

Colorações restritas de grafos

Gordana Manić

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE
EM
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Área da Concentração: Teoria dos Grafos

Orientador: Prof. Dr. Paulo Feofiloff

*Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da
CAPES*

— São Paulo, 22 de novembro de 2001—

Colorações restritas de grafos

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida e definida
por Gordana Manić
e aprovada pela comissão julgadora.

— São Paulo, 22 de novembro de 2001—

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Feofiloff (orientador) (-IME-USP)
- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (-IME-USP)
- Prof. Dr. Ricardo Dahab (-IC-UNICAMP)

*Posvećujem ovaj rad
mojim dragim roditeljima
i bratu.*

Agradecimentos

Ao meu orientador professor Paulo Feofiloff responsável por grande parte do trabalho, pelo cuidado, dedicação e paciência. Sua capacidade de tratar os problemas aqui contidos me ajudou a abordar o tema de uma forma melhor.

À professora Cristina Fernandes pela motivação que me deu, por sua força e energia contagiantes.

Aos professores Yoshiko Wakabayashi e José Coelho pelo apoio durante o mestrado.

Ao meu querido Flavio pelo amor, carinho, bom humor, e pelo auxílio em escrever parte deste texto.

Mojim roditeljima i bratu koji su me uvek podsticali na učenje i kojima dugujem za sve postignute uspehe (Aos meus pais e irmão que sempre me incentivaram ao estudo e a quem devo pelas conquistas alcançadas).

Aos amigos Alexandre (Scal), Mário Leston, Claus, Silvio, Bob e Leandro que tornaram o meu dia-a-dia mais agradável.

Resumo

Tratamos de coloração restrita de grafos, que é uma generalização do problema clássico de coloração de vértices. A generalização é obtida impondo-se restrições ao conjunto de cores disponíveis para cada vértice. Estudamos algumas técnicas de coloração restrita que combinam métodos combinatórios, algébricos e probabilísticos. Inicialmente, expomos algumas relações entre coloração clássica e coloração restrita. A seguir, tratamos de coloração restrita em grafos planares, apresentando resultados que utilizam métodos combinatórios de Thomassen e Gutner. Prosseguindo, descrevemos uma abordagem algébrica desenvolvida por Alon e Tarsi. Uma aplicação dessa abordagem é a prova, devida a Häggkvist e Janssen, da conhecida conjectura da coloração restrita de arestas de grafos completos de ordem ímpar. Finalmente, discutimos a prova de Galvin para a conjectura da coloração restrita de arestas de grafos bipartidos.

Abstract

We survey the list colouring of graphs, which is a generalization of the classical problem of colouring the vertices of a graph. The generalization arises when one imposes restrictions on the set of colours available for each vertex. We focus on list colouring techniques which combine combinatorial, algebraic and probabilistic methods. First, we present some relations between classical colouring and list colouring. Next, we present the results concerning the list colouring of planar graphs by Thomassen and Gutner. Further, we discuss an algebraic approach developed by Alon and Tarsi. One application of this approach is the verification by Häggkvist and Janssen of the well-known list colouring conjecture restricted to complete graphs of odd order. Finally, we discuss the proof of the list colouring conjecture for bipartite graphs due to Galvin.

Sumário

1	Coloração restrita: conceitos básicos	3
1.1	Terminologia básica	3
1.2	Coloração restrita	5
1.3	Aplicações	5
1.4	k -coloração restrita	6
1.5	Complexidade computacional	7
2	Semelhanças e diferenças entre coloração clássica e coloração restrita	9
2.1	Diferenças entre coloração clássica e coloração restrita	9
2.2	Semelhanças entre coloração clássica e coloração restrita	13
3	Coloração restrita de grafos planares	15
3.1	Preliminares	15
3.2	O teorema das cinco cores	16
3.3	Quatro cores não bastam	19
3.4	Grafos sem triângulos	21
4	Coloração restrita de digrafos	24
4.1	Preliminares	24
4.2	Coloração restrita e núcleo de digrafo	25
4.3	O polinômio de um digrafo	27
4.4	O teorema de Alon e Tarsi	33
4.5	Grafos bipartidos planares	36
5	Coloração restrita de arestas	39
5.1	Caracterização de grafos-linha	40

<i>SUMÁRIO</i>	ii
5.2 Grafos completos de ordem ímpar	41
5.3 Grafos bipartidos	44
5.4 Limitantes superiores	46
Referências Bibliográficas	48
Índice Remissivo	51

Introdução

O problema clássico da coloração de vértices de grafos se resume em encontrar uma função que associa a cada vértice do grafo uma cor, de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. Neste trabalho estudamos uma generalização deste problema que consiste em encontrar uma coloração de vértices em que a cor de cada vértice v pertence a um conjunto pré-especificado $\mathcal{L}(v)$ de cores “permitidas”. Ou seja, dado um grafo $G = (V_G, E_G)$ e um conjunto $\mathcal{L}(v)$ para cada vértice v , encontrar uma coloração c de vértices de G tal que $c(v) \in \mathcal{L}(v)$ para cada $v \in V_G$.

O conceito de coloração restrita foi introduzido na segunda metade da década de 70 independentemente por Erdős, Rubin e Taylor [11] e Vizing [24]. Vizing iniciou seus estudos nesta área com a intenção de estudar coloração total em grafos, ou seja, encontrar o número mínimo de cores para colorir todos os vértices e arestas de modo que os elementos adjacentes ou incidentes recebam cores distintas. Erdős, Rubin e Taylor, por outro lado, tiveram como motivação a conjectura de Dinitz¹: dada uma matriz $M_{n \times n}$ cujas componentes são conjuntos com n elementos, é possível escolher um elemento de cada conjunto de modo que os elementos escolhidos sejam distintos em cada linha e cada coluna. Ainda, em [11] foi dada uma caracterização dos grafos cujo número cromático restrito não passa de 2, uma estimativa para o número cromático restrito de grafos bipartidos aleatórios, uma prova do teorema de Brooks [10, p. 99] para coloração restrita e o enunciado de diversas conjecturas, algumas ainda em aberto.

Apesar de oferecer um número grande de problemas desafiadores, a área de coloração restrita começou a florescer somente na década passada, com a resolução da maioria das conjecturas enunciadas em [11], e vem crescendo desde então com o surgimento de novas questões, novas abordagens como, por exemplo, o uso de métodos algébricos e algumas aplicações em problemas de escalonamento e de atribuição de frequências entre outras.

No restante da apresentação, fornecemos a notação e detalhamos os

¹Jeff Dinitz propôs a conjectura na 10th S.E. Conference on Comb., Graph Theory, and Computing em abril 1979.

métodos combinatórios, algébricos e probabilísticos utilizados para o estudo de coloração restrita. No próximo capítulo apresentamos as definições necessárias para tratar a teoria envolvendo coloração restrita, expomos algumas de suas aplicações em problemas de escalonamento e atribuição de frequências segundo [6] e [21] e tratamos, de modo breve, da complexidade computacional da teoria estudada. No capítulo 2 enunciamos alguns resultados envolvendo semelhanças e diferenças entre coloração clássica e coloração restrita conforme [1] e [11]. A seguir tratamos de coloração restrita em grafos planares de acordo com [23] e em grafos planares sem triângulos segundo [15]. No capítulo 4 damos algumas propriedades de polinômio de digrafo e descrevemos a abordagem algébrica desenvolvida por Alon e Tarsi em [3] que fornece uma relação interessante entre coloração e polinômios de grafos. Damos uma aplicação desse método. Finalmente, no último capítulo tratamos da conhecida conjectura da coloração restrita de arestas, expondo uma prova para grafos bipartidos de acordo com [12]. Mencionamos ainda uma prova da conjectura da coloração restrita de arestas para grafos completos de ordem ímpar, devida a Häggkvist e Janssen.

Capítulo 1

Coloração restrita: conceitos básicos

Neste capítulo damos as definições necessárias para tratar a teoria envolvendo coloração restrita, expomos de modo breve algumas aplicações da teoria estudada e discutimos a complexidade algorítmica dos problemas envolvendo coloração restrita.

1.1 Terminologia básica

Um *grafo* é um par (V_G, E_G) de conjuntos finitos, com E_G um conjunto de pares não-ordenados de elementos distintos de V_G . Quando G estiver subentendido, omitimos o índice G . Por exemplo, em vez de V_G e E_G escrevemos simplesmente V e E . Os elementos de V_G são chamados *vértices*, e os elementos de E_G de *arestas*. Por brevidade, denotamos uma aresta $\{u, v\}$ por uv ou vu . Se $\alpha = uv$, dizemos que α *incide em* u e em v e que u e v são *extremos* de α . Também dizemos que u e v são *vizinhos* ou *adjacentes* e que u e v são *ligados* por α . Duas arestas distintas são ditas *adjacentes* se elas têm um extremo em comum.

A *ordem* de um grafo G , denotada por $|G|$, é o número de seus vértices. O *tamanho* de G é o número de suas arestas e será denotado por $\|G\|$.

O *grau* de um vértice v de um grafo G é o número de arestas incidentes em v e será denotado por $d_G(v)$. Um vértice de um grafo é *isolado* se seu grau é zero. O *grau mínimo* de um grafo G é o número $\delta(G) := \min\{d_G(v) : v \in V_G\}$ e o *grau máximo* é o número $\Delta(G) := \max\{d_G(v) : v \in V_G\}$. O *grau médio* é o número $d(G) := \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V_G} d_G(v)$.

Se todos os vértices de um grafo G de ordem n são dois a dois adjacentes dizemos que G é *completo* e o denotamos por K_n ; o grafo K_3 é chamado *triângulo*.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$; escrevemos $H \subseteq G$. Neste caso, G é *supergrafo* de H . Dizemos que um subgrafo H é *gerador* (*spanning subgraph*) de G se $V_H = V_G$. Um subgrafo completo de um grafo é chamado de *clique*.

A *união* de dois grafos G e H , denotada por $G \cup H$, é o grafo $(V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$.

Se U é um subconjunto de V_G , a *vizinhança* de U , denotada por $\Gamma_G(U)$, é o conjunto dos vértices de $V_G \setminus U$ adjacentes a pelo menos um vértice de U . Cada um dos elementos de $\Gamma_G(U)$ é um *vizinho* de U . Dizemos que uma aresta *incide em* U se ela tem pelo menos um extremo em U .

Se $U \subseteq V_G$, então o subgrafo de G *induzido* por U , denotado por $G[U]$, é o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é U e cujo conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que têm ambos os extremos em U . Ainda, denotamos por $G - U$ o grafo $G[V_G \setminus U]$; para o caso em que $U = \{v\}$, abreviamos $G - \{v\}$ por $G - v$.

Um grafo é *bipartido* se V_G admite uma partição em duas classes de modo que cada aresta tem extremos em classes distintas; uma tal partição é chamada *bipartição* do grafo. Um grafo *bipartido completo* é um grafo bipartido no qual todo par de vértices de classes distintas é uma aresta. Denotamos por $K_{m,n}$ o grafo completo com bipartição (V_1, V_2) tal que $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$.

Um *caminho* é um grafo P com $V_P = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ não-vazio e os v_i todos distintos e $E_P = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k\}$. Podemos representar um tal caminho por $v_1v_2 \cdots v_k$. Os vértices v_1 e v_k são os *extremos* do caminho. Se $P = v_1v_2 \cdots v_k$ é um caminho com $k \geq 3$, então $(V_P, E_P \cup \{v_kv_1\})$ é chamado de *circuito*. Um tal circuito pode ser representado por $v_1v_2 \cdots v_kv_1$. O *comprimento* de um caminho é o número de suas arestas; analogamente definimos o comprimento de um circuito. Dizemos que um caminho é *par* (resp. *ímpar*) se seu comprimento é par (resp. ímpar); analogamente definimos um circuito par e um circuito ímpar. A *cintura* de um grafo G , $g(G)$, é o comprimento do menor circuito em G . Dois caminhos são *internamente disjuntos* se não possuem vértices em comum, exceto os seus extremos.

Um grafo é *conexo* se para todo par de vértices distintos u e v contém um caminho com extremos u e v . Os subgrafos conexos maximais de um grafo são chamados *componentes*. Um grafo que não contém nenhum circuito é chamado de *acíclico*. Um grafo acíclico e conexo é chamado de *árvore*.

Um conjunto de vértices ou arestas dois a dois não-adjacentes é chamado *independente*. Um conjunto independente de arestas de um grafo é chamado de *emparelhamento* (*matching*). Se U é um subconjunto de V_G , um emparelhamento de G *satura* U se todo vértice em U é incidente a exatamente uma aresta do emparelhamento.

1.2 Coloração restrita

Uma *cor* é um elemento de \mathbb{N}^1 . Uma *lista de cores* é um subconjunto finito de \mathbb{N} . Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o conjunto de todas as listas de cores.

Dado um grafo G e uma atribuição $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de listas de cores aos vértices de G , uma *coloração que respeita \mathcal{L}* ou *\mathcal{L} -coloração (list-coloring)* de G é uma função $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $c(v) \in \mathcal{L}(v)$ para todo $v \in V$ e $c(v) \neq c(u)$ se u e v são adjacentes. O conjunto $\mathcal{L}(v)$ é chamado de *lista de cores permitidas de v* .

Se para cada vértice v de um grafo G , a lista de cores permitidas $\mathcal{L}(v)$ é suficientemente grande, G admite uma \mathcal{L} -coloração. É o que mostra o seguinte fato.

Fato 1.1

Se G é um grafo e \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices de G com $|\mathcal{L}(v)| \geq \underline{d}(v) + 1$ para todo $v \in V$, então G admite uma \mathcal{L} -coloração.

A prova do fato é o seguinte algoritmo guloso: para qualquer ordenação v_1, v_2, \dots, v_n dos vértices de G , colorimos cada vértice v_i com uma cor $c(v_i)$ de $\mathcal{L}(v_i)$ tal que $c(v_i) \notin \{c(v_j) : j < i \text{ e } v_i v_j \in E_G\}$.

Em seguida, mostramos que o problema de coloração restrita em grafos completos corresponde ao problema de emparelhamento em grafos bipartidos.

Seja $G := K_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices G . Definimos o grafo K com bipartição (A, B) com $A := V_G$, $B := \bigcup_{v \in V_G} \mathcal{L}(v)$ e $vc \in E_K$ se, e só se, $c \in \mathcal{L}(v)$. É claro que G admite uma \mathcal{L} -coloração se e somente se K possui um emparelhamento que satura A . Portanto, \mathcal{L} -coloração se reduz nesse caso a uma aplicação do teorema de Hall [10, p. 31]. A existência de uma \mathcal{L} -coloração, nesse caso, não depende apenas da cardinalidade das listas de cores, como no fato 1.1.

1.3 Aplicações

Vamos expor duas aplicações de coloração restrita: a primeira em problemas de escalonamento e a segunda em problemas de atribuição de frequências.

Um exemplo particular do problema de escalonamento pode ser obtido aplicando-se uma restrição ao problema citado em [6], encontrado na companhia aérea húngara. A situação dada assemelha-se à seguinte: a companhia possui aviões de diversos tipos e trabalha com diferentes vôos. Cada vôo

¹Para o tratamento algébrico de colorações restritas – capítulos 4.3 e 4.4 – é conveniente que as cores sejam números naturais.

corresponde a um certo intervalo de tempo. A restrição é a de que cada voo só pode ser realizado por certos aviões. O problema é atribuir um avião a cada voo.

A representação do problema e o respectivo uso de coloração restrita se dá do seguinte modo: definimos $G = (V, E)$ tal que $V := \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ sendo J_i os voos e $J_i J_k \in E$ se e só se os intervalos de tempo correspondentes não são disjuntos. Cada cor corresponde a um avião. Cada vértice J_i tem uma lista $\mathcal{L}(J_i)$ de cores permitidas. O problema de escalonamento, então, corresponde ao problema de encontrar uma \mathcal{L} -coloração do grafo G .

