e $\Delta\rho$ é o Laplaciano de ρ.

Estratégia da Demonstração

Vamos demonstrar o teorema em duas etapas. Primeiro demonstraremos que a medida empírica dada no Teorema 1 converge em probabilidade à medida $\pi_t(du) = \rho(t,u)du$ cuja função de densidade é a solução da equação (2.11). Depois demonstraremos que existe uma única solução fraca de (2.11).

Etapa 1:
Para uma medida positiva π de massa total finita e para funções $G \in C_c(I\!R)$, denotamos por $<\pi, G>$ à integral de G com respeito a π, isto é,

$$<\pi, G> = \int G(u)\pi(du).$$

Vamos provar que a medida empírica resolve a equação (2.11) em sentido fraco. Isto é, vamos provar que

$$\pi_t^N \to \pi_t \quad \text{quando} \quad N \to \infty$$

em probabilidade, onde

$$\begin{aligned} \pi_t^N(du) &= \pi^N(\eta_t, du) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \eta_t(x)\delta_{x/N}(du). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Fixe uma realização de W e $T > 0$. Para cada medida de probabilidade $\mu \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, denote por $\mathbb{Q}_\mu^W$ a medida no espaço $D([0,T], \mathcal{M}_+)$ (espaço das funções contínuas a direita com limites à esquerda tomando valores em $\mathcal{M}_+$), induzida pela medida μ. Considere o processo de Markov , evoluindo segundo o gerador

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathcal{N}} f)(\eta)(x) &= c_x\eta(x)(1-\eta(x+1))\{f(\sigma^{x,x+1}\eta) - f(\eta)\} + \\ &\qquad c_{x-1}\eta(x)(1-\eta(x-1))\{f(\sigma^{x,x-1}\eta) - f(\eta)\}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

acelerado por N^2 e começando em μ^N. Aqui $\sigma^{x,x+1}\eta$ é a configuração obtida de η ao intercambiar as variáveis $\eta(x)$ e $\eta(x+1)$, isto é,

$$\sigma^{x,x+1}\eta(y) = \begin{cases} \eta(x+1) & \text{se } y = x, \\ \eta(x) & \text{se } y = x+1, \\ \eta(y) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\mathbb{Q}^W$ a medida de probabilidade em $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ concentrada no caminho determinístico $\pi_t(du) = \rho(t,u)du$, onde $\rho(t,u) = T(t)\rho_0(u)$. Vamos provar que para cada t fixado, π_t^N converge em probabilidade para $\rho(t,u)du$, onde $\rho(t,u) = T(t)\rho_0(u)$ é a solução da equação (2.11) com condição inicial ρ_0. Isto é, se $\mathbb{P}_{\mu^N}^{W,N}$ é a distribuição no espaço $D([0,T],\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ do processo de exclusão $\{\eta_t : t \geq 0\}$ com distribuição inicial μ^N e gerador $\mathcal{L}_\mathcal{N}$ acelerado por N^2, vamos mostrar que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^{W,N} \left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} G(x/N)\eta_{tN^2}(x) - \int_{\mathbb{R}} G(u)\rho(t,u)du \right| > \epsilon \right]$$

é igual a zero para toda função $G \in C_c(\mathbb{R})$ e todo $\epsilon > 0$.

Para levar a termo nosso objetivo, vamos provar que π_t^N converge em distribuição à medida de probabilidade $\mathbb{Q}^W$ concentrada no caminho determinístico $\{\rho(t,u)du, 0 \leq t \leq T\}$, e com isso argumentar, que convergência em distribuição, a uma trajetória determinística contínua implica convergência em probabilidade para $0 \leq t \leq T$.

Provar o comportamento hidrodinâmico do processo então é mostrar que $\mathbb{Q}_\mu^W$ converge para a medida de Dirac concentrada na solução da equação (2.11). Para isso, vamos seguir os seguintes passos:

1. Mostrar que $\mathbb{Q}_\mu^W$ é relativamente compacta (usando o criterio de Prohorov) e, depois mostrar que todas as subseqüências convergentes convergem ao mesmo limite.

2. Examinar os subconjuntos compactos de $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ onde precisamos que seja factível considerar medidas de Dirac concentradas numa trajetória. Para caracterizar todos os pontos limite de $\mathbb{Q}_\mu^W$ usaremos o fato de que, sob $\mathbb{Q}_{\mu^N}^W$, é satisfeita a seguinte identidade:

$$\left\langle \pi_t^N, f_{\alpha,N} \right\rangle = \left\langle \pi_0^N, f_{\alpha,N} \right\rangle + \int_0^t N^2\, \mathcal{L}_\mathcal{N} \left\langle \pi_s^N, f_{\alpha,N} \right\rangle ds + M_t^{\alpha,N},$$

   onde $M_t^{\alpha,N}$ é martingal com respeito à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_s, s \leq t)$ e $f_{\alpha,N} = R_\alpha^N F$.

Etapa 2: Para concluir a prova, devemos mostrar que $M_t^{\alpha,N} \to 0$ quando $N \uparrow \infty$, e que existe uma solução única para a equação (2.11). A prova do limite hidrodinâmico termina com a prova de unicidade para as soluções fracas da equação diferencial parcial que descreve a evolução macroscópica do sistema.

Segue que $\mathbb{Q}_{\mu}^{W}$ tem um único limite $\mathbb{Q}^{W}$, que é a medida de probabilidade concentrada na única solução de (2.11).

Demonstração do Teorema

Seja $T > 0$, fixe uma realização de W e considere uma seqüência de medidas de probabilidade $\mathbb{Q}_{\mu^N}^{W}$ em $D([0,T],\mathcal{M}_+)$, correspondentes ao processo de Markov π_t^N definido na equação (2.12), acelerado por N^2 e começando em μ^N. Assim como consideramos duas escalas de espaço: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_N$, consideramos um tempo macroscopico t e um tempo microscopico acelerado por N^2 com respeito a t, isto é tN^2.

- Primeiro vamos demonstrar que $\mathbb{Q}_{\mu^N}^{W}$ é relativamente compacta. Do Resultado 3, é suficiente estudar a compacidade relativa para $< \pi_t^N, g_k >$, onde $\{g_k, k \geq 1\}$ é uma subfamília densa enumerável de $C(\mathbb{R})$. Assim, introduzimos o operador linear limitado em $C_c(\mathbb{R})$, $R_\alpha^N = (\alpha - \mathcal{L}_W^{Y_N})^{-1}$, o resolvente de $\mathcal{L}_W^{Y_N}$, onde $\mathcal{L}_W^{Y_N}$ é o gerador associado ao processo $\{Y_N(t) : t \geq 0\}$.

  Para toda $F \in C_c(\mathbb{R})$ e $\alpha > 0$, temos

$$R_\alpha^N F = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_N(t) F dt.$$

  Pelo Resultado 3 basta mostrar que a seqüência de medidas correspondentes ao processo $\langle \pi_t^N, R_\alpha^N F \rangle$ é relativamente compacta em $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ para toda $F \in C_c(\mathbb{R})$.

  Fixe $F \in C_c(\mathbb{R})$ e considere $f_{\alpha,N} = R_\alpha^N F$. Denote por $\mathbb{Q}_{\mu^N}^{W} f_{\alpha,N}^{-1}$ a medida de probabilidade em $D([0,T],\mathbb{R})$.

