

**Aplicações de programação não-linear  
ao apreamento de apólices de seguro**

Paulo Fernando Galvão de Oliveira Machado

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação  
Orientador: Prof. Dr. Walter Figueiredo Mascarenhas

São Paulo, novembro de 2009

## **Aplicações de programação não-linear ao apuração de apólices de seguro**

Este exemplar corresponde à redação  
final da dissertação devidamente corrigida  
e defendida por Paulo Fernando Galvão de Oliveira Machado  
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Walter Figueiredo Mascarenhas (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Julio Michael Stern - IME-USP.
- Prof. Dr. Rodrigo de Barros Nabholz - EP-USP.

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelos genes privilegiados. Também agradeço pelo apoio incondicional, por ter permitido que eu usasse o computador do quarto para escrever e por ter comprado o pacote do Brasileirão. Agradeço também ao meu irmão por também ceder o computador e por não ter emprestado o videogame, obrigando-me a dedicar ao mestrado. Agradeço também a minha namorada pela paciência, compreensão e carinho. Agradeço também por emprestar o computador para eu escrever e não ter ciúme da minha paixão pela ciência.

Agradeço também ao meu orientador Walter, pelo apoio, conselhos, compreensão e por ter aceitado me orientar. Além disso, ele também permitiu que eu utilizasse seu computador para efetuar pequenas correções no texto. Destaco sua dedicação mesmo durante o Natal e o Ano Novo.

Destaco também o apoio recebido do Banco Itaú Unibanco e dos meus gestores Alexandre, Felipe, Gilmar, Idacelmo, Jorge Reis, Luis Gustavo, Ricardo e Tavares. Sem o horário flexível, esse projeto de tese não seria possível. Agradeço também ao PV por ter revisado o texto e pelas que impediu que algo pior acontecesse. Agradeço ao Sérgio também por todas as vezes que permitiu que a mesa de centro virasse uma mesa de estudo, pelas vezes que emprestou o computador para eu realizar trabalhos do mestrado e pelos jantares no Elkabong.

Por mim, agradeço à Dell por fabricar computadores e vender-me um para poder desenvolver este trabalho.

## Resumo

Devido a sua estrutura de negócios, seguradoras devem dominar uma excelente estratégia de preços. Mais especificamente, no ramo de seguros não-vida, é importante ter um modelo de apuração adequado para os valores das renovações das apólices em fim de vigência. Nesse contexto, nós desenvolvemos um modelo de preços para os lotes de renovação.

Nosso modelo não somente maximiza o lucro como também respeita requisitos de vendas e solvência através de restrições não-lineares. Para atender a aspectos comerciais, nosso modelo também impõe restrições de caixa nos prêmios. Devido a estrutura do problema de otimização, nós provamos a existência e unicidade da solução graças ao *Mountain Pass Lemma*.

Nós estudamos e implementamos métodos numéricos para determinar o máximo único. Por aproveitar a estrutura particular do modelo, nossos algoritmos apresentaram melhor performance que métodos genéricos de otimização como o Algencan, um algoritmo de lagrangeano aumentado.

**Palavras-chave:** apuração, programação não-linear, seguros.





## Abstract

Due to their business structure, insurance companies must have a good pricing strategy. More specifically, in the non-life insurance business, it is important to have a suitable pricing model for the renewing prices of policies that are about to expire. In this context, we developed a pricing model for the renewing package.

Our model not only maximizes profits but also respects selling and solvency requirements through the use of non-linear constraints. In other to respect comercial issues, our model also imposes box constraints on the premiums. Due to the structure of this optimization problem, we proved the existence and uniqueness to the solution by using the Mountain Pass Lemma.

We studied and implemented numerical solutions to find the unique maximizer. By taking advantage of the particular structure of the model, our algorithms had better performance than multiple purpose optimization algorithms such as Algencan, a augmented lagrangian method.

**Keywords:** pricing, non-linear programming, insurance.



# Sumário

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Apreçamento de Renovações de Seguro de Automóvel . . . . .	3
1.3 Objetivo . . . . .	3
1.4 Estrutura do Documento . . . . .	5
<b>2 O modelo de preços</b>	<b>7</b>
2.1 Revisão da Literatura . . . . .	7
2.1.1 Geral . . . . .	7
2.1.2 Técnicas Monopolistas (ou preço baseado em custos) . . . . .	7
2.1.3 Teorias de Mercado Oligopólico . . . . .	9
2.2 Descrição do Problema . . . . .	11
2.2.1 Previsão da Renovação . . . . .	13
2.2.2 Projeção de Sinistralidade . . . . .	14
2.2.3 Utilidade do lote . . . . .	15
2.2.4 Forma final do problema . . . . .	15
2.2.5 Bases de dados . . . . .	16
<b>3 Características da solução do problema - Condições KKT</b>	<b>19</b>
3.1 Estrutura do Problema . . . . .	19
3.1.1 Análise da função probabilidade de renovação . . . . .	19
3.1.2 Análise da função de Utilidade . . . . .	20
3.1.3 Análise da restrição de renovação . . . . .	21
3.1.4 Análise da restrição de sinistralidade . . . . .	21
3.2 Região factível e existência da solução . . . . .	21
3.3 Condição de qualificação de independência linear . . . . .	23
3.4 Condição de Complementaridade Estrita . . . . .	23

3.5	Condições Necessária de Primeira Ordem e Suficiente de Segunda Ordem . . . . .	24
3.6	Unicidade da solução . . . . .	27
3.7	Condições KKT . . . . .	27
3.7.1	Caso A: Nenhuma restrição ativa . . . . .	28
3.7.2	Caso B: Apenas restrição de renovação ativa . . . . .	28
3.7.3	Caso C: apenas restrição de sinistralidade ativa . . . . .	29
3.7.4	Caso D: restrição de renovação e sinistralidade ativas . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Análise Numérica do Laço interno</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1	Formato único para as equações dos gradientes . . . . .	31
4.2	A estrutura de $g(x)$ . . . . .	33
4.3	Análise da aproximação $h(c) \approx c$ . . . . .	34
4.4	Análise da aproximação $h(c) \approx \ln(c)$ . . . . .	35
4.5	Análise da aproximação $h(c) \approx P(c)$ . . . . .	36
4.6	Algoritmos para resolver as equações dos gradientes . . . . .	38
4.7	Resultados Numéricos . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Desenvolvimento do laço externo</b> . . . . .	<b>43</b>
5.1	Desenvolvimento da Solução para o Caso A . . . . .	43
5.1.1	Caso A sem restrições de caixa . . . . .	43
5.1.2	Caso A com restrições de caixa . . . . .	44
5.2	Desenvolvimento da Solução para o Caso B . . . . .	45
5.2.1	A estrutura de $R(\lambda)$ . . . . .	45
5.2.2	Técnicas para resolver $R(\lambda) = 0$ . . . . .	46
5.3	Desenvolvimento da Solução para o Caso C . . . . .	50
5.3.1	A estrutura de $\pi(\lambda)$ . . . . .	50
5.3.2	Algoritmo final para o caso C . . . . .	51
5.4	Desenvolvimento da Solução para o Caso D . . . . .	52
5.4.1	Esqueleto da Solução . . . . .	52
5.4.2	A função $R(\lambda_R, \lambda_\pi)$ . . . . .	52
5.4.3	Estrutura de $\pi(\lambda_R, \lambda_\pi)$ . . . . .	53
5.4.4	Construindo $\lambda_R(\lambda_\pi)$ . . . . .	53
5.4.5	Cálculo de $\pi(\lambda_R(\lambda_\pi), \lambda_\pi)$ . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Desempenho das Implementações</b> . . . . .	<b>57</b>
6.1	Caso A . . . . .	57
6.2	Caso B . . . . .	59
6.3	Caso C . . . . .	60
6.4	Caso D . . . . .	61

