

**Análise de formas
representadas por marcos
utilizando características
mono e multiescala**

Celina Maki Takemura

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

de Concentração : **Ciência da Computação**

Orientador : **Prof. Dr. Roberto Marcondes Cesar Junior**

- São Paulo, julho de 2003 -

aos meus pais Keiko e Daniel

[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

Agradecimentos

Ao querido Rodrigo Elias Bianchi, um grande amigo que me ajudou a preencher os formulários de inscrição e a quem devo meu ingresso no programa de mestrado. À Neida Bianchi pelo presente que deu ao mundo, e como se não bastasse, por me dar amizade.

Ao professor Roberto M. Cesar Jr. por tudo que me ensinou, pela entusiasmo e principalmente pelo seu exemplo, tanto como professor quanto como pessoa. Um orientador na extensão completa da semântica que essa palavra exprime.

Aos professores Luciano da F. Costa (IFSC/USP) e Sérgio Furtado dos Reis (IB/UNICAMP) e à pesquisadora Erika Hingst-Zaher pelo acompanhamento e colaboração no decorrer do desenvolvimento do projeto. Pelas palavras de esclarecimento, pela atenção nas reuniões, por acrescentarem um quê de diferente e especial ao meu trabalho e à minha vida.

Aos queridos mestres que tive no IME. Àqueles que durante os últimos 29 meses se responsabilizaram por mim e por meu conhecimento, me transmitindo lições através da experiência de vida e me mostraram a beleza do sentimento de se gostar do que se faz. A vocês que foram meus mestres, meu muito obrigado. Ainda, agradeço a todos aqueles que sim, me ensinaram muito, mas se limitaram a ser apenas professores.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP; 99/12765-2) pelo suporte financeiro dispensado no desenvolvimento desta pesquisa. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ; 300722/98-2 e 468413/00-6) pelo apoio na apresentação de trabalho.

Aos meus pais que de nada contribuíram no sentido intelectual (no desenvolvimento dessa dissertação, por que em outros aspectos com certeza sou a sombra, mais que um pouco torta, de tudo que são) mas que sei que me amam e sem essa certeza nunca teria conseguido nem começar nem terminar nada. A Lucas e David, meus irmãos, que me deram e de

Resumo

A análise de formas tem papel fundamental na resolução de muitos problemas relacionados à visão e percepção, sendo um campo de pesquisa multidisciplinar. Neste contexto, o presente trabalho considera a complexidade e amplitude da tarefa de análise de formas, introduzindo uma nova abordagem para a análise de formas representadas por marcos (“*landmarks*”) usando as transformadas em wavelets.

É importante notar que esse tipo de representação é amplamente aplicada em problemas relacionados às ciências biomédicas, mais especificamente na morfometria.

Um subproduto deste trabalho é a documentação das características (“*features*”) encontradas na literatura, a serem extraídas dos marcos, analisando vantagens e desvantagens de sua aplicação.

Este trabalho apresenta um procedimento de extração de sinais a partir de representação de formas por marcos que podem ser usados como entrada para a transformada em wavelets. A interpretação geométrica resultantes do uso de duas wavelets mães, i.e. primeira e segunda derivadas da gaussiana, é apresentada. Resultados experimentais obtidos com dados reais são discutidos.

Abstract

Shape analysis has played a central role in many problems in vision and perception, being an active multidisciplinary research field. In this context, this work introduces a new shape analysis approach using the well known wavelet transform and exploring shape representation by landmarks.

The application of the landmarks to problems in biomedical sciences is remarkable, especially in morphometry.

A by product of this work is the documentation of well-known features to the computer vision community. This catalogue of attributes presents some the most important characteristics of each one.

This work shows how to obtain a time signal from the landmarks representation, which undergoes the wavelet transform, as well as a useful geometrical interpretation using two mother wavelets, i.e. the first and the second derivatives of the gaussian. Successful experimental results obtained from real data are also discussed.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xiv
Lista de Tabelas	xvi
1 Introdução	1
1.1 Contribuições	3
1.2 Organização do Trabalho	4
I Representação e Caracterização de Formas	5
2 Representação de Formas por Marcos	7
2.1 Conceitos de Morfometria	8
2.2 Tipos de Dados em Morfometria	9
2.3 Extração de Representações de Formas baseadas em Contorno e em Região a partir de Marcos	12
2.4 Exemplo de verbete	14
3 Características Multiescala de Formas 2D	17
3.1 Transformadas Espaço-Escala	17
3.2 Transformadas Tempo-Freqüência	18
3.3 Curvatura Multiescala Baseada em <i>Fourier</i>	19
3.4 Energias Multiescala	22
3.4.1 Energia de Dobramento	22

4	Transformada em <i>Wavelets</i> de Formas Representadas por Marcos	25
4.1	Interpretação Geométrica da Transformada em <i>Wavelets</i> usando as Derivadas da Gaussiana	27
4.1.1	Visualização das Propriedades Geométricas da Transformada em <i>Wavelet</i> usando as Derivadas da Gaussiana	30
4.2	Transformada em Wavelet Tridimensional	32
4.2.1	Interpretação Geométrica da Transformada em <i>Wavelets</i> 3D usando as Derivadas da Gaussiana	32
4.3	Energia de <i>Wavelet</i>	33
II	Seleção de Características e Classificação	35
5	Seleção de Características e Classificação	37
5.1	Reconhecimento de Padrões Estatístico	37
5.2	Seleção/Extração de Características	38
5.2.1	Autovalores e Autovetores	39
5.2.2	Análise de Componentes Principais (PCA)	39
5.2.3	Análise Canônica	39
5.2.4	Uso da distâncias entre agrupamentos para selecionar atributos mais discriminantes	40
5.3	Classificação de Formas	42
5.3.1	Classificação Bayesiana	42
5.3.2	Distância ao Protótipo	43
5.3.3	Análise de Agrupamentos	44
III	Resultados	45
6	Resultados experimentais	47
6.1	Validação do Método	47
6.1.1	Criação de Populações	47
6.1.2	Extração da <i>Representação-W</i>	49
6.2	Estudo da Morfologia do Cérebro Humano: Esquizofrenia	50
6.2.1	Obtenção dos Marcos	50
6.2.2	Análise através da Transformada em <i>Wavelet</i>	51
6.2.3	Análise através de Conjuntos de Características	51
6.3	Estudo da Evolução de Estruturas Morfológicas Complexas: <i>Thrichomys apereoides</i>	53
6.3.1	Obtenção dos Marcos	53
6.3.2	Resultados Obtidos	55

6.4	Estudo da Evolução de Estruturas Morfológicas	
	Complexas: Dimorfismo sexual caninos sul-americanos (<i>Mammalia, Canidae</i>)	56
6.4.1	Obtenção dos Marcos	56
6.4.2	Resultados obtidos	56
6.5	Estudo da Evolução de Estruturas Morfológicas	
	Complexas: <i>Trinomys</i> , usando Marcos 3D	58
6.5.1	Obtenção dos Marcos	59
6.5.2	Resultados obtidos	61
7	Conclusões	65
7.1	Contribuições	66
7.2	Trabalhos futuros	67
IV	Apêndices	69
A	Características Monoescala	71
A.1	Perímetro	71
A.2	Área	73
A.3	Compacidade	73
A.4	Centróide ou Centro de Massa	73
A.5	Distância Média à Borda	74
A.6	Diâmetro	75
A.7	Maior e Menor Eixos	75
A.8	<i>Thickness</i>	76
A.9	Dimensão Fractal ou Dimensão de <i>Hausdorff-Besicovitch</i>	76
A.10	Curvatura	78
A.11	Momentos	78
A.12	Transformada de Fourier	79
B	Características Multiescala	81
B.1	Transformadas Espaço-Escala	81
B.2	Transformadas Tempo-Frequência	81
B.3	Transformadas Tempo-Escala	82
B.4	Curvatura Multiescala baseada em Fourier	82
B.5	Curvatura Espaço-Escala	83
B.6	Energia de Dobramento Multiescala	84
B.7	Energia de Wavelet	84
C	Conceitos de Probabilidade e estatística	87
C.1	Probabilidade	87
C.2	Probabilidade Condicional	88
C.3	Frequência Relativa	88

C.4	Função Densidade de Probabilidade (fdp)	89
C.5	Função de Distribuição Acumulada	90
C.6	Momentos Estatísticos	90
C.7	Estatística Multivariada	91
C.8	Momentos Estatísticos Multivariados	92
Índice Remissivo		94
Referências Bibliográficas		97

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de Representação de Formas	2
2.1	Marcos anatômicos da mandíbula dos <i>T. apereoides</i> [26, 29]	8
2.2	Exemplo do conceito de homologia	9
2.3	Passos na análise morfométrica. Adaptada de [26]	11
2.4	Extração de representações de forma baseadas em contorno e região a partir de marcos	12
2.5	Extração de contorno a partir de marcos	13
2.6	Extração de região a partir de marcos	14
4.1	Representação de um quadrado por marcos, marcos interpolados e por vetores	28
4.2	Segunda derivada do sinal dado na Figura 4.1(b) no ponto P7, estimado pelo método de diferenças.	30
4.3	(a) Wavelet mãe $[-1 \ 0 \ 1]$; (b) Wavelet mãe primeira derivada da Gaussiana.	30
4.4	Transformada em Wavelet com a primeira derivada da Gaussiana, aplicada ao sinal da Figura 4.1(b).	31
4.5	(a) Exemplo de dado simulado em termos de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. (b) $ \vec{U}(b, a) $ de (a).	33
4.6	Estimativa da segunda derivada do sinal formado pelos sinais $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ da Figura 4.5(a).	34
5.1	Seleção de atributos usando distância entre agrupamento	41
6.1	Exemplo de indivíduos - População de Hexágonos, Triângulos e Quadrados	48
6.2	Aplicação da transformada em wavelet em dados modelo	49
6.3	(a) Marcos originais e polígono interpolado a partir deles; (b) $x(t)$ e $y(t)$; (c) Resultado do algoritmo de propagação de labels; (d) Região do polígono.	50
6.4	Resultado do agrupamento dos dados de esquizofrenia utilizando como parâmetro a distância ponto a ponto dos coeficientes da <i>Wavelet</i>	52

6.5	Melhor conjunto de características com 3 dimensões.	53
6.6	Espaço de características usando os 3 primeiros eixos da análise canônica . . .	54
6.7	(a) Dendrograma resultante da análise representada na Figura 6.6; (b) Mapa da distribuição espacial das populações de <i>Thrichomys apereoides</i> : (1) Bodocó, (2) Campos Sales, (3) Caruaru, (4) Crato, (5) Itapagé, (6) Palmeiras, (7) Pesqueira, (8) Santana do Ipanema, (9) Triunfo.	55
6.8	Marcos 2D extraídos de amostras da família <i>Canidae</i>	57
6.9	Representação dos dados da família <i>Canidae</i>	59
6.10	Exemplo de Representação de Formas	60
6.11	Relação da morfologia e da filogenia nos <i>Trinomys</i>	61
6.12	Espaço de atributos bidimensional que maximiza a distância mínima entre as classes de <i>Trinomys</i>	62
7.1	Problema de determinação de posições relativas	67
A.1	Vizinhança de 4 e de 8 de um pixel P. [10]	72
C.1	Histograma de frequências relativas	89
C.2	Função Densidade de Probabilidade	89
C.3	Função de Densidade Acumulada	90
C.4	Covariância	93

Lista de Tabelas

2.1	Verbetes.	14
6.1	Características utilizadas para análise de dados relacionados a esquizofrenia	52
6.2	Características usadas para caracterizar espécimes de <i>Thrichomys apereoides</i>	56
6.3	Classes estudadas: <i>Canidae</i>	57
6.4	Marcos: <i>Canidae</i>	58
6.5	Classes estudadas: <i>Trinomys</i>	60
6.6	Atributos usados para caracterizar <i>Trinomys</i> .	61
6.7	Marcos utilizados para representar <i>Trinomys</i>	63

Introdução

O trabalho a ser descrito nesta dissertação concerne à área de visão computacional, mais especificamente, à análise de formas. Uma grande variedade de problemas relacionados às mais diversas disciplinas podem ser descritos em termos de conceitos e métodos de visão. Por exemplo, podemos aplicar técnicas de visão computacional em estudos sobre evolução [7, 6, 8, 14, 29] relacionados à biologia e à medicina. Em muitos casos, esses problemas podem ser reduzidos à análise de formas [10], onde informações como cor, textura e movimento são ser descartados.

Em um problema típico de análise de formas computacional, uma imagem do objeto de estudo é adquirida e segmentada de maneira a isolar a forma de interesse. Esta forma é posteriormente tratada para que possa ser representada adequadamente. Existem vários métodos para representação de formas. A comunidade de visão computacional utiliza em geral duas abordagens principais [10, 22, 27], representação baseada em contornos (Figura 1.1(b)) e representação baseada em região (Figura 1.1(c)). Por outro lado, a análise de formas nas áreas de ciências naturais exploram a representação por marcos [6, 31, 14, 37] (Figura 1.1 (d) e (e)), utilizando conceitos da morfometria, uma disciplina que associa informação geométrica e estatística a formas biológicas. A partir de uma dessas repre-

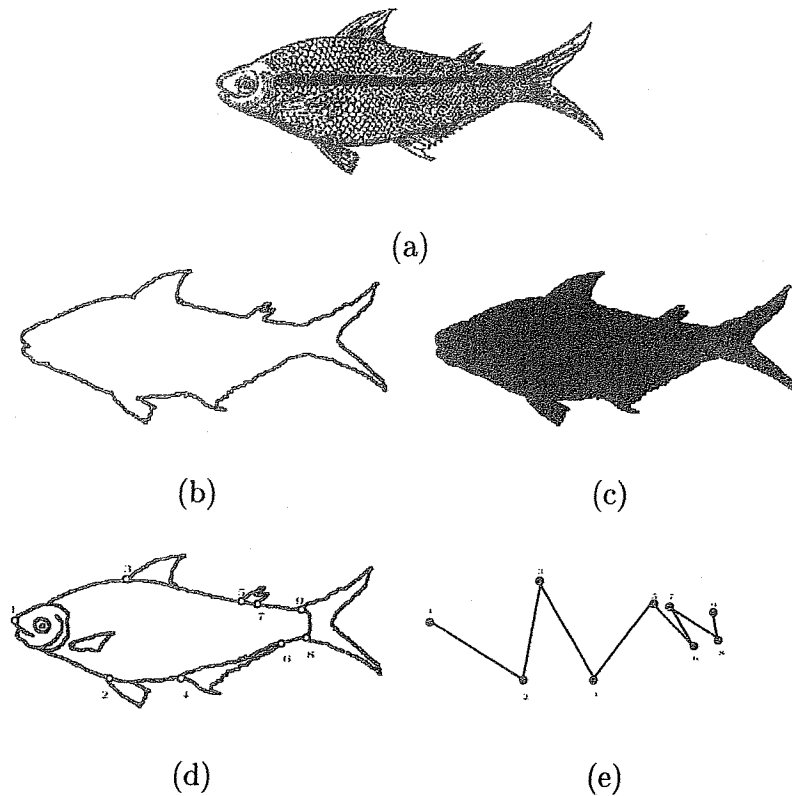


Figura 1.1: (a) Imagem Original; (b) Representação por contorno; (c) Representação por região; (d) Representação por marcros; (e) Representação poligonal por marcros (A figura do peixe Piabucu (a) foi retirada de “História Natural do Brasil”, [23])

sentações, podemos extrair características que descrevem a forma e podem ser utilizadas para classificação.

É importante dizer que a principal abordagem para análise e comparação de formas em áreas tais como biologia, geologia, antropologia, entre outras são baseados em dados representados por marcros [21]. Apesar disso, poucos trabalhos tem explorado a análise deste tipo de representação usando medidas diferenciais ou multiescala, que já mostraram serem superiores a técnicas monoescala em muitas situações.

1.1 Contribuições

Este trabalho se concentra, dentro da análise de formas, nas fases de representação e caracterização, apresentando uma nova abordagem para explorar representação por marcos utilizando ferramentas já bem difundidas na área de visão computacional. Um maior enfoque será dado à extração de características baseadas em *Wavelets* [10, 3, 1, 2].

Com o objetivo de demonstrar a efetividade de métodos baseado em wavelets para representar e classificar múltiplas classes usando dados 2D e 3D, será descrito como extrair representações por linhas poligonais e regiões de landmarks, sendo igualmente demonstrado o uso da transformada em wavelet, como técnica multiescala e diferencial, para relacionar variáveis ecológicas com a morfologia de uma espécie. Além disso, será apresentada a interpretação geométrica da transformada em wavelet usando como wavelet mãe as derivadas da Gaussiana [32], reforçando sua eficácia dentro do contexto de morfometria geométrica.

Visto a natureza dos atributos resultante do uso dos coeficientes wavelts para análise de formas, foram estudas técnicas de seleção de características e neste trabalho são comparadas e propotas algumas metodologias para redução de dimensionalidade. Ainda para facilitar o entendimento desse tipo de dados é mostrado um novo modo de visualização da wavelet 2D.

Outro aspecto importante a ser citado é que, dentro do contexto de visão computacional, embora alguns artigos já tenham apresentado amplas revisões de métodos de pré-processamento, representação e classificação de formas [27, 24, 22], pouca atenção tem sido dada para realização de um levantamento sistemático das diversas características de formas descritas na literatura. O presente trabalho tem como uma de suas metas suprir esta carência através da proposição de um dicionário das características utilizadas no decorrer do desenvolvimento do projeto. Um verbete modelo e diversos exemplos de entrada para esse dicionário são apresentados.

1.2 Organização do Trabalho

Neste primeiro capítulo foram apresentados os objetivos do trabalho, assim como as motivações para o estudo da área de análise de formas, relacionado-a a estudos em morfometria. No capítulo 2 será tratado o problema de representação de formas, sendo apresentada, em especial, a representação baseada em marcos e alguns conceitos da disciplina de morfometria. Neste mesmo capítulo, será descrita a especificação de um verbete para construção de um dicionário de características a ser apresentado nos Apêndices A e B. No capítulo 3 será dada uma visão geral sobre características multiescala e, em seguida, no capítulo 4, discutiremos a transformada em wavelets.

Algumas aplicações e conceitos referentes a extração e seleção de características, e classificação de formas serão discutidos nos capítulos 5 e 6. Ainda serão abordados, como exemplo de aplicação de wavelets, problemas de morfometria. Os dados analisados estão relacionados ao estudo da teoria da evolução de estruturas morfológicas complexas e ao estudo das deformações do cérebro humano em casos de esquizofrenia. No capítulo 7 serão apresentados os comentários finais e as conclusões. Alguns conceitos fundamentais de probabilidade e estatística são apresentados no apêndice C para ajudar no entendimento das proposições relacionadas a reconhecimento de padrões estatístico dispostas nesses capítulos.

Parte I

Representação e Caracterização de Formas

Representação de Formas por Marcos

Em geral, a partir de processos de segmentação de imagens são obtidos os objetos de interesse da análise, ou seja, as formas em si. Essas formas devem ser descritas em formato apropriado para um posterior processamento.

No contexto de visão computacional, existem duas abordagens principais: representações baseadas em contorno ou em região [10, 22, 27, 24, 16]. A representação de formas baseada em contorno envolve a descrição da forma em termos de suas bordas, enquanto a abordagem baseada em região trata a forma em termos de sua respectiva região 2D [10]. Outra abordagem para representação de formas, ligada ao processamento de dados dentro da área de morfometria, é a representação baseada em marcos.

Este capítulo tem como objetivo dar uma visão geral da disciplina de morfometria, apresentando os conceitos necessários para à aplicação das técnicas de representação e análise de formas usados no contexto de visão computacional à dados representados por marcos.

2.1 Conceitos de Morfometria

A morfometria é uma disciplina baseada em medidas de objetos e fenômenos biológicos e na análise de padrões morfológicos [8, 14, 29]. Tradicionalmente, estudos em morfometria se utilizam de medidas de distância e ângulos entre marcos, seguido de algum tipo de análise estatística [7, 6, 14].

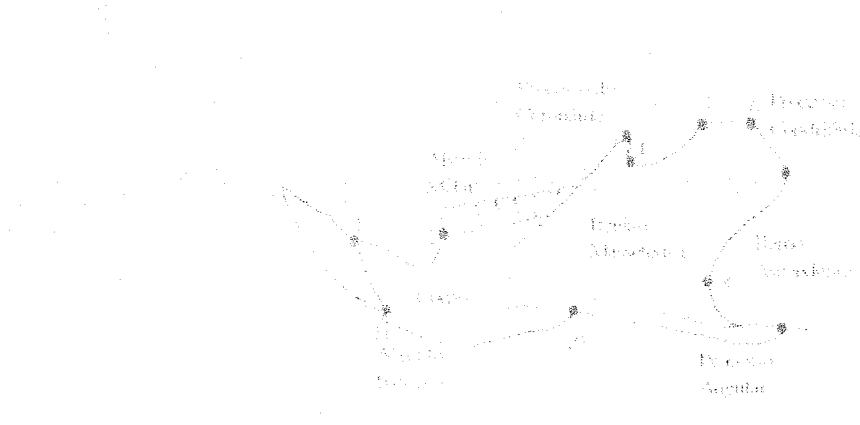


Figura 2.1: Marcos anatômicos da mandíbula dos *T. apereoides* [26, 29]

A abordagem mais comum para a representação de dados estudados nessa área é dada em termos de marcos, usualmente pontos de curvatura máxima ou junções entre estruturas, ou ainda, pontos localizados em regiões chave na forma de interesse, sendo que podem ser localizados respeitando homologia entre e dentro de populações [6, 14]. Observe na figura 2.1 alguns dos marcos que podem ser obtidos na mandíbula dos roedores da família *T. apereoides*.

De acordo com Bookstein, homologia são as regras pelas quais partes de diferentes organismos (no nosso caso, formas) mantêm correspondência. Note a correspondência entre os marcos na figura 2.2 (b) e (d). Por exemplo, o marco número 2 nos dois peixes correspondem as suas respectivas origens da nadadeira pélvica.