  Temos que $N^2 \mathcal{L}_{\mathcal{N}} \langle \pi_t^N, F \rangle = \langle \pi_t^N, \mathbb{L}_N F \rangle$, onde $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ é o operador definido na equação (2.13) e $\mathbb{L}_N$ é o operador definido na equação (2.1). Seja $f(\eta_t) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} F(\frac{x}{N}) \eta_t(x)$. Segue que

$$\begin{aligned} f(\sigma^{x,x+1}\eta_t) - f(\eta_t) &= \frac{1}{N}\left[F\left(\frac{x+1}{N}\right) - F\left(\frac{x}{N}\right)\right]\eta_t(x) + \\ &\quad \frac{1}{N}\left[F\left(\frac{x}{N}\right) - F\left(\frac{x+1}{N}\right)\right]\eta_t(x+1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{N}} \left\langle \pi_t^N, F \right\rangle &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} c_x \left\{ F\left(\frac{x+1}{N}\right) - F\left(\frac{x}{N}\right) \right\} \eta_t(x) + \\ & \quad \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} c_{x-1} \left\{ F\left(\frac{x-1}{N}\right) - F\left(\frac{x}{N}\right) \right\} \eta_t(x) \\ &= N^{-2} \left\langle \pi_t^N, \mathbb{L}_N F \right\rangle \end{aligned} \tag{2.14}$$

Temos que, sob $\mathbb{Q}^W_{\mu^N}$, a seguinte identidade é satisfeita

$$\left\langle \pi_t^N, f_{\alpha,N} \right\rangle = \left\langle \pi_0^N, f_{\alpha,N} \right\rangle + \int_0^t N^2 \, \mathcal{L}_{\mathcal{N}} \left\langle \pi_s^N, f_{\alpha,N} \right\rangle ds + M_t^{\alpha,N}, \tag{2.15}$$

onde $M_t^{\alpha,N}$ é um martingal com respeito à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_s, s \leq t)$. A equação (2.14) permite escrever

$$\begin{aligned} \left\langle \pi_t^N, f_{\alpha,N} \right\rangle &= \left\langle \pi_0^N, f_{\alpha,N} \right\rangle + \int_0^t \left\langle \pi_s^N, \mathbb{L}_N f_{\alpha,N} \right\rangle ds + M_t^{\alpha,N} \\ &= \left\langle \pi_0^N, f_{\alpha,N} \right\rangle + \int_0^t \{\alpha \left\langle \pi_s^N, f_{\alpha,N} \right\rangle - \left\langle \pi_s^N, F \right\rangle\} ds + M_t^{\alpha,N}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para verificar o limite que corresponde à equação (2.10) vamos estudar o que acontece com o segundo e o terceiro termos da direita da equação (2.16).

Defina $N_t^{\alpha,N} = (M_t^{\alpha,N})^2 - \int_0^t A_s^{\alpha,N} ds$ onde

$$A_t^{\alpha,N} = N^2 \mathcal{L}_{\mathcal{N}} \left\langle \pi_t^N, f_{\alpha,N} \right\rangle^2 - 2N^2 \left\langle \pi_t^N, f_{\alpha,N} \right\rangle \mathcal{L}_{\mathcal{N}} \left\langle \pi_t^N, f_{\alpha,N} \right\rangle.$$

Da equação (2.16) e pelo Resultado 6, segue que $N_t^{\alpha,N}$ é um martingal.

Agora, $A_s^{\alpha,N}$ pode ser escrito como

$$- \left\langle \pi_s^N, f_{\alpha,N} \right\rangle \left\langle \pi_s^N, \mathbb{L}_N f_{\alpha,N} \right\rangle.$$

Segue que

$$\begin{aligned} A_s^{\alpha,N} &= \left[\sum_{x\in\mathbb{Z}} c_x\{f_{\alpha,N}(x+1/N) - f_{\alpha,N}(x/N)\}\{\eta_s(x)-\eta_s(x+1)\}\right] \\ &\quad \times \left[\sum_{x\in\mathbb{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)\eta_s(x)\right] \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} c_x(\nabla_N f_{\alpha,N})(x/N)^2\{\eta_s(x+1)-\eta_s(x)\}^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde ∇_N é o Gradiente discreto definido por:

$$(\nabla_N g)(x/N) = N\{g(x+1/N) - g(x/N)\}.$$

Para $\tau \in \mathcal{T}_T$ e $\theta \leq \gamma$, como na equação (2.10), temos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{\mu_N}^{W,N}}[(M_{\tau+\theta}^{\alpha,N} - M_\tau^{\alpha,N})^2] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{\mu_N}^{W,N}}[\int_\tau^{\tau+\theta} A_s^{\alpha,N} ds]. \tag{2.18}$$

Como $f_{\alpha,N}$ é a solução de

$$\alpha f_{\alpha,N} - \mathbb{L}_N^{X'} f_{\alpha,N} = F,$$

onde $\mathbb{L}_N^{X'}$ é o gerador do processo $N^{-1}X_N(t)$, se multiplicarmos a identidade acima por $N^{-1}f_{\alpha,N}$ e somarmos em x obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)^2 &- \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)\mathbb{L}_N^{N^{-1}X} f_{\alpha,N}(x/N) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)F(x/N). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Além disso

$$\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)\mathbb{L}_N^{X'} f_{\alpha,N(x/N)}$$

é igual a

$$\begin{aligned} N\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} c_x f_{\alpha,N}(x/N) \quad &\times \quad \{f_{\alpha,N}(\frac{x+1}{N}) - f_{\alpha,N}(x/N)\} + \\ & \quad c_{x-1} f_{\alpha,N}(x/N)\{f_{\alpha,N}(\frac{x-1}{N}) - f_{\alpha,N}(x/N)\} \\ &= \quad -\frac{1}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} c_x(\nabla_N f_{\alpha,N})(x/N)^2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $\mathbb{L}_N^{X'}$ é o gerador do processo $N^{-1}X_N(t)$.

Substituindo (2.20) em (2.19), segue que

$$\frac{\alpha}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)^2 + \frac{1}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} c_x(\nabla_N f_{\alpha,N})(x/N)^2 =$$
$$\frac{1}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)F(x/N).$$

Do Resultado 4 e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\frac{\alpha}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} f_{\alpha,N}(x/N)^2 + \frac{1}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} c_x(\nabla_N f_{\alpha,N})(x/N)^2 \le \frac{1}{\alpha N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} F(x/N)^2.$$

Agora, como $F \in C_c(\mathbb{R})$, temos que $\frac{1}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} F(x/N)^2$ é limitada uniformemente em N. Logo,

$$\sup_N \frac{1}{N}\sum_{x\in\boldsymbol{Z}} c_x(\nabla_N f_{\alpha,N})(x/N)^2 \le \frac{C(f)}{\alpha}, \tag{2.21}$$

onde $C(f) > 0$ é uma constante finita que depende só da função f.

Substituindo (2.17) em (2.18), e fazendo uso da desigualdade (2.21), segue que (2.18) é limitado superiormente por

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{W,N}_{\mu_N}}[\int_\tau^{\tau+\theta} A_s^{\alpha,N} ds] \le \frac{C(f)\theta}{\alpha N}. \tag{2.22}$$

Por outro lado, retomando o segundo termo da direita da equação (2.16), o Resultado 4, nos permite afirmar que

$$\left| \int_{\tau}^{\tau+\theta} \{\alpha \left\langle \pi_s^N, f_{\alpha,N} \right\rangle - \left\langle \pi_s^N, F \right\rangle\} ds \right| \leq C(f)\theta. \tag{2.23}$$

Assim, como $\tau \in \mathcal{T}_T$, o segundo termo da direita da equação (2.16) satisfaz a segunda parte do resultado de Prohorov.

Com isto, e usando a desigualdade de Doob e as desigualdades (2.22) e (2.23), provamos (2.10). Temos que

$$\lim_{\gamma \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T, \theta \leq \gamma} \mathbb{Q}_{\mu^N}^W [| \left\langle \pi_t^N, R_\alpha^N F \right\rangle, \left\langle \pi_{t+\theta}^N, R_\alpha^N F \right\rangle | > \epsilon] = 0. \tag{2.24}$$

Além disso, como $\sup_N \frac{\alpha}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |f_{\alpha,N}(x/N)| \leq C(F)$, segue que

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{N \geq 1} | \left\langle \pi_t^N, R_\alpha^N F \right\rangle | \leq \frac{C(F)}{\alpha}.$$

Portanto, da desigualdade acima e da Equação (2.24), o Teorema de Prohorov permite afirmar que $\left\langle \pi_t^N, R_\alpha^N F \right\rangle$ é relativamente compacta.

