Homomorfismos de grafos

Cristiane Maria Sato

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da FAPESP
através do processo 06/58578-4.

São Paulo, abril de 2008.

Homomorfismos de grafos

Cristiane Maria Sato

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Cristiane Maria Sato
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Arnaldo Mandel - IME-USP.
- Prof. Dr. Manoel José Machado Soares Lemos - UFPE.

Agradecimentos

Agradeço

ao Yoshi

pela orientação de tantos anos e pela paciência durante esses anos;

aos membros da banca, Arnaldo Mandel e Manoel Lemos,

pelas boas sugestões;

às professoras Cris e Yoshiko

por todo apoio que me deram;

aos amigos

pela compreensão nas horas difíceis,

pela alegria nos bons momentos,

pela leveza que trouxeram aos meus dias;

à minha família

por apoiarem os meus planos mais ousados;

ao Marcel

por encher minha vida de poesia

e de uma boa dose de desafio também;

a Deus

por toda a minha vida.

Resumo

Homomorfismos de grafos são funções do conjunto de vértices de um grafo no conjunto de vértices de outro grafo que preservam adjacências. O estudo de homomorfismos de grafos é bastante abrangente, existindo muitas linhas de pesquisa sobre esse tópico.

Nesta dissertação, apresentaremos resultados sobre homomorfismos de grafos relacionados a pseudo-aleatoriedade, convergência de seqüência de grafos e matrizes de conexão de invariantes de grafos.

Esta linha tem se mostrado muito rica, não apenas pelos seus resultados, como também pelas técnicas utilizadas nas demonstrações. Em especial, destacamos a diversidade das ferramentas matemáticas que são usadas, que incluem resultados clássicos de álgebra, probabilidade e análise.

Palavras-chave: homomorfismos, grafos, pseudo-aleatoriedade, seqüências de grafos, convergência, matrizes de conexão, invariantes de grafos

Abstract

Graph homomorphisms are functions from the vertex set of a graph to the vertex set of another graph that preserve adjacencies. The study of graph homomorphisms is very broad, and there are several lines of research about this topic.

In this dissertation, we present results about graph homomorphisms related to quasirandomness, convergence of graph sequences and connection matrices of graph parameters.

This line of research has been proved to be very rich, not only for its results, but also for the proof techniques. In particular, we highlight the diversity of mathematical tools used, including classical results from Algebra, Probability and Analysis.

Keywords: graph homomorphisms, graphs, quasirandomness, graph sequences, convergence, connection matrices, graph parameters

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

Abstract **ix**

Introdução **xiii**
Resultados relacionados xiv
Organização do texto xvi

1 Definições e propriedades básicas **1**
1.1 Definições 1
1.2 Propriedades básicas 2
1.3 Versões injetora e induzida de homomorfismos 4
1.4 Exemplos 5
1.5 Unicidade dos homomorfismos em um grafo 11

2 Matrizes de conexão **15**
2.1 Definições 15
2.2 Propriedades básicas 16
2.3 Exemplos 17

3 Matrizes de conexão e homomorfismos de grafos **19**
3.1 Caracterização de homomorfismos em grafos 19
3.2 Algumas propriedades de grafos k-rotulados 19
3.3 Teorema 3.1.1: prova da necessidade 20
3.4 Teorema 3.1.1: prova da suficiência 21

4 O posto de matrizes de conexão de homomorfismos de grafos **33**
4.1 Degenerações 33
4.2 O posto exato das matrizes de conexão 34
4.3 Álgebras de funções de rótulos 35
4.4 Prova do lema 4.2.4 39

4.5 Prova do lema 4.2.3 e do teorema 4.2.1 41
4.6 Prova do corolário 4.2.5 42

5 Seqüências de grafos e homomorfismos de grafos 43
5.1 Densidade de homomorfismos 43
5.2 Seqüências de grafos e convergência 44
5.3 O objeto-limite 44
5.4 Caracterização 45
5.5 Ferramentas principais 46
5.6 Teorema 5.4.1: prova de (a)⇒(b) 48
5.7 Teorema 5.4.1: prova de (b)⇒(c) e de (c)⇒(d) 53
5.8 Teorema 5.4.1: prova de (d)⇒(e) 54
5.9 Teorema 5.4.1: prova de (e)⇒(a) 55

6 Independência entre vetores de densidade de homomorfismos 59
6.1 Vetores de densidade de homomorfismos em grafos 59
6.2 Ferramentas 59
6.3 Prova do lema 6.1.2 62
6.4 Prova do teorema 6.1.1 62

7 Um modelo generalizado para grafos pseudo-aleatórios 65
7.1 Grafos pseudo-aleatórios 65
7.2 Grafos H-pseudo-aleatórios e principais resultados 66
7.3 Esquema de demonstração 67
7.4 Ferramentas 68
7.5 Prova da necessidade no teorema 7.2.1 71
7.6 Prova do teorema 7.2.2 79

Conclusão 83

Referências bibliográficas 85

Índice remissivo 87

Introdução

Dados grafos F e G, um homomorfismo de F em G é uma função dos vértices de F nos vértices de G que preserva adjacências. Mais formalmente, uma função ϕ de $V(F)$ em $V(G)$ é um homomorfismo de F em G se, para toda aresta uv de F, vale que $\phi(u)\phi(v)$ é uma aresta em G. Denotamos o número de homomorfismos de F em G por $\hom(F, G)$.

Fixando o grafo G, temos que $\hom(\,\cdot\,, G)$ é um invariante de grafos, ou seja, é uma função que associa o mesmo valor a grafos isomorfos. Escolhendo G adequadamente, podemos obter alguns invariantes de grafos bem conhecidos. Por exemplo, vale que $\hom(F, K_k)$ é o número de k-colorações de F. Veja a figura 1.

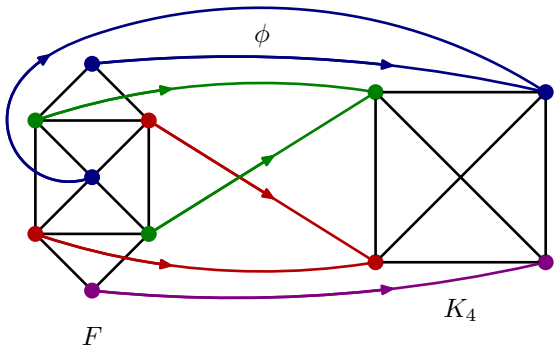

Figura 1: Cada homomorfismo de F em K_4 define uma 4-coloração.

É interessante permitirmos que o grafo G tenha laços. Por exemplo, seja G' o grafo da figura 2. Para todo grafo F, vale que $\hom(F, G')$ é o número de conjuntos estáveis de F. Veja a figura 3.

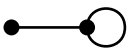

Figura 2: Grafo para conjuntos estáveis.

Um resultado de Lovász [1967] implica que o grafo G' é único a menos de isomorfismos. Ou seja, se $\hom(F, G)$ é o número de conjuntos estáveis de F para todo grafo F, então G é isomorfo a G'. Na verdade, o resultado de Lovász [1967] nos diz que $\hom(\,\cdot\,, G) = \hom(\,\cdot\,, H)$ se, e somente se, G e H são isomorfos.

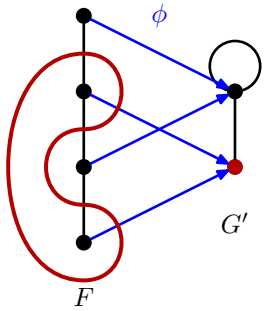

Figura 3: Cada homomorfismo de F em G' define um conjunto estável.

Contar o número de conjuntos estáveis de um grafo tem bastantes aplicações. Um subconjunto S de $\mathbb{Z}_n$ é chamado de livre de somas se $i + j$ não pertence a S para quaisquer $i, j \in S$. Em 1988, Erdős e Granville conjecturaram que o número de conjuntos livres de soma de $\mathbb{Z}_n$ é limitado por $2^{(1/2+o(1))n}$. Alon [1991] provou essa conjectura mostrando que, para todo grafo k-regular G com n vértices, o número de conjuntos estáveis de G é limitado por $2^{(1/2+O(1/k^{0.1}))n}$. Mostramos como obter uma prova da conjectura de Erdős e Granville a partir do resultado de Alon [1991] na seção 1.4.1.

A definição de $\hom(F, G)$ pode ser estendida para o caso em que o grafo G tem pesos. Permitimos pesos reais nas arestas e pesos reais positivos nos vértices de G.

Agora seja G' o grafo da figura 4. Para todo grafo F, tome $\mathrm{mc}(F)$ o tamanho máximo de um corte de F. Vale que

$$\log_2 \hom(F, G') - |V(F)| \leq \mathrm{mc}(F) \leq \log_2 \hom(F, G'),$$

para todo grafo F. No caso de grafos densos, isso nos dá uma boa estimativa para o tamanho máximo de um corte.

Figura 4: Grafo para estimar o tamanho máximo de um corte. O peso dos vértices é 1, dos laços é 1 e da aresta entre os vértices é 2.

Permitir pesos negativos nas arestas pode parecer pouco intuitivo, mas há exemplos bastante surpreendentes de invariantes de grafos que podem ser escritos como $\hom(\,\cdot\,, G)$, onde algumas arestas de G têm pesos negativos. Se G é o grafo da figura 5, então, para todo grafo F, vale que $\hom(F, G) = 1$ se F é euleriano e $\hom(F, G) = 0$, caso contrário. Se G é o grafo da figura 6, então, para todo grafo F, vale que $\hom(F, G)$ é o número de *nowhere-zero* 4-*flows* de F.

As provas para esses exemplos podem ser encontradas na seção 1.4. Na próxima seção, apresentamos alguns resultados relacionados a homomorfismos de grafos.

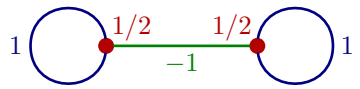

Figura 5: Grafo para existência de ciclos eulerianos. O peso dos vértices é 1/2, dos laços é 1 e da aresta entre os vértices é −1.

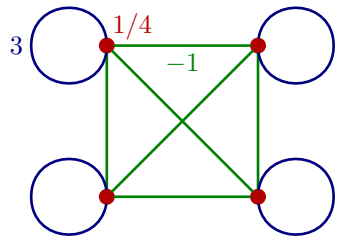

Figura 6: Grafo para *nowhere-zero* 4-*flows*. O peso dos vértices é 1/4, dos laços é 3 e das arestas entre os vértices é −1.

Resultados relacionados

Seja $G_1, G_2, \dots$ uma enumeração de todos os grafos a menos de isomorfismos. Para cada grafo G, considere o vetor $(\hom(G_1, G), \hom(G_2, G), \dots)$, chamado de vetor de homomorfismos em G. Uma pergunta muito natural sobre vetores de homomorfismos em grafos seria: grafos que não são isomorfos podem ter o mesmo vetor de homomorfismos? Lovász [1967] provou que o vetor de homomorfismos de um grafo determina unicamente o grafo a menos de isomorfismos.

A definição de homomorfismo pode ser estendida para o caso em que os grafos em questão têm pesos. Seja H um grafo com pesos nos vértices e nas arestas. Dizemos que $\hom(\,\cdot\,, H)$ é a função de homomorfismos em H. Ao considerarmos funções de homomorfismos e invariantes de grafos, surgem várias questões. Dado um invariante de grafos, que características ele deve ter para que possa ser escrito como uma função de homomorfismos em um grafo com pesos? Freedman, Lovász e Schrijver [2007] apresentaram uma caracterização muito interessante. Eles definem o conceito de matrizes de conexão e caracterizam os invariantes de grafos que podem ser expressos como funções de homomorfismos usando propriedades dessas matrizes. O posto das matrizes de conexão é muito importante para essa caracterização. Lovász [2006] determinou exatamente o posto de matrizes de conexão de funções de homomorfismos em um grafo com pesos.

Também existem tópicos importantes no estudo da densidade de homomorfismos. A densidade de homomorfismos de um grafo F em um grafo G é o número de homomorfismos de F em G dividido pelo número de todas as funções de $V(F)$ em $V(G)$. Denotamos por $\mathrm{t}(F, G)$ a densidade de homomorfismos de F em G.

Para cada grafo G, considere o vetor $(\mathrm{t}(G_1, G), \mathrm{t}(G_2, G), \dots)$, chamado de vetor de densidade de homomorfismos em G. Fixe $k \geq 3$ um inteiro. Se considerarmos apenas as coordenadas dos vetores de densidade de homomorfismos relativas aos grafos conexos e sem vértices

isolados com até k vértices, o que podemos afirmar? Seja $H_1, H_2, \ldots, H_m$ uma enumeração dos grafos conexos e sem vértices isolados com até k vértices. Seja S o conjunto dos vetores $x \in \mathbb{R}^m$ tais que existe uma seqüência de grafos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{n\to\infty} |V(G_n)| = \infty$ e $x_i = \lim_{n\to\infty} \mathrm{t}(H_i, G)$ para todo $1 \leq i \leq m$. Erdős, Lovász e Spencer [1979] provaram que S gera $\mathbb{R}^m$ como espaço vetorial. Mais que isso, eles provaram que S tem interior não-vazio.

Seja $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de grafos tal que $\lim_{n\to\infty} |V(G_n)| = \infty$. Dizemos que a seqüência $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, para todo grafo F, vale que $\mathrm{t}(F, G_n)$ converge com $n \to \infty$. Lovász e Szegedy [2006] caracterizações de invariantes de grafos que podem ser escritos como $\lim_{n\to\infty} \mathrm{t}(\,\cdot\,, G_n)$ para alguma seqüência convergente de grafos. Eles apresentaram duas caracterizações algébricas, uma analítica e uma combinatória. A prova desse resultado tem como ferramenta principal o conhecido lema de regularidade de Szemerédi. Estamos especialmente interessados em aplicações desse lema.

Lovász e Sós [2008] propuseram um modelo mais geral para grafos pseudo-aleatórios e provaram uma extensão de um famoso resultado de Chung, Graham e Wilson [1989] para esse modelo. Uma seqüência de grafos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{n\to\infty} |V(G_n)| = \infty$ é chamada de pseudo-aleatória com densidade p se $\lim_{n\to\infty} \mathrm{t}(F, G_n) = p^{|E(F)|}$ para todo grafo F. Chung, Graham e Wilson [1989] provaram que, para mostrar que uma seqüência é pseudo-aleatória, basta testar a convergência para um número finito de grafos F (na verdade, basta testar para os casos $F = K_2$ e $F = C_4$). Lovász e Sós [2008] generalizaram esse resultado para o modelo que propuseram.

Existem várias outras linhas de pesquisa envolvendo homomorfismos de grafos. Algumas questões muito interessantes envolvendo a existência de homomorfismos foram estudadas extensivamente. Muitos resultados podem ser encontrados no livro de Hell e Nešetřil [2004]. Recentemente, Babson e Kozlov [2006] relacionaram homomorfismos de grafos e estruturas topológicas.

Para mais informações, recomendamos a resenha de Borgs, Chayes, Lovász, Sós e Vesztergombi [2006] sobre homomorfismos de grafos.

Organização do texto

No capítulo 1, introduzimos o conceito de homomorfismos de grafos, apresentamos exemplos e provamos algumas propriedades. Apresentamos também o resultado de Lovász [1967] sobre a unicidade dos vetores de homomorfismos.

Nos capítulos 2, 3 e 4, apresentamos resultados relacionados a matrizes de conexão. No capítulo 2, definimos o conceito de matrizes de conexão e damos alguns exemplos. No capítulo 3, provamos a caracterização de Freedman, Lovász e Schrijver [2007] para os invariantes de grafos que podem ser escritos como funções de homomorfismos em algum grafo com pesos. No capítulo 4, mostramos o resultado de Lovász [2006] sobre o posto das matrizes de conexão de homomorfismos de grafos.

Nos capítulos 5 e 6, apresentamos resultados relacionados a densidade de homomorfismos de grafos. No capítulo 5, apresentamos os resultados de Lovász e Szegedy [2006] sobre seqüências convergentes de grafos. No capítulo 6, mostramos alguns resultados de Erdős, Lovász e Spencer [1979].

No capítulo 7, introduzimos o modelo generalizado de grafos pseudo-aleatórios de Lovász e Sós [2008] e mostramos a extensão do resultado de Chung, Graham e Wilson [1989] para esse modelo. Nesse capítulo, praticamente todos os conceitos e resultados estudados nos outros capítulos estão de certa forma relacionados.

Capítulo 1

Definições e propriedades básicas

Neste capítulo introduzimos o conceito de homomorfismos, provamos algumas propriedades e apresentamos alguns exemplos. Apresentamos também um resultado de Lovász [1967] sobre a unicidade dos vetores de homomorfismos em grafos.

1.1 Definições

Dados grafos F e G, uma função $\phi\colon V(F) \to V(G)$ é um **homomorfismo** de F em G se, para toda aresta $uv \in E(F)$, vale que $\phi(u)\phi(v) \in E(G)$. O grafo F pode ter arestas múltiplas, mas não pode ter laços. O grafo G não pode ter arestas múltiplas, mas pode ter laços. Denotamos por $\hom(F, G)$ o número de homomorfismos de F em G.

Podemos estender a definição de $\hom(F, G)$ para o caso em que G é um grafo com pesos nos vértices e arestas. A cada vértice $v \in V(G)$, associamos um real positivo $\alpha_G(v)$, denominado de **peso do vértice** v. A cada par (u, v) com $u, v \in V(G)$, associamos um real $\beta_G(u, v)$, denominado de **peso do par** (u, v). A função β_G deve ser simétrica. Pares com peso nulo representam não-arestas. Dado um grafo F, definimos pesos $\alpha_\phi(F, G)$ e $\beta_\phi(F, G)$ para cada função ϕ de $V(F)$ em $V(G)$. O peso $\alpha_\phi(F, G)$ é o **peso de ϕ com relação aos vértices** de G e é definido como

$$\alpha_\phi(F, G) := \prod_{v \in V(F)} \alpha_G(\phi(v)).$$

O peso $\beta_\phi(F, G)$ é o **peso de ϕ com relação às arestas** de G e é definido como

$$\beta_\phi(F, G) := \prod_{uv \in E(F)} \beta_G(\phi(u), \phi(v)).$$

Também denotamos $\beta_\phi(F, G)$ por $\hom_\phi(F, G)$. Assim, definimos o **número com pesos de homomorfismos** de F em G como

$$\hom(F, G) := \sum_\phi \alpha_\phi(F, G)\, \beta_\phi(F, G),$$

onde a soma é realizada sobre todas as funções ϕ de $V(F)$ em $V(G)$.

1.2 Propriedades básicas

Para quaisquer grafos F e F', com ou sem pesos, denotamos a união disjunta de F e F' por FF'.

Proposição 1.2.1. *Sejam F_1, F_2 grafos quaisquer e seja G um grafo com pesos. Vale que*

$$\hom(F_1F_2, G) = \hom(F_1, G)\hom(F_2, G).$$

Prova: Podemos supor sem perda de generalidade que $V(F_1) \cap V(F_2) = \varnothing$. Para cada função ϕ de $V(F_1F_2)$ em $V(G)$, seja $f(\phi)$ o par (ϕ_1, ϕ_2) onde $\phi_i \colon V(F_i) \to V(G)$ e $\phi_i(v) = \phi(v)$ para todo $v \in V(F_i)$ e $i \in \{1, 2\}$. É fácil ver que

$$\alpha_\phi(F_1F_2, G)\,\beta_\phi(F_1F_2, G) = \big(\alpha_{\phi_1}(F_1, G)\,\beta_{\phi_1}(F_1, G)\big) \cdot \big(\alpha_{\phi_2}(F_2, G)\,\beta_{\phi_2}(F_2, G)\big).$$

Note que f é uma função bijetora cujo domínio é o conjunto de funções de $V(F_1) \cup V(F_2)$ em $V(G)$ e a imagem é o conjunto de pares (ϕ_1, ϕ_2) com $\phi_i \colon V(F_i) \to V(G)$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\hom(F_1F_2, G) &= \sum \big\{\alpha_\phi(F_1F_2, G)\,\beta_\phi(F_1F_2, G) \mid \phi \colon V(F_1F_2) \to V(G)\big\} \\
&= \sum \Big\{\big(\alpha_{\phi_1}(F_1, G)\,\beta_{\phi_1}(F_1, G)\big)\big(\alpha_{\phi_2}(F_2, G)\,\beta_{\phi_2}(F_2, G)\big) \mid \\
&\qquad\qquad \phi \colon V(F_1F_2) \to V(G) \text{ e } f(\phi) = (\phi_1, \phi_2)\Big\} \\
&= \sum \Big\{\big(\alpha_{\phi_1}(F_1, G)\,\beta_{\phi_1}(F_1, G)\big)\big(\alpha_{\phi_2}(F_2, G)\,\beta_{\phi_2}(F_2, G)\big) \mid \\
&\qquad\qquad \phi_i \colon V(F_i) \to V(G) \text{ para } i = 1, 2\Big\} \\
&= \Big(\sum_{\phi_1} \big\{\,\alpha_{\phi_1}(F_1, G)\,\beta_{\phi_1}(F_1, G)\big\}\Big)\Big(\sum_{\phi_2} \big\{\,\alpha_{\phi_2}(F_2, G)\,\beta_{\phi_2}(F_2, G)\big\}\Big) \\
&= \hom(F_1, G)\hom(F_2, G).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.2. *Seja F um grafo conexo. Sejam G_1 e G_2 grafos com pesos. Vale que*

$$\hom(F, G_1G_2) = \hom(F, G_1) + \hom(F, G_2).$$

Prova: Podemos supor sem perda de generalidade que $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$. Como F é conexo, então, dada uma função $\phi \colon V(F) \to V(G_1G_2)$, vale que $\hom_\phi(F, G_1G_2) \neq 0$ somente se ϕ leva todos os vértices de F em $V(G_1)$ ou todos os vértices em $V(G_2)$. Tome Φ_i o conjunto de funções de $V(F)$ em $V(G_i)$ para $i \in \{1, 2\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\hom(F, G_1G_2) &= \sum_{\phi \in \Phi_1} \alpha_\phi(F, G_1G_2)\hom_\phi(F, G_1G_2) + \sum_{\phi \in \Phi_2} \alpha_\phi(F, G_1G_2)\hom_\phi(F, G_1G_2) \\
&= \sum_{\phi \in \Phi_1} \alpha_\phi(F, G_1)\hom_\phi(F, G_1) + \sum_{\phi \in \Phi_2} \alpha_\phi(F, G_2)\hom_\phi(F, G_2) \\
&= \hom(F, G_1) + \hom(F, G_2).
\end{aligned}$$

□

Definimos o produto cartesiano de F e F' como o grafo $F \times F'$ sobre $V(F) \times V(F')$ com conjunto de arestas

$$E(F \times F') := \{\{(u,v),(u',v')\} \colon uu' \in E(F) \text{ e } vv' \in E(F')\}.$$

Podemos estender essa definição quando os grafos em questão têm pesos. Sejam G_1 e G_2 grafos com pesos. No grafo $G_1 \times G_2$ o conjunto de vértices e arestas são definidos como no caso sem peso. O peso de um vértice (v_1, v_2) de $G_1 \times G_2$ é definido como

$$\alpha_{G_1 \times G_2}((v_1, v_2)) := \alpha_{G_1}(v_1)\, \alpha_{G_2}(v_2).$$

O peso de um par $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$ é definido como

$$\beta_{G_1 \times G_2}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) := \beta_{G_1}(u_1, u_2)\, \beta_{G_2}(v_1, v_2).$$

Proposição 1.2.3. *Seja F um grafo e sejam G_1 e G_2 grafos com pesos. Vale que*

$$\hom(F, G_1 \times G_2) = \hom(F, G_1) \hom(F, G_2).$$

Prova: Para cada função ϕ de $V(F)$ em $V(G_1 \times G_2)$, seja $f(\phi) := (\phi_1, \phi_2)$ onde $\phi_i \colon V(F) \to V(G_i)$ e $\phi_i(v) = (\phi(v))_i$ para todo $v \in V(F)$ para $i \in \{1, 2\}$. É fácil ver que

$$\alpha_\phi(F, G_1 \times G_2)\, \beta_\phi(F, G_1 \times G_2) = \big(\alpha_{\phi_1}(F, G_1)\, \beta_{\phi_1}(F, G_1)\big)\big(\alpha_{\phi_2}(F, G_2)\, \beta_{\phi_2}(F, G_2)\big).$$

Note que f é uma função bijetora cujo domínio é o conjunto de funções de $V(F)$ em $V(G_1) \times V(G_2)$ e a imagem é o conjunto de pares (ϕ_1, ϕ_2) com $\phi_i \colon V(F) \to V(G_i)$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\hom(F, G_1 \times G_2) &= \sum \big\{\alpha_\phi(F, G_1 \times G_2)\, \beta_\phi(F, G_1 \times G_2) \mid \phi \colon V(F) \to V(G_1 \times G_2)\big\} \\
&= \sum \Big\{\big(\alpha_{\phi_1}(F, G_1)\, \beta_{\phi_1}(F, G_1)\big)\big(\alpha_{\phi_2}(F, G_2)\, \beta_{\phi_2}(F, G_2)\big) \mid \\
&\qquad\qquad \phi \colon V(F) \to V(G_1 \times G_2) \text{ e } f(\phi) = (\phi_1, \phi_2)\Big\} \\
&= \sum \Big\{\big(\alpha_{\phi_1}(F, G_1)\, \beta_{\phi_1}(F, G_1)\big)\big(\alpha_{\phi_2}(F, G_2)\, \beta_{\phi_2}(F, G_2)\big) \mid \\
&\qquad\qquad \phi_i \colon V(F) \to V(G_i) \text{ para } i = 1, 2\Big\} \\
&= \Big(\sum_{\phi_1} \big\{\, \alpha_{\phi_1}(F, G_1)\, \beta_{\phi_1}(F, G_1)\big\}\Big)\Big(\sum_{\phi_2} \big\{\, \alpha_{\phi_2}(F, G_2)\, \beta_{\phi_2}(F, G_2)\big\}\Big) \\
&= \hom(F, G_1) \hom(F, G_2).
\end{aligned}$$

□

1.3 Versões injetora e induzida de homomorfismos

Dados grafos F e G sem pesos, denotamos por $\mathrm{inj}(F,G)$ o número de homomorfismos injetores de F em G. Podemos estender essa definição para o caso em que G tem pesos, da seguinte forma:

$$\mathrm{inj}(F,G) := \sum_{\phi} \alpha_\phi(F,G)\,\mathrm{hom}_\phi(F,G),$$

onde a soma é realizada sobre todas as funções injetoras ϕ de $V(F)$ em $V(G)$.

Definimos também o conceito de homomorfismo induzido. Dados grafos F e G sem pesos, dizemos que um homomorfismo de F em G é induzido se é injetor e, para quaisquer $u, v \in V(F)$, vale que $uv \in E(F)$ se, e somente se, $\phi(u)\phi(v) \in E(G)$. Denotamos o número de homomorfismos induzidos de F em G por $\mathrm{ind}(F,G)$.

Podemos estender $\mathrm{ind}(F,G)$ para o caso em que G é um grafo com pesos. Para cada função ϕ de $V(F)$ em $V(G)$, definimos

$$\mathrm{ind}_\phi(F,G) := \prod_{uv\in E(F)} \beta_G(\phi(u),\phi(v)) \prod_{uv\notin E(F)} \big(1-\beta_G(\phi(u),\phi(v))\big).$$

Assim, $\mathrm{ind}_\phi(F,G)$ é o peso de ϕ com relação às arestas e não-arestas. Definimos

$$\mathrm{ind}(F,G) := \sum_{\phi} \alpha_\phi(F,G)\,\mathrm{ind}_\phi(F,G),$$

onde a soma é realizada sobre todas as funções injetoras ϕ de $V(F)$ em $V(G)$.

Proposição 1.3.1. *Sejam F e G grafos. Vale que*

$$\mathrm{inj}(F,G) = \sum_{F'\supseteq F} \mathrm{ind}(F',G),$$

onde a soma é realizada sobre todos os supergrafos F' de F com conjunto de vértices $V(F)$.

Prova: Para cada função injetora ϕ de $V(F)$ em $V(G)$, defina F_ϕ como o supergrafo de F com conjunto de vértices $V(F)$ e onde vértices u e v são adjacentes se $\phi(u)$ e $\phi(v)$ são adjacentes em G. Temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{inj}(F,G) &= \sum_{\phi \text{ injetora}} \alpha_\phi(F,G)\,\mathrm{hom}_\phi(F,G) = \sum_{\phi \text{ injetora}} \mathrm{ind}_\phi(F_\phi,G)\\ &= \sum_{\substack{F'\supseteq F\\ V(F')=V(F)}} \sum_{\substack{\phi\\ F_\phi=F'}} \mathrm{ind}_\phi(F_\phi,G) = \sum_{\substack{F'\supseteq F\\ V(F')=V(F)}} \mathrm{ind}(F',G).\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado é uma aplicação simples da fórmula de inversão de Möbius.

Proposição 1.3.2. *Sejam F e G grafos. Vale que*

$$\mathrm{ind}(F,G) = \sum_{\substack{F'\supseteq F\\ V(F')=V(F)}} (-1)^{|E(F')\setminus E(F)|}\,\mathrm{inj}(F',G).$$

1.4 Exemplos

Existem muitos invariantes de grafos que podem ser escritos como $\hom(\,\cdot\,, G)$ para algum grafo G. Primeiro vamos dar exemplos em que G não tem pesos.

Exemplo 1.4.1 (Colorações). Para todo grafo F, uma **k-coloração** de F é uma função ϕ de $V(F)$ em $[k]$ tal que

$$uv \in E(F) \Rightarrow \phi(u) \neq \phi(v),$$

para quaisquer $u, v \in V(F)$.