Outra aplicação pode ser encontrada na atribuição de freqüências de transmissão de rádio e televisão (frequency assignment problem). A situação dada em [21] assemelha-se à seguinte: suponha dados n transmissores numa região e que cada transmissor seja capaz de operar somente em determinadas freqüências. Certos pares de transmissores correm o risco de interferência e por isso devem escolher freqüências diferentes.

A formulação em grafos desse problema pode ser dada por: considere $G = (V, E)$ com V o conjunto de transmissores $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ e $t_i t_j \in E$ se e só se t_i e t_j correm o risco de interferir. O problema é, dadas as listas $\mathcal{L}(t_i)$ de freqüências permitidas, encontrar uma \mathcal{L} -coloração de G .

Chamamos a atenção para o fato de que em ambos os exemplos as situações encontrados na prática são mais complicadas. Por exemplo, as freqüências f_i e f_j escolhidas por t_i e t_j não devem ser apenas diferentes, mas $|f_i - f_j|$ deve ser maior que o “comprimento” da aresta $t_i t_j$.

1.4 k -coloração restrita

Dado um número inteiro positivo k , G admite uma k -coloração restrita (is k -choosable) se possui uma \mathcal{L} -coloração para toda atribuição \mathcal{L} com $|\mathcal{L}(v)| \geq k$ para todo $v \in V$. O número cromático restrito (choice number) de G , denotado por $\text{ch}(G)$, é o menor k tal que G admite uma k -coloração restrita.

Uma k -coloração (no sentido clássico) de um grafo G é uma \mathcal{L} -coloração de G com $\mathcal{L}(v) := \{1, 2, \dots, k\}$ para todo vértice v . O número cromático de G , $\chi(G)$, é o menor k tal que G admite uma k -coloração. Segue da definição que para todo grafo G ,

$$\text{ch}(G) \geq \chi(G).$$

Ainda, como conseqüência do fato 1.1, temos que para todo grafo G ,

$$\text{ch}(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Essa delimitação é justa, pois se G é grafo completo ou um circuito ímpar, teremos $\text{ch}(G) = \chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Ainda, Erdős, Rubin e Taylor demonstraram a seguinte generalização do conhecido teorema de Brooks [10, p. 99]:

Teorema 1.2 ([11])

Se G é um grafo conexo, que não é completo e nem é circuito ímpar, então $\text{ch}(G) \leq \Delta(G)$.

Eis um exemplo simples de cálculo do número cromático restrito. Mostremos que $\text{ch}(T) \leq 2$ para toda árvore T . A prova é por indução em $|T|$. Se $|T| = 1$, a afirmação é satisfeita trivialmente. Suponha que $|T| > 1$ e \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices de T com $|\mathcal{L}(v)| \geq 2$ para todo v . Seja w um vértice de T de grau 1. Então w possui mais cores na sua lista que vizinhos. Portanto, T admite uma \mathcal{L} coloração se e só se $T - w$ admite uma \mathcal{L} -coloração. Pela hipótese de indução, no entanto, $\text{ch}(T - w) \leq 2$, ou seja, $T - w$ admite uma \mathcal{L} -coloração.

O teorema seguinte caracteriza todos os grafos que têm número cromático restrito menor que 3. Como se sabe, $\chi(G) \leq 2$ se, e só se, G não tem circuito ímpar. A situação é mais complexa para número cromático restrito.

Teorema 1.3 ([11])

Um grafo conexo G satisfaz $\text{ch}(G) \leq 2$ se, e só se, o centro de G é ou um vértice ou um circuito par ou um grafo que consiste de dois vértices e três caminhos pares internamente disjuntos entre eles, onde o comprimento de pelo menos dois desses caminhos é exatamente dois.

Chamamos de *centro* de um grafo G o grafo obtido removendo-se os vértices de grau 1, recursivamente, até que não existam mais vértices de grau 1. Vamos omitir as demonstrações dos dois teoremas anteriores; para saber dos detalhes das demonstrações ver [11].

1.5 Complexidade computacional

De modo breve, discutimos a complexidade algorítmica dos seguintes problemas envolvendo coloração restrita.

- Problema 1: *Dado um grafo G e uma atribuição \mathcal{L} de listas de cores aos vértices de G , decidir se G admite uma \mathcal{L} -coloração.*
- Problema 2: *Dado um grafo G e um número inteiro positivo k , decidir se $\text{ch}(G) \leq k$.*

Para as noções básicas de complexidade algorítmica seguimos [13].

O problema de decidir se $\chi(G) \leq k$ é *NP*-completo [13]. Portanto o problema 1 também é *NP*-completo.

Quanto ao problema 2, não há razão para crer que esteja em *NP*. De acordo com [11], ele é $\text{co-}\Sigma_2^p$ -completo.

O teorema seguinte (que é uma generalização do fato 1.1) mostra que existe uma limitação superior não trivial para o número cromático restrito que pode ser calculada em tempo polinomial. Definimos o *número de coloração* (*colouring number*) de um grafo G como

$$\text{col}(G) := 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H).$$

Uma enumeração v_1, v_2, \dots, v_n dos vértices de um grafo G é *smallest-last* se, para todo i , v_i é um vértice de grau mínimo no grafo $G_i := G - \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$. Claro, para todo grafo G ,

$$1 + \max_{1 \leq i \leq n} d_{G_i}(v_i) \leq \text{col}(G)$$

onde v_1, v_2, \dots, v_n é uma enumeração *smallest-last* dos vértices de G . Não é difícil mostrar que $1 + \max_{1 \leq i \leq n} d_{G_i}(v_i) \geq \text{col}(G)$. É evidente que $1 + \max_{1 \leq i \leq n} d_{G_i}(v_i)$ pode ser calculado em tempo limitado por um polinômio em $|G|$ e $\|G\|$.

Teorema 1.4

Para todo grafo G , $\text{ch}(G) \leq \text{col}(G)$.

Demonstração

A demonstração é por indução na ordem de G . Se $|G| = 1$ a afirmação do teorema é satisfeita trivialmente. No passo de indução, supomos que $|G| > 1$ e \mathcal{L} uma atribuição de listas com pelo menos $k := \text{col}(G)$ cores aos vértices de G . Claro, o grafo G contém um vértice v de grau no máximo $k - 1$. Por hipótese de indução, $\text{ch}(G - v) \leq \text{col}(G - v)$. Ainda, $\text{col}(G - v) \leq \text{col}(G) = k$, e segue que $\text{ch}(G - v) \leq k$. Portanto, $G - v$ admite uma \mathcal{L} -coloração. Como $|\mathcal{L}(v)| \geq k > d_G(v)$, a coloração de $G - v$ pode ser estendida a uma coloração de G . \square

Capítulo 2

Semelhanças e diferenças entre coloração clássica e coloração restrita

Neste capítulo fazemos algumas comparações entre o comportamento do número cromático clássico e do número cromático restrito. A primeira comparação básica já foi vista na seção 1.2: todo grafo G satisfaz $\text{ch}(G) \geq \chi(G)$.

2.1 Diferenças entre coloração clássica e coloração restrita

A diferença entre o número cromático clássico e o número cromático restrito de um grafo pode ser arbitrariamente grande. Portanto, não existe limitação superior para o número cromático restrito em termos do número cromático clássico.

Fato 2.1 (Erdős, Rubin e Taylor [11])

Se k é um número natural, $k \geq 2$, e $m := \binom{2k-1}{k}$, então $\chi(K_{m,m}) = 2$ e $\text{ch}(K_{m,m}) > k$.

Demonstração

Suponha que $\text{ch}(K_{m,m}) \leq k$. Seja (V_1, V_2) uma bipartição de $K_{m,m}$ e atribua cada k -subconjunto¹ de um conjunto de $2k - 1$ cores a um dos vértices de V_1 e a um dos vértices de V_2 . Considere uma coloração de $K_{m,m}$ que respeite as listas assim definidas. Seja S o conjunto de cores usadas pelos vértices em V_1 . Temos $|S| \geq k$, pois caso contrário o complemento de S

¹Um conjunto finito com k elementos chamamos k -conjunto.

conteria pelo menos k cores e assim a lista de cores de algum dos vértices em V_1 seria parte do complemento de S , o que é um absurdo. Como $|S| \geq k$, existe um vértice em V_2 cuja lista de cores é parte de S . Portanto, este vértice não pode ser colorido, contradição (figura 2.1). \square

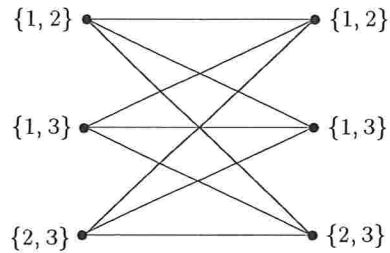


Figura 2.1: Exemplo para o fato 2.1, caso $k = 2$: $\text{ch}(K_{3,3}) > 2$.

Agora considere a relação entre o número cromático e o grau médio. Existem grafos com número cromático 2 e com grau médio arbitrariamente grande, por exemplo, os grafos bipartidos completos. Em contraste, o teorema a seguir mostra que o número cromático restrito depende do grau médio $d(G)$.

Teorema 2.2 (Alon [1])

Se G é um grafo, k um número natural e $d(G) > 4 \binom{k^4}{k} \ln(2 \binom{k^4}{k})$, então $\text{ch}(G) > k$.

Demonstração

Inicialmente, mostramos que G contém um subgrafo bipartido H com $\delta(H) \geq d(G)/4$. É fácil verificar [10, p. 6] que G tem um subgrafo induzido G' com $\delta(G') \geq d(G)/2$. Seja H um subgrafo bipartido gerador de G' com número máximo de arestas. Suponha que existe v em V_H com $d_H(v) < d_{G'}(v)/2$. O grafo obtido deslocando v para a outra classe da bipartição é um subgrafo bipartido gerador de G' com mais arestas do que H , contradição. Portanto, todo vértice v de H satisfaz $d_H(v) \geq d_{G'}(v)/2$. Logo, $\delta(H) \geq \delta(G')/2 \geq d(G)/4$.

Seja então H um subgrafo bipartido de G com $\delta(H) \geq d(G)/4$ e com bipartição (A, B) onde $|A| \geq |B|$. Definimos o conjunto de cores $S := \{1, 2, \dots, k^4\}$ e usando métodos probabilísticos provamos que existem subconjuntos $\mathcal{L}(v)$ de S com $|\mathcal{L}(v)| = k$ para todo $v \in V_H$, tais que H não admite uma \mathcal{L} -coloração.

Adotamos a seguinte abreviatura

$$K := \binom{k^4}{k}.$$

Para todo vértice $b \in B$, seja $\mathcal{L}(b)$ um k -subconjunto aleatório de S escolhido de modo uniforme e independente entre todos os K k -subconjuntos de S . Um vértice $a \in A$ é *bom* se, para todo k -subconjunto C de S existe um vizinho b de a em H com $\mathcal{L}(b) = C$. Em seguida mostramos que, para cada $a \in A$,

$$\text{a probabilidade de que } a \text{ é um vértice bom é pelo menos } 1/2. \quad (2.1)$$

Seja a um vértice de A e b_1, b_2, \dots, b_j os vizinhos de a em H . Seja C um k -subconjunto fixo de S . Para todo i entre 1 e j , $\Pr[\mathcal{L}(b_i) = C] = K^{-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Pr\left[\bigwedge_{i=1}^j \mathcal{L}(b_i) \neq C\right] &= (1 - K^{-1})^j \\ &\leq (1 - K^{-1})^{\delta(H)}. \end{aligned}$$

A probabilidade de que exista um k -subconjunto C de S tal que $\bigwedge_{i=1}^j \mathcal{L}(b_i)$ é diferente de C é no máximo $K(1 - K^{-1})^{\delta(H)}$. A desigualdade $\delta(H) \geq d(G)/4$ e a hipótese do teorema de que $d(G) > 4K \ln(2K)$ implicam em

$$\begin{aligned} K(1 - K^{-1})^{\delta(H)} &\leq K(1 - K^{-1})^{\frac{d(G)}{4}} \\ &\leq K(1 - K^{-1})^{K \ln(2K)} \\ &\leq K e^{-\ln(2K)} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

uma vez que $(1 + 1/m)^m \leq e$ para todo m . Logo, a probabilidade de um vértice a não ser bom é no máximo $1/2$. Isto implica a afirmação (2.1).

Se X é o número de vértices bons de A , a esperança de X é $E(X) \geq |A|/2$ de acordo com (2.1). Logo, existe uma escolha de conjuntos $\mathcal{L}(b)$, $b \in B$, para a qual o número de vértices de A que são bons é pelo menos $|A|/2$. Fixamos uma tal escolha de conjuntos $\mathcal{L}(b)$, $b \in B$. Para todo $a \in A$, seja $\mathcal{L}(a)$ um subconjunto aleatório de S escolhido de modo uniforme e independentemente entre todos os K subconjuntos de S com k elementos. Em seguida mostramos que

$$H \text{ não admite uma } \mathcal{L}\text{-coloração.} \quad (2.2)$$

Existem $k^{|B|}$ possíveis colorações de vértices de B a partir das listas $\mathcal{L}(b)$. Fixamos uma tal coloração c e estimamos a probabilidade de que c pode ser estendida a uma coloração de H que respeita as listas $\mathcal{L}(a)$, $a \in A$. Para a

prova de (2.2) será suficiente ocupar-se dos vértices bons de A . Se $a \in A$ é um vértice bom, então o conjunto $W := \{c(b) : b \in B, b \text{ é vizinho de } a \text{ em } H\}$ intersecta todo k -subconjunto de S , pois todo k -subconjunto C de S satisfaz que $C = \mathcal{L}(b)$ para algum vizinho b de a em H . Portanto, $|W| \geq k^4 - k + 1$, isto é, c usa pelo menos $k^4 - k + 1$ cores para vizinhos de a em H . Podemos colorir o vértice a a partir de $\mathcal{L}(a)$ se, e só se, $\mathcal{L}(a) \setminus W \neq \emptyset$, isto é, se $\mathcal{L}(a)$ contém uma das no máximo $k - 1$ cores do conjunto $S \setminus W$. Em seguida mostramos que

$$\Pr[\mathcal{L}(a) \setminus W \neq \emptyset] < \frac{1}{k^2}.$$

Fixamos um elemento d de $S \setminus W$. O número de k -subconjuntos de S que contêm d é $\binom{k^4-1}{k-1}$. Como $|S \setminus W| \leq k - 1$, o número de k -subconjuntos de S que contêm pelo menos um elemento de $S \setminus W$ é no máximo $(k - 1)\binom{k^4-1}{k-1}$. Como $\mathcal{L}(a)$ é um k -subconjunto aleatório de S , a probabilidade de que $\mathcal{L}(a) \setminus W \neq \emptyset$ é no máximo

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)\binom{k^4-1}{k-1}}{K} &= \frac{(k-1)(k^4-1)!k!}{k^4!(k-1)!} \\ &= \frac{(k-1)k}{k^4} \\ &< \frac{k^2}{k^4} = \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Logo, para um vértice bom $a \in A$, a probabilidade de $\mathcal{L}(a) \setminus W \neq \emptyset$, isto é, a probabilidade de podermos colorir a a partir de lista $\mathcal{L}(a)$ é estritamente menor que $1/k^2$.

Os eventos $\mathcal{L}(a) \setminus W \neq \emptyset$ para distintos vértices bons a de A são independentes, em virtude da escolha independente dos conjuntos $\mathcal{L}(a)$. Portanto, se l vértices em A são bons, a probabilidade de que c pode ser estendida a uma coloração de H respeitando as listas dos vértices de A é estritamente menor que $(1/k^2)^l$. As inequações $l \geq |A|/2$ e $|A| \geq |B|$ implicam em

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)^l \leq \left(\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{|A|}{2}} \leq \frac{1}{k^{|B|}}.$$

Existem $k^{|B|}$ possíveis colorações dos vértices de B que respeitam as listas dos vértices em B . Mostramos que a probabilidade de que uma tal coloração c pode ser estendida a uma coloração de H respeitando as listas dos vértices de A , é estritamente menor que $1/k^{|B|}$. Portanto, vale (2.2).