<b>7 Conclusão</b>	<b>63</b>
7.1 Sumário . . . . .	63
7.2 Aplicações Gerenciais . . . . .	64
7.2.1 Apreçamento de lote de renovação . . . . .	64
7.2.2 Relacionamento de pacto e impacto . . . . .	64
7.2.3 Desenvolvimento de um orçamento de sinistralidade e renovação . . . . .	65
7.2.4 Estudo de impacto de investimentos retenção de clientes . . . . .	66
7.3 Trabalhos futuros . . . . .	67
7.3.1 Análise do Problema com Despesas Comerciais . . . . .	67
7.3.2 Apreçamento ao longo de vários anos . . . . .	67
7.3.3 Introduzir restrições de Variância . . . . .	68
7.4 Das negativas (ou <i>Deadends</i> ) . . . . .	69
7.4.1 Agregação . . . . .	69
7.4.2 Lagrangeano Aumentado . . . . .	70
<b>A Demonstrações</b>	<b>73</b>
A.1 Capítulo 3 . . . . .	73
A.1.1 Teorema 3.2 . . . . .	73
A.1.2 Lema 3.3 . . . . .	74
A.1.3 Lema 3.4 . . . . .	74
A.1.4 Lema 3.5 . . . . .	74
A.1.5 Corolário 3.6 . . . . .	75
A.1.6 Lema 3.7 . . . . .	75
A.1.7 Lema 3.8 . . . . .	76
A.1.8 Lema 3.9 . . . . .	76
A.1.9 Corolário 3.10 . . . . .	76
A.1.10 Teorema 3.11 . . . . .	77
A.2 Capítulo 4 . . . . .	78
A.2.1 Teorema 4.1 . . . . .	78
A.2.2 Teorema 4.2 . . . . .	78
A.2.3 Lema 4.3 . . . . .	78
A.2.4 Teorema 4.4 . . . . .	79
A.2.5 Lema 4.5 . . . . .	79
A.2.6 Teorema 4.6 . . . . .	79
A.2.7 Teorema 4.7 . . . . .	80
A.2.8 Teorema 4.8 . . . . .	80
A.2.9 Teorema 4.9 . . . . .	81
A.3 Capítulo 5 . . . . .	81
A.3.1 Lema 5.1 . . . . .	81
A.3.2 Teorema 5.2 . . . . .	82

A.3.3	Teorema 5.3 . . . . .	83
A.3.4	Lema 5.4 . . . . .	83
<b>B</b>	<b>Definições do Mercado Segurador</b>	<b>85</b>
B.1	Seguro . . . . .	85
B.2	Apólice . . . . .	85
B.3	Risco . . . . .	85
B.4	Sinistro . . . . .	85
B.5	Seguradora . . . . .	85
B.6	Segurado . . . . .	86
B.7	Taxa de Renovação . . . . .	86
B.8	Prêmio . . . . .	86
B.9	Prêmio de Risco ou Prêmio Puro . . . . .	86
B.10	Prêmio Ganho . . . . .	86
B.11	Classe de bônus . . . . .	86
B.12	Sinistralidade . . . . .	86
B.13	Solvência . . . . .	87
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>

## Lista de Símbolos

$A'$	Transposta da matriz $A$ .
$\mathbf{p}$	Vetor de preços.
$\mathbf{p}^*$	Vetor ótimo de preços.
$P$	Problema de apreçamento de renovações..
$\mathbf{s}$	Vetor de prêmios de riscos.
$\gamma$	Função probabilidade de renovação.
$\Gamma$	Vetor de probabilidade de renovação.
$\mathbf{l}$	Limitante inferior dos preços.
$\mathbf{u}$	Limitante superior dos preços.
$R(\mathbf{p})$	Restrição de renovação.
$\bar{R}$	Meta orçamentária da taxa de renovação.
$\pi(\mathbf{p})$	Restrição de sinistralidade.
$\bar{\pi}$	Meta orçamentária de sinistralidade.
$U(\mathbf{p})$	Função de utilidade do modelo de preços.
$n$	Quantidade de apólices no lote de renovação.
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange.
$\lambda^*$	Multiplicador de Lagrange correspondente à solução $\mathbf{p}^*$ .
$\lambda_R$	Multiplicador de Lagrange correspondente à restrição de renovação.
$\lambda_\pi$	Multiplicador de Lagrange correspondente à restrição de sinistralidade.





## Lista de Figuras

2.1	Modelo de Probabilidade de Renovação . . . . .	13
4.1	Gráfico de $g(x)$ . . . . .	34
4.2	Comparação entre $h(c)$ e $\tilde{h}(c) = c$ . . . . .	34
4.3	Comparação entre $h(c)$ e $\tilde{h}(c) = \ln(c)$ . . . . .	35
4.4	Erro da aproximação de $g(z)$ . . . . .	37
4.5	Comparação entre $h(c)$ e $\tilde{h}(c) = P(c)$ . . . . .	38
4.6	Comparação entre $h(c)$ e $\tilde{h}(c)$ . . . . .	41
4.7	Comparação as soluções do caso B . . . . .	42
5.1	Gráfico da equação central do Caso A . . . . .	44
5.2	Comparação entre bisseção e Brent - tempo de execução . . . . .	48
5.3	Comparação entre bisseção e Brent - Evolução das soluções . . . . .	48
5.4	Esboço de $R(\lambda)$ . . . . .	49
5.5	Esboço de $\lambda_R(\lambda_\pi)$ . . . . .	54
5.6	Esboço de $\pi(\lambda_R(\lambda_\pi), \lambda_\pi)$ . . . . .	55
6.1	Tempos de Execução para o Caso A . . . . .	58
6.2	Tempos de Execução para o Caso B . . . . .	59
6.3	Tempos de Execução para o Caso C . . . . .	60
7.1	Fronteira ótima de renovação e sinistralidade . . . . .	66
A.1	Limitante superior de $K(c)$ para $\tilde{h}(c) = P(c)$ . . . . .	80