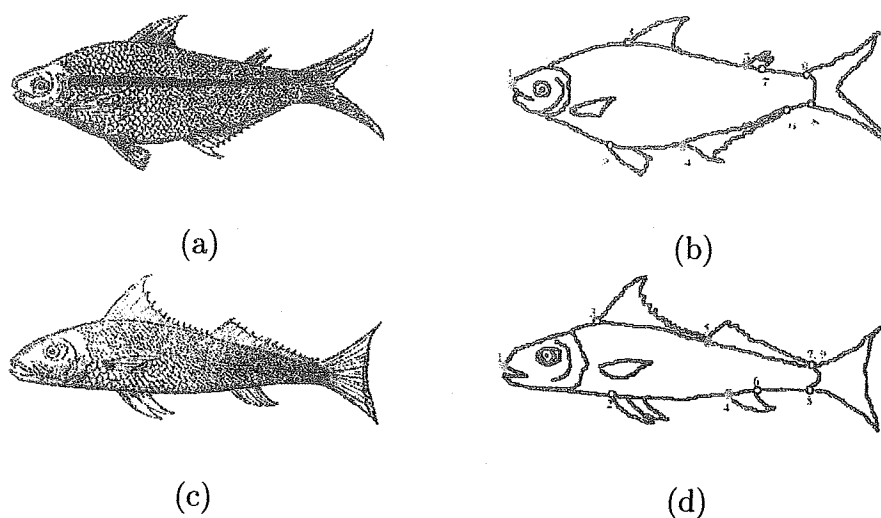


Figura 2.2: (a) Piabucu; (b) Representação do Piabucu por marcos; (c) Guatucupa; (d) Representação do Guatucupa por marcos (As figuras do Piabucu e do Guatucupa ((a) e (c)) foram retiradas de “História Natural do Brasil”, [23])

2.2 Tipos de Dados em Morfometria

Apesar da principal abordagem na morfometria utilizar marcos, existe uma infinidade de outras variáveis que podem ser extraídas de formas biológicas para descrever o objeto de estudo. Essas características podem ser adquiridas através de sistemas de vídeo ou mesas de digitalização, ou no caso 3D, mesas eletromagnéticas, por exemplo.

De modo geral podemos classificar os tipos de dados utilizados em estudos morfométricos através das seguintes denominações:

1. **Tamanho de partes homólogas.** Temos, como exemplo deste tipo de medida, o volume ou peso de um órgão, bem como o comprimento de alguma estrutura do organismo.

Observe que, se o comprimento for utilizado, deve ser garantido que seja medido entre pontos homólogos na amostra. Mesmo desta maneira, perdemos informações, tais como a posição relativa ou a orientação da estrutura medida.

2. **Homologia.** Podemos observar duas características em relação à esta classe de dados morfométricos.

- *Homologia operacional.* Refere-se à correspondência biológica da posição de marcos de forma para forma.
- *Homologia táxica ou evolutiva.* Representa a similaridade devida à ancestralidade comum.

Na prática, os estudos morfométricos geralmente utilizam dados de homologia operacional pois tratam da comparação entre espécies de famílias próximas tentando evitar problemas de identificação de marcos anatômicos.

3. **Marcos anatômicos.** Referem-se a um mapeamento de pontos relacionados a processos biológicos, sendo considerados mais ricos em informações que os citados anteriormente, podendo ser divididos em três categorias:

- Justaposição de tecidos: Relacionam pontos de encontro entre três estruturas.
- Pontos de máxima curvatura ou outros processos morfogenéticos locais: Incluem extremidades e vales de invaginação.
- Pontos extremos: Descrevem pontos relacionados à maior distância que pode ser medida em uma estrutura. Observa-se que a utilização deste tipo de marco pode levar a resultados biologicamente *deficientes*, tanto quanto os obtidos com contorno.

4. **Contornos.** Nos casos em que as estruturas biológicas não apresentam um número suficiente de marcos anatômicos identificáveis, a forma pode ser descrita em termos de contornos, ou seja, coordenadas cartesianas sem correspondência biológica (pontos localizados no objeto de acordo com alguma propriedade matemática ou geométrica).

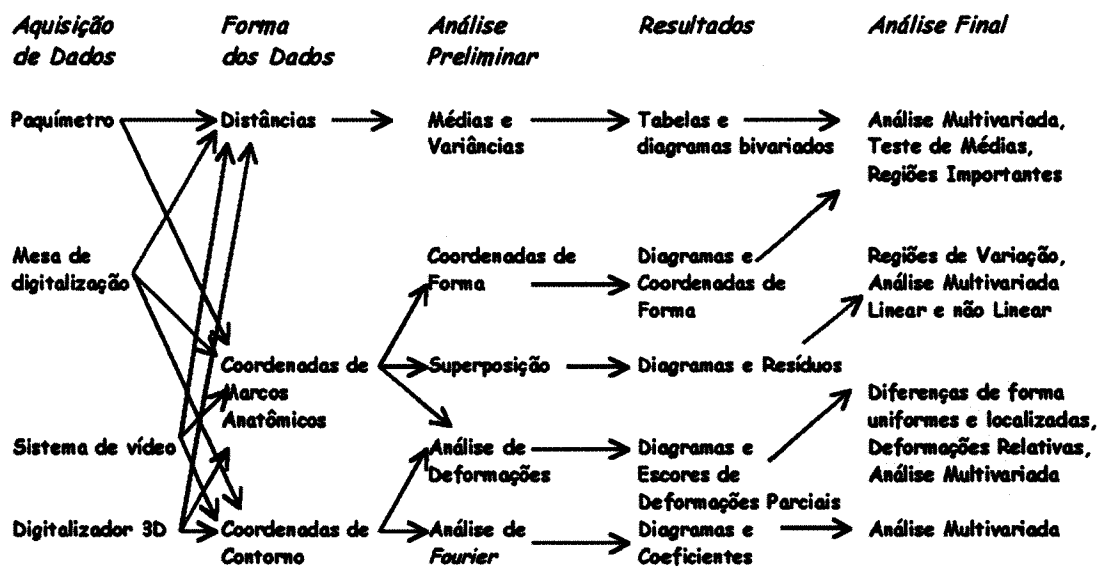


Figura 2.3: Passos na análise morfométrica. Adaptada de [26]

O foco deste trabalho é colocado sobre dados relacionados a *marcos anatômicos* e *contornos* (observe que através deles podemos derivar medidas relacionadas a *tamanho de partes homólogas* e mesmo *homologia*).

A escolha do tipo de representação a ser utilizado, assim como do método de análise, depende de um conhecimento prévio dos organismos de estudo e do problema em particular. Na figura 2.3 está descrita a seqüência de passos a serem aplicados na análise morfométrica. Nota-se uma similaridade entre a análise morfométrica e a análise de formas. Em ambas temos como fase inicial a aquisição dos dados. A partir dos dados brutos, escolhe-se uma representação adequada ao tipo de avaliação requerido. A análise preliminar da análise morfométrica coincide com a fase de extração de atributos da análise de formas. Tendo em vista essas características, pode-se iniciar a fase de classificação ou de resultados.

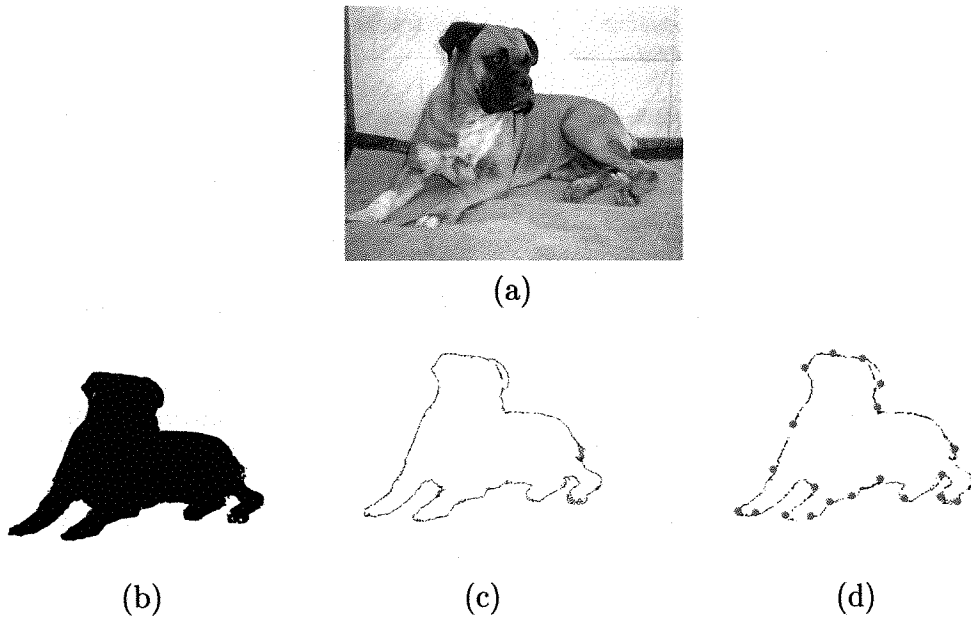


Figura 2.4: (a) Imagem original; (b) Forma segmentada; (c) Contorno da forma; (d) Identificação de marcos na forma.

2.3 Extração de Representações de Formas baseadas em Contorno e em Região a partir de Marcos

Para possibilitar a utilização de ferramentas de extração de características já difundidas na área de visão computacional em dados representados por marcos é necessária a transformação deste tipo de representação para representações baseadas em contorno ou/e em região. Para que isso seja possível, primeiramente os marcos são ordenados (Figura 2.5 (a)), de modo que quando duas formas forem comparadas, a homologia entre elas seja levada em consideração. A seqüência de marcos ordenados pode ser vista como vértices de uma linha poligonal, que podem ser subsequenteemente interpolados de forma a construir um polígono p (Figura 2.5 (b)).

Os pontos interpolados podem ser representados por uma parametrização das coordenadas x e y em torno da linha poligonal p . Assim, podemos denotar o contorno do polígono p como sendo $c(t) = (x(t), y(t))$ (Figura 2.5 (c)).

Uma observação importante é que marcos não necessariamente são pontos no contorno

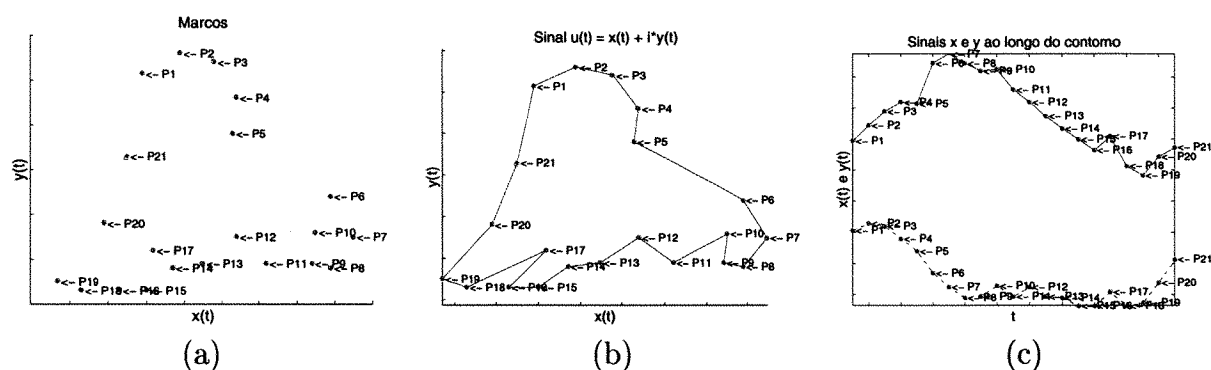


Figura 2.5: (a) Atribuição de ordem aos marcos da figura 2.4 (d) – tratados agora como vértices de uma linha poligonal; (b) Interpolação dos marcos seguindo a ordem atribuída – formação do polígono; (c) Formação do sinal complexo.

da forma e $c(t)$ é apenas uma representação genérica que se assume significativa para a caracterização da forma. Podemos então extrair $u(t) = x(t) + jy(t)$ como sendo um sinal complexo paramétrico que pode ser utilizado como entrada de vários algoritmos de extração de características.

A interpolação dos marcos garante que os pontos ao longo do contorno do polígono seja uniformemente espaçados, o que é fundamental para aplicação de vários métodos de processamento de sinais como a transformada em *Wavelets*. Um subproduto deste procedimento é o fato de que o número total de pontos interpolados pode ser escolhido como sendo potência de 2, permitindo a aplicação de algoritmos eficientes (FFT, i.e. $n \log(n)$) para calcular a transformada em *Wavelets*.

Alguns algoritmos têm como entrada matrizes que representam a região da forma. Seja M (Figura 2.6 (c)) uma matriz binária de valor 1 nas posições de borda e interior de uma forma e 0 nas demais posições. É possível estimar M a partir de $c(t)$ utilizando um procedimento derivado do algoritmo de propagação de rótulos (Figura 2.6 (b)).

Extraída a representação, esta pode ser aplicada como ponto de partida para caracterização da forma e posterior aplicação de procedimentos de reconhecimentos de padrões. Em razão da importância da fase de descrição do objeto de estudo em termos de atributos, tanto no contexto de análise de formas quanto de morformetria, são apresentados a

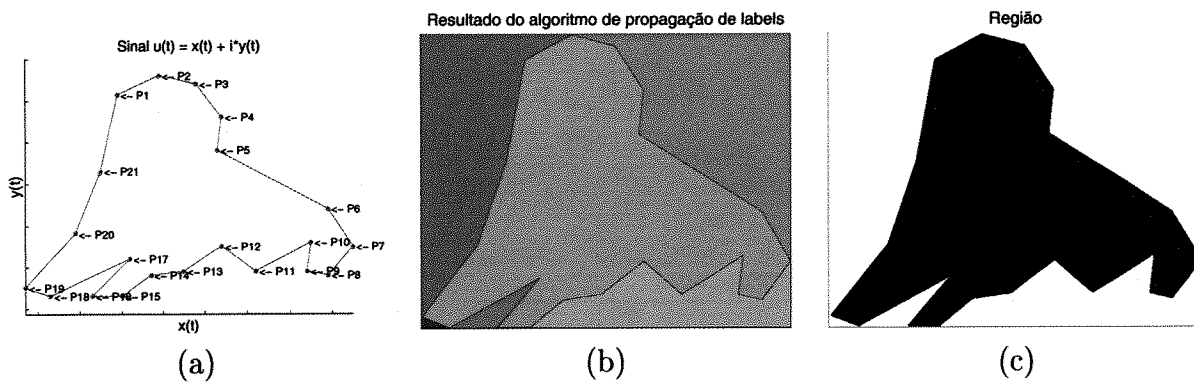


Figura 2.6: (a) Contorno da polígono resultante da interpolação dos marcos; (b) Resultado do algoritmo de propagação de rótulos; (c) Região do polígono resultante da interpolação de marcos.

especificação e um modelo de verbete (Tabela 2.1) usado para catalogação de descritores mono e multiescala (Ver apêndices A e B). Visto que o enfoque maior dessa dissertação é o estudo de características multiescala, nos capítulos que se seguem este tema será abordado com mais ênfase.

1	Nome
2	Breve descrição
3	Relação com transformações afins (invariância ou variância associadas à rotação, translação e escala)
4	Implementações
5	Características derivadas

Tabela 2.1: Verbetes.

2.4 Exemplo de verbete

Dimensão Fractal ou Dimensão de *Hausdorff-Besicovitch*

Descrição: Medidas fractais são utilizadas quando o problema requer análise de complexidade de estruturas “auto-similares” ao longo de várias escalas. Uma medida fractal largamente aplicada é a *dimensão fractal*.

A *dimensão topológica* (d_T) é dada pelo número de graus de liberdade que caracteriza a posição de um ponto num conjunto. Por exemplo, a dimensão topológica de um ponto é 0, de uma curva é 1, de um plano é 2.

Um outro conceito de dimensão pode ser apresentado (Dimensão de “*Hausdorff-Besicovitch*”, denotado por d).

No R^N , $0 \leq d \leq N$ e $0 \leq d_T \leq N$ (observe que $d \geq d_T$) e a dimensão topológica assume valores inteiros, o que não acontece no caso da dimensão de *Hausdorff-Besicovitch*. No caso de curvas planares, essa dimensão tem um importante conceito que pode ser aplicado a análise de complexidade, quanto mais próximo de 2 é a dimensão, mais a curva “preenche” o plano a qual pertence. Como d pode assumir valores não inteiros, foi atribuído a ele o nome *dimensão fractal*.

Tipo de entrada: Região.

Invariância à Rotações e Translações.

Implementações:

- *Box-Counting*. Seja S um conjunto no R^2 , e $M(\varepsilon)$ o número de bolas abertas de raio ε necessários para cobrir S . Uma bola aberta de raio ε e centro em (x_0, y_0) , em R^2 , pode ser definida como um conjunto $\{(x, y) \in R^2 | ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\}$. A dimensão fractal d dada pela abordagem *box-counting* é definida como

$$M(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d} \quad (2.1)$$

- *Método de Dilatações ou Salsicha de Minkowsky*. Podemos definir a área de influência de uma forma como sendo o conjunto de pontos localizados dentro de uma distância D desta forma. Uma abordagem para encontrar esta área é dilatar a forma com um disco de diâmetro D . Esse método é chamado *salsicha de Minkowsky*. A dimensão fractal pode ser obtida através da análise da variação da área de influência em relação a D .

Características Multiescala de Formas

2D

Neste capítulo abordaremos características multiescala de formas representadas através de um sinal complexo $u(t)$. Este sinal pode ser caracterizado por uma transformada multiescala $U(b, a)$, cujo parâmetro: b é associado à variável de tempo t de $u(t)$ e a , associado à escala.

3.1 Transformadas Espaço-Escala

Esta abordagem está associada à idéia de que características importantes de um sinal estão, geralmente, relacionadas a pontos de máximo ou mínimo local [10, 25, 24].

Os pontos de máximo local correspondem aos *zero-crossings* da primeira derivada do sinal. Um fato a ser levado em consideração é a tendência a enfatizar ruídos das altas frequências nos métodos de diferenciação, que pode ser compensado com o uso de filtros passa-baixa.

Como exemplo, utilizaremos o filtro da gaussiana. Neste caso, podemos encontrar o sinal desejado através da convolução da derivada do sinal $u(t)$, representada por $u^{(1)}(t)$, com a Gaussiana $g(t)$, aplicando a propriedade da convolução

$$u^{(1)}(t) * g(t) = (u(t) * g(t))^{(1)} = u(t) * g^{(1)}(t) \quad (3.1)$$

Os pontos extremos de $u(t)$ podem ser encontrados a partir da busca por *zero-crossings* do resultado da convolução.

É importante notar que o filtro da Gaussiana tem um parâmetro, referente ao desvio padrão, que controla o grau de suavização do filtro. O espaço-escala de $u(t)$ é definido como uma evolução do conjunto de pontos extremos ao longo do parâmetro de escala.

Seja $u(t)$ o sinal a ser analisado, e $g_a(t)$ a Gaussiana com desvio padrão $a > 0$

$$g_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2a^2}\right) \quad (3.2)$$

A convolução entre $u(t)$ e $g_a(t)$ é definida como

$$U(t, a) = u(t) * g_a(t) \quad (3.3)$$

Assim, podemos definir espaço-escala como sendo o conjunto de *zero-crossings* de $U^{(1)}(t, a)$, onde

$$U^{(1)}(t, a) = u(t) * g_a^{(1)}(t) \quad (3.4)$$

3.2 Transformadas Tempo-Freqüência

A transformada de *Fourier* descreve um sinal de forma global. Uma alternativa para análise local de dados é dada pela *transformada de Fourier de tempo reduzido*, que introduz uma janela que permite selecionar uma porção do sinal.

Seja a transformada de *Fourier* de um sinal $u(t)$ denotada da seguinte maneira

$$U(f) = F(u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.5)$$

A transformada de *Fourier* de tempo reduzido é dada por

$$U(f) = Fu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t - b)u(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.6)$$

onde $g(t)$ representa a função janela.

A análise de tempo-freqüência baseada na aplicação da Gaussiana como função janela é chamada de *transformada de Gabor*. Uma propriedade muito interessante da transformada de *Gabor* é que ela permite análise local também no domínio do tempo.

No capítulo 4 serão abordadas as transformadas Tempo-Escala. Essas transformadas são aplicadas a dados em que a transformada de Fourier Janelada não é adequada, pela variação da freqüência.

3.3 Curvatura Multiescala Baseada em Fourier

O cálculo da estimativa da curvatura usando a propriedade da derivada de *Fourier* pode ser realizada em contornos representados por sinais $x(t)$ e $y(t)$ ou em contornos representados por sinais complexos $u(t)$.

1. $c(t) = (x(t), y(t))$

No caso em que o contorno é representado por um sinal paramétrico, a curvatura $k(t)$ é representada pela equação 3.7.

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.7)$$

É necessário então, o cálculo da primeira e da segunda derivada dos sinais $x(t)$ e $y(t)$. Seja $X(f)$ e $Y(f)$ as transformadas de *Fourier* de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. A propriedade da derivada de *Fourier* nos fornece

$$\begin{aligned}\dot{X}(f) &= j2\pi f X(f) \\ \dot{Y}(f) &= j2\pi f Y(f) \\ \ddot{X}(f) &= -(2\pi f)^2 X(f) \\ \ddot{Y}(f) &= -(2\pi f)^2 Y(f)\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde j é o número complexo e $\dot{X}(f)$, $\dot{Y}(f)$, $\ddot{X}(f)$ e $\ddot{Y}(f)$ denotam as transformadas de *Fourier* $\dot{x}(f)$, $\dot{y}(f)$, $\ddot{x}(f)$ e $\ddot{y}(f)$ respectivamente, assim

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F^{-1}(\dot{X}(f)) \\ \dot{y}(t) &= F^{-1}(\dot{Y}(f)) \\ \ddot{x}(t) &= F^{-1}(\ddot{X}(f)) \\ \ddot{y}(t) &= F^{-1}(\ddot{Y}(f))\end{aligned}\tag{3.9}$$

2. $u(t) = x(t) + jy(t)$

As derivadas de $u(t)$ são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= \dot{x}(t) + j\dot{y}(t) \\ \ddot{u}(t) &= \ddot{x}(t) + j\ddot{y}(t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

E as transformadas de *Fourier* de $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ podem ser definidos através de $U(f)$.

$$\begin{aligned}\dot{U}(f) &= j2\pi f U(f) \\ \ddot{U}(f) &= -(2\pi f)^2 U(f)\end{aligned}\tag{3.11}$$

Assim, $\dot{u}(t) = F^{-1}(\dot{U}(f))$ e $\ddot{u}(t) = F^{-1}(\ddot{U}(f))$.