Dado um grafo F, vale que o número de k-colorações de F é igual a $\hom(F, K_k)$. Veja a figura 1.1. Podemos supor que $V(K_k) = [k]$. Note que, se ϕ é um homomorfismo de F em

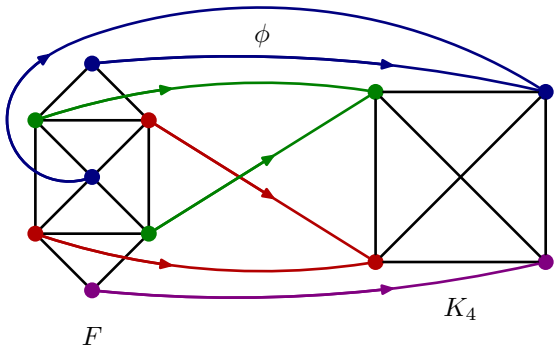

Figura 1.1: Colorações.

K_k, então, para cada $i \in [k]$, a pré-imagem de i é um conjunto estável. Assim, se $uv \in E(F)$, então $\phi(u) \neq \phi(v)$ para quaisquer $u, v \in V(F)$. Logo, ϕ é uma k-coloração de $V(F)$.

Por outro lado, se ϕ é uma k-coloração de F, é fácil ver que ϕ é um homomorfismo de F em K_k, considerando $V(K_k) = [k]$.

Exemplo 1.4.2 (Conjuntos estáveis). Para todo grafo F, tome $\mathrm{est}(F)$ o número de conjuntos estáveis de F. Seja G' o grafo formado por dois vértices u, v tais que u e v são adjacentes e há um laço em u. Para todo grafo F, vale que $\mathrm{est}(F) = \hom(F, G')$. Veja a figura 1.2. Para cada homomorfismo ϕ de F em G', tome S_ϕ a pré-imagem de v. Note que S_ϕ é um conjunto estável e é único para cada homomorfismo de F em G'.

Por outro lado, seja S um conjunto estável de F. Seja $\phi\colon V(F) \to V(G')$ a função definida como

$$\phi(w) := \begin{cases} v, & \text{se } w \in S; \\ u, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada $w \in V(F)$. Vale que ϕ é um homomorfismo de F em G'.

Existem também invariantes de grafos interessantes se considerarmos funções do tipo $\hom(F, \,\cdot\,)$ para algum grafo F.

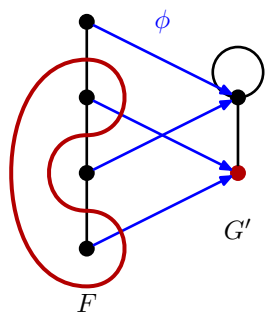

Figura 1.2: Conjuntos estáveis.

Exemplo 1.4.3 (Triângulos). Se G é um grafo sem laços, então o número de triângulos de G é igual a $\hom(K_3, G)$. Veja a figura 1.3.

Note que cada homomorfismo de K_3 em G leva K_3 em um triângulo de G.

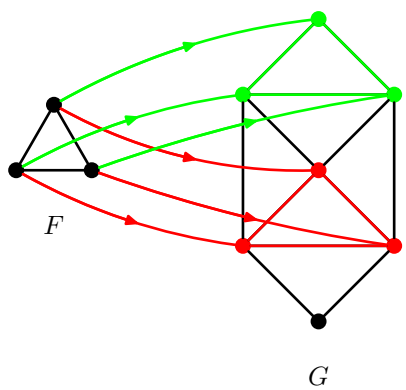

Figura 1.3: Dois triângulos.

Vamos apresentar alguns exemplos em grafos com pesos.

Exemplo 1.4.4 (Corte máximo). Seja F um grafo com pelo menos dois vértices e seja ℓ o tamanho máximo de um corte de F. Vale que

$$\log_2 \hom(F, G) - |V(F)| \leq \ell \leq \log_2 \hom(F, G),$$

onde G formado por dois vértices u, w adjacentes e com laços em cada vértice. O peso de cada vértice e de cada laço é 1. O peso do par (u, w) é 2. Veja a figura 1.4.

Figura 1.4: O peso dos vértices é 1, dos laços é 1 e da aresta entre os vértices é 2.

Para cada função $\phi\colon V(F) \to V(G)$, tome U_ϕ a pré imagem de u e W_ϕ, a pré-imagem de w. Note que $\{U_\phi, W_\phi\}$ é uma partição de $V(F)$. Seja ℓ_ϕ o número de arestas entre U_ϕ e W_ϕ, ou seja, ℓ_ϕ é o tamanho do corte (U_ϕ, W_ϕ). Temos que $\hom_\phi(F,G) = 2^{\ell_\phi}$ para toda função ϕ de $V(F)$ em $V(G)$.

$$\hom(F,G) = \sum_\phi \hom_\phi(F,G) = \sum_\phi 2^{\ell_\phi} \leq \sum_\phi 2^\ell = 2^{|V(F)|} \cdot 2^\ell.$$

Ademais,

$$\hom(F,G) = \sum_\phi \hom_\phi(F,G) \geq 2^\ell.$$

Exemplo 1.4.5 (Ciclos eulerianos). Dizemos que um grafo F é **euleriano** se existe um ciclo em F que passa por cada aresta exatamente uma vez. Um resultado bem conhecido nos diz que um grafo F é euleriano se, e somente se, F é conexo e todos os seus vértices têm grau par.

Seja G o grafo formado por dois vértices u, w adjacentes e com laços em cada vértice. O peso de cada vértice é $1/2$ e de cada laço é 1. O peso do par (u, w) é -1. Veja a figura 1.5.

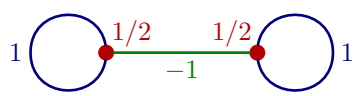

Figura 1.5: O peso dos vértices é $1/2$, dos laços é 1 e da aresta entre os vértices é -1.

Para todo grafo F vale que

$$\hom(F,G) = \begin{cases} 1, & \text{se } F \text{ é euleriano;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja F um grafo. Para cada função $\phi\colon V(F) \to V(G)$, tome U_ϕ a pré imagem de $\{u\}$ e W_ϕ, a pré-imagem de $\{w\}$. Note que $\{U_\phi, W_\phi\}$ é uma partição de $V(F)$. Seja ℓ_ϕ o número de arestas entre U_ϕ e W_ϕ, ou seja, ℓ_ϕ é o tamanho do corte (U_ϕ, W_ϕ). Temos que $\hom_\phi(F,G) = (-1)^{\ell_\phi}$ para toda função ϕ de $V(F)$ em $V(G)$.

É fácil ver que se F é euleriano, então todo corte de F é par. Portanto,

$$\hom(F,G) = \sum_\phi \frac{1}{2^{|V(F)|}}(-1)^{\ell_\phi} = 2^{|V(F)|} \cdot \frac{1}{2^{|V(F)|}} \cdot 1 = 1.$$

Suponha que F não é euleriano. Tome v um vértice de grau ímpar em F. Para cada $V \subseteq V(F) \setminus \{v\}$, existe exatamente uma função $\phi_V\colon V(F) \to V(G)$ tal que $U_\phi = V$ e exatamente uma função $\phi'_V\colon V(F) \to V(G)$ tal que $U_{\phi'} = V \cup \{v\}$. Note ℓ_{ϕ_V} e $\ell_{\phi'_V}$ têm paridade diferentes. Assim,

$$\hom(F,G) = \sum_{V \subseteq V(F)\setminus\{v\}} \frac{1}{2^{|V(F)|}}\left((-1)^{\ell_{\phi_V}} + (-1)^{\ell_{\phi'_V}}\right) = \sum_{V \subseteq V(F)\setminus\{v\}} \frac{1}{2^{|V(F)|}} \cdot 0 = 0.$$

Exemplo 1.4.6 (*Nowhere-zero* 4-*flows*). Para todo grafo F, fixe uma orientação F' de F. Um *nowhere-zero* k-*flow* é uma função ϕ de $A(F')$ em $\mathbb{Z}_k \setminus \{0\}$ tal que

$$\sum_{u\colon uv \in A(F')} \phi(uv) = \sum_{u\colon vu \in A(F')} \phi(vu),$$

para todo vértice v. Vale que o número de fluxos independe da orientação escolhida.

Um **caractere** de $\mathbb{Z}_k$ é uma função χ de $\mathbb{Z}_k$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\chi(i+j) = \chi(i)\chi(j)$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_k$.

Para quaisquer caracteres χ e χ' de $\mathbb{Z}_k$, tome $\chi \cdot \chi'$ como $(\chi \cdot \chi')(i) := \chi(i)\chi'(i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}_k$. O conjunto de caracteres de $\mathbb{Z}_k$ com essa operação é um grupo, que chamamos de **grupo de caracteres** de $\mathbb{Z}_k$ e denotamos por $\hat{\mathbb{Z}}_k$.

Como $\mathbb{Z}_k$ é um grupo abeliano finito, seus caracteres têm algumas propriedades especiais. Por exemplo, $\mathbb{Z}_k$ têm exatamente k caracteres. Ademais, para todo $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_k$, vale que $\chi(i)$ é uma raiz da unidade para todo $i \in \mathbb{Z}_k$. Para cada $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_k$, definimos χ^{-1} como a função tal que $\chi^{-1}(i) = 1/\chi(i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}_k$.

Seja H_k o grafo sobre $\hat{\mathbb{Z}}_k$ com os pesos definidos a seguir. Para cada $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_k$, definimos $\alpha_{H_k}(\chi) = 1/k$. Para quaisquer $\chi, \chi' \in \hat{\mathbb{Z}}_k$, tome

$$\beta_H(\chi, \chi') = \sum_{i=1}^{k-1} \chi^{-1}(i)\chi'(i).$$

Os caracteres de $\mathbb{Z}_4$ são apresentados na seguinte tabela.

	0	1	2	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

Note que $\beta_{H_4}(\chi, \chi') = 3$ se $\chi = \chi'$ e -1, caso contrário. Assim, H_4 é o grafo da figura 1.6.

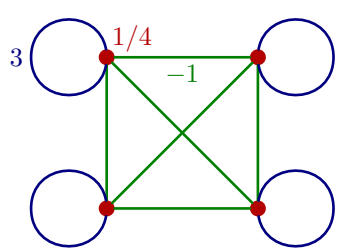

Figura 1.6: Grafo para *nowhere-zero* 4-*flows*. O peso dos vértices é 1/4, dos laços é 3 e das arestas entre os vértices é -1.

Vamos mostrar que $\hom(F, H_k)$ é o número de **nowhere-zero** k**-flows** de F. Note que é preciso que a função β_H seja simétrica e que os pesos das arestas sejam reais[1]. No caso $k = 4$, essas condições são satisfeitas.

[1]Poderíamos também definir homomorfismos para grafos dirigidos e permitir pesos complexos nas arestas.

Tome $n := |V(F)|$. Para toda função $\phi\colon A(F') \to \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}$ e todo vértice $v \in V(F)$, tome

$$\partial_\phi(v) := \sum_{u\colon uv \in A(F')} \phi(uv) - \sum_{u\colon vu \in A(F')} \phi(vu).$$

Note que ϕ é um fluxo se, e somente se, $\partial_\phi(v) = 0$ para todo $v \in V(F)$. Tome

$$A := \sum_{\phi\colon A(F') \to \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}} \prod_{v \in V(F)} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_k} \chi(\partial_\phi(v)).$$

É uma propriedade do grupo dos caracteres que

$$\sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_k} \chi(i) = \begin{cases} k, & \text{se } i = 0; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}_k$. Assim, se ϕ é um *nowhere-zero k-flow*, então

$$\prod_{v \in V(F)} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_k} \chi(\partial_\phi(v)) = k^n.$$

Caso contrário, esse produtório vale 0. Portanto, $A \cdot k^{-n}$ é o número de *nowhere-zero k-flows* de F. Note que, expandindo o produtório sobre $v \in V(F)$, temos

$$\prod_{v \in V(F)} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_k} \chi(\partial_\phi(v)) = \sum_{\psi\colon V(F') \to \hat{\mathbb{Z}}_k} \prod_{v \in V(F)} \psi_v(\partial_\phi(v)).$$

Como ψ_v é um caractere, vale que

$$\begin{aligned} \psi_v(\partial_\phi(v)) &= \psi_v\Big(\sum_{uv \in A(F')} \phi(uv) - \sum_{vu \in A(F')} \phi(vu) \Big) \\ &= \prod_{uv \in A(F')} \psi_v(\phi(uv)) \prod_{vu \in A(F')} \psi_v(\phi(vu)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\phi\colon A(F') \to \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}} \sum_{\psi\colon V(F) \to \hat{\mathbb{Z}}_k} \prod_{uv \in A(F')} \psi_v(\phi(uv)) \psi_u(\phi(uv))^{-1} \\ &= \sum_{\psi\colon V(F) \to \hat{\mathbb{Z}}_k} \sum_{\phi\colon A(F') \to \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}} \prod_{uv \in A(F')} \psi_v(\phi(uv)) \psi_u(\phi(uv))^{-1}. \end{aligned}$$

Para cada $\psi\colon A(F') \to \hat{\mathbb{Z}}_k$, temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{\phi\colon A(F') \to \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}} \prod_{uv \in A(F')} \psi_v(\phi(uv)) \psi_u(\phi(uv))^{-1} \\ &= \prod_{uv \in A(F')} \sum_{i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}} \psi_v(i) \psi_u(i)^{-1} \\ &= \prod_{uv \in A(F')} \beta_{H_k}(u, v) = \prod_{uv \in E(F)} \beta_{H_k}(u, v) = \hom_\psi(F, H_k). \end{aligned}$$

Assim,

$$A = \sum_{\psi\colon V(F)\to\hat{\mathbb{Z}}_k} \hom_\psi(F, H_k).$$

Portanto,

$$\hom(F, H_k) = \sum_{\psi} \frac{1}{k^n} \hom_\psi(F, H_k) = \frac{1}{k^n} \cdot A,$$

que é o número de *nowhere-zero k-flows* de F.

1.4.1 Conjuntos livres de soma

Nesta seção mostramos uma aplicação para contagem de conjuntos estáveis em grafos.

Seja n um inteiro positivo. Dizemos que um subconjunto $X \subseteq \mathbb{Z}_n$ é **livre de somas** se, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, vale que $x_1 + x_2 \notin X$. Para cada n, denote por ℓ_n o número de conjuntos livres de soma de $\mathbb{Z}_n$.

Erdős e Granville conjecturaram em 1988 que

$$\ell_n \leq 2^{(1/2+o(1))n}.$$

Note que, se n é par, então todo conjunto formado apenas por números ímpares é livre de somas. Com isso, obtemos que $\ell_n \geq 2^{n/2}$ para todo n par. Assim, essa cota é essencialmente justa.

Alon [1991] provou essa conjectura com o seguinte teorema.

Teorema 1.4.1. *Seja G um grafo k-regular com n vértices. Vale que*

$$est(G) \leq 2^{(1/2+O(k^{-0.1}))n}.$$

Vamos mostrar como provar a conjectura de Erdős e Granville a partir do teorema 1.4.1.

Para todo $S \subseteq \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$, dizemos que um subconjunto $X \subseteq \mathbb{Z}_n$ é **S-livre** se $(X+S) \cap X = \varnothing$, ou seja, para quaisquer $x \in X$ e $s \in S$, vale que $x + s \notin X$.

Observe que o número de subconjuntos de $\mathbb{Z}_n$ com tamanho no máximo $\lfloor \log_2 n \rfloor$ é

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \binom{n}{i} = 2^{o(n)}.$$

Para cada $X \subseteq \mathbb{Z}_n$ com $|X| > \lfloor \log_2 n \rfloor$, seja S_X o subconjunto de X formado pelos $\lfloor \log_2 n \rfloor$ menores elementos de X. Note que, se X é livre de somas, então X é S_X-livre. Assim,

$$\ell_n \leq 2^{o(n)} + \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{Z}_n \\ |S| = \lfloor \log_2 n \rfloor}} \Big| \{X \subseteq \mathbb{Z}_n \colon X \text{ é } S\text{-livre}\} \Big|.$$

Para cada conjunto $S \subseteq \mathbb{Z}_n$, definimos o **grafo de Cayley** H_S como $V(H_S) := \mathbb{Z}_n$ e $ij \in E(H_S)$ se existe $s \in S$ tal que $i + s = j$ ou $j + s = i$. Note que H_S é $(2|S|)$-regular. Ademais, se X é S-livre, então X é um conjunto estável em H_S. Assim,

$$\ell_n \leq 2^{o(n)} + \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{Z}_n \\ |S| = \lfloor \log_2 n \rfloor}} \operatorname{est}(H_S).$$

Aplicando o teorema 1.4.1,

$$\ell_n \leq 2^{o(n)} + \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{Z}_n \\ |S| = \lfloor \log_2 n \rfloor}} 2^{(1/2 + O((2\lfloor \log_2 n \rfloor)^{-0.1}))n} = 2^{(1/2 + o(1))n}.$$

1.5 Unicidade dos homomorfismos em um grafo

Nesta seção apresentamos um resultado de Lovász [1967] que diz que a função $\hom(\,\cdot\,, G)$ é única para cada grafo G (a menos de isomorfismos de G). O grafo G pode ter laços, mas não pode ter arestas múltiplas. Os grafos F para os quais calcularemos $\hom(F, G)$ não podem ter laços nem arestas múltiplas.

Na verdade, o resultado provado por Lovász [1967] diz respeito a estruturas mais gerais do que grafos. Mantemos aqui o esquema de demonstração de Lovász [1967].

Teorema 1.5.1. *Dados grafos G e G', vale que $\hom(F, G) = \hom(F, G')$ para todo grafo F, se, e somente se, G e G' são isomorfos.*

Seja $\operatorname{Surj}(F, G)$ o conjunto de homomorfismos sobrejetores de F em G e tais que, se u e v são vértices não-adjacentes em F, então suas imagens não são adjacentes em G. Tome $\operatorname{surj}(F, G) := |\operatorname{Surj}(F, G)|$.

Definimos também

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(F, G) &:= \{\phi \colon \phi \text{ é um homomorfismo de } F \text{ em } G\}; \\ \operatorname{Inj}(F, G) &:= \{\phi \colon \phi \text{ é um homomorfismo injetor de } F \text{ em } G\}. \end{aligned}$$

Fixe uma enumeração $G_1, G_2, \ldots$ de todos os grafos a menos de isomorfismo. Dados grafos F e G, para cada i defina

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_i(F, G) &:= \{\phi \in \operatorname{Hom}(F, G) \colon \phi(F) \cong G_i\}; \\ \hom_i(F, G) &:= |\operatorname{Hom}_i(F, G)|, \end{aligned}$$

onde $\phi(F)$ é o grafo $(\phi(V(F)), \phi(E(F)))$. Note que

$$\hom(F, G) = \sum_i \hom_i(F, G). \tag{1.1}$$

Lema 1.5.2. *Sejam F e G grafos. Para todo i, vale que*

$$\hom_i(F,G) = \frac{\operatorname{surj}(F,G_i)}{\operatorname{surj}(G_i,G_i)} \operatorname{inj}(G_i,G).$$

Prova: Para cada função $\phi \in \operatorname{Hom}_i(F,G)$, defina o conjunto

$$X_\phi := \{(\xi,\psi)\colon \xi \in \operatorname{Surj}(F,G_i),\ \psi \in \operatorname{Inj}(G_i,G) \text{ e } \phi = \psi \circ \xi\}.$$

Vamos provar que $|X_\phi| = \operatorname{surj}(G_i,G_i)$. Assim, teremos que

$$\operatorname{surj}(G_i,G_i)\hom_i(F,G) = \sum_{\phi \in \operatorname{Hom}_i(F,G)} |X_\phi| = \operatorname{surj}(F,G_i)\operatorname{inj}(G_i,G).$$

Seja $\phi \in \operatorname{Hom}_i(F,G)$. Observe que se $\psi \in \operatorname{Inj}(G_i,G)$, então podemos considerar ψ como uma função bijetora cujo domínio é $V(G_i)$ e cuja imagem é $V(\psi(G_i))$. Assim, ψ admite uma inversa.

Como $\phi(F) \cong G_i$, existe ψ um isomorfismo de G_i em $\phi(F)$. É claro que $\psi \in \operatorname{Inj}(G_i,G)$. Tome $\xi := \psi^{-1} \circ \phi$, onde consideramos $V(G_i)$ como o domínio de ψ e $V(\phi(F))$ como a imagem de ψ. É fácil ver que $\psi \circ \xi = \phi$. Ademais, $\xi \in \operatorname{Surj}(F,G_i)$.

Defina o conjunto

$$X'_\phi := \{(\zeta \circ \xi, \psi \circ \zeta^{-1})\colon \zeta \in \operatorname{Surj}(G_i,G_i)\}.$$

É óbvio que $|X'_\phi| = \operatorname{surj}(G_i,G_i)$. Vamos provar que $X_\phi = X'_\phi$. Seja $\zeta \in \operatorname{Surj}(G_i,G_i)$. Note que $\zeta \circ \xi \in \operatorname{Surj}(F,G_i)$ e $\psi \circ \zeta^{-1} \in \operatorname{Inj}(G_i,G)$. Ademais, vale que $(\psi \circ \zeta^{-1}) \circ (\zeta \circ \xi) = \psi \circ \xi$. Portanto, $(\zeta \circ \xi, \psi \circ \zeta^{-1}) \in X_\phi$. Ou seja, $X'_\phi \subseteq X_\phi$.

Por outro lado, seja $(\xi',\psi') \in X_\phi$. Tome $\zeta := (\psi')^{-1} \circ \psi$. Como $\phi(F) \cong G_i$, vale que $\zeta \in \operatorname{Surj}(G_i,G_i)$. Ademais,

$$\begin{aligned}
&\zeta \circ \xi = ((\psi')^{-1} \circ \psi) \circ \xi = (\psi')^{-1} \circ \phi = \xi' \text{ e} \\
&\psi \circ \zeta^{-1} = \psi \circ ((\psi')^{-1} \circ \psi)^{-1} = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \psi') = \psi'.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\xi',\psi') \in X'_\phi$. □

Prova do teorema 1.5.1: Basta provarmos que, se $\hom(F,G) = \hom(F,G')$ para todo grafo F, então $\operatorname{inj}(F,G) = \operatorname{inj}(F,G')$ para todo grafo F. De fato, isso implicaria que $\operatorname{inj}(G',G) = \operatorname{inj}(G',G') > 0$, o que significa que G' é isomorfo a um subgrafo de G e que $\operatorname{inj}(G,G') = \operatorname{inj}(G,G) > 0$, o que significa que G é isomorfo a um subgrafo de G'. Ou seja, G e G' são isomorfos.

Suponha então que $\hom(F,G) = \hom(F,G')$ para todo grafo F. Vamos provar que $\operatorname{inj}(F,G) = \operatorname{inj}(F,G')$ para todo grafo F. A prova é por indução em $|V(F)|$. Se $|V(F)| = 1$, então

$$\operatorname{inj}(F,G) = \hom(F,G) = \hom(F,G') = \operatorname{inj}(F,G').$$

Suponha então que $|V(F)| > 1$. Seja j tal que $F \cong G_j$. Para todo $i \geq 1$ com $|V(F)| = |V(G_i)|$, vale que $\operatorname{surj}(F, G_i) > 0$ se, e somente se, $F \cong G_i$. Assim,

$$\operatorname{inj}(F, G) = \operatorname{inj}(G_j, G) = \sum_{i\colon |V(G_i)|=|V(F)|} \left(\frac{\operatorname{surj}(F, G_i)}{\operatorname{surj}(G_i, G_i)} \operatorname{inj}(G_i, G) \right).$$

Usando a equação (1.1) e o lema 1.5.2, temos que

$$\begin{aligned} \hom(F, G) = \sum_i \hom_i(F, G) &= \sum_{i\colon |V(G_i)|\leq|V(F)|} \left(\frac{\operatorname{surj}(F, G_i)}{\operatorname{surj}(G_i, G_i)} \operatorname{inj}(G_i, G) \right) \\ &= \operatorname{inj}(F, G) + \sum_{i\colon |V(G_i)|<|V(F)|} \left(\frac{\operatorname{surj}(F, G_i)}{\operatorname{surj}(G_i, G_i)} \operatorname{inj}(G_i, G) \right), \end{aligned}$$

e analogamente para G'. Assim,

$$\begin{aligned} &\operatorname{inj}(F, G) - \operatorname{inj}(F, G') \\ &= \big(\hom(F, G) - \hom(F, G')\big) - \sum_{i\colon |V(G_i)|<|V(F)|} \left(\frac{\operatorname{surj}(F, G_i)}{\operatorname{surj}(G_i, G_i)} \big(\operatorname{inj}(G_i, G) - \operatorname{inj}(G_i, G')\big) \right) \\ &= \sum_{i\colon |V(G_i)|<|V(F)|} \left(\frac{\operatorname{surj}(F, G_i)}{\operatorname{surj}(G_i, G_i)} \big(\operatorname{inj}(G_i, G') - \operatorname{inj}(G_i, G)\big) \right) \overset{\text{h.i.}}{=} 0. \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Matrizes de conexão

Neste capítulo definimos o conceito de matrizes de conexão, provamos algumas propriedades e apresentamos alguns exemplos.

Destacamos que neste capítulo os grafos podem ter arestas múltiplas, mas não podem ter laços.

2.1 Definições

Dado um conjunto finito $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$, um **grafo S-rotulado** é um par (G, h), onde G é um grafo e h é uma função injetora de S em $V(G)$. Dizemos que S é o **conjunto de rótulos** de G. Dizemos que a imagem de h é o **conjunto de vértices rotulados** de G. Por simplicidade de notação, quando dizemos que G é um grafo S-rotulado consideramos que um subconjunto de seus vértices recebeu os rótulos de S e omitimos a função h. Dizemos que grafos S-rotulados G e G' são **isomorfos** se existe um isomorfismo entre G e G' que respeita os rótulos, ou seja, que leva vértices rotulados a vértices de mesmo rótulo. Se não quisermos especificar o conjunto de rótulos de um grafo, dizemos que o grafo é **parcialmente rotulado**. Dizemos que um grafo é **k-rotulado** quando é $[k]$-rotulado.

Dado um grafo S-rotulado G e um grafo S'-rotulado G', definimos o produto entre G e G' como o grafo $(S \cup S')$-rotulado, denotado por GG', obtido pela união disjunta de G e G' e identificação de vértices com mesmo rótulo. Desse processo, podem surgir arestas múltiplas.

Um **invariante de grafos** é uma função f que associa grafos a números reais de modo que $f(G) = f(G')$ sempre que G e G' forem isomorfos. Dado um invariante de grafos f e um inteiro $k \geq 0$, definimos a **matriz de conexão de f para grafos k-rotulados** como a matriz $M(f, k)$ indexada por $\{G_1, G_2, \ldots\} \times \{G_1, G_2, \ldots\}$ onde $(M(f, k))_{G_i G_j} = f(G_i G_j)$ e $G_1, G_2, \ldots$ é uma enumeração de todos os grafos k-rotulados a menos de isomorfismo. Definimos o **posto** de $M(f, k)$ como $\mathrm{r}(f, k) := \sup\{i \colon i \in L\}$, onde um inteiro i está em L se, e somente se, existe um conjunto de i linhas de $M(f, k)$ linearmente independentes. Note que $\mathrm{r}(f, k)$ pode ser infinito.

2.2 Propriedades básicas

Dizemos que um invariante de grafos f é **multiplicativo** se, para quaisquer grafos G, G', vale que $f(GG') = f(G)f(G')$. Dizemos que f é **k-multiplicativo** se, para quaisquer grafos k-rotulados G, G', vale que $f(GG') = f(G)f(G')$.

Dizemos que uma matriz M indexada por $S \times S$ com S finito é **positiva semidefinida** se M é simétrica e $x^\top Mx \geq 0$ para todo x. Dizemos que uma matriz M é **positiva semidefinida** se toda submatriz M' de M indexada por $S' \times S'$ onde S' é um subconjunto finito de S é positiva semidefinida. Dizemos que f tem **reflexão positiva** se $M(f, k)$ é positiva semidefinida para todo $k \geq 0$.

Para todo $k \geq 0$, seja U_k o grafo k-rotulado com k vértices sem arestas.

Proposição 2.2.1. *Seja $k \geq 0$ um inteiro. Seja f um invariante de grafos tal que $f(G) \neq 0$ para algum grafo k-rotulado G. Então, f é k-multiplicativo se, e somente se, $f(U_k) = 1$ e $\mathrm{r}(f, k) = 1$.*

Ademais, se f é k-multiplicativo, então $M(f, k)$ é positiva semidefinida.

Prova: Suponha que f é k-multiplicativo. Então, temos que $f(U_k) = f(U_kU_k) = f(U_k)^2$. Assim, vale que $f(U_k) = 0$ ou $f(U_k) = 1$. Se $f(U_k) = 0$, então, para todo grafo k-rotulado G, vale que $f(G) = f(GU_k) = f(G)f(U_k) = 0$. Isso seria uma contradição. Portanto, $f(U_k) = 1$. Tome x o vetor $(f(G_1), f(G_2), \dots)^\top$ onde $G_1, G_2, \dots$ é uma enumeração de todos os grafos k-rotulados a menos de isomorfismo. É fácil ver que $M(f, k)$ é o produto externo $xx^\top$. Assim, é claro que $\mathrm{r}(f, k) = 1$ e que $M(f, k)$ é positiva semidefinida.

Suponha que $f(U_k) = 1$ e $\mathrm{r}(f, k) = 1$. Vamos mostrar que f é k-multiplicativo. Note que $x^\top = (f(G_1), f(G_2), \dots)$ é a linha de $M(f, k)$ indexada por U_k. Podemos supor sem perda de generalidade que $G_1 = U_k$. Como $\mathrm{r}(f, k) = 1$, então podemos associar a cada grafo G_i uma constante c_i tal que a linha de $M(f, k)$ indexada por G_i é igual a c_ix. Note que $f(G_iG_j) = c_if(G_j)$. Assim,

$$f(G_i) = f(G_iU_k) = c_if(U_k) = c_i.$$

Portanto,

$$f(G_iG_j) = c_if(G_j) = f(G_i)f(G_j)$$

e estamos feitos. □

Proposição 2.2.2. *Seja f um invariante de grafos multiplicativos e sejam k e ℓ inteiros não-negativos. Vale que*

$$\mathrm{r}(f, k + \ell) \geq \mathrm{r}(f, k) \cdot \mathrm{r}(f, \ell).$$

Prova: Seja M a submatriz de $M(f, k+\ell)$ indexada por $S \times S$, onde S é o conjunto de todos os grafos $(k+\ell)$-rotulados tais que em cada componente todos vértices que receberam rótulos têm rótulo no máximo k ou todos têm rótulo maior do que k.