## Lista de Tabelas

1.1	<i>Eficiência Operacional de Seguros - Porto Seguro</i>	2
1.2	<i>Simulação de Cenários</i>	3
1.3	<i>Características Lotes de Renovação</i>	4
1.4	<i>Evolução da renovação - Cenário 1</i>	4
1.5	<i>Evolução da renovação - Cenário 2</i>	4
1.6	<i>Evolução da renovação - Cenário 3</i>	5
2.1	<i>Participação em Prêmio Ganho para seguros de automóvel</i>	9
2.2	<i>Lote de renovação de duas apólices - Cenário 1</i>	14
2.3	<i>Lote de renovação de duas apólices - Cenário 2</i>	15
2.4	<i>Amostra da Tabela de Dados</i>	17
2.5	<i>Estatísticas Descritivas da Tabela de Dados</i>	17
2.6	<i>Estatísticas Descritivas das Bases Aleatórias</i>	18
4.1	<i>Resultados numéricos para o laço interno - Algoritmo Newton</i>	40
4.2	<i>Resultados numéricos para o laço interno - Melhoria intermediária</i>	40
4.3	<i>Resultados numéricos para o laço interno - Versão final</i>	41
5.1	<i>Resultados Numéricos para o Caso B - Bisseção</i>	47
5.2	<i>Resultados Numéricos para o Caso B - Algoritmo de Brent</i>	47
5.3	<i>Resultados Numéricos para o Caso B - Algoritmo de Brent com inicialização</i>	50
6.1	<i>Plataforma de Teste</i>	57
6.2	<i>Resultados Numéricos para o Caso A</i>	57
6.3	<i>Resultados Numéricos para o Caso B</i>	59
6.4	<i>Resultados Numéricos para o Caso C</i>	60
6.5	<i>Parâmetros dos testes para o caso D</i>	61
6.6	<i>Resultados Numéricos para o Caso D</i>	61
7.1	<i>Impacto do aumento de mão-de-obra</i>	64
7.2	<i>Impacto da alteração do limite superior <math>u</math></i>	65
7.3	<i>Cenários viáveis de renovação e sinistralidade</i>	65
7.4	<i>Cenários de investimento em propaganda</i>	66



## Lista de Algoritmos

2.1	Geração de base aleatória . . . . .	17
4.1	Construção de $\tilde{\mathbf{p}}$ . . . . .	38
4.2	Construção de $\mathbf{p}^*$ . . . . .	39
5.1	Solução para o caso A . . . . .	44
5.2	Solução para o Caso B . . . . .	45
5.3	Solução para o Caso B utilizando bisseção . . . . .	47
5.4	Solução para o Caso B utilizando o método de Brent . . . . .	48
5.5	Determinação de $\lambda^{aux}$ - Inicialização para Brent . . . . .	49
5.6	Solução final para o Caso B . . . . .	50
5.7	Solução para o caso C . . . . .	51
5.8	Solução do Caso D . . . . .	52
5.9	Cálculo de $\lambda_R = \lambda_R(\lambda_\pi)$ . . . . .	54
5.10	Cálculo de $\lambda_\pi$ - Solução para o caso D . . . . .	55
7.1	Solução iterativa do problema $\mathbb{Q}$ . . . . .	72



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Vinte e três séculos antes de Cristo, na Babilônia, quando as caravanas atravessavam o deserto para comercializar camelos em cidades vizinhas, surgiram as primeiras modalidades de mutualismo, um dos princípios do seguro. Devido à frequência de morte de alguns animais durante o caminho, os cameleiros firmaram um acordo no qual pagariam para substituir o camelo perdido.

No ramo da navegação, também foi adotado o princípio de mutualismo entre os hebreus e fenícios cujos barcos navegavam através dos mares Egeu e Mediterrâneo. Existia entre os navegadores um acordo que garantia a quem perdesse um navio a construção de outro, pago pelos demais participantes da mesma frota.

No século XII da era cristã, surgiu o primeiro formato de seguro como negócio. Chamava-se Contrato de Dinheiro e Risco Marítimo, formalizado por meio de um documento assinado pelo navegador e um financiador. O financiador emprestava ao navegador quantia em dinheiro no valor do barco e das mercadorias transportadas. Se durante a viagem o barco sofresse alguma avaria, então o dinheiro emprestado não era devolvido. Caso contrário, esse dinheiro voltava para o financiador acrescido de juros.

O seguro cresceu impulsionado pelas Grandes Navegações do século XVI. Além disso, o desenvolvimento de ferramentas matemáticas como a teoria das probabilidades e a estatística tiveram papel fundamental pois permitiram aferir o valor a ser pago pelo seguro, o **prêmio** (B.8), de forma mais precisa. Tais critérios são válidos até hoje.

Com o advento da máquina e da era industrial no século XIX, surgiram e desenvolveram-se outras modalidades de seguro, como o de incêndio, o de transportes terrestres, e o de vida. Os tempos haviam mudado e o mundo ingressava na era da produção em série e do consumo em escala. A figura do segurador individual desapareceu, e no seu lugar surgiram as companhias seguradoras como existem hoje.

Como exemplo de uma típica seguradora brasileira, vamos considerar a Porto Seguro Companhia de Seguros Gerais, uma das empresas líderes do mercado segurador brasileiro. Na tabela 1.1, estão os dados de seus últimos balancetes gerais. Por simplicidade e por ser típico do mercado segurador, todos os dados estão em percentuais do **prêmio ganho** (B.10).



Tabela 1.1: Eficiência Operacional de Seguros - Porto Seguro

Grandeza	2007	1º Trim 2008	2º Trim 2008
Sinistro	58,6%	57,1%	57,1%
Despesas Comerciais	23,9%	21,6%	21,3%
Despesas Administrativas	22,7%	20,9%	20,8%
Resultado Financeiro	11,5%	7,6%	12,1%
Lucro	6,2%	8,0%	13,0%

Considerando os resultados de 2007, destacamos:

- **Alto custo com sinistro:** o principal custo do negócio são os **sinistros** (B.4). Além disso, essas grandezas não diminuem com o aumento das vendas;
- **Baixa Margem de Lucro:** apenas 6,2% das receitas são revertidas em lucro.
- **Alto custo por unidade de vendas:** considerando que as despesas comerciais derivam principalmente de comissão sobre o prêmio, elas aumentam conforme aumentam as vendas. Assim, como as linhas de sinistro e despesas comerciais, tem-se que 82,5% dos custos são variáveis com a quantidade de vendas. Apenas as despesas administrativas, que representam 22,7% dos custos, sofrem o efeito de ganho de escala.