Temos ainda que considerar

$$\dot{u}(t)\ddot{u}^*(t) = \dot{x}(t)\dot{y}(t) + \ddot{x}(t)\ddot{y}(t) - j(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)) \quad (3.12)$$

$$|\dot{u}(t)|^3 = (\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2})^3 = (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}} \quad (3.13)$$

Verifique que a parte imaginária da equação 3.12 é igual a -1 multiplicado pelo numerador da equação 3.7 e que $|u(t)|^3$ equivale ao denominador (equação 3.13). Portanto, podemos denotar a curvatura de um sinal complexo como sendo

$$k(t) = \frac{-Im(\dot{u}(t)\ddot{u}^*(t))}{|\dot{u}(t)|^3} \quad (3.14)$$

Observe que a propriedade da derivada de *Fourier* pode ser aplicada à $u(t)$, $x(t)$ ou $y(t)$, para estimar os sinais necessários para o cálculo da curvatura, no entanto, é importante enfatizar que os sinais obtidos são consequência de um filtro passa-alta, o que acentua a influência de ruídos de alta frequência. Este problema pode ser amenizado com a utilização de um filtro passa-baixa multiescala.

Podemos aplicar por exemplo um filtro gaussiano $g(t)$, com desvio padrão a .

$$g(t) = g_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \iff G(f) = G_{\frac{1}{a}}(f) = \exp\left(-\frac{(2\pi)^2 f^2}{2\left(\frac{1}{a}\right)^2}\right) \quad (3.15)$$

onde a representa a *escala analisada* e $\frac{1}{a}$ está associado à *banda da frequência do filtro*.

Podemos então denotar como $\hat{u}(t, a)$ como sendo uma família de curvas suavizadas definidas como resultado da multiplicação de $U(f)$ pelo filtro $G_{\frac{1}{a}}(f)$

$$\hat{u}(t, a) = u * g_a(t) = F^{-1}(U_{\frac{1}{a}}(f)) = F^{-1}(U(f)G_{\frac{1}{a}}(f)) \quad (3.16)$$

Assim, definimos

$$\begin{aligned}\hat{u}(t, a) &= \dot{u} * g_a(t) = F^{-1}(\dot{U}_{\frac{1}{a}}(f)) = F^{-1}(\dot{U}(f)G_{\frac{1}{a}}(f)) \\ \hat{u}(t, a) &= \ddot{u} * g_a(t) = F^{-1}(\ddot{U}_{\frac{1}{a}}(f)) = F^{-1}(\ddot{U}(f)G_{\frac{1}{a}}(f))\end{aligned}\quad (3.17)$$

Notemos que o filtro gaussiano modifica a representação da amplitude do contorno, implicando no efeito *shrinking*. É importante notar que isto influi na estimativa da curvatura pois a curvatura não é invariante a escala. Este problema pode ser minimizado através da conservação de energia ou do perímetro do sinal.

Normalizando $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ de forma a prevenir o *shrinking*, podemos definir **curvograma** de $u(t)$ como sendo

$$k(t, a) = \frac{-Im(\dot{u}(t, a)\ddot{u}^*(t, a))}{|\dot{u}(t, a)|^3} \quad (3.18)$$

3.4 Energias Multiescala

Neste documento trataremos de duas características relacionadas a energia multiescala, a energia de dobramento e a energia de Wavelet. A energia de Wavelet será tratada no seção 4.3.

3.4.1 Energia de Dobramento

A *energia de dobramento* é uma medida global, invariante a translação, rotação e reflexão, podendo ser normalizada com relação a mudança de escala, sendo freqüentemente utilizada como medida de complexidade.

A energia de dobramento expressa a quantidade de energia necessária para transformar um contorno fechado em um círculo com o mesmo perímetro do contorno original [10, 24], sendo definida no caso discreto como

$$\hat{B} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} k(n)^2 \quad (3.19)$$

onde N representa o número de pontos do contorno e $k(n)$ a curvatura no ponto n do contorno.

A versão multiescala da energia de dobramento é definida pela aplicação da equação 3.19 nas linhas do curvograma, indexada pelo parâmetro de escala a .

$$\hat{B}(a) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} k(a, n)^2 \quad (3.20)$$

Note que, por utilizar a curvatura, que é uma medida variante à escala, a energia de dobramento multiescala é dependente da escala, o que significa que está relacionada a um círculo de mesmo perímetro L que o contorno original. Podemos utilizar L^2 como fator de normalização e definir *energia de dobramento multiescala normalizada* (*normalized multiscale bending energy* - NMBE)

$$B(a) = \frac{L^2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} k(a, n)^2 \quad (3.21)$$

Transformada em Wavelets de Formas Representadas por Marcos

As transformadas em *Wavelets* são aplicadas a dados que exibem conteúdos de frequência que mudam rapidamente ao longo do tempo, para os quais a transformada de *Fourier* não é adequada, pois não permite uma análise local do conteúdo de frequência do sinal. Eventos que ocorrem em intervalos de tempos distintos, mesmo que bastante remotos, contribuem de maneira global para a transformada de *Fourier*, afetando a representação como um todo, visto que a transformada de *Fourier* está baseada na integração de toda a função para o cálculo de cada frequência (como mostra a equação 3.5).

A transformada de *Fourier* janelada permite uma análise da frequência do sinal localmente no tempo. Apesar disso, utiliza a mesma janela para todas as frequências, enquanto as transformadas em *Wavelets* levam em consideração o fato de que altas frequências ocorrem em curtos intervalos de tempo enquanto componentes de baixa frequência mantêm força

durante a evolução do sinal, sendo definida, no caso contínuo como

$$U[\psi, u](b, a) = U_\psi(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) u(t) dt \quad (4.1)$$

$$U_\psi(b, a) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a, f) U(f) e^{j2\pi f b} df$$

nesta equação, $a > 0$ refere-se à escala e b está associado ao deslocamento da janela.

Uma das características mais importantes das transformadas em *Wavelets* é a habilidade de separar eventos transientes, evitando que modificações locais no sinal afetem toda a representação. Esta representação é desejável em casos como oclusão parcial.

A *representação-w* de um sinal $u(t)$ tem como características

- **Unicidade.** As transformadas em *Wavelets* tem inversa.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^{-\frac{1}{2}} U_\psi(b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{(db)(da)}{a^2} \quad (4.2)$$

- **Invariância a transformações geométricas.** As transformadas em *Wavelet* possuem as propriedades de linearidade e a covariância, o que nos permite afirmar que são invariantes à:

1. **Translação.** Transladar formas em uma imagem por um vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$ é equivalente a adicionar uma constante complexa $z = x_0 + jy_0$ ao sinal $u(t)$. Esta operação não afeta a representação-w pois

$$U[\psi, u(t) + z] = U[\psi, u(t)] + U[\psi, z] = U[\psi, u(t)], z \in C \quad (4.3)$$

2. **Escala.** Escala homogênea do contorno por uma constante c afeta a magnitude e a parametrização de $u(t)$. Neste caso, a representação-w é covariante a

transformação pois

$$U[\psi, c_1 u(\frac{t}{c_2})](b, a) = c_1 U[\psi, u(t)](\frac{b}{c_2}, \frac{a}{c_2}), c_1, c_2 \in R^+ \quad (4.4)$$

3. *Rotação.* Rotacionar um objeto por um ângulo θ implica na multiplicação do sinal $u(t)$ por $e^{j\theta}$ e no deslocamento da parametrização por uma constante t_0 . Assim,

$$U[\psi, e^{j\theta} u(t - t_0)](b, a) = e^{j\theta} U[\psi, u(t)](b - t_0, a), t_0 \in C, \theta \in [0, 2\pi) \quad (4.5)$$

- **Modificações locais na forma.** A representação-w geralmente é afetada localmente por modificações na forma devido a característica de rápido decaimento da maioria da *Wavelets*.
- **Eficiência e fácil implementação** Calcular a representação-w envolve convoluções circulares implementadas de maneira fácil e computacionalmente eficiente tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Neste trabalho será utilizada a transformada em *Wavelet* com derivadas da gaussiana.

- **Derivadas da Gaussiana.** Em particular, temos a derivada de segunda ordem da gaussiana, conhecida como *Wavelet de Marr* ou *Chapéu Mexicano*.

$$\psi_g^{(2)}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}} \iff \Psi_g^{(2)}(f) = -(2\pi f)^2 e^{-\frac{f^2}{2}} \quad (4.6)$$

4.1 Interpretação Geométrica da Transformada em Wavelets usando as Derivadas da Gaussiana

É notável a importância de operadores de diferenciação no contexto de análise de sinais. Esses operadores estão associados, por exemplo, ao cálculo do vetor tangente e à curvatura, a partir dos quais é possível identificar uma série de outras características de formas tais como, pontos de inflexão, cantos côncavos e convexos e diferentes medidas de complexidade [10, 2]. Nesta seção será apresentada uma maneira de calcular a derivada de um sinal usando *Wavelets*.

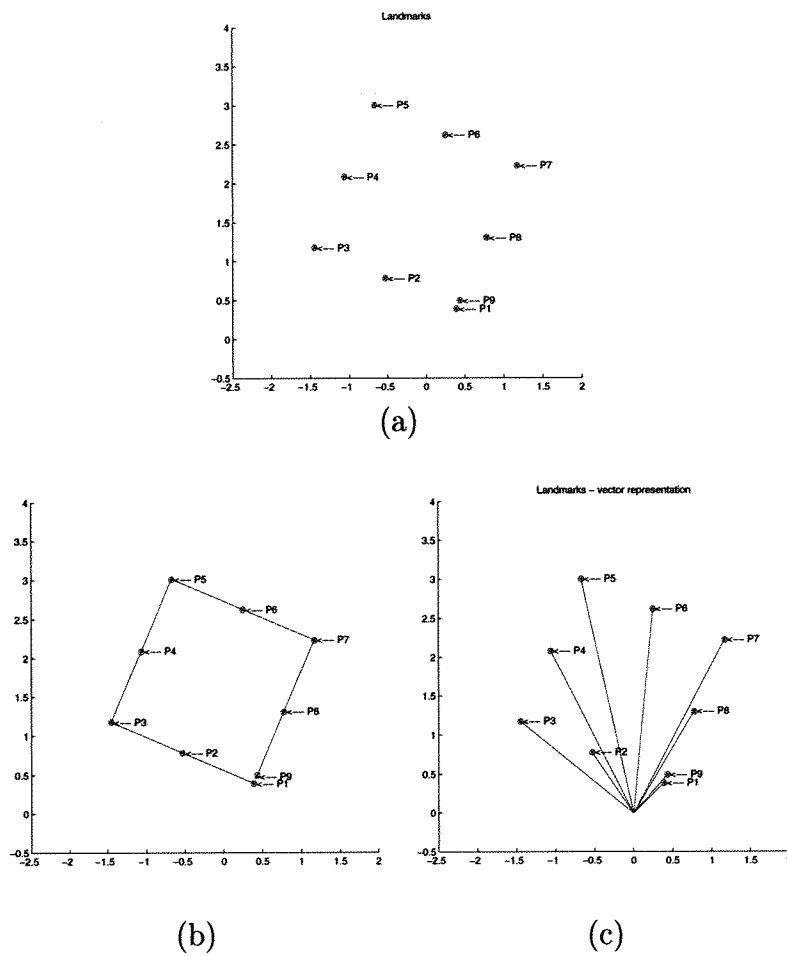


Figura 4.1: (a) Representação de um quadrado por marcos; (b) Representação de um quadrado por marcos interpolados; (c) Representação por vetores do objeto em (a).

Observe a equação 4.1 e pelo teorema da convolução de *Fourier* podemos notar que a transformada em *Wavelet* pode ser tratada, no espaço do tempo como a convolução do sinal pelo kernel ψ .

Teorema da Convolução. Sejam $g(t)$ e $h(t)$ sinais complexos e denotemos $G(f)$ e

$H(f)$ como sendo a transformada de *Fourier* destes sinais respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} g * h(t) &\leftrightarrow G(f)H(f) \\ g(t)h(t) &\leftrightarrow G * H(f) \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde, $g * h(t)$ representa a convolução do sinal $g(t)$ pelo sinal $h(t)$ e $G * H(f)$ a convolução de $G(f)$ por $H(f)$ [10][16].

Assim, pela propriedade da diferenciação de *Fourier* e pela propriedade da convolução enunciadas a seguir, temos que, dado ψ como sendo a n -ésima derivada da gaussiana, temos que o módulo da transformada em um ponto P em uma dada escala a , $U(a, P)$, é dado por uma aproximação da n -ésima derivada de $u(t)$ em P .

Propriedade da Diferenciação de Fourier. Seja $g(t) \leftrightarrow G(f)$ o par de Fourier e a um valor não negativo, então

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} = D_n(f)G(f) \quad (4.8)$$

onde $D_n(f) = (j2\pi f)^n$ [10] [16].

Propriedade da Convolução de Fourier. Sejam $u(t)$ e $g(t)$ sinais complexos e $f^n(t)$ a n -ésima derivada de $f(t)$, então [10] [16]

$$u^n(t) * g(t) = (u(t) * g(t))^n = u(t) * g^n(t) \quad (4.9)$$

Uma outra observação importante é que, visto que a transformada em *Wavelets* usando as derivadas da gaussiana, denotada neste trabalho por U_g , é dada por uma aproximação da derivada do sinal, podemos estimá-la pelo método de diferenças finitas. Assim, podemos considerar U_g como sendo combinação linear dos vetores formados pelos marcos em relação à origem do plano.

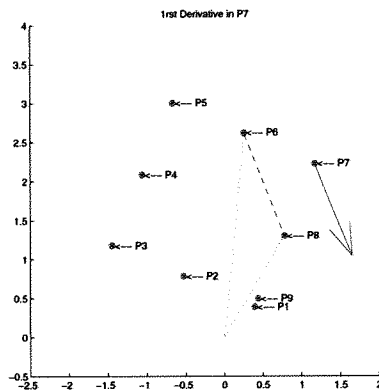


Figura 4.2: Segunda derivada do sinal dado na Figura 4.1(b) no ponto P7, estimado pelo método de diferenças.

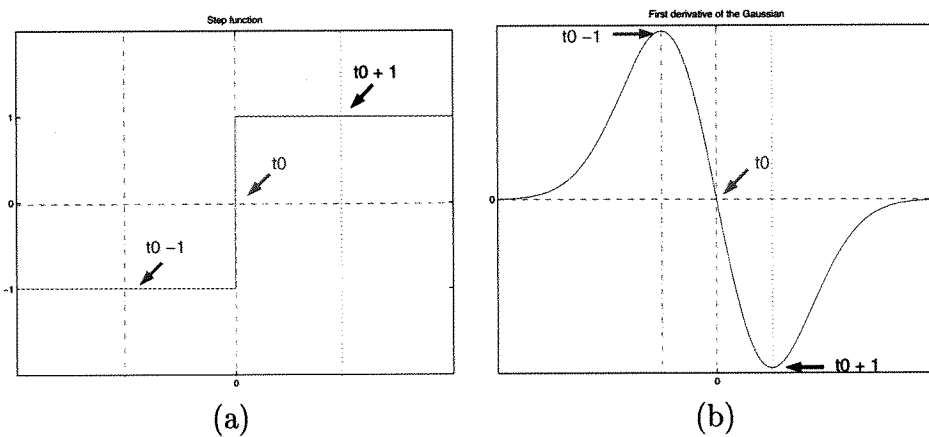


Figura 4.3: (a) Wavelet mãe $[-1 \ 0 \ 1]$; (b) Wavelet mãe primeira derivada da Gaussiana.

4.1.1 Visualização das Propriedades Geométricas da Transformada em Wavelet usando as Derivadas da Gaussiana

Note que é possível aproximar o valor do vetor tangente do sinal interpolado através da transformada em *Wavelets*. Seja $u(t) = x(t) + jy(t)$ um sinal representado uma linha poligonal (Figura 4.1 (b)). Para cada t_0 , $(x(t_0), y(t_0))$ é definido um vetor centrado na origem e sentido $(x(t_0), y(t_0))$ (Figura 4.1 (c)). Então, é possível estimar o vetor tangente de $u(t)$ em t_0 como o vetor diferença $\vec{v}'_{t_0} = \vec{v}_{t_0+1} - \vec{v}_{t_0-1}$. Por exemplo, na figura 4.2, calcula-se a primeira derivada do sinal no ponto P7 pela diferença dos vetores formados entre a origem e os pontos P8 e P6.

Observe que \vec{v}'_{t_0} pode ser definido como $\vec{v}'_{t_0} = \psi(t_0 - 1)u(t_0 - 1) + (\psi(t_0)u(t_0)) + (\psi(t_0 + 1)u(t_0 + 1))$, para $\psi(t_0 - 1) = -1$, $\psi(t_0) = 0$ e $\psi(t_0 + 1) = +1$ denotado como $[-1 \ 0 \ 1]$. Isso é localmente equivalente ao produto interno entre ψ e u em (t_0) . Esta idéia pode ser generalizada tomando tomando ψ como sendo uma *Wavelet*, neste caso a primeira derivada da gaussiana, ou seja, uma versão suavizada de $[-1 \ 0 \ 1]$ (Figura 4.3 (a) e (b))¹.

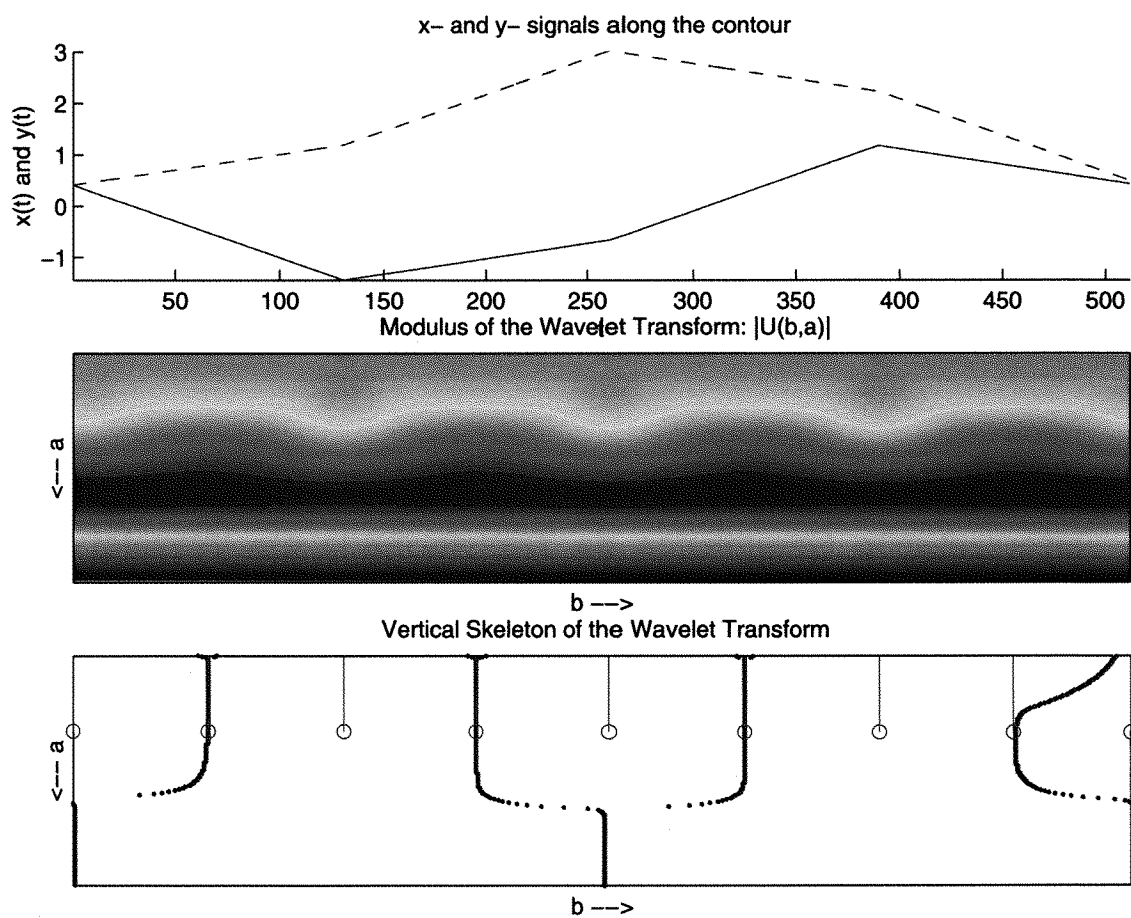


Figura 4.4: Transformada em Wavelet com a primeira derivada da Gaussiana, aplicada ao sinal da Figura 4.1(b).

¹Alguém pode se perguntar sobre a inversão dos sinais na passagem da suavização de $[-1 \ 0 \ 1]$ para a primeira derivada da gaussiana. Se for esse o caso, observe que dado que na equação 4.1 que o deslocamento da janela é dado por $-b$.

A transformada em *Wavelet* usando a segunda derivada da gaussiana também pode ser interpretada geometricamente de forma análoga.