Segue da afirmação (2.2) que $\text{ch}(H) > k$ e a desigualdade $\text{ch}(G) \geq \text{ch}(H)$ conclui a demonstração do teorema. \square

2.2 Semelhanças entre coloração clássica e coloração restrita

$\mathcal{G}(n, p)$ denota o espaço finito de probabilidade cujos elementos são grafos com conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$, e onde todo par de vértices é ligado por uma aresta com a probabilidade p . Chamamos um grafo $G \in \mathcal{G}(n, p)$ de *grafo aleatório com aresta-probabilidade p* . Se A é uma propriedade de grafos, dizemos que *quase todo G de $\mathcal{G}(n, p)$ tem propriedade A* se a probabilidade de que G satisfaz A tende a 1 quando n tende a infinito, para $G \in \mathcal{G}(n, p)$. Para as noções básicas de probabilidade e grafos aleatórios seguimos [2] e [10, cap. 11].

Denotamos $\log n := \log_2 n$. É fácil mostrar ([10, p. 240]) que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, 1/2)$ satisfaz $\chi(G) \geq (1 + o(1))(n/(2 \log n))$. Bollobás mostrou [7] que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, 1/2)$ satisfaz $\chi(G) \leq (1 + o(1))(n/(2 \log n))$. Logo, quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, 1/2)$ satisfaz $\chi(G) = (1 + o(1))(n/(2 \log n))$. O teorema seguinte, devido a Jeff Kahn, mostra que o número cromático restrito tem o mesmo comportamento assintótico em $\mathcal{G}(n, 1/2)$. Isto é um tanto surpreendente em vista do fato 2.1 e do teorema 2.2.

Teorema 2.3 (Kahn)

Quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, 1/2)$ satisfaz $\text{ch}(G) = (1 + o(1))(n/(2 \log n))$.

Demonstração

A demonstração a seguir é conforme [1]. Quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, 1/2)$ satisfaz $\text{ch}(G) \geq \chi(G) \geq (1 + o(1))(n/(2 \log n))$. Em seguida mostramos que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, 1/2)$ satisfaz

$$\text{ch}(G) \leq (1 + o(1)) \frac{n}{2 \log n}. \quad (2.3)$$

Bollobás mostrou [7] que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, 1/2)$ satisfaz a propriedade de que todo conjunto de pelo menos $n/\log^2 n$ vértices de G contém um conjunto independente de $q := 2 \log n$ vértices. Seja \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices de G com $|\mathcal{L}(v)| = n/q + n/\log^2 n$. Então, $|\mathcal{L}(v)| = (1 + 2/\log n)(n/(2 \log n)) = (1 + o(1))(n/(2 \log n))$ para todo v .

Enquanto existir uma cor c que pertence a pelo menos $n/\log^2 n$ listas de cores, tome um q -subconjunto independente Q do conjunto de vértices que contêm c na sua lista. Atribua cor c a todos os vértices de Q , omita c das listas de cores dos demais vértices e retire todos os vértices em Q do grafo.

Denotemos por G' o grafo obtido pelo procedimento descrito. Para todo $v \in V_{G'}$ seja $\mathcal{L}'(v)$ a lista de cores de v no fim de procedimento. É claro que

$|\mathcal{L}'(v)| \geq |\mathcal{L}(v)| - n/q = n/\log^2 n$ para todo v . Ainda, cada cor pertence a menos do que $n/\log^2 n$ listas de cores $\mathcal{L}'(v)$, $v \in V_{G'}$. Mostramos em seguida que, de acordo com o teorema de Hall [10, p. 31],

$$\text{existe uma } \mathcal{L}'\text{-coloração de } G'. \quad (2.4)$$

Seja K o grafo com bipartição (A, B) com $A := V_{G'}$, $B := \bigcup_{v \in V_{G'}} \mathcal{L}'(v)$ e $vc \in E_K$ se, e só se, $c \in \mathcal{L}'(v)$. Considere A' um subconjunto de A . Definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{\alpha \in E_K : \alpha \text{ incide em } A'\} \text{ e} \\ E_2 &:= \{\alpha \in E_K : \alpha \text{ incide em } \Gamma_K(A')\}. \end{aligned}$$

Como $|\mathcal{L}'(v)| \geq n/\log^2 n$ para todo vértice v de G' , temos $|E_1| \geq (n/\log^2 n)|A'|$. De outro lado, cada c em B é adjacente a menos do que $n/\log^2 n$ vértices em A' e portanto $|E_2| < (n/\log^2 n)|\Gamma_K(A')|$. Claramente, $E_1 \subseteq E_2$ e logo $|E_1| \leq |E_2|$. Temos então

$$\frac{n}{\log^2 n}|A'| \leq |E_1| \leq |E_2| < \frac{n}{\log^2 n}|\Gamma_K(A')|.$$

Ou seja, $|A'| < |\Gamma_K(A')|$. Pelo teorema de Hall, G' tem um emparelhamento que satura A , o que implica (2.4).

De acordo com o resultado mencionado de Bollobás, a probabilidade de que exista coloração do grafo G definida por procedimento descrito tende a 1 quando n tende a infinito. Ainda, (2.4) implica que a atribuição de cores aos vértices de G obtida pelo este procedimento pode ser estendida a coloração restrita de G que respeita as listas de cores $\mathcal{L}(v)$ permitidas. Logo, a probabilidade de que $\text{ch}(G) \leq (1 + o(1))(n/2 \log n)$ tende a 1 quando n tende a infinito, o que prova (2.3). \square

Chamamos atenção para o fato de que a prova do teorema 2.3 é extensível a $\mathcal{G}(n, p)$ com qualquer p constante.

Capítulo 3

Coloração restrita de grafos planares

Neste capítulo damos a prova de que todo grafo planar G satisfaz $\text{ch}(G) \leq 5$ e exibimos um grafo planar com $\text{ch} > 4$. Prosseguindo, tratamos de coloração restrita em grafos planares sem triângulos.

Dizemos, informalmente, que um grafo é *planar* se pode ser desenhado no plano de modo que as curvas que representam as arestas não se intersectem exceto num extremo comum das arestas. Para as definições formais, e terminologia relativa a grafos planares, recorreremos a Diestel [10, cap. 4].

Chamamos a atenção para o fato de que por definição os grafos que consideramos não admitem arestas múltiplas.

3.1 Preliminares

O seguinte lema será necessário para vários teoremas no restante do texto. Ele limita o número de arestas de um grafo planar G em função da cintura $g(G)$ do grafo.

Lema 3.1

Todo grafo planar G com pelo menos um circuito satisfaz

$$\|G\| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2} (|G| - 2).$$

O lema decorre da formula de Euler. Uma demonstração pode ser encontrada em Diestel [10, cap. 5].

Teorema 3.2

Todo grafo planar G satisfaz $\text{ch}(G) \leq 6$.

Demonstração

Inicialmente, mostramos que todo grafo planar G contém um vértice de grau no máximo 5.

Como nossos grafos não têm arestas múltiplas, a cintura de G é no mínimo 3, ou seja, $g(G) \geq 3$. Portanto, pelo lema 3.1,

$$\begin{aligned} \|G\| &\leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|G| - 2) \\ &\leq \frac{3}{3 - 2}(|G| - 2) \\ &= 3|G| - 6. \end{aligned}$$

Logo, o grau médio de G é

$$\begin{aligned} d(G) &= \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V} d_G(v) \\ &= \frac{1}{|G|} 2\|G\| \\ &\leq \frac{1}{|G|} 2(3|G| - 6) \\ &< 6. \end{aligned}$$

Segue que G tem um vértice de grau no máximo 5.

Seja G um grafo planar. É claro que todo subgrafo de G é planar e portanto tem um vértice de grau no máximo 5. Logo, o número de coloração de G é no máximo 6, ou seja, $\text{col}(G) \leq 6$. Segue do teorema 1.4 que $\text{ch}(G) \leq 6$. \square

3.2 O teorema das cinco cores

Como se sabe [10, p. 106] todo grafo planar G satisfaz $\chi(G) \leq 5$. O seguinte teorema é uma solução para uma das conjecturas propostas por Erdős, Rubin e Taylor [11].

Teorema 3.3 (Thomassen [23])

Todo grafo planar G satisfaz $\text{ch}(G) \leq 5$.

O truque da prova é encontrar uma hipótese de indução apropriada. O seguinte lema contém uma tal hipótese. Um grafo *plano* é uma particular imersão de um grafo planar no plano. Uma tal imersão divide o plano em regiões que são conhecidas como *faces* de G . A face ilimitada é *externa*; as demais são *internas*.

Lema 3.4

Seja G um grafo plano tal que toda face interna de G é limitada por um triângulo e a face externa por um circuito $C := v_1 v_2 \cdots v_k v_1$. Suponha que v_1 e v_2 são coloridos com as cores 1 e 2, respectivamente, e que $\mathcal{L}(v)$ é uma lista de pelo menos três cores se $v \in V_C \setminus \{v_1, v_2\}$ e de pelo menos cinco cores se $v \in V_G \setminus V_C$. Então, a coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida a uma coloração de G que respeita \mathcal{L} .

Demonstração

A prova é por indução em $|G|$. Se $|G| = 3$, então G é um triângulo $v_1 v_2 v_3 v_1$ e o vértice v_3 tem três cores na sua lista. Portanto, a afirmação do teorema é satisfeita trivialmente.

Suponha agora que $|G| \geq 4$. Analisamos dois casos: quando C tem uma corda e quando não tem nenhuma corda.

Se C tem uma corda $v_i v_j$ com $2 \leq i \leq j - 2 \leq k - 1$ ($v_{k+1} := v_1$), então definimos os circuitos $C_1 := v_1 v_2 \cdots v_i v_j v_{j+1} \cdots v_k v_1$ e $C_2 := v_j v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$. Denotamos por H_1 o subgrafo de G induzido por vértices de C_1 e vértices de G que estejam na faces internas de C_1 . Denotamos por H_2 o subgrafo de G induzido por vértices de C_2 e os vértices de G que estejam na faces internas de C_2 (figura 3.1). Por hipótese de indução, a coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida a uma coloração de H_1 que respeita $\mathcal{L}(v)$. Essa coloração de H_1 atribui cores aos vértices v_i e v_j . Aplicando a hipótese de indução novamente a H_2 , com as cores atribuídas aos vértices v_i e v_j , obtemos a coloração desejada de G .

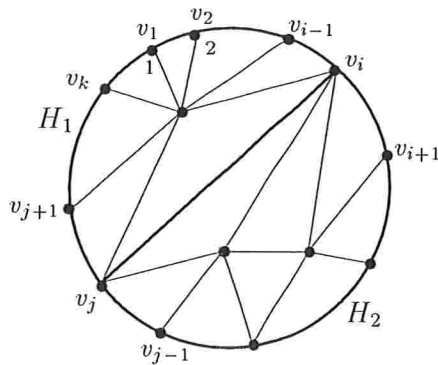


Figura 3.1: [10] Passo da indução na prova do lema 3.4 para o caso em que $C = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ tem uma corda $v_i v_j$.

Se C não tem nenhuma corda, sejam $v_1, u_1, u_2, \dots, u_m, v_{k-1}$ os vizinhos de v_k no sentido horário em torno de v_k . Como C não tem nenhuma corda, todos os vizinhos $u_i, 1 \leq i \leq m$, de v_k estão na face interna de C . Como toda

face interna de G é limitada por um triângulo, $P := v_1 u_1 u_2 \cdots u_m v_{k-1}$ é um caminho em G através da face interna de C . Portanto, $C' := P \cup (C - v_k)$ é um circuito (figura 3.2).

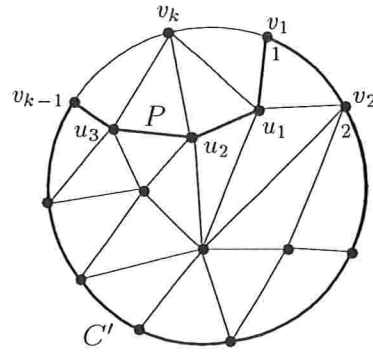


Figura 3.2: [10] Passo da indução na prova do lema 3.4 para o caso em que $C = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ não tem nenhuma corda.

Sejam j e l duas cores distintas em $\mathcal{L}(v_k) \setminus \{1\}$. Definimos as listas de cores

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(u_i) &:= \mathcal{L}(u_i) \setminus \{j, l\} \text{ para } 1 \leq i \leq m \text{ e} \\ \mathcal{L}'(v) &:= \mathcal{L}(v) \text{ se } v \in G \setminus \{u_i : 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned}$$

Para todo i , $1 \leq i \leq m$, a lista $\mathcal{L}(u_i)$ contém pelo menos cinco cores e portanto, $|\mathcal{L}'(u_i)| \geq 3$ se $u_i \in C'$. Logo, a hipótese de indução implica que a coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida a uma coloração de $G - v_k$ respeitando as listas \mathcal{L}' . Finalmente, completamos a coloração de G atribuindo cor j ou l ao vértice v_k de modo que as cores atribuídas a v_{k-1} e v_k sejam distintas. \square

Demonstração do teorema 3.3

Seja G um grafo plano e \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices de G com $|\mathcal{L}(v)| = 5$ para todo $v \in V$. Seja G' supergrafo plano maximal. É claro que $\text{ch}(G) \leq \text{ch}(G')$. Como se sabe, [10, p. 73], toda face de G' é limitada por um triângulo.

Seja $v_1 v_2 v_3 v_1$ a fronteira da face externa de G' . Atribuímos a v_1 e v_2 cores de suas listas de modo que elas sejam distintas. Omitimos as cores atribuídas a v_1 e v_2 da lista de cores permitidas de v_3 . A lista de cores de v_3 resultante tem três cores. O lema 3.4 implica que a coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida à coloração de G' respeitando as listas de cores dadas. Logo, $\text{ch}(G') \leq 5$. Segue daí imediatamente que $\text{ch}(G) \leq 5$. \square

A prova do teorema 3.4 não utiliza troca de cores ao longo de um caminho nem a fórmula de Euler, que são os instrumentos utilizados no clássico

método de 5-coloração de grafos planares [10, p. 96].

Como observaram Jansen e Toft [17], a prova de Thomassen de que todo grafo planar G satisfaz $\text{ch}(G) \leq 5$ fornece um algoritmo polinomial que, dados um grafo plano G e uma atribuição \mathcal{L} de listas de cores de tamanho 5 aos vértices de G , o algoritmo encontra uma \mathcal{L} -coloração de G .

Um grafo G é planar se, e só se, não contém *minor* K_5 e nem *minor* $K_{3,3}$ [10, p. 84]. (Para a definição de *minor* ver [10, p. 16]). Škrekovski [27] estendeu o resultado de Thomassen, provando que todo grafo G sem *minor* K_5 satisfaz $\text{ch}(G) \leq 5$.

3.3 Quatro cores não bastam

A conjectura de que existem grafos planares com número cromático restrito maior que 4 é devida a Erdős, Rubin e Taylor [11]. Voigt [25] foi a primeira a provar esta conjectura exibindo um tal grafo com 238 vértices. Gutner utiliza uma construção mais simples.

Teorema 3.5 (Gutner [15])

Existe um grafo planar G , de ordem 75, com $\text{ch}(G) > 4$.

Demonstração

Inicialmente, definimos o grafo G_i com listas de 4 cores permitidas para todos os vértices exceto u_i e v_i (figura 3.3). Mostramos em seguida o seguinte fato relativo à figura 3.3:

se c é uma atribuição de cores aos vértices u_i e v_i com $c(u_i) = a$, $c(v_i) = b$ e $a \neq b$, então c não pode ser estendida a uma coloração de G_i que respeita as listas de cores definidas na figura 3.3. (3.1)

O vértice w_i pode ser colorido com 1 ou 2. Se $c(w_i) = 1$, então, para estender a coloração c a uma coloração de G_i que respeita as listas de cores definidas como na figura 3.3, o triângulo $x_1x_2x_3x_{1i}$ necessariamente deve ser colorido com as cores de conjunto $\{s, k\}$, o que é impossível.

Se $c(w_i) = 2$, c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeite as listas definidas como na figura 3.3. Assim, a afirmação (3.1) de fato vale.