Do Resultado 3, segue que $\mathbb{Q}_{\mu_N}^W$ é relativamente compacta, pois para toda $f \in C_c(\mathbb{R})$, considerando que existe no máximo uma partícula por sítio, segue que,

$$| \left\langle \pi_t^N, R_\alpha^N(\alpha f) \right\rangle - \left\langle \pi_t^N, f \right\rangle | \leq \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |\alpha f_{\alpha,N}(x/N) - f(x/N)|.$$

Do Resultado 4,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_{\mu_N}^{W,N} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \left\langle \pi_t^N, R_\alpha^N(\alpha f) \right\rangle - \left\langle \pi_t^N, f \right\rangle \right| > \epsilon \right] = 0.$$

- Vamos agora caracterizar os pontos limites de $\mathbb{Q}_{\mu_N}^W$. O objetivo é demonstrar que dada $F \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_{\mu_N}^{W,N} \left[\left| \left\langle \pi_t^N, F \right\rangle - \int_{\mathbb{R}} F(x)\rho(t,x)dx \right| > \epsilon \right] = 0, \tag{2.25}$$

para todo $0 \leq t \leq T$, $\epsilon > 0$, onde $\rho(t,x) = T(t)\rho_0(x)$ satisfaz a equação (2.11).

Lema 1 *Fixe uma realização do processo W. Para $F \in C_c(\mathbb{R})$ e $t \geq 0$,*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}^{W,N}_{\mu_N}\left[\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} F(x/N)\eta_t(x) - \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} T_N(t)F(x/N)\eta_0(x)\right]^2 = 0.$$

Demonstração

Considere um conjunto de processos de Poisson independentes $(N_x(t) : x \in \mathbb{Z})$ com parâmetro c_x.

Os resultados de K. Nagy em [18] (2002) afirmam que o processo η_t pode ser escrito como

$$d\eta_t(x) = (\eta_{t^-}(x+1) - \eta_{t^-}(x))dN_x(t) + (\eta_{t^-}(x-1) - \eta_{t^-}(x))dN_{x-1}(t). \tag{2.26}$$

Seja $M_t^x = M_t^{x-1,x} - M_t^{x,x+1}$, com $M_0^{x,x+1} = 0$ e

$$dM_t^{x-1,x} = (\eta_{t-}(x) - \eta_{t-}(x-1))d(N_x(t) - c_x t).$$

A equação (2.26) pode ser escrita como

$$\eta_t(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} p_t^N(x,y)\eta_0(y) + \sum_{y\in\mathbb{Z}} \int_0^t p_{t-s}^N(x,y)dM_s^y, \tag{2.27}$$

onde para $x, y \in \mathbb{Z}$, $p_t^N(x,y) = P[X_N(t,x) = y]$ são as probabilidades de transição do passeio aleatório X_N. Como p_t^N é simétrica,

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} F(x/N)\eta_t(x) \quad &= \quad \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} (T_N(t)F)(x/N)\eta_0(x) + \\ &\quad\ \frac{1}{N}\sum_{y\in\mathbb{Z}} \int_0^t (T_N(t-s)F)(y/N)dM_s^y. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Para demonstrar o lema basta demonstrar que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}^{W,N}_{\mu^N}[\frac{1}{N}\sum_{y\in\mathbb{Z}} \int_0^t (T_N(t-s)F)(y/N)dM_s^y]^2 = 0.$$

Temos que

$$\frac{1}{N}\sum_{y\in\mathbb{Z}}\int_0^t (T_N(t-s)F)(y/N)d(M_s^{y-1,y}-M_s^{y,y+1}) =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{y\in\mathbb{Z}}\int_0^t \left[(T_N(t-s)F)(y/N)-T_N(t-s)F)(y+1/N)\right]dM_s^{y-1,y}.$$

Além disso, $N_x(t)$ é um processo de Poisson com parâmetro c_x; logo, $N_x(t)-c_xt$ é um martingal para todo $x\in\mathbb{Z}$. Como $(\eta_{t^-}(x+1)-\eta_{t^-}(x))$ é previsível com respeito a $\mathcal{F}_t=\sigma\{N_x(s)-c_xs, s\leq t\}$, $M_s^{x-1,x}$ também é um martingal e portanto M_s^x também. Observe que $N_x(t)-c_xt, x\in\mathbb{Z}$ são $\mathcal{F}_t$ martingais independentes, com incrementos independentes, e com variação quadrática igual a c_xt. Segue que

$$\mathbb{E}_{\mu^N}^{W,N}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{y\in\mathbb{Z}}\int_0^t \left[T_N(t-s)F(y/N)-T_N(t-s)F(y+1/N)\right]$$
$$\times(\eta(y+1)-\eta(y))_{s^-}d(N_y(s)-c_ys)\Big\}^2$$

$$=\frac{N^2}{N^2}\sum_{y\in\mathbb{Z}}c_y\mathbb{E}_{\mu^N}^{W,N}\int_0^t\left[(T_N(t-s)F)(y/N)-(T_N(t-s)F)(y+1/N)\right]^2$$
$$\times\left(\eta_{s^-}(y+1)-\eta_{s^-}(y)\right)^2ds$$

$$\leq\sum_{y\in\mathbb{Z}}c_y\int_0^t\left[(T_N(t-s)F)(y/N)-T_N(t-s)F)(y+1/N)\right]^2ds. \tag{2.29}$$

A equação de Kolmogorov para $T_N(t)F$ permite escrever

$$\begin{aligned}\partial_tT_N(t)F(x/N) &= N^2c_x\left(T_N(t)F(x+1/N)-T_N(t)F(x/N)\right)\\ &\quad +N^2c_{x-1}\left(T_N(t)F(x-1/N)-T_N(t)F(x/N)\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\partial_t \sum_{x\in Z}(T_N(t)F(x/N))^2 = 2\sum_{y\in Z} T_N(t)F(x/N)\partial_t T_N(t)F(x/N) \\
= \; & 2N^2 \sum_{x\in Z} c_x \left[T_N(t)F(x/N)\left(T_N(t)F(x+1/N) - T_N(t)F(x/N)\right)\right. \\
& \left. + \left(T_N(t)F(x/N) - T_N(t)F(x+1/N)\right)\right] \\
= \; & -2N^2 \sum_{x\in Z} c_x \left(T_N(t)F(x/N) - T_N(t)F(x+1/N)\right)^2
\end{aligned}
$$

e segue que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t \sum_{y\in \mathbb{Z}} c_y \left[(T_N(t-s)F)(y/N) - (T_N(t-s)F)(y+1/N)\right]^2 ds \\
& \qquad = \frac{1}{N^2}\sum_{y\in \mathbb{Z}}[(T_N(0)F(x/N))^2 - (T_N(t)F(x/N))^2] \\
& \qquad \le \frac{1}{N^2}\sum_{y\in \mathbb{Z}}(T_N(0)F(x/N))^2 \\
& \qquad = \frac{1}{N^2}\sum_{y\in \mathbb{Z}} F^2(x/N). \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Como $F \in C_c(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum\limits_{y\in\mathbb{Z}} F^2(x/N) = 0$. A equação (2.30) e a equação (2.29) são suficientes para provar o lema.