4.2 Transformada em Wavelet Tridimensional

A metodologia adotada para extração de coeficientes wavelet de dados tridimensionais considera cada dimensão de um sinal 3D $\vec{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ como um sinal real unidimensional. A transformada em wavelet (Equação 4.1) é aplicada a cada um dos sinais. A representação wavelet 3D $\vec{U}(b, a)$ é formada por esses coeficientes

$$\vec{U}(b, a) = (X(b, a), Y(b, a), Z(b, a)) \quad (4.10)$$

Denotamos o módulo da wavelet 3D como sendo

$$|\vec{U}(b, a)| = \sqrt{X(b, a)^2 + Y(b, a)^2 + Z(b, a)^2} \quad (4.11)$$

4.2.1 Interpretação Geométrica da Transformada em Wavelets 3D usando as Derivadas da Gaussiana

Nesta seção mostraremos uma extensão da interpretação obtida na Seção 4.1, onde é mostrada a relação entre a transformada em wavelet (usando as derivadas da Gaussiana como kernel) de curvas 2D e as derivadas deste sinal. Voltando aos princípios estudados, a transformada em wavelet de um sinal $u(t)$ com kernel sendo a n -ésima derivada da Gaussiana $g^{(n)}$ (denotada como $U(b, a)$, com $\psi = g^{(n)}$) é uma estimativa da n -ésima derivada de $u(t)$. Então, para um sinal tridimensional $\vec{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é possível calcular $X(b, a)$, $Y(b, a)$ e $Z(b, a)$ de forma a estimar a n -ésima derivada de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ respectivamente. Portanto, $X(b, a)$, $Y(b, a)$ e $Z(b, a)$ são as derivadas parciais de \vec{u} e a derivada total de \vec{u} em t pode ser estimada pela soma vetorial das derivadas parciais.

$$\vec{u}(t)^{(n)} \approx \vec{X}(b, a) + \vec{Y}(b, a) + \vec{Z}(b, a) \quad (4.12)$$

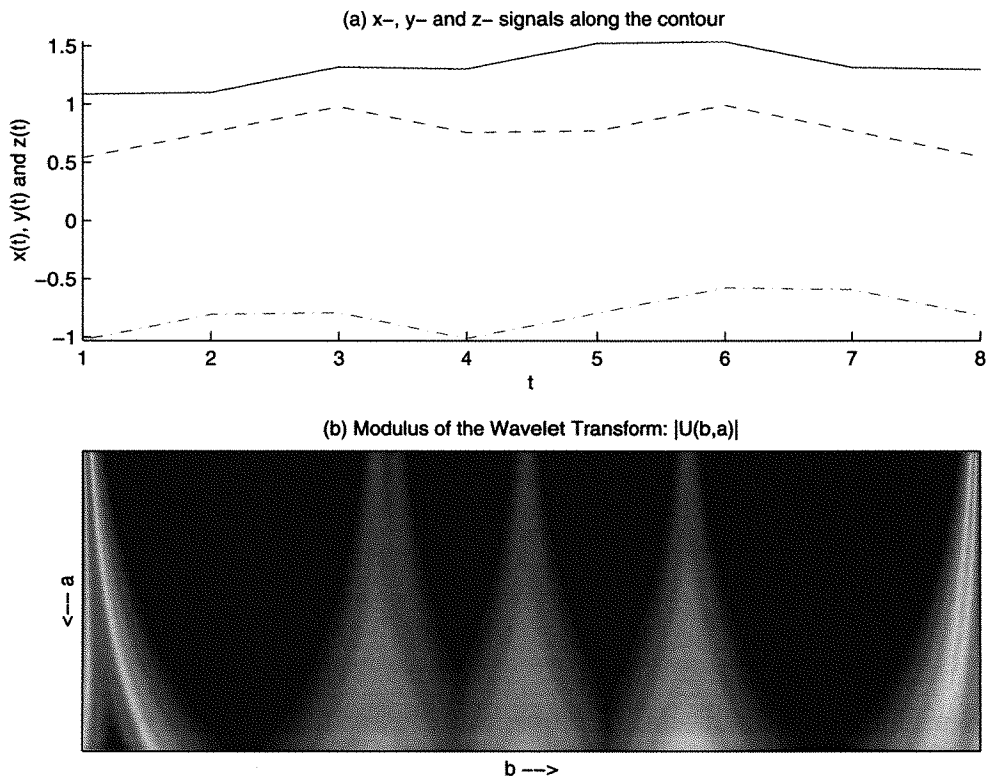


Figura 4.5: (a) Exemplo de dado simulado em termos de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. (b) $|\vec{U}(b, a)|$ de (a).

Isto significa que $|\vec{U}(b, a)|$ é uma estimativa de $|u^{(n)}|$. Portanto, $|\vec{U}(b, a)|$, com $\psi = g^{(1)}$ representa o tamanho do vetor tangente de \vec{u} em t e $|\vec{U}(b, a)|$, com $\psi = g^{(2)}$ é a medida da variação na direção (curvatura) de \vec{u} .

4.3 Energia de Wavelet

Uma alternativa à energia de dobramento que utiliza a *representação-w* ao invés do curvograma como representação multiescala do contorno é dada pela *energia de Wavelets*.

A *energia multiescala de Wavelets normalizada* (*normalized multiscale Wavelet energy* - NMWE) é dada por

$$NMWE_{\psi}(a) = \frac{1}{K^2 L} \int_{-\infty}^{\infty} |U_{\psi}(b, a)|^2 db \tag{4.13}$$

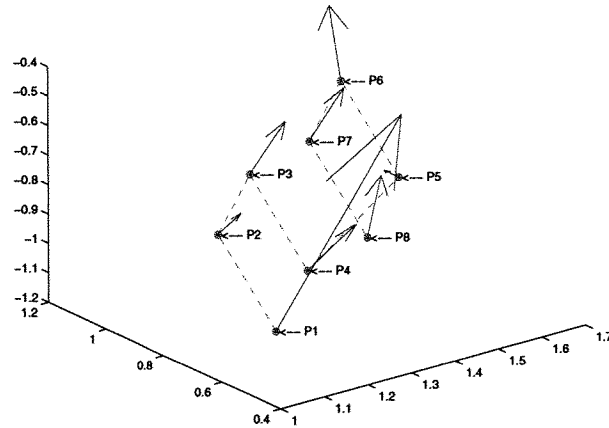


Figura 4.6: Estimativa da segunda derivada do sinal formado pelos sinais $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ da Figura 4.5(a).

onde a representa a escala analisada, K é um fator de normalização da escala. A versão discreta do NMWE é apresentada a seguir.

$$NMWE_{\psi}(a) = \frac{1}{K^2 L} \sum_{m=1}^N |U_{\psi}(b_m, a)|^2 db \quad (4.14)$$

Parte II

Seleção de Características e Classificação

Seleção de Características e Classificação

Muito das justificativas matemáticas relacionadas à seleção de atributos e classificação de objetos pode ser endereçado em conceitos concernentes à estatística multivariada. Assim, esse capítulo tem como objetivo apresentar uma base para o entendimento do reconhecimento estatístico de padrões, apresentando definições básicas de probabilidade e estatística e sua aplicação no contexto de seleção de atributos e classificação.

5.1 Reconhecimento de Padrões Estatístico

O reconhecimento de padrões ocupa papel de grande importância dentro do processo de análise de formas, sendo basicamente uma disciplina que tem como objetivo a classificação de objetos (padrões, que no caso estudado, representam formas) em classes.

Uma das abordagens de reconhecimento de padrões pode ser brevemente descrita como o processo que envolve a extração de características (tratada nos capítulos 3 e 4 e nos

apêndices B e A) e posterior normalização dessas características, seguidos da utilização de algoritmo para classificação [17]. Neste contexto, algumas definições devem ser apresentadas.

Padrão é uma descrição quantitativa ou estrutural do objeto de estudo, ou seja, um conjunto de características que representa um objeto. Uma família de padrões que possuem propriedades comuns são chamadas *classe*.

Um padrão pode ser considerado um vetor aleatório¹ $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, onde cada componente x_i representa o i -ésimo descritor do padrão e n é o número de descritores. O espaço formado pelos padrões ou vetores de características é chamado de espaço de características. No exemplo acima, a dimensão do espaço de características é n .

5.2 Seleção/Extração de Características

Um grande problema no projeto de um sistema de reconhecimento de padrões é definir quais características utilizar. Para tanto, existem duas abordagens

1. **extração de características.** métodos que resultam em novas características como transformações ou combinações das características originais.
2. **seleção de características.** algoritmos que selecionam um subconjunto de características do bloco original segundo um critério pré-determinado.

Apesar de raramente ser possível na prática determinar quais características descrevem melhor as classes, algumas regras gerais podem ser citadas [10] tanto para extração quanto para seleção.

1. Escolha características mais discriminativas.
2. Evite características com alta correlação.
3. Mantenha o número de características o menor possível.

¹Variável aleatória X [19, 11] é uma função definida num espaço amostral S que assume valores reais e está associada a um experimento aleatório. Vetor aleatório é um vetor onde cada elemento é uma variável aleatória.

4. Em alguns casos é interessante escolher características invariantes a transformações geométricas específicas.

Não há solução genérica e definitiva para escolher um conjunto de atributos ideais. Esta informação é altamente dependente do domínio (fenômeno) observado. Porém, o conjunto de atributos deve ser apropriado ao algoritmo de classificação escolhido e ter um bom poder de separação/discriminação. Assim, a fase de seleção tem como objetivo remover redundância entre características (ex.: medida estimada em centímetro, metro e quilômetro) e a redução de dimensionalidade (compactação de dados). Apresentamos dois métodos muito difundidos: *análise de componentes principais* e *análise canônica*.

5.2.1 Autovalores e Autovetores

Antes de começarmos a discutir PCA é necessário introduzir os conceitos de autovalores e autovetores. Dada uma matriz de transformação linear A aplicada a um vetor \vec{v} , podemos escrever a seguinte equação

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (5.1)$$

onde λ é um valor escalar complexo. Na equação 5.1 \vec{v} corresponde a um ou mais vetores cuja orientação não é afetada pela transformação linear definida por A . Neste caso, \vec{v} é denominado autovetor e λ o autovalor.

5.2.2 Análise de Componentes Principais (PCA)

A matriz de covariância das características é estimada e seus respectivos autovetores são usados para definir uma transformação linear cuja propriedade principal é minimizar a covariância entre as novas features transformadas ao longo dos eixos principais. Desta forma, maximiza-se a variância ao longo de cada novo eixo de tal forma que as novas características se tornem não correlacionadas [10, 26].

5.2.3 Análise Canônica

A análise canônica tem o mesmo objetivo de PCA, ou seja, estimar as direções de maior variação, com a diferença que PCA é usada em dados não estruturados (análise de uma única classe). A análise canônica utiliza a variação intra e inter classes, construindo matrizes chamadas *matrizes de dispersão* (ou *matriz de soma dos quadrados*)

intraclasse (S_{intra}) e *interclasses* (S_{inter}) [26, 10, 36], definidas respectivamente por

$$S_{intra} = \sum_{i=1}^K S_i \quad (5.2)$$

$$S_{inter} = \sum_{i=1}^K N_i (\bar{\mu}_i - \vec{M})(\bar{\mu}_i - \vec{M})^T \quad (5.3)$$

onde N é tamanho total da amostra; N_i é o tamanho da amostra da classe C_i ; K é o número de classes; $\bar{\mu}_i$ é um vetor com as médias dos atributos de C_i ; \vec{M} é um vetor com as médias dos atributos de todas as amostras; S_i é a matriz de dispersão da classe C_i , definida por

$$S_i = \sum_{i \in C_i} (\vec{v}_i - \bar{\mu}_i)(\vec{v}_i - \bar{\mu}_i)^T \quad (5.4)$$

onde \vec{v}_i é o vetor de atributos de cada amostra de C_i .

A *matriz de dispersão total* é dada por

$$S = \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i - \vec{M})(\vec{v}_i - \vec{M})^T \quad (5.5)$$

$$S = S_{intra} + S_{inter} \quad (5.6)$$

São computados os autovalores e autovetores da matriz ($S_{intra}^{-1} S_{inter}$), que visa aumentar a dispersão interclasses e minimizar a variação intraclases. A transformação pelos autovetores aplicados aos atributos originais resulta num espaço de características que possui maior variação interclasses.

5.2.4 Uso das distâncias entre agrupamentos para selecionar atributos mais discriminantes

Quando se tem conhecimento prévio da “*disposição dos dados*” é possível utilizar a distância entre agrupamentos como metodologia para classificação, levando em consideração tal distribuição. Por exemplo, dado um conjunto que representa homens de cinco

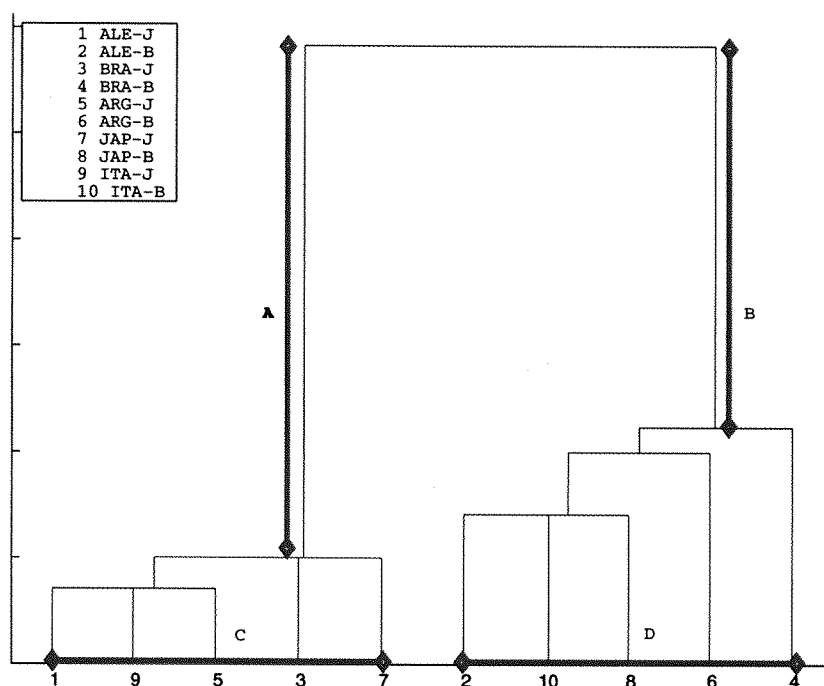


Figura 5.1: Seleção de atributos usando distância entre agrupamento

nacionalidades (alemã, brasileira, argentina, japonesa e italiana), e cada um desses grupos é subdividido entre jogadores de basquete e jóqueis, seria satisfatório encontrar jóqueis de diferente nacionalidades agrupados.

Nos casos como citado anteriormente, é possível selecionar atributos que melhor separem duas classes através do teste sistemático de cada uma das combinações de n características, tomando-se o conjunto que melhor balanceie a árvore de relacionamentos. Observe na Figura 5.1 que é possível achar relações entre as distâncias (representadas pelos “braços” do dendrograma) e o número de classes em cada agrupamento. Nesse exemplo, o desejável seria aumentar a distância entre os agrupamentos (controlado pelos parâmetros A e B) e minimizar a diferença no número de classes em cada agrupamentos (dado pelos parâmetros C e D).

5.3 Classificação de Formas

Após a escolha de características, extração e normalização das mesmas, devemos considerar o algoritmo de classificação. Existem duas categorias de algoritmos de classificação, i.e. classificação supervisionada e não-supervisionada.

Algoritmos de classificação supervisionada estão relacionados a problemas que envolvem associar um padrão a uma classe pré-definida; enquanto algoritmos de classificação não-supervisionada estão relacionados à definição das classes de uma população de exemplos inicialmente não rotulada.

5.3.1 Classificação Bayesiana

Grande parte das abordagens de reconhecimento estatístico de padrões estão voltadas para implementação da regra de decisão de Bayes ² [10, 36] dada por

$$\begin{aligned} x \in C_1 &\Rightarrow P(C_1)P(x|C_1) \geq P(C_2)P(x|C_2) \\ x \in C_2 &\Rightarrow P(C_1)P(x|C_1) < P(C_2)P(x|C_2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde x define o objeto a ser rotulado ou na classe C_1 ou na classe C_2 .

Classificação Bayesiana com múltiplas classes e atributos. A equação 5.7 pode ser generalizada para multiplas classes e atributos, como mostrado a seguir.

$$\vec{x} \in C_i \Rightarrow P(C_i)P(\vec{x}|C_i) = \max_{k=1..K} \{P(\vec{x}|C_k)P(C_k)\} \quad (5.8)$$

onde K é o número de classes.

A classificação bayesiana é utilizada quando o modelo estatístico da amostra (i.e. $P(x, C_i)$) é conhecida.

²Observe que pela equação C.3, a probabilidade condicional de C_1 dado x é $P(C_1|x) = \frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x)}$; similarmente, $P(C_2|x) = \frac{P(x|C_2)P(C_2)}{P(x)}$.

5.3.2 Distância ao Protótipo

Nesta abordagem de classificação supervisionada, é usado como parâmetro de decisão a distância de \vec{x} (padrão a ser classificado) ao centro de massa da distribuição a cada classe C_i . Neste caso, é fácil perceber que a questão principal é a escolha da medida de distância.

Podemos definir distância entre dois vetores aleatórios \vec{p} e \vec{q} como sendo a função $d \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz as seguintes propriedades[18]

1. $d(\vec{p}, \vec{q}) = d(\vec{q}, \vec{p})$
2. $d(\vec{p}, \vec{q}) \geq 0$
3. $d(\vec{p}, \vec{p}) = 0$

d é considerado *métrica* [10, 18] se além dessas condições

1. $d(\vec{p}, \vec{q}) = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \vec{q}$
2. $d(\vec{p}, \vec{q}) \leq d(\vec{p}, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{q})$ (desigualdade triangular)

A seguir, está a definição das medidas de distância usadas no decorrer do desenvolvimento dessa dissertação.

Distância Euclidiana. É a distância mais conhecida e utilizada³.

$$\begin{aligned}
 d_{Euclidiana}(\vec{p}, \vec{q}) &= d_{Minkowski,2}(\vec{p}, \vec{q}) \\
 &= \left[\sum_{j=1}^2 (p_j - q_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= [(\vec{p} - \vec{q})^T (\vec{p} - \vec{q})]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Essa distância só deve ser aplicada quando as características tiverem sido apropriadamente normalizadas.

³A distância euclidiana representa é a métrica de Minkowiski para $s = 2$.

Distância de Minkowski de ordem s ($d_{Minkowski,s}$) de $\vec{p} = [p_1 \dots p_d]$ e $\vec{q} = [q_1 \dots q_d]$ é dada por $d_{Minkowski,s}(\vec{p}, \vec{q}) = \|\vec{p} - \vec{q}\|_s = \left[\sum_{j=1}^d |p_j - q_j|^s \right]^{\frac{1}{s}}$.

Distância de Mahalanobis. É definida como [18]

$$d_{Mahalanobis}(\vec{p}, \vec{q}) = [(\vec{p} - \vec{q})^T K^{-1} (\vec{p} - \vec{q})]^{\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

onde K é a matriz de covariância do vetor aleatório X (\vec{p} e \vec{q} são realizações de X).

5.3.3 Análise de Agrupamentos

Classificação não-supervisionada ou análise de agrupamentos refere-se a situações onde o objetivo é estimar regras de decisão baseadas em dados de treinamento não rotulados [17, 10]. O processo de classificação não-supervisionado é considerado mais difícil que o supervisionado, pois o sistema de classificação tem que definir sozinho o número de classes e os atributos típicos (protótipos).

Existem duas abordagens básicas para os algoritmos de análise de agrupamentos:

1. **Agrupamento particional.** Agrupamento particional envolve a partição de n padrões em K agrupamentos (partições).
2. **Agrupamento hierárquico.** As técnicas inseridas neste grupo organizam dados numa sequência aninhada de grupos que podem ser indicado na forma de um dendrograma ⁴.

⁴*Dendrograma* é uma árvore cujo tamanho das arestas representam uma distância

Parte III
Resultados

Resultados experimentais

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos do estudo de estruturas morfológicas a partir da aplicação da estrutura fornecida pela disciplina de análise de formas computacional, apresentada nos capítulos anteriores.

6.1 Validação do Método

Tentando evitar quaisquer problemas relativos ao levantamento das características das amostras, foi elaborada uma metodologia para validação, que envolveu a criação de populações a partir da aplicação de transformações afins sobre um dado *indivíduo modelo*, seguida da aplicação do método nestes dados. Os resultados obtidos serão mostrados nesta seção.

6.1.1 Criação de Populações

Foi implementada uma função no *Matlab* para criar um conjunto de indivíduos resultantes de alguma transformação afim, aplicada a um contorno modelo.