Em seguida, explicamos a construção do grafo G . Tomamos a união disjunta de grafos G_i , $1 \leq i \leq 12$. Identificamos¹ todos os vértices u_1, u_2, \dots, u_{12} num vértice só, denotado por u , assim como todos os vértices v_1, v_2, \dots, v_{12} num vértice denotado por v . Para todo $1 \leq i \leq 11$ identificamos os vértices y_{2i} e $x_{2(i+1)}$. Adicionando a aresta uv , obtemos o grafo G .

¹ou seja, contraímos a um único vértice.

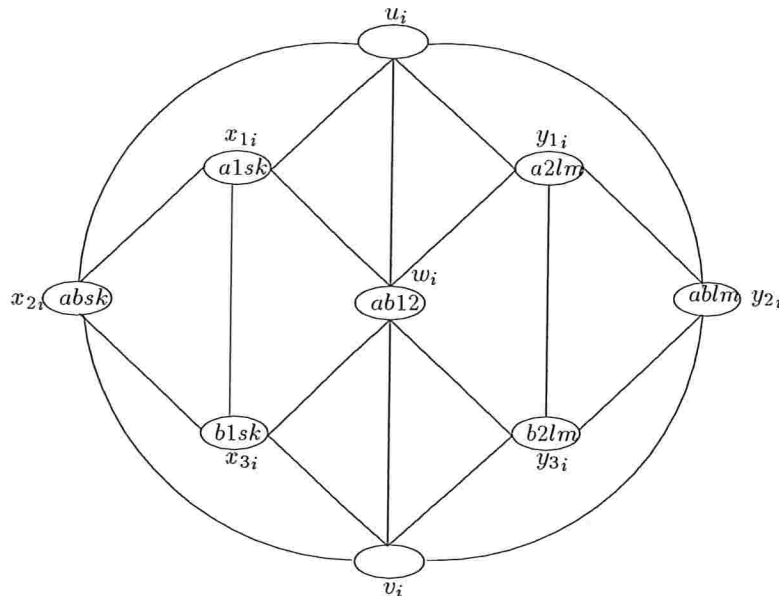


Figura 3.3: O grafo G_i com listas de cores permitidas para todos os vértices exceto u_i e v_i . As cores estão indicadas dentro das elipses que representam os vértices. As cores s, k, l, m pertencem ao conjunto $\{1, 2, \dots, 6\}$ e não são necessariamente todas distintas.

Evidentemente, o grafo G é planar e $|G| = 12 \cdot 7 + 2 - 11 = 75$. Mostramos em seguida que $\text{ch}(G) > 4$. Definimos as listas $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v) := \{3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto $A := \{(a, b) \in \mathcal{L}(u) \times \mathcal{L}(v) : a \neq b\}$. A cardinalidade do conjunto A é 12. Associamos a todo i , entre 1 e 12, um elemento $p_i \in A$ de modo que $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

Para todo i , $1 \leq i \leq 12$, denotamos $(a, b) := p_i$ e $(e, d) := p_{i+1}$ (com os índices tomados módulo 12) e definimos listas das cores para todos os vértices de G_i exceto u_i e v_i como na 3.3. Ainda, se $i \leq 11$, as cores l e m na lista de y_{2i} escolhemos de modo que $\{l, m\} \supseteq \{e, d\} \setminus \{a, b\}$, ou seja, de modo que a lista do vértice y_{2i} contenha as cores a, b, e e d e talvez outras cores se p_i e p_{i+1} não são disjuntos. Isto é necessário pois na construção de G os vértices y_{2i} e $x_{2(i+1)}$ serão identificados.

Seja c uma coloração de u e v tal que $c(u) \in \mathcal{L}(u)$, $c(v) \in \mathcal{L}(v)$ e $c(u) \neq c(v)$. Seja $a := c(u)$ e $b := c(v)$. Claro que $(a, b) \in A$ e portanto $(a, b) = p_i$ para algum i , $1 \leq i \leq 12$. Então, a afirmação (3.1) implica que c não pode ser estendida a uma coloração de G_i que respeite as listas de cores permitidas dos vértices de G_i . Logo, c não pode ser estendida a coloração de G que respeite as listas de cores dos vértices de G . \square

3.4 Grafos sem triângulos

O teorema de Grötzsch [14] afirma que todo grafo planar G sem triângulos satisfaz $\chi(G) \leq 3$. O seguinte teorema faz uma afirmação análoga para $\text{ch}(G)$, que é bem mais simples que o teorema de Grötzsch.

Teorema 3.6

Todo grafo planar G sem triângulos satisfaz $\text{ch}(G) \leq 4$.

Demonstração

Seja G um grafo planar sem triângulos. Então $g(G) \geq 4$, e pelo lema 3.1 temos

$$\begin{aligned} \|G\| &\leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|G| - 2) \\ &\leq \frac{4}{4 - 2}(|G| - 2) \\ &= 2|G| - 4. \end{aligned}$$

Logo, o grau médio de G é

$$\begin{aligned} d(G) &= \frac{1}{|G|} 2\|G\| \\ &\leq \frac{1}{|G|} 2(2|G| - 4) \\ &< 4. \end{aligned}$$

Segue que G tem um vértice de grau no máximo 3. Todo subgrafo de G também é planar e portanto tem um vértice de grau no máximo 3. Logo, $\text{col}(G) \leq 4$. Segue do teorema 1.4 que $\text{ch}(G) \leq 4$. \square

Novamente, Voigt [26] foi a primeira a mostrar que nem todo grafo planar G sem triângulos satisfaz $\text{ch}(G) \leq 3$; ela exibiu um grafo planar sem triângulos com 166 vértices e número cromático restrito estritamente maior que 3. Gutner usa uma construção mais simples.

Teorema 3.7 (Gutner [15])

Existe um grafo planar G sem triângulos, de ordem 164, com $\text{ch}(G) > 3$.

Demonstração

Inicialmente, definimos o grafo G_i com listas de cores permitidas para

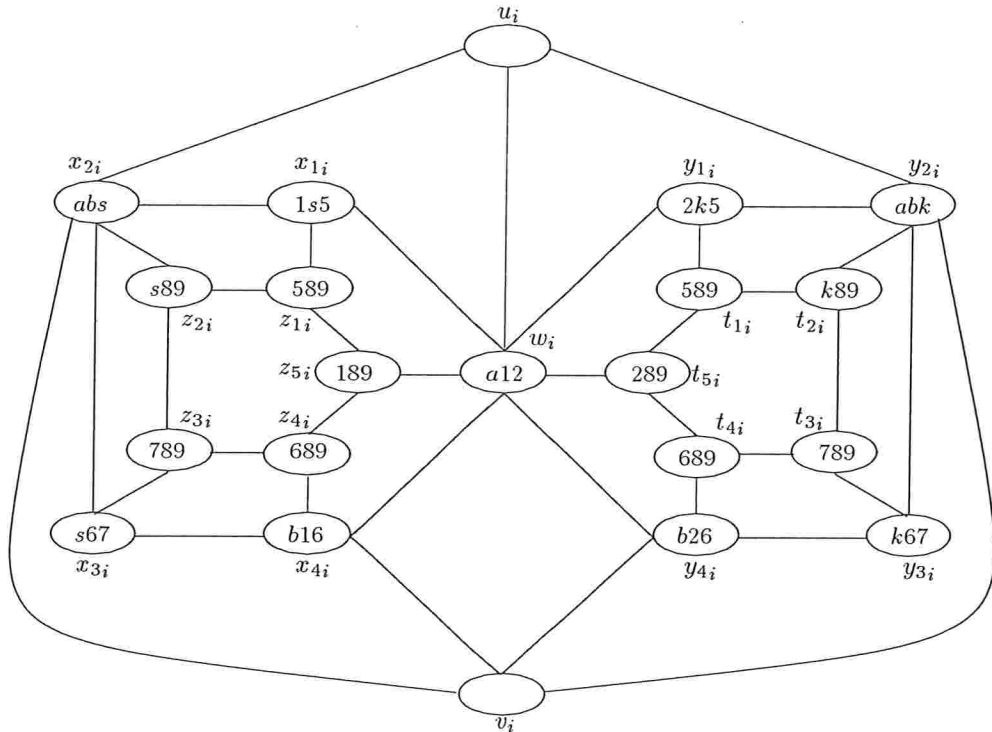


Figura 3.4: O grafo G_i com listas de cores permitidas para todos os vértices exceto u_i e v_i . As cores estão indicadas dentro das elipses que representam os vértices.

todos os vértices exceto u_i e v_i (figura 3.4). Mostramos em seguida o seguinte fato relativo a figura 3.4:

se c é uma atribuição de cores aos vértices u_i e v_i com $c(u_i) = a$, $c(v_i) = b$ e $a \neq b$, então c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas de cores definidas na 3.4. (3.2)

Como $c(u_i) = a$ e $c(v_i) = b$, os vértices x_{2i} e y_{2i} necessariamente devem ser coloridos com s e k respectivamente. O vértice w_i pode ser colorido com 1 ou 2. Se $c(w_i) = 1$, então os vértices x_{1i} e x_{4i} necessariamente devem ser coloridos com 5 e 6 respectivamente. Logo, a única cor disponível na lista de x_{3i} é 7. Portanto, para estender a coloração c a uma coloração de G_i que respeita as listas de cores definidas na figura 3.4 precisamos colorir o circuito $z_{1i}z_{2i}z_{3i}z_{4i}z_{5i}z_{1i}$ com as cores do conjunto $\{8, 9\}$, o que é impossível.

Se $c(w_i) = 2$ analogamente obtemos que c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas definidas como na figura 3.4. Assim, a afirmação (3.2) de fato vale.

Em seguida explicamos a construção do grafo G . Tomamos a união disjunta de grafos G_i , $1 \leq i \leq 9$. Identificamos todos os vértices u_1, u_2, \dots, u_9 num vértice só, denotado por u , assim como todos os vértices v_1, v_2, \dots, v_9 num vértice denotado por v . Para todo $1 \leq i \leq 9$ identificamos os vértices y_{2i} e $x_{2(i+1)}$ (com os índices tomados módulo 9). O grafo obtido denotamos por G . O grafo G é planar sem triângulos e $|G| = 19 \cdot 9 + 2 - 9 = 164$. Em seguida mostramos que $\text{ch}(G) > 3$. Definimos as listas $\mathcal{L}(u) := \{10, 11, 12\}$, $\mathcal{L}(v) := \{13, 14, 15\}$ e uma ordenação dos elementos de $\mathcal{L}(u) \times \mathcal{L}(v)$:

$$(p_i)_{i=1}^9 := ((10, 13), (10, 14), (10, 15), (11, 15), (11, 13), (11, 14), (12, 14), (12, 15), (12, 13)).$$

Para todo i , $1 \leq i \leq 9$, denotamos $(a, b) := p_i$ e $(e, d) := p_{i+1}$ (com os índices tomados módulo 9) e definimos listas das cores para todos os vértices de G_i exceto u_i e v_i como na figura 3.4. Ainda, na construção de G identificamos os vértices y_{2i} e $x_{2(i+1)}$, e portanto escolhemos a cor k em lista de y_{2i} de modo que $\{a, b, k\} = \{a, b, e, d\}$, isto é, de modo que a lista do vértice y_{2i} seja $\{a, b, e, d\}$. Note que o tamanho de conjunto $\{a, b, e, d\}$ é 3 pois para todo $1 \leq i \leq 9$, p_i e p_{i+1} (com os índices tomados módulo 9) têm exatamente um vértice em comum.

Seja c uma coloração de u e v tal que $c(u) \in \mathcal{L}(u)$ e $c(v) \in \mathcal{L}(v)$. Denotamos $a := c(u)$ e $b := c(v)$. Claro que $(a, b) = p_i$ para algum i . Então, a afirmação (3.2) implica que c não pode ser estendida a uma coloração de G_i que respeita as listas de cores permitidas dos vértices de G_i . Logo, c não pode ser estendida a coloração de G que respeita as listas de cores dos vértices de G . \square

Um último fato sobre grafos planares, cuja prova apresentamos na seção 4.5, é que todo grafo planar G sem circuitos ímpares satisfaz $\text{ch}(G) \leq 3$.

Capítulo 4

Coloração restrita de digrafos

Certos fatos sobre coloração de grafos ficam mais fáceis de expor se adotarmos uma orientação do grafo. Por isso, tratamos neste capítulo da coloração restrita de digrafos. Inicialmente, damos as definições necessárias envolvendo digrafos. A seguir tratamos de coloração restrita de digrafos cujos subdigrafos induzidos têm núcleos. Prosseguindo, damos uma relação interessante entre coloração e polinômios de digrafos devido a Alon e Tarsi [3] e damos uma aplicação deste resultado.

4.1 Preliminares

Um *digrafo* D é um par de conjuntos finitos (V_D, E_D) , com E_D um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V_D tal que se $(u, v) \in E_D$, então $(v, u) \notin E_D$. (Em geral, essa última condição não faz parte da definição de digrafo, mas ela é muito conveniente no presente contexto.) Os elementos de E_D são chamados *arcos*. Se $\alpha = (u, v)$ é um arco de um digrafo, dizemos que α tem *início* u e *término* v . Também dizemos que u e v são os extremos de α ou que u e v são *adjacentes* ou *vizinhos*. Para qualquer conjunto U de vértices, $\Gamma_D^+(U)$ é o conjunto de todos os vértices v em $V_D \setminus U$ tais que existe um arco com início em U e término v . $\Gamma_D^-(U)$ é o conjunto de todos os vértices v em $V_D \setminus U$ tais que existe um arco com início v e término em U . Definimos $\Gamma_D(U) := \Gamma_D^+(U) \cup \Gamma_D^-(U)$.

O *grau de saída* de um vértice v num digrafo D é o número de arcos em D com início v e o denotamos por $d_D^+(v)$. O *grau de entrada* de v é o número de arcos com término v e será denotado por $d_D^-(v)$. É claro que $d_D^+(v) = |\Gamma_D^+(v)|$ e $d_D^-(v) = |\Gamma_D^-(v)|$.

O *grafo base* de um digrafo D é o grafo G obtido substituindo-se cada arco (u, v) por uma aresta $\{u, v\}$. Uma *orientação* de um grafo G é todo digrafo cujo grafo base seja G .

Uma \mathcal{L} -coloração de um digrafo é qualquer \mathcal{L} -coloração de seu grafo base.

A ordem, o tamanho, o número cromático e o número cromático restrito de um digrafo são os parâmetros correspondentes do seu grafo base. Um conjunto de vértices é independente em D se for independente no seu grafo base.

Um caminho orientado é um digrafo P com $V_P = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ não vazio e os v_i todos distintos e $E_P = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$. Dizemos que P é caminho de v_1 até v_k . Podemos representar um tal caminho por $v_1 v_2 \dots v_k$. Para $1 \leq i < j \leq k$ denotamos por $v_i P v_j$ o caminho $v_i v_{i+1} \dots v_j$. Se P é subdigrafo de um digrafo D , dizemos que P é caminho em D . Se $k \geq 3$, então o digrafo $(V_P, E_P \cup \{(v_k, v_1)\})$ é chamado de circuito orientado. Por $P + (v_k, v_{k+1})$ denotamos o digrafo $(V_P \cup \{v_{k+1}\}, E_P \cup \{(v_k, v_{k+1})\})$. Um ciclo orientado é uma união de circuitos orientados disjuntos nas arestas. Um digrafo que não contém nenhum circuito orientado é chamado de acíclico. Um caminho orientado P é par (resp. ímpar) se $\|P\|$ é par (resp. ímpar). Analogamente definimos um circuito orientado par e circuito orientado ímpar.

Um digrafo é fortemente conexo se para cada par u, v de vértices distintos existe um caminho orientado de u até v . Um componente forte de um digrafo D é um subdigrafo fortemente conexo maximal. Claro, cada vértice de D pertence a um e um só componente forte.

4.2 Coloração restrita e núcleo de digrafo

Um núcleo (kernel) de um digrafo D é um conjunto independente de vértices U tal que para todo vértice v em $V_D \setminus U$, existe um arco da forma (v, u) com u em U . O teorema seguinte dá uma condição suficiente para que um digrafo tenha um núcleo.