■

Voltemos agora à equação (2.25)

$$
\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}^{W,N}_{\mu_N}\left[\left|\langle \pi^N_t, F\rangle - \int_{\mathbb{R}} F(u)\rho(t,u)du\right| > \epsilon\right] = 0.
$$

Nosso objetivo é demonstrar que para $F \in C_c(\mathbb{R})$ e para todo $0 \le t \le T, \epsilon > 0$, o limite acima é satisfeito. Isto é, do Lema 1, precisamos mostrar que

$$
\lim_{N\to\infty} \mu_N\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}} T_N(t)F(x/N)\eta(x) - \int_{\mathbb{R}} F(u)\rho(t,u)du\right| > \epsilon\right] = 0. \qquad (2.32)
$$

Sem perda de generalidade, assuma que $F \geq 0$. Note que

$$\int F(u)\rho(t,u)du = \int T(t)F(u)\rho_0(u)du.$$

Como a configuração inicial do processo de exclusão satisfaz

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} F(x/N)\eta_0(x) = \int F(u)\rho_0(u)du$$

em probabilidade, para toda $F \in C_c(\mathbb{R})$, e um perfil inicial ρ_0 dado, é suficiente mostrar que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\mu^N} \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} |T_N(t)F(x/N) - T(t)F(x/N)|\, \eta_0(x) = 0. \tag{2.33}$$

Como temos no máximo uma partícula por sítio,
$\mathbb{E}_{\mu^N} \frac{1}{N} \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}} |T_N(t)F(x/N) - T(t)F(x/N)|\, \eta_0(x)$
$\leq \frac{1}{N} \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}} |T_N(t)F(x/N) - T(t)F(x/N)|\,.$

Temos que $T_N(t)F$ e $T(t)F$ satisfazem as hipoteses do Resultado 5, pois $T_N(t)F \geq 0$ e $T_N(t)F(x)$ converge ponto a ponto para $T(t)F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $T_N(t)F(x) := T_N(t)F(\lceil xN \rceil / N)$ (do Resultado 2.6 temos que T(t) é um semigrupo de contração fortemente contínuo em $C_{W,0}(\mathbb{R})$). Como $T(t)F(x) = \int p_t(x,y)F(y)dy$, onde $p_t(x,y)$ é a função de transição do processo Y_t, então $\int\limits_{\mathbb{R}} T(t)F(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}} F(u)du$, e portanto é satisfeito o terceiro item do Resultado 5, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} T_N(t)F(u) &= \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \sum_{y\in\mathbb{Z}} F(x/N)p_t^N(x,y)F(x/N) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{y\in\mathbb{Z}} F(y/N) \sum_{x\in\mathbb{Z}} p_t^N(y,x) = \frac{1}{N} \sum_{y\in\mathbb{Z}} F(y/N).
\end{aligned}$$

$T_N(t)F$ e $T(t)F$ satisfazem as hipoteses do Resultado 5 e, portanto

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}} |T_N(t)F(x/N) - T(t)F(x/N)| = 0.$$

Provamos, portanto (2.33), (2.32) e (2.25).

Como provamos que $\mathbb{Q}^W_{\mu^N}$ é relativamente compacta e além disso caracterizamos os pontos limite desta seqüência, segue que $Q^W_{\mu^N}$ converge para $\mathbb{Q}^W$ quando $N \uparrow \infty$.

A demonstração do Teorema 1 segue da convergêngia de $Q^W_{\mu^N}$ para $\mathbb{Q}^W$ quando $N \uparrow \infty$ pois, como $\int_{\mathbb{R}} F(u)\rho(t,u)du$ é uma função contínua em $t \geq 0$, e se $G : [0,T] \to \mathbb{R}$ é também uma função contínua, a aplicação de $D([0,T], \mathcal{M}_+) \to \mathbb{R}$ que associa à trajetória $\{\pi_t, 0 \leq t \leq T\}$ o número $\sup_{0 \leq t \leq T} |< \pi_t, F > -G(t)|$, é portanto contínua na topologia de Skorohod. Segue que

$$\mathbb{Q}^W\{\pi : \pi_t(du) = \pi_t(u)du\} = 1.$$

■

A demonstração do comportamento hidrodinâmico precisa da demonstração de unicidade para as soluções da equação diferencial parcial que descreve a evolução macroscópica do sistema.

Para tanto, considere o espaço das funções quadrado integráveis que notaremos por L^2. Considere um perfil inicial $\rho_0 \in L^2$ e seja $R_\alpha = (\alpha - \mathcal{L}^Y_W)^{-1}$, o resolvente de $\mathcal{L}^Y_W$, onde $\mathcal{L}^Y_W$ é o gerador associado ao processo $\{Y(t) : t \geq 0\}$.

Sejam ρ^1 e ρ^2 duas soluções de (2.11). Seja $\bar{\rho}_t = \rho^1_t - \rho^2_t$. Segue que

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle \bar{\rho}_t, R_\alpha \bar{\rho}_t \rangle &= 2 \left\langle \bar{\rho}_t, \mathcal{L}^Y_W R_\alpha \bar{\rho}_t \right\rangle \\
&= \left\langle \bar{\rho}_t^{\,2} \right\rangle + \alpha \langle \bar{\rho}_t, R_\alpha \bar{\rho}_t \rangle
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\partial_t \langle \bar{\rho}_t, R_\alpha \bar{\rho}_t \rangle \leq \alpha \langle \bar{\rho}_t, R_\alpha \bar{\rho}_t \rangle .$$

Portanto,

$$\langle \bar{\rho}_t, \bar{\rho}_t \rangle \leq \langle \bar{\rho}_0, \bar{\rho}_0 \rangle e^{\alpha t}$$

Assim, concluímos que $\rho^1 = \rho^2$, o que define a unicidade.

■

Do Teorema 1 podemos obter o limite hidrodinámico "annealed" para o processo de exclusão em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que, com taxa β_x, os valores das variáveis $\eta(x)$ e $\eta(x+1)$ são intercambiados.

Dado $T > 0$ e uma medida de probabilidade μ em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, seja $\mathbb{P}^{\beta,N}_\mu$ a lei no espaço $D([0,T], \{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ do processo de exclusão $\{\eta_t : t \geq 0\}$ com distribuição inicial μ e gerador L dado na equação (1.1) acelerado por N^2. A esperança com respeito a $\mathbb{P}^{\beta,N}_\mu$ será denotada por $\mathbb{E}^{\beta,N}_\mu$.

Teorema 2 *Seja $\rho_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$ uma função uniformemente contínua e seja $\{\mu_N : N \geq 1\}$ uma família de medidas de probabilidade em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ associadas a ρ_0. Isto é,*

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\{|\left\langle \pi_0^N, H\right\rangle - \int_{\mathbb{R}} H(u)\rho_0(u)du| > \delta\} = 0,$$

para toda $H \in C_c(\mathbb{R})$ e todo $\delta > 0$. Então, para todo $T > 0$, $\delta > 0$ e todo $H \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\lim_{N\to\infty} \int \mathbb{P}_\mu^{\beta,N}\big[\sup_{0\leq t\leq T} |\left\langle \pi_t^N, H\right\rangle - \int_{\mathbb{R}} H(u)(T_N^\beta(t)\rho_0)(\lceil uN\rceil /N)du| > \delta\big]\mathcal{D}(d\beta) = 0, \tag{2.34}$$

onde $T_N^\beta(t)$ é o semigrupo de Markov associado ao passeio aleatório $X_N^\beta(t|.)/N$ e $(A, \Delta, \mathcal{D})$ é o espaço de probabilidade onde estão definidas as taxas $\beta_x, x \in \mathbb{Z}$.

Demonstração
Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ que contém o suporte de H. Da definição de semigrupo temos que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \Big|\int_{\mathbb{R}} H(u)\{T(t)\rho_0(u) - T_N(t)\rho_0(u)\}du\Big|$$

é limitado superiormente por

$$C(H) \sup_{0\leq t\leq T} \int_K \mathbb{E}[\ |\rho_0(Y(t,u)) - \rho_0(Y_N(t,u))|\ ]du,$$

onde $C(H)$ é uma função que depende só de H.