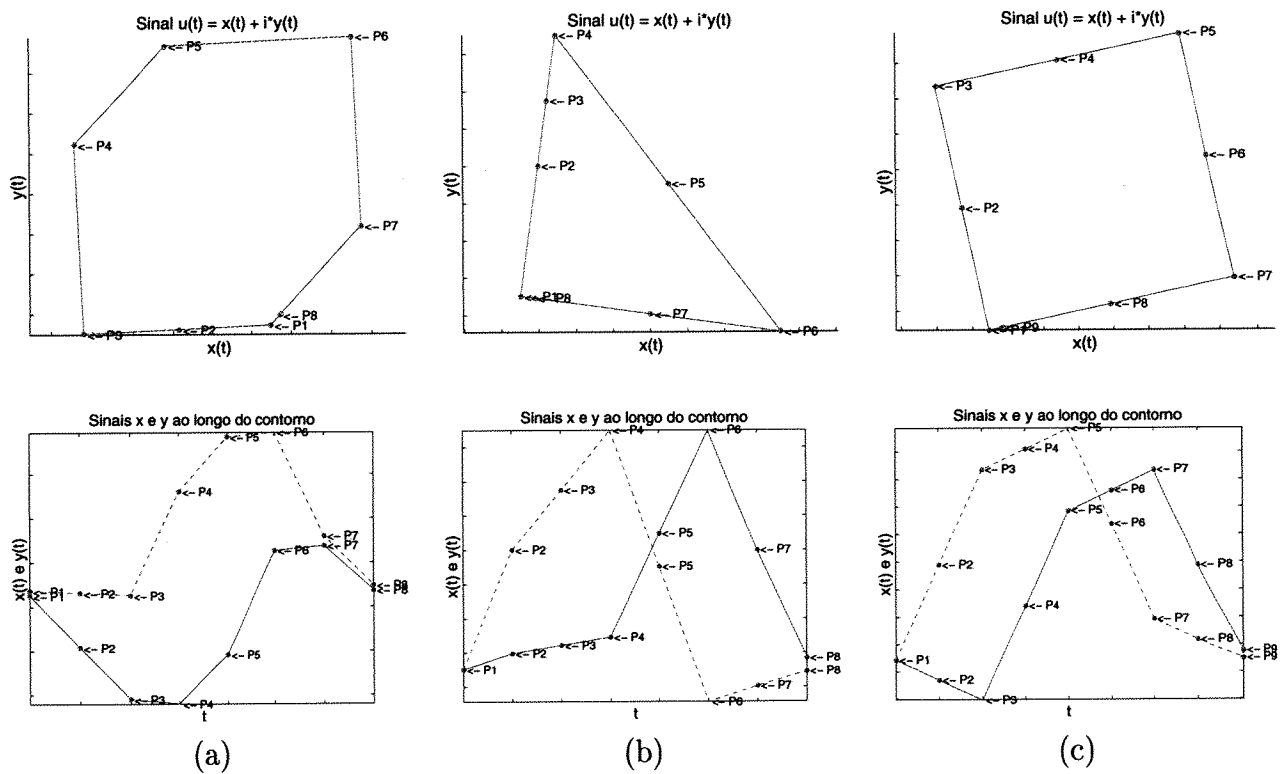


Figura 6.1: Exemplo de indivíduos - População de Hexágonos, Triângulos e Quadrados

Definimos uma transformação afim como sendo qualquer transformação que pode ser expressa na seguinte forma [10]:

$$\vec{q} = \alpha(A\vec{s} + \vec{b}) \quad (6.1)$$

em que:

A é qualquer matriz 2×2 real, não singular;

\vec{b} é qualquer vetor 2×1 real; e

α é qualquer valor escalar real.

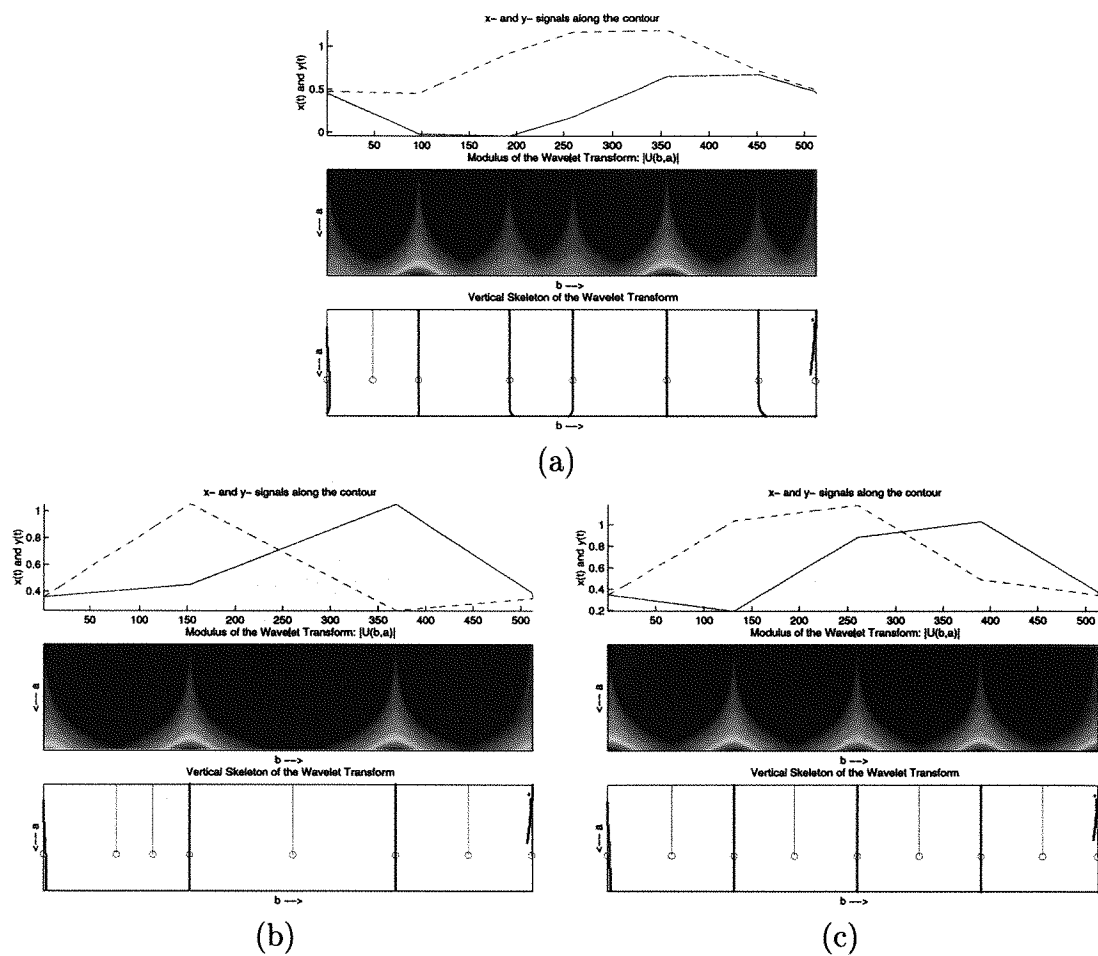


Figura 6.2: Transformada em *Wavelets*, usando a segunda derivada da gaussiana nas Figura 6.1(a); (b) e (c) respectivamente

6.1.2 Extração da Representação-W

Foi criado um conjunto de teste de três populações, dado a partir de modelos de *quadrado*, *triângulo* e *hexágono* (veja exemplos de indivíduos na Figura 6.1).

Nestes indivíduos, aplicamos uma transformada em *Wavelets* (Figuras 6.2 (a), 6.2(b) e 6.2(c)) e a partir dos dados gerados desta aplicação, utilizamos o algoritmo de agrupamento *linkage*.

Obtivemos um bom resultado, visto que, da aplicação desta metodologia, temos que

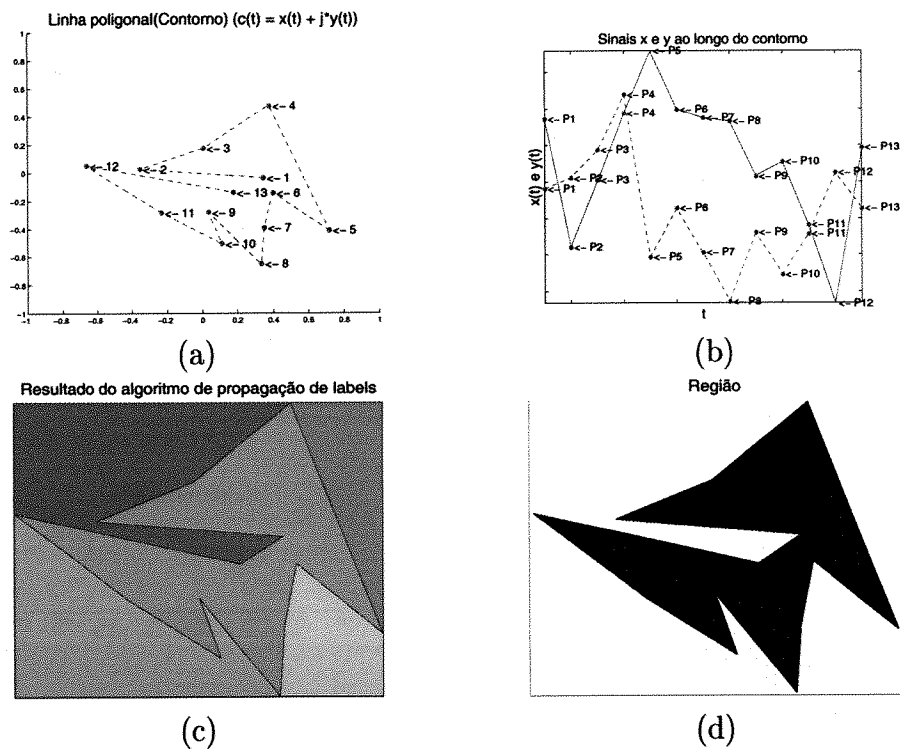


Figura 6.3: (a) Marcos originais e polígono interpolado a partir deles; (b) $x(t)$ e $y(t)$; (c) Resultado do algoritmo de propagação de labels; (d) Região do polígono.

indivíduos de mesma população são considerados muito semelhantes entre si, enquanto indivíduos de populações distintas são considerados muito diferentes.

6.2 Estudo da Morfologia do Cérebro Humano: Esquizofrenia

6.2.1 Obtenção dos Marcos

Os dados estudados nesta seção representam marcos de 28 imagens de cérebros humanos. Cada indivíduo utilizado é dado por um conjunto de 13 marcos anatômicos¹. Observe que os dados são divididos em duas classes: (1) exemplos diagnosticados com esquizofrenia representados pelo conjunto {6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}; e (2) casos

¹Estes dados foram extraídos de uma base de dados pública relacionada ao estudo de métodos de análise morfometria, podendo ser encontrado em <http://life.bio.sunysb.edu/morph/datasets.html> [9].

normais {1, 2, 3, 4, 5, 11, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28}.

A esses dados foi aplicada a técnica de extração de sinais previamente citada na seção 2.3 (Figura 6.3). Foram realizadas dois tipos de análise. Primeiramente, usando apenas a transformada em *Wavelet*, e após esta análise, utilizamos outro conjunto de características.

6.2.2 Análise através da Transformada em Wavelet

A metodologia de extração de sinais explicada anteriormente foi utilizada no conjunto de marcos relacionados à esquizofrenia. Os sinais obtidos são utilizados como entrada para a transformada em *Wavelets* com derivadas da gaussiana.

O conjunto de teste é agrupado através do algoritmo hierárquico linkage [10]. Este algoritmo tem como entrada uma matriz contendo a distância entre as amostras. Neste caso utilizamos a diferença ponto a ponto da transformada em *Wavelets*. Dadas duas formas representadas por sinais complexos $k(t)$ e $l(t)$ e seja $K_\psi(a, b)$ e $L_\psi(a, b)$ os coeficientes das transformadas em *Wavelets* de $k(t)$ e $l(t)$ respectivamente. Então, a distância entre $k(t)$ e $l(t)$ é denotada como:

$$d(k, l) = m(|K_\psi(a, b) - L_\psi(a, b)|) \quad (6.2)$$

onde $m(D)$ é o valor médio da matriz D .

Na Figura 6.2.2 vemos a saída do algoritmo linkage representada através de um dendrograma.

A taxa de acerto dos casos de esquizofrenia foi de 84,6% e os casos diagnosticados como normais tiveram taxa de acerto de 80,0%.

6.2.3 Análise através de Conjuntos de Características

Neste teste, utilizamos uma série de características (listadas na Tabela 6.1). Tentando identificar qual vetor de características resulta em melhor performance, foram realizados uma série de experimentos, usando vetores de 1, 2 ou 3 características. Cada possível

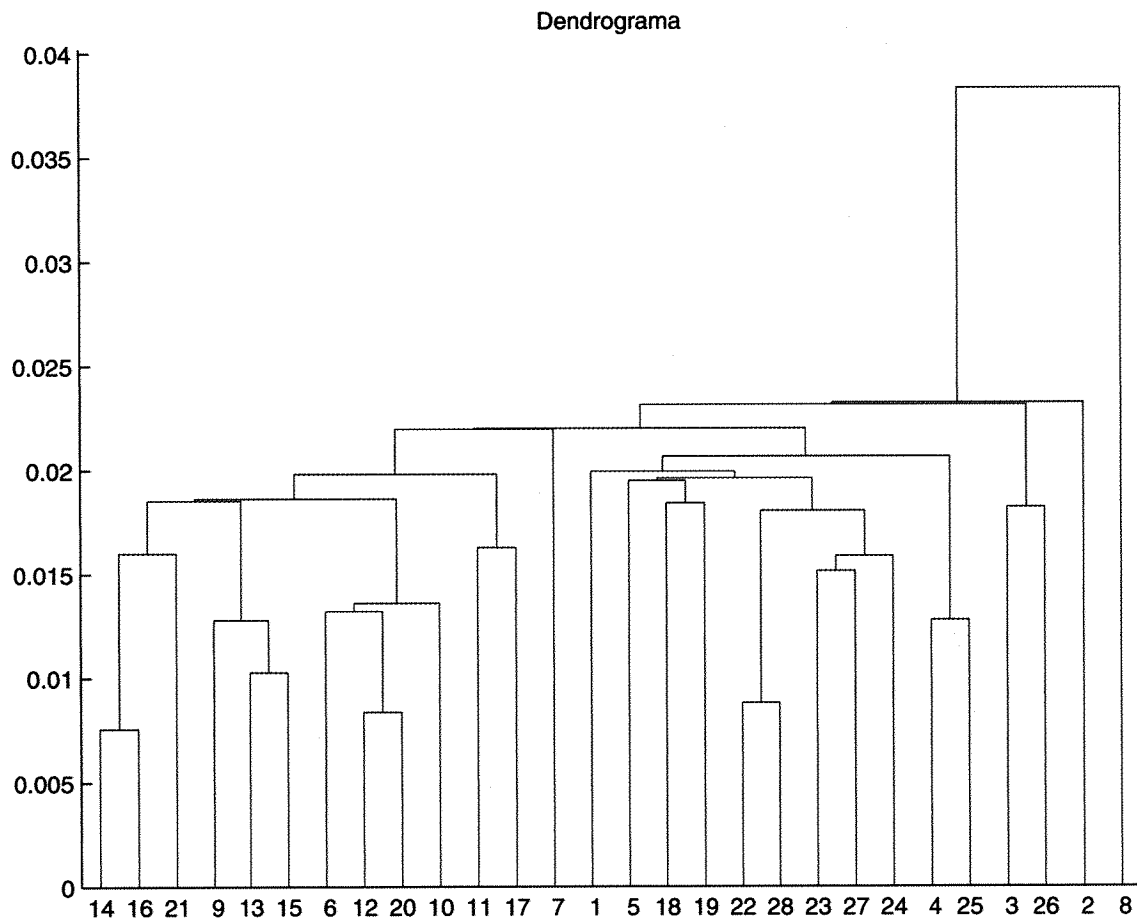


Figura 6.4: Resultado do agrupamento dos dados de esquizofrenia utilizando como parâmetro a distância ponto a ponto dos coeficientes da *Wavelet*.

Tabela 6.1: Características utilizadas para análise de dados relacionados a esquizofrenia

1	Perímetro
2	Dimensão fractal, pelo método Box-Counting
3	Transformada em <i>Wavelets</i>
4	Média, variância e entropia do histograma da transformada em <i>Wavelets</i>
5	Curvatura
6	Curvatura média, máxima e mínima
7	Energia de dobramento
8	Curvograma
9	Média, variância e entropia do histograma do curvograma

conjunto de características era treinado com 2/3 dos dados e testado com os dados restantes, utilizando um classificador de mínima distância aos protótipos. Neste processo foi medido a taxa de acerto de cada combinação de características, sendo realizado várias vezes, com diferentes conjuntos de treinamento e teste. Isto foi feito para selecionar combinações com um maior grau de confiança.

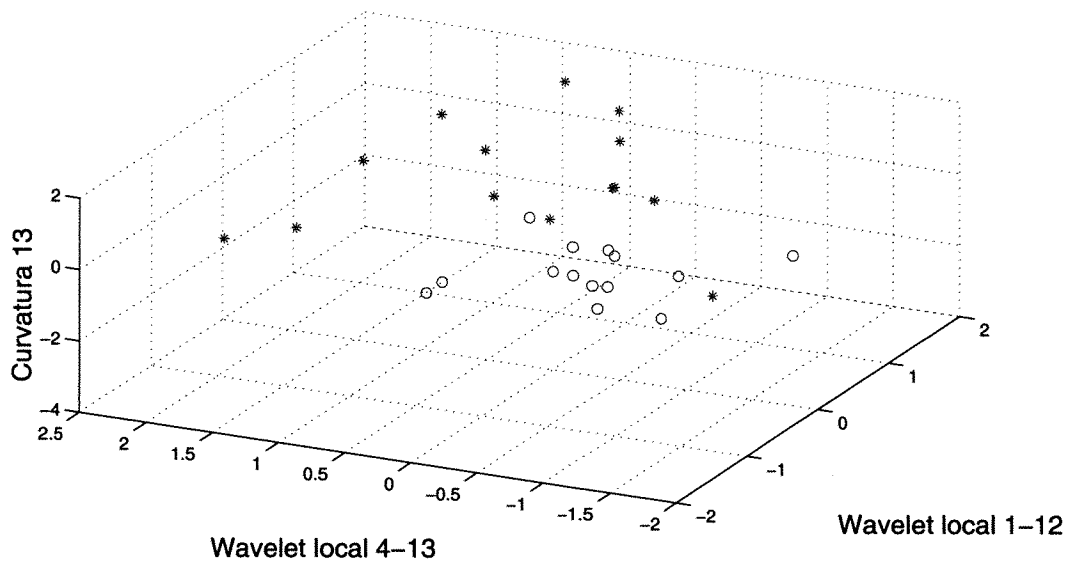


Figura 6.5: Melhor conjunto de características com 3 dimensões.

Vale notar que os melhores conjuntos de características alcançaram taxas de acerto superiores a 90%. Na Figura 6.5 está retratado o melhor espaço de características de dimensão 3 (curvatura no landmark 13; coeficiente wavelet na escala 4, no landmark 13; e coeficiente wavelet na escala 1, no landmark 12).

6.3 Estudo da Evolução de Estruturas Morfológicas Complexas: *Thrichomys apereoides*

6.3.1 Obtenção dos Marcos

Trataremos, nesta seção, dos critérios utilizados para o levantamento dos marcos anatômicos da mandíbula de espécimes de populações de *Thrichomys apereoides* estudados.

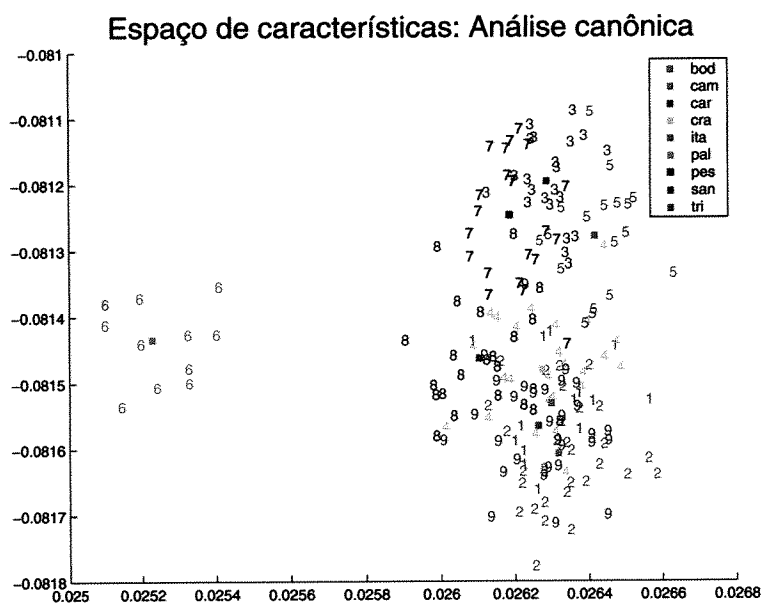


Figura 6.6: Espaço de características usando os 3 primeiros eixos da análise canônica

As medições foram realizadas em amostras pertencentes ao Museu Nacional (Rio de Janeiro) em um trabalho realizado pelo professor Sérgio Furtado dos Reis (IB/UNICAMP)[29, 12, 13]. As 200 amostras foram divididas em nove populações relacionadas às seguintes localidades, distribuídas em quatro estados do nordeste brasileiro:

1. **Ceará.** Itapagé; Campos Sales; Crato.
2. **Pernambuco.** Bodocó; Triunfo; Caruaru; Pesqueira.
3. **Alagoas.** Santana do Ipanema.
4. **Bahia.** Palmeiras.

Neste trabalho, foram utilizados, para motivo de representação dos roedores a serem analisados, marcos anatômicos localizados na superfície lateral esquerda da mandíbula, como mostrado na Figura 2.1. Estes marcos estão relacionados a locais de inserção de músculos e desenvolvimento de dentes nestes animais.

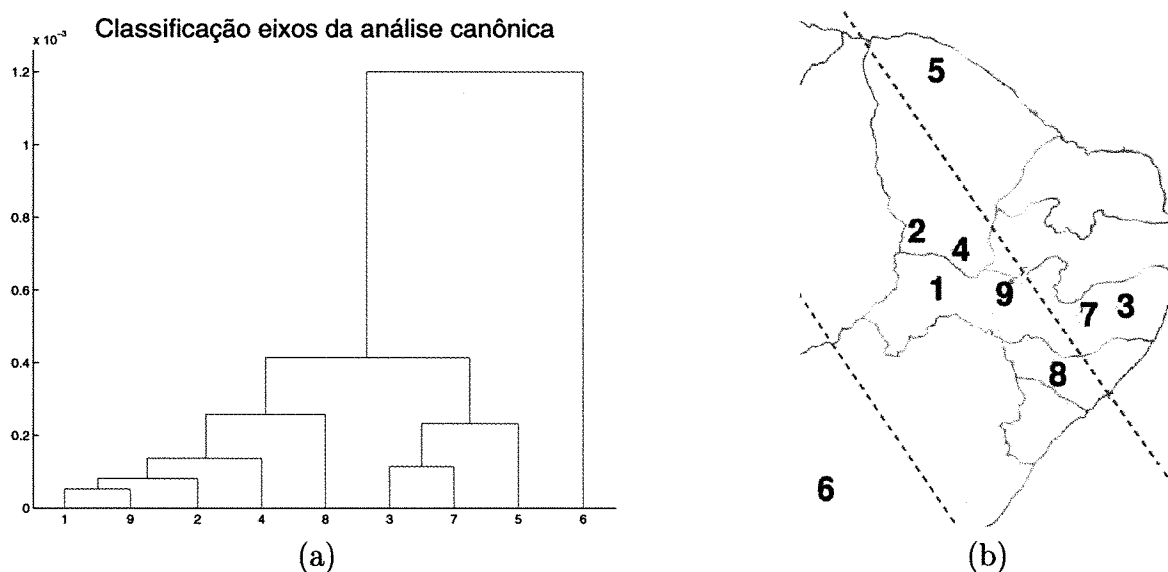


Figura 6.7: (a) Dendrograma resultante da análise representada na Figura 6.6; (b) Mapa da distribuição espacial das populações de *Thrichomys apereoides*: (1) Bodocó, (2) Campos Sales, (3) Caruaru, (4) Crato, (5) Itapagé, (6) Palmeiras, (7) Pesqueira, (8) Santana do Ipanema, (9) Triunfo. .