É fácil ver que M é o produto de Kronecker de $M(f, k)$ e $M(f, \ell)$. Portanto, o posto de M é $\mathrm{r}(f, k) \cdot \mathrm{r}(f, \ell)$. □

2.3 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos extraídos do artigo de Lovász [2007]. Algumas provas serão omitidas ou apenas parcialmente apresentadas.

Exemplo 2.3.1 (Arestas). Seja $e(G)$ o número de arestas de G. Vale que $\mathrm{r}(e,k) = 2$ para todo $k \geq 0$.

Prova: Para todo $k \geq 0$, seja L_k o grafo k-rotulado que é a união disjunta de U_k e K_2 (mantemos os rótulos de U_k). Note que $e(GG') = e(G) + e(G')$ para quaisquer grafos k-rotulados G e G'. Assim, é claro que

$$\begin{aligned} e(U_kG) &= e(U_k) + e(G) = e(G); \\ e(L_kG) &= e(L_k) + e(G) = e(G) + 1. \end{aligned}$$

Com isso, é fácil ver que as linhas de $M(e,k)$ indexadas por U_k e L_k são linearmente independentes. Logo, $\mathrm{r}(e,k) \geq 2$.

Por outro lado, seja F um grafo k-rotulado qualquer. Para todo grafo k-rotulado G, vale que

$$\begin{aligned} (1 - e(F)) \cdot e(U_kG) + e(F) \cdot e(L_kG) &= (1 - e(F)) \cdot e(G) + e(F) \cdot (1 + e(G)) \\ &= e(G) + e(F) = e(FG). \end{aligned}$$

Assim,

$$(1 - e(F)) \cdot M(e,k)_{U_k} + e(F) \cdot M(e,k)_{L_k} = M(e,k)_F.$$

Provamos que $r(e,k) = 2$ para todo k. □

Exemplo 2.3.2 (Arestas não-paralelas). Seja $e'(G)$ o número de arestas não-paralelas de G. Vale que $\mathrm{r}(e',k) = \binom{k}{2} + 2$ para todo $k \geq 0$.

Exemplo 2.3.3 (Subgrafos geradores). Seja $\mathrm{subg}(G)$ o número de subgrafos geradores de G. Vale que $\mathrm{r}(\mathrm{subg},k) = 1$ para todo $k \geq 0$.

Prova: Segue diretamente da proposição 2.2.1. □

Exemplo 2.3.4 (Subgrafos geradores simples). Seja $\mathrm{subg}'(G)$ o número de subgrafos geradores de G sem laços e sem arestas paralelas. Vale que $\mathrm{r}(\mathrm{subg}',k) = 2^{\binom{k}{2}}$ para todo $k \geq 0$.

Exemplo 2.3.5 (Emparelhamentos perfeitos). Seja $\mathrm{emp}(G)$ o número de emparelhamentos perfeitos de G. Vale que $\mathrm{r}(\mathrm{emp},k) = 2^k$ para todo $k \geq 0$.

Prova: Vamos mostrar apenas que $\mathrm{r}(\mathrm{emp},k) \leq 2^k$. Para todo grafo k-rotulado G e todo $X \subseteq [k]$, tome $\mathrm{emp}(G,X)$ o número de emparelhamentos perfeitos do subgrafo de G induzido por $S(G,X)$, onde $S(G,X)$ é formado pelos vértices não-rotulados de G e pelos vértices de G cujos rótulos estão em X.

Para quaisquer grafos k-rotulados G e G', vale que

$$\mathrm{emp}(GG') = \sum_{X \subseteq [k]} \mathrm{emp}(G, X)\mathrm{emp}(G', [k] \setminus X).$$

Seja N a matriz indexada por $\{G_1, G_2, \ldots\} \times 2^{[k]}$, onde $G_1, G_2, \ldots$ é uma enumeração dos grafos k-rotulados a menos de isomorfismos e

$$N_{G_i,X} := \mathrm{emp}(G_i, X),$$

para todo grafo k-rotulado G_i e todo $X \subseteq [k]$.

Seja W a matriz indexada por $2^{[k]} \times 2^{[k]}$ tal que

$$W_{X,X'} := \begin{cases} 1, & \text{se } X = [k] \setminus X'; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil ver que $M(\mathrm{emp}, k) = NWN^\top$. Como N tem 2^k colunas, então é claro que $\mathrm{r}(\mathrm{emp}, k) \leq 2^k$. $\square$

Capítulo 3

Matrizes de conexão e homomorfismos de grafos

Neste capítulo estudamos condições que um invariante de grafos deve satisfazer para que possa ser escrito como $\hom(\,\cdot\,, G)$ para algum grafos com pesos G. Freedman, Lovász e Schrijver [2007] provaram uma caracterização de tais funções.

Neste capítulo grafos sem pesos podem ter arestas múltiplas, mas não laços.

3.1 Caracterização de homomorfismos em grafos

O objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema.

Teorema 3.1.1. *Seja f um invariante de grafos não identicamente nulo. Existe um grafo G com pesos tal que $f = \hom(\,\cdot\,, G)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *f tem reflexão positiva;*

(ii) *existe um real q tal que $\mathrm{r}(f, k) \leq q^k$ para todo $k \geq 0$.*

3.2 Algumas propriedades de grafos k-rotulados

Dado um grafo G com pesos e uma função $\phi\colon [k] \to V(G)$, definimos

$$\alpha_\phi(G) := \prod_{i=1}^{k} \alpha_G(\phi(i)).$$

Dado um grafo k-rotulado F, definimos

$$\beta_\phi(F, G) := \sum_{\psi} \frac{\alpha_\psi(F, G)}{\alpha_\phi(G)}\, \beta_\psi(F, G),$$

onde a soma é realizada sobre todas as funções $\psi\colon V(F) \to V(G)$, tais que, se v tem rótulo i, então $\psi(v) = \phi(i)$. Dizemos que ψ **estende** ϕ. Também denotamos $\beta_\phi(F, G)$ por $\hom_\phi(F, G)$. Usaremos as duas notações indiscriminadamente.

Assim, é óbvio que

$$\hom(F, G) = \sum_{\phi\colon [k] \to V(G)} \alpha_\phi(G)\, \beta_\phi(F, G).$$

Lema 3.2.1. *Dados grafos k-rotulados F_1 e F_2 e um grafo G com pesos, vale que*

$$\hom_\phi(F_1F_2, G) = \hom_\phi(F_1, G) \hom_\phi(F_2, G).$$

para toda função $\phi\colon [k] \to V(G)$.

Prova: Para quaisquer funções $\psi_1\colon V(F_1) \to V(G)$ e $\psi_2\colon V(F_2) \to V(G)$ tais que $\psi_1(u) = \psi_2(v) = \phi(i)$ sempre que u e v têm o mesmo rótulo i, denotamos por $h(\psi_1, \psi_2)$ a função de $V(F_1F_2)$ em $V(G)$ tal que

$$\big(h(\psi_1, \psi_2)\big)(v) = \begin{cases} \psi_1(v), & \text{se } v \in V(F_1); \\ \psi_2(v), & \text{se } v \in V(F_2). \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\hom_\phi(F_1F_2, G) &= \sum_{\psi_1, \psi_2} \frac{\alpha_{h(\psi_1,\psi_2)}(F_1F_2, G)}{\alpha_\phi(G)} \hom_{h(\psi_1,\psi_2)}(F_1F_2, G) \\
&= \sum_{\psi_1, \psi_2} \frac{\alpha_{\psi_1}(F_1F_2, G)\, \alpha_{\psi_2}(F_1F_2, G)}{\alpha_\phi(G)^2} \hom_{\psi_1}(F_1F_2, G) \hom_{\psi_2}(F_1F_2, G) \\
&= \sum_{\psi_1} \frac{\alpha_{\psi_1}(F_1F_2, G)}{\alpha_\phi(G)} \hom_{\psi_1}(F_1F_2, G) \sum_{\psi_2} \frac{\alpha_{\psi_2}(F_1F_2, G)}{\alpha_\phi(G)} \hom_{\psi_2}(F_1F_2, G) \\
&= \hom_{\psi_1}(F_1, G) \hom_{\psi_2}(F_2, G),
\end{aligned}$$

onde as somas são realizadas sobre todas as funções ψ_1 e ψ_2 tais que $\psi_i\colon V(F_i) \to V(G)$ e ψ_i estende ϕ para todo $i \in \{1, 2\}$. □

Nas próximas seções, nos dedicamos a provar o teorema 3.1.1.

3.3 Teorema 3.1.1: prova da necessidade

Lema 3.3.1. *Seja $f = \hom(\,\cdot\,, G)$ para algum grafo G com pesos. Vale que*

(i) *f tem reflexão positiva;*

(ii) $\mathrm{r}(f, k) \leq |V(G)|^k$ *para todo $k \geq 0$.*

Prova: Para quaisquer grafos k-rotulados F e F', pelo lema 3.2.1 vale que

$$\hom(FF', G) = \sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} \alpha_\phi(G) \hom_\phi(FF', G) \overset{3.2.1}{=} \sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} \alpha_\phi(G) \hom_\phi(F, G) \hom_\phi(F', G).$$

Assim, fica claro que

$$M(f,k) = \sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} \alpha_\phi(G) M_\phi,$$

onde $M_\phi = x(\phi)x(\phi)^\top$ e $x(\phi)$ é o vetor indexado por $G_1, G_2, \ldots$, que é uma enumeração de todos os grafos k-rotulados a menos de isomorfismos, tal que

$$x(\phi)_{G_i} = \hom_\phi(G_i, G).$$

Portanto, como $\alpha_\phi(G) \geq 0$ para todo ϕ, segue que $M(f,k)$ é positiva semidefinida.

É fácil ver que, para toda função $\phi\colon [k] \to V(G)$, vale que $\alpha_\phi(G)M_\phi$ tem posto no máximo 1. Assim,

$$\mathrm{r}(f,k) \leq \sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} 1 = |V(G)|^k. \tag{3.1}$$

□

3.4 Teorema 3.1.1: prova da suficiência

Daqui em diante fixamos um invariante de grafos f não identicamente nulo com reflexão positiva e para o qual existe um real q tal que $\mathrm{r}(f,k) \leq q^k$ para todo $k \geq 0$. Como f não é identicamente nulo, vale que $f(K_0) = 1$. Note que $\mathrm{r}(f,0) = 1$. Assim, pela proposição 2.2.1, vale que f é multiplicativa.

Vamos supor que $f(K_1) = 1$. A seguinte proposição justifica por que podemos fazer isso.

Proposição 3.4.1. *Seja h um invariante de grafos tal que $h(K_1) \neq 0$. Seja h' o invariante de grafos tal que $h'(G) := h(G) \cdot h(K_1)^{|V(G)|}$. Se existe um grafo com pesos H' tal que $h'(G) = \hom(G, H')$ para todo grafo G, então existe um grafo com pesos H tal que $h(G) = \hom(G, H)$ para todo grafo G.*

Prova: Seja H o grafo com pesos com conjunto de vértices $V(H')$ com os pesos definidos da seguinte maneira

$$\alpha_H(v) := \frac{\alpha_{H'}(v)}{h(K_1)}, \text{ para todo } v \in V(H);$$
$$\beta_H(u,v) := \beta_{H'}(u,v), \text{ para quaisquer } u, v \in V(H).$$

Assim, para todo grafo G, vale que

$$\begin{aligned} h(G) &= \frac{h'(G)}{h(K_1)^{|V(G)|}} = \frac{\hom(G,H')}{h(K_1)^{|V(G)|}} \\ &= \frac{\sum_\phi \alpha_\phi(G,H')\,\beta_\phi(G,H')}{h(K_1)^{|V(G)|}} \\ &= \sum_\phi \Big(\prod_{v\in V(G)} \frac{\alpha_{H'}(\phi(v))}{h(K_1)} \Big)\, \beta_\phi(G,H) \\ &= \sum_\phi \alpha_\phi(G,H)\,\beta_\phi(G,H) \\ &= \hom(G,H). \end{aligned}$$

□

3.4.1 A álgebra dos grafos parcialmente rotulados

Seja $G_1, G_2, \dots$ uma enumeração de todos os grafos parcialmente rotulados a menos de isomorfismos. Seja $\mathcal{G}$ o conjunto das combinações lineares formais de grafos parcialmente rotulados. Os elementos de $\mathcal{G}$ são da forma

$$x = \sum_{i\geq 1} x_i G_i,$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$ e $\{G_i \colon x_i \neq \varnothing\}$ deve ser finito. Os elementos de $\mathcal{G}$ são chamados de grafos quânticos[1].

Para transformar $\mathcal{G}$ em um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, precisamos definir uma operação de soma entre elementos de $\mathcal{G}$ e uma operação de multiplicação entre reais e elementos de $\mathcal{G}$.

Para quaisquer $x, y \in \mathcal{G}$, definimos $x+y := \sum_i (x_i+y_i)G_i$, onde $x = \sum x_i G_i$ e $y = \sum y_i G_i$. Para todo real λ e $x = \sum x_i G_i$ em $\mathcal{G}$, definimos $\lambda x := \sum \lambda x_i G_i$.

É fácil ver que, com essas operações, $\mathcal{G}$ é de fato um espaço vetorial. A adição é claramente comutativa e associativa. O vetor $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$ é o elemento neutro e é claro que cada elemento de $\mathcal{G}$ tem um oposto. A multiplicação por escalares é associativa e distributiva (com relação a adição entre vetores e adição entre escalares). Além disso $1x = x$ para todo $x \in \mathcal{G}$.

Podemos transformar $\mathcal{G}$ em uma álgebra (um espaço vetorial com operação de produto entre elementos de $\mathcal{G}$ associativa). Para quaisquer $x, y \in \mathcal{G}$, definimos $xy := \sum_{G,G'} x_G y_{G'} GG'$. É fácil ver que este produto é comutativo, associativo e que K_0 é uma unidade.

Para cada subconjunto finito $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$, definimos $\mathcal{G}(S)$ como a sub-álgebra de $\mathcal{G}$ gerada pelos grafos S-rotulados. Para cada $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$, tome U_S como um grafo com $|S|$ vértices S-rotulado sem arestas. É fácil ver que U_S é uma unidade em $\mathcal{G}(S)$.

[1] Este nome é relacionado aos *bits* quânticos (*qubits*) da Computação Quântica.

Podemos estender f para que seja uma função sobre $\mathcal{G}$ de uma maneira bem simples. Definimos

$$f(x) = \sum_G x_G f(G).$$

Afirmamos que f é um funcional linear sobre $\mathcal{G}$. É fácil ver que $f(\lambda x+\gamma y) = \lambda f(x)+\gamma f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{G}$, e $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.4.2. *Vale que $f(xx) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{G}$.*

Prova: Tome $S := \{G\colon x_G \neq 0\}$. Tome k como o maior rótulo atribuído aos vértices dos grafos em S. Para cada $G \in S$, seja $G^{(k)}$ o grafo k-rotulado obtido pela adição de vértices isolados a G rotulados com os rótulos de $[k]$ que não aparecem em G. Seja $x' := \sum_{G\in S} x_G G^{(k)}$. É fácil ver que $f(x'x') = f(xx)$ já que $f(K_1) = 1$.

Assim,

$$f(xx) = f(x'x') = \sum_{G,G'\in S} x'_G x'_{G'} f(G^{(k)}(G')^{(k)}) = (x'|_S)^\top M(x'|_S) \geq 0,$$

onde M é a submatriz de $M(f, k)$ indexada por $S \times S$. □

Seria interessante se pudéssemos definir um produto interno entre elementos $x, y \in \mathcal{G}$ como $f(xy)$. No entanto, $f(xx)$ pode ser igual a zero mesmo que $x \neq \mathbf{0}$. Vamos definir um ideal de $\mathcal{G}$ para poder usar a função f para definir um produto interno na álgebra-quociente.

Seja

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{G}\colon f(xy) = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{G}\}.$$

Proposição 3.4.3. *Para todo $x \in \mathcal{G}$, vale que $x \in \mathcal{K}$ se, e somente se, $f(xx) = 0$.*

Prova: Se $x \in \mathcal{K}$, é óbvio que $f(xx) = 0$. O outro lado já é mais interessante.

Seja $y \in \mathcal{G}$. Tome $S := \{G\colon x_G \neq 0 \text{ ou } y_G \neq 0\}$. Tome k como o maior rótulo atribuído aos vértices dos grafos em S. Para cada $G \in S$, seja $G^{(k)}$ o grafo k-rotulado obtido pela adição de vértices isolados a G rotulados com os rótulos de $[k]$ que não aparecem em G. Seja $x' := \sum_{G\in S} x_G G^{(k)}$ e $y' := \sum_{G\in S} y_G G^{(k)}$. É fácil ver que

$$f(xx) = f(x'x');$$
$$f(xy) = f(x'y').$$

Assim, $f(xx) = (x'|_S)^\top M(x'|_S)$ e $f(xy) = (x'|_S)^\top M(y'|_S)$, onde M é a submatriz de $M(f, k)$ indexada por $S \times S$.

Sabemos que M é positiva semidefinida. Portanto, $M = A^\top A$ para alguma matriz quadrada A. Tome $z_G = (A(x'|_S))_G$ para cada $G \in S$. Temos

$$0 = (x'|_S)^\top M(x'|_S) = \big(A(x'|_S)\big)^\top A(x'|_S) = \sum_{G\in S} (z_G)^2.$$

Portanto, para todo $G \in S$, vale que $z_G = 0$. Assim,

$$(x'|_S)^\top M(y'|_S) = (A(x'|_S)^\top A(y'|_S) = \sum_{G \in S} z_G \Big(A(y'|_S)\Big)_G = 0.$$

□

Proposição 3.4.4. *Vale que $\mathcal{K}$ é um ideal de $\mathcal{G}$.*

Prova: Temos que mostrar que, para todo $x \in \mathcal{K}$ e todo $y \in \mathcal{G}$, vale que yx, xy, $x+y$ e $y+x$ também pertencem a $\mathcal{K}$. Como $xy = yx$ e $x+y = y+x$, então vamos apenas mostrar que $xy, x+y \in \mathcal{K}$.

Temos que $f((xy)(xy)) = f(x(yxy)) = 0$. Portanto, pela caracterização acima, vale que $xy \in \mathcal{K}$.

Também vale que $f((x+y)z) = f(xz) + f(yz) = 0$ para todo $z \in \mathcal{G}$. Portanto, $\mathcal{K}$ é um ideal de $\mathcal{G}$. □

Definimos $\hat{\mathcal{G}} := \mathcal{G}/\mathcal{K}$. Dois elementos $x, y \in \mathcal{G}$ são mapeados um mesmo elemento de $\hat{\mathcal{G}}$ se, e somente se, $x - y \in \mathcal{K}$. Para cada subconjunto finito $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$, definimos $\hat{\mathcal{G}}(S) := \mathcal{G}(S)/\mathcal{K}$. Para cada grafo parcialmente rotulado G, denotamos por $\hat{G}$ o elemento de $\hat{\mathcal{G}}$ que corresponde a G.

Proposição 3.4.5. *Sejam $S, S' \subset \mathbb{Z}_{>0}$ conjuntos finitos. Vale que U_S e $U_{S'}$ correspondem a um mesmo elemento, digamos u, de $\hat{\mathcal{G}}$.*

Prova: Como $f(K_1) = 1$ e f é multiplicativo, então $f(U_T) = 1$ para todo $T \subset \mathbb{Z}_{>0}$ finito. Assim, temos que

$$\begin{aligned} f((U_S - U_{S'})(U_S - U_{S'})) &= f(U_S U_S + U_{S'} U_{S'} - 2U_S U_{S'}) \\ &= f(U_S) + f(U'_S) - 2f(U_{S \cup S'}) = 1 + 1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

□

Definimos o produto interno entre $\hat{x}$ e $\hat{y}$ como $f(xy)$. Provamos que este produto está bem definido.

Proposição 3.4.6. *Se $x - y \in \mathcal{K}$, então $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in \mathcal{G}$.*

Prova: Temos que

$$0 = \langle x - y, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle$$

e estamos feitos. □

Proposição 3.4.7. *Sejam $S \subseteq T \subset \mathbb{Z}_{>0}$. Vale que $\hat{\mathcal{G}}(S)$ é uma sub-álgebra de $\hat{\mathcal{G}}(T)$.*

Prova: Seja G um grafo S-rotulado. Podemos transformar G em um grafo T-rotulado de maneira trivial: apenas adicionamos $|T \setminus S|$ vértices isolados rotulados com os rótulos de $T \setminus S$. Assim, como f é multiplicativo e $f(K_1) = 1$,

$$f((G-G')(G-G')) = f(GG-GG'-GG'+G'G') = f(GG)-f(GG')-f(GG')+f(G'G') = 0.$$

Portanto $G - G' \in \mathcal{K}$. Segue que G e G' correspondem a um mesmo elemento de $\hat{\mathcal{G}}$. Com isso, podemos concluir que $\hat{\mathcal{G}}(S) \subseteq \hat{\mathcal{G}}(T)$. □

Proposição 3.4.8. *O produto interno de $\hat{\mathcal{G}}$ é positivo definido, ou seja, $\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle > 0$ para todo $\hat{x} \in \hat{\mathcal{G}}$ com $\hat{x} \neq 0$.*

Prova: Seja $x \in \mathcal{G}$. Pela proposição 3.4.2, vale que $\langle x, x \rangle \geq 0$. Se $\langle x, x \rangle = 0$, então $x \in \mathcal{K}$. Portanto, $x - \mathbf{0} \in \mathcal{K}$. Ou seja, x e $\mathbf{0}$ são mapeados para o elemento nulo de $\hat{\mathcal{G}}$. □

Proposição 3.4.9. *Seja $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $|S| = k$. A dimensão de $\hat{\mathcal{G}}(S)$ é igual a $\mathrm{r}(f, k)$.*

Prova: Podemos supor sem perda de generalidade que $S = [k]$. Tome $\ell := \mathrm{r}(f, k)$. Note que $\ell \leq q^k$. Sejam $F_1, F_2, \ldots, F_\ell$ grafos k-rotulados cujas linhas correspondentes formam um conjunto maximal de linhas linearmente independentes de $M(f, k)$.

Seja F um grafo k-rotulado. Vamos provar que podemos escrever $\hat{F}$ como combinação linear de $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \ldots, \hat{F}_\ell$ e que $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \ldots, \hat{F}_\ell$ são linearmente independentes em $\hat{\mathcal{G}}(S)$.

Existem reais λ_j para $1 \leq j \leq \ell$ tais que

$$f(FH) = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j f(F_j H)$$

para todo grafo k-rotulado H. Assim,

$$\langle F, H \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j F_j, H \Big\rangle$$

para todo grafo k-rotulado H. Portanto,

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \hat{F}_j.$$

Agora vamos provar que $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \ldots, \hat{F}_\ell$ são linearmente independentes em $\hat{\mathcal{G}}(S)$. Suponha que podemos escrever

$$\hat{F}_\ell = \sum_{j=1}^{\ell-1} \delta_j \hat{F}_j.$$

Assim, vale que

$$f(F_\ell H) = \sum_{j=1}^{\ell-1} \delta_j f(F_j H).$$

Isso significa que a linha de $M(f,k)$ indexada por F_ℓ pode ser escrita como combinação linear das linhas indexadas por $F_1, \ldots, F_{\ell-1}$. O que é uma contradição.

□

Seja $\pi_S \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}(S)$ definida da seguinte forma. Para cada grafo G,

$$\pi_S(G) := G_S,$$

onde G_S é o grafo obtido a partir de G apagando os rótulos que não pertencem a S e adicionando vértices isolados com os rótulos de S que não aparecem em G.

Definimos $\pi_S \colon \hat{\mathcal{G}} \to \hat{\mathcal{G}}(S)$ como

$$\pi_S(\hat{G}) := \hat{G}_S.$$

É fácil provar que π_S está bem definida.

Proposição 3.4.10. *Vale que π_S é uma projeção ortogonal de $\hat{\mathcal{G}}$ em $\hat{\mathcal{G}}(S)$.*

Prova: Temos que provar que $\pi_S(\hat{G}) = \pi_S(\pi_S(\hat{G}))$ para todo grafo parcialmente rotulado G e que

$$\langle \hat{H}, \hat{G} - \hat{G}_S \rangle = 0,$$

para todo grafo H S-rotulado. A primeira condição é obviamente satisfeita. Para a segunda condição, note que HG e HG_S são grafos isomorfos. Assim,

$$\langle \hat{H}, \hat{G} - \hat{G}_S \rangle = \langle H, G - G_S \rangle = f(H(G - G_S)) = f(HG - HG_S) = f(HG) - f(HG_S) = 0.$$

□

3.4.2 Propriedades de álgebras comutativas com dimensão finita

Aqui precisamos apenas supor que $\mathrm{r}(f,k)$ é finito para todo k. Assim, o que provamos nesta seção vale para quaisquer álgebras comutativas de dimensão finita.

Estamos interessados nos elementos idempotentes de $\hat{\mathcal{G}}$. Eles terão papel central na demonstração. Seja $p \in \hat{\mathcal{G}}$. Dizemos que p é **idempotente** se, e somente se,

$$pp = p.$$

Para quaisquer elementos p e q idempotentes, dizemos que q **resolve** p se $pq = q$.

Fixe $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$ finito. Como $\hat{\mathcal{G}}(S)$ é uma álgebra com dimensão finita e comutativa, então $\hat{\mathcal{G}}(S)$ tem uma base unicamente determinada $\mathcal{P}_S = \{p_1^S, \ldots, p_r^S\}$ tal que cada p_i^S é idempotente e $p_i^S p_j^S = \mathbf{0}$ para quaisquer i, j distintos.

Para cada p idempotente, seja $\mathcal{P}_{T,p}$ o conjunto de idempotentes de $\mathcal{P}_T$ que resolvem p.

Para cada $p \in \mathcal{P}_S$, dizemos que o grau de p é $\deg(p) := |\mathcal{P}_{T,p}|$ onde $T \supset S$ e $|T| = |S| + 1$.

Lema 3.4.11. *Sejam S e T subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_{>0}$ tais que $S \subseteq T$ e seja r um elemento idempotente de $\hat{\mathcal{G}}(S)$. Vale que*

$$r = \sum_{p \in \mathcal{P}_{T,r}} p.$$

Prova: Temos que

$$r = \sum_{p \in \mathcal{P}_T} \lambda_p p,$$

de forma única. Como r é idempotente,

$$r = rr = \sum_{p \in \mathcal{P}_T} \lambda_p^2 p.$$

Pela unicidade da base, vale que $\lambda_p^2 = \lambda_p$. Portanto, para cada $p \in \mathcal{P}_T$, vale que $\lambda_p \in \{0, 1\}$.

Se para algum p, vale que p resolve r, então

$$p = pr = \sum_{p' \in \mathcal{P}_T} \lambda_{p'} pp' = \lambda_p p.$$

Portanto, $\lambda_p = 1$. Por outro lado, se $\lambda_p = 1$, então

$$pr = \sum_{p' \in \mathcal{P}_T} \lambda_{p'} pp' = \lambda_p p = p,$$

e portanto p resolve r. □

Além disso, note que todo $q \in \mathcal{P}_T$ resolve u, pois $uq = q$. Portanto,

$$u = \sum_{q \in \mathcal{P}_T} q. \tag{3.2}$$

Lema 3.4.12. *Sejam S e T subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_{>0}$ tais que $S \subseteq T$. Então cada $q \in \mathcal{P}_T$ resolve exatamente um $p \in \mathcal{P}_S$.*

Prova: Pela equação (3.2) e pelo lema 3.4.11, temos que

$$\sum_{q \in \mathcal{P}_T} q = u = \sum_{p \in \mathcal{P}_S} p = \sum_{p \in \mathcal{P}_S} \sum_{\substack{q \in \mathcal{P}_T \\ q \text{ resolve } p}} q.$$

Como u é escrito de maneira única, segue que cada q resolve exatamente um p. □

Lema 3.4.13. *Sejam T e U subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_{>0}$. Seja $S := T \cap U$. Se $x \in \hat{\mathcal{G}}(T)$ e $y \in \hat{\mathcal{G}}(U)$, então*

$$f(xy) = f(\pi_S(x)y).$$

Prova: Se G_1 é um grafo T-rotulado e G_2 é um grafo U-rotulado, então os grafos G_1G_2 e $\pi_S(G_1)G_2$ são isomorfos. Assim, temos que

$$f(xy) = \sum_{G_1,G_2} x_{G_1} y_{G_2} f(G_1G_2) = \sum_{G_1,G_2} x_{G_1} y_{G_2} f(\pi_S(G_1)G_2) = f(\pi_S(x)y).$$

□

Lema 3.4.14. *Sejam S e T subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_{>0}$ tais que $S \subseteq T$. Seja $p \in \mathcal{P}_S$ e $q \in \mathcal{P}_{T,p}$. Vale que*

$$\pi_S(q) = \frac{f(q)}{f(p)} p.$$

Prova: Basta provar que, para todo $p' \in \mathcal{P}_S$, vale que $\langle p', \pi_S(q)\rangle = \langle p', (f(q)/f(p))p\rangle$. Se $p' \neq p$, então $p'q = p'pq = \mathbf{0}q = \mathbf{0}$. Portanto,

$$\langle p', q\rangle = f(p'q) = 0 = \frac{f(q)}{f(p)} 0 = \frac{f(q)}{f(p)} \langle p', p\rangle = \left\langle p', \frac{f(q)}{f(p)} p \right\rangle.$$

Além disso,

$$\langle p, q\rangle = f(pq) = f(q) = \frac{f(q)}{f(p)} f(p) = \frac{f(q)}{f(p)} \langle p, p\rangle = \left\langle p, \frac{f(q)}{f(p)} p \right\rangle$$

e estamos feitos. □

Lema 3.4.15. *Sejam T e U subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_{>0}$. Seja $S := T \cap U$. Para quaisquer $p \in \mathcal{P}_S$, $q \in \mathcal{P}_{T,p}$ e $r \in \hat{\mathcal{G}}(U)$, vale que*

$$f(p)f(qr) = f(q)f(pr).$$

Prova: Pelos lemas 3.4.13 e 3.4.14, temos que

$$f(qr) = f(\pi_S(q)r) = \frac{f(q)}{f(p)} f(pr).$$

□

Lema 3.4.16. *Sejam T e U subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_{>0}$. Seja $S := T \cap U$. Para quaisquer $p \in \mathcal{P}_S$, $q \in \mathcal{P}_{T,p}$ e $r \in \mathcal{P}_{U,p}$, vale que $qr \neq \mathbf{0}$.*

Prova: Pelo lema 3.4.15, vale que

$$f(qr) = \frac{f(q)}{f(p)} f(pr) = \frac{f(q)}{f(p)} f(r) \neq 0.$$

□

Lema 3.4.17. *Sejam S e T subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_{>0}$ tais que $S \subseteq T$. Seja $p \in \mathcal{P}_S$ e $q \in \mathcal{P}_{T,p}$. Vale que* $\deg(q) \geq \deg(p)$.