Como ρ_0 é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ para o qual a equação acima é menor ou igual a

$$C(H)\epsilon + C(H,\rho_0) \int_K \mathbb{P}\big[\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t,u) - Y_N(t,u)| > \delta\big]du,$$

onde $C(H,\rho_0)$ é uma função que depende de H e do perfil inicial.

Dos resultados obtidos para os processos $Y(t,u)$ e $Y_N(t,u)$ e do Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{N\to\infty} C(H,\rho_0) \int_K \mathbb{P}\big[\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t,u) - Y_N(t,u)| > \delta\big]du = 0,$$

para todo $\delta > 0$.

Portanto,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\le t\le T} \Big| \int_{\mathbb{R}} H(u)\{T(t)\rho_0(u) - T_N(t)\rho_0(u)\}du \Big| = 0 \tag{2.35}$$

Da equação (2.35) e do Teorema 1 segue que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}^{W,N}_{\mu_N}\Big[\sup_{0\le t\le T} |\big\langle \pi^N_t, H\big\rangle - \int_{\mathbb{R}} H(u)(T_N(t)\rho_0)(u)du| > \delta\Big] = 0.$$

Como, para cada $N \geq 1$,$\{c_{x,N} : x \in \mathbb{Z}\}$ tem a mesma distribuição que $\{\beta_x : x \in \mathbb{Z}\}$, temos que

$$\mathbb{P}^{W,N}_{\mu_N}\Big[\sup_{0\le t\le T} |\big\langle \pi^N_t, H\big\rangle - \int_{\mathbb{R}} H(u)(T_N(t)\rho_0)(u)du| > \delta\Big]$$

$$= \mathbb{P}^{\beta,N}_{\mu_N}\Big[\sup_{0\le t\le T} |\big\langle \pi^N_t, H\big\rangle - \int_{\mathbb{R}} H(u)(T^\beta_N(t)\rho_0)(u)du| > \delta\Big]$$

em distribuição.

■

Capítulo 3

Conglomerados

Vamos obter uma cota superior e uma inferior para a distribuição do que chamamos de tempo de escape da partícula na origem. Mais precisamente,fixe j e considere um perfil inicial C_j que dá probabilidades muito altas para as partículas estarem posicionadas nos sítios $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$, j inteiro positivo, e probabilidades muito próximas de zero fora desses sítios, neste caso o tempo de escape da partícula na origem é o tempo no qual a partícula que está inicialmente na origem consegue se movimentar pela primeira vez. Considere o seguinte perfil de densidade inicial $\rho_0^j : I\!R \to [0,1]$, dado por

$$\rho_0^j(u/N) = \begin{cases} \exp\{\frac{-1}{(u+j+1)(j+1-u)}\} + 1 - \exp\{\frac{-1}{(j+1)^2}\} & -j-1 < u < j+1 \\ 1 - \exp\{\frac{-1}{(j+1)|u|}\} & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.1}$$

para $j \geq 1$ um inteiro fixado.

Seja μ^N uma seqüência de medidas produto de Bernoulli tais que:

$$\mu^N\{\eta; \eta(x) = 1\} = \rho_0^j(x/N).$$

Temos que o comportamento hidrodinâmico do processo de exclusão é descrito pela equação (2.11)

$$\begin{cases} \partial_t \rho_j & = & \Delta \rho_j \text{ nos intervalos } (\gamma_j, \gamma_{j+1}) \\ \partial_x \rho_j(t, x_j+) & = & \partial_x \rho_j(t, x_j-) \\ \partial_x \rho_j(t, x_j+) & = & \lambda[\rho_j(t, x_j-) \ - \ \rho_j(t, x_j+)] \\ \rho_j(0,.) & = & \rho_0^j(.), \end{cases}$$

onde $\rho_j(t,u) = T(t)\rho_0^j(u)$.

Para uma realização de W, seja $\rho_{j,t}^{N,W}(x) = \mathbb{E}_{\mu^N}[\eta_t(x)]$. Como anteriormente, para simplificar a notação omitiremos a dependência de W em $\rho_{j,t}^{N,W}(x)$ e escreveremos $\rho_{j,t}^{N}(x)$.

$\rho_{j,t}^N : \mathbb{Z} \to [0,1]$ é a solução da equação linear discreta dada por:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t^N(x) &= N\{c_x \nabla_N \rho_t^N(x) - c_{x-1}\nabla_N \rho_t^N(x-1)\} \\ \rho_0^N(x) &= \rho_0^j(x/N) \end{cases}$$

onde para $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\nabla_N\, h)(x) = N[h(x+1) - h(x)]$ e c_x a função definida na equação (2.2).

Resultado 7 *([5]) Fixe um perfil $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a quarta derivada limitada. Seja $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a solução da equação do calor com perfil inicial u_0,*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \partial_x^2 u(t,x) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{cases}$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina $u_t^N(x)$ como a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} (d/dt)u_t^N(x) &= (\Delta_N u_t^N)(x) \\ u_0^N(x) &= u_0(x/N) \end{cases}$$

onde Δ_N representa o Laplaciano discreto. Então, existe uma constante finita $C_0 > 0$ tal que

$$\left| u_t^N(x) - u(t, x/N) \right| \leq \frac{C_0 t}{N^2} \tag{3.3}$$

para todo $N \geq 1, t \geq 0, x \in \mathbb{Z}$

Em [5], esse resultado é colocado como uma aproximação da equação do calor por soluções da equação de calor discreta. Este resultado afirma que u^N aproxima u na ordem N^{-2}.

Vamos considerar uma aproximação a tempo discreto da equação (2.11).

Para cada $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$, defina $\rho_l^{\delta,N}(k),\ k \in \mathbb{Z},\ l \geq 0$ pela seguinte fórmula de recorrência

$$\begin{aligned} \rho_{l+1}^{\delta,N}(k) &= \rho_l^{\delta,N}(k) + \delta N^2[c_{x,N}\rho_l^{\delta,N}(k+1) + c_{x-1,N}\rho_l^{\delta,N}(k-1) \\ &\quad -(c_{x,N} + c_{x-1,N})\rho_l^{\delta,N}(k)] \\ \rho_0^{\delta,N}(k) &= \rho_0(k/N) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto, se existir uma marca de Poisson entre os sítios k e $k+1$, temos

$$\rho_{l+1}^{\delta,N}(k) = \rho_l^{\delta,N}(k) + \delta N^2[\frac{\lambda}{N}\rho_l^{\delta,N}(k+1) + \rho_l^{\delta,N}(k-1) - (1+\frac{\lambda}{N})\rho_l^{\delta,N}(k)]$$

$$\rho_{l+1}^{\delta,N}(k+1) = \rho_l^{\delta,N}(k) + \delta N^2[\rho_l^{\delta,N}(k+1) + \frac{\lambda}{N}\rho_l^{\delta,N}(k-1) - (1+\frac{\lambda}{N})\rho_l^{\delta,N}(k)].$$

Caso contrário, $c_{k,N} = c_{k-1,N} = c_{k+1,N} = 1$ na Equação (3.4).

Proposição 1 *Tome $\delta N^2 < 1/2$. Então existe uma constante finita $C(\rho_0)$ tal que*

$$|\rho_l^{\delta,N}(k) - \rho(\delta l, k/N)| \leq C(\rho_0)\delta l\{\delta + \frac{1}{N^2}\} \quad \forall l \geq 0$$

onde $\rho(.,.)$ é a solução da equação de difusão com fronteiras (2.11).