A representação das mandíbulas utilizadas no trabalho foram normalizadas sofrendo translação para origem do centro de coordenadas, mudança de escala (relacionada ao tamanho da centróide) e rotação visando minimizar a soma dos quadrados das distâncias Euclidianas entre pontos homólogos nos indivíduos.

6.3.2 Resultados Obtidos

Aplicamos a técnica descrita na seção 6.1 à média dos marcos das amostras de mandíbulas, usando como métrica a distância de Mahalanobis.

Nas Figuras 6.6 e 6.7 é possível observar alguns resultados interessantes. Observe que as classes podem ser divididas geograficamente através do uso das duas primeiras variáveis canônicas resultates da análise de um espaço de 177 características (listadas na Tabela 6.2).

1	Perímetro
2	Dimensão Fractal - <i>box counting</i>
3	Coefficientes wavelet em cada marco
4	Média, variância e entropia dos coeficientes wavelet por escala
5	Média, variância e entropia do quadrado dos coeficientes wavelet por escala
6	Média, variância e entropia do módulo dos coeficientes wavelet por escala
7	Curvatura em cada marco, média, máxima e mínima
8	Energia de dobramento monoescala
9	Curvograma
10	Média, variância e entropia do curvograma por escala
11	Média, variância e entropia do quadrado do curvograma por escala
12	Média, variância e entropia do módulo do curvograma por escala

Tabela 6.2: Características usadas para caracterizar espécimes de *Thrichomys apereoides*

6.4 Estudo da Evolução de Estruturas Morfológicas Complexas: Dimorfismo sexual caninos sul-americanos (Mammalia, Canidae)

O dimorfismo sexual é uma importante característica relacionada a variabilidade intra-espécie de tal forma que análises interespecies deve levar em consideração diferenças entre machos e fêmeas[15]. Nesta seção discutiremos como é possível aplicar métodos de análise de formas para auxiliar em pesquisas neste sentido.

6.4.1 Obtenção dos Marcos

O estudo será realizado em indivíduos da família *Canidae* (Tabela 6.3)[38, 35]. As amostras foram retiradas de vários museus de história natural e estudadas em colaboração com Erika Hingst-Zaher (Museu de Zoologia - USP). Foram digitalizadas 17 marcos (Tabela 6.4; Figura 6.8) de 173 imagens da superfície dorsal do crânio de espécimes preparadas.

6.4.2 Resultados obtidos

Na Figura 6.9 é possível observar a extração de coeficientes wavelet a partir das linhas poligonais construídas usando os marcos. A segunda derivada da Gaussiana foi utilizada

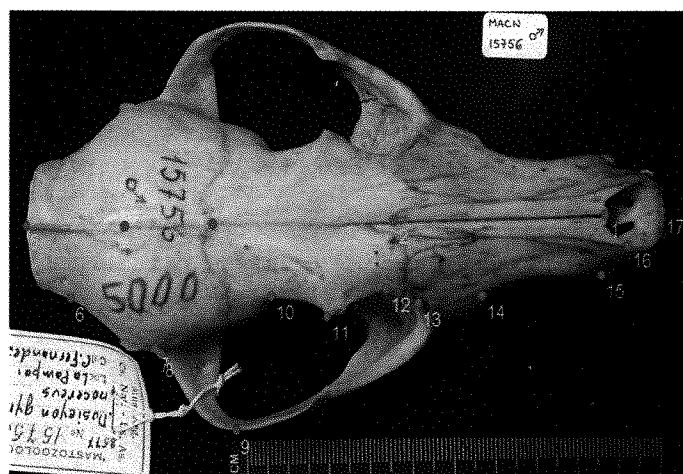


Figura 6.8: Marcos 2D extraídos de amostras da família *Canidae*

Código	Classe	Número de Espécimes	Machos	Fêmeas
1	<i>Atelocynys microtis</i>	13	7	6
2	<i>Cerdocyon thous</i>	24	12	12
3	<i>Chrysocyon branchiurus</i>	13	5	8
4	<i>Dusicyon australis</i>	2	1	1
5	<i>Lycalopex vetulus</i>	18	10	8
6	<i>Pseudalopex culpaeus</i>	30	15	15
7	<i>Pseudalopex gymnocercus</i>	30	15	15
8	<i>Pseudalopex sechurae</i>	10	5	5
9	<i>Speothos venaticus</i>	22	13	9
10	<i>Nyctereutes procyonoides</i>	11	5	6

Tabela 6.3: Classes estudadas: *Canidae*

como wavelet analisadora da transformada de tal forma que os valores obtidos podem ser relacionados à curvatura em cada ponto do contorno. Observe ainda na Figura 6.9 o item (c); esta imagem reproduz a transformada dentro do contorno, assim é possível ter uma noção de como se dá a relação dos coeficientes com a curvatura, quanto mais interno o valor da wavelet neste gráfico, maior o número de “vizinhos” levados em consideração para estimar a curvatura de um marco.

Após a extração das características, cada classe é analisada em separado através de um procedimento que visa reduzir dimensionalidade. Levando em consideração todos os conjuntos de n características, seleciona-se o conjunto cujas variáveis canônicas apresentem a

Marco	Descrição
1	Extremidade anterior dos nasais, linha sagital.
2	Extremidade posterior da sutura entre nasais e frontais, na linha sagital.
3	Centro da sutura entre frontais e parietais, na linha sagital.
4	Extremidade anterior da sutura entre o interparietal e os parietais, na linha sagital.
5	Ponto mais posterior do crânio, sobre a crista occipital, na linha sagital.
6	Extremidade lateral da região da projeção posterior da crista occipital (coincide lateralmente com a sutura entre o esquamosal e o parietal).
7	Máxima curvatura externa do parietal.
8	Final da raiz esquamosal do arco zigomático.
9	Máxima curvatura externa do arco zigomático
10	Maior curvatura interna da constrição pós-orbital.
11	Extremidade do processo pós-orbital.
12	Maior curvatura interna da constrição interorbital.
13	Sutura entre o lacrimal e jugal.
14	Borda superior do forâmen infraorbital.
15	Parte posterior e lateral do alvéolo do canino, onde o rostro é mais alargado.
16	Borda externa da extremidade do nasal direito.
17	Ponto mais anterior do crânio, no pré-maxilar, linha sagital.

Tabela 6.4: Marcos: *Canidae*

maior distância de Mahalanobis entre machos e fêmeas. O intuito é analisar a importância desses atributos nas demais classes.

Como resultado obteve-se uma boa separação entre machos e fêmeas em cada classe, mas não foi possível definir um conjunto de características que bem separe machos e fêmeas em todas as classes.

6.5 Estudo da Evolução de Estruturas Morfológicas Complexas: *Trinomys*, usando Marcos 3D

A relação entre características morfológicas e moleculares e o processo evolutivo é uma das questões chave dentro da análise morfométrica. Em termos gerais podemos dizer que a evolução/adaptação de um animal pode ser endereçada pela filogenia e/ou por questões ambientais.

Nesta seção vamos exemplificar o uso de transformada em wavelets no estudo da relação

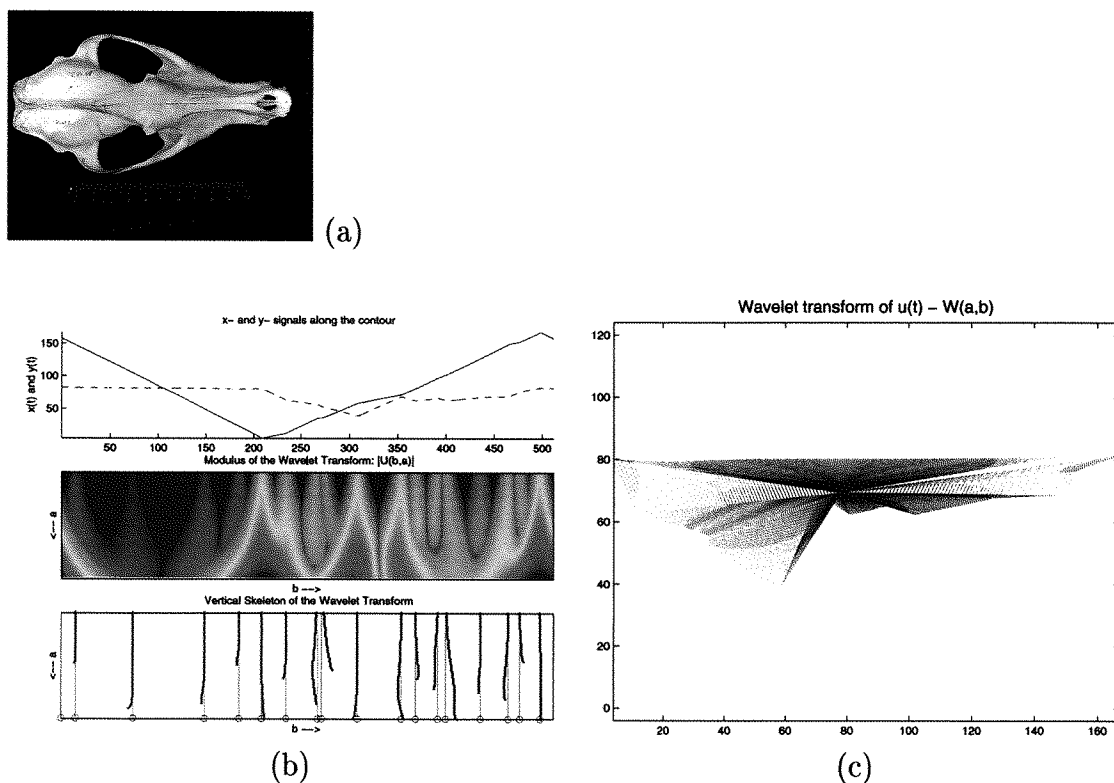


Figura 6.9: Representação e caracterização de espécimes da família *Canidae*: (a) Vista dorsal de um indivíduo da família *Atelocynys microtis*; (b) Representação por sinais e por wavelets da imagem (a); Representação de wavelets interna ao contorno da imagem (a).

entre fenótipo e condições pré-determinadas de tempo-espço. Este trabalho foi desenvolvido em colaboração com Sérgio Furtado dos Reis e Vinícius Bonato (IB/UNICAMP).

6.5.1 Obtenção dos Marcos

Os dados estudados nesta seção representam exemplares de *Trinomys*², separados em 5 classes distintas (Tabela 6.5) [20], cada representado por um conjunto de 51 marcos anatômicos do crânio (Figura 6.10).

Foi usado um total de 613 atributos (Tabela 6.6)³ para caracterizar cada indivíduo.

²Imagens extraídas de exemplares pertencentes ao Museu Nacional, Universidade Estadual do Rio de Janeiro; Museu de Zoologia da Universidade de São Paulo; e ao Museu de Biologia Professor Mello Leitão, Espírito Santo.

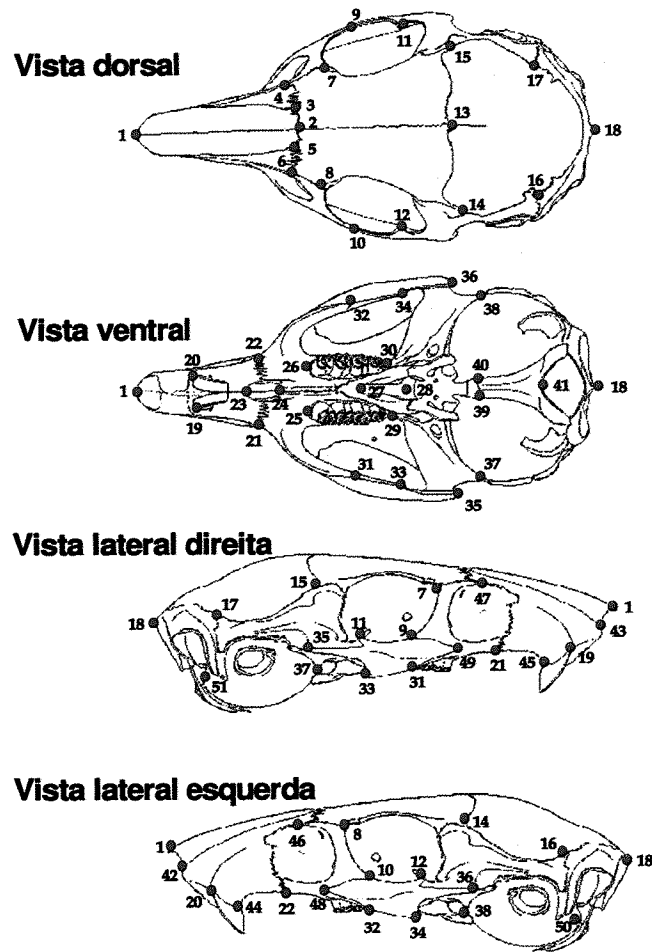


Figura 6.10: Marcos 3D extraídos de amostras de *Trinomys*

Código	Classe	Número de Espécimes
1	<i>T. eliasi</i>	5
2	<i>T. paratus</i>	6
3	<i>T. s. elegans</i>	5
4	<i>T. s. denigratus</i>	9
5	<i>T. yonenagae</i>	16

Tabela 6.5: Classes estudadas: *Trinomys*

³Note que a wavelet tridimensional é dada por $W_{XYZ} = \sqrt{(W_X^2 + W_Y^2 + W_Z^2)}$

1	Wavelet unidimensional (em X, Y e Z)
2	Wavelet tridimensional
3	Média e variância da wavelet tridimensional por escala
4	Média e variância da wavelet tridimensional por marco

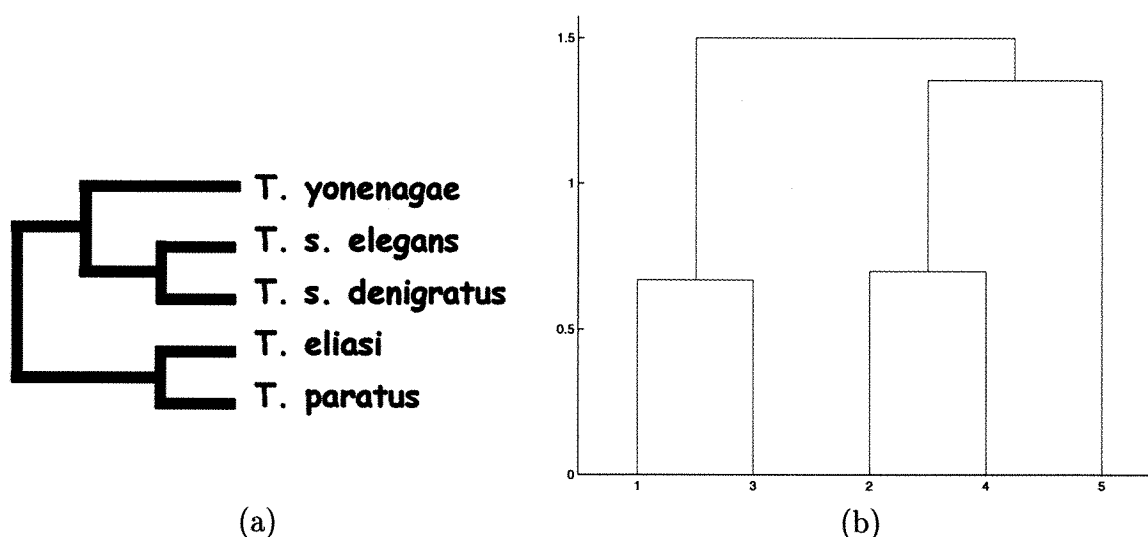
Tabela 6.6: Atributos usados para caracterizar *Trinomys*.

Figura 6.11: (a) Árvore filogenética das espécies de *Trinomys* estudadas; (b) Relação morfológica entre espécies de *Trinomys* estudadas (1-*T. eliasi*; 2-*T. paratus*; 3-*T. s. elegans*; 4-*T. s. denigratus*; 5-*T. yonenagae*).

6.5.2 Resultados obtidos

A projeção das 5 classes no espaço de atributos definido pelas melhores características, i.e. representação wavelet 3D no marco 33, escala 24; e no marco 8, escala 64, (Figura 6.5.2) mostra a distinção dos exemplares de *T. yonenagae* em relação às demais classes. Contrário das demais espécies que habitam em florestas, indivíduos da classe *T. yonenagae* habitam áreas restritas na margem esquerda do rio São Francisco, vivendo em túneis subterrâneos. Essa região faz parte da Caatinga, tendo como característica condições de clima semi-árido. A diferenciação do *T. yonenagae* se dá em traços como pelagem clara, pincel caudal bem desenvolvido, grandes pés posteriores e uma bula de maiores proporções; todos associados a evolução em ambientes áridos [30].

A representação em wavelets mostrou-se efetiva para o estudo da variação na forma

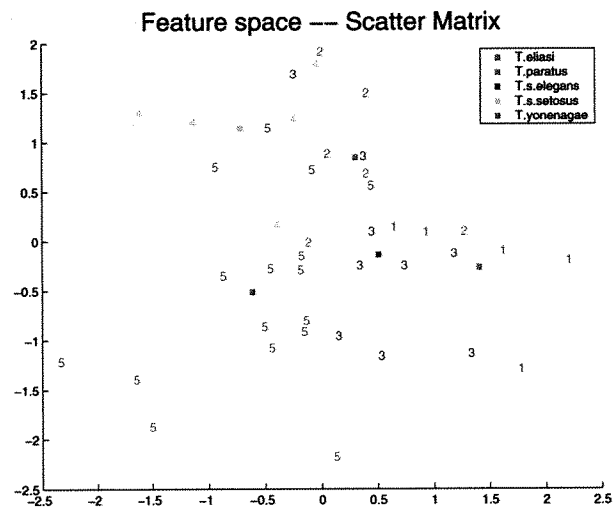


Figura 6.12: Espaço de atributos bidimensional que maximiza a distância mínima entre as classes de *Trinomys*.

do crânio da espécie *Trinomys* no componente ecológico de diferenciação que resulta da adaptação da forma a ambientes distintos.

1	extremidade anterior da sutura entre nasais
2	ponto mais anterior da sutura entre nasal e pré-maxilar (lado direito)
3	ponto mais anterior da sutura entre nasal e pré-maxilar (lado esquerdo)
4	sutura entre pré-maxilar, maxilar e frontal (lado direito)
5	sutura entre pré-maxilar, maxilar e frontal (lado esquerdo)
6	sutura entre nasal, frontal e pré-maxilar (lado direito)
7	sutura entre nasal, frontal e pré-maxilar (lado esquerdo)
8	sutura entre nasais e frontais
9	sutura entre frontal e maxilar na região lacrimal (lado direito)
10	sutura entre frontal e maxilar na região lacrimal (lado esquerdo)
11	sutura superior-posterior entre maxilar e jugal (lado direito)
12	sutura superior-posterior entre maxilar e jugal (lado esquerdo)
13	sutura entre jugal e esquamosal no arco zigomático (lado direito)
14	sutura entre jugal e esquamosal no arco zigomático (lado esquerdo)
15	sutura entre frontal, parietal e esquamosal (lado direito)
16	sutura entre frontal, parietal e esquamosal (lado esquerdo)
17	sutura entre frontal e parietal
18	sutura entre parietal, occipital e processo posterior do esquamosal (lado direito)
19	sutura entre parietal, occipital e processo posterior do esquamosal (lado esquerdo)
20	ponto mais posterior do occipital
21	extremidade antero-lateral do alvéolo incisivo (lado direito)
22	extremidade antero-lateral do alvéolo incisivo (lado esquerdo)
23	sutura entre pré-maxilar e maxilar na linha externa do crânio (lado direito)
24	sutura entre pré-maxilar e maxilar na linha externa do crânio (lado esquerdo)
25	ponto mais anterior sobre pré-maxilar no forâmen incisivo
26	sutura entre a porção vomerine do pré-maxilar e maxilar no forâmen incisivo
27	interseção entre a extremidade anterior do pré-molar e maxilar (lado direito)
28	interseção entre a extremidade anterior pré-molar e maxilar (lado esquerdo)
29	ponto mais anterior na fossa mesoptergóide
30	interseção entre a extremidade posterior do terceiro molar e maxilar (lado direito)
31	interseção entre a extremidade posterior do terceiro molar e maxilar (lado esquerdo)
32	sutura entre maxilar e jugal (lado direito)
33	sutura entre maxilar e jugal (lado esquerdo)
34	sutura entre pré-esfenóide e basi-esfenóide
35	ponta do processo jugal (lado direito)
36	ponta do processo jugal (lado esquerdo)
37	ponta do processo entre jugal e esquamosal (lado direito)
38	ponta do processo entre jugal e esquamosal (lado esquerdo)
39	sutura entre squamosal, ali-esfenóide e timpânica (lado direito)
40	sutura entre squamosal, ali-esfenóide e timpânica (lado esquerdo)
41	ponto onde a sutura entre basi-esfenóide e basi-occipital mantém contato com a bula timpânica (lado direito)
42	ponto onde a sutura entre basi-sphenoid e basi-occipital mantém contato com a bula timpânica (lado esquerdo)
43	ponto mais anterior do forâmen magno
44	ponto mais anterior da sutura entre nasal e pré-maxilar (lado direito)
45	ponto mais anterior da sutura entre nasal e pré-maxilar (lado esquerdo)
46	ponto de interseção entre pré-maxilar e extremidade posterior do incisivo (lado direito)
47	ponto de interseção entre pré-maxilar e extremidade posterior do incisivo (lado esquerdo)
48	ponto mais anterior da sutura entre maxilar e jugal (no arco zigomático direito)
49	ponto mais anterior da sutura entre maxilar e jugal (no arco zigomático esquerdo)
50	base do processo paraoccipital (lado direito)
51	base do processo paraoccipital (lado esquerdo)

Tabela 6.7: Marcos utilizados para representar *Trinomys*

Conclusões

Nesta dissertação foram apresentados alguns dos principais conceitos concernentes à disciplina de análise de formas, tendo como enfoque a viabilização do uso das ferramentas computacionais por ela fornecidas em dados relacionados a objetos e fenômenos biológicos. Assim, um levantamento de possíveis descritores foi realizado com o objetivo de auxiliar a escolha de medidas visto uma dada aplicação.