Com as características acima, seguradoras apresentam uma alavancagem operacional<sup>1</sup> bem baixa. Por outro lado, como o lucro é baixo em relação ao prêmio, pequenos aumentos nos preços geram aumentos consideráveis de lucratividade. Assim, podemos inferir que o apreçamento ótimo é vital para uma seguradora.

Para tornar mais clara a importância da correta alocação de preços, simularemos efeitos nos balancetes conforme os seguintes cenários:

- **I:** aumento de 1% nas vendas;
- **II:** aumento de 1% nos preços;
- **III:** aumento de 1% nas vendas e queda de 1% nos preços;
- **IV:** queda de 1% nas vendas e aumento de 1% nos preços;

Para essas simulações consideraremos que todas as variações serão lineares. Além disso, tomaremos as regras de variação:

- Prêmio varia tanto com preço quanto com vendas;
- Sinistro varia apenas com vendas;
- Despesas Comerciais fixas em 23,94% do prêmio;

<sup>1</sup>Alavancagem Operacional ocorre quando um aumento de x% nas vendas gera um aumento de nx% no lucro - Wikipedia.

- Despesas Administrativas sempre são fixas;
- Ganho Financeiro fixo em 11,48% do prêmio.

Assim, para cada um dos cenários descritos, construímos novos balancetes simulados. Os resultados estão na tabela 1.2.

Tabela 1.2: Simulação de Cenários

Grandeza	Base	I	II	III	IV
Prêmio	100,00	101,00	101,00	99,99	99,99
Sinistro	58,64	59,23	58,64	59,23	58,06
Despesas Comerciais	23,94	24,18	24,18	23,94	23,94
Despesas Administrativas	22,65	22,65	22,65	22,65	22,65
Resultado Financeiro	11,48	11,60	11,60	11,48	11,48
Lucro	6,24	6,53	7,12	6,82	5,65
Var Lucro(%)	0,00	4,63	14,02	9,25	-9,53

Note o forte impacto de variações de preço no lucro da operação. Com isso, verificamos a importância do correto apuração para o mercado de seguros.

## 1.2 Apuração de Renovações de Seguro de Automóvel

Entre os vários tipos de seguros, há aqueles com duração definida como os de carro e residência. Esses seguros têm a duração típica de um ano e após esse período há a opção da renovação da proteção ao bem. Para esses tipos de seguros, definimos três modalidades de vendas:

- **Seguro Novo:** é a venda a um cliente sem histórico de seguro. Os principais motores dessas vendas são posicionamento de preço e canal de vendas associado;
- **Renovação Congênere:** venda de um seguro a um consumidor cuja apólice de outra companhia terminou. Geralmente, a venda é definida totalmente por preço, posto que é necessário oferecer um incentivo para o segurado trocar de companhia;
- **Renovação Interna:** venda de um seguro a um cliente da própria companhia. Nesse caso, a venda concentra-se na definição de um preço adequado ao cliente, muitas vezes independente dos preços oferecidos pela concorrência.

Segundo [Pentikäinen], o negócio de seguros está centrado na continuação das apólices vigentes, ou seja, nas renovações internas. Seguros novos e renovações congêneres possuem efeito apenas marginal para os resultados gerenciais das companhias. Assim, é interessante o desenvolvimento de modelos de preços específicos para renovações.

## 1.3 Objetivo

Como os clientes de um lote de renovação constam na base de dados da seguradora, o processo de formação de preço pode ser mais detalhado. Assim, a seguradora sabe, de antemão, os prováveis cenários de vendas dessas renovações e os lucros futuros.

Nesse contexto, exemplificaremos possibilidades de apuração com um lote fictício de renovação. Consideremos, então, um grupo de apólices em época de renovar com as características da tabela 1.3 para seus prêmios passados e **prêmios de riscos** (B.9). Aqui o lucro será simplificado para prêmios menos prêmios de riscos.

Tabela 1.3: Características Lotes de Renovação

Quantidade	Prêmio médio	Prêmio de Risco	Lucro
500.000	R\$ 877,50	R\$ 498,65	R\$ 189.425.320,09

Para os preços de renovação dessas apólices, podemos sugerir o mesmo preço pago no ano anterior. Com isso, sem esforço de apuração, obteremos uma renovação hipotética de 61%. Entretanto, o prêmio de risco deriva de fatores como preço dos veículos, preço de peças, despesas médicas e custo de mão-de-obra das oficinas. Como essas grandezas aumentam com a inflação, esperamos um crescimento anual de aproximadamente 14% do prêmio de risco. A reprodução desse cenário consta na tabela 1.4.

Tabela 1.4: Evolução da renovação - Cenário 1

Ano	Quantidade	Prêmio médio	Prêmio de Risco	Lucro
Ano 0	500.000	R\$ 877,50	R\$ 498,65	R\$ 189.425.320,09
Ano 1	304.150	R\$ 877,50	R\$ 570,67	R\$ 93.320.975,83

Note que esse cenário apresenta a metade do lucro em relação ao ano anterior. Tal cenário é esperado, pois os custos aumentaram e os preços permaneceram os mesmos.

Uma forma simples de corrigir isso seria aumentar os preços na mesma proporção, 14% ao ano, para manter a lucratividade por negócio. Como ocorre aumento de preço, é natural uma queda nas vendas. Com isso, consideraremos uma renovação de 58%. Esses resultados encontram-se na tabela 1.5.

Tabela 1.5: Evolução da renovação - Cenário 2

Ano	Quantidade	Prêmio médio	Prêmio de Risco	Lucro
Ano 0	500.000	R\$ 877,50	R\$ 498,65	R\$ 189.425.320,09
Ano 1	275.400	R\$ 943,99	R\$ 533,55	R\$ 113.035.176,00

Nesse novo cenário, a queda do lucro é menor. Entretanto, existe uma diminuição drástica da carteira de apólices, fato que levaria ao fim da seguradora pois o peso das despesas administrativas aumentaria.

Suponhamos agora um cenário de apuração ideal, obtido através de um modelo de otimização. Com essa técnica e uma curva de demanda apólice a apólice, conseguimos elevar os preços nos riscos inelásticos e somos mais conservadores com os clientes mais sensíveis a preço. Aplicando esse técnica, temos um ajuste anual de 11% com uma renovação de 60%. O resultado dessas técnica de apuração é observado na tabela 1.6.