Demonstração
Vamos denotar por k_i e (k_i+1) aos sítios tais que a marca de Poisson γ_i está entre eles. Primeiro vamos considerar os sítios pertencentes ao intervalo $((k_{i-1}+1), k_i)$. Observe que o Resultado 7 para os sítios pertencentes a estes intervalos, permite afirmar que

$$|\rho_l^{\delta,N}(k) - \rho(\delta l, k/N)| \leq C_1(\rho_0)\delta l\{\delta + \frac{1}{N^2}\} \quad \forall l \geq 0.$$

Vamos estudar o que acontece nos sítios k_i e $(k+1)_i$.

Definimos os quocientes de diferenças para frente e para trás para todo $x \in \mathbb{Z}$:

$$\partial_x V_t^N(x) = N(V_t^N(x+1) - V_t^N(x))$$

$$\bar{\partial}_x V_t^N(x) = N(V_t^N(x) - V_t^N(x-1))$$

Assim a equação de diferenças pode ser escrita como

$$\partial_x[\bar{\partial}_x V_t^N(x)] \quad = \quad N^2[V_t^N(x+1) + V_t^N(x-1) - 2V_t^N(x)].$$

Segue que,

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho_l^{\delta,N}(k_i) &= N^2[\frac{\lambda}{N}\rho_l^{\delta,N}(k_i+1)+\rho_l^{\delta,N}(k_i-1)-(1+\frac{\lambda}{N})\rho_l^{\delta,N}(k_i)] \\
&= \partial_x[\bar{\partial}_x \rho_l^{\delta,N}(k_i)]+N^2(\frac{\lambda}{N}-1)[\rho_l^{\delta,N}((k+1)_i)-\rho_l^{\delta,N}(k_i)]. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Vamos considerar o operador $\mathbf{E}_{\delta N^2}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{Z}$,

$$
\mathbf{E}_{\delta N^2}\rho_l^{\delta,N}(x)=\rho_l^{\delta,N}(x)+\delta N^2[\rho_l^{\delta,N}(x+1)+\rho_l^{\delta,N}(x-1)-2\rho_l^{\delta,N}(x)].
$$

Quando $\delta N^2 < 1/2$ os coeficientes do operador $\mathbf{E}_{\delta N^2}$ são todos positivos e a soma deles é um. Logo, pela definição do operador $\mathbf{E}_{\delta N^2}$ e de $\rho_l^{\delta,N}$ nos sítios k_i e $(k+1)_i$, temos que

$$
\rho_{l+1}^{\delta,N}(k_i)=\mathbf{E}_{\delta N^2}\rho_l^{\delta,N}(k_i)+\delta N^2(\frac{\lambda}{N}-1)[\rho_l^{\delta,N}((k+1)_i)-\rho_l^{\delta,N}(k_i)], \qquad (3.6)
$$

$$
\rho_{l+1}^{\delta,N}((k+1)_i)=\mathbf{E}_{\delta N^2}\rho_l^{\delta,N}((k+1)_i)+\delta N^2(\frac{\lambda}{N}-1)[\rho_l^{\delta,N}(k_i)-\rho_l^{\delta,N}((k+1)_i)]. \qquad (3.7)
$$

Por outro lado, para todo $x \in (\gamma_{i-1},\gamma_i)\bigcup(\gamma_i,\gamma_{i+1})$, $\rho(t,x)$ satisfaz a equação do calor

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho(t,x) = \partial_x^2 \rho(t,x) \\
\rho(0,x) = \rho_0(x)
\end{cases}
$$

Portanto, temos, por expansão de Taylor, que para $y \in \{k_i,(k+1)_i\}$,

$$
\begin{aligned}
\rho(\delta(t+1),y/N) &= \rho(\delta t,y/N)+\delta(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\delta t,y/N))+O(\delta^2) \\
&= \rho(\delta t,y/N)+\delta(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(\delta t,y/N))+O(\delta^2) \\
&= \rho(\delta t,y/N)+\delta(\partial_x\bar{\partial}_x\rho(\delta t,y/N)+O(N^{-2}))+O(\delta^2).
\end{aligned}
$$

Segue que,

$$
\partial_t\rho(\delta t,y/N)-\partial_x\bar{\partial}_x\rho(\delta t,y/N)=O(N^{-2}+\delta). \qquad (3.8)
$$

Agora, para $y \in \{k_i,(k+1)_i\}$, seja $z(\delta l,y/N)=\rho_l^{\delta,N}(y)-\rho(\delta l,y/N)$. Logo, das equações (3.8),(3.6) e (3.7), segue que

$$\partial_t z(\delta l, k_i/N) - \partial_x \bar{\partial}_x z(\delta l, k_i/N) = N^2(\frac{\lambda}{N} - 1)[\rho_l^{\delta,N}((k+1)_i) - \rho_l^{\delta,N}(k_i)] - O(N^{-2} + \delta).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} z(\delta(l+1), k_i/N) &= \mathbf{E}_{\delta N^2} z(\delta(l+1), k_i/N) + \delta N^2(\frac{\lambda}{N} - 1)[\rho_l^{\delta,N}((k+1)_i) - \rho_l^{\delta,N}(k_i)] \\ &\quad -\delta O(N^{-2} + \delta) \\ &= \mathbf{E}_{\delta N^2}^{l+1} z(0, k_i/N) - \delta \sum_{j=0}^{l} \mathbf{E}_{\delta N^2}^{l-j} O(N^{-2} + \delta) + \\ &\quad \delta N^2(\frac{\lambda}{N} - 1) \sum_{j=0}^{l} \mathbf{E}_{\delta N^2}^{l-j} [\rho_j^{\delta,N}((k+1)_i) - \rho_j^{\delta,N}(k_i)]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |z(\delta(l), k_i/N)| &\leq \delta \sum_{j=0}^{l-1} |O(N^{-2} + \delta)| + \delta N^2(\frac{\lambda}{N} - 1) \times \\ &\quad |\sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{E}_{\delta N^2}^{l-j-1} [\rho_j^{\delta,N}((k+1)_i) - \rho_j^{\delta,N}(k_i)]| \\ &\leq C_2(\rho_0)\delta l(\delta + \frac{1}{N^2}) + \delta N^2(\frac{\lambda}{N} - 1) \times \\ &\quad |\sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{E}_{\delta N^2}^{l-j-1} [\rho_j^{\delta,N}((k+1)_i) - \rho_j^{\delta,N}(k_i)]| \end{aligned} \tag{3.10}$$

e, com o mesmo argumento usado para $y = (k+1)_i$, segue que

$$\begin{aligned} |z(\delta(l), (k+1)_i/N)| \leq C_2(\rho_0)\delta l(\delta + \frac{1}{N^2}) + \delta N^2(\frac{\lambda}{N} - 1) \\ \times |\sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{E}_{\delta N^2}^{l-j-1} [\rho_j^{\delta,N}(k_i) - \rho_j^{\delta,N}((k+1)_i)]|. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Finalmente, para $y \in \{k_i, (k+1)_i\}$,

$$
\begin{aligned}
|z(\delta(l), y/N)| &\leq |z(\delta(l), k_i/N)| + |z(\delta(l), (k+1)_i/N)| \\
&\leq C_3(\rho_0)\delta l(\delta + \frac{1}{N^2}) \qquad \forall l \geq 0.
\end{aligned}
$$

■

Da Proposição 1 segue que para $N \geq 1$,

$$\lim_{\delta \to 0} \rho^{\delta,N}_{\lfloor t/\delta \rfloor}(k) = \rho^N_t(k).$$

Do limite acima, da Proposição 1 e do Resultado 7 segue que para $\rho_0 : I\!R \to [0,1]$ um perfil com a quarta derivada limitada; existe uma constante finita $C_0 > 0$ tal que

$$\left|\rho^N_t(x) - \rho(t, x/N)\right| \leq \frac{C_0 t}{N^2} \tag{3.12}$$

para todo $N \geq 1, t \geq 0, x \in Z\!\!\!Z$.