Prova: Note que basta provar para $|T| = |S| + 1$. Seja $U \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $|U| = |S| + 1$, $U \supset S$ e $U \neq T$. Sabemos que, pelo lema 3.4.11, que $p = \sum_{r \in \mathcal{P}_{U,p}} r$. Lembre-se que $|\mathcal{P}_{U,p}| = \deg(p)$. Temos que

$$\sum_{r \in \mathcal{P}_{U,p}} rq = q \sum_{r \in \mathcal{P}_{U,p}} r = qp = q.$$

Note que $|T \cup U| = |T| + 1$. Portanto, $|\mathcal{P}_{T \cup U,q}| = \deg(q)$. Pelo lema 3.4.16, vale que $qr \neq \mathbf{0}$ para todo $r \in \mathcal{P}_{U,p}$. Além disso, $(rq)(rq) = rq$ para todo $r \in \mathcal{P}_{U,p}$. Portanto,

$$rq = \sum_{w \in \mathcal{P}_{T \cup U, rq}} w,$$

para todo $r \in \mathcal{P}_{U,p}$. Ademais, para quaisquer $r, r' \in \mathcal{P}_{U,p}$ distintos, vale que

$$(rq)(r'q) = (rr')q = \mathbf{0}.$$

Isso significa que, se $w \in \mathcal{P}_{T \cup U}$ resolve rq e $r \in \mathcal{P}_U$, então $wr'q = wrr'q = 0$ para todo $r' \in \mathcal{P}_U$ com $r' \neq r$. Com isso, concluímos que $|\mathcal{P}_{T \cup U,q}| \geq |\mathcal{P}_{U,p}|$. □

3.4.3 Propriedades de álgebras comutativas com dimensão exponencialmente limitada

Assumimos que existe um real $q > 0$ tal que $\mathrm{r}(f, k) \leq q^k$ para todo k.

Lema 3.4.18. *Seja S um subconjunto finito de $\mathbb{Z}_{>0}$. Para todo $p \in \mathcal{P}_S$, vale que* $\deg(p) \leq q$.

Prova: Seja $D := \deg(p)$ para algum $p \in \mathcal{P}_S$. Pelo lema 3.4.17, vale que

$$\dim(\hat{\mathcal{G}}(T)) \geq D^{|T \setminus S|},$$

para todo $T \supseteq S$.

Suponha que $D > q$. Isso implica que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D^n}{q^{n+|S|}} = \infty.$$

Logo, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $D^n > q^{n+|S|}$.

Para cada $n \geq 1$, seja $T_n = S \cup S'$, onde $|S'| = n$ e $S' \subset \mathbb{Z}_{>0} \setminus S$. Temos que, se $n \geq n_0$, então

$$\dim(\hat{\mathcal{G}}(T_n)) \geq D^{|T_n \setminus S|} = D^n > q^{n+|S|} = q^{|T|},$$

o que é um absurdo. □

Fixamos S e p tais que $p \in \mathcal{P}_S$ e $\deg(p) = D$ é máximo. Para cada, $u \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus S$ tome $q_1^u, \ldots, q_D^u$ em $\mathcal{P}_{S\cup\{u\},p}$. Para quaisquer u e v em $\mathbb{Z}_{>0} \setminus S$, existe um isomorfismo natural entre $\hat{\mathcal{G}}(S \cup \{u\})$ e $\hat{\mathcal{G}}(S \cup \{v\})$. Assumimos que q_i^u e q_i^v são correspondentes nesse isomorfismo.

Seja $T \supset S$. Para cada função $\phi\colon T \setminus S \to [D]$, defina

$$q_\phi := \prod_{v \in T\setminus S} q^v_{\phi(v)}.$$

Pelo lema 3.4.15, temos que

$$f(q_\phi) = f\left(\prod_{v\in T\setminus S} q^v_{\phi(v)}\right) = f(p) \prod_{v\in T\setminus S} \frac{f(q^v_{\phi(v)})}{f(p)} \neq 0. \tag{3.3}$$

Lema 3.4.19. *Vale que*

$$\mathcal{P}_{T,p} = \{q_\phi \colon \phi \in [D]^{T\setminus S}\}.$$

Prova: A prova é por indução em $|T \setminus S|$. Se $|T \setminus S| = 1$, então o resultado é óbvio. Suponha então que $|T \setminus S| > 1$.

Seja $u \in T \setminus S$. Tome $W := T \setminus \{u\}$ e $U := S \cup \{u\}$. Por hipótese de indução, vale que

$$\mathcal{P}_W = \{q_\psi \colon \psi \in [D]^{W\setminus S}\}.$$

Seja $r \in \mathcal{P}_W$. Como $W \cap U = S$, então, usando o lema 3.4.16, temos que $rq_i^u \neq \mathbf{0}$ para todo $i \in [D]$. Ademais, é claro que rq_i^u resolve r. Pelo lema 3.4.11, podemos escrever rq_i^u como soma dos idempotentes de $\mathcal{P}_T$ que o resolvem. Note que se v resolve rq_i^u, então v também resolve r. Além disso, $rq_i^u \neq rq_j^u$ para todo $i \neq j$. Assim, como r tem grau D, vale que $\{rq_1^u, \ldots, rq_D\} = \mathcal{P}_{T,r}$ para todo $i \in [D]$.

Como

$$p = \sum_{r\in\mathcal{P}_{W,p}} r = \sum_{r\in\mathcal{P}_{W,p}} \sum_{i\in[D]} rq_i^u,$$

temos que

$$\mathcal{P}_{T,p} = \{rq_i^u \colon r \in \mathcal{P}_{W,p} \text{ e } i \in [D]\} = \{q_\phi \colon \phi \in [D]^{T\setminus S}\}.$$

□

Note que q_ϕ resolve q_i^v se, e somente se, $\phi(v) = i$. Assim, temos que

$$q_i^v = \sum_{\phi\colon \phi(v)=i} q_\phi. \tag{3.4}$$

3.4.4 Construção do grafo

Seja $u \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus S$. Seja G o grafo definido sobre $[D]$ completo e com laços em todos os nós com os pesos definidos a seguir. Para cada $i \in [D]$, seja

$$\alpha_G(i) = \frac{f(q_i^u)}{f(p)},$$

onde $u \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus S$.

Seja $v \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus S$ distinto de u. Seja K_{uv} o grafo sobre $W := S \cup \{u, v\}$ que contém apenas a aresta uv. Podemos escrever $p\hat{K}_{uv}$ como combinação linear de elementos de $\mathcal{P}_{W,p}$. Assim,

$$p\hat{K}_{uv} = \sum_{i,j} \beta_{ij}\, q_i^u q_j^v.$$

Definimos

$$\beta_G(i,j) := \beta_{i,j}\,.$$

Lema 3.4.20. *Para todo grafo F, vale que $f(F) = \hom(F, G)$.*

Prova: Seja F' um grafo isomorfo a F com $V(F') = V \subset \mathbb{Z}_{>0} \setminus S$ e k-rotuladoV. Para quaisquer $u, v \in V$, pela equação (3.4), temos que

$$p\hat{K_{uv}} = \sum_{i,j} \beta_{ij}\, q_i^u q_j^v = \sum_{i,j} \beta_{ij} \sum_{\substack{\phi\colon \phi(u)=i,\\ \phi(v)=j}} q_\phi = \sum_{\phi\colon V \to [D]} \beta_{\phi(u),\phi(v)}\, q_\phi.$$

Ademais,

$$p\hat{F'} = \prod_{uv \in E(F')} p\hat{K_{uv}} = \prod_{uv \in E(F')} \left(\sum_{\phi\colon V \to [D]} \beta_{\phi(u),\phi(v)}\, q_\phi. \right) = \sum_{\phi\colon V \to [D]} \left(\prod_{uv \in E(F')} \beta_{\phi(u),\phi(v)} \right) q_\phi$$

Como $p \in \hat{\mathcal{G}}(S)$ e $F' \in \hat{\mathcal{G}}(V)$ e $S \cap V = \varnothing$, então $f(p)f(\hat{F'}) = f(p\hat{F'})$. Usando a equação (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} f(p)f(\hat{F'}) &= f(p\hat{F'}) \\ &= \sum_{\phi\colon V \to [D]} \left(\prod_{uv \in E(F')} \beta_{\phi(u),\phi(v)} \right) f(q_\phi) \\ &= \sum_{\phi\colon V \to [D]} \left(\prod_{uv \in E(F')} \beta_{\phi(u),\phi(v)} \right) \left(\prod_{v \in V} \frac{f(q_{\phi(v)}^v)}{f(p)} \right) f(p) \\ &= \sum_{\phi\colon V \to [D]} \left(\prod_{uv \in E(F')} \beta_{\phi(u),\phi(v)} \right) \left(\prod_{v \in V} \alpha_G(\phi(v)) \right) f(p). \end{aligned}$$

Como $f(p) > 0$, podemos cancelar $f(p)$ dos dois lados da equação e completamos a prova. □

Capítulo 4

O posto de matrizes de conexão de homomorfismos de grafos

No capítulo 3, mostramos que, dado um grafo G com pesos,

$$\mathrm{r}\left(\hom(\,\cdot\,, G), k\right) \leq |V(G)|^k \tag{4.1}$$

para todo inteiro $k \geq 0$. Neste capítulo, estudamos em que condições a relação (4.1) vale com igualdade.

Existem basicamente duas situações que causam degeneração do posto. A primeira delas é a existência de vértices especiais que chamamos de vértices gêmeos. A segunda é mais complexa e diz respeito à existência de automorfismos próprios no grafo.

Lovász [2006] determina exatamente o posto de $M(\hom(\,\cdot\,, G), k)$ para todo grafo G que não tem vértices gêmeos.

Usamos a seguinte abreviação. Para todo grafo com pesos G, definimos $M(G, k)$ como $M(\hom(\,\cdot\,, G), k)$. Definimos $\mathrm{r}(G, k)$ como o posto de $M(G, k)$.

Neste capítulo grafos sem pesos podem ter arestas múltiplas, não podem ter laços.

4.1 Degenerações

4.1.1 Vértices gêmeos

Dado um grafo G com pesos, dizemos que $u, v \in V(G)$ são **gêmeos** se $\beta_G(u, w) = \beta_G(v, w)$ para todo $w \in V(G)$. Dizemos que G é **livre de vértices gêmeos** se não possui vértices gêmeos distintos.

Lema 4.1.1. *Seja G um grafo com pesos. Se G possui vértices gêmeos distintos, então* $\mathrm{r}(G, k) < |V(G)|^k$.

Prova: Sejam $u, v \in V(G)$ vértices gêmeos distintos. Seja G' o grafo definido como $V(G') =$

$(V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{s\}$, onde $s \notin V(G)$. Os pesos em G' são definidos da seguinte forma:

$$\alpha_{G'}(w) := \begin{cases} \alpha_G(u) + \alpha_G(v), & \text{se } w = s; \\ \alpha_G(w), & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e

$$\beta_{G'}(w, r) := \begin{cases} \beta_G(u, r), & \text{se } w = s; \\ \beta_G(w, u), & \text{se } r = s; \\ \beta_G(w, r), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil ver que $\hom(F, G) = \hom(F, G')$ para todo grafo F. Assim, usando a equação (4.1), temos

$$\mathrm{r}(G, k) = \mathrm{r}(G', k) \leq |V(G')|^k < |V(G)|^k.$$

□

4.1.2 Automorfismos

Seja G um grafo com pesos. Dizemos que um automorfismo de G é **próprio** se preserva os pesos dos vértices e das arestas de G. Como trataremos apenas de automorfismos próprios, chamaremos automorfismos próprios simplesmente de automorfismos.

Dadas funções $\phi, \psi \colon [k] \to V(G)$, dizemos que $\phi \sim \psi$ se existe um automorfismo σ de G tal que $\psi = \sigma \circ \phi$. Esta é uma relação de equivalência. Seja $\mathrm{orb}_k(G)$ o número de classes de equivalência de $V(G)^{[k]}$. Dizemos que $\mathrm{orb}_k(G)$ é o número de órbitas do grupo de automorfismos de G sobre k-tuplas.

Seja $N(G, k)$ a matriz cujas linhas são indexadas por todas as funções de $[k]$ em $V(G)$ e cujas colunas são indexadas por todos os grafos k-rotulados a menos de isomorfismos. Definimos $(N(G, k))_{\phi, F} = \hom_\phi(F, G)$. Defina $A(G, k)$ como a matriz diagonal cujas linhas e colunas são indexadas pelo conjunto de funções de $[k]$ em $V(G)$ e $(A(G, k))_{\phi,\phi} = \alpha_\phi(G)$. Note que

$$M(G, k) = N(G, k)^\top A(G, k) N(G, k).$$

Assim, o posto de $M(G, k)$ é igual ao posto de $N(G, k)$.

É fácil ver que duas linhas de $N(G, k)$ são iguais se são indexadas por funções ϕ e ψ tais que $\psi = \sigma \circ \phi$ para algum automorfismo σ de G. Assim, fica claro que o posto de $N(G, k)$ é no máximo $\mathrm{orb}_k(G)$. Vamos mostrar que vale a igualdade.

4.2 O posto exato das matrizes de conexão

Enunciamos os resultados que iremos provar neste capítulo.

Teorema 4.2.1. *Seja G um grafo com pesos livre de vértices gêmeos. Vale que*

$$\mathrm{r}(G, k) = orb_k(G).$$

Corolário 4.2.2. *Seja G um grafo com pesos livre de vértices gêmeos e sem automorfismos não-triviais. Vale que*

$$\mathrm{r}(G,k) = |V(G)|^k.$$

Dizemos que um vetor x indexado por $V(G)^{[k]}$ com valores reais é invariante sob automorfismos se $x_\phi = x_{\sigma\circ\phi}$ para todo automorfismo σ de G.

Lema 4.2.3. *O espaço das colunas de $N(G,k)$ é formado pelos vetores indexados por $V(G)^{[k]}$ invariantes sob automorfismos.*

Lema 4.2.4. *Seja G um grafo com pesos livre de vértices gêmeos. Sejam $\phi,\psi \in V(G)^{[k]}$ e suponha que, para todo grafo k-rotulado F vale que $\hom_\phi(F,G) = \hom_\psi(F,G)$. Então existe um automorfismo σ de G tal que $\psi = \sigma\circ\phi$.*

O seguinte resultado é similar ao teorema 1.5.1.

Corolário 4.2.5. *Sejam H_1 e H_2 grafos com pesos livres de vértices gêmeos. Se, para todo grafo F, vale que $\hom(F,H_1) = \hom(F,H_2)$, então H_1 e H_2 são isomorfos.*

4.3 Álgebras de funções de rótulos

Daqui em diante fixamos um grafo G com pesos. Consideramos $\mathcal{G}(S)$ como definida no capítulo 3 e onde $\langle x,y\rangle = \hom(xy,G)$ para quaisquer $x,y \in \mathcal{G}(S)$.

4.3.1 A álgebra das combinações lineares de funções de rótulos

Para todo $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$, seja $\mathcal{A}(S)$ a álgebra das combinações lineares formais das funções de S em $V(G)$. A multiplicação entre funções de S em $V(G)$ é definida como

$$\phi * \psi := \begin{cases} \phi, & \text{se } \phi = \psi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil ver que

$$u_S := \sum_{\phi\colon S\to V(G)} \phi$$

é uma unidade de $\mathcal{A}(S)$.

Definimos o produto interno entre funções de S em $V(G)$ como

$$\langle \phi,\psi\rangle := \begin{cases} \alpha_\phi(G), & \text{se } \phi = \psi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este produto interno é positivo definido. Estendemos este produto bilinearmente para obter um produto interno para quaisquer elementos de $\mathcal{A}(S)$.

Seja $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$ um conjunto finito. Para todo grafo S-rotulado F, defina

$$f_S(F) := \sum_{\phi\colon S \to V(G)} \hom_\phi(F, G)\phi.$$

Estendemos essa função linearmente para obter uma função de $\mathcal{G}(S)$ em $\mathcal{A}(S)$.

Proposição 4.3.1. *Seja $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$ um conjunto finito. Vale que f_S é um homomorfismo de $\mathcal{G}(S)$ em $\mathcal{A}(S)$.*

Prova: Sejam F_1 e F_2 grafos S-rotulados. Temos que

$$\begin{aligned}
f_S(F_1) * f_S(F_2) &= \Big(\sum_{\phi_1\colon S \to V(G)} \hom_{\phi_1}(F_1, G)\phi_1\Big) * \Big(\sum_{\phi_2\colon S \to V(G)} \hom_{\phi_2}(F_2, G)\phi_2\Big) \\
&= \sum_{\phi_1, \phi_2\colon S \to V(G)} \hom_{\phi_1}(F_1, G) \hom_{\phi_2}(F_2, G)(\phi_1 * \phi_2) \\
&= \sum_{\phi\colon S \to V(G)} \hom_\phi(F_1, G) \hom_\phi(F_2, G)\phi \\
&= \sum_{\phi\colon S \to V(G)} \hom_\phi(F_1 F_2, G)\phi \\
&= f_S(F_1 F_2)
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
f_S(F_1) + f_S(F_2) &= \sum_{\phi\colon S \to V(G)} \Big(\hom_\phi(F_1, G) + \hom_\phi(F_2, G)\Big)\phi \\
&= \sum_{\phi\colon S \to V(G)} \hom_\phi(F_1 + F_2, G)\phi \\
&= f_S(F_1 + F_2).
\end{aligned}$$

□

Usaremos as seguintes abreviações. Denotamos por $\mathcal{G}_k$ a álgebra $\mathcal{G}([k])$ e por $\hat{\mathcal{G}}_k$ a álgebra $\hat{\mathcal{G}}([k])$. Denotamos por $\mathcal{A}_k$ a álgebra $\mathcal{A}([k])$. Denotamos por f_k a função $f_{[k]}$.

Definimos a função traço $\mathrm{tr}\colon \mathcal{G}_k \to \mathcal{G}_{k-1}$ simplesmente pela remoção do rótulo k de cada grafo. Também definimos uma função traço $\mathrm{tr}\colon \mathcal{A}_k \to \mathcal{A}_{k-1}$ como

$$\mathrm{tr}(\phi) = \alpha_G(\phi(k))\phi|_{[k-1]}.$$

Proposição 4.3.2. *Para todo grafo k-rotulado F, vale que*

$$\mathrm{tr}(f_k(F)) = f_{k-1}(\mathrm{tr}(F)).$$

Prova: Tome $F' := \mathrm{tr}(F)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(f_k(F)) &= \mathrm{tr}\left(\sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} \hom_\phi(F,G)\phi\right) \\
&= \sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} \alpha_G(\phi(k)) \hom_\phi(F,G)\phi|_{[k-1]} \\
&= \sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} \left(\sum_{\psi \text{ estende } \phi} \frac{\alpha_\psi(F,G)}{\alpha_{\phi|_{[k-1]}}(G)} \hom_\psi(F,G)\right)\phi|_{[k-1]} \\
&= \sum_{\phi\colon [k]\to V(G)} \left(\sum_{\psi \text{ estende } \phi} \frac{\alpha_\psi(F',G)}{\alpha_{\phi|_{[k-1]}}(G)} \hom_\psi(F',G)\right)\phi|_{[k-1]} \\
&= \sum_{\phi'\colon [k-1]\to V(G)} \hom_{\phi'}(F',G)\phi' \\
&= f_{k-1}(F') = f_{k-1}(\mathrm{tr}(F)).
\end{aligned}$$

□

4.3.2 Sub-álgebras de $\mathcal{A}_k$

Dizemos que um elemento $x = \sum_\psi x_\psi \psi$ de $\mathcal{A}_k$ é **invariante sob automorfismos** de G se, para toda função $\psi \in V(G)^{[k]}$, vale que $x_\psi = x_{\sigma\circ\psi}$ para todo automorfismo σ de G.

Para todo inteiro $k \geq 0$, seja $\mathcal{A}'_k$ a sub-álgebra de $\mathcal{A}_k$ formada pelos elementos invariantes sob automorfismos de G.

Note que os elementos de $\mathcal{A}'_k$ são os elementos de $\mathcal{A}_k$ para os quais vale que, se ϕ e ψ satisfazem $\psi = \sigma \circ \phi$ para algum automorfismo σ de G, então ϕ e ψ aparecem com o mesmo coeficiente.

Pode-se provar que

Proposição 4.3.3. *Para todo inteiro $k \geq 0$, vale que*

$$\dim(\mathcal{A}'_k) = orb_k(G).$$

Prova: Note que $\mathcal{A}'_k$ é formada pelos elementos $x = \sum_\psi x_\psi \psi$ tais que $x_\psi = x_\phi$ sempre que $\psi \sim \phi$. Sejam $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ as classes de equivalência definida por $\sim$ no conjunto de funções em $V(G)^{[k]}$. Para cada $1 \leq i \leq t$, seja $x^{(i)} = \sum_{\psi\colon [k]\to V(G)} x^{(i)}(\psi)\psi$ tal que

$$x^{(i)}(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \psi \in \Psi_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É óbvio que $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(t)}\}$ é uma base de $\mathcal{A}'_k$. □

Para todo inteiro $k \geq 0$, seja $\mathcal{A}''_k$ a sub-álgebra de $\mathcal{A}_k$ definida como $\mathcal{A}''_k := f_k(\mathcal{G}_k)$.

Lema 4.3.4. *Para todo inteiro $k \geq 0$, vale que*

$$\mathcal{A}''_k \subseteq \mathcal{A}'_k.$$

Prova: Para quaisquer funções $\phi, \psi \in V(G)^{[k]}$, vale que, se $\phi \sim \psi$, então $\hom_\phi(F,G) = \hom_\psi(F,G)$ para todo grafo k-rotulado F. Assim, é claro que $f_k(F) \in \mathcal{A}'_k$. □

Dizemos que funções ϕ e ψ em $V(G)^{[k]}$ são **equivalentes** se, e somente se,

$$\hom_\phi(F,G) = \hom_\psi(F,G),$$

para todo grafo k-rotulado F.

Note que os elementos de $\mathcal{A}''_k$ são os elementos de $\mathcal{A}_k$ para os quais vale que, se ϕ e ψ são equivalentes, então ϕ e ψ aparecem com o mesmo coeficiente.

Sejam $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\ell$ as classes de equivalência definidas por essa relação de equivalência. Para cada $1 \leq i \leq \ell$, tome

$$w^{(i)} := \sum_{\phi \in \Phi_i} \phi.$$

Proposição 4.3.5. *Para todo inteiro $k \geq 0$, vale que $\{w^{(1)}, \ldots, w^{(\ell)}\}$ é uma base de $\mathcal{A}''_k$.*

Prova: Note que para todo grafo k-rotulado F, vale que

$$f_k(F) = \sum_{i=1}^{\ell} \hom_{\phi_i}(F,G) w_i,$$

onde $\phi_i \in \Phi_i$. Assim, é claro que $\{w^{(1)}, \ldots, w^{(\ell)}\}$ gera $\mathcal{A}''_k$.

Seja $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}\}$ uma base formada por elementos idempotentes ortogonais de $\mathcal{A}''_k$. Podemos escrever cada $y^{(i)}$ como

$$y^{(i)} = \sum_{\phi} \lambda_{i,\phi} \phi.$$

Note que

$$y^{(i)} y^{(i)} = \sum_{\phi} \lambda_{i,\phi}^2 \phi.$$

Portanto, cada $\lambda_{i,\phi} \in \{0,1\}$. Assim, cada $y^{(i)}$ é uma soma de funções.

Para cada i, tome $Y_i := \{\phi \colon \lambda_{i,\phi} = 1\}$ É fácil ver que, se ϕ e ψ são funções equivalentes, então $\phi \in Y_i$ implica que $\psi \in Y_i$. Por outro lado, como $u_k = \sum_{i=1}^{t} y^{(i)}$ e $y^{(i)} y^{(j)} = 0$ para quaisquer i e j distinto, temos que $\{Y_1, \ldots, Y_t\}$ é uma partição de $V(G)^{[k]}$. Assim, se ϕ e ψ não são equivalentes, então $\phi \in Y_i$ e $\psi \in Y_j$ com $i \neq j$.

Note que $\{Y_1, \ldots, Y_t\} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_\ell\}$ Ademais, $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}\} = w^{(i)}, \ldots, w^{(\ell)}$. □

Proposição 4.3.6. *Para todo inteiro $k \geq 0$, vale que*

$$\dim(\mathcal{A}''_k) = \mathrm{rk}(N(G,k)).$$

Prova: Pela proposição 4.3.5, é fácil ver que $\dim(\mathcal{A}''_k) \geq \mathrm{rk}(N(G,k))$.

Vamos provar que $\dim(\mathcal{A}''_k) \leq \mathrm{rk}(N(G,k))$. Sejam $\psi_1, \ldots, \psi_\ell$ funções em $V(G)^{[k]}$ tais que as linhas indexadas por $\{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ formam um conjunto de linhas linearmente independente máximo de $N(G,k)$.

Para toda função $\phi \in V(G)^{[k]}$, existem reais $\lambda_{1,\phi}, \ldots, \lambda_{\ell,\phi}$ tais que

$$\hom_\phi(F,G) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_{i,\phi} \hom_{\psi_i}(F,G).$$

Para cada $i \in [\ell]$, tome

$$y^{(i)} := \sum_{\phi} \lambda_{i,\phi}\phi.$$

Vamos mostrar que $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(\ell)}\}$ gera $\mathcal{A}''_k$. Seja F um grafo k-rotulado. Temos que

$$f_k(F) = \sum_{\phi} \hom_\phi(F,G)\phi = \sum_{i=1}^{\ell} \hom_{\psi_i}(F,G)y^{(i)}.$$

□

Lema 4.3.7. *Para todo inteiro $k \geq 0$, vale que*

$$\mathrm{tr}(\mathcal{A}''_{k+1}) \subseteq \mathcal{A}''_k.$$

Prova: Segue da proposição 4.3.2. □

4.4 Prova do lema 4.2.4

Desta seção em diante consideramos que G é um grafo livre de vértices gêmeos. Assumimos também que $V(G) = [m]$.

O lema 4.2.4 equivale ao seguinte lema.

Lema 4.4.1. *Sejam $\phi, \psi \in [m]^{[k]}$ funções equivalentes. Então existe um automorfismo σ de G tal que $\psi = \sigma \circ \phi$.*

Precisamos de alguns lemas auxiliares.

Lema 4.4.2. *Seja ϕ uma função de $[m]^{[m]}$. Se*

$$\beta_G(\phi(u), \phi(v)) = \beta_G(u,v)$$

para quaisquer $u, v \in [m]$, então ϕ é bijetora.

Prova: Não é difícil provar que existe $t > 0$ tal que $\phi^t(\phi^t(v)) = \phi^t(v)$ para todo $v \in [m]$. Vamos mostrar que v e $\phi^t(v)$ são vértices gêmeos para todo $v \in [m]$. Temos que

$$\beta_G(u, v) = \beta_G(\phi^t(u), \phi^t(v)) = \beta_G(\phi^t(u), \phi^{2t}(v)) = \beta_G(u, \phi^t(v))$$

para todo $u \in [m]$. Portanto, como G não tem vértices livres distintos, vale que $v = \phi^t(v)$ para todo $v \in [m]$. Logo ϕ^t é sobrejetora. Isto implica que ϕ é sobrejetora (e, portanto, injetora). □

Usaremos a seguinte abreviação. Para toda função ϕ de $[k]$ em $[m]$, denotamos a restrição de ϕ a $[k-1]$ por ϕ'.