Tabela 1.6: *Evolução da renovação - Cenário 3*

Ano	Quantidade	Prêmio médio	Prêmio de Risco	Lucro
Ano 0	500.000	R\$ 877,50	R\$ 498,65	R\$ 189.425.320,09
Ano 1	300.000	R\$ 975,44	R\$ 582,09	R\$ 118.005.000,00

Nesse último cenário, temos lucratividade superior à anterior. Além disso, a renovação também é mais elevada, não gerando grande diminuição de carteira. Outro ponto importante é o papel dos preços na seleção de risco: cada cenário descrito ocasionou um prêmio de risco diferente.

Portanto, o objetivo desta dissertação é desenvolver modelos de preços específicos para renovações internas. Também desenvolveremos soluções numéricas que aproveitam a estrutura dos problemas construídos.

#### **1.4 Estrutura do Documento**

Esta dissertação foi organizada do seguinte modo:

- Capítulo 2: revisão da literatura e definição do nosso modelo de preços de renovações;
- Capítulo 3: investigação da estrutura do modelo de preços;
- Capítulo 4 e 5: desenvolvimento de soluções numéricas para o modelo de preços desenvolvido.
- Capítulo 6: desempenho das soluções numéricas implementadas.
- Capítulo 7: conclusão da dissertação, apresentando as aplicações gerenciais do resultado desta dissertação;
- Apêndice A: demonstrações;
- Apêndice B: algumas definições do mercado segurador.



## Capítulo 2

### O modelo de preços

Neste capítulo, definiremos nosso Modelo de Preços no formato de um problema de programação não-linear. Primeiramente, relembremos alguns textos que tratam do problema de apuração. Depois, com base nas boas práticas e nos anseios de melhoria, descreveremos nosso modelo de preços.

#### 2.1 Revisão da Literatura

##### 2.1.1 Geral

A teoria geral de apuração, segundo [Churchill], tem três abordagens:

- **Preço baseado em custo:** define o custo de um produto ou serviço e garante que o preço ofertado seja maior;
- **Preço baseado na concorrência:** foca a análise e conhecimento dos preços dos concorrentes e define qual o patamar de preço adequado;
- **Preço baseado no valor para o cliente:** analisa o mercado consumidor e, conforme as expectativas do cliente, escolhe um preço que o mesmo considere justo.

Primeiramente, descreveremos técnicas de precificação de seguros baseadas em custos. Em seguida, estudaremos o efeito de custos e concorrência na formação de preços. A terceira abordagem não será tratada devido sua não ocorrência na literatura estudada.<sup>1</sup>

##### 2.1.2 Técnicas Monopolistas (ou preço baseado em custos)

[Mendes] fornece um dos métodos mais simples de formação de preços baseada em custos. Segundo seu livro, o preço de um seguro, dito preço comercial, deve ser construído da seguinte forma:

$$P_{comercial} = C_{com} + P_{puro} \quad (2.1)$$

$$P_{puro} = P_{est} + C_{seg} \quad (2.2)$$

$$P_{est} = \frac{\sum S}{N} \quad (2.3)$$

Onde:

---

<sup>1</sup>No decorrer do texto, veremos que o modelo de preços aqui desenvolvido engloba o aspecto de “valor para o cliente” ao considerar a probabilidade de renovar de determinada apólice.

- $P_{comercial}$ : prêmio comercial, ou seja, aquele será cobrado do segurado;
- $C_{com}$ : carregamento estrutural. Cobre as despesas comerciais, as despesas administrativas e a remuneração do acionista;
- $P_{puro}$ : Prêmio puro;
- $C_{seg}$ : carregamento de segurança. Garante que os prêmios puros arrecadados sejam suficientes para o pagamento de sinistros;
- $P_{est}$ : Prêmio estatístico, ou de forma mais abrangente, custo real do serviço.

A definição do carregamento estrutural concentra-se no estudo da estrutura de custos da seguradora. É uma avaliação contábil. [Florentino] é uma interessante orientação desse aspecto. Além desse carregamento puro, também é importante considerar variações nas grandezas analisadas. Alguns exemplos de mudanças são:

- Dissídio da categoria securitária aumenta as despesas administrativas;
- Mudanças na taxa Selic alteram o rendimento das reservas técnicas;

O carregamento de segurança, em linhas gerais, prevê o crescimento dos sinistros ocorridos. Outra denominação técnica para esse valor é projeção de sinistro. Para a construção do indicador de projeção de sinistro, costuma-se relacionar o sinistro com outras grandezas tais como inflação, desemprego, preço do petróleo, preço do aço etc..

Finalmente, no modelo de apuração proposto por [Mendes], devemos definir corretamente o prêmio estatístico. A forma ingênua de definir esse indicador é somar todos os sinistros e dividir pelo total de negócios da carteira em questão. Em uma primeira análise, essa técnica soa adequada, entretanto ela tem problemas de massa estatística. Um exemplo patológico seria aferir o prêmio estatísticos de “Ferrari em São Paulo”, posto que a quantidade de veículos nessa situação é pequena. Por outro lado, “Gol em São Paulo” não apresentaria problemas de modelagem estatística.

Devido ao problema de massa estatística, o prêmio estatístico ou prêmio de risco costuma ser construído com base em Modelos de Prêmios de Risco. Exemplos de textos com esse objetivo são [Prieto] e [Brockman].

Com base no exposto, podemos apresentar as seguintes vantagens no modelo proposto por [Mendes]:

- **Solvência:** supondo que os carregamentos foram corretamente calculados, os preços comerciais sempre serão suficientes para pagar os prováveis sinistros;
- **Simplicidade:** é um modelo simples, possibilitando calibrar os preços comerciais utilizando-se apenas de matemática básica;

Por outro lado, essa técnica de apuração possui as seguintes falhas:

- **Demanda e Competitividade:** não há análise de demanda ou competitividade. Os preços são calculados sem considerar características do mercado consumidor. Também não são considerados os preços ofertados pelos concorrentes;
- **Subsídio cruzado:** todos os produtos apresentam a mesma lucratividade, não sendo possível utilizar o lucro extra de uma classe de negócios para diminuir o preço de outra classe.

Na prática, o modelo de Mendes é utilizado principalmente por agências reguladoras. Com base em informações fornecidas pelas empresas atuantes no mercado segurador brasileiro, a SUSEP elabora preços mínimos para os riscos. O objetivo central da SUSEP é evitar que cenários de guerra de preços levem a situações de insolvência.