Do resultado acima segue que ρ^N_j aproxima ρ_j na ordem N^{-2}. Isto é

$$|\rho^N_{j,t}(x) - \rho_j(t, x/N)| \leq \frac{C_0 t}{N^2}$$

para todo $N \geq 1, t \geq 0, j \geq 1, x \in Z\!\!\!Z, C_0 > 0$ finita.

Para $x \in Z\!\!\!Z$ e $t \geq 0$ defina $\alpha^x_t = \lambda t/N$ se existir uma marca de Poisson entre $(x, x+1)$ e $\alpha^x_t = t$ caso contrário e seja $b(i,k,a,s) = \sum_{i=\{1,-1\}} \int_a^t \rho_j(s, i/N) d\alpha^k_s$.

Proposição 2 *Fixe $j \in I\!N$. Considere o perfil inicial ρ^j_0. Denote por T_j o tempo em que a origem fica vazía pela primeira vez. Segue que para todo $t \geq 0$*

$$I\!P\{T_j \geq t\} \geq \rho^j_0(0) - \sum_{i=\{1,-1\}} \int_0^t (1 + \frac{C_0 s}{N^2}) d\alpha^i_s + b(i,i,0,s).$$

Proposição 3 *Fixe $j \in I\!N$. Considere o perfil inicial ρ_0^j. Seja*

$$A(b(i,k,a,s)) = 1 - \rho_0^j(0) + \sum_{i=\{1,-1\}} \int_0^t (1 + \frac{C_0 s}{N^2}) d\alpha_s^i - b(i,k,a,s).$$

Para todo $t \geq 0$,

$$I\!P\{T_j \geq t\} \leq 1 - \frac{(A(b(i,i,0,s)))^2}{A(b(i,i,0,s)) + 2\int_0^t \int_s^t \sum_{i,k=\{1,-1\}} (1 + \frac{C_0 u}{N^2}) d\alpha_u^i d\alpha_s^k - 2\int_0^t \sum_{i=\{1,-1\}} b(k,i,s,u) d\alpha_s^k}.$$

3.1 Demonstrações das proposições

Demonstração da Proposição 2

Definimos processos independentes de Poisson $\{\tau_k^{(x,y)} : k \geq 0\}$ nos elos (x,y) onde $\{\tau_k^{(x,y)}\}$ são instantes aleatórios nos quais a partícula tenta-se movimentar de x a $y = x+1$ com taxa c_x e de x a $y = x-1$ com taxa c_{x-1}.

Para $y, x \in Z\!\!Z$ tal que $|x-y| = 1$, seja

$$N_t^{\{x,y\}} = \sum_{k \geq 1} \mathbf{I}_{\{\tau_k^{(x,y)} \leq t\}}$$

para $t > 0$ e $N_0^{\{x,y\}} = 0$.Logo, $N_t^{\{x,y\}}$ conta o número de ocorrências de $\{\tau_k^{(x,y)}\}$ no par $\{x,y\}$ em $[0,t]$. Assim, se não existir nenhuma marca de Poisson γ_n entre $(x, x+1)$, $N_t^{\{x,x+1\}}$ é um processo de Poisson de parâmetro (intensidade) 1. Portanto, $N_t^{\{x,y\}}$ tem uma distribuição de Poisson com parâmetro t. Por outro lado, se existir ao menos uma marca de Poisson entre $(x, x+1)$;o processo $N_t^{\{x,x+1\}}$ é um processo de Poisson com parâmetro $\frac{\lambda t}{N}$.

Seja $\{\tau_n\}$ a superposição dos processos de Poisson $\tau_k^{\{0,1\}}$ e $\tau_k^{\{0,-1\}}$. Defina o processo $Y^{C_j}[s,t]$ como

$$Y^{C_j}[s,t] = \mathbf{I}_{\{\eta_s^{C_j}(0)=0\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{s<\tau_k<t;\eta_{\tau_k}^{C_j}(0)=0\}}.$$

Temos que $Y^{C_j}[s,t]$ conta o número de vezes que a origem ficou desocupada no intervalo $[s,t]$.

Definimos as seguintes funções para $i = 1, -1$.

$$\phi_t^{i,C_j} = \mathbf{I}_{\{\eta_t^{C_j}(i)=0\}}$$

Seja $V = \{1,-1\}$ Segue que,

$$Y^{C_j}[0,t] = \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}(0)=0\}} + \sum_{i \in V} \int_0^t \phi_{s^-}^{i,C_j} dN_s^{\{i,0\}}$$

onde $\phi_{t^-} = \lim_{r \uparrow t} \phi_r$.
Observe que $N_t^{\{x,y\}} - \alpha_t^x$ é martingal de média zero, e para cada $i \in V$ os $\phi_{t^-}^{i,C_j}$ são previsíveis respeito à filtração $\mathcal{F}\ (-\infty, t-)$.

Temos que,

$$\sum_{i \in V} \int_0^t \phi_{s^-}^{i,C_j} dN_s^{\{i,0\}} \quad = \quad \sum_{i \in V} \int_0^t \phi_{s^-}^{i,C_j} d(N_s^{\{i,0\}} - \alpha_s^i) + \sum_{i \in V} \int_0^t \phi_{s^-}^{i,C_j} d\alpha_s^i,$$

e segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y^{C_j}[0,t] &= \mathbb{P}\{\eta^{C_j}(0)=0\} + \sum_{i\in V}\int_0^t \mathbb{E}\phi^{i,C_j}_{s^-}d\alpha^i_s \\
&= 1-\rho^j_0(0) + \sum_{i\in V}\int_0^t \mathbb{P}(\eta^{C_j}_{s^-}(i)=0)d\alpha^i_s \\
&= 1-\rho^j_0(0) + \sum_{i\in V}\int_0^t (1-\rho^N_{j,s^-}(i))d\alpha^i_s \\
&\leq 1-\rho^j_0(0) + \sum_{i\in V}\int_0^t (1+\frac{C_0 s}{N^2})d\alpha^i_s - b(i,i,0,s) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade se deve à equação (3.12). Pela desigualdade de Markov temos que $\mathbb{P}(Y^{C_j}[0,t]\geq 1)\leq \mathbb{E}Y^{C_j}[0,t]$. Segue que

$$\mathbb{P}\{T_j\leq t\} = \mathbb{P}(Y^{C_j}[0,t]\geq 1)\leq \mathbb{E}Y^{C_j}[0,t].$$

Logo,

$$\mathbb{P}\{T_j\geq t\}\geq \rho^j_0(0) - \sum_{i=\{1,-1\}}\int_0^t (1+\frac{C_0 s}{N^2})d\alpha^i_s + b(i,i,0,s).$$

■

Demonstração da Proposição 3

Observe que,

$$\mathbb{P}[Y\geq 1]\geq \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} \quad \text{onde } Y=Y[0,t] \qquad (3.14)$$

pois pela desigualdade de Cauchy-Schwars segue que

$$(\mathbb{E}Y)^2 = [\mathbb{E}(Y.\mathbf{I}_{\{Y\geq 1\}})]^2 \leq \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{P}(Y\geq 1).$$

Como Y é uma soma de funções indicadoras, segue que

$$(Y^{C_j})^2 = Y^{C_j} + 2\int_{0<s<u<t}\sum_{x,y\in\{1,-1\}}\phi^x_{s^-}\phi^y_{u^-}dN^{x,x+1}_u dN^{y,y+1}_s. \qquad (3.15)$$

Temos que
$I\!E \int\limits_{0<s<u<t} \phi^x_{s^-}\phi^y_{u^-} dN^{x,x+1}_u dN^{y,y+1}_s$ é igual a

$$I\!E \int\limits_{0<s<u<r} \phi^x_{s^-}\phi^y_{u^-}(dN^{x,x+1}_u - d\alpha^x_u)dN^{y,y+1}_s + I\!E \int\limits_{0<s<u<r} \phi^x_{s^-}\phi^y_{u^-} d\alpha^x_u dN^{y,y+1}_s$$