Lema 4.4.3. *Sejam ϕ e $\psi \in [m]^{[k]}$ equivalentes. Se ϕ e ψ são equivalentes, então ϕ' e ψ' também são equivalentes.*

Prova: Suponha que ϕ' e ψ' não são equivalentes. Logo, existe um grafo $(k-1)$-rotulado tal que $\hom_{\phi'}(F, G) \neq \hom_{\psi'}(F, G)$. Seja H o grafo obtido a partir de F adicionando um novo vértice de rótulo k. Assim,

$$\hom_{\phi}(H, G) = \hom_{\phi'}(F, G) \neq \hom_{\psi'}(F, G) = \hom_{\psi}(H, G),$$

o que é um absurdo. □

Lema 4.4.4. *Sejam ϕ e $\psi \in [m]^{[k]}$. Então, para todo $\mu \in [m]^{k+1}$ tal que $\mu' = \phi$, existe $\nu \in [m]^{k+1}$ tal que $\nu' = \psi$ e μ e ν são equivalentes.*

Prova: Seja Φ o conjunto de funções equivalentes a μ. Por definição, vale que

$$\sum_{\nu \in \Phi} \nu \in \mathcal{A}''_{k+1}.$$

Pelo lema 4.3.7, vale que

$$\sum_{\nu \in \Phi} \alpha_G(\nu(k+1))\nu' = \operatorname{tr}\left(\sum_{\nu \in \Phi} \nu \in \mathcal{A}''_{k+1}\right) \in \mathcal{A}''_k.$$

A função ϕ aparece nessa soma com coeficiente diferente de zero. Como ϕ e ψ são equivalentes, então ψ aparece com coeficiente diferente de zero. Portanto, $\psi = \nu'$ para alguma função ν equivalente a μ. □

Lema 4.4.5. *Sejam ϕ e $\psi \in [m]^{[m]}$. Se ϕ e ψ são equivalentes e ϕ é bijetora, então existe um automorfismo σ de G tal que $\psi = \sigma \circ \phi$.*

Prova: Suponha sem perda de generalidade que ϕ é a identidade. Seja Φ o conjunto de funções equivalentes a ϕ. Seja $\mu \in \Phi$. Primeiro vamos provar que

$$\beta_G(i, j) = \beta_G(\mu(i), \mu(j)),$$

para quaisquer $i, j \in [m]$. Seja R_{ij} o grafo k-rotulado consistindo de k vértices e com apenas uma aresta que liga os vértices de rótulo i e j. Temos que

$$\beta_G(i,j) = \hom_\phi(R_{ij}, G) = \hom_\mu(R_{ij}, G) = \beta_G(\mu(i), \mu(j)).$$

Como G é livre de vértices gêmeos, pelo lema 4.4.2 vale que μ é bijetora. Resta provar que

$$\alpha_G(i) = \alpha_G(\mu(i))$$

para todo $i \in [m]$. Vamos provar para o caso em que $i = m$. Os outros casos seguem analogamente. Sabemos que $\sum_{\xi\in\Phi} \xi \in \mathcal{A}''_m$. Pelo lema 4.3.7, vale que $\sum_{\xi\in\Phi} \alpha_G(\xi(m))\xi \in \mathcal{A}''_{m-1}$. Como toda função em Φ é bijetora, $\eta' \neq \nu'$ para quaisquer $\eta, \nu \in \Phi$. Ademais, pelo lema 4.4.3, η' e ν' são equivalentes. Portanto, η' e ν' devem ter o mesmo coeficiente em $\sum_{\xi\in\Phi} \alpha_G(\xi(m))\xi$. Assim, vale que $\alpha_G(\eta(m)) = \alpha_G(\nu(m))$ para quaisquer $\eta, \nu \in \Phi$. Como $\phi \in \Phi$, então $\alpha_G(\mu(m)) = \alpha_G(\phi(m))$. □

Lema 4.4.6. *Sejam ϕ e $\psi \in [m]^{[k]}$. Se ϕ e ψ são equivalentes e ϕ é sobrejetora, então existe um automorfismo σ de G tal que $\psi = \sigma \circ \phi$.*

Prova: Suponha sem perda de generalidade que $\phi(i) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$. Pelo lema 4.4.3, vale que a restrição de ϕ e de ψ a $[m]$ são equivalentes. Pelo lema 4.4.5, existe um automorfismo σ de G tal que $\psi(i) = (\sigma \circ \phi)(i) = \sigma(i)$ para todo $i \in [m]$.

Seja $m + 1 \leq i \leq k$. Seja $r := \phi(i)$. A restrição de ϕ a $\{1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m\} \cup \{i\}$ é bijetora e é equivalente a restrição de ψ a esse mesmo conjunto. Portanto, a restrição de ψ a $\{1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m\} \cup \{i\}$ é bijetora. Como a restrição de ψ a $\{1, \ldots, m\}$ é bijetora, então $\psi(i) = \psi(r)$. Logo, $\psi(i) = \psi(r) = \sigma(r) = \sigma(\phi(i))$. □

Prova do lema 4.4.1: Sejam $\phi, \psi \in [m]^{[k]}$ funções equivalentes. Seja $\mu \in [m]^{[\ell]}$ uma extensão sobrejetora de ϕ. Usando o lema 4.4.4, tome $\nu \in [m]^{[\ell]}$ uma extensão de ψ equivalente a μ. Pelo lema 4.4.6, existe um automorfismo σ de G tal que $\nu = \sigma \circ \mu$. Assim, $\psi = \sigma \circ \phi$. □

4.5 Prova do lema 4.2.3 e do teorema 4.2.1

Para cada $x = \sum_{\phi\in V(G)^{[k]}} x_\phi \phi$, associamos um vetor $\underline{x}$ indexado por $V(G)^{[k]}$ tal que $\underline{x}_\phi = x_\phi$.

Lema 4.5.1. *Para todo inteiro $k \geq 0$, vale que*

$$\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}''_k.$$

Prova: Pelo lema 4.3.4, basta provar que $\mathcal{A}'_k \subseteq \mathcal{A}''_k$. Seja $x = \sum_{\phi\in V(G)^{[k]}} x_\phi \phi$ em $\mathcal{A}'_k$. Sejam $\phi, \psi \in V(G)^{[k]}$ funções equivalentes. Pelo lema 4.2.4, vale que existe um automorfismo σ de G tal que $\psi = \sigma \circ \phi$. Portanto, como $x \in \mathcal{A}'_k$, vale que $x_\phi = x_\psi$. Logo, $x \in \mathcal{A}''_k$. □

Prova do lema 4.2.3: É fácil ver que $x \in \mathcal{A}''_k$ se, e somente se, $\underline{x}$ está no espaço gerado pelas colunas de $N(G, k)$.

Pelo lema 4.5.1, vale que $x \in \mathcal{A}''_k$ se, e somente se, $x \in \mathcal{A}'_k$. Ou seja, $\underline{x}$ é invariante sob automorfismos. □

Prova do teorema 4.2.1: Segue diretamente das proposições 4.3.3 e 4.3.6 e do lema 4.5.1. □

4.6 Prova do corolário 4.2.5

Prova do corolário 4.2.5: Seja $D \geq 1$ um inteiro tal que $\alpha_{H_i}(v) \neq D$ para todo $v \in V(H_i)$ e $i \in \{1, 2\}$. Seja H o grafo obtido a partir da união disjunta de H_1 e H_2 e a criação de dois novos nós v_1 e v_2 tais que v_i é adjacente a todos os vértices de H_i e tem um laço. Os pesos dos novos vértices é D e das novas arestas é 1. Note que H é livre de vértices gêmeos.

Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja ϕ_i a função de $\{1\}$ em $V(H)$ tal que $\phi_i(1) = v_i$. Vamos provar que para todo grafo 1-rotulado F, vale que

$$\hom_{\phi_1}(F, H) = \hom_{\phi_2}(F, H).$$

Note que basta considerarmos o caso em que F é conexo. Seja v o vértice rotulado com 1 em F. Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja Φ_i o conjunto de funções de $V(F)$ em $V(H)$ tal que $\phi \in V(H)^{V(F)} \in \Phi_i$ se $\hom_\phi(F, H) > 0$ e $\phi(v) = v_i$. Para cada $\phi \in \Phi_i$, defina $S_\phi := \{u \in V(F) \colon \phi(u) = v_i\}$.

Para cada $\phi \in \Phi_i$, tome $\check{\phi}$ como a restrição de ϕ a $V(F) \setminus S_\phi$. Note que, para todo $\phi \in \Phi_i$, vale que $\hom_\phi(F, H) = D^{|S_\phi|} \hom_{\check{\phi}}(F \setminus S_\phi, H_i)$, onde definimos $F \setminus S := F[V(F) \setminus S]$ para todo $S \subseteq V(F)$. Assim, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \hom_{\phi_i}(F, H) &= \sum \{D^{|S_\phi|} \hom_{\check{\phi}}(F \setminus S_\phi, H_i) \colon \phi \in \Phi_i\} \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq V(F) \\ S \ni v}} D^{|S|} \hom(F \setminus S, H_i). \end{aligned}$$

Como $\hom(F \setminus S, H_1) = \hom(F \setminus S, H_2)$ para todo $S \subseteq V(F)$, então vale que $\hom_{\phi_1}(F, H) = \hom_{\phi_2}(F, H)$. Portanto, ϕ_1 e ϕ_2 são equivalentes.

O lema 4.4.1 implica na existência de um automorfismo de H que mapeia v_1 em v_2. Tal automorfismo, nos dá um isomorfismo entre H_1 e H_2. □

Capítulo 5

Seqüências de grafos e homomorfismos de grafos

Neste capítulo apresentamos um resultado de Lovász e Szegedy [2006] sobre seqüência de grafos convergentes. Lovász e Szegedy [2006] introduzem o conceito de convergência para seqüência de grafos e definem um objeto-limite para toda seqüência convergente.

Neste capítulo grafos sem pesos não podem ter arestas múltiplas e laços. Ademais, os invariantes de grafos que tratamos neste capítulo devem ser funções f tais que $f = f' \circ g$, onde f' é um invariante de grafos sem arestas múltiplas e g é a função tal que $g(G)$ é obtido do grafo G (possivelmente com arestas múltiplas) transformando as arestas múltiplas em uma única aresta.

5.1 Densidade de homomorfismos

Dados grafos F e G, definimos a **densidade de homomorfismos** de F em G como

$$\mathrm{t}(F,G) := \frac{\hom(F,G)}{|V(G)|^{|V(F)|}}.$$

Este número equivale à probabilidade de obtermos um homomorfismo ao sortear uma função de $V(F)$ em $V(G)$ uniformemente.

Podemos estender a definição de $\mathrm{t}(F,G)$ para o caso em que G é um grafo com pesos. Seja G um grafo com pesos. Definimos o **peso** de G como

$$\alpha_G := \sum_{v \in V(G)} \alpha_G(v).$$

Seja F um grafo. A **densidade de homomorfismos** de F em G é definida como

$$\mathrm{t}(F,G) := \frac{\hom(F,G)}{{\alpha_G}^{|V(F)|}}.$$

Note que, se G é um grafo com pesos e $\alpha_G = 1$, então $\mathrm{t}(F,G) = \hom(F,G)$ para todo grafo F.

5.2 Seqüências de grafos e convergência

Seja $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de grafos com $|V(G_n)|$ tendendo ao infinito. Dizemos que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **convergente** se, para todo grafo F, vale que $(\mathrm{t}(F,G_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge com $n\to\infty$.

Em particular, dizemos que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para um grafo** G com pesos, se

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{t}(F,G_n))_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{t}(F,G),$$

para todo grafo F.

Infelizmente, existem seqüências convergentes de grafos que não convergem para um grafo com pesos. Um exemplo disso são os meio-grafos. O meio-grafo H_n é o grafo definido por

$$\begin{aligned} V(H_n) &:= \{(i,1)\colon 1\le i\le n\}\cup\{(i,2)\colon 1\le i\le n\};\\ E(H_n) &:= \{\{(i,1),(i',2)\}\colon i\le i'\}. \end{aligned}$$

Veja a figura 5.1.

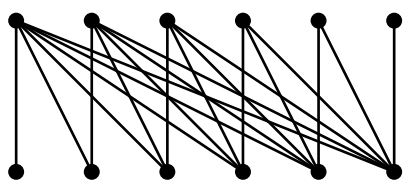

Figura 5.1: H_6.

5.3 O objeto-limite

Lovász e Szegedy [2006] mostraram que, para toda seqüência de grafos convergente, existe um objeto-limite bastante natural. Esse objeto é uma função simétrica e mensurável do quadrado unitário no intervalo unitário e pode ser visto como um grafo infinito com pesos nas arestas cujo conjunto de vértices é o intervalo unitário.

Seja $W\colon [0,1]^2\to[0,1]$ uma função simétrica e mensurável. Definimos, para todo grafo F com $V(F)=[k]$,

$$\mathrm{t}(F,W) := \int_{x\in[0,1]^k}\prod_{ij\in E(F)} W(x_i,x_j)\,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Podemos considerar uma função $[0,1]^2\to[0,1]$ como uma matriz de adjacência de um grafo com pesos nas arestas e conjunto de vértices $[0,1]$.

Associamos a cada grafo G com pesos uma função $W_G\colon [0,1]^2\to[0,1]$ simétrica e mensurável de forma que $\mathrm{t}(\,\cdot\,,G)=\mathrm{t}(\,\cdot\,,W_G)$. Seja G um grafo sobre $[n]$ e A sua matriz de adjacência. Seja $\phi_G\colon [0,1]\to[n]$ a seguinte função:

$$\phi_G(x) := \begin{cases} i, & \text{se } x\in\left[\frac{(i-1)}{n},\frac{i}{n}\right) \text{ para algum } i\in[n];\\ n, & \text{se } x=1. \end{cases}$$

Definimos $W_G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ como

$$W_G(x,y) := A_{\phi(x),\phi(y)}.$$

Não é difícil provar que $\mathrm{t}(\,\cdot\,, W_G) = \mathrm{t}(\,\cdot\,, G)$.

5.4 Caracterização

Seja $\mathcal{T}$ o conjunto de invariantes de grafos que são limites de seqüências de grafos convergentes. Ou seja, um invariante de grafos f está em $\mathcal{T}$ se existe uma seqüência de grafos convergente $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f(F) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{t}(F, G_n),$$

para todo grafo F.

Para todo invariante de grafos f, definimos a matriz $M_0(f)$ como a matriz com linhas e colunas indexadas por $\{F_1, F_2, \ldots\}$, onde $F_1, F_2, \ldots$ é uma enumeração de todos os grafos cujos vértices pertencem a $\mathbb{Z}_{>0}$ e

$$M_0(f)(F_i, F_j) := f(F_i \cup F_j),$$

para todo i e j. Para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, definimos $M_0(f,k)$ como a submatriz principal de $M_0(f)$ indexada pelos grafos sobre $[k]$. Note que $M_0(f,k)$ é uma submatriz simétrica de $M(f,k)$.

Dizemos que um invariante de grafos f é **normalizado** se $f(K_1) = 1$. Note que, se f é normalizado e multiplicativo, então $M_0(f)$ é positiva semidefinida se, e somente se, $M_0(f,k)$ é positiva semidefinida para todo k.

Para todo invariante de grafos f, definimos

$$f^\dagger(F) := \sum_{\substack{F' \supseteq F \\ V(F')=V(F)}} (-1)^{|E(F')\setminus E(F)|} f(F'),$$

para todo grafo F. Vale que

$$f(F) = \sum_{\substack{F' \supseteq F \\ V(F')=V(F)}} f^\dagger(F').$$

Teorema 5.4.1. *Seja f um invariante de grafos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) f pertence a $\mathcal{T}$.

(b) Existe uma função $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ simétrica e mensurável tal que $f = t(\,\cdot\,, W)$.

(c) f é normalizado, multiplicativo e tem reflexão positiva.

(d) f é normalizado, multiplicativo e $M_0(f)$ é positiva semidefinida.

(e) f é normalizado, multiplicativo e $f^\dagger \geq 0$.

A caracterização (b) é analítica. As caracterizações (c) e (d) são algébricas (mais próximas da álgebra linear). A caracterização (e) é combinatória.

A caracterização (b) tem com qualquer uma das caracterizações (c), (d) e (e) uma relação do estilo NP-coNP, pois (b) basicamente nos diz quando um invariante de grafos está em $\mathcal{T}$ (basta apresentarmos W), enquanto as outras nos dizem quando um invariante não está em $\mathcal{T}$ (por exemplo, podemos mostrar que o invariante não é normalizado, ou mostrar uma submatriz principal da matriz de conexão para algum k que não seja positiva semidefinida).

5.5 Ferramentas principais

5.5.1 Norma retangular

A norma retangular (também conhecida como *cut norm*) foi introduzida por Frieze e Kannan [1999]. Seja $U\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. A **norma retangular** de U é definida como

$$\|U\|_\square := \sup_{S\subseteq[0,1],T\subseteq[0,1]} \left| \int_S \int_T U(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right|.$$

Esta definição é equivalente a

$$\|U\|_\square = \sup_{0\le f,g\le 1} \left| \int_0^1 \int_0^1 U(x,y)\ f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right|. \tag{5.2}$$

Seja A uma matriz $k \times k$. Definimos ϕ_k como a função sobre $[0,1]$ tal que

$$\phi_k(x) := \begin{cases} i, & \text{se } x \in \left[\frac{(i-1)}{k}, \frac{i}{k}\right) \text{ para algum } i \in [k]; \\ k, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Definimos $W_A\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ como

$$W_A(x,y) := A_{\phi_k(x)\phi_k(y)}.$$

Definimos $\|A\|_\square := \|W_A\|_\square$. Note que

$$\|A\|_\square = \frac{1}{k^2} \max_{S\subseteq[k],T\subseteq[k]} \left| \sum_{s\in S}\sum_{t\in T} A_{st} \right|.$$

Sejam G e G' grafos sobre o mesmo conjunto de vértices (com ou sem pesos) e sejam A e A' as matrizes de adjacência com pesos de G e G' respectivamente. Definimos

$$\mathrm{d}_\square(G,G') := \|A - A'\|_\square.$$

Lema 5.5.1. *Sejam U e W funções simétricas e mensuráveis de $[0,1]^2$ em $[0,1]$. Para todo grafo F, vale que*

$$|\,\mathrm{t}(F,U) - \mathrm{t}(F,W)| \le |E(F)| \cdot \|U - W\|_\square.$$

Prova: Supomos que $V(F) = [n]$ e que $E(F) = \{e_1, \ldots, e_m\}$, onde $e_t = i_t j_t$. Tome $E_t := \{e_1, \ldots, e_t\}$ para todo $t \in [m]$. Temos que

$$\mathrm{t}(F, U) - \mathrm{t}(F, W) = \int_{x \in [0,1]^n} \Big(\prod_{ij \in E(F)} U(x_i, x_j) - \prod_{ij \in E(F)} W(x_i, x_j) \Big) \mathrm{d}x.$$

Vale que

$$\prod_{ij \in E(F)} U(x_i, x_j) - \prod_{ij \in E(F)} W(x_i, x_j) = \sum_{t=1}^{m} X_t(x_1, \ldots, x_n),$$

onde

$$X_t(x_1, \ldots, x_n) := \Big(\prod_{ij \in E_{t-1}} U(x_i, x_j) \Big) \cdot \Big(\prod_{ij \in E(F) \setminus E_t} W(x_i, x_j) \Big) (U(x_{i_t}, x_{j_t}) - W(x_{i_t}, x_{j_t})).$$

Assim,

$$|\,\mathrm{t}(F, U) - \mathrm{t}(F, W)| \leq \sum_{t=1}^{m} \Big| \int_{x \in [0,1]^n} X_t(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x \Big|.$$

Por outro lado, pela definição (5.2) e fixando os valores de $x_1, \ldots, x_n$ exceto x_{i_t} e x_{j_t}, temos que

$$\Big| \int_0^1 \int_0^1 X_t(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_{i_t} \mathrm{d}x_{j_t} \Big| \leq \|U - W\|_{\square}.$$

Portanto,

$$\sum_{t=1}^{m} \Big| \int_{x \in [0,1]^n} X_t(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x \Big| \leq m \|U - W\|_{\square}.$$

$\square$

5.5.2 Lema fraco de regularidade de Szemerédi

O lema de regularidade de Szemerédi é uma ferramenta básica da combinatória extremal e tem muitas versões.

Seja G um grafo, $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ uma partição de $V(G)$ e Q uma matriz $k \times k$ simétrica com todas as entradas em $[0, 1]$. Definimos $K(\mathcal{P}, Q)$ como o grafo completo sobre $V(G)$ com pesos nas arestas, onde o peso de uma aresta $v_i v_j$ é Q_{ij} sempre que $v_i \in V_i$ e $v_j \in V_j$. Defina $Q^{\mathcal{P}}$ como a matriz $k \times k$ tal que $Q^{\mathcal{P}}_{ij} := \mathrm{e}(V_i, V_j)/(|V_i||V_j|)$, onde $\mathrm{e}(V_i, V_j)$ é o número de arestas entre V_i e V_j em G. Dizemos que $Q^{\mathcal{P}}$ é a **matriz de densidade** de $\mathcal{P}$.

Para todo $\varepsilon > 0$, dizemos que $\mathcal{P}$ é uma partição **fracamente ε-regular** de G se

$$\mathrm{d}_{\square}(G, K(\mathcal{P}, Q^{\mathcal{P}})) \leq \varepsilon.$$

A seguir enunciamos o lema fraco de regularidade.

Lema 5.5.2. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe um $k_\varepsilon = 2^{O(1/\varepsilon^2)}$ tal que todo grafo G admite uma partição $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ satisfazendo*

- $k \leq k_\varepsilon$;
- $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ *para todo* $1 \leq i < j \leq k$;
- $\mathcal{P}$ *é uma partição fracamente* ε*-regular.*

Na verdade, vamos usar o fato de que podemos fornecer uma partição $\mathcal{P}_0$ e que $\mathcal{P}$ será um refinamento de $\mathcal{P}_0$.

Essa versão é conhecida como a versão fraca do lema de regularidade de Szemerédi, pois a partição que se obtém usando essa versão tem propriedades mais fracas do que a que obteríamos usando o lema original. No entanto, essa versão nos dá um bom limitante para o tamanho da partição.

5.5.3 Teorema de convergência de martingais

Seja $(Z_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias. Dizemos que seqüência $(Z_n)_{n\geq 1}$ é um **martingal** se

$$\mathbb{E}(Z_i | Z_1, \ldots, Z_{i-1}) = Z_{i-1}$$

para todo $i > 1$.

O teorema da convergência de martingais é um resultado clássico da teoria dos martingais.

Teorema 5.5.3. *Seja $(Z_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias que assumem valores em um mesmo conjunto limitado dos reais. Se $(Z_n)_{n\geq 1}$ é um martingal, então $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge com probabilidade 1 para uma função Z.*

5.6 Teorema 5.4.1: prova de (a)⇒(b)

Lema 5.6.1. *Para toda seqüência de grafos $(G_n)_{n\geq 1}$, existe uma subseqüência $(G'_m)_{m\geq 1}$ para a qual existe uma seqüência $(k_\ell)_{\ell\geq 1}$ de inteiros e uma seqüência $(Q_\ell)_{\ell\geq 1}$ de matrizes que satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) Para todo ℓ, a matriz Q_ℓ é simétrica com dimensões $k_\ell \times k_\ell$ e todas as suas entradas estão em $[0, 1]$.

(ii) Se $i < j$, então k_i divide k_j e a matriz Q_i pode ser obtida a partir da matriz Q_j da seguinte forma: as linhas e as colunas de Q_j são particionadas em k_i blocos consecutivos de tamanho k_j/k_i e cada bloco é substituído pela média dos valores das entradas nesse bloco.

(iii) Para todo $1 \leq j \leq m$, o grafo G'_m admite uma partição $\mathcal{P}^j_m$ fracamente $(1/j)$-regular com k_j classes e com matriz de densidade Q^j_m tal que $\|Q^j_m - Q_j\|_\square \leq 1/j$ e $\mathcal{P}^j_m$ refina $\mathcal{P}^i_m$ para todo $1 \leq i < j \leq m$. Além disso, $\lim_{m\to\infty} Q^j_m = Q_j$.

Prova: Para cada $\ell \geq 1$, vamos construir uma seqüência $(G_n^\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que todo grafo G_n^ℓ admite uma partição fracamente $(1/\ell)$-regular $\mathcal{P}_n^\ell$ com matriz de densidade Q_n^ℓ e com k_ℓ classes. Além disso, deve existir uma matriz Q_ℓ satisfazendo $\|Q_n^\ell - Q_\ell\|_\square \leq 1/\ell$ para todo n e $\lim_{m\to\infty} Q_m^\ell = Q_\ell$. Cada partição $\mathcal{P}_n^{\ell+1}$ será um refinamento de $\mathcal{P}_n^\ell$. Tomamos $G'_m = G_m^m$ para todo $m \geq 1$. Note que com isso garantimos a condição (iii).

Cada seqüência $(G_n^{\ell+1})_{n\in\mathbb{N}}$ será uma subseqüência de (G_n^ℓ). Primeiro vamos mostrar como construir $(G_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Seja $(G_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência de $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona com relação à densidade das arestas. É claro que

$$\frac{|E(G_n^1)|^2}{|V(G_n^1)|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c,$$

para alguma constante c, pois a densidade das arestas está em $[0,1]$. Defina $k_1 := 1$, Q_n^1 como a matriz 1×1 com a única entrada valendo c e $\mathcal{P}_n^1 := \{V(G_n^1)\}$ para todo n.

Vamos mostrar agora como construir $(G_n^\ell)_{n\geq 1}$ dado que construímos $(G_n^{\ell-1})_{n\geq 1}$. Usando o lema de regularidade, sabemos que, $G_n^{\ell-1}$ admite uma partição fracamente $(1/\ell)$-regular $\mathcal{P}_n^\ell$ que refina $\mathcal{P}_n^\ell$ e que divide cada classe de $\mathcal{P}_n^{\ell-1}$ em um mesmo número de classes. Seja Q_n^ℓ a matriz de densidade de $\mathcal{P}_n^\ell$ para todo n.

Para cada grafo $G_n^{\ell-1}$ seja r_n^ℓ o número de classes em que cada classe de $\mathcal{P}_n^{\ell-1}$ foi dividida.

Sabemos que existe r_ℓ tal que $|\{n\colon r_n^\ell = r_\ell\}| = \infty$. Seja então $(R_n^\ell)_{n\geq 1}$ a subseqüência de $(G_n^{\ell-1})_{n\geq 1}$ composta pelos grafos $G_n^{\ell-1}$ com $r_n^\ell = r_\ell$. Tome $k_\ell = k_{\ell-1}\cdot r_\ell$.

Tome $(T_n^\ell)_{n\geq 1}$ uma subseqüência de $(R_n^\ell)_{n\geq 1}$ tal que

$$Q_n^\ell \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q_\ell$$

para alguma matriz Q_ℓ.

Finalmente, tome $(G_n^\ell)_{n\geq 1}$ como a subseqüência de $(T_n^\ell)_{n\geq 1}$ composta pelos grafos T_n^ℓ tais que

$$\|Q_n^\ell - Q_\ell\|_\square \leq \frac{1}{\ell}.$$

Note que satisfizemos as condições (i) e (iii). Vamos mostrar que a condição (ii) também é satisfeita.

Seja $\ell > 1$. Para cada $G_m^{\ell-1}$, seja $\{V_{m,1},\ldots,V_{m,k_{\ell-1}}\}$ a partição $\mathcal{P}_m^{\ell-1}$. Para cada i, sejam $V_{m,i}^1,\ldots,V_{m,i}^{r_\ell}$ as classes obtidas pelo refinamento de $V_{m,i}$. Note que

$$\lim_{m\to\infty}\left(Q_m^{\ell-1}(V_{m,i},V_{m,j}) - \frac{k_{\ell-1}^2 \mathrm{e}(V_{m,i},V_{m,j})}{|V(G_m^\ell)|^2}\right) = 0,$$

para quaisquer i e j. Note que nenhum dos valores acima pode valer infinito. Além disso, vale que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} &\frac{\sum_{i'=1}^{r_\ell}\sum_{j'=1}^{r_\ell} Q_m^\ell(V_{m,i}^{i'},V_{m,j}^{j'})}{r_\ell r_\ell} - \frac{k_{\ell-1}^2\cdot \mathrm{e}(V_{m,i},V_{m,j})}{|V(G_m^\ell)|^2}\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i'=1}^{r_\ell}\sum_{j'=1}^{r_\ell}\frac{\mathrm{e}(V_{m,i}^{i'},V_{m,j}^{j'})}{|V_{m,i}^i||V_{m,j}^j|}}{r_\ell r_\ell} - \frac{k_{\ell-1}^2\mathrm{e}(V_{m,i},V_{m,j})}{|V(G_m^\ell)|^2} = 0.\end{aligned}$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que, se $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} Q_{\ell-1}(V_{m,i}, V_{m,j}) &= Q_m^{\ell-1}(V_{m,i}, V_{m,j}) \pm \varepsilon_1 \\ &= \frac{\sum_{i'=1}^{r_\ell} \sum_{j'=1}^{r_\ell} Q_m^{\ell}(V_{m,i}^{i'}, V_{m,j}^{j'})}{r_\ell r_\ell} \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \\ &= \frac{\sum_{i'=1}^{r_\ell} \sum_{j'=1}^{r_\ell} Q_{\ell}(V_{m,i}^{i'}, V_{m,j}^{j'})}{r_\ell r_\ell} \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon 3, \end{aligned}$$

para certos $0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \leq \varepsilon/3$. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, então a condição (ii) é satisfeita. □

Lema 5.6.2. *Seja $(k_\ell)_{\ell \geq 1}$ uma seqüência de inteiros e $(Q_\ell)_{\ell \geq 1}$ uma seqüência de matrizes que satisfazem os itens (i) e (ii) do lema 5.6.1. Existe uma função simétrica e mensurável $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que*

(a) $W_{Q_\ell} \to W$ em quase todos os pontos quando $\ell \to \infty$.

(b) Para todo ℓ e quaisquer $1 \leq i, j \leq \ell$, vale que

$$(Q_\ell)_{ij} = k_\ell^2 \int_{(i-1)/k_\ell}^{i/k_\ell} \int_{(j-1)/k_\ell}^{j/k_\ell} W(x,y)dxdy.$$

Prova: Para todo ℓ, seja $\phi_\ell\colon [0,1) \to [k_\ell]$ a função definida como

$$\phi_\ell(x) := i, \text{ se } x \in \left[\frac{i-1}{k_\ell}, \frac{i}{k_\ell}\right) \text{ para algum } i \in [k_\ell].$$

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes que selecionam uniformemente um valor de $[0,1)$. Para todo ℓ, definimos $Z_\ell := Q_\ell(\phi_\ell(X), \phi_\ell(Y))$.