Teorema 4.1 (Richardson [22])

Todo digrafo sem circuitos orientados ímpares tem um núcleo.

Demonstração

A demonstração a seguir é conforme [5, p. 311]. A prova é por indução na ordem do digrafo. Se $|D| = 1$, a afirmação é satisfeita trivialmente. Seja $|D| > 1$. Seja D_1 um componente forte de D tal que $\Gamma_D^+(V_{D_1}) = \emptyset$. Denotamos $V_1 := V_{D_1}$.

Observe que $\Gamma_D(V_1) = \Gamma_D^-(V_1)$ se $|V_1| = 1$. Portanto, se U é núcleo de $D - V_1 - \Gamma_D(V_1)$ (que existe por hipótese de indução), $U \cup V_1$ é núcleo de D . Suponhamos portanto que $|V_1| > 1$.

Fixamos um vértice u_0 de V_1 . Se v é um vértice de V_1 distinto de u_0 então todo caminho de u_0 até v é caminho em D_1 , isto pela definição de D_1 . Ainda, todos os caminhos orientados de u_0 até v são de mesma paridade: suponha que P_0 e P_1 são caminhos de u_0 até v de paridades distintas. Se P_2 é um caminho de v até u_0 , então $P_0 \cup P_2$ ou $P_1 \cup P_2$ é um ciclo ímpar e portanto contém um circuito ímpar, contradição.

Seja W o conjunto de todos os vértices v em V_1 tais que todos os caminhos de u_0 até v são pares. Por hipótese de indução o grafo $D - W - \Gamma_D(W)$ tem um núcleo U . Mostramos em seguida que $U \cup W$ é núcleo de D . Inicialmente mostramos que

$$W \text{ é independente.} \quad (4.1)$$

Sejam v e z vértices em W e suponha que $(v, z) \in E_D$. Se P é um caminho de u_0 até v , então P é par. Se P não contém z então $P + (v, z)$ é caminho ímpar de u_0 até z , mas isto contradiz o fato de que z pertence a W . Se P contém z então, $u_0 P z$ é par e portanto $z P v$ é par. Logo, $z P v + (v, z)$ é um circuito ímpar contradizendo a hipótese de que D não contém circuitos orientados ímpares.

A seguir mostramos que

$$\Gamma_D(W) = \Gamma_D^-(W). \quad (4.2)$$

É claro que $\Gamma_D^-(W) \subseteq \Gamma_D(W)$. Resta mostrar que $\Gamma_D^+(W) \subseteq \Gamma_D^-(W)$. Seja z um vértice em $\Gamma_D^+(W)$. Mostramos que z pertence a $\Gamma_D^-(W)$. Como $\Gamma_D^+(V_1) = \emptyset$, temos $z \in V_1$. Seja (z, t) arco de D . Mostramos que t pertence a W . Se P é um caminho de u_0 até z , P é ímpar pois $z \notin W$. Se P não contém t , então $P + (z, t)$ é caminho par de u_0 até t e logo, t pertence a W . Se P contém t então, $u_0 P t$ e $t P z$ são de paridades distintas. Supondo $t P z$ par está claro que $t P z + (z, t)$ é circuito ímpar o que contradiz a hipótese. Portanto, $t P z$ é ímpar. Logo, $u_0 P t$ é par, ou seja, t pertence a W . De fato, vale (4.2).

As afirmações (4.1) e (4.2) implicam que W é núcleo de $D[W \cup \Gamma_D(W)]$. Ainda, $U \cup W$ é independente pois $U \cap \Gamma_D(W) = \emptyset$. Segue que $U \cup W$ é núcleo de D . \square

Como corolário do teorema 4.1, temos que todo digrafo acíclico tem um núcleo.

O lema seguinte, que Alon [1] atribui a Bondy, Boppana e Siegel, dá uma limitação superior para o número cromático restrito de digrafos cujos subdigrafos induzidos têm núcleos. Usamos este resultado também para a prova do teorema 5.7 de Galvin.

Lema 4.2

Seja D um digrafo tal que todo subdigrafo induzido de D tem um núcleo. Se \mathcal{L} é uma atribuição de listas de cores aos vértices de D com $|\mathcal{L}(v)| \geq d_D^+(v) + 1$ para todo vértice v de D , então D admite uma \mathcal{L} -coloração.

Demonstração

A prova é por indução em $|D|$. Para $|D| = 1$ a afirmação é satisfeita trivialmente. Agora suponha $|D| > 1$. Sejam c uma cor em $\bigcup_{v \in V_D} \mathcal{L}(v)$ e D_1 o subdigrafo de D induzido pelo conjunto de vértices que contêm c na sua lista. Por hipótese, D_1 tem um núcleo U . Atribuímos cor c a todos os vértices de U e definimos $\mathcal{L}'(v) := \mathcal{L}(v) \setminus \{c\}$ para todo vértice v em $V_D \setminus U$. Para todo v em $V_{D_1} \setminus U$ existe um arco com início v e término em U e logo, $d_{D-U}^+(v) + 1 \leq d_D^+(v) \leq |\mathcal{L}(v)| - 1 = |\mathcal{L}'(v)|$. Se $v \notin V_{D_1}$ então, $d_{D-U}^+(v) + 1 \leq d_D^+(v) + 1 \leq |\mathcal{L}(v)| = |\mathcal{L}'(v)|$. Por hipótese de indução então $D - U$ admite uma \mathcal{L}' -coloração. Mas listas \mathcal{L}' não contêm cor c e portanto, a coloração de vértices de U com cor c pode ser estendida a uma coloração restrita de D respeitando as listas $\mathcal{L}(v)$ dadas. \square

Claro que se D é um digrafo sem circuitos orientados ímpares, então nenhum subdigrafo de D irá conter circuitos orientados ímpares. Portanto, como corolário do teorema 4.1 e do lema 4.2 temos

Corolário 4.3

Se D é um digrafo sem circuitos orientados ímpares, então $\text{ch}(D) \leq \max_{v \in V_D} d_D^+(v) + 1$.

Observamos que o corolário 4.3 é uma generalização do teorema 1.4. Isto pois se v_1, v_2, \dots, v_n é uma enumeração smallest-last de um grafo G de ordem n (definida na seção 1.5), então a orientação D de G definida com $(v_i, v_j) \in E_D$ se e só se $i > j$ é acíclica. Ainda, o grau de saída de todo vértice em D é estritamente menor que $\text{col}(G)$.

Observamos que a demonstração do teorema 4.1 fornece um algoritmo polinomial que dado um digrafo D sem circuitos orientados ímpares encontra um núcleo de D . Portanto, a demonstração do lema 4.2 fornece um algoritmo polinomial de \mathcal{L} -coloração: dados um digrafo D sem circuitos orientados ímpares e uma atribuição \mathcal{L} de listas de cores de tamanho $\max_{v \in V_D} d_D^+(v) + 1$ aos vértices de D , o algoritmo encontra uma \mathcal{L} -coloração.

4.3 O polinômio de um digrafo

Usando técnicas algébricas, Alon e Tarsi [3] obtiveram uma relação interessante entre coloração e polinômios de digrafos, que em vários casos

fornece informações úteis sobre o número cromático restrito. Nesta seção definimos o polinômio de um digrafo e damos algumas propriedades deste polinômio.

O *polinômio* de um digrafo D é o polinômio com variáveis $\{x_v : v \in V_D\}$ definido como

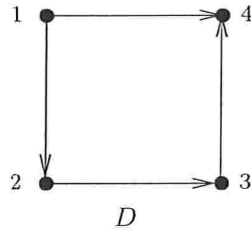
$$f_D := \prod_{(u,v) \in E_D} (x_u - x_v). \quad (4.3)$$

Daqui por diante, estamos supondo que o conjunto dos vértices do digrafo D é $\{1, 2, \dots, n\}$. A seguinte observação óbvia mostra que o polinômio de digrafo está intimamente conectado com a coloração restrita.

Observação 4.4

Seja D um digrafo com vértices $1, 2, \dots, n$ e \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices de D . Então, D admite uma \mathcal{L} -coloração \iff existe $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{L}(1) \times \mathcal{L}(2) \times \dots \times \mathcal{L}(n)$ tal que $f_D(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq 0$.

Qualquer polinômio pode ser escrito como uma combinação linear de monômios. O coeficiente do monômio $x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \dots x_n^{\rho_n}$ na representação de f_D como combinação linear de monômios denotamos por $[x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \dots x_n^{\rho_n}] f_D$. Convém observar que $\rho_1 + \dots + \rho_n = \|D\|$ para cada monômio $x_1^{\rho_1} \dots x_n^{\rho_n}$, pois o produto 4.3 tem $\|D\|$ termos. Mais formalmente: se $[x_1^{\rho_1} \dots x_n^{\rho_n}] f_D \neq 0$, então $\rho_1 + \dots + \rho_n = \|D\|$ (figura 4.1).



$$\begin{aligned} f_D &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1) \\ &= -2x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2^2x_3 - x_1^2x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 - x_1^2x_2x_3^2 \\ &\quad + x_1x_2^2x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_2^2x_3x_4 + x_1x_2^2x_4 - x_2x_3^2x_4 \\ &\quad + x_1x_2x_4^2 - x_2^2x_4^2 - x_1x_3x_4^2 + x_2x_3x_4^2 + x_1^2x_2x_3 \end{aligned}$$

Figura 4.1: O polinômio de um digrafo.

Para aplicar o resultado de Alon e Tarsi, que apresentamos na seção 4.4, é conveniente encontrar interpretações combinatórias de $[x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \dots x_n^{\rho_n}] f_D$. Damos em seguida duas tais interpretações. O teorema seguinte afirma que em todo digrafo D os números $[x_1^{\rho_1} \dots x_n^{\rho_n}] f_D$ podem ser expressos em termos das re-orientações de D . Se $F \subseteq E_D$, definimos $F^R := \{(u, v) : (v, u) \in F\}$. Chamamos o digrafo $D' = (V_D, (E_D \setminus F) \cup F^R)$ de uma *re-orientação* de

D . Claramente então, para todo digrafo D , existem $2^{\|D\|}$ re-orientações. O sinal de uma re-orientação $D' = (V_D, (E_D \setminus F) \cup F^R)$ é $+1$ (resp. -1) se $|F|$ é par (resp. ímpar). Denotamos por $\text{sg}(D')$ o sinal da re-orientação D' . As re-orientações de D cujo sinal é $+1$ (resp. -1) chamamos de *pares* (resp. *ímpares*). Claro que se D' é par, então $f_{D'} = f_D$ e se D' é ímpar, então $f_{D'} = -f_D$.

Dados um digrafo D e uma função $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$, uma re-orientação D' de D satisfaz ρ se $d_{D'}^+(v) = \rho(v)$, para todo vértice v de D . Por $\mathcal{E}_D(\rho)$ (resp. $\mathcal{O}_D(\rho)$) denotamos o conjunto de todas as re-orientações pares (resp. ímpares) de D que satisfazem ρ . Definimos

$$\text{dif}_D(\rho) := |\mathcal{E}_D(\rho)| - |\mathcal{O}_D(\rho)|.$$

Para todo digrafo D definimos o monômio $\omega(D) := x_1^{d_D^+(1)} \cdots x_n^{d_D^+(n)}$.

Lema 4.5

Seja D um digrafo com vértices $1, 2, \dots, n$. Então para toda função $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$

$$[x_1^{\rho(1)} \cdots x_n^{\rho(n)}] f_D = \text{dif}_D(\rho).$$

Demonstração

Inicialmente mostramos que

$$f_D = \sum_{D'} \text{sg}(D') \omega(D') \quad (4.4)$$

onde a soma é sobre todas as re-orientações D' de D .

Como definimos, $f_D = \prod_{(i,j) \in E_D} (x_i - x_j)$. A escolha de x_i ou x_j de cada fator $(x_i - x_j)$ corresponde à escolha do arco (i, j) de D ou seu arco invertido (j, i) , respectivamente. Logo, cada monômio na representação de f_D como combinação linear de monômios corresponde a $\text{sg}(D') \omega(D')$ para alguma re-orientação D' de D (figura 4.2). De fato, vale (4.4).

Seja $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$ uma função fixa. Para toda re-orientação D' de D que satisfaz ρ , $\omega(D') = x_1^{\rho(1)} \cdots x_n^{\rho(n)}$. Logo, se Ω é o conjunto de todas as re-orientações D' de D que satisfazem ρ temos

$$\sum_{D' \in \Omega} \text{sg}(D') \omega(D') = \text{dif}_D(\rho) x_1^{\rho(1)} \cdots x_n^{\rho(n)}. \quad (4.5)$$

(4.4) e (4.5) implicam em $[x_1^{\rho(1)} \cdots x_n^{\rho(n)}] f_D = \text{dif}_D(\rho)$. \square

O teorema seguinte afirma que para todo digrafo D , $[x_1^{d_D^+(1)} \cdots x_n^{d_D^+(n)}] f_D$ pode ser expresso em termos dos subconjuntos eulerianos de E_D .

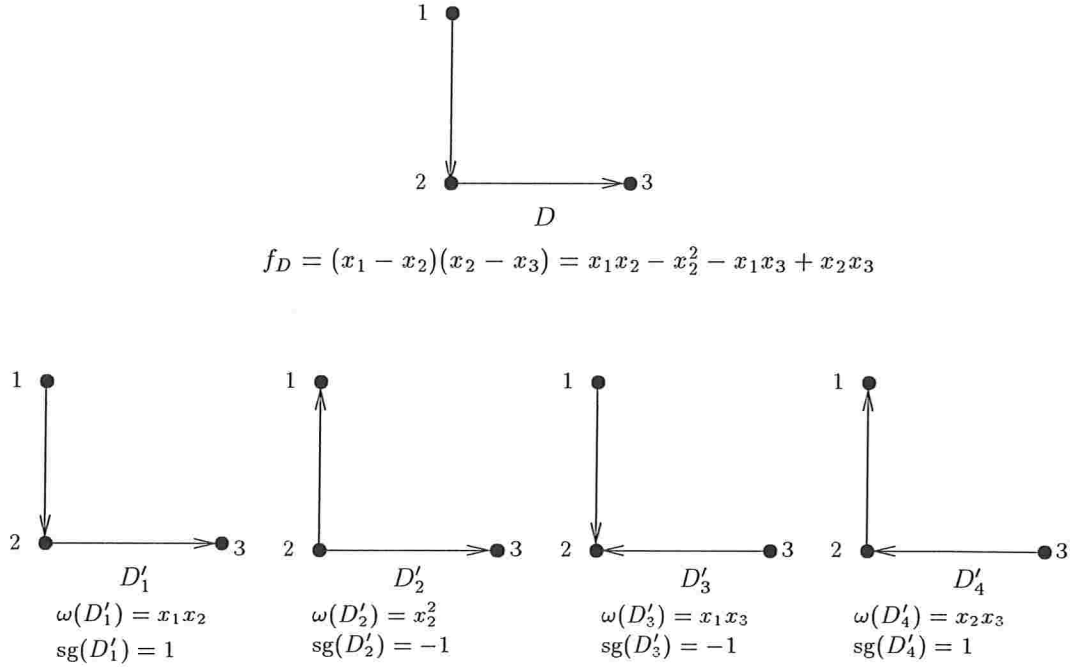


Figura 4.2: Cada monômio na representação de f_D como combinação linear de monômios corresponde a $\text{sg}(D')\omega(D')$ para alguma re-orientação D' de D .

Um digrafo D é *euleriano* se, e só se, $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ para todo vértice v em V_D . Como se sabe [4], um tal digrafo D contém um ciclo orientado P com $E_P = E_D$. Se D é um digrafo, um subconjunto E de E_D é *euleriano* se, e só se, (V_D, E) é um digrafo euleriano. Definimos os números

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(D) &:= |\{E \subseteq E_D : E \text{ é euleriano e } |E| \text{ é par}\}| \\ \varepsilon_1(D) &:= |\{E \subseteq E_D : E \text{ é euleriano e } |E| \text{ é ímpar}\}|. \end{aligned}$$

Note que para todo digrafo D temos $\varepsilon_0(D) \neq 0$, pois o subdigrafo (V_D, \emptyset) é euleriano.