Para validar a proposta de utilização de métodos já bem difundidos e estudados na comunidade de visão computacional na morfometria, abordamos problemas tais como (a) análise de marcos de imagens de cérebro humano para inferência de casos de esquizofrenia; (b) estudo da estrutura da mandíbula de roedores da família *Thrichomys apereoides* e de crânio de espécimes de *Trinomys* para detecção da relação da morfologia destes animais com sua distribuição geográfica; (c) análise de crânio de canídeos para estudo de variabilidade intraespécie (dimorfismo sexual). Em todos estes estudos atingimos as metas esperadas.

7.1 Contribuições

Algumas contribuições podem ser notadas no desenvolvimento deste projeto. Em primeiro plano podemos citar a proposta do uso da transformada em wavelets para análise de dados 3D e a interpretação geométrica das transformadas que usam como wavelet analisadora derivadas da Gaussiana.

No contexto de visualização de dados, o desenvolvimento de uma metodologia para apresentar esses coeficientes de forma mais ilustrativa (e.g. dentro do contorno da imagem) possibilitou um maior entendimento da transformada por parte de colaboradores; e mais, foi descrito neste trabalho métodos de extração de representação baseada em contornos e regiões a partir de marcos.

Ainda relacionado às wavelets, podemos citar como contribuição a introdução do uso de *Wavelets locais*, proporcionado pela característica de homologia dada diretamente pelo uso de dados morfométricos.

A seguir listamos as publicações resultantes deste trabalho.

1. Artigo REF. [32]. *Shape Analysis and Classification using Landmarks: Polygonal Wavelet Transform*: Neste trabalho é introduzida a metodologia de extração de sinais de representações baseadas em landmarks 2D, e apresentada a interpretação geométrica da transformada em wavelet com wavelet analisadora como sendo derivadas da gaussiana.
2. Abstract REF. [34]. Application of wavelets in the analysis of sexual dimorphism in the skull of South American canids (Mammalia, Canidae): Foi proposto a utilização de coeficientes wavelet para caracterizar dimorfismo sexual entre indivíduos de mesma espécie da família Caninae, com objetivo de posterior análise entre morfologia e função de estruturas discriminantes.
3. Abstract REF. [33]. *Trinomys's ecological life-history and morphological traits: 3D Morphometrical Data Analysis using Wavelets*. Investigou-se a relação entre a morfologia e a filogenia de espécimes de *Trinomys* através da análise de dados 3D usando descritores wavelet.

7.2 Trabalhos futuros

Apresenta-se como proposta de trabalho futuro a continuação da investigação das funcionalidades da transformada em wavelets e a criação de novas características nela baseadas; assim como a catalogação de mais características e incremento do verbete proposto.

Um outro ponto importante não tratado com maiores detalhes nessa dissertação e que ainda é uma questão em aberto no contexto de análise de formas é a seleção de atributos e redução de dimensionalidade. Um caso a ser tratado, onde as formas são descritas por marcos, é descobrir quais marcos estão associados aos descritores de forma que refletem em maior separação entre classes.

No contexto de aplicação, um dos principais projetos é o estudo de uma medida de separação intra-espécie baseada na transformada em wavelets para estudo de dimorfismo sexual, a ser desenvolvido em colaboração com as pesquisadoras Erika Hingst-Zaher e Renata Arantes (IFSC).

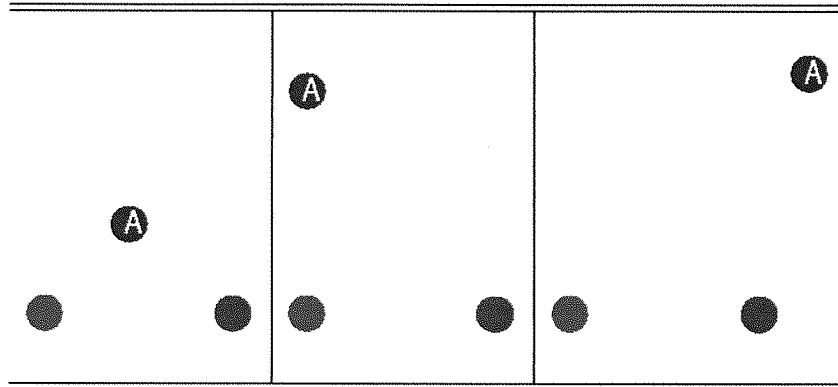


Figura 7.1: Problema de determinação de posições relativas

Visto que muitos dos problemas tratados pela análise de formas envolvem outras disciplinas, ainda podemos citar como projeto trabalhos que visam melhorar a interação entre pesquisadores de soluções computacionais e de áreas fins. Neste sentido, de forma a tratar de modo mais intuitivo a relação espacial de um marco em relação aos demais, propõe-se estudos sobre posição relativa[5, 4] em colaboração com a pesquisadora Isabelle Bloch (TELECOM Paris). Por exemplo, na Figura 7.1, o marco *A* pode ser relacionado aos

demais marcos através de coeficientes wavelets como visto neste documento. O problema consiste então em interpretar esses valores de forma a fornecer informações compreensíveis ao especialista, por exemplo, A está entre os outros marcos; A está mais a esquerda ou a direita em relação aos demais.

Parte IV

Apêndices

Características Monoescala

A.1 Perímetro

Descrição: O *perímetro* representa o comprimento da borda de uma forma.

Tipo de entrada: Contorno

Invariância a Rotações e Translações.

Implementações: Dependente da forma de representação do imagem. Observe que em imagens 4-conectadas (imagens onde um pixel P tem como vizinhos v_0, v_1, v_2, v_3 como mostrado na Figura A.1 à esquerda) podemos tratar o perímetro como sendo o número de pixels de sua borda, pois a distância entre um pixel e seus vizinhos é sempre a mesma.

Já em imagens formadas por vizinhança de 8 a distância entre pixels não é constante, como mostra a Figura A.1 à direita. Note que se a distância entre P à v_0, v_2, v_4 e

v_6 é 1, a distância entre P e os demais vizinhos é $\sqrt{2}$. Neste caso,

$$P = N_p + N_i\sqrt{2} \quad (\text{A.1})$$

onde N_p representa o número de códigos pares e N_i o número de códigos ímpares na representação do contorno através do código da cadeia.

Se a forma é representada através de um contorno dado como um sinal complexo $u(n) = x(n) + iy(n)$, com $i = \sqrt{-1}$ e $n = 0, \dots, N - 1$, seu perímetro pode ser calculado através da somatória das distâncias entre todos os pontos consecutivos.

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} |u(n) - u(n-1)| \quad (\text{A.2})$$

onde $u(-1) = u(N - 1)$, para contornos fechados, e $|u(n)|$ é o módulo complexo de $u(n)$.

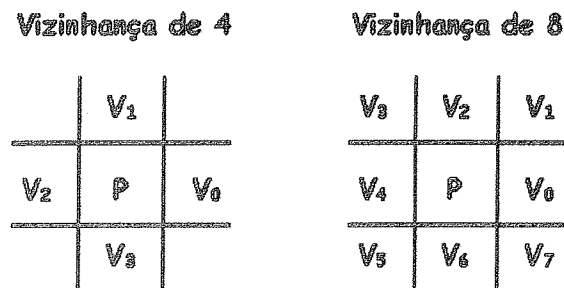


Figura A.1: Vizinhança de 4 e de 8 de um pixel P . [10]

Características derivadas:

- Compacidade.

A.2 Área

Descrição: A *área* reflete a quantidade de pixels da imagem preenchida pela forma.

Tipo de entrada: Região.

Invariância a Rotações e Translações.

Implementações: Podemos estimar a área de uma forma, considerando o histograma de uma imagem cujos componentes conexos são rotulados. O número de pixels com um determinado rótulo representa a área do objeto com este rótulo.

Características derivadas:

- Compacidade.

A.3 Compacidade

Descrição: A *compacidade* [16] é uma característica adimensional, derivada da área e do perímetro.

Tipo de entrada: Região (cálculo da área) e contorno (cálculo do perímetro).

Invariância a Rotações, Translações e Escala.

Implementações: A compacidade é dada por

$$C = \frac{P^2}{A} \quad (\text{A.3})$$

onde P representa o perímetro e A a área da forma.

A.4 Centróide ou Centro de Massa

Descrição: A *centróide* de um objeto dado por uma região pode ser calculada pela média dos valores das coordenadas dos pontos que o representam.

Tipo de entrada: Contorno.

Invariância a Rotação e Escala.

Implementações: Dependente da representação do contorno. Formas representadas por contornos dados por um sinal complexo $u(n)$ podem ter seu centro de massa estimado da seguinte maneira:

$$M = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(n)}{N} \quad (\text{A.4})$$

onde $M = z_1 + jz_2$ é um número complexo e (z_1, z_2) dão a coordenada da centróide.

Características derivadas:

- Distância máxima entre um ponto de borda e a centróide (D_{max}).
- Distância mínima entre um ponto de borda e a centróide (D_{min}).
- Distância média entre pontos de borda e a centróide (D_{med}).
- Histograma das distâncias entre a centróide e os pontos de borda.
- Razões entre as medidas citadas acima.

A.5 Distância Média à Borda

Descrição: A *distância média à borda* é dada pela média das distâncias entre pontos internos e pontos de borda de uma imagem.

Tipo de entrada: Contorno.

Invariância a Rotações e Translações

Implementações: A distância média à borda é dada pela equação A.5

$$\beta = \frac{1}{N} \sum d(r, \text{boundary}(g)) \quad (\text{A.5})$$

onde a forma do objeto analisado é dada por g , sendo que g é composto por N

pontos e a função $d(r, \text{boundary}(g))$ retorna a menor distância de um ponto $r \in g$ e a borda da forma.

β também pode ser calculada através da *transformada da distância* [10]. A *transformada da distância* de uma forma S é definida como o processo de associar a cada ponto P externo a S a distância respectiva $d(P, S)$

$d(P, S)$ refere-se a menor distância entre um ponto qualquer de uma dada uma forma binária 2-D S e um ponto P .

A.6 Diâmetro

Descrição: O *diâmetro* de uma forma f é definido como a maior distância entre dois pontos de f .

Tipo de entrada: Contorno.

Invariância a Rotações e Translações.

Implementações: Podemos computar o diâmetro de uma forma comparando todas as distâncias entre dois pontos pertencentes a borda.

O seguimento que liga os pontos mais distantes de uma forma é conhecido como *corda máxima*.

A.7 Maior e Menor Eixos

Descrição: A direção na qual a forma é mais alongada é chamada *maior eixo*. Perpendicular ao maior eixo, temos o *menor eixo*. O maior e o menor eixos são chamados *eixos principais*.

Tipo de entrada: Contorno.

Invariância a Rotações, Translações e Escala.

Implementações: Os eixos principais podem ser computados a partir de autovetores da matriz de covariância C da forma S . O autovetor associado ao maior autovalor é o maior eixo da forma, e o segundo maior autovalor está relacionado ao menor eixo.

Outra forma de encontrar os eixos principais é dada através do cálculo do menor retângulo envolvente de uma forma.

Características derivadas:

- Tamanho dos eixos principais, dado pelo autovalor associado.
- *Aspect ratio*, também conhecido como *alongamento*, definido pela razão entre o tamanho dos eixos principais.
- *Retangularidade*, definida como a razão entre a área da forma e a área do menor retângulo envolvente.

A.8 Thickness

Descrição: Esta característica é definida como o número de erosões, usando um mesmo elemento estruturante, necessárias para erodir completamente o objeto.

Tipo de entrada: Região.

Invariância a Rotações e Translações.

Características derivadas: Um descritor derivado deste pode ser dado pelo número de erosões necessárias para quebrar a conectividade da forma.

A.9 Dimensão Fractal ou Dimensão de Hausdorff-Besicovitch

Descrição: Medidas fractais são utilizadas quando o problema requer análise de complexidade de estruturas “auto-similares” ao longo de várias escalas. Uma medida fractal largamente aplicada é a *dimensão fractal*.

A *dimensão topológica* (d_T) é dada pelo número de graus de liberdade que caracteriza a posição de um ponto num conjunto. Por exemplo, a dimensão topológica de um ponto é 0, de uma curva é 1, de um plano é 2.

Um outro conceito de dimensão pode ser apresentado (Dimensão de “*Hausdorff-Besicovitch*”, denotado por d).

No R^N , $0 \leq d \leq N$ e $0 \leq d_T \leq N$ (observe que $d \geq d_T$) e a dimensão topológica assume valores inteiros, o que não acontece no caso da dimensão de *Hausdorff-Besicovitch*. No caso de curvas planares, essa dimensão tem um importante conceito que pode ser aplicado a análise de complexidade, quanto mais próximo de 2 é a dimensão, mais a curva “preenche” o plano a qual pertence. Como d pode assumir valores não inteiros, foi atribuído a ele o nome *dimensão fractal*.

Tipo de entrada: Região.

Invariância a Rotações e Translações.

Implementações:

- *Box-Counting*. Seja S um conjunto no R^2 , e $M(\varepsilon)$ o número de bolas abertas de raio ε necessários para cobrir S . Uma bola aberta de raio ε e centro em (x_0, y_0) , em R^2 , pode ser definida como um conjunto $\{(x, y) \in R^2 | ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\}$. A dimensão fractal d dada pela abordagem *box-counting* é definida como

$$M(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d} \quad (\text{A.6})$$

- *Método de Dilatações ou Salsicha de Minkowsky*. Podemos definir a área de influência de uma forma como sendo o conjunto de pontos localizados dentro de uma distância D desta forma. Uma abordagem para encontrar esta área é dilatar a forma com um disco de diâmetro D . Esse método é chamado *salsicha de Minkowsky*.

A dimensão fractal pode ser obtida através da análise da variação da área de influência em relação a D .

A.10 Curvatura

Descrição: Definimos *curvatura* ($k(t)$) de uma curva paramétrica $c(t) = (x(t), y(t))$ como sendo

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.7})$$

A curvatura é uma característica consideravelmente grande e altamente redundante.

Tipo de entrada: Contorno.

Invariância a Rotações, Translações e Escala.

Implementações: Usualmente, utiliza-se a propriedade de diferenciação numérica de Fourier para estimar as derivadas do contorno.

Características derivadas:

- Cantos côncavos e convexos.
- Pontos de inflexão.
- Energia de dobramento.
- *Sampled Curvature* - ao invés de usar todos os valores da curvatura, é possível amostrar o sinal.
- *Curvature Statistics* - o histograma da curvatura reflete uma série de medidas globais, como curvatura média, mediana, variância, momentos, etc.
- Pontos de Máximo, Mínimo e de Inflexão.
- Energia de Dobramento (*Bending Energy*)

A.11 Momentos

Descrição: Um momento é definido através da esperança de X : o k -ésimo momento de um sinal $u(t)$ é definido como sendo $M_k[u] = E[u^k] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^k p(u(t)) dt$, onde $p(x)$

é densidade de probabilidade de x . Observe que se o sinal $u(t)$ representa um objeto de dimensão N ($\vec{u}(t) = u_1, \dots, u_N$), podemos descrever o (n_1, n_2, \dots, n_N) momento como sendo $M_{(n_1, n_2, \dots, n_N)}[\vec{u}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t_1)^{n_1} u_2(t_2)^{n_2} \dots u_N(t_N)^{n_N} p(\vec{u}(t)) dt_1 dt_2 \dots dt_N$.

Tipo de entrada: Sinal $u(t)$

Invariância a Rotações. Caso seja requerido invariância a rotações, utiliza-se os momentos centrados.

- k -ésimo momento centrado unidimensional. $\tilde{M}_k[u] = E[(u - E[u])^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (u(t) - E[u])^k p(u(t)) dt$
- k -ésimo momento centrado multidimensional. $M_{(n_1, n_2, \dots, n_N)}[\vec{u}] = E[u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_N^{n_N}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t_1)^{n_1} u_2(t_2)^{n_2} \dots u_N(t_N)^{n_N} p(\vec{u}(t)) dt_1 dt_2 \dots dt_N$

Implementações:

- Variância (momento centrado de segunda ordem)
- Média (primeiro momento)

A.12 Transformada de Fourier

Descrição: A transformada de *Fourier* de um sinal $u(t)$ é dada por

$$U(f) = F(u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{A.8})$$

e sua inversa é denotada por

$$u(t) = F^{-1}(U(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi ft} df \quad (\text{A.9})$$

Tipo de entrada: Sinal complexo $u(t)$

Invariância a Escala, Rotações e Translações. [28, 36, 10]

- *Translação.* Seja f_1 e f_2 dois sinais que diferem por um deslocamento (t_0), i.e. $f_2 = f_1 - t_0$, então suas transformadas de Fourier correspondentes são dadas por

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 - t_0) e^{-i2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1 e^{-i2\pi ft} dt - \int_{-\infty}^{\infty} t_0 e^{-i2\pi ft} dt \\
 &= F_1 - t_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} dt
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

- *Escala.* Se f_1 é escalada por um fator a de tal forma que $f_2 = af_1$, então

$$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (af_1) e^{-i2\pi ft} dt = aF_1 \tag{A.11}$$

- *Rotação.* Dada uma rotação sobre um sinal f_1 , i.e. $f_2 = f_1 e^{i\theta}$ ¹, podemos encontrar a transformada de Fourier correspondente,

$$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 e^{i\theta}) e^{-i2\pi ft} dt = F_1 e^{i\theta} \tag{A.12}$$

Implementações: FFT

Características derivadas:

- Transformada de Fourier Janelada

¹ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Características Multiescala

B.1 Transformadas Espaço-Escala

Descrição: Espaço-escala de um sinal $u(t)$ é o conjunto de *zero-crossings* da primeira derivada de $u(t)$ estimada por $U^{(1)}(t, a) = u(t) * g_a^{(1)}(t)$, onde $U^{(1)}(t, a)$ é a convolução de $u(t)$ e a primeira derivada da Gaussiana dada por $g_a^{(1)}(t)$.

Tipo de entrada: Sinal complexo unidimensional ($u(t)$)

Invariância a Rotações e Translações.

B.2 Transformadas Tempo-Freqüência

Descrição: Também chamada de transformada de Fourier janelada, é caracterizada pela translação (“deslizamento”) de uma janela de observação $g(t)$ sobre o sinal, podendo

ser definida no domínio da frequência como sendo o produto entre o complexo conjugado da transformada de Fourier da janela transladada na frequência ($G^*(v-f)$) e a transformada de Fourier do sinal a ser analisado $u(t)$ ($U(v)$).

Tipo de entrada: Sinal complexo unidimensional ($u(t)$)

Invariância a Rotações e Translações.

Implementações: *Trasnformada de Gabor.* Transformada de Fourier janelada usando uma janela Gaussiana.

B.3 Transformadas Tempo-Escala

Descrição: Conhecida como transformadas em Wavelet e assim como a transformada tempo-frequência utiliza-se de uma janela de observação. Tem como vantagem a utilização de uma escala referente ao tamanho da janela, sendo dada por $U_\psi(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) u(t) dt$, onde ψ é a janela de observação e a e b representam os parâmetros de escala e translação de ψ .

Tipo de entrada: Sinal complexo unidimensional ($u(t)$)

Invariância a Rotações e Translações.

B.4 Curvatura Multiescala baseada em Fourier

Descrição: Essa característica surge da necessidade de amenizar os ruídos de alta-frequência causados pelo cálculo das derivadas do sinal através da propriedade da diferenciação de Fourier (Equação 4.8). Assim, o processo de diferenciação numérica por fourier deve ser cominado a um filtro passa-baixo (por exemplo um filtro Gaussiano $g_a(t)$). Assim, podemos denotar a primeira e a segunda derivada do sinal $u(t)$ como sendo

$$\bullet \hat{u}(t, a) = \dot{u} * g_a(t) = F^{-1}(\dot{U}_\perp(f)) = F^{-1}(\dot{U}(f)G_\perp(f))$$

$$\bullet \hat{u}(t, a) = \ddot{u} * g_a(t) = F^{-1}(\ddot{U}_{\frac{1}{a}}(f)) = F^{-1}(\ddot{U}(f)G_{\frac{1}{a}}(f))$$

onde, pela propriedade de diferenciação de Fourier, $\dot{U}(f) = j2\pi fU(f)$ e $\ddot{U}(f) = -(2\pi f)^2U(f)$. Assim, podemos definir a curvatura multiescala como sendo $k(t, a) = \frac{-Im(\dot{u}(t, a)\ddot{u}^*(t, a))}{|\dot{u}(t, a)|^3}$.

Tipo de entrada: Sinal complexo unidimensional ($u(t)$)

Invariância a Rotações e Translações.