Vamos provar que $Z_1, Z_2, \ldots$ formam um martingal. Temos que provar que

$$\mathbb{E}(Z_{\ell+1} | Z_1, \ldots, Z_\ell) = Z_\ell,$$

para todo ℓ. Note que, se conhecemos os valores de $\phi_i(X)$ e $\phi_i(Y)$ para todo $i \leq \ell$, então podemos calcular Z_i para todo $i \leq \ell$. Assim, mostramos que

$$\mathbb{E}(Z_{\ell+1} | \phi_1(X), \ldots, \phi_\ell(X), \phi_1(Y), \ldots, \phi_\ell(Y)) = Q_\ell(\phi_\ell(X), \phi_\ell(Y)),$$

para todo ℓ. Ademais, como k_j divide todo $k_{j'}$ com $j' \geq j$, então, se soubermos os valores de $\phi_\ell(X)$ e $\phi_\ell(Y)$, conseguimos calcular os valores de $\phi_i(X)$ e $\phi_i(Y)$ para todo $i \leq \ell$. Portanto, basta mostrarmos que

$$\mathbb{E}(Z_{\ell+1} | \phi_\ell(X) = a, \phi_\ell(Y) = b) = Q_\ell(a,b),$$

para todo ℓ.

Como $\phi_\ell(X) = a$, então X é uniformemente distribuída em $[(a-1)/k_\ell, a/k_\ell)$. Portanto, $\phi_{\ell+1}(X)$ é uniformemente distribuída em $\{a_1, \dots, a_2\}$, onde $a_1 := (k_{\ell+1}/k_\ell)(a-1)+1$ e $a_2 := (k_{\ell+1}/k_\ell)a$. Similarmente, vale que $\phi_{\ell+1}(Y)$ é uniformemente distribuída em $\{b_1, \dots, b_2\}$, onde $b_1 := (k_{\ell+1}/k_\ell)(b-1)+1$ e $b_2 := (k_{\ell+1}/k_\ell)b$. Assim, pela condição (ii) do lema 5.6.1,

$$\mathbb{E}(Z_{\ell+1}|\phi_\ell(X) = a, \phi_\ell(Y) = b) = \frac{k_\ell^2}{k_{\ell+1}^2} \sum_{i=a_1}^{a_2} \sum_{j=b_1}^{b_2} Q_{\ell+1}(i,j) = Q_\ell(a,b).$$

Portanto, $Z_1, Z_2, \dots$ formam um martingal. Como Z_ℓ assume valores em $[0,1]$, então podemos usar o teorema de convergência de martingais e concluir que $\lim_{\ell\to\infty} Z_\ell$ existe com probabilidade 1. Tome

$$W(x,y) := \lim_{\ell\to\infty} Q_\ell(\phi_\ell(x), \phi_\ell(y))$$

nos pontos em que o limite existe. Se o limite não existe para um par $(x,y) \in [0,1]^2$, defina $W(x,y) := 0$.

É fácil ver que o item (a) é satisfeito. Vamos mostrar que o item (b) também é satisfeito.

Para todo $i, j > 0$ e todo ℓ, vale que

$$\begin{aligned}
\int_{(i-1)/k_\ell}^{i/k_\ell} \int_{(j-1)/k_\ell}^{j/k_\ell} W(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. &= \int_{(i-1)/k_\ell}^{i/k_\ell} \int_{(j-1)/k_\ell}^{j/k_\ell} \lim_{m\to\infty} Q_m(\phi_m(x), \phi_m(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{(i-1)/k_\ell}^{i/k_\ell} \int_{(j-1)/k_\ell}^{j/k_\ell} Q_m(\phi_m(x), \phi_m(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{k_\ell^2} \left(\lim_{m\to\infty} \frac{k_\ell^2}{k_m^2} \sum_{a=(i-1)\left(\frac{k_m}{k_\ell}\right)+1}^{i\left(\frac{k_m}{k_\ell}\right)} \left(\sum_{b=(j-1)\left(\frac{k_m}{k_\ell}\right)+1}^{j\left(\frac{k_m}{k_\ell}\right)} (Q_m)_{a,b} \right) \right) \\
&= \frac{1}{k_\ell^2} (Q_\ell)_{i,j},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da condição (ii) do lema 5.6.1. □

Prova do teorema 5.4.1 ((a)⇒(b)): Seja $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de grafos convergente. Aplicando o lema 5.6.1, obtemos uma subseqüência $(G'_m)_{m\geq 1}$ de $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma seqüência de inteiros $(k_\ell)_{\ell\geq 1}$ e uma seqüência de matrizes $(Q_\ell)_{\ell\geq 1}$ que satisfazem as condições (i)–(iii) do lema 5.6.1. Note que $f = \lim_{m\to\infty} \mathrm{t}(\,\cdot\,, G'_m)$.

Aplicando o lema 5.6.2, construímos uma função simétrica e mensurável $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ satisfazendo as condições (a) e (b) do lema 5.6.2. Vamos mostrar que que $f = \mathrm{t}(\,\cdot\,, W)$.

Para $1 \leq j \leq m$, seja $G^*_{m,j} := K(\mathcal{P}_{m,j}, Q_{m,j})$ e $G^{**}_{m,j} := K(\mathcal{P}_{m,j}, Q_j)$. Como $\mathcal{P}_{m,j}$ é uma partição $(1/j)$-regular de G'_m com matriz de densidade $Q_{m,j}$, então

$$\mathrm{d}_\square(G'_m, G^*_{m,j}) \leq \frac{1}{j}. \tag{5.3}$$

Pela condição (iii) do lema 5.6.1, temos que

$$\mathrm{d}_{\square}(G^{*}_{m,j}, G^{**}_{m,j}) \leq \frac{1}{j}. \tag{5.4}$$

Tome $W_{m,j} := W_{G^{**}_{m,j}}$ e $W_j := W_{Q_j}$. É claro que

$$\mathrm{t}(F, W_{m,j}) = \mathrm{t}(F, G^{**}_{m,j}).$$

Além disso, vale que

$$W_{m,j} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} W_j \tag{5.5}$$

em quase todos os pontos.

Pela condição (a) do lema 5.6.2, vale que

$$W_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} W \tag{5.6}$$

em quase todos os pontos.

Seja $\varepsilon > 0$ e F um grafo. Existe um m_0 tal que, se $m > m_0$, então

$$|\,\mathrm{t}(F, G'_m) - f(F)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.7}$$

Pela equação (5.6), existe j_0 tal que, se $j > j_0$, então

$$|\,\mathrm{t}(F, W) - \mathrm{t}(F, W_j)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.8}$$

Assumimos que $j > \max\{j_0, m_0, 8|E(F)|/\varepsilon\}$. Pela equação (5.5) podemos escolher $m > j$ de modo que

$$|\,\mathrm{t}(F, W_{m,j}) - \mathrm{t}(F, W_j)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.9}$$

Combinando o lema 5.5.1 e as equações (5.3) e (5.4), temos que

$$|\,\mathrm{t}(F, G'_m) - \mathrm{t}(F, G^{**}_{m,j})| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.10}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|f(F) - \mathrm{t}(F, W)| &\leq |f(F) - \mathrm{t}(F, G'_m)| + |\,\mathrm{t}(F, G'_m) - \mathrm{t}(F, W)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + |\,\mathrm{t}(F, G'_m) - \mathrm{t}(F, G^{**}_{m,j})| + |\,\mathrm{t}(F, G^{**}_{m,j}) - \mathrm{t}(F, W)| \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + |\,\mathrm{t}(F, W_{m,j}) - \mathrm{t}(F, W)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + |\,\mathrm{t}(F, W_{m,j}) - \mathrm{t}(F, W_j)| + |\,\mathrm{t}(F, W_j) - \mathrm{t}(F, W)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

5.7 Teorema 5.4.1: prova de (b)⇒(c) e de (c)⇒(d)

Prova do teorema 5.4.1 ((b)⇒(c)):

Seja $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma função simétrica e mensurável. Seja $f := \mathrm{t}(\,\cdot\,, W)$. Vamos provar que f é um invariante normalizado, multiplicativo e tem reflexão positiva.

Vale que

$$f(K_1) = \mathrm{t}(K_1, W) = 1,$$

portanto f é normalizado. Ademais,

$$f(FH) = \mathrm{t}(FH, W) = \mathrm{t}(F, W)\,\mathrm{t}(H, W) = f(F)f(H),$$

para quaisquer grafos F, H. Portanto, f é multiplicativo.

Vamos provar agora que f tem reflexão positiva. Sejam $F_1, \ldots, F_m$ grafos k-rotulados. Temos que mostrar que

$$\sum_{p,q\in[m]} y_p y_q f(F_p F_q) \geq 0,$$

para quaisquer $y \in \mathbb{R}^m$ com $i \in [m]$.

Para todo grafo k-rotulado F, denote por F' o subgrafo de F induzido pelos vértices rotulados e por F'' o subgrafo de F obtido pela remoção das arestas que ligam vértices rotulados.

Para todo grafo k-rotulado F sobre $[n]$ e reais $x_1, \ldots, x_k \in [0,1]$, defina

$$\tau(F, x_1, \ldots, x_k) := \int_{[0,1]^{n-k}} \prod_{ij\in(F'')} W(x_i, x_j)\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n;$$
$$W(F, x_1, \ldots, x_k) := \prod_{ij\in E(F')} W(x_i, x_j).$$

Note que

$$f(F_p F_q) = \int_{[0,1]^k} \tau(F_p, x_1, \ldots x_k)\tau(F_q, x_1, \ldots x_k)W(F'_p \cup F'_q, x_1, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k,$$

para quaisquer $p, q \in [m]$. Assim,

$$\sum_{p,q\in[m]} y_p y_q f(F_p, F_q)$$
$$= \int_{[0,1]^k} \sum_{p,q\in[m]} y_p y_q \tau(F_p, x_1, \ldots x_k)\tau(F_q, x_1, \ldots x_k)W(F'_p \cup F'_q, x_1, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k.$$

Fixe reais $x_1, \ldots, x_k \in [0,1]$. Vamos mostrar que

$$\sum_{p,q\in[m]} z_p z_q W(F'_p \cup F'_q) \geq 0,$$

onde $z_p := y_p\tau(F_p, x_1, \ldots, x_k)$ para todo $p \in [m]$ e $W(F) := W(F, x_1, \ldots, x_k)$ para quaisquer $p, q \in [m]$ e qualquer grafo k-rotulado F.

Seja $\mathcal{F}_k$ o conjunto de todos os grafos sobre $[k]$. Para todo grafo $F \in \mathcal{F}_k$, tome

$$\hat{W}(F) := \prod_{ij \in E(F)} W(x_i, x_j) \prod_{ij \in E(\overline{F})} (1 - W(x_i, x_j)).$$

É claro que $\hat{W}(F) \geq 0$ para todo grafo $F \in \mathcal{F}_k$. Assim, é fácil ver que

$$W(F) = \sum_{\substack{H \supseteq F \\ H \in \mathcal{F}_k}} \hat{W}(H).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q \in [m]} z_p z_q W(F'_p \cup F'_q) &= \sum_{p,q \in [m]} z_p z_q \sum_{\substack{H \supseteq F'_p \cup F'_q \\ H \in \mathcal{F}_k}} \hat{W}(H). \\
&= \sum_{W \in \mathcal{F}_k} \hat{W}(H) \sum_{p,q\colon F'_p, F'_q \subseteq H} z_p z_q \\
&= \sum_{W \in \mathcal{F}_k} \hat{W}(H) \Bigg(\sum_{p\colon F'_p \subseteq H} z_p \Bigg)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Prova do teorema 5.4.1 ((c)⇒(d)): Segue trivialmente do fato que $M_0(f, k)$ é uma submatriz de $M(f, k)$ indexada por todos os grafos k-rotulados sobre $[k]$. □

5.8 Teorema 5.4.1: prova de (d)⇒(e)

Prova do teorema 5.4.1 ((d)⇒(e)): Seja f um invariante de grafos normalizado e multiplicativo. Suponha que $M_0(f, k)$ é positiva semidefinida para todo k. Vamos mostrar que $f^\dagger \geq 0$. Seja $\mathcal{F}_k = \{F_1, \ldots, F_m\}$ o conjunto de grafos k-rotulados sobre $[k]$.

Primeiro, lembre que, para todo $F \in \mathcal{F}_k$,

$$\begin{aligned}
f(F) &= \sum_{\substack{F' \supseteq F \\ F' \in \mathcal{F}_k}} f^\dagger(F') \qquad \text{e} \\
f^\dagger(F) &= \sum_{\substack{F' \supseteq F \\ F' \in \mathcal{F}_k}} (-1)^{|E(F') \setminus E(F)|} f(F').
\end{aligned}$$

Defina as matrizes Z e D indexadas por $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_k$ como

$$(Z)_{F_i, F_j} := \begin{cases} 1, & \text{se } F_i \subseteq F_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$(D)_{F_i,F_j} := \begin{cases} f^\dagger(F_i), & \text{se } F_i = F_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para quaisquer $F_i, F_j \in \mathcal{F}_k$. Assim, é fácil ver que

$$ZDZ^\top = M_0(f,k).$$

Portanto, como $M_0(f,k)$ é positiva semidefinida, vale que $f^\dagger(F_i) \geq 0$ para todo $F_i \in \mathcal{F}_k$. □

5.9 Teorema 5.4.1: prova de (e)⇒(a)

Dados grafos F e G, definimos a **densidade de homomorfismos injetores** de F em G como.

$$\mathrm{t_{inj}}(F,G) := \frac{\mathrm{inj}(F,G)}{(|V(G)|)_{|V(F)|}},$$

onde $(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k-1)$. Definimos a **densidade de homomorfismos induzidos** de F em G como.

$$\mathrm{t_{ind}}(F,G) := \frac{\mathrm{ind}(F,G)}{(|V(G)|)_{|V(F)|}}.$$

Lema 5.9.1. *Sejam F e G grafos (sem pesos). Vale que*

$$|\,\mathrm{t}(F,G) - \mathrm{t}_{inj}(F,G)| < \frac{1}{|V(G)|}\binom{|V(F)|}{2}.$$

Prova: Tome $n := |V(G)|$ e $k := |V(F)|$. Se $n = 1$, é claro que a relação vale. Portanto, supomos $n > 1$. É fácil ver que $\hom(F,G) \geq \mathrm{inj}(F,G)$. Portanto,

$$\mathrm{t}(F,G) = \frac{\hom(F,G)}{n^k} \geq \frac{\mathrm{inj}(F,G)}{n^k} = \mathrm{t_{inj}}(F,G)\frac{(n)_k}{n^k}.$$

Temos que

$$\frac{(n)_k}{n^k} = \prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq 1 - \binom{k}{2}\frac{1}{n},$$

onde a desigualdade pode ser facilmente provada por indução em k. Assim,

$$\mathrm{t}(F,G) \geq \mathrm{t_{inj}}(F,G)\frac{(n)_k}{n^k} \geq \mathrm{t_{inj}}(F,G)\left(1 - \binom{k}{2}\frac{1}{n}\right) \geq \mathrm{t_{inj}}(F,G) - \binom{k}{2}\frac{1}{n}.$$

Por outro lado, é fácil ver que

$$\mathrm{inj}(F,G) \geq \hom(F,G) - \sum_{F'} \hom(F',G),$$

onde a soma sobre F' é a realizada sobre todos os grafos F' obtidos pela identificação de dois vértices distintos de G. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,G) &= \frac{\mathrm{inj}(F,G)}{(n)_k} \geq \frac{\mathrm{inj}(F,G)}{n^k} \\
&\geq \frac{\hom(F,G)}{n^k} - \sum_{F'} \frac{\hom(F',G)}{n^k} = \mathrm{t}(F,G) - \frac{1}{n}\sum_{F'} \frac{\hom(F',G)}{(n-1)^k} \\
&\geq \mathrm{t}(F,G) - \frac{1}{n}\sum_{F'} 1 \\
&= \mathrm{t}(F,G) - \frac{1}{n}\binom{k}{2}.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.9.2 (Borel–Cantelli). *Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variáveis aleatórias indicadoras tais que*

$$\sum_n \mathbb{P}[A_n = 1] < \infty.$$

Vale que a probabilidade de $|\{n\colon A_n = 1\}| = \infty$ é igual a 0.

Prova do teorema 5.4.1 ((e)⇒(a)): Seja f um invariante de grafos normalizado, multiplicativo e tal que $f^\dagger \geq 0$.

Para cada k, seja F_k a variável aleatória tal que F_k é sorteado dentre os grafos sobre $[k]$ e a probabilidade de $F_k = F$ para algum grafo F sobre $[k]$ é $f^\dagger(F)$. Seja H_k o grafo sobre $[k]$ sem arestas. Como $f^\dagger \geq 0$ e

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_k} f^\dagger(F) = \sum_{\substack{F\supseteq H_k \\ F\in\mathcal{F}_k}} f^\dagger(F) = f(H_k) = 1,$$

as probabilidades estão bem definidas.

Seja F um grafo sobre $[k]$. Vamos mostrar que

$$f(F) = \mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F, F_n)),$$

para todo $n \geq k$.

Vale que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_k)) &= \mathbb{E}\Big(\textstyle\sum_{F'\supseteq F}\mathrm{t}_{\mathrm{ind}}(F',F_k)\Big) = \textstyle\sum_{F'\supseteq F}\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{ind}}(F',F_k)) \\
&= \sum_{F'\supseteq F}\sum_{G\in\mathcal{F}_k}\mathbb{P}[F_k=G]\,\mathrm{t}_{\mathrm{ind}}(F',G) \\
&= \sum_{F'\supseteq F}\sum_{G\cong F'}\mathbb{P}[F_k=G]\,\mathrm{t}_{\mathrm{ind}}(F',G) \\
&= \sum_{F'\supseteq F}\Big(\mathrm{t}_{\mathrm{ind}}(F',F')\Big)\Big(\sum_{G\cong F'}\mathbb{P}[F_k=G]\Big) \\
&= \sum_{F'\supseteq F}\Big(\frac{|\mathrm{Aut}(F')|}{k!}\Big)\Big(\sum_{G\cong F'}\mathbb{P}[F_k=G]\Big) \\
&= \sum_{F'\supseteq F}\Big(\frac{|\mathrm{Aut}(F')|}{k!}\mathbb{P}[F_k=F']\Big)\Big(\sum_{G\cong F'}1\Big) \\
&= \sum_{F'\supseteq F}\Big(\frac{|\mathrm{Aut}(F')|}{k!}\mathbb{P}[F_k=F']\Big)\Big(\frac{k!}{|\mathrm{Aut}(F')|}\Big) \\
&= \sum_{F'\supseteq F}\mathbb{P}[F_k=F'] = \sum_{F'\supseteq F}f^{\dagger}(F') = f(F),
\end{aligned}$$

onde as somas sobre $F'\supseteq F$ são realizadas apenas sobre os grafos F' com $V(F')=V(F)$.

Seja $n\geq k$. Seja F' o grafo obtido a partir de F pela adição de $n-k$ vértices isolados. Pela multiplicatividade de f, vale que $f(F')=f(F)$. Ademais, como $f(K_1)=1$, vale que $\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,G)=\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F',G)$ para todo grafo G com n vértices. Assim, é fácil ver que

$$f(F)=f(F')=\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F',F_n))=\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)).$$

Queremos usar a desigualdade de Chebyshev. Vamos calcular um limitante para a variância de $\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)$. Temos que

$$\mathrm{Var}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n))=\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)^2)-\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n))^2.$$

Pela multiplicatividade de f, temos que

$$\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n))^2=f(F)^2=f(FF)=\mathbb{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(FF,F_n)).$$

Assim,

$$\mathrm{Var}\left(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)\right)=\mathbb{E}\Big(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)^2-\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(FF,F_n)\Big).$$

Usando o lema 5.9.1, temos que

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)^2 - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(FF,F_n)| &\leq |\,\mathrm{t}(F,F_n)^2 - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)^2| + |\,\mathrm{t}(F,F_n)^2 - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(FF,F_n)| \\
&= |\,\mathrm{t}(F,F_n)^2 - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)^2| + |\,\mathrm{t}(FF,F_n) - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(FF,F_n)| \\
&= |\,\mathrm{t}(F,F_n) + \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)| \cdot |\,\mathrm{t}(F,F_n) - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)| + |\,\mathrm{t}(FF,F_n) - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(FF,F_n)| \\
&\leq 2|\,\mathrm{t}(F,F_n) - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)| + |\,\mathrm{t}(FF,F_n) - \mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(FF,F_n)| \\
&\leq 2\binom{k}{2}\frac{1}{n} + \binom{2k}{2}\frac{1}{n} < \frac{3k^2}{n}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{Var}(\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n)) \leq \frac{3k^2}{n}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Usando a desigualdade de Chebyshev, obtemos

$$\mathbb{P}\big[|\,\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n) - f(F)| > \varepsilon\big] < \frac{3k^2}{\varepsilon^2 n}.$$

Seja A_n a variável indicadora que indica que $|\,\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_n) - f(F)| > \varepsilon$. Note que

$$\sum_j \mathbb{P}[A_{j^2} = 1] < \infty.$$

Dessa forma, usando o lema de Borel–Cantelli,

$$\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F,F_{n^2}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(F) \tag{5.11}$$

com probabilidade 1. Portanto, o conjunto de escolhas para $(F_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que (5.11) vale para o grafo F é não-enumerável.

Como a coleção de todos os grafos a menos de isomorfismos é enumerável, então o conjunto de escolhas para $(F_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que (5.11) vale para todo grafo F é não-enumerável. Logo,

$$f(\,\cdot\,) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{t}(\,\cdot\,, G_{n^2}),$$

para alguma seqüência $(G_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Capítulo 6

Independência entre vetores de densidade de homomorfismos

Neste capítulo apresentamos um belo resultado de Erdős, Lovász e Spencer [1979]. Destacamos que neste capítulo os grafos não podem ter arestas múltiplas e laços.

6.1 Vetores de densidade de homomorfismos em grafos

Fixe um inteiro $k \geq 3$. Seja $\{F_1, \ldots, F_t\}$ um conjunto formado por todos os grafos conexos e sem vértices isolados com no máximo k vértices a menos de isomorfismos.

Para cada grafo G, seja h_G o vetor definido como

$$h_G := (\mathrm{t}(F_1, G), \ldots, \mathrm{t}(F_t, G)).$$

Defina S como o subconjunto de vetores de $\mathbb{R}^t$ tal que $x \in S$ se, e somente se, existe uma seqüência de grafos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |V(G_n)| = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \mathrm{t}(F_i, G_n) = x_i$ para todo $i \in [t]$.

Neste capítulo, iremos provar o seguinte resultado.

Teorema 6.1.1. *O conjunto S tem interior não-vazio. Ou seja, S contém uma bola aberta em $\mathbb{R}^t$.*

Para isso, provamos um resultado intermediário.

Lema 6.1.2. *O conjunto $\{h_G \colon G$ é um grafo$\}$ gera $\mathbb{R}^t$ como espaço vetorial.*

6.2 Ferramentas

Para todo grafo G com conjunto de vértices $[m]$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_{m+1}$ inteiros não-negativos, definimos $G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})$ como o grafo tal que

$$V(G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})) := S_1 \cup \cdots \cup S_{m+1},$$

onde $|S_i| = x_i$ para todo i e $S_i \cap S_j = \varnothing$ para quaisquer i e j distintos. O conjunto de arestas de $G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})$ é

$$E(G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})) := \{uv \colon u \in S_i,\ v \in S_j,\ i, j \in V(G),\ ij \in E(G)\}.$$

Intuitivamente, substituímos cada vértice i de $V(G)$ por x_i cópias de i e acrescentamos x_{m+1} vértices isolados.

Seja $\phi \colon V(G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})) \to [m+1]$ a função definida para cada vértice $v \in V(G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1}))$ como $\phi(v) := i$, se $v \in S_i$.

Abreviamos $G(x_1, \ldots, x_m : 0)$ por $G(x_1, \ldots, x_m)$. Neste capítulo, denotamos $G(s, \ldots, s)$ por sG. Dados grafos $G_1, \ldots, G_\ell$, denotamos a união disjunta de $G_1, \ldots, G_\ell$ por $\prod_{i=1}^{\ell} G_i$.

Lema 6.2.1. *Seja G um grafo sobre $[m]$ e seja F um grafo sem vértices isolados. Para quaisquer inteiros não-negativos $x_1, \ldots, x_{m+1}$, vale que*

$$\hom(F, G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})) = \sum_{\psi} \prod_{v \in V(F)} x_{\psi(v)},$$

onde a soma é realizada sobre todos os homomorfismos ψ de F em G. Vale também que

$$\mathrm{t}(F, G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})) = \sum_{\psi} \prod_{v \in V(F)} y_{\psi(v)},$$

onde $y_i := x_i / (\sum_{j=1}^{m+1} x_j)$.

Prova: Como F não tem vértices isolados, todo homomorfismo de F em $G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})$ é na verdade um homomorfismo de F em $G(x_1, \ldots, x_m)$.

Seja ψ um homomorfismo de F em G. É fácil ver que existem $\prod_{v \in V(F)} x_{\psi(v)}$ homomorfismos λ de F em $G(x_1, \ldots, x_m)$ tais que $\phi \circ \lambda = \psi$.

Por outro lado, para cada homomorfismo λ de F em $G(x_1, \ldots, x_m)$, vale que $\phi \circ \lambda$ é um homomorfismo de F em G. Com isso, provamos a primeira relação.

Ademais,

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}(F, G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})) &= \frac{\hom(F, G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1}))}{|V(G)|^{|V(F)|}} \\
&= \frac{\sum_{\psi} \prod_{v \in V(F)} x_{\psi(v)}}{(\sum_{i=1}^{m+1} x_i)^{|V(F)|}} = \sum_{\psi} \prod_{v \in V(F)} \frac{x_{\psi(v)}}{\sum_{i=1}^{m+1} x_i} \\
&= \sum_{\psi} \prod_{v \in V(F)} y_{\psi(v)}.
\end{aligned}$$

□

Lema 6.2.2. *Seja G um grafo sobre $[m]$ e s um inteiro. Seja F um grafo sem vértices isolados. Vale que*

$$\hom(F, sG) = \hom(F, G) s^m$$

e

$$\mathrm{t}(F, sG) = \mathrm{t}(F, G),$$

para todo grafo G sobre $[m]$.

Prova: Segue diretamente do lema 6.2.1. □

Corolário 6.2.3. *Para todo grafo G, vale que $h_G \in S$.*

Prova: Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $G_n := nG$. Pelo lema 6.2.2 $\mathrm{t}(F_i, G_n) = \mathrm{t}(F_i, G) = (h_G)_i$ para todo $i \in [t]$. □

Lema 6.2.4. *Seja F um grafo conexo. Sejam $G_1, \ldots, G_\ell$ grafos e $a_1, \ldots, a_\ell$ inteiros positivos. Vale que*

$$\hom\left(F, \prod_{i=1}^{\ell} a_i G_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \hom(F, G_i) a_i^m$$

e

$$\mathrm{t}\left(F, \prod_{i=1}^{\ell} a_i G_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{t}(F, G_i) y_i^m,$$

onde

$$y_i := \frac{a_i |V(G_i)|}{\sum_j a_j |V(G_j)|}$$

para todo $i \in [\ell]$.

Prova: Como F é conexo, então, para todo homomorfismo ψ de F em $\prod_i a_i G_i$, vale que a imagem de ψ está contida em $V(a_i G_i)$ para algum i.

Por esta observação e pelo lema 6.2.2, a primeira relação vale.

A segunda relação segue por divisão. □

Para todo inteiro $r > 0$, denotamos por I_r o grafo com r vértices sem arestas.

A prova do seguinte lema é análoga à prova do lema 6.2.4.

Lema 6.2.5. *Seja F um grafo conexo sem vértices isolados. Sejam $G_1, \ldots, G_\ell$ grafos e $a_1, \ldots, a_{k+1}$ inteiros positivos. Seja $G = I_{a_{k+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} a_i G_i$. Vale que*

$$\mathrm{t}(F, G) = \sum_{i}^{k} \mathrm{t}(F, G_i) y_i^{|V(F)|},$$

onde

$$y_i := \frac{a_i |V(G_i)|}{|V(G)|}.$$

6.3 Prova do lema 6.1.2

Prova do lema 6.1.2: Suponha que $\{h_G \colon G \text{ é um grafo}\}$ não gera $\mathbb{R}^t$. Então existem reais $c_1, \ldots, c_t$ nem todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{t} c_i \, \mathrm{t}(F_i, H) = 0$$

para todo grafo H.

Escolha em $\{F_i \colon c_i \neq 0\}$ um grafo G tal que G tem o menor número de arestas dentre os grafos em $\{F_i \colon c_i \neq 0\} \cap \{F_i \colon |V(F_i)| = |V(G)|\}$. Vamos supor que $V(G) = [m]$.

Seja $G' := G(x_1, \ldots, x_m : x_{m+1})$. Note que não fixamos $x_1, \ldots, x_{m+1}$. Vamos considerar $x_1, \ldots, x_{m+1}$ como variáveis.

Pelo lema 6.2.1, temos que $\mathrm{t}(F_i, G')$ é um polinômio em $y_1, \ldots, y_m$ para todo $i \in [t]$. Seja λ_i o coeficiente de $y_1 \cdots y_m$ nesse polinômio. Temos que $\lambda_i = |\Psi|$, onde

$$\Psi := \Big\{\psi \in V(G)^{V(F_i)} \colon \psi \text{ é um homomorfismo de } V(F_i) \text{ em } V(G) \text{ e } \prod_{v \in V(F_i)} y_{\psi(v)} = \prod_{i=1}^{m} y_i \Big\}.$$

Note que, se um homomorfismo ψ está em Ψ, então ψ é sobrejetor, pois para todo $j \in [m]$ existe $v \in V(F_i)$ tal que $\psi(v) = j$. Ademais, para cada $j \in [m]$, vale que y_j aparece exatamente uma vez em $\prod_{i=1}^{m} y_i$. Portanto, $\psi(u) \neq \psi(v)$ para quaisquer $u, v \in V(F_i)$. Assim, se $\psi \in \Psi$, então ψ é um homomorfismo bijetor de $V(F_i)$ em $V(G)$. É fácil ver que, se ψ é um homomorfismo bijetor de $V(F_i)$ em $V(G)$, então $\psi \in \Psi$. Logo, o coeficiente λ_i de $y_1 \cdots y_m$ é o número de homomorfismos bijetores de F_i em G. Pela minimalidade de G, este coeficiente é não-nulo se, e somente se, F_i é isomorfo a G.