### 2.1.3 Teorias de Mercado Oligopólico

A tabela abaixo fornece a participação de prêmio ganho das principais seguradoras brasileiras. Dados foram obtidos em [SUSEP]

Tabela 2.1: *Participação em Prêmio Ganho para seguros de automóvel*

Seguradora	Participação(%)	Participação Acumulada(%)
Porto Seguro	20,3	20,3
Bradesco	13,4	33,7
Itaú Unibanco	10,4	44,1
Sul América	8,7	52,8
Mapfre	7,7	60,5
BrasilVeículos	6,5	67,0
Liberty	6,4	73,4

Com base em [Hall], podemos classificar o mercado de seguros brasileiro como um oligopólio devido as seguintes características:

- **Concentração de Mercado:** como visto na tabela 2.1, apenas 7 companhias dominam 73,4% do mercado, caracterizando a concentração em poucas firmas;
- **Produtos semelhantes:** apesar de diferenças operacionais e dos diferentes serviços agregados ao seguro, essencialmente todas as companhias oferecem o mesmo produto: cobertura contra danos;
- **Barreiras regulatórias à entrada:** a regulação da SUSEP, visando a solvência das companhias, impede que sejam criadas novas seguradoras com poder de modificar o mercado no curto prazo;
- **Barreiras de imagem à entrada:** tal qual o ramo bancário, é necessário a confiança do consumidor para comprar o seguro de uma companhia. Assim, entrantes necessitam de grandes gastos com propaganda para serem uma opção real ao consumidor.

Em virtude dessas características, analisaremos as técnicas de apuração que consideram efeitos oligopólicos no preço.

[Taylor] é um dos textos mais elementares de apuração em mercados oligopólicos, ou mais especificamente, apuração de seguros. Utilizando a notação:



- $q_i$ : quantidade de negócios no ano  $i$ ;
- $p_i$ : preço por negócio no ano  $i$ ;
- $\pi_i$ : custo total por negócio no ano  $i$ ;
- $\bar{p}_i$ : preço médio do mercado no ano  $i$ ;
- $v_i$ : taxa de distribuição de lucros exigidas pelos sócios da companhia em questão.

Taylor sugere a seguinte função a ser maximizada em  $p$ , ao longo de  $J$  anos:

$$E = \sum_{i=1}^J v^{i-\frac{1}{2}} q_i (p_i - \pi_i),$$

com

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = f_i(p_i, \bar{p}_i).$$

Após a definição desse modelo matemático, Taylor considera duas formas de elasticidade. Além disso são efetuados testes numéricos com dados do mercado australiano. Ao final de seu artigo, Taylor sugere as seguintes melhorias:

- **Subsídio Cruzado:** em determinadas situações, uma seguradora pode optar por trabalhar com prejuízo em determinado ramo a fim de obter vantagens competitivas num nicho de mercado mais rentável. O modelo de Taylor considera apenas um nicho de seguros, sendo possível a extensão desse modelo para vários riscos díspares;
- **Formato da função de demanda:** Taylor sugere que a função de demanda seja construída de forma a ser limitada e apresentar derivada nula em situações de preço extremo;
- **Solvência:** pela formulação do problema, é garantido o lucro máximo ao final de  $J$  anos. Uma evolução interessante é garantir que a empresa mantenha-se solvente ao longo dos vários anos.

Entre as resenhas sobre o artigo de Taylor, a que mais se destaca é [Pentikäinen], pelos seguintes questionamentos e sugestões de melhorias:

- **Tamanho da carteira:** o modelo proposto por Taylor pode levar a situações de grande diminuição da carteira, fato não desejado pelos administradores do negócio. Seria melhor construir modelos com otimização multi-objetivo buscando equilibrar lucro operacional, tamanho do portfólio e distribuição dos lucros;
- **Dados conhecidos a priori:** para o cálculo dos preços que levam ao lucro ótimo, é necessário o conhecimento do preço médio do mercado ao longo dos próximos  $J$  anos. Pentikäinen sugere a discussão de modelos de previsão do mercado a fim de tornar o trabalho mais completo;

- **Função de demanda:** a função de demanda utilizada por Taylor é única para todos os riscos envolvidos. Pentikäinen sugere a adoção de funções mais complexas a fim de considerar elasticidades diferentes para mercados variados. Além disso, sugere a adoção de modelos baseados em renovações da própria companhia.

Paul Emms, em [Emms07A], estende o modelo de Taylor tornando “contínuo” o modelo anteriormente desenvolvido e considera a adoção de duas estratégias de preços diferentes:

$$p(t) = k\bar{p}(t), \quad (2.4)$$

$$p(t) = \pi + r(\bar{p}(t) - \pi). \quad (2.5)$$

Ele define o prêmio médio do mercado  $\bar{p}(t)$  como um processo estocástico. Para tal,  $\bar{p}(t)$  foi definido como um processo browniano geométrico.

A principal evolução desse modelo é a possibilidade de configurar os preços sem a necessidade do conhecimento exato dos prêmios futuros do mercado. Entretanto, ainda há situações que levam a prêmio negativos, prêmios infinitos e períodos prolongados de insolvência.

A fim de melhorar o apereçamento e resolver as questões de prêmios irreais e insolvência, Emms introduziu restrições ao modelo proposto em [Emms07A]. Assim, [Emms07B] desenvolve um modelo com restrições de valores dos prêmios e restrições de solvência. Primeiramente, foram consideradas restrições de caixa para os prêmios a serem configurados. Com isso, a simplicidade do modelo foi mantida e foi possível desenvolver soluções analíticas explícitas para esse caso.

Na segunda parte do artigo, analisou-se a questão da solvência introduzindo uma restrição específica para esse caso. Devido à complexidade do problema construído, foram necessárias técnicas de otimização numérica para configurar os preços, não sendo mais possível a construção de solução analítica.

Dentro da mesma linha de trabalho, Emms concentrou-se no estudo de mercados finitos e infinitos em [Emms06], através da manipulação da função de demanda. Nesse artigo, Emms sugere que a razão de crescimento da demanda(**B**) seja da forma:

$$\mathbf{B} = qa \left( 1 - \frac{q}{q_m} \right),$$

onde  $q_m$  representa a exposição máxima, ou seja, a saturação do mercado segurador. Apesar do foco na administração da exposição, Emms não introduziu restrições de vendas mínimas, deixando que o preço fosse configurado apenas pelo lucro máximo.