Lema 4.6

Se D é um digrafo com vértices $1, 2, \dots, n$, então

$$[x_1^{d_D^+(1)} \dots x_n^{d_D^+(n)}]f_D = \varepsilon_0(D) - \varepsilon_1(D).$$

Demonstração

Seja D' uma re-orientação qualquer de D que satisfaz d_D^+ . Se $D' =$

$(V_D, (E_D \setminus F) \cup F^R)$ mostramos que

$$\text{o subconjunto } F \text{ de } E_D \text{ é euleriano.} \quad (4.6)$$

Definimos os digrafos $D_1 := (V_D, F)$ e $D_2 := (V_D, F^R)$. Como $d_D^+(v) = d_{D_1}^+(v)$ para todo $v \in V_D$ temos que

$$d_{D_1}^+(v) = d_{D_2}^+(v) \text{ para todo } v \in V_D.$$

Claro, $d_{D_2}^+(v) = d_{D_1}^-(v)$ para todo $v \in V_D$, e portanto a equação anterior implica em

$$d_{D_1}^+(v) = d_{D_1}^-(v) \text{ para todo } v \in V_D.$$

Logo, D_1 é um digrafo euleriano, ou seja, F é um conjunto euleriano de arcos de D .

A afirmação (4.6) implica que $\varphi : D' \rightarrow F$ é uma bijeção entre as re-orientações de D que satisfazem $\rho := d_D^+$ e os subconjuntos eulerianos de arcos de D . Claro, D' é par (resp. ímpar) se, e só se, $|F|$ é par (resp. ímpar). Logo, φ é uma bijeção que mapeia as re-orientações pares (resp. ímpares) de D que satisfazem ρ nos subconjuntos eulerianos de E_D com número par (resp. ímpar) de arcos. Logo, $|\mathcal{E}_D(\rho)| = \varepsilon_0(D)$ e $|\mathcal{O}_D(\rho)| = \varepsilon_1(D)$. Portanto, $\text{dif}_D(\rho) = \varepsilon_0(D) - \varepsilon_1(D)$ e a afirmação segue do lema 4.5. \square

O lema seguinte mostra como são os polinômios de torneios. Um *torneio* é uma orientação de um grafo completo. O polinômio de um torneio será relevante no estudo do número aresta-cromático restrito.

Precisamos de algumas definições. Por \mathcal{S}_n denotamos o grupo das permutações de $J_n := \{1, 2, \dots, n\}$ sob a operação de composição. Uma *transposição* τ de J_n é uma permutação de J_n tal que existem $i, j \in J_n$, $i \neq j$ e $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k$ se $k \neq i, j$. Conforme [20], toda permutação de J_n pode ser expressa como uma composição de transposições de J_n . Se $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_l$ onde τ_i , para todo i , e τ'_j , para todo j , são transposições, então k e l são de mesma paridade, ou seja, $(-1)^k = (-1)^l$. Se σ é uma permutação de J_n e $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ onde para todo i , τ_i é uma transposição, definimos o *signal* de σ , $\text{sg}(\sigma) := (-1)^k$.

Lema 4.7

Se T é um torneio com vértices $1, 2, \dots, n$, então

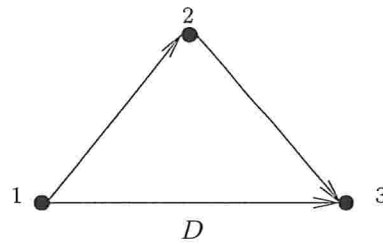
$$f_T = \pm \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sg}(\sigma) x_1^{\sigma(1)-1} x_2^{\sigma(2)-1} \dots x_n^{\sigma(n)-1}.$$

Demonstração

Seja T' a re-orientação de T com $(i, j) \in E_{T'}$ se, e só se, $i < j$. Então,

$$f_{T'} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \text{ e } f_T = \pm f_{T'}.$$

Usando indução em n mostramos que $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ é o seguinte determinante¹ (exemplo para $n = 3$, figura 4.3).



$$\begin{aligned} f_T &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \end{vmatrix} \\ &= x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 - x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3. \end{aligned}$$

Figura 4.3: O polinômio de um torneio sobre vértices 1, 2, 3.

$$V_n := \begin{vmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Se $n = 2$, então $\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_i - x_j) = x_1 - x_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}$.

Seja $n > 2$. Para $j = 2, 3, \dots, n$, subtraímos da coluna j a coluna $j - 1$ multiplicada por x_n . Como se sabe, isso não altera o valor de determinante. Temos então,

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_n x_1 & \dots & x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} \end{vmatrix}.$$

¹Determinante de Vandermonde.

Colocando em evidência os termos adequados deste determinante temos

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \end{vmatrix}.$$

Se os elementos de uma linha de uma matriz forem multiplicados por uma constante λ , então o determinante fica multiplicado por λ . Portanto,

$$\begin{aligned} V_n &= (x_{n-1} - x_n)(x_{n-2} - x_n) \dots (x_1 - x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_{n-1} - x_n)(x_{n-2} - x_n) \dots (x_1 - x_n) V_{n-1}. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, $V_{n-1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_i - x_j)$ e portanto,

$$V_n = (x_{n-1} - x_n)(x_{n-2} - x_n) \dots (x_1 - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Mas, o determinante V_n é, por definição, $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} -\text{sg}(\sigma) x_1^{\sigma(1)-1} x_2^{\sigma(2)-1} \dots x_n^{\sigma(n)-1}$. \square

Do lema 4.7 temos que se T é um torneio, então os coeficientes dos monômios na representação de f_T como combinação linear de monômios são todos ou 1 ou -1 .

4.4 O teorema de Alon e Tarsi

A seguir damos o resultado de Alon e Tarsi e uma aplicação deste resultado.

Teorema 4.8 (Alon e Tarsi [3])

Seja D um digrafo com vértices $1, 2, \dots, n$ e $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ números inteiros não-negativos. Se $[x_1^{\rho_1} \dots x_n^{\rho_n}] f_D \neq 0$ e \mathcal{L} é uma atribuição de listas de cores aos vértices de D com $|\mathcal{L}(i)| \geq \rho_i + 1$ para todo i , então existe uma \mathcal{L} -coloração de D .

O lema a seguir é necessário para a prova de teorema 4.8. Seja $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ o conjunto de todos os polinômios com variáveis $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ e coeficientes em \mathbb{Z} .²

² $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel sob as operações de multiplicação e soma ([20]).

Lema 4.9

Seja $p = p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um polinômio em $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Suponha que o grau de p , como polinômio em x_i , é no máximo d_i para todo i e seja S_i um subconjunto de \mathbb{Z} com $d_i + 1$ números distintos. Se $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ para toda n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) em $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, então $p \equiv 0$.

Demonstração

A prova do lema é por indução em n . Para $n = 1$, a afirmação segue do seguinte fato:

Um polinômio não-nulo de grau d em uma variável tem no máximo d raízes distintas.

Seja $n > 1$. Se $d_n = 0$, então por hipótese da indução $p \equiv 0$.

Suponhamos que $d_n \geq 1$. Escrevemos $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ como polinômio em x_n , isto é,

$$p = \sum_{i=0}^{d_n} p_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n^i.$$

Fixamos um elemento (s_1, \dots, s_{n-1}) de $S_1 \times \dots \times S_{n-1}$. Como $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ para toda n -upla (x_1, \dots, x_n) em $S_1 \times \dots \times S_n$,

$$p(s_1, \dots, s_{n-1}, x_n) = \sum_{i=0}^{d_n} p_i(s_1, \dots, s_{n-1})x_n^i = 0$$

para todo x_n em S_n . Como $d_n \geq 1$ temos que $|S_n| \geq 2$ e portanto a afirmação acima implica em $\sum_{i=0}^{d_n} p_i(s_1, \dots, s_{n-1})x_n^i \equiv 0$. Logo, $p_i(s_1, \dots, s_{n-1}) = 0$ para todo i , $0 \leq i \leq d_n$. Então,

$$p_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \text{ para todo } i, \text{ e } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in S_1 \times \dots \times S_{n-1}.$$

Ainda, para todo i , o grau de p_i como polinômio em x_j é no máximo d_j para todo j , $1 \leq j \leq n-1$. Logo, por hipótese da indução, $p_i \equiv 0$ para todo i , $0 \leq i \leq d_n$, o que implica em $p \equiv 0$. \square

Demonstração do teorema 4.8

Seja \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices de D com $|\mathcal{L}(i)| = \rho_i + 1$ para todo i . Suponhamos que D não admite uma \mathcal{L} -coloração, ou seja, para cada atribuição c de cores aos vértices de D com $c(i) \in \mathcal{L}(i)$ para todo i , existe uma aresta ij de D com $c(i) = c(j)$. Portanto,

$$f_D(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(1) \times \dots \times \mathcal{L}(n). \quad (4.7)$$

Definimos o polinômio $Q_i(x_i)$ para todo i , $1 \leq i \leq n$, como

$$Q_i(x_i) := \prod_{l \in \mathcal{L}(i)} (x_i - l).$$

Para todo l em $\mathcal{L}(i)$, $Q_i(l) = 0$. Consideramos portanto a identidade

$$x_i^{\rho_i+1} = \sum_{j=0}^{\rho_i} q_{ij} x_i^j \quad (4.8)$$

com $q_{ij} = -[x_i^j]Q_i$.

Seja $\overline{f_D}$ o polinômio obtido pela representação de f_D como combinação linear de monômios, substituindo-se repetidamente cada ocorrência de $x_i^{d_i}$, para todo i onde $d_i > \rho_i$, por uma combinação linear de x_i 's com potência menor que d_i , para tanto usamos as equações (4.8). Em seguida, mostramos que

$$\overline{f_D} \equiv 0.$$

As equações em (4.8) são verdadeiras para todo x_i em $\mathcal{L}(i)$, e portanto $\overline{f_D}(x_1, \dots, x_n) = f_D(x_1, \dots, x_n)$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(1) \times \dots \times \mathcal{L}(n)$. Logo, (4.7) implica em

$$\overline{f_D}(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(1) \times \dots \times \mathcal{L}(n).$$

Ainda, para todo i , o grau de x_i em $\overline{f_D}$ é no máximo ρ_i . Segue do lema 4.9 que $\overline{f_D} \equiv 0$.

Mostramos em seguida que

$$[x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] f_D = [x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] \overline{f_D}.$$

No monômio $x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}$ de f_D o grau de todo x_i é ρ_i , logo as equações em (4.8) não o afetam nas repetidas substituições para obter $\overline{f_D}$. Como cada aplicação de (4.8) diminui estritamente o grau de x_i , as repetidas substituições para obter $\overline{f_D}$ de f_D geram monômios $x_1^{\tau_1} \cdots x_n^{\tau_n}$ tais que $\tau_1 + \dots + \tau_n < \|D\|$, enquanto $\rho_1 + \dots + \rho_n = \|D\|$. Então, em $\overline{f_D}$ não teremos nenhum novo múltiplo escalar de $x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}$. De fato, $[x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] f_D = [x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] \overline{f_D}$.

Como $[x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] f_D = [x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] \overline{f_D}$ e por hipótese $[x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] f_D \neq 0$ temos que $[x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n}] \overline{f_D} \neq 0$. Isto é uma contradição com $\overline{f_D} \equiv 0$. Logo, a hipótese de que D não admite uma \mathcal{L} -coloração leva a uma contradição. \square

Observamos que os polinômios Q_i definidos na prova do teorema 4.8 têm uma interessante propriedade algébrica: se D é um digrafo com vértices

$1, 2, \dots, n$ e \mathcal{L} uma atribuição de listas de cores aos vértices de D , então D não admite uma \mathcal{L} -coloração se, e só se, f_D pertence ao ideal do anel $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ gerado pelos polinômios Q_i . Para as definições relativas a anel e ideal citamos [20].

Como corolário do teorema 4.8 e lema 4.5 temos:

Corolário 4.10

Seja D um digrafo com vértices $1, 2, \dots, n$ e $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$. Se $\text{dif}_D(\rho) \neq 0$, então $\text{ch}(D) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \rho(i) + 1$.

Como corolário do teorema 4.8 e lema 4.6 temos:

Corolário 4.11

Se um digrafo D satisfaz $\varepsilon_0(D) \neq \varepsilon_1(D)$ então $\text{ch}(D) \leq \max_{v \in V_D} d_D^+(v) + 1$.

Pelo corolário 4.11, se D não contém circuitos orientados ímpares então $\text{ch}(D) \leq \max_{v \in V_D} d_D^+(v) + 1$, o que é corolário 4.3. Notamos que existem digrafos que contêm circuitos orientados ímpares e ainda satisfazem $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$ (exemplo figura 4.4). Portanto, $\varepsilon_0(D) \neq \varepsilon_1(D)$ é condição necessária, mas não suficiente, para que D não contenha circuitos orientados ímpares.

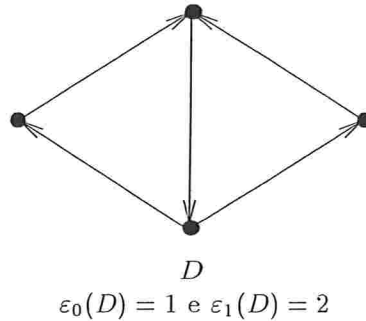


Figura 4.4: D contém circuitos orientados ímpares e satisfaz $\varepsilon_0(D) \neq \varepsilon_1(D)$.

4.5 Grafos bipartidos planares

Uma aplicação do teorema de Alon e Tarsi 4.8 está no problema, sugerido por Erdős, Rubin e Taylor [11], da determinação de número cromático restrito de grafos planares sem circuitos ímpares.

Teorema 4.12 (Alon e Tarsi [3])

Todo grafo bipartido planar G satisfaz $\text{ch}(G) \leq 3$.

Demonstração

Primeiramente mostramos o seguinte lema: para todo grafo bipartido G ,

$$\text{ch}(G) \leq \lceil s(G) \rceil + 1, \text{ com } s(G) := \max_{H \subseteq G} \frac{\|H\|}{|H|}. \quad (4.9)$$

Seja $k := \lceil s(G) \rceil$. Definimos o grafo K com bipartição (A, B) tal que $A := E_G$, B é união de k cópias mutuamente disjuntas de V_G e $\{\alpha, u\} \in E_K$ se, e só se, u é extremo de α em G , isto é, cada elemento $\alpha = uv$ de A é ligado em K às k cópias de u e às k cópias de v .

Mostramos em seguida que K tem um emparelhamento que satura A . Seja $A' \subseteq A$ e $H := G[A']$. Pela definição de $s(G)$ e k temos

$$\frac{|A'|}{|H|} = \frac{\|H\|}{|H|} \leq s(G) \leq k.$$

Portanto, $|A'| \leq k|H|$. Ainda, se $\alpha \in A'$ então $\{\alpha, u\} \in E_K$ se, e só se, $u \in V_H$. Logo, $|\Gamma_K(A')| = k|H|$. Temos então $|A'| \leq |\Gamma_K(A')|$. O teorema de Hall [10, p. 31] portanto implica que K tem um emparelhamento M que satura A .

Para todo $\{\alpha, u\} \in M$ orientamos a aresta α de G de modo que seu início seja u e denotamos a orientação obtida por D . Pela definição de B , todo vértice de D é início de no máximo k arestas em M e portanto, $d_D^+(v) \leq k$ para todo $v \in V_D$. D não contém circuitos ímpares pois G é bipartido, portanto $\varepsilon_1(D) = 0$ e logo o corolário 4.11 implica em $\text{ch}(D) \leq k + 1$. Logo, $\text{ch}(G) \leq k + 1$, ou seja vale (4.9).

Seja G um grafo bipartido planar. Seja $H \subseteq G$. H não contém circuitos ímpares pois é bipartido e portanto $g(H) \geq 4$. O lema 3.1 implica em $\|H\| \leq 2|H| - 4$. Logo,

$$\frac{\|H\|}{|H|} \leq \frac{2|H| - 4}{|H|} \leq 2.$$

Portanto, $s(G) \leq 2$ e, em virtude de (4.9), $\text{ch}(G) \leq 3$. \square

A desigualdade no teorema 4.12 é justa pois $\text{ch}(K_{2,4}) > 2$ (figura 4.5).