Características derivadas:

- Energia multiescala

B.5 Curvatura Espaço-Escala

Descrição: A curvatura multiescala, neste caso, é dada por $k(t, a) = \dot{x}(t, a)\ddot{y}(t, a) - \ddot{x}(t, a)\dot{y}(t, a)$ onde

- $\dot{x}(t, a) = x(t) * \dot{g}_a(t)$
- $\ddot{x}(t, a) = x(t) * \ddot{g}_a(t)$
- $\dot{y}(t, a) = y(t) * \dot{g}_a(t)$
- $\ddot{y}(t, a) = y(t) * \ddot{g}_a(t)$

Tipo de entrada: Sinal complexo unidimensional ($u(t)$)

Invariância a Rotações, Translações e Escala [10, 1]. Podemos dizer que as transformadas em wavelets são invariantes no sentido de que aplicada uma transformação afim num sinal conhecemos o resultado decorrente na transformada:

- *Translação.* Transladar formas em uma imagem por um vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$ é equivalente a adicionar uma constante complexa $z = x_0 + jy_0$ ao sinal $u(t)$. Esta operação não afeta a representação-w pois

$$U[\psi, u(t) + z] = U[\psi, u(t)] + U[\psi, z] = U[\psi, u(t)], z \in C \quad (B.1)$$

- *Escala.* Escala homogênea do contorno por uma constante c afeta a magnitude e a parametrização de $u(t)$. Neste caso, a representação- w é covariante a transformação pois

$$U[\psi, c_1 u(\frac{t}{c_2})](b, a) = c_1 U[\psi, u(t)](\frac{b}{c_2}, \frac{a}{c_2}), c_1, c_2 \in R^+ \quad (\text{B.2})$$

- *Rotação.* Rotacionar um objeto por um ângulo θ implica na multiplicação do sinal $u(t)$ por $e^{j\theta}$ e no deslocamento da parametrização por uma constante t_0 . Assim,

$$U[\psi, e^{j\theta} u(t - t_0)](b, a) = e^{j\theta} U[\psi, u(t)](b - t_0, a), t_0 \in C, \theta \in [0, 2\pi) \quad (\text{B.3})$$

Características derivadas:

- Energia multiescala

B.6 Energia de Dobramento Multiescala

Descrição: Uma versão multiescala da energia de dobramento de um sinal $u(t)$ é definida por $\hat{B}(a) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} k(a, n)^2$, onde k é curvatura multiescala, N é o tamanho de t e a é o parâmetro de escala de k .

Tipo de entrada: Sinal complexo unidimensional ($u(t)$)

Invariância a Rotações e Translações. Quando se deseja a independência de escala pode-se utilizar uma versão normalizada dada por $\hat{B}(a) = \frac{L^2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} k(a, n)^2$, onde L representa o perímetro do contorno definido por $u(t)$.

B.7 Energia de Wavelet

Descrição: É análoga a energia de dobramento multiescala, adotando como representação do sinal $u(t)$ os coeficientes wavelet ao invés do curvograma.

Tipo de entrada: Sinal complexo unidimensional ($u(t)$). Definimos a energia multiescala wavelet normalizada como $NMWE_\psi(a) = \frac{1}{K^2L} \int_{-\infty}^{\infty} |U_\psi(b, a)|^2 db$, onde K é um fator de normalização, normalmente o tamanho do maior eixo.

Invariância a Escala, Rotações e Translações.

Conceitos de Probabilidade e estatística

Os conceitos apresentados neste apêndice foram adaptados de [19, 11]

C.1 Probabilidade

Dado um espaço amostral S , a probabilidade $P(A)$ de um evento $A \in S$ é definida como sendo

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} \quad (\text{C.1})$$

onde $|Z|$ representa a cardinalidade de Z .

Axiomas da Probabilidade .

1. $P(S) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$

3. Dados A e B dois eventos mutuamente exclusivos (i.e. $A \cap B = \emptyset$),

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)^1$$

C.2 Probabilidade Condicional

Probabilidade de um evento B ($B \in S$), dada a prévia ocorrência de um evento A ($A \in S$), é dada por²

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{C.2})$$

Regra de Bayes . Da definição de probabilidade condicional (equação C.2) temos ³

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (\text{C.3})$$

C.3 Frequência Relativa

A frequência relativa (fr_i) de uma população i na amostra S representa a “relevância estatística” de i e é dada por

$$fr_i = \frac{|i|}{|S|} \quad (\text{C.4})$$

Histograma de Frequências Relativas. Observa na Figura C.1 um exemplo de histograma de frequências, onde f é a frequência e ΔH é o intervalo de medida observado.

¹Para A e B quaisquer, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

²Observe que o espaço amostral quando $B \in S = A$ e o evento B , podendo apenas em A neste caso, é dado por $A \cap B$. Neste caso: $P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|}$. Dividindo os dois termos por $|S|$, temos:

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{|A \cap B|/|S|}{|A|/|S|} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

³Dado que $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, então $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$. Assim, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

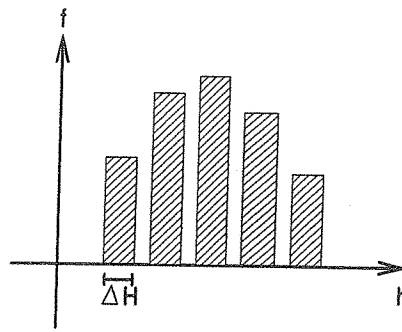


Figura C.1: Histograma de frequências relativas

C.4 Função Densidade de Probabilidade (fdp)

Quando o intervalo de medidas observadas (ΔH) tende a zero e o tamanho da amostra tende ao infinito, o histograma de frequências relativas converge para a função densidade de probabilidade (Figura C.2).

Uma função p representa uma fdp se, somente se

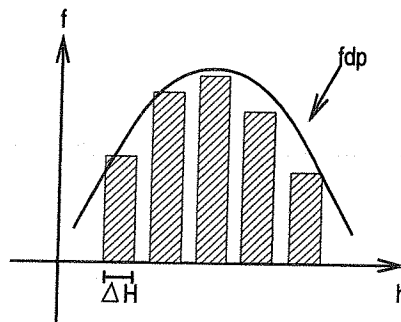


Figura C.2: Função Densidade de Probabilidade

1. $p(h) \geq 0 \forall h$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(h)dh = 1$
3. $p(h_1 \leq h < h_2) = \int_{h_1}^{h_2} p(h)dh$
4. $p(h_1 = h) = 0$

C.5 Função de Distribuição Acumulada

Dada uma função de densidade de probabilidade p_1 , podemos denotar função de distribuição acumulada de p (Figura C.3) como sendo

$$p(h) = \int_{-\infty}^h p_1(x) dx \quad (\text{C.5})$$

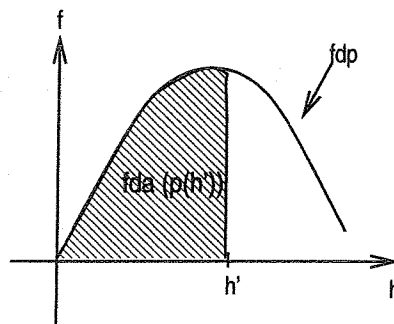


Figura C.3: Função de Densidade Acumulada

C.6 Momentos Estatísticos

Momento estatístico é uma maneira alternativa de caracterizar uma variável aleatória X . Um momento é definido através da esperança de X .

Esperança de uma Variável Aleatória. A esperança de uma variável aleatória [19] X corresponde ao centro de gravidade da distribuição de X e é definida por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \quad (\text{C.6})$$

Dada a definição de esperança de X , denotamos k -ésimo momento e o k -ésimo momento centrado de X como sendo respectivamente [10]

$$M_k[X] = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx \quad (\text{C.7})$$

$$\tilde{M}_k[X] = E[(X - E[X])^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^k p(x) dx \quad (\text{C.8})$$

Os momentos quantificam informações físicas da distribuição de X e a coleção de infinitos momentos é igual a fdp. Alguns momentos muito utilizados para análise de formas podem ser citados:

1. **Média** (μ). Primeiro momento ou esperança de X .
2. **Variância** (σ^2). Momento centrado de segunda ordem.

$$\text{Var}X = E[(X - \mu)^2] \quad (\text{C.9})$$

OBS.:

Desvio padrão (σ).

$$\sigma = \pm\sqrt{\sigma^2} \quad (\text{C.10})$$

C.7 Estatística Multivariada

Neste caso, o fenômeno estudado é representado por mais de uma variável aleatória. Dois aspectos relacionados ao estudo de dados multivariados que serão tratados neste trabalho são a *redução de dimensionalidade* e a *relação das variáveis observadas* (ambas se referem à fase de seleção de características).

Nesse caso podemos modelar o objeto de estudo através de um vetor $\vec{V} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$. Assim, define-se probabilidade de uma realização em \vec{V} , $\vec{v} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$, como sendo a probabilidade conjunta [10, 19] de x_1, x_2, \dots e x_N , dada por

$$p(\vec{v}) = p(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (\text{C.11})$$

Observe que $p(\vec{v})$ deve satisfazer as seguintes condições:

1. $p(\vec{v}) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1$

C.8 Momentos Estatísticos Multivariados

Podemos descrever o (n_1, n_2, \dots, n_N) momento e o (n_1, n_2, \dots, n_N) momento centrado multivariado como sendo respectivamente

$$\begin{aligned} M_{(n_1, n_2, \dots, n_N)}[\vec{V}] &= E[X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_N^{n_N}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_N^{n_N} p(\vec{v}) dx_1 dx_2 \dots dx_N \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{(n_1, n_2, \dots, n_N)}[\vec{V}] &= E[(X_1 - E[X_1])^{n_1} (X_2 - E[X_2])^{n_2} \dots (X_N - E[X_N])^{n_N}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - E[X_1])^{n_1} (x_2 - E[X_2])^{n_2} \dots \\ &\quad (x_N - E[X_N])^{n_N} p(\vec{v}) dx_1 dx_2 \dots dx_N \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

A correlação e a covariância (momentos multivariados de segunda ordem) são muito usados dentro do contexto de reconhecimento de padrões por estimarem a tendência de duas variáveis aleatórias andarem juntas.

Correlação ($Corr(X, Y)$).

$$Corr(X, Y) = E[XY] \quad (\text{C.14})$$

Covariância ($Cov(X, Y)$).⁴

$$Cov(X, Y) = \sigma_{(X, Y)}^2 = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (\text{C.15})$$

O coeficiente de correlação é uma medida adimensional baseada no conceito de correlação, dada por

$$CoefCorr(X, Y) = E\left[\frac{(X - \mu_X)}{\sigma_X} \frac{(Y - \mu_Y)}{\sigma_Y}\right] \quad (\text{C.16})$$

Note que, dada uma matriz na forma $M = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \dots \vec{v}_N]$ onde \vec{z} são as realizações da variável

⁴Note que $\sigma_{K, K} = E[(K - \mu_K)^2] = VarK$; e $\sigma_{X, Y} = \sigma_{Y, X}$.

aleatória X e N o número de variáveis aleatórias, a forma matricial da correlação (R), covariância (K) e coeficiente (C) de correlação podem ser dadas por:

$$R = M^T M \frac{1}{N} \quad (\text{C.17})$$

$$K = \tilde{M}^T \tilde{M} \frac{1}{N} \quad (\text{C.18})$$

$$C = \hat{M}^T \hat{M} \frac{1}{N} \quad (\text{C.19})$$

onde $\tilde{M} = [(\vec{v}_1 - E[v_1])(\vec{v}_2 - E[v_2]) \dots (\vec{v}_N - E[v_N])]$ e $\hat{M} = [(\frac{\vec{v}_1 - E[v_1]}{E[v_1^2]})(\frac{\vec{v}_2 - E[v_2]}{E[v_2^2]}) \dots (\frac{\vec{v}_N - E[v_N]}{E[v_N^2]})]$.

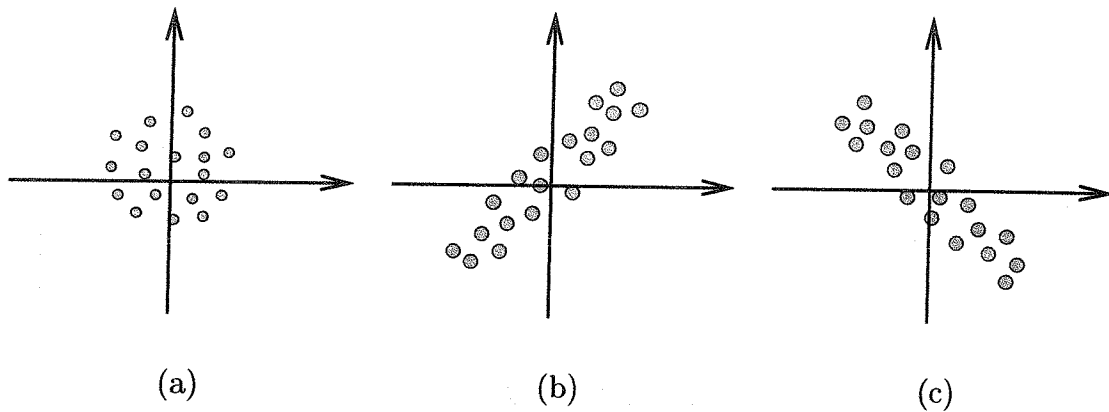


Figura C.4: (a) Covariância baixa (aproximadamente zero); (b) Covariância alta positiva; (c) Covariância alta negativa.

Índice Remissivo

- Análise canônica, 39
- Análise de agrupamentos, 44
 - hierárquico, 44
 - particional, 44
- Análise de componentes principais, 39
- Autovalores, 39
- Autovetores, 39
- Bayes
 - classificação, 42
 - regra, 88
 - regra de decisão, 42
 - multiplas classes e atributos, 42
- Características monoescala
 - área, 73
 - centróide, 73
 - centro de massa, 73
 - compacidade, 73
 - diâmetro, 75
 - dimensão
 - box-counting, 15, 77
 - salsicha de minkowsky, 15, 77
 - topológica, 15, 77
 - distância média à borda, 74
 - eixos principais, 75
 - maior e menor eixos, 75
 - momentos, 78
 - perímetro, 71
 - thickness, 76
 - Transformada de Fourier, 19, 79
 - curvatura, 78
- Características multiescala
 - curvatura, 19, 82, 83
 - curvatura espaço-escala, 83
 - curvograma, 22, 82
 - energia, 84
 - de dobramento, 22
 - de *Wavelet*, 33
 - multiescala, 33
- Transformadas
 - em *Wavelet*, 25
 - Espaço-Escala, 17, 81
 - Tempo-Escala, 25, 82
 - Tempo-Freqüência, 81

- Cardinalidade, 87
- Classe, 38
- Classificação
- análise de agrupamentos, 44
 - bayesiana, 42
 - não-supervisionada, 42, 44
 - supervisionada, 42
- Convolução
- propriedade, 18
 - teorema, 28
- Correlação, 92
- coeficiente, 92
- Covariância, 92
- Dendrograma, 44
- Desvio Padrão, 91
- Distância, 43
- euclidiana, 43
 - mahalanobis, 44
 - minkowski, 43
- Espaço
- de características, 38
- Esperança, 90
- Frequência relativa, 88
- Função
- densidade de probabilidade, 89
- Homologia, 8, 10
- Linkage, 51
- Média, 90
- Métrica, 43
- Marcos, 8
- Marcos anatômicos, 10
- Matriz
- dispersão interclasse, 40
 - dispersão intraclasse, 40
 - dispersão total, 40
- Momentos
- multivariados, 92
 - univariado, 90
- Morfometria, 8
- Padrão, 38
- Probabilidade, 87
- axiomas, 87
 - condicional, 88
 - conjunta, 91
- Propriedades da Transformada em *Wavelets*, 26
- Propriedades de Fourier
- convolução, 29
 - diferenciação, 29
- Reconhecimento de Padrões, 37
- Seleção de Características, Extração de Características, 38
- Transformadas em Wavelet , Wavelet local66
- Variável
- aleatória, 38
- Variância, 91
- Vetor
- aleatório, 38
 - de características, 38

Referências Bibliográficas

- [1] J. P. Antoine. Wavelet analysis: a new tool in signal processing. *Physicalia Magazine*, 16:17–42, 1994.
- [2] J. P. Antoine, D. Barache, R. M. Cesar Jr., and L. F. Costa. Shape characterization with the wavelet transform. *Signal Processing*, 62(3):265–290, 1997.
- [3] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, and J.-F. Muzy. *Ondelettes, Multifractales et Turbulences: de l'ADN aux Croissances Cristallines*. Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris, 1995 (in French).
- [4] Isabelle Bloch. On fuzzy spatial distances. Preprint submitted to Elsevier.
- [5] Isabelle Bloch. *Applying Soft Computing in Defining Spatial Relations*, chapter Mathematical Morphology and Spatial Relationships: quantitative, semi-quantitative and symbolic settings. Physica-Verlag, 2002.
- [6] F. L. Bookstein, B. Chernoff, J. Humphries R. Elder, G. Smith, and R. Strauss. *Morphometric in evolutionary biology*. Academy of Natural Sciences of Philadelphia, 1985.
- [7] F.L. Bookstein. *The measurement of biological shape and shape change*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [8] F.L. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [9] S. Brook. Morphometrics at suny stony brook. <http://life.bio.sunyab.edu/morph>, 2001.
- [10] L.F. Costa and R.M. Cesar Jr. *Shape analysis and classification: theory and practice*. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [11] C. A. B. Dantas. *Probabilidade: um curso introdutório*. EDUSP, São Paulo, 2000.
- [12] S. F. dos Reis, L. C. Duarte, L. R. Monteiro, and F. J. Von Zuben. Geografic variation in cranial morphology in *thricomys apereoides*(rodentia: Echimyidae). i.geometric descriptors and patterns of variation in shape. *Jornal of Mammalogy*, 83(2):333–344, 2002.
- [13] S. F. dos Reis, L. C. Duarte, L. R. Monteiro, and F. J. Von Zuben. Geografic variation in cranial morphology in *thricomys apereoides*(rodentia: Echimyidae). ii.geographic units, morphological discontinuities, and sampling gaps. *Jornal of Mammalogy*, 83(2):345–353, 2002.
- [14] I.L. Dryden and K.V. Mardia. *Statistical shape analysis*. John Wiley, Chichester, 1998.
- [15] J. L. Gittleman and B. Van Valkenburgh. Sexual dimorphism in the canines and skulls of canivores: *effects of size, phylogeny, and behavioural ecology*. *J. Zool.*, 242:97–117, 1997.
- [16] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Processamento de imagens digitais*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 2000.
- [17] A. K. Jain, R. P. W. Duin, and J. Mao. Statistical pattern recognition: a review. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(1):4–37, 2000.
- [18] A. F. Kohn. *Reconhecimento de Padrões: uma abordagem estatística*. PhD thesis, Escola Politécnica – USP, 1998.
- [19] E. Kreyszig. *Introctory mathematical statistics: principles and methods*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1970.
- [20] M. C. Lara and J. L. Patton. Evolutionary diversification of spiny rats (genus *trinomys*, rodentia: Echimyidae) in the atlantic forest of brazil. *Zoological Journal of the Linnean Society*, 130:661–686, 2000.

- [21] P. E. Lestrel(ed.). *Fourier Descriptors and Their Applications in Biology*. Cambridge University Press, 1997.
- [22] S. Loncaric. A survey of shape analysis techniques. *Pattern Recognition*, 31(8):983–1001, 1998.
- [23] J. Marcgrave. *História Natural do Brasil*. Museu Paulista, Imprensa Oficial do Estado, São Paulo, 1942. With reproduction of original title-page: *Historia natvralis Brasiliae... Lvgdvn. Batavorvim, apud F. Hackium, et Amstelodam: apud L. Elzevirium, 1648*.
- [24] S. Marshall. Review of shape coding techniques. *Image and Vision Computing*, 7(4):281–294, 1989.
- [25] F. Mokhtarian and A. Mackwort. Scale-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(1):34–43, jan 1986.
- [26] L. R. Monteiro and S. F. dos Reis. *Princípios de morfometria geométrica*. Holos, Ribeirão Preto, 1999.
- [27] T. Pavlidis. Algorithms for shape analysis of contours and waveforms. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-2(4):301–312, 1980.
- [28] B. Srinivasa Reddy and B. N. Chatterji. An fft-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(8), aug 1996.
- [29] S. F. dos Reis, L. C. Duarte, L. R. Monteiro, and F. J. Von Zuben. Variation in mandible shape in *thrichomys apereoides* (mamalia: Rodentia): geometric analysis of a complex morphological structure. *Syst. Biol*, 49(3):563–578, 2000.
- [30] P. L. B. Rocha. *Proechimys yonenagae*, a new species of spiny rat (rodentia: Echimyidae). *Mamalia*, 59:537–549, 1995.
- [31] C. G. Small. *The statistical theory of shape*. Springer Verlag, 1996.

- [32] C. M. Takemura and R. M. Cesar-Jr. Shape analysis and classification using landmarks: Polygonal wavelet transform. In *Proc. 15th European Conference on Artificial Intelligence ECAI2002*, 2002.
- [33] C. M. Takemura, R. M. Cesar-Jr, V. Bonato, and S. F. dos Reis. *Trinomys's* ecological life-history and morphological traits: 3d morphometrical data analysis using wavelets. ICoBiCoBi'03 - International Conference on Bioinformatics and Computational Biology, 2003.
- [34] C. M. Takemura, R. M. Cesar-Jr, E. Hingst-Zaher, R. A. F. Arantes, and L. F. Costa. Application of wavelets in the analysis of sexual dimorphism in the skull of south american canids (mammalia, canidae. ICoBiCoBi'03 - International Conference on Bioinformatics and Computational Biology, 2003.
- [35] R. H. Tedford and et al. Phylogeny of the caninae (carnivora: Canidae): *the living taxa*. *American Museum Novitates*, 3146, Aug 1995.
- [36] S. Theodoridis and K. Koutroubas. *Patter recognition*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [37] D'A. W. Thompson. *On Growth and Form*. Dover, 1992.
- [38] R. K. Wayne and et al. Molecular systematics of the canidae. *Syst. Biol.*, 46(4):622-653, 1997.