## 2.2 Descrição do Problema

Nosso modelo matemático de apereçamento reúne características vitais descritas pela literatura:

- **Restrição de Demanda:** conforme descrito em [Pentikäinen], situações extremas de preço podem levar à diminuição drástica da carteira de seguros. Para evitar isso, introduzimos uma restrição de quantidade mínima de renovações (restrição de demanda);

- **Restrição de Solvência:** de forma análoga a [Emms07B], introduzimos restrições que garantam a solvência, como a condição de sinistralidade máxima do lote de renovação;
- **Restrição de Prêmio:** também como em [Emms07B], evitamos preços extremos (e.g. negativos ou maior que a importância segurada) através de restrições de caixa<sup>2</sup> para os valores de prêmio.
- **Subsídio cruzado:** apreçaremos várias apólices diferentes, permitindo que o prêmio de uma seja utilizado para cobrir os custos de outra conforme sugerido em [Taylor]. Em outras palavras, calibraremos vários prêmios ao mesmo tempo.
- **Metas orçamentárias:** é vital que o modelo possua mecanismos de controle relacionados com metas gerenciais, a fim de permitir que a tomada de decisão pelo usuário.

Resumindo, a tarefa de apreçar um lote de apólices a renovar, de acordo com uma meta orçamentária, pode ser formulada como:

Maximizar

$$Utilidade_{lote}$$

sujeito a

$$R_{lote} \geq \bar{R},$$

$$\pi_{lote} \leq \bar{\pi},$$

$$l \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{u}.$$

Onde:

- $\bar{R}$  representa a meta orçamentária de renovação;
- $\bar{\pi}$  representa a meta orçamentária de sinistralidade.

No tratamento específico desse problema de otimização, consideraremos que as únicas variáveis são os preços das apólices<sup>3</sup>. Com essa premissa, o problema fica:

Maximizar em  $\mathbf{p}$

$$Utilidade_{lote}(\mathbf{p})$$

sujeito a

$$R_{lote}(\mathbf{p}) \geq \bar{R}$$

$$\pi_{lote}(\mathbf{p}) \leq \bar{\pi}.$$

Por procurarmos uma configuração de preços realística, as grandezas serão representadas por modelos de previsão.

<sup>2</sup>Em todo o texto, restrição de caixa significa  $l \leq x \leq u$ .

<sup>3</sup> Na prática, podemos modificar, por exemplo, a estratégia de propaganda e de premiação ao corretor de forma a influenciar nos resultados das vendas

### 2.2.1 Previsão da Renovação

Para configurar o lote, é mister projetar a sua renovação. Para tal, desejamos estimar a probabilidade de renovação de cada apólice. Com o uso de técnicas estatísticas, é comum construir o modelo de probabilidade de renovação ( $\gamma$ ) de forma a termos a seguinte equivalência:

$$R_{lote} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i}{n}.$$

Onde:

- $\gamma_i$  : probabilidade de renovação de uma apólice
- $n$  : quantidade de apólices no lote

Em outras palavras, o modelo de probabilidade de renovação é estimado de modo que a média das probabilidades de renovação indique a taxa de renovação desse lote. Com base nessa equivalência, podemos escrever a restrição de renovação como:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j(\mathbf{p}_j) - n\bar{R} \geq 0. \quad (2.6)$$

No presente trabalho, utilizaremos um modelo logístico de previsão:

$$\gamma_j(\mathbf{p}_j) = \frac{\exp(\alpha_j + \beta_j \mathbf{p}_j)}{1 + \exp(\alpha_j + \beta_j \mathbf{p}_j)}, \quad (2.7)$$

cujo gráfico está na figura 2.1.

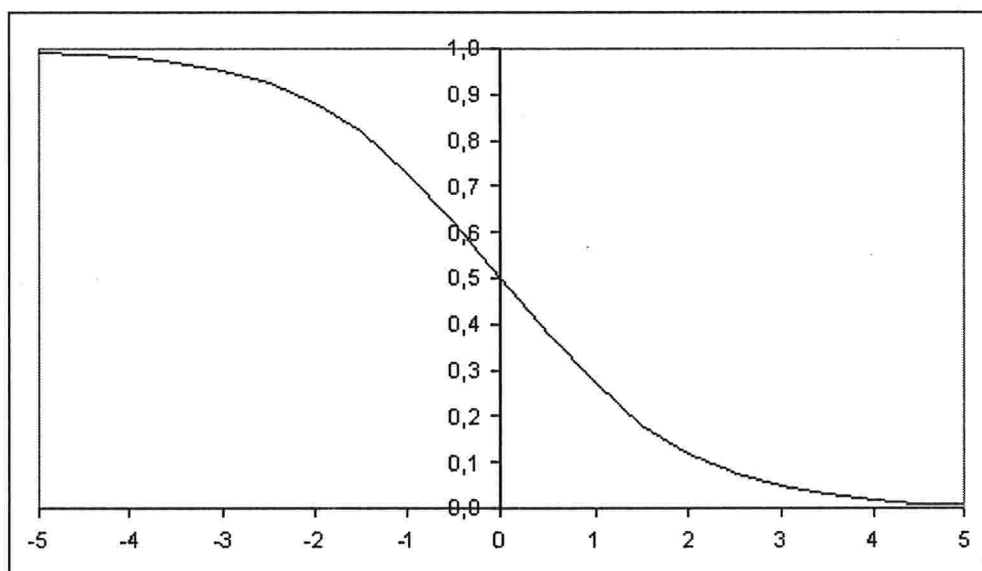


Figura 2.1: Modelo de Probabilidade de Renovação

É importante ressaltar que os modelos acima pressupõem a independência dos comportamentos dos segurados de cada apólice do lote a ser renovado. Na prática, essa premissa é bem razoável, pois mesmo um cliente com várias apólices tende a decidir cada negócio em uma análise separada.

Para facilitar a escrita do problema no formato matricial, denotaremos por  $\Gamma$  o vetor de probabilidade de renovação do lote. Assim, teremos:

$$(\Gamma(\mathbf{p}))_i = \gamma_i(\mathbf{p}_i)$$

### 2.2.2 Projeção de Sinistralidade

Para calcular a sinistralidade (B.4) basta obter a soma dos prêmios e a soma dos sinistros das apólices renovadas. Logo, devemos considerar formas de prever a quantidade futura de prêmio e de sinistro.

No caso do prêmio, como este é uma variável do problema, não há desafio. Por outro lado, é necessário criar uma projeção de sinistro de cada apólice. Neste trabalho, o sinistro futuro de cada apólice será considerado um dado do problema. Tipicamente esses dados são obtidos através da construção de modelos preditivos de prêmio de risco.

Com base do exposto acima, temos a seguinte restrição:

$$\frac{\sum_{i=1}^n s_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \leq \bar{\pi}.$$

Apesar da expressão acima parecer razoável, ela não considera quais apólices serão renovadas. Com a definição acima, pode ocorrer que as apólices que garantem a meta de renovação não sejam as mesmas que garantem a meta de sinistralidade, apesar do problema estar bem resolvido. Um simples exemplo pode ser dado com o lote de duas apólices da tabela 2.2. Nessa tabela também constam as metas de renovação e sinistralidade bem como os resultados desse lote de renovação.