Observamos que existe um algoritmo polinomial que, dado um grafo planar bipartido G , encontra uma orientação D de G com $d_D^+(v) \leq 2$ para todo $v \in V_D$. Conforme observação no último parágrafo da seção 4.2 existe um algoritmo polinomial que dado um grafo planar bipartido G e uma atribuição \mathcal{L} de listas de cores de tamanho 3 aos vértices de G , o algoritmo encontra uma \mathcal{L} -coloração de G .

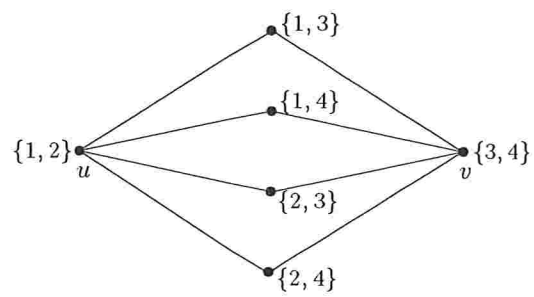


Figura 4.5: $\text{ch}(K_{2,4}) > 2$, pois nenhuma coloração de u e v com cores de suas listas pode ser estendida a uma coloração restrita de G respeitando as listas de cores permitidas.

Capítulo 5

Coloração restrita de arestas

Tratamos neste capítulo da conjectura da coloração restrita de arestas sugerida por Vizing e aparentemente publicada primeiro em artigo de Bollobás e Harris [8].

O *grafo-linha* (*line graph*) de um grafo H , denotado por $L(H)$, é o grafo com $V_{L(H)} := E_H$ e $\alpha_1\alpha_2 \in E_{L(H)}$ se, e só se, α_1 e α_2 são arestas adjacentes em H . Um *grafo-linha* é qualquer grafo da forma $L(H)$ para algum grafo H .

Dado um grafo H e uma atribuição $\mathcal{L} : E_H \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de listas de cores às suas arestas, uma *coloração de arestas que respeita \mathcal{L}* ou *\mathcal{L} -aresta-coloração* de H é uma \mathcal{L} -coloração do grafo-linha $L(H)$. Uma *k -aresta-coloração* (no sentido clássico) de H é uma k -coloração de $L(H)$.

O *número aresta-cromático restrito* (*list chromatic index*) de um grafo H é $\text{ch}'(H) := \text{ch}(L(H))$ e o *número aresta-cromático* de H é $\chi'(H) := \chi(L(H))$.

Segue da definição que para todo grafo H , $\text{ch}'(H) \geq \chi'(H)$.

Conjectura 5.1 (Conjectura da coloração restrita de arestas)

Todo grafo H satisfaz $\text{ch}'(H) = \chi'(H)$.

A igualdade na conjectura 5.1 foi verificada somente para alguns poucos casos. Por exemplo, pode ser facilmente verificado que a conjectura é válida para árvores e grafos com grau máximo menor que 3. Nas seções 5.2 e 5.3 damos duas classes de grafos menos triviais para as quais a conjectura é um teorema. Na seção 5.4 tratamos de limitantes superiores para o número aresta-cromático restrito.

5.1 Caracterização de grafos-linha

A seguinte caracterização de grafos-linha será usada nas seções 5.2 e 5.3. Uma *decomposição em cliques* de um grafo G é uma coleção C_1, C_2, \dots, C_m de cliques de G tal que toda aresta de G pertence a um e apenas um C_i .

Proposição 5.2 (Krausz [19])

Um grafo G sem vértices isolados¹ é um grafo-linha se, e só se, existe uma decomposição em cliques de G tal que todo vértice de G pertence a exatamente dois destes cliques.

Demonstração

(Necessidade) Suponha que G é um grafo-linha. Então, existe um grafo H tal que $G = L(H)$. Seja $V_H = \{1, 2, \dots, n\}$. Para todo vértice i de H , seja C_i o clique em G induzido pelas arestas de H que incidem no vértice i .

Mostramos em seguida que C_1, C_2, \dots, C_n é uma decomposição em cliques de G e que todo vértice de G pertence a exatamente dois destes cliques. Seja $u \in V_G$. Então, u é uma aresta ij de H . Logo, $u \in C_i$ e $u \in C_j$. Pela hipótese, G não contém vértices isolados e portanto toda componente de H tem ordem maior a 2. Segue que $C_i \neq C_j$ e portanto, u pertence a exatamente dois dos cliques C_1, C_2, \dots, C_n . Seja $\alpha \in E_G$. Então, os extremos de α são duas arestas adjacentes de H , com um vértice j em comum. Então, α pertence a C_i se, e só se, $i = j$.

(Suficiência) Suponha que G admite uma decomposição em cliques C_1, C_2, \dots, C_l tal que todo vértice de G pertença a exatamente dois destes cliques. Definimos o grafo H com

$$V_H := \{C_1, C_2, \dots, C_l\} \text{ e } C_i C_j \in E_H \text{ se, e só se, } V_{C_i} \cap V_{C_j} \neq \emptyset.$$

Como C_1, C_2, \dots, C_l é uma decomposição em cliques de G , temos que $0 \leq |V_{C_i} \cap V_{C_j}| \leq 1$ para todo $1 \leq i < j \leq l$. Se $V_{C_i} \cap V_{C_j} \neq \emptyset$, denotamos com u_{ij} o único vértice de G em comum a C_i e C_j . Definimos a função

$$\varphi: E_H \rightarrow V_G \text{ com } \varphi(C_i C_j) = u_{ij}.$$

A função φ é uma bijeção pois todo vértice de G pertence a exatamente dois dos cliques C_1, C_2, \dots, C_l .

Sejam α e β arestas adjacentes em H . Suponhamos que $\alpha = C_1 C_2$ e $\beta = C_1 C_3$. Portanto, $\varphi(\alpha) = u_{12}$ e $\varphi(\beta) = u_{13}$. Como $u_{12}, u_{13} \in V_{C_1}$ e C_1 é completo, segue que $u_{12} u_{13} \in E_{C_1}$, ou seja, $\varphi(\alpha) \varphi(\beta) \in E_G$.

¹Poderíamos admitir vértices isolados se permitíssemos que cada clique do tipo K_1 comparcesse com exatamente duas cópias na decomposição.

Sejam α e β arestas não adjacentes em H . Suponhamos que $\alpha = C_1C_2$ e $\beta = C_3C_4$. Então, $\varphi(\alpha) = u_{12}$ e $\varphi(\beta) = u_{34}$. Suponha que $u_{12}u_{34} \in E_G$. Então $u_{12}u_{34} \in E_{C_j}$, para algum $j \neq 1, 2, 3, 4$ o que contradiz o fato de $u_{12} \notin V_{C_i}$ para $i \neq 1, 2$. Logo, $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \notin E_G$. \square

5.2 Grafos completos de ordem ímpar

Häggkvist e Janssen obtiveram o seguinte resultado, que prova a conjectura 5.1 para grafos completos de ordem ímpar, pois $\chi'(K_n) = n$ para n ímpar.

Teorema 5.3 (Häggkvist e Janssen [16])

Para todo n , $\text{ch}'(K_n) \leq n$.

A prova deste teorema é uma aplicação do corolário 4.10 (Alon e Tarsi) a uma orientação do grafo-linha de K_n . A prova é complexa e depende dos lemas que discutiremos a seguir.

As demonstrações desta seção envolvem torneios transitivos. Um digrafo D é *transitivo* se $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq E_D$ implica em $(u, w) \in E_D$. Em particular, uma re-orientação D' de D é *transitiva* se D' é transitivo.

Um torneio é transitivo se, e só se, ele é acíclico: suponha que D é um torneio transitivo que contém um circuito orientado $v_1v_2 \cdots v_kv_1$. Como D é transitivo, $(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), \dots, (v_1, v_k)$ são arcos de D . Isto é uma contradição com $(v_k, v_1) \in E_D$, uma vez que nossa definição de digrafo não admite arcos anti-paralelos. Suponha agora que D é um torneio acíclico e que (u, v) e (v, w) são arcos de D . Como D é acíclico, $(w, u) \notin E_D$. Como D é torneio, $(u, w) \in E_D$. Logo, D é transitivo.

Proposição 5.4

Seja Θ um conjunto de n números inteiros não-negativos. Então, Θ é o conjunto de graus de saída dos vértices de um torneio transitivo de ordem n se, e só se, $\Theta = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Demonstração

(Suficiência) Seja $\Theta = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Definimos o digrafo T com $V_T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $(v_i, v_j) \in E_T$ se e só se $i > j$. Claro, T é um torneio transitivo. Ainda, $d_T^+(v_i) = i-1$ para todo i , ou seja, Θ é o conjunto de graus de saída dos vértices de T .

(Necessidade) Seja T um torneio transitivo de ordem n . Mostramos que o conjunto de graus de saída dos vértices de T é o conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Suponha que existem vértices distintos de T , u e v , tais que $d_T^+(u) = d_T^+(v)$. T é um torneio e portanto ou $(u, v) \in E_T$ ou $(v, u) \in E_T$. Suponhamos

que $(u, v) \in E_T$. Seja W o conjunto de arcos de T com início v . É claro que $|W| = d_T^+(v)$. Seja (v, w) um arco de W . Então $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq E_T$, e portanto o fato de que T é transitivo implica em $(u, w) \in E_T$. Logo, $d_T^+(u) \geq 1 + |W| = 1 + d_T^+(v)$, contradição. \square

A proposição seguinte mostra que se temos uma decomposição em cliques de um grafo G , então para aplicar o teorema de Alon e Tarsi é suficiente considerar somente as orientações de G que induzem em cada clique um torneio transitivo.

Lema 5.5 ([1])

Se T é um torneio com n vértices então, para qualquer função $\rho : V_T \rightarrow \mathbb{N}$, $\text{dif}_T(\rho) \neq 0$ somente quando $\rho(V_T) = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Demonstração

Suponha que os vértices de T são $1, 2, \dots, n$. Pelo lema 4.7,

$$f_T = \pm \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sg}(\sigma) x_1^{\sigma(1)-1} x_2^{\sigma(2)-1} \dots x_n^{\sigma(n)-1}.$$

De outro lado, pelo lema 4.5,

$$f_T = \sum_{\rho: V_T \rightarrow \mathbb{N}} \text{dif}_T(\rho) x_1^{\rho(1)} x_2^{\rho(2)} \dots x_n^{\rho(n)}.$$

Das duas igualdades anteriores segue que $\text{dif}_T(\rho) \neq 0$ somente quando $\rho(V_T) = \{0, 1, \dots, n-1\}$. \square

Uma *decomposição em torneios* de um digrafo D é uma coleção T_1, \dots, T_m de subdigrafos de D onde cada T_i é um torneio e todo arco de D pertence a um e apenas um dos torneios. Uma re-orientação D' de um digrafo D é *localmente transitiva* em relação a uma dada decomposição T_1, \dots, T_m de D em torneios se ela induz um torneio transitivo em cada T_i , ou seja, se $D'[V_{T_i}]$ é transitivo para cada i . É claro que se T'_i é uma re-orientação transitiva de T_i para cada i , então $T'_1 \cup \dots \cup T'_m$ é uma re-orientação localmente transitiva de D .

Suponhamos dada uma decomposição em torneios T_1, \dots, T_m de um digrafo D . Para qualquer função $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$, seja $\mathcal{E}_D^*(\rho)$ a coleção de todas as re-orientações em $\mathcal{E}_D(\rho)$ que são localmente transitivas em relação a T_1, \dots, T_m . Definimos $\mathcal{O}_D^*(\rho)$ de modo análogo a partir de $\mathcal{O}_D(\rho)$. Definimos

$$\text{dif}_D^*(\rho) := |\mathcal{E}_D^*(\rho)| - |\mathcal{O}_D^*(\rho)|.$$

Proposição 5.6 ([1])

Seja D um digrafo e T_1, T_2, \dots, T_m uma decomposição de D em torneios. Então, para cada função $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$, $\text{dif}_D(\rho) = \text{dif}_D^*(\rho)$.

Demonstração

Cada arco de D pertence a exatamente um dos torneios T_1, T_2, \dots, T_m e portanto o polinômio de D pode ser representado como

$$f_D = f_{T_1} f_{T_2} \cdots f_{T_m}.$$

Pelo lema 4.5,

$$f_D = \sum_{\rho: V_D \rightarrow \mathbb{N}} \text{dif}_D(\rho) \prod_{i \in V_D} x_i^{\rho(i)} \text{ e}$$

$$f_{T_k} = \sum_{\rho_k: V_{T_k} \rightarrow \mathbb{N}} \text{dif}_{T_k}(\rho_k) \prod_{i \in V_{T_k}} x_i^{\rho_k(i)} \text{ para todo } k.$$

Dada uma função $\rho_k : V_{T_k} \rightarrow \mathbb{N}$ para cada k , denotamos por $\rho_1 + \cdots + \rho_m$ a função $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $\rho(v) := \rho_1(v) + \cdots + \rho_m(v)$ para cada vértice v . Está implícita nesta definição a extensão de ρ_k a V_D definida por $\rho_k(v) := 0$ se $v \notin V_{T_k}$. As três igualdades anteriores implicam no seguinte: para qualquer função $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\text{dif}_D(\rho) = \sum_{\rho_1 + \cdots + \rho_m = \rho} \left(\prod_{k=1}^m \text{dif}_{T_k}(\rho_k) \right), \quad (5.1)$$

onde a soma é tomada sobre todas as funções $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ tais que $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_m = \rho$.

Para todo k , pelo lema 5.5, $\text{dif}_{T_k}(\rho_k) \neq 0$ somente quando $\rho_k(V_{T_k}) = \{0, 1, \dots, |T_k| - 1\}$. A proposição 5.4 implica que as únicas re-orientações do torneio T_k com os graus de saída $0, 1, \dots, |T_k| - 1$ são torneios transitivos. Logo, a soma em (5.1) pode ser restrita às funções $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ que correspondem a torneios transitivos. Claro que se $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ correspondem a torneios transitivos, então função $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_m$ corresponde a re-orientação localmente transitiva. Mas, a soma em (5.1) restrita às funções cuja soma corresponde à uma re-orientação localmente transitiva é o valor de $\text{dif}_D^*(\rho)$. Portanto, $\text{dif}_D(\rho) = \text{dif}_D^*(\rho)$. \square

Um esboço da demonstração do teorema 5.3

Sejam $1, 2, \dots, n$ os vértices do grafo completo K_n e C_1, C_2, \dots, C_n a decomposição de $L(K_n)$ em cliques, com C_i o clique induzido por arestas de K_n que incidem no vértice i . Para todo i , seja C'_i o clique obtido estendendo-se C_i com um vértice b_i adjacente a cada vértice em C_i . Seja G a união dos

cliques C'_1, C'_2, \dots, C'_n . Claro, G é um supergrafo de $L(K_n)$ (embora não seja necessariamente um grafo-linha). Seja D uma orientação de G e seja T'_i o torneio que D induz em C'_i . Häggkvist e Janssen mostram, por meio de enumeração exaustiva, que existe uma função $\rho : V_D \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

- i) $\rho(v) \leq n - 1$ para todo $v \in V_D$ e
- ii) existe uma única re-orientação de D que satisfaz ρ e é localmente transitiva em relação a T'_1, T'_2, \dots, T'_n .

O item ii) implica em $|\text{dif}_D^*(\rho)| = 1$. Pela proposição 5.6, $\text{dif}_D(\rho) = \text{dif}_D^*(\rho)$. Logo, $\text{dif}_D(\rho) \neq 0$ e pelo corolário 4.10 temos que

$$\text{ch}(D) \leq \max_{v \in V_D} \rho(v) + 1 \leq n.$$

Como $L(K_n)$ é subgrafo de G , segue que $\text{ch}(L(K_n)) \leq n$, ou seja, $\text{ch}'(K_n) \leq n$. □

5.3 Grafos bipartidos

Quando restrita a grafos bipartidos completos, a conjectura 5.1 equivale à conjectura de Dinitz, citada na introdução deste texto. Galvin provou a seguinte generalização da conjectura.