Como $\mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}} \times \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{u^-}(y)=0\}}$ é uma função previsível respeito à filtração $(\mathcal{F}\ (-\infty, u^-))$ e $(N^{x,x+1}_u - \alpha^x_u)$ é martingal de média zero, segue que

$$I\!E(Y^{C_j})^2 = I\!EY^{C_j} + 2I\!E \int\limits_{0<s<u<t} \sum_{x,y\in\{1,-1\}} \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}} \times \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{u^-}(y)=0\}} d\alpha^x_u dN^{y,y+1}_s \tag{3.16}$$

Seja $B(\eta, s) = I\!E[\int\limits_s^t \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{u^-}(y)=0\}} d\alpha^x_u | \eta_s = \eta]$. Como $B(\eta_s, s)\mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}}$ é $(\mathcal{F}\ (-\infty, s^-))$ mensurável, e $(N^{y,y+1}_s - \alpha^y_s)$ é martingal. Segue que,

$$I\!E \int\limits_{0<s<u<t} \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}} \times \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{u^-}(y)=0\}} d\alpha^x_u dN^{y,y+1}_s = I\!E \int\limits_{0<s<u<t} \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}} B(\eta_s, s) dN^{y,y+1}_s$$

$$\begin{aligned} &= I\!E \int\limits_{0<s<u<t} \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}} B(\eta_s, s) d\alpha^y_s \\ &= I\!E \int\limits_0^t \int\limits_s^t \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}} \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{u^-}(y)=0\}} d\alpha^x_u\, d\alpha^y_s \end{aligned}$$

Portanto,

$$I\!EY^2 = I\!EY + 2I\!E \sum_{x,y\in\{1,-1\}} \int\limits_0^t \int\limits_s^t \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}} \mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{u^-}(y)=0\}} d\alpha^x_u\, d\alpha^y_s \tag{3.17}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
I\!\!E[\mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{s^-}(x)=0\}}\mathbf{I}_{\{\eta^{C_j}_{u^-}(y)=0\}}] &= I\!\!P(\eta_{s^-}(x)=0,\eta_{u^-}(y)=0)\\
&= 1-I\!\!P(\eta_{u^-}(y)=1)-I\!\!P(\eta_{s^-}(x)=1,\eta_{u^-}(y)=0)\\
&\le 1-I\!\!P(\eta_{u^-}(y)=1)=1-\rho^N_{j,u^-}(y).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Portanto, das equações (3.17) e (3.18) segue que

$$
\begin{aligned}
I\!\!EY^2 &\le I\!\!EY+2\int_0^t\int_s^t\sum_{x,y\in\{1,-1\}}(1-\rho^N_{j,u}(y))d\alpha^x_u d\alpha^y_s\\
&= I\!\!EY+2\int_0^t\sum_{x\in V}\int_s^t\sum_{y\in V}(1-\rho^N_{j,u}(y))d\alpha^x_u d\alpha^y_s\\
&\le I\!\!EY+2\int_0^t\sum_{x\in V}\int_s^t(1+\frac{C_0u}{N^2}-\rho_j(u,y/N))d\alpha^x_u d\alpha^y_s\\
&= I\!\!EY+2\int_0^t\int_s^t\sum_{x,y=\{1,-1\}}(1+\frac{C_0u}{N^2})d\alpha^x_u d\alpha^y_s-2\int_0^t\sum_{i=\{1,-1\}}b(y,x,s,u)d\alpha^y_s
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

onde na segunda desigualdade acima, usou-se o resultado (3.12).

Portanto, substituindo a desigualdade (3.13) em (3.19) segue que

$$
\begin{aligned}
I\!\!EY^2 \le 1-\rho^j_0(0)+\sum_{i=\{1,-1\}}\int_0^t(1+\tfrac{C_0s}{N^2})d\alpha^i_s-b(i,i,0,s)+&\\
2\int_0^t\int_s^t\sum_{x,y=\{1,-1\}}(1+\frac{C_0u}{N^2})d\alpha^x_u d\alpha^y_s-2\int_0^t\sum_{i=\{1,-1\}}b(y,x,s,u)d\alpha^y_s&
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.13) na equação (3.14), temos que uma cota superior de $I\!\!P\{T_j\ge t\}$ é dada por

$$
1-\frac{(A(b(i,i,0,s)))^2}{A(b(i,i,0,s))+2\int_0^t\int_s^t\sum_{x,y=\{1,-1\}}(1+\frac{C_0u}{N^2})d\alpha^x_u d\alpha^y_s-2\int_0^t\sum_{x=\{1,-1\}}b(y,x,s,u)d\alpha^y_s}.
$$

■

Bibliografia

[1] Timo Seppäläinen (2005) *Translation Invariant Exclusion Processes* Department of Mathematics, University of Winconsin.

[2] P.A Ferrari, A. Galves, T.Liggett (1995) *Exponential waiting time for filling a large interval in the symmetric single exclusion process.*Ann. Inst. H. Poincaré. Probabilités et Statistique 31 (1) 155 -175.

[3] P.A Ferrari, A. Galves, C. Landim (2000) *Rate of convergence to equilibrium of symmetric simple exlcusion processes.*Markov Processes and Related Fields 6 (2000), 73-88

[4] Frank Spitzer (1926) *Principles of Random Walk.*Springer -Verlag Berlin

[5] M.D.Jara, C. Landim (2006) *Nonequilibrium central limit theorem for a tagged particle in symmetric simple exclusion.*Annales de l'Institut Henri Poincare. B, Probability and Statistics, v. 42, p. A, 2006.

[6] Gregory Lawler F. (1991) *Intersections of Random Walks* Boston: Birkhäuser.

[7] C.Kipnic, C Landim (1999) *Scaling Limits of Interacting Particle Systems* Germany:Springer

[8] Adilson Simonis (1995) *Metastability of the d -dimensional contact process* Journal of Statistical Physics,Vol. 83. Nos. 5/6. 1996.

[9] Révész Pál (1990) *Random Walk in random and non-random enviroments* Singapore: Teareck, NJ, World Scientifics.

[10] Thomas Liggett (1985) *Interacting Particle Systems* New York: Springer. Verlang

[11] P.A Ferrari, A. Galves (1997) *Acoplamento e Processos estocásticos.* IMPA. 21^o Coloquio Brasileiro de matemática.

[12] Norman L. Johnson, Samuel Kotz, N. Balakrishnan (1970) *Continuous Univariate distributions.* Volume 2. Second edition

[13] Norman L. Johnson, Samuel Kotz, N. Balakrishnan (1994) *Continuous Univariate distributions.* Volume 1. Second edition.New York. Chichester.

[14] Vladimir Belitsky (1993) *Asymptotic Upper Bound of Density for Two-Particle Annihilating Exclusion.* The Journal of Statistical Physics, Vol. 73, N. 3/4 , pp.671-694.

[15]A.Faggionato,M.Jara,C.Landim (2007) *Hydrodinamic limit of one dimensional subdiffusive exclusion processes with random conductance.*

[16]Charles Stone(1963) *Limit theorems for random walks, birth and death processes, and diffusion processes* I11.J.Math 7,638-660.

[17] Petr Mandl (1968) *Analytical Tratment of One-dimensional Markov Processes.* Springer - Verlang Beriln Heidelberg.

[18] K.Nagy (2002) *Symmetric random walk in random environment.* Period.Math.Hung.45, 101-120 .

[19] C.Landim, S.Olla, S.B.Volchan (1998)*Driven Tracer Particle in One Dimensional Symmetric Simple Exclusion.* Commun.Math.Phys.192,287-307 .