Portanto, $\sum_{i=1}^{t} c_i \, \mathrm{t}(F_i, G')$ é um polinômio não identicamente nulo. Assim, existem racionais não-negativos $y_1, \ldots, y_m$ com $\sum_{i=1}^{m} y_i \leq 1$ tais que $\sum_{i=1}^{t} c_i \, \mathrm{t}(F_i, G') \neq 0$. Podemos escolher $x_1, \ldots, x_{m+1}$ tais que $y_1, \ldots, y_m$ tenham o valor que desejamos, o que é uma contradição. □

6.4 Prova do teorema 6.1.1

Prova do teorema 6.1.1: Pelo lema 6.1.2, vale que $\{h_G \colon G \text{ é um grafo}\}$ gera $\mathbb{R}^t$. Sejam $G_1, \ldots, G_t$ grafos tais que $\{h_{G_i} \colon i \in [t]\}$ gera $\mathbb{R}^t$.

Seja a matriz A indexada por $[t] \times [t]$ definida por

$$A_{ij} := \mathrm{t}(F_j, G_i)$$

para quaisquer $i, j \in [t]$. Note que A é uma matriz não-singular.

Para quaisquer $y_1, \ldots, y_{t+1} \geq 0$ racionais tais que $\sum_{i=1}^{t+1} y_i = 1$, podemos encontrar um inteiro $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $Dy_i/|V(G_i)| \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in [t]$ e $Dy_{t+1} \in Z$. Tomando

$$G := I_{Dy_{t+1}} \cdot \prod_{i=1}^{t} \left(\frac{Dy_i}{|V(G_i)|} \right) G_i.$$

e pelo lema 6.2.5, teríamos que

$$\mathrm{t}(F_j, G) = \sum_{i=1}^{t} A_{ij} y_i^{|V(F_j)|}$$

para todo $j \in [t]$.

Para quaisquer reais $y_1, \ldots, y_t \geq 0$, tome $\eta_j := \sum_{i=1}^{t} A_{ij} y_i^{|F_j|}$ para cada $j \in [t]$. Para quaisquer reais $y_1, \ldots, y_t \geq 0$, defina $f(y_1, \ldots, y_t) := (\eta_1, \ldots, \eta_t)$.

Note que

$$S \supseteq \{f(y_1, \ldots, y_t) \colon 0 \leq y_1, \ldots, y_t \leq t^{-1},\ y_i \in \mathbb{Q}\ \forall i\}.$$

Como f é contínua e S é fechado, temos que

$$S \supseteq \{f(y_1, \ldots, y_t) \colon 0 \leq y_1, \ldots, y_t \leq t^{-1},\ y_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}.$$

Vale que

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial y_i} = A_{ij} |V(F_j)| y_i^{|V(F_j)|-1}.$$

Portanto, $\mathrm{Jac}(f)$, o jacobiano de f, é um polinômio em $y_1, \ldots, y_t$. Seja A' a matriz jacobiana de f. Em $y_1 = \cdots = y_t = 1$, vale que

$$\mathrm{Jac}(f) = \det(A') = \left(\prod_{j=1}^{t} |V(F_j)| \right) \det(A) \neq 0,$$

pois A é não-singular. Portanto, $\mathrm{Jac}(f)$ não é identicamente nulo. Assim, existem racionais $0 < y_1, \ldots, y_t < t^{-1}$ tais que $\mathrm{Jac}(f)(y_1, \ldots, y_t) \neq 0$.

Pelo teorema da função inversa e considerando o domínio de f como o conjunto aberto $\{(z_1, \ldots, z_t) \colon 0 < z_1, \ldots, z_t < t^{-1},\ z_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$, podemos concluir que existe uma bola aberta contida em S com centro em $f(y_1, \ldots, y_t)$. $\square$

Capítulo 7

Um modelo generalizado para grafos pseudo-aleatórios

Neste capítulo apresentamos um modelo generalizado para grafos pseudo-aleatórios proposto por Lovász e Sós [2008].

Nesse modelo, mostramos um resultado de Lovász e Sós [2008] similar a um famoso teorema de Chung, Graham e Wilson [1989] para grafos pseudo-aleatórios.

Omitiremos alguns detalhes técnicos e demonstrações.

Neste capítulo grafos sem pesos não devem ter arestas múltiplas e laços. Quando quisermos enfatizar que um grafo não deve ter pesos, arestas múltiplas elaços, diremos que o grafo é **ordinário**.

7.1 Grafos pseudo-aleatórios

O conceito de pseudo-aleatoriedade para grafos foi introduzido por Thomason [1987] e Chung, Graham e Wilson [1989].

Uma seqüência de grafos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{n\to\infty}|V(G_n)| = \infty$ é chamada de **pseudo-aleatória** com densidade p se, para todo grafo F, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{t}(F, G_n) = p^{|E(F)|}.$$

Grafos pseudo-aleatórios têm muitas características em comum com grafos aleatórios (veja, por exemplo, Chung, Graham e Wilson [1989]). O conceito de pseudo-aleatoriedade é também fortemente relacionado ao lema de regularidade de Szemerédi (veja Simonovits e Sós [1991]).

Um resultado surpreendente de Chung, Graham e Wilson [1989] nos diz que, para verificar se uma seqüência de grafos é pseudo-aleatória com densidade p, basta verificar os casos em que F é igual a K_2 e C_4.

Teorema 7.1.1. *Uma seqüência de grafos* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim_{n\to\infty}|V(G_n)| = \infty$ *com é pseudo-aleatória com densidade* p *se, e somente se,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hom(K_2,G_n)}{|V(G_n)|^2} = p \quad e \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\hom(C_4,G_n)}{|V(G_n)|^4} = p^4.$$

Consideramos que todo grafo bipartido G tem uma bipartição $\{U(G), W(G)\}$, onde $U(G)$ é a classe "de cima" e $W(G)$, a classe "de baixo".

Para quaisquer grafos bipartidos F e G, definimos $\hom'(F,G)$ como o número de homomorfismos de F em G que levam $U(F)$ em $U(G)$ e $W(F)$ em $W(G)$.

Dizemos que Uma seqüência de grafos bipartidos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{n\to\infty}|U(G_n)| = \infty$ e $\lim_{n\to\infty}|W(G_n)| = \infty$ é **pseudo-aleatória** com densidade p se, para todo grafo bipartido F, vale que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hom'(F,G_n)}{|U(G_n)|^{|U(F)|}|W(G_n)|^{|W(F)|}} = p^{|E(F)|}.$$

Um resultado análogo ao de Chung, Graham e Wilson [1989] vale para o caso bipartido.

Teorema 7.1.2. *Uma seqüência de grafos bipartidos* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $\lim_{n\to\infty}|U(G_n)| = \infty$ *e* $\lim_{n\to\infty}|W(G_n)| = \infty$ *é pseudo-aleatória com densidade* p *se, e somente se,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hom'(K_2,G_n)}{|U(G_n)||W(G_n)|} = p \quad e \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\hom'(C_4,G_n)}{|U(G_n)|^2|W(G_n)|^2} = p^4.$$

7.2 Grafos H-pseudo-aleatórios e principais resultados

Seja H um grafo com pesos tal que $\alpha(H) = 1$ e $0 \le \beta_H(u,v) \le 1$ para quaisquer $u, v \in V(H)$. Uma seqüência de grafos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{n\to\infty}|V(G_n)| = \infty$ é chamada de **H-pseudo-aleatória** se, para todo grafo F, vale que

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{t}(F,G_n) = \hom(F,H).$$

Note que, se H é um grafo com apenas um vértice e um laço de peso p e $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é H-pseudo-aleatória, então $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pseudo-aleatória com densidade p.

Suponha que $V(H) = [q]$. Uma maneira de obtermos uma seqüência de grafos H-pseudo-aleatória é a seguinte. Para n "grande", distribua $[n]$ entre conjuntos $V_1^n, \ldots, V_q^n$ de modo que $|V_i^n| \approx n\,\alpha_H(i)$ para todo $i \in [q]$.

Para cada $i \in [q]$, insira em V_i^n um grafo pseudo-aleatório com densidade $\beta_H(i,i)$. Para quaisquer $i, j \in [q]$ distintos, insira entre V_i^n e V_j^n um grafo bipartido pseudo-aleatório de densidade $\beta_H(i,j)$.

O seguinte teorema nos diz que toda seqüência pseudo-aleatória pode ser obtida dessa forma.

Teorema 7.2.1. *Seja* H *um grafo com pesos sobre* $[q]$ *tal que* $\alpha(H) = 1$ *e* $0 \le \beta_H(i,j) \le 1$ *para quaisquer* $i, j \in [q]$. *Seja* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de grafos com* $\lim_{n\to\infty}|V(G_n)| = \infty$. *Vale que* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* H*-pseudo-aleatória se, e somente se, existe uma partição* $\{V_1^n, \ldots, V_q^n\}$ *de* $V(G_n)$ *para todo* n *grande tal que*

(i) $\lim_{n\to\infty} |V_i^n|/|V(G_n)| = \alpha_H(i)$ *para todo* $i \in [q]$;

(ii) $(G[V_i^n])_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência de grafos pseudo-aleatória com densidade* $\beta_H(i,i)$ *para todo* $i \in [q]$;

(iii) $(G[V_i^n, V_j^n])_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência de grafos bipartidos pseudo-aleatória com densidade* $\beta_H(i,j)$ *para quaisquer* $i, j \in [q]$ *distintos.*

Acima $G[S,T]$ é o grafo bipartido com $U(G) = S$ e $W(G) = T$ e $uv \in E(G[S,T])$ se $u \in S$, $v \in T$ e $uv \in E(G)$.

Apresentaremos apenas a prova da necessidade dessas condições.

Lovász e Sós [2008] provaram uma versão análoga ao teorema 7.1.1 para esse modelo de grafos pseudo-aleatórios.

Teorema 7.2.2. *Seja* H *um grafo com pesos sobre* $[q]$ *tal que* $\alpha(H) = 1$ *e* $0 \le \beta_H(i,j) \le 1$ *para quaisquer* $i, j \in [q]$. *Então existe um inteiro* N_0 *que depende apenas de* $|V(H)|$ *tal que uma seqüência de grafos* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $\lim_{n\to\infty} |V(G_n)| = \infty$ *é* H*-pseudo-aleatória se, e somente se,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hom(F, G_n)}{|V(G_n)|^{|V(F)|}} = \hom(F, H)$$

para todo grafo F *com no máximo* N_0 *vértices.*

Nas próximas seções apresentaremos a prova da necessidade das condições descritas no teorema 7.2.1. Na seção 7.6 apresentamos a prova do teorema 7.2.2.

Fixamos um grafo H com pesos sobre $[q]$ tal que $\alpha(H) = 1$ e $0 \le \beta_H(i,j) \le 1$ para quaisquer $i, j \in [q]$.

Supomos também que H é livre de vértices gêmeos. Isso pode ser feito, pois se H tem vértices gêmeos, podemos identificá-los (como na prova do lema 4.1.1) e obter um grafo H' tal que $\hom(F, H) = \hom(F, H')$ para todo grafo F e $|V(H')| < |V(H)|$.

Abreviamos $\alpha_i := \alpha_H(i)$ para todo $i \in [q]$ e $\beta_{ij} := \beta_H(i,j)$ para quaisquer $i, j \in [q]$.

7.3 Esquema de demonstração

Primeiro apresentamos o esquema de demonstração para a necessidade no teorema 7.2.1.

Para n suficientemente grande, queremos construir uma partição $\{V_1^n, \ldots, V_q^n\}$ satisfazendo as condições (i)–(iii) do teorema 7.2.1. Vamos associar cada vértice v de G_n a um vértice i de H. Um vértice $v \in V(G_n)$ deve ser colocado na classe V_i^n se v for associado a i.

Para todo $k \ge 1$ e toda função $\phi\colon [k] \to V(H)$, denotamos ϕ por $i_1 i_2 \cdots i_k$ onde $i_j = \phi(j)$ para todo $j \in [k]$. Vamos construir um grafo quântico $z \in \mathcal{G}_2$ tal que

$$\hom_{ij}(z, H) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O grafo quântico z deve ter propriedades semelhantes em G_n. Ou seja, queremos que $\hom_{uv}(z, G_n)$ seja "alto" quando os vértices u e v são "similares" e que seja "baixo", caso contrário.

Em seguida, escolhemos uma função $\nu\colon [q] \to V(G_n)$ com certas propriedades. A escolha de ν depende de alguns detalhes técnicos.

Associamos $\nu(i)$ a i, para todo $i \in [q]$. Vamos mostrar como escolher $i \in [q]$ para os outros vértices de G_n. Para cada $v \in V(G_n)$, associe v a algum $i \in [q]$ tal que $\hom_{\nu(i)v}(z, G_n)$ seja máximo. Ou seja, descobrimos qual vértice u em $\{\nu(j)\colon j \in [q]\}$ é mais "similar" a v e associamos v ao mesmo vértice de H a que u está associado.

Depois disso, temos que provar que essa partição satisfaz as propriedades (i)–(iii).

Para provar o teorema 7.2.2, observamos que, na prova do teorema 7.2.1, precisamos da convergência apenas para um certo conjunto finito S sde grafos quânticos q-rotulados.

Seja $\{A_1, \ldots, A_a\}$ uma base de $\hat{\mathcal{G}}_2$ onde A_i é um grafo 2-rotulado para todo $1 \leq i \leq a$. Seja $\{B_1, \ldots, B_b\}$ uma base de $\hat{\mathcal{G}}_q$ onde B_i é um grafo q-rotulado para todo $1 \leq i \leq b$.

Podemos substituir S por um conjunto $\{F_1, \ldots, F_r\}$ de grafos para os quais vale que $|V(F_i)| \leq 16 \max_j |V(A_j)| + 4 \max_j \{|V(B_j)|\}$. Mostramos então um limitante para o número de vértices dos grafos A_j e B_j que depende apenas de q. Com isso, limitamos o número de vértices dos grafos F_i, completando a prova do teorema 7.2.2.

7.4 Ferramentas

7.4.1 Grafos quânticos

Para todo $x = \sum_G x_G G \in \mathcal{G}$, definimos $N(x) := \sum_G |x_G|$.

Proposição 7.4.1. *Para todo $x \in \mathcal{G}_k$ e toda função $\phi\colon [k] \to V(H)$, vale que*

$$|\hom_\phi(x, H)| \leq N(x).$$

Prova: Seja $x = \sum_G x_G G \in \mathcal{G}_k$ e $\phi\colon [k] \to V(H)$. Temos que

$$|\hom_\phi(x, H)| = \Big| \sum_G x_G \hom_\phi(G, H) \Big| \leq \sum_G |x_G| = N(x).$$

□

Neste capítulo as álgebras $\mathcal{G}_k$ e $\hat{\mathcal{G}}_k$ têm o produto interno definido por H. Definimos a seminorma $\| \cdot \|$ para $\mathcal{G}_k$ como

$$\|x\| := (\hom(x^2, H))^{1/2}.$$

para todo $x \in \mathcal{G}_k$.

Para quaisquer $x, y \in \mathcal{G}_k$, dizemos que $x \equiv y \pmod H$ se $\|x - y\| = 0$.

Lema 7.4.2. *Sejam $x, y \in \mathcal{G}_k$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $x \equiv y \pmod{H}$;

(b) $\hom((x-y)z, H) = 0$ *para todo* $z \in \mathcal{G}_k$;

(c) $\hom_\phi(x-y, H) = 0$ *para toda função* $\phi\colon [k] \to V(H)$.

Prova: A equivalência entre (a) e (b) segue da proposição 3.4.3.

Temos que

$$\|x-y\|^2 = \hom((x-y)^2, H) = \sum_\phi \alpha_\phi(H) \hom_\phi((x-y)^2, H) = \sum_\phi \alpha_\phi(H) \hom_\phi(x-y, H)^2.$$

Portanto, como $\alpha_\phi(H) > 0$ para todo ϕ,

$$\|x-y\|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hom_\phi(x-y, H) = 0, \quad \forall \phi \in V(H)^{[k]}.$$

□

Teorema 7.4.3. *Seja* $y \in \mathbb{R}^{([q]^{[k]})}$. *Existe* $x \in \mathcal{G}_k$ *tal que* $\hom_\phi(x, H) = y_\phi$, *se, e somente se,* $y_\phi = y_{\sigma\circ\phi}$ *para toda função* $\phi \in [q]^{[k]}$ *e todo automorfismo próprio (que respeita pesos de vértices e arestas) de* H.

Prova: Segue do lema 4.5.1. Este lema nos diz que as álgebras $\mathcal{A}'_k$ e $\mathcal{A}''_k$ são as mesmas. A álgebra $\mathcal{A}'_k$ é formada pelas combinações lineares formais de funções de $[k]$ em $V(H)$ para as quais vale que, se ϕ e ψ satisfazem $\psi = \sigma \circ \phi$ para algum automorfismo σ de G, então ϕ e ψ têm o mesmo coeficiente. A álgebra $\mathcal{A}''_k$ é formada pelas combinações lineares formais de funções de $[k]$ em $V(H)$ para as quais existe $x \in \mathcal{G}_k$ tal que $\hom_\phi(x, H)$ é o coeficiente de função ϕ, para toda $\phi \in V(H)^{[k]}$. □

7.4.2 Contratores e conectores

Lema 7.4.4. *Existe um grafo quântico* $z \in \mathcal{G}_2$ *tal que*

$$\hom_{ij}(z, H) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova: Seja $y \in \mathbb{R}^{([q]^{[2]})}$ definido como

$$y_\phi := \begin{cases} 1, & \text{se } \phi(1) = \phi(2); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, se σ é um automorfismo de H, então $y_{\sigma\circ\phi} = y_\phi$ para todo $\phi \in [q]^{[2]}$. Pelo teorema 7.4.3, vale que existe $z \in \mathcal{G}_2$ tal que $\hom_\phi(z, H) = y_\phi$ para todo $\phi \in [q]^{[2]}$. □

O grafo quântico z é chamado de **contrator** de H. A origem desse nome é a seguinte. Para todo grafo 2-rotulado F sem arestas entre vértices rotulados, seja F' o grafo 1-rotulado obtido pela identificação dos vértices rotulados. Estendemos essa operação para todo $x \in \mathcal{G}_2$ que são combinação lineares de grafos 2-rotulados sem arestas entre vértices rotulados e denotamos por x' o grafo quântico resultante. Para todo $x \in \mathcal{G}_2$ satisfazendo essa condição, vale que

$$\hom(xz, H) = \hom(x', H).$$

Lovász e Szegedy [2008] mostraram o seguinte resultado.

Teorema 7.4.5. *Para todo grafo F com pesos e ℓ vértices, existe um contrator que é combinação linear de grafos com no máximo $(6\ell)^\ell$ vértices.*

Lema 7.4.6. *Existe um grafo quântico $w \in \mathcal{G}_q$ tal que*

$$\hom_\phi(w, H) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \phi \textit{ é bijetora;} \\ 0, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

para toda função $\phi\colon [q] \to [q]$.

Prova: Seja $y \in \mathbb{R}^{([q]^{[q]})}$ definido como

$$y_\phi := \begin{cases} 1, & \text{se } \phi \text{ é bijetora;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, se σ é um automorfismo de H, então $y_{\sigma\circ\phi} = y_\phi$ para todo $\phi \in [q]^{[q]}$. Pelo teorema 7.4.3, vale que existe $w \in \mathcal{G}_q$ tal que $\hom_\phi(w, H) = y_\phi$ para todo $\phi \in [q]^{[q]}$. □

Dizemos que um grafo k-rotulado é **simples** se não tem arestas múltiplas e os vértices rotulados formam um conjunto estável. Um grafo quântico é simples se é combinação linear de grafos simples.

Um **conector** é um grafo quântico 2-rotulado p tal que $p \equiv K_2 \pmod{H}$. Lovász e Szegedy [2008] mostraram o seguinte resultado.

Teorema 7.4.7. *Existe um conector simples que é combinação linear de caminhos com no máximo $q + 2$ vértices onde as extremidades são rotuladas.*

Usando esse resultado, podemos provar o seguinte.

Lema 7.4.8. *Seja x um grafo quântico k-rotulado. Existe um grafo quântico k-rotulado simples y tal que $x \equiv y \pmod{H}$.*

Assim, podemos supor que z e w são simples. Além disso, substituindo z por z^2 e w por w^2, podemos supor que, para todo grafo G, vale que $\hom_\phi(z, G) \geq 0$ para toda função $\phi\colon [2] \to V(G)$ e $\hom_\psi(w, G) \geq 0$ para toda função $\phi\colon [q] \to V(G)$.

Tome

$$c := \|w\| \qquad \text{e} \qquad d := N(w).$$

7.4.3 Alguns grafos quânticos especiais

Seja F um grafo 2-rotulado e seja F' um grafo k-rotulado. Sejam $i, j \in [k]$ distintos. Seja G o grafo obtido pela união disjunta de F e F' seguida pela identificação do vértice com rótulo 1 de F com o vértice de rótulo i de F' e pela identificação do vértice com rótulo 2 de F com o vértice de rótulo j de F'. Em G, mantemos os rótulos de F'. Dizemos que G é obtido **colando** F **em** F' **sobre** (i, j). Estendemos essa operação para elementos de $\mathcal{G}_2$ e $\mathcal{G}_k$ linearmente.

Para cada $i \in [q]$, seja w_i o grafo quântico obtido do seguinte modo: tome $w' \in \mathcal{G}_{q+1}$ adicionando a cada grafo de w um novo vértice com rótulo $q+1$, cole z em w' sobre $(i, q+1)$ e desrotule o vértice com rótulo $q+1$.

Para cada $i, j \in [q]$, seja w_{ij} o grafo quântico obtido do seguinte modo: tome $w' \in \mathcal{G}_{q+1}$ adicionando a cada grafo de w um novo vértice com rótulo $q+1$, cole z em w' sobre $(i, q+1)$, cole z em w' sobre $(j, q+1)$ e desrotule o vértice com rótulo $q+1$.

Para cada $i, j \in [q]$ e cada grafo bipartido F, seja $w_{ij,F}$ o grafo quântico obtido do seguinte modo: tome a união disjunta de F e w. Rotule os vértices de $U(F)$ com os rótulos de $q+1$ a $q+|U(F)|$ e os vértices de $W(F)$ com os rótulos de $q+|U(F)|+1$ a $q+|U(F)|+|W(F)|$, cole cópias z nesse grafo sobre os pares $(i, q+1), \ldots, (i, q+|U(F)|)$ e $(j, q+|U(F)|+1), \ldots, (j, q+|U(F)|+|W(F)|)$. Retire os rótulos de $q+1$ a $q+|U(F)|+|W(F)|$.

Valem as seguintes propriedades:

$$\|w - \textstyle\sum_{i=1}^{q} w_i\| = 0; \tag{7.1}$$

$$\|w_i - w_{ii}\| = 0 \quad (\forall i \in [q]); \tag{7.2}$$

$$\|w_i - \alpha_i w\| = 0 \quad (\forall i \in [q]); \tag{7.3}$$

$$\|w_{ij}\| = 0 \quad (\forall i, j \in [q], i \neq j); \tag{7.4}$$

$$\|w_{ij,F} - \alpha_i^{|U(F)|}\alpha_j^{|W(F)|}\beta_{ij}^{|E(F)|}w\| = 0 \quad (\forall i, j \in [q], i \neq j \text{ e } \forall F \text{ grafo bipartido}). \tag{7.5}$$

7.5 Prova da necessidade no teorema 7.2.1

Seja $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de grafos H-pseudo-aleatória. Para todo n, tome G'_n o grafo obtido a partir de G_n atribuindo peso $1/|V(G_n)|$ a cada vértice de G_n. Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $\|\cdot\|_n$ a seminorma definida por

$$\|x\|_n = (\hom(x^2, G'_n))^{1/2},$$

para todo grafo quântico x. Note que

$$\lim_{n\to\infty} \|x\|_n = \|x\|,$$

para todo grafo quântico x. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|w\|_n = \|w\| = c.$$

Ademais, usando as propriedades (7.1) a (7.5), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \|w - \textstyle\sum_{i=1}^{q} w_i\|_n = 0; \tag{7.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|w_i - w_{ii}\|_n = 0 \quad (\forall i \in [q]); \tag{7.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|w_i - \alpha_i w\|_n = 0 \quad (\forall i \in [q]); \tag{7.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|w_{ij}\|_n = 0 \quad (\forall i, j \in [q], i \neq j); \tag{7.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|w_{ij,F} - \alpha_i^{|U(F)|}\alpha_j^{|W(F)|}\beta_{ij}^{|E(F)|} w\|_n = 0 \quad (\forall i, j \in [q], i \neq j \text{ e } \forall F \text{ grafo bipartido}). \tag{7.10}$$

7.5.1 Construção da partição

Nesta seção, mostraremos como construir a partição $\{V_1^n, \ldots, V_q^n\}$ para todo n grande. Para todo $\varepsilon > 0$ fixo, temos que

$$\big|\|w\|_n - c\big| < \varepsilon$$

para n suficientemente grande.

Se $\varepsilon < c/2$, então

$$\|w\|_n > \frac{c}{2}.$$

Note que

$$\|w\|_n^2 = \frac{1}{|V(G_n)|^q} \sum_{\nu\colon [q]\to V(G_n)} \hom_\nu(w, G_n)^2 \leq \frac{1}{|V(G_n)|^q} \sum_{\nu\colon [q]\to V(G_n)} d^2 = d^2.$$

Portanto, $d > c/2$.

Lema 7.5.1. *Seja*

$$B := \{\nu \in V(G_n)^{[q]}\colon \hom_\nu(w, G_n) \geq c/4\}.$$

Vale que

$$|B| \geq (c^2/(8d^2))|V(G_n)|^q.$$

Prova: Suponha que $|B| < (c^2/(8d^2))|V(G_n)|^q$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\|w\|_n^2 &= \frac{1}{|V(G_n)|^q} \sum_{\nu\colon [q]\to V(G_n)} \hom_\nu(w, G_n)^2 \\
&< \frac{1}{|V(G_n)|^q} \cdot \frac{c^2|V(G_n)|^q}{8d^2} \cdot d^2 + \frac{1}{|V(G_n)|^q} \cdot \Big(1 - \frac{c^2}{8d^2}\Big)|V(G_n)|^q \cdot \frac{c^2}{16} \\
&< \frac{c^2}{8} + \frac{c^2}{16} < \frac{c^2}{4}.
\end{aligned}$$

□

Lema 7.5.2. *Para n suficientemente grande, existe uma função $\nu\colon [q] \to V(G_n)$ tal que*

$$\hom_\nu(w, G_n) \geq \frac{c}{4} \tag{7.11}$$

e

$$\hom_\nu(w - \textstyle\sum_{i=1}^q w_i, G'_n)^2 < \varepsilon; \tag{7.12}$$

$$\sum_{i\in[q]} \hom_\nu(w_i - w_{ii}, G'_n)^2 < \varepsilon; \tag{7.13}$$

$$\sum_{i\in[q]} \hom_\nu(w_i - \alpha_i w, G'_n)^2 < \varepsilon; \tag{7.14}$$

$$\sum_{\substack{i,j\in[q]\\ i\neq j}} \hom_\nu(w_{ij}, G'_n)^2 < \varepsilon; \tag{7.15}$$

$$\sum_{\substack{i,j\in[q]\\ i\neq j}} \hom_\nu(w_{ij,K_2} - \alpha_i\alpha_j\beta_{ij} w, G'_n)^2 < \varepsilon; \tag{7.16}$$

$$\sum_{\substack{i,j\in[q]\\ i\neq j}} \hom_\nu(w_{ij,C_4} - \alpha_i^2\alpha_j^2\beta_{ij}^4 w, G'_n)^2 < \varepsilon. \tag{7.17}$$

Prova: Tome

$$\begin{aligned} S_n := {} & \|w - \textstyle\sum_{i=1}^q w_i\|_n^2 + \sum_{i\in[q]} \|w_i - w_{ii}\|_n^2 \\ & + \sum_{i\in[q]} \|w_i - \alpha_i w\|_n^2 \\ & + \sum_{\substack{i,j\in[q]\\ i\neq j}} \|w_{ij}\|_n^2 \\ & + \sum_{\substack{i,j\in[q]\\ i\neq j}} \|w_{ij,K_2} - \alpha_i\alpha_j\beta_{ij} w\|_n^2 \\ & + \sum_{\substack{i,j\in[q]\\ i\neq j}} \|w_{ij,C_4} - \alpha_i^2\alpha_j^2\beta_{ij}^4 w\|_n^2. \end{aligned}$$

Para n suficientemente grande, temos que $S_n < (1 - c^2/8d^2)\varepsilon$. Como $|B| > (c^2/8d^2)|V(G_n)|^q$, então é fácil ver que existe uma função ν satisfazendo as condições do lema. □

Tome

$$c_1 := \hom_\nu(w, G_n).$$

Vamos explicar agora como a partição $\{V_1^1, \ldots, V_q^n\}$ de $V(G_n)$ deve ser construída. Fixamos ε e ν. Para cada $i \in [q]$, defina

$$g_i(u) := \hom_{\nu(i)u}(z, G_n),$$

para todo $u \in V(G_n)$,

Para cada $u \in V(G_n)$, seja

$$M_u := \{i \colon g_i(u) = \max\{g_j(u) \colon j \in [q]\}\}$$

Para cada $u \in V(G_n)$, escolha $m(u)$ arbitrariamente em M_u. Para todo $i \in [q]$ e $u \in V(G_n)$, tome

$$k_i(u) := \begin{cases} 1, & \text{se } i = m(u); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definimos a partição $\{V_1^1, \ldots, V_q^n\}$ como

$$V_i^n := \{u \in V(G_n) \colon k_i(u) = 1\},$$

para todo $i \in [q]$.