Teorema 5.7 (Galvin [12])

Todo grafo bipartido H satisfaz $\text{ch}'(H) = \chi'(H)$.

Demonstração²

Seja H um grafo com vértices $1, 2, \dots, n$ e bipartição (X, Y) . Seja $l := \chi'(H)$ e $G := L(H)$. Claro, $\text{ch}(G) = \text{ch}'(H) \geq l$. Mostramos em seguida que $l \geq \text{ch}(G)$. Para todo vértice i de H , seja C_i o clique em G induzido pelas arestas de H que incidem no vértice i . Pela proposição 5.2, C_1, C_2, \dots, C_n é uma decomposição de G em cliques tal que todo vértice de G pertence a exatamente dois destes cliques. Diremos que C_i é um *clique esquerdo* se $i \in X$ e é um *clique direito* se $i \in Y$. Então, todo vértice de G pertence a exatamente um clique esquerdo e um direito e toda aresta de G pertence ou a um clique direito ou a um clique esquerdo.

Seja c uma l -coloração (clássica) dos vértices de G . Definimos em seguida uma orientação D de G : para cada aresta uv de G com $c(u) < c(v)$,

²A mesma demonstração funciona para multigrafos. Um *multigrafo* é uma generalização do conceito de grafo que permite várias arestas ligando um mesmo par de vértices.

se uv pertence a um clique esquerdo então $(v, u) \in E_D$ e se wv pertence a clique direito então $(u, v) \in E_D$ (exemplo figura 5.1).

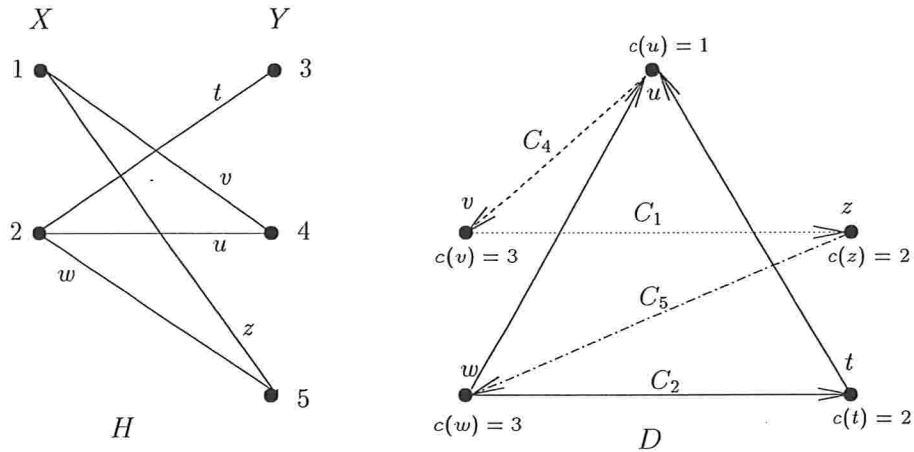


Figura 5.1: Grafo H e orientação D de $L(H)$. Traços diferentes indicam cliques diferentes de $L(H)$. O clique C_3 consiste em um vértice apenas.

Como já dissemos na seção 4.2, um núcleo de D é um conjunto independente de vértices U tal que, para todo vértice v em $V_D \setminus U$, existe um arco da forma (v, u) com u em U . Mostramos em seguida que

$$\text{todo subdigrafo induzido } D_1 \text{ de } D \text{ tem um núcleo.} \quad (5.2)$$

Usamos indução em $|D_1|$. Para $|D_1| = 0$, o núcleo é o conjunto vazio. Seja $|D_1| \geq 1$. Para todo clique esquerdo C_i tal que $V_{C_i} \cap V_{D_1} \neq \emptyset$ dizemos que um vértice u de V_{D_1} é C_i -minimal se $c(u) = \min\{c(v) : v \in V_{D_1} \cap V_{C_i}\}$. Definimos o conjunto

$$U := \{u \in V_{D_1} : u \text{ é } C_i\text{-minimal para algum } i\}.$$

Seja v um vértice de $V_{D_1} \setminus U$. Claro, v pertence a um clique esquerdo C_i . Seja u vértice C_i -minimal. Claro então, $c(u) < c(v)$ e portanto, pela definição de D , $(v, u) \in E_{D_1}$. Portanto, se U é independente segue que U é núcleo de D_1 .

Se U não é independente, sejam u e v vértices adjacentes de U . Sem perda de generalidade podemos supor que $c(u) < c(v)$. Pela definição de U , uv não pode ser aresta de nenhum clique esquerdo e portanto uv pertence a um clique direito. Pela definição de D temos $(u, v) \in E_{D_1}$. Por hipótese de indução, $D_1 - u$ tem um núcleo U_1 .

Se $v \in U_1$, então como $(u, v) \in E_{D_1}$, temos que U_1 é núcleo também de D_1 . Suponha agora que $v \notin U_1$. Então, como U_1 é núcleo de $D_1 - u$, existe $w \in U_1$ tal que $(v, w) \in E_{D_1}$. Se vw pertencesse ao clique esquerdo então, pela definição de D , $c(w) < c(v)$ e isto seria uma contradição com $v \in U$. Portanto vw pertence ao clique direito. Então, pela definição de D , $c(v) < c(w)$. Como $c(u) < c(v)$, temos $c(u) < c(w)$. Já observamos que uv pertence a um clique direito. O vértice v pertence a apenas um clique direito, digamos C_j . Portanto, as arestas uv e vw pertencem a C_j . Logo, a aresta uw pertence a C_j . Como $c(u) < c(w)$, pela definição de D , $(u, w) \in E_{D_1}$. Mas $w \in U_1$ e portanto segue que U_1 é núcleo de D_1 . De fato, vale (5.2).

Mostramos em seguida que

$$\text{para todo } u \in V_D, d_D^+(u) \leq l - 1. \quad (5.3)$$

Seja u vértice de G . Então u pertence a exatamente dois cliques, um esquerdo C_i e um direito C_j . Pela definição de D , o grau de saída de u em $D[V_{C_i}]$ é no máximo $c(u) - 1$ e o grau de saída de u em $D[V_{C_j}]$ é no máximo $l - c(u)$. Claro, toda aresta que incide em u pertence ou a C_i ou a C_j . Logo, $d_D^+(u) \leq (c(u) - 1) + (l - c(u)) < l$. Então, vale (5.3).

De (5.3), (5.2) e lema 4.2 segue que $\text{ch}(G) \leq l$, ou seja, $\text{ch}'(H) \leq l$. \square

Observamos que a orientação do grafo-linha de um grafo bipartido definida na prova de teorema 5.7 pode ter circuitos orientados ímpares (exemplo: digrafo D na figura 5.1). Portanto, não se pode aplicar o teorema de Richardson [22] para a prova da afirmação (5.2).

5.4 Limitantes superiores

Pelo teorema de Vizing [10, p. 103], $\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1$ para todo grafo H . Assim, a conjectura 5.1 sugere que também $\text{ch}'(H) \leq \Delta(H) + 1$.

Pelo teorema de König [10, p. 103] todo grafo bipartido H satisfaz $\chi'(H) = \Delta(H)$. Portanto, o teorema 5.7 implica que $\text{ch}'(H) = \Delta(H)$ para todo grafo bipartido H .

Claramente, para qualquer grafo H tem-se $\Delta(L(H)) \leq 2\Delta(H) - 2$. Logo, para todo grafo H , $\text{ch}'(H) = \text{ch}(L(H)) \leq \Delta(L(H)) + 1 \leq 2\Delta(H) - 1$.

Ainda, como observado por Bollobás e Harris [8], se G é um grafo com $\Delta(H) > 2$, então o teorema 1.2 (generalização do teorema de Brooks) implica em $\text{ch}'(H) \leq 2\Delta(H) - 2$. De fato, se o grafo-linha de H é um circuito ímpar, então $\text{ch}'(H) = \text{ch}(L(H)) = 3 \leq 2\Delta(H) - 2$. Se $L(H) = K_n$, então $H = K_{1,n}$ e portanto, $\text{ch}'(H) = \text{ch}(L(H)) = n = \Delta(H) \leq 2\Delta(H) - 2$. Se

$L(H)$ não é completo e nem é circuito ímpar, então pelo teorema 1.2 temos $\text{ch}'(H) = \text{ch}(L(H)) \leq \Delta(L(H)) \leq 2\Delta(H) - 2$.

Bollobás e Harris [8] foram os primeiros a obter um resultado assintótico. Eles provaram que $\text{ch}'(H) \leq \frac{11}{6}\Delta(H) + o(\Delta(H))$ para todo grafo H . O limite superior para o número aresta-cromático restrito de grafos foi melhorado para $\frac{7}{4}\Delta + o(\Delta)$ por Bollobás e Hind [9], e posteriormente para $\Delta + o(\Delta)$ por Kahn [18]. Mencionamos um resultado nesta linha obtido por Häggkvist e Janssen [16] combinando métodos probabilísticos e algébricos:

Teorema 5.8 ([16])

Todo grafo H satisfaz $\text{ch}'(H) \leq \Delta + O(\Delta^{\frac{2}{3}}\sqrt{\log \Delta})$.

Para a prova deste teorema, fazendo uso de técnica similar ao método usado na prova do teorema 5.3, Häggkvist e Janssen construíram uma classe \mathcal{H} de grafos tal que para todo H em \mathcal{H} o valor de $\text{ch}'(H)$ é próximo de $\Delta(H)$ e estimaram o número aresta-cromático restrito para a união de grafos que pertencem a \mathcal{H} . Usando o Lema Local de Erdős e Lovász [2] (que é um resultado probabilístico) e alguns limitantes padrão da cauda da distribuição binomial, mostraram que todo grafo pode ser expresso como tal união.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Alon. Restricted colorings of graphs. In *Surveys in Combinatorics, 1993 (Keele)*, pages 1–33. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [2] N. Alon and J. H. Spencer. *The Probabilistic Method*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. With an appendix by Paul Erdős, A Wiley-Interscience Publication.
- [3] N. Alon and M. Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2):125–134, 1992.
- [4] M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster. *Graphs & digraphs*. PWS Publishers, Boston, Mass., 1979.
- [5] C. Berge. *Graphs*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Second revised edition of part 1 of the 1973 English version.
- [6] M. Bíró, M. Hujter, and Zs. Tuza. Precoloring extension. I. Interval graphs. *Discrete Mathematics*, 100(1-3):267–279, 1992. Special volume to mark the centennial of Julius Petersen’s “Die Theorie der regulären Graphs”, Part I.
- [7] B. Bollobás. The chromatic number of random graphs. *Combinatorica*, 8(1):49–55, 1988.
- [8] B. Bollobás and A. J. Harris. List-colourings of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 1(2):115–127, 1985.
- [9] B. Bollobás and H. R. Hind. A new upper bound for the list chromatic number. *Discrete Mathematics*, 74(1-2):65–75, 1989.
- [10] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2000.
- [11] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. In *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph*

- Theory and Computing* (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979), pages 125–157, Winnipeg, Man., 1980. Utilitas Math.
- [12] F. Galvin. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63(1):153–158, 1995.
- [13] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.
- [14] H. Grötzsch. Zur Theorie der diskreten Gebilde. VII. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe*, 8:109–120, 1958/1959.
- [15] S. Gutner. The complexity of planar graph choosability. *Discrete Mathematics*, 159(1-3):119–130, 1996.
- [16] R. Häggkvist and J. Janssen. New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(3):295–313, 1997.
- [17] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [18] J. Kahn. Asymptotically good list-colorings. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 73(1):1–59, 1996.
- [19] J. Krausz. Démonstration nouvelle d’une théorème de Whitney sur les réseaux. *Mat. Fiz. Lapok*, 50:75–85, 1943.
- [20] S. Lang. *Algebraic Structures*. Addison-Wesley, New York, second edition, 1967.
- [21] C. McDiarmid. *Discrete Mathematics and Radio Channel Assignment*. Notas de aula, Brazilian Summer School on Combinatorics and Algorithms, Fortaleza, Brazil, 12–24 de março de 2001.
- [22] M. Richardson. Solutions of irreflexive relations. *Annals of Mathematics* (2), 58, 1953.
- [23] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 62(1):180–181, 1994.
- [24] V. G. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Diskret. Analiz*, (29 Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Shem):3–10, 101, 1976.

- [25] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 120(1-3):215–219, 1993.
- [26] M. Voigt. A not 3-choosable planar graph without 3-cycles. *Discrete Mathematics*, 146(1-3):325–328, 1995.
- [27] R. Škrekovski. Choosability of K_5 -minor-free graphs. *Discrete Mathematics*, 190(1-3):223–226, 1998.

Índice Remissivo

- F^R , 28
- $[x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \cdots x_n^{\rho_n}]f_D$, 28
- $\Gamma_D^+(U)$, 24
- $\Gamma_D^-(U)$, 24
- $\Gamma_G(U)$, 4
- $\text{dif}_D^*(\rho)$, 42
- $\text{dif}_D(\rho)$, 29
- \mathcal{L} -aresta-coloração, 39
- \mathcal{L} -coloração, 5
- $\mathcal{G}(n, p)$, 13
- \mathcal{S}_n , 31
- $\mathcal{O}_D^*(\rho)$, 42
- $\mathcal{O}_D(\rho)$, 29
- $\omega(D)$, 29
- $\mathcal{E}_D^*(\rho)$, 42
- $\mathcal{E}_D(\rho)$, 29
- $\varepsilon_0(D)$, 30
- $\varepsilon_1(D)$, 30
- árvore, 4

- adjacentes, 3
- Alon, 10, 13, 33, 36
- arco, 24
- aresta, 3
 - coloração clássica, 39

- Bollobás, 13, 47

- caminho, 4
 - ímpar, 4
 - orientado, 25
 - par, 4
- ciclo orientado, 25
- cintura, $g(G)$, 4

- circuito, 4
 - orientado, 25
- clique, 4
- coloração clássica, 6
- conjectura
 - da coloração restrita de arestas, 39
 - de Dinitz, 44

- decomposição
 - em cliques, 40
 - em torneios, 42
- digrafo, 24
 - euleriano, 30
 - transitivo, 41

- emparelhamento, 4
- Erdős, Rubin e Taylor, 9

- grafo, 3
 - acíclico, 4
 - base, 24
 - bipartido, 4
 - completo, 3
 - conexo, 4
 - linha, 39
 - planar, 15
 - plano, 16

- grau
 - de v , $d_G(v)$, 3
 - de entrada, $d_D^-(v)$, 24
 - de saída, $d_D^+(v)$, 24
 - máximo de G , $\Delta(G)$, 3
 - médio de G , $d(G)$, 3

- mínimo de G , $\delta(G)$, 3
- Gutner, 19, 21
- Häggkvist, 41, 47
- Harris, 47
- Janssen, 41, 47
- lista de cores, 5
- núcleo, 25
- número
 - aresta-cromático restrito, $ch'(G)$, 39
 - aresta-cromático, $\chi'(G)$, 39
 - cromático restrito, $ch(G)$, 6
 - cromático, $\chi(G)$, 6
 - de coloração, $col(G)$, 8
- ordem de G , $|G|$, 3
- orientação de G , 24
- polinômio
 - de digrafo, f_D , 28
- re-orientação, 28
 - ímpar, 29
 - localmente transitiva, 42
 - par, 29
 - satisfaz ρ , 29
 - transitiva, 41
- Richardson, 25
- sinal
 - de permutação, $sg(\sigma)$, 31
 - de re-orientação, $sg(D')$, 29
- smallest-last, 8
- subgrafo, 4
 - gerador, 4
 - induzido, 4
- tamanho de G , $\|G\|$, 3
- Tarsi, 33, 36
- Thomassen, 16
- torneio, 31
- triângulo, 3
- união, $G \cup H$, 4
- vértice, 3
 - isolado, 3
- Vizing, 39, 46
- vizinhos, 3
- Voigt, 19, 21