7.5.2 Um lema sobre a partição

Lema 7.5.3. *Para n suficientemente grande, vale que*

$$\frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u \in V(G_n)} \sum_{i \in [q]} \big(g_i(u) - k_i(u)\big)^2 \leq \frac{28q\varepsilon}{c_1^2}.$$

Prova: Para cada $i \in [q]$, defina

$$h_i(u) := \begin{cases} 1, & \text{se } g_i(u) \geq 1/2; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada $u \in V(G_n)$.

Temos que

$$\hom_\nu(w_i - w_{ii}, G_n)^2 = \hom_\nu((w_i - w_{ii})^2, G_n) = \hom_\nu(w, G_n)^2 \sum_{u \in V(G_n)} \big(g_i(u) - g_i(u)^2\big)^2.$$

Segue da relação (7.13) que

$$\frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u \in V(G_n)} \sum_{i \in [q]} g_i(u)^2 \big(1 - g_i(u)\big)^2 < \frac{\varepsilon}{c_1^2}. \tag{7.18}$$

Similarmente, segue da relação (7.12) que

$$\frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u \in V(G_n)} \Big(1 - \sum_{i \in [q]} g_i(u)\Big)^2 < \frac{\varepsilon}{c_1^2}. \tag{7.19}$$

Para cada $i \in [q]$ e cada $u \in V(G_n)$, pela definição de $h_i(u)$, temos que

$$(g_i(u) - h_i(u))^2 \leq 4g_i(u)^2(1 - g_i(u)^2).$$

Assim, pela desigualdade (7.18),

$$\frac{1}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\sum_{i\in[q]}(g_i(u)-h_i(u))^2<\frac{4\varepsilon}{c_1^2}. \tag{7.20}$$

Agora vamos provar que

$$\frac{1}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\sum_{i\in[q]}(h_i(u)-k_i(u))^2<\frac{10\varepsilon}{c_1^2}.$$

Note que com isso, usando a desigualdade (7.20), teremos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\sum_{i\in[q]}(g_i(u)-k_i(u))^2\\
&\quad\le\frac{2}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\sum_{i\in[q]}(g_i(u)-h_i(u))^2+\frac{2}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\sum_{i\in[q]}(h_i(u)-k_i(u))^2\\
&\quad\le\frac{8\varepsilon}{c_1^2}+\frac{20q\varepsilon}{c_1^2}\le\frac{28q\varepsilon}{c_1^2},
\end{aligned}$$

completando a prova do lema.

É fácil verificar que

$$\sum_{i\in[q]}(h_i(u)-k_i(u))^2\le\left(1-\sum_{i\in[q]}h_i(u)\right)^2.$$

Assim, usando as relações (7.19) e (7.20),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\sum_{i\in[q]}(h_i(u)-k_i(u))^2\le\frac{1}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\left(1-\sum_{i\in[q]}h_i(u)\right)^2\\
&\quad\le\frac{2}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\left(1-\sum_{i\in[q]}g_i(u)\right)^2+\frac{2}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\left(\sum_{i\in[q]}g_i(u)-h_i(u)\right)^2\\
&\quad\le\frac{2}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\left(1-\sum_{i\in[q]}g_i(u)\right)^2+\frac{2q}{|V(G_n)|}\sum_{u\in V(G_n)}\sum_{i\in[q]}(g_i(u)-h_i(u))^2\\
&\quad\le\frac{2\varepsilon}{c_1^2}+\frac{8q\varepsilon}{c_1^2}\le\frac{10q\varepsilon}{c_1^2}.
\end{aligned}$$

□

7.5.3 O tamanho da classes da partição

Lema 7.5.4. *Existe um número c_2 que depende apenas de q, tal que, para todo $i \in [q]$, vale que*

$$\left|\frac{|V_i^n|}{|V(G_n)|} - \alpha_i\right| \leq c_2\sqrt{\varepsilon}$$

para n suficientemente grande.

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
\hom_\nu(w_i, G'_n) &= \frac{1}{|V(G'_n)|}\sum_{u\in V(G'_n)} \hom_\nu(w, G'_n) g_i(u) \\
&= \frac{c_1}{|V(G'_n)|}\sum_{u\in V(G'_n)} k_i(u) + \frac{c_1}{|V(G'_n)|}\sum_{u\in V(G'_n)} (g_i(u) - k_i(u)) \\
&= \frac{c_1}{|V(G'_n)|}|V_i^n| + R,
\end{aligned}$$

onde $R := (c_1/|V(G'_n)|)\sum_{u\in V(G'_n)}(g_i(u) - k_i(u))$. Note que, pelo lema 7.5.3, temos que

$$R^2 = \left(\frac{c_1}{|V(G'_n)|}\sum_{u\in V(G'_n)}(g_i(u) - k_i(u))\right)^2 \leq \frac{c_1^2}{|V(G'_n)|}\sum_{u\in V(G'_n)}(g_i(u) - k_i(u))^2 \leq 28q\varepsilon.$$

Assim,

$$\left|\frac{\hom_\nu(w_i, G'_n)}{c_1} - \frac{|V_i^n|}{|V(G'_n)|}\right| \leq \frac{\sqrt{28q\varepsilon}}{c_1}$$

Por outro lado, pela relação (7.14),

$$\left|\hom_\nu(w_i, G'_n) - \alpha_i \hom_\nu(w, G'_n)\right| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\hom_\nu(w_i, G'_n)}{c_1} - \alpha_i\right| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c_1}.$$

Assim, usando a desigualdade triangular,

$$\left|\frac{|V_i^n|}{|V(G'_n)|} - \alpha_i\right| \leq \frac{7\sqrt{q\varepsilon}}{c_1} \leq \frac{28d\sqrt{q\varepsilon}}{c} = c_2\sqrt{\varepsilon},$$

onde $c_2 := 28d\sqrt{q}/c$. □

7.5.4 Pseudo-aleatoriedade entre as partes

A prova dos itens (ii) e (iii) são similares. Vamos mostrar apenas (iii).

Pelo teorema 7.1.2, basta mostrarmos que, para quaisquer $i, j \in [q]$ distintos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hom'(F, G_n[V_i^n, V_j^n])}{|V_i^n|^{|U(F)|}|V_j^n|^{|W(F)|}} = \beta_{ij}^{|E(F)|}$$

para $F \in \{K_2, C_4\}$. Vamos apresentar apenas a prova para $F = K_2$. A prova no caso em que $F = C_4$ é similar. Temos que provar que, para quaisquer $i, j \in [q]$ distintos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|E\big(G_n[V_i^n, V_j^n]\big)\right|}{|V_i^n||V_j^n|} = \beta_{ij}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{|V_i^n|}{|V(G_n)|} - \alpha_i\right| = 0$$

para todo $i \in [q]$, basta mostrarmos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left|E\big(G_n[V_i^n, V_j^n]\big)\right|}{|V_i^n||V_j^n|} - \frac{\alpha_i|V(G_n)|}{|V_i^n|}\frac{\alpha_j|V(G_n)|}{|V_j^n|}\beta_{ij}\right| = 0,$$

para quaisquer $i, j \in [q]$ distintos.

Lema 7.5.5. *Existe c_3 que depende apenas de q, tal que, para quaisquer $i, j \in [q]$ distintos,*

$$\left|\frac{\left|E\big(G_n[V_i^n, V_j^n]\big)\right|}{|V_i^n||V_j^n|} - \frac{\alpha_i|V(G_n)|}{|V_i^n|}\frac{\alpha_j|V(G_n)|}{|V_j^n|}\beta_{ij}\right| \leq c_3\frac{|V(G_n)|^2\sqrt{\varepsilon}}{|V_i^n||V_j^n|},$$

para n suficientemente grande.

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
\hom_\nu(w_{ij,K_2}, G_n) &= \frac{1}{|V(G_n')|^2}\hom_\nu(w, G_n')\sum_{uv\in E(G_n')} g_i(u)g_j(v) \\
&= \frac{c_1}{|V(G_n')|^2}\sum_{uv\in E(G_n')} k_i(u)k_j(v) + \frac{c_1}{|V(G_n')|^2}\sum_{uv\in E(G_n')}(g_i(u)g_j(v) - k_i(u)k_j(v)) \\
&= \frac{c_1}{|V(G_n')|^2}\left|E\big(G_n[V_i^n, V_j^n]\big)\right| + R,
\end{aligned}$$

onde $R := (c_1/|V(G_n')|^2)\sum_{uv\in E(G_n')}(g_i(u)g_j(v) - k_i(u)k_j(v))$.

Vamos limitar o valor de R. Temos

$$\begin{aligned}
R &= \frac{c_1}{|V(G_n')|^2}\sum_{uv\in E(G_n')}(g_i(u)g_j(v) - k_i(u)k_j(v)) \\
&= \frac{c_1}{|V(G_n')|^2}\sum_{uv\in E(G_n')}(g_i(u) - k_i(u))k_j(v) + \frac{c_1}{|V(G_n')|^2}\sum_{uv\in E(G_n')} g_i(u)(g_j(v) - k_j(v)).
\end{aligned}$$

Vale que

$$\begin{aligned}\left(\frac{c_1}{|V(G'_n)|^2}\sum_{uv\in E(G'_n)}(g_i(u)-k_i(u))k_j(v)\right)^2 &\leq \frac{c_1^2}{|V(G'_n)|^2}\sum_{uv\in E(G'_n)}(g_i(u)-k_i(u))^2k_j(v)^2\\ &\leq \frac{c_1^2}{|V(G'_n)|^2}\sum_{uv\in E(G'_n)}(g_i(u)-k_i(u))^2\\ &\leq 28q\varepsilon.\end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{c_1}{|V(G'_n)|^2}\sum_{uv\in E(G'_n)}g_i(u)(g_j(v)-k_j(v))\right)^2 &\leq \frac{c_1^2}{|V(G'_n)|^2}\sum_{uv\in E(G'_n)}g_i(u)^2(g_j(v)-k_j(v))^2\\ &\leq \frac{c_1^2}{|V(G'_n)|^2}N(z)^2\sum_{uv\in E(G'_n)}(g_j(v)-k_j(v))^2\\ &\leq N(z)^2 28q\varepsilon.\end{aligned}$$

Assim,

$$R\leq (N(z)+1)\sqrt{28q\varepsilon}.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\hom_\nu(w_{ij,K_2},G'_n)}{c_1}-\frac{\left|E\big(G_n[V_i^n,V_j^n]\big)\right|}{|V(G'_n)|^2}\right|\leq\frac{R}{c_1}\leq\frac{(N(z)+1)\sqrt{28q\varepsilon}}{c_1}.$$

Pela relação (7.16),

$$\left|\frac{\hom_\nu(w_{ij,K_2},G'_n)}{c_1}-\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}\right|\leq\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c_1}.$$

Usando a desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\left|E\big(G_n[V_i^n,V_j^n]\big)\right|}{|V_i^n||V_j^n|}-\frac{\alpha_i}{|V_i^n|}\frac{\alpha_j}{|V_j^n|}\beta_{ij}\right| &\leq\left(\frac{(N(z)+1)\sqrt{28q\varepsilon}}{c_1}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c_1}\right)\cdot\frac{|V(G'_n)|^2}{|V_i^n||V_j^n|}\\ &\leq\left(\frac{(N(z)+2)\sqrt{28q\varepsilon}}{c_1})\right)\cdot\frac{|V(G'_n)|^2}{|V_i^n||V_j^n|}\\ &\leq\left(\frac{4d(N(z)+2)\sqrt{28q\varepsilon}}{c})\right)\cdot\frac{|V(G'_n)|^2}{|V_i^n||V_j^n|}\\ &=c_3\frac{|V(G'_n)|^2\sqrt{\varepsilon}}{|V_i^n||V_j^n|},\end{aligned}$$

onde

$$c_3:=\frac{4d(N(z)+2)\sqrt{28q}}{c}.$$

□

7.6 Prova do teorema 7.2.2

Note que, na prova do teorema 7.2.1, usamos que $\hom(x, G'_n) \to \hom(x, H)$ quando $n \to \infty$ apenas para os elementos de $\mathcal{G}_q$ do conjunto

$$S := \{w^2, w_i^2, w_i w_{ii}, w_i w, w_{ij}^2, w_{ij,F}^2, w_{ij,F} w \colon i, j \in [q],\ F \in \{K_2, C_4\}\}.$$

Podemos escrever z e w como combinação linear de grafos 2-rotulados ordinários e q-rotulados ordinários, respectivamente. Temos

$$z = \sum_{i=1}^{a} \lambda_i A_i$$

e

$$w = \sum_{i=1}^{b} \mu_i B_i,$$

onde $\{A_1, \ldots, A_a\}$ é uma base de $\hat{\mathcal{G}}_2$ e $\{B_1, \ldots, B_b\}$ é uma base de $\hat{\mathcal{G}}_q$. Substitua em S cada z por um A_i e cada w por algum B_i. Assim, obtemos um conjunto de grafos ordinários $\{F_1, \ldots, F_r\}$ tal que, se $\hom(F_i, G'_n) \to \hom(F_i, H)$ para todo i com $n \to \infty$, então a prova do teorema 7.2.1 continua válida.

Note que, pelo lema 3.3.1 e pela proposição 3.4.9, vale que $a \leq q^2$ e $b \leq q^q$. Cada F_i é formado por no máximo 16 cópias de grafos A_i e 4 cópias de grafos B_i. Portanto, $r \leq a^{16} b^4 \leq q^{32+4q}$.

Temos que limitar o tamanho dos grafos F_i. Vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 7.6.1. *Existe um inteiro $f(k, q)$ tal que a álgebra $\hat{\mathcal{G}}_k$ é gerada por grafos k-rotulados simples com no máximo $f(k, q)$ vértices.*

Note que com isso mostramos que $|V(F_i)| \leq 16 f(2, q) + 4 f(q, q)$ para todo i. Assim, teremos provado o teorema 7.2.2.

7.6.1 A álgebra dos grafos parcialmente rotulados decorados

Seja F um grafo k-rotulado. Dizemos que F é um grafo **decorado** se a cada vértice v não-rotulado é associado um peso $\alpha_F(v) \in \mathbb{Z}_{>0}$ e a cada par (u, v) com $u \neq v$ é associado um peso $\beta_F(u, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Consideramos que em cada vértice v não-rotulado há um laço com peso $\beta_F(v, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Para cada grafo k-rotulado decorado F e toda função $\phi \colon [k] \to [q]$, definimos

$$\hom_\phi(F, H) := \sum_{\substack{\psi \colon V(F) \to [q] \\ \psi \text{ respeita } \phi}} \prod_{i \in V(F) \setminus [k]} \alpha_H(\psi(i))^{\alpha_F(i)} \prod_{ij \in E(F)} \beta_H(\psi(i), \psi(j))^{\beta_F(i,j)}.$$

Definimos

$$\hom(F, H) := \sum_{\phi \colon [k] \to [q]} \hom_\phi(F, H).$$

Definimos $\mathcal{G}_k^*$ como o espaço vetorial formado pelas combinações lineares de grafos k-rotulados decorados. Definimos o produto, produto interno, congruência módulo H como em $\mathcal{G}_k$. A álgebra $\hat{\mathcal{G}}_k^*$ é definida como $\mathcal{G}_k^*/\mathcal{K}$, onde $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{G}_k \colon \|x\| = 0\}$.

Para cada $J \subseteq \binom{V(F)\setminus[k]}{2}$, seja $\sim$ a relação de equivalência definida como $u \sim v$ se u e v pertencem a mesma componente conexa no grafo sobre $V(F)$ com conjunto de arestas J. Seja F/J o grafo k-rotulado decorado cujo conjunto de vértices é $\{A_1, \ldots, A_\ell\}$, onde $A_1, \ldots, A_\ell$ são as classes de equivalência de $\sim$ e $A_iA_j \in E(F/J)$ se existem $u \in A_i$ e $v \in A_j$ tais que $uv \in E(F)$. Definimos $\alpha_{F/J}(A_i) := \sum_{v \in A_i} \alpha_F(v)$. Para cada aresta A_iA_j definimos $\beta_{F/J}(A_i, A_j) := \sum_{u \in A_i} \sum_{v \in A_j} \beta_F(u, v)$.

Para cada $J \subseteq \binom{V(F)\setminus[k]}{2}$, seja H_J o conjunto de funções $\psi \colon V(F) \to [q]$ tais que $\psi(u) = \psi(v)$ sempre que $u \sim v$. Para cada função $\phi \colon [k] \to [q]$, definimos

$$\hom_{J,\phi}(F, H) := \sum_{\substack{\psi \in H_J \\ \psi \text{ respeita } \phi}} \prod_{i \in V(F)\setminus[k]} \alpha_H(\psi(i))^{\alpha_F(i)} \prod_{ij \in E(F)} \beta_H(\psi(i), \psi(j))^{\beta_F(i,j)}.$$

Seja I o conjunto de funções injetoras de $V(F)$ em $[q]$. Para cada função $\phi \colon [k] \to [q]$, definimos

$$\mathrm{inj}_\phi(F, H) := \sum_{\substack{\psi \in I \\ \psi \text{ respeita } \phi}} \prod_{i \in V(F)\setminus[k]} \alpha_H(\psi(i))^{\alpha_F(i)} \prod_{ij \in E(F)} \beta_H(\psi(i), \psi(j))^{\beta_F(i,j)}.$$

Por inclusão-exclusão, vale que

$$\mathrm{inj}_\phi(F, H) = \sum_{J \subseteq \binom{V(F)\setminus[k]}{2}} (-1)^{|J|} \hom_{J,\psi}(F, H). \tag{7.21}$$

Lema 7.6.2. *A álgebra $\hat{\mathcal{G}}_k^*$ é gerada por grafos k-rotulados decorados com no máximo q vértices não-rotulados.*

Prova: Não é difícil ver que

$$\hom_{J,\psi}(F, H) = \hom_\psi(F/J, H)$$

para cada função $\phi \colon [k] \to [q]$.

Se $|V(F)| > k + q$, então $\mathrm{inj}_\phi(F, H) = 0$. Portanto, isolando o caso em que $J = \varnothing$, temos

$$\hom_\phi(F, H) = \sum_{J \subseteq \binom{V(F)\setminus[k]}{2}} (-1)^{|J|-1} \hom_\psi(F/J, H).$$

□

Lema 7.6.3. *Seja F um grafo k-rotulado decorado. Então F é congruente módulo H a uma combinação linear de grafos k-rotulados decorados em que o peso de cada vértice é no máximo q e peso de cada aresta é no máximo q^2.*

Prova: Vamos mostrar apenas como lidar com os vértices com peso maior do que q. O caso das arestas é similar. Suponha que $u \in V(F) \setminus [k]$ tem peso $\alpha_F(u) > q$. Para todo $r < \alpha_F(u)$, defina $F^{(r)}$ o grafo k-rotulado decorado, obtido a partir de F modificando apenas o peso de u do qual subtraímos r.

Defina o seguinte polinômio

$$p(x) := \prod_{i=1}^{q}(x - \alpha_H(i)) = \sum_{j=0}^{q} a_j x^{q-j}.$$

Assim, para toda função $\phi\colon V(F) \to [q]$, vale que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{q} a_j \hom_\phi(F^{(j)}, H) &= \hom_\phi(F, H) \sum_{j=0}^{q} a_j\, \alpha_H(\phi(u))^{-j} \\
&= \hom_\phi(F, H)\, \alpha_H(\phi(u))^{-q} \sum_{j=0}^{q} a_j\, \alpha_H(\phi(u))^{q-j} \\
&= \hom_\phi(F, H)\, \alpha_H(\phi(u))^{-q} p(\alpha_H(\phi(u))) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Note que $a_0 = \prod_{i=1}^{q} \alpha_H(i) > 0$. Ademais, pela equação (7.22), temos

$$\hom_\phi(F, H) = \hom_\phi(F^{(0)}, H) = \frac{0 - \sum_{j=1}^{q} a_j \hom_\phi(F^{(j)}, H)}{a_0} = \hom_\phi(y, H),$$

onde $y := \sum_{j=1}^{q} \frac{-a_j}{a_0} F^{(j)}$. Por hipótese de indução, completamos a demonstração. □

Lema 7.6.4. *Seja F um grafo k-rotulado decorado. Então F é congruente módulo H a uma combinação linear de grafos k-rotulados (não-decorados) com no máximo $f(k, q)$ vértices.*

Prova: Pelo lema 7.6.2, podemos supor que F tem no máximo $k+q$ vértices. Pelo lema 7.6.3, podemos supor que $m := \max_{v \in V(F) \setminus [k]} \alpha_F(v) \leq q$ e que $m' := \max_{u,v \in V(F)} \beta_F(u, v) \leq q^2$.

Seja F' o grafo descrito a seguir. Substituímos cada vértice u de F não-rotulado, por um conjunto $S_u = \{u_1, \ldots, u_{\alpha_F(u)}\}$. Cole um contrator simples sobre u_1 e u_j para todo $2 \leq j \leq \alpha_F(u)$. Para cada par u, v, crie $\beta_F(u, v)$ arestas entre S_u e S_v arbitrariamente. Note que com isso podemos criar arestas múltiplas e laços. Se criamos um laço em um vértice, digamos u_i, substitua o laço, colando um conector sobre u_i e u_i (Note que isso pode criar uma aresta múltipla). Agora, substitua todas as arestas múltiplas colando conectores simples sobre suas pontas.

Seja t o número de vértices de um contrator simples. Podemos supor que $t \leq (6q)^q$. O número de vértices nos contratores em F' é limitado por

$$|V(F)| \cdot m \cdot t \leq (k + q) \cdot q \cdot (6q)^q =: f_1.$$

Seja t' o número de vértices de um conector simples. Podemos supor que $t' \leq q+2$. O número de vértices conectores originados de laços é limitado por

$$|V(F)| \cdot m \cdot 2 \cdot t' \leq (k+q) \cdot q^2 \cdot 2 \cdot (q+2) =: f_2.$$

O número de vértices conectores originados de arestas múltiplas é limitado por

$$\binom{|V(F)|}{2} \cdot m \cdot t' \leq \binom{|V(F)|}{2} \cdot q^2 \cdot 2 \cdot (q+2) =: f_3.$$

Portanto, $|V(F')| \leq f_1 + f_2 + f_3$. Ademais $F' \equiv F \pmod{H}$. □

Prova do teorema 7.6.1: Basta notar que um grafo ordinário k-rotulado pode ser visto como um grafo decorado onde o peso das arestas é 1, o das não-arestas é 0 e dos vértices é 1. □

Conclusão

O estudo de homomorfismos de grafos tem se mostrado rico e abrangente, existindo muitas linhas de pesquisa sobre esse assunto. Nesta dissertação, apresentamos alguns dos principais resultados de uma dessas linhas.

A beleza dos trabalhos envolvidos não se encontra apenas nos resultados em si. Como pudemos atestar, as demonstrações são muitas vezes surpreendentes e envolvem uma rica teoria. As ferramentas matemáticas utilizadas são oriundas de vários ramos da matemática, como combinatória extremal, probabilidade, álgebra e análise.

A linha que apresentamos se encontra bastante ativa. Por exemplo, o estudo de seqüências de grafos esparsos ainda tem muitas questões em aberto (veja a resenha de Bollobás e Riordan [2007]).

Referências bibliográficas

[1991] N. Alon: Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups, *Israel Journal of Mathematics* **73** (1991), pag. 247–256. [xiv, 10]

[2006] E. Babson e D. Kozlov: Complexes of graph homomorphisms. http://lanl.arxiv.org/abs/math.CO/0310056 (preprint), 2006. [xvi]

[2007] B. Bollobás e O. Riordan: Sparse graphs: metrics and random models. http://arxiv.org/abs/0708.1919, 2007. [83]

[2006] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós e K. Vesztergombi: Counting graph homomorphisms, in: Topics in discrete mathematics, volume 26 de Algorithms Combin., Springer, Berlin, 2006, pag. 315–371. [xvi]

[1989] F. R. K. Chung, R. L. Graham e R. M. Wilson: Quasi-random graphs, *Combinatorica. An International Journal of the János Bolyai Mathematical Society* **9** (1989), pag. 345–362. [xvi, xvii, 65, 66]

[1979] P. Erdős, L. Lovász e J. Spencer: Strong independence of graphcopy functions, in: Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977), Academic Press, New York, 1979, pag. 165–172. [xvi, 59]

[2007] M. Freedman, L. Lovász e A. Schrijver: Reflection positivity, rank connectivity, and homomorphism of graphs, *Journal of the American Mathematical Society* **20** (2007), pag. 37–51 (electronic). [xv, xvi, 19]

[1999] A. Frieze e R. Kannan: Quick approximation to matrices and applications, *Combinatorica. An International Journal of the János Bolyai Mathematical Society* **19** (1999), pag. 175–220. [46]

[2004] P. Hell e J. Nešetřil: *Graphs and homomorphisms*, volume 28 de Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2004. [xvi]

[1967] L. Lovász: Operations with structures, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **18** (1967), pag. 321–328. [xiii, xv, xvi, 1, 11]

[2006] L. Lovász: The rank of connection matrices and the dimension of graph algebras, *European Journal of Combinatorics* **27** (2006), pag. 962–970. [xv, xvi, 33]

[2007] L. Lovász: Connection matrices, in: Combinatorics, complexity, and chance, volume 34 de Oxford Lecture Ser. Math. Appl., Oxford Univ. Press, Oxford, 2007, pag. 179–190. [17]

[2008] L. Lovász e V. T. Sós: Generalized quasirandom graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **98** (2008), pag. 146–163. [xvi, xvii, 65, 67]

[2006] L. Lovász e B. Szegedy: Limits of dense graph sequences, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **96** (2006), pag. 933–957. [xvi, 43, 44]

[2008] L. Lovász e B. Szegedy: Contractors and connectors of graph algebras. http://www.cs.elte.hu/~lovasz/contractor.pdf, 2008. [70]

[1991] M. Simonovits e V. T. Sós: Szemerédi's partition and quasirandomness, *Random Structures & Algorithms* **2** (1991), pag. 1–10. [65]

[1987] A. Thomason: Pseudorandom graphs, in: Random graphs '85 (Poznań, 1985), volume 144 de North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam, 1987, pag. 307–331. [65]

Índice remissivo

$\mathcal{A}_k$, 36
$\mathcal{A}'_k$, 37
$\mathcal{A}''_k$, 37
Alon, xiv, 10
$\alpha_\phi(G)$, 19
$\alpha_G(v)$, 1
$\alpha_\phi(F,G)$, 1
$\mathcal{A}(S)$, 35
automorfismo
    próprio, 34

Babson, xvi
$\beta_G(u,v)$, 1
$\beta_\phi(F,G)$, 1
Bollobás, 83
Borgs, xvi

caractere
    definição, 8
    grupo, 8
Chayes, xvi
Chung, xvi, xvii, 65, 66
colando F em F', 71
conector, 70
conjunto
    estável, 5
    livre de somas, 10
contrator, 70
corte, 6

densidade de homomorfismos
    definição, 43
    induzidos, 55
    injetores, 55
$\mathrm{d}_\square(G,G')$, 46
emparelhamento perfeito, 17
Erdős, xiv, xvi, 10, 59

$f^\dagger$, 45
Freedman, xv, xvi, 19
Frieze, 46

$\mathcal{G}$, 22
$\hat{\mathcal{G}}$, 24
grafo
    com pesos, 1
    convergência, 44
    decorado, 79
    de Cayley, 11
    euleriano, 7
    k-rotulado, 15
    livre de vértices gêmeos, 33
    ordinário, 65
    parcialmente rotulado, 15
    produto, 15
    produto cartesiano, 3
    S-rotulado, 15
    simples, 70
    união disjunta, 2
Graham, xvi, xvii, 65, 66
Granville, xiv, 10
$\mathcal{G}(S)$, 22
$\hat{\mathcal{G}}(S)$, 24

Hell, xvi
$\hom(F,G)$, 1
homomorfismo
    definição, 1
    densidade de homomorfismos, 43
    induzido, 4

injetor, 4
número de homomorfismos, 1
$\hom_\phi(F, G)$, 1

idempotente, 26
$\mathrm{ind}(F, G)$, 4
$\mathrm{inj}(F, G)$, 4
invariante de grafos
definição, 15
k-multiplicativo, 16
multiplicativo, 16
normalizado, 45
reflexão positiva, 16
invariante sob automorfismos, 37

Kannan, 46
k-coloração, 5
Kozlov, xvi
Kronecker, 16

lema
de Borel–Cantelli, 56
de regularidade de Szemerédi, 47
Lovász, xiii, xv–xvii, 1, 11, 17, 19, 33, 43, 44, 59, 65, 67, 70

$M_0(f)$, 45
$M_0(f, k)$, 45
martingal, 48
matriz
de conexão, 15
de densidade, 47
positiva semidefinida, 16
posto, 15
meio-grafo, 44
$M(f, k)$, 15
Möbius, 4

Nešetřil, xvi
norma retangular, 46
nowhere-zero
4-flow, 8
k-flow, 8

$\mathrm{orb}_k(G)$, 34

partição
fracamente ε-regular, 47
peso
grafo, 43
par, 1
vértice, 1

reflexão positiva, 16
$\mathrm{r}(f, k)$, 15
Riordan, 83

Schrijver, xv, xvi, 19
seqüência de grafos
H-pseudo-aleatória, 66
pseudo-aleatória, 65
Simonovits, 65
Sós, xvi, xvii, 65, 67
Spencer, xvi, 59
Szegedy, xvi, 43, 44, 70
Szemerédi, xvi, 47, 48, 65

$\mathcal{T}$, 45
$\mathrm{t}(F, G)$, 43
$\mathrm{t}(F, W)$, 44
teorema de convergência de martingais, 48
Thomason, 65
$\mathrm{t}_{\mathrm{ind}}(F, G)$, 55
$\mathrm{t}_{\mathrm{inj}}(F, G)$, 55
traço, 36
triângulo, 6

U_k, 16

vértices gêmeos, 33
Vesztergombi, xvi

Wilson, xvi, xvii, 65, 66