Tabela 2.2: Lote de renovação de duas apólices - Cenário 1

Apólice	$p$	$s$	$\gamma$
A	1000	100	0.01
B	100	100	0.99
$R$	$\bar{\pi}$	$R$	$\pi$
	0.50	0.60	0.50
			0.18

Nesse caso, as apólices obedecem às duas restrições. Entretanto, como a renovação da Apólice B é praticamente 100% e a apólice A, quase 0%, o resultado provável é a renovação apenas da apólice B. Assim, teríamos uma sinistralidade de 1.

A fim de evitar esse resultado nefasto, é interessante considerar a propensão de renovar de cada apólice ao estimar a contribuição de seu prêmio e sinistro no lote. Matematicamente, temos a seguinte expressão

equivalente à restrição de sinistralidade:

$$\sum_{j=1}^n (s_j \cdot \gamma_j(\mathbf{p}_j)) - \bar{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{p}_j \cdot \gamma_j(\mathbf{p}_j)) \leq 0 \quad (2.8)$$

Note que a expressão acima equivale à solvência esperada. Voltando ao exemplo supracitado, temos o cenário da tabela 2.3. Note que essa configuração do lote não satisfaz a restrição de sinistralidade pois a sinistralidade projetada do lote é 92%, muito maior que a meta de 60%.

Tabela 2.3: *Lote de renovação de duas apólices - Cenário 2*

Apólice	$p$	$s$	$\gamma$
A	1000	100	0.01
B	100	100	0.99
$\bar{R}$	$\bar{\pi}$	R	$\pi$
0.50	0.60	0.50	0.92

### 2.2.3 Utilidade do lote

Considerando que o lote possua apenas uma apólice, é natural tomar a utilidade “U” dessa apólice como o lucro que a mesma gera. Como utilizado em [Taylor], temos a seguinte equivalência:

$$U_i(\mathbf{p}_i) = L_i(\mathbf{p}_i) = \mathbf{p}_i - s_i$$

Extrapolando essa expressão para o lote todo, temos:

$$U_{lote}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n L_i(\mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i - s_i)$$

De forma equivalente ao exposto na seção anterior, é importante utilizar a tendência de renovação como ponderador a fim de impedir que as apólices mais lucrativas sejam aquelas com menor probabilidade de renovar. Assim, sugerimos a seguinte utilidade:

$$U_{lote}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n (L_j(\mathbf{p}_j) \cdot \gamma_j(\mathbf{p}_j)) = (\mathbf{p} - \mathbf{s})' \Gamma(\mathbf{p}) \quad (2.9)$$

Note que a fórmula equivale ao cálculo do lucro esperado.

### 2.2.4 Forma final do problema

Utilizando as equações (2.6), (2.8) e (2.9) temos o seguinte problema:

Maximizar em  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$

$$U(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{s})' \Gamma(\mathbf{p})$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(\mathbf{p}_j) - n\bar{R} \geq 0,$$

$$\pi(\mathbf{p}) = (\mathbf{s} - \bar{\pi}\mathbf{p})' \Gamma(\mathbf{p}) \leq 0,$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

A restrição de caixa garante que os preços apresentados respeitam condições comerciais<sup>4</sup>. Prêmios muito altos causam dano à imagem da empresa. Por outro lado, prêmios muito baixos levam o mercado segurador a uma guerra de preços.

Definido o problema alvo, o objetivo final da dissertação é resolvê-lo.

### 2.2.5 Bases de dados

Para realização deste estudo usamos uma base de dados com 100.000 apólices de segurados, que contrataram o seguro de automóvel no período de janeiro de 2008 a março de 2008. Ela contém informações reais de sinistro e prêmio para as garantias de colisão, indenização integral, danos materiais a terceiros e danos corporais. Esses dados foram fornecidos por uma seguradora real e consideramos o planejamento típico de uma empresa do ramo securitário.

Cada linha do arquivo representa uma apólice e as colunas contêm informações sobre essa apólice. A seguir temos as descrições das colunas:

- Número da Apólice: identificador único numérico e seqüencial da apólice. É a chave primária do arquivo.
- Prêmio de risco: valor do prêmio de risco em reais. Como dito anteriormente, essa grandeza será um dado do problema.
- Código da Classe de Bônus: representa a classe de bônus da apólice em questão e pode variar de 0 a 10, sendo sempre um número inteiro.
- Alfa: campo numérico decimal que equivale ao  $\alpha$  do modelo de probabilidade de renovação  $\gamma$ .
- Beta: campo numérico decimal que equivale ao  $\beta$  do modelo de probabilidade de renovação  $\gamma$ .
- Valor do Prêmio Anterior: valor, em reais, do prêmio pago nessa apólice.
- Valor da IS: valor, em reais, da importância segurada. No presente caso, a importância segurada representa o valor máximo a ser restituído em caso de perda total ou roubo do veículo.

Abaixo, uma amostra das 3 primeiras linhas dessa base.

---

<sup>4</sup>Um exemplo de restrição comercial é garantir que o preço de um seguro, de um ano para outro, não varie mais que 100%.

Tabela 2.4: Amostra da Tabela de Dados

Apólice	Prêmio de risco	Bônus	$\alpha$	$\beta$	Prêmio Anterior	Importância Segurada
1	1.809,91	2	4,94	-0,00053	2.366,80	25.162,00
2	1.070,77	3	4,40	-0,00208	1.400,24	18.944,00
3	760,16	10	4,48	-0,00391	994,06	13.449,00

A seguir, uma tabela contendo estatísticas descritas dos valores da tabela.

Tabela 2.5: Estatísticas Descritivas da Tabela de Dados

Grandeza	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
$\alpha$	4,059	0,57	2,92	5,58
$\beta$	-0,0029	0,0011	-0,0082	-0,000225
Sinistro(reais)	758,00	733,00	105,50	27.607,50

Note que  $\alpha$  e  $\beta$  são os parâmetros do modelo de probabilidade de renovação. Ademais, sempre temos  $\alpha > 0$  e  $\beta < 0$  para toda apólice.

Para analisarmos o tempo de execução e convergência, além da base de dados real, também serão construídas bases de dados aleatórias com mais de 100.000 apólices. Para tal, implementamos algoritmo 2.1 em SAS.

---

**Algoritmo 2.1** Geração de base aleatória
 

---

```

for  $i = 1$  até  $n$  do
   $S_i = \text{Normal}(758; 733)$ 
  Projetar  $S_i$  em  $[105,5 ; 27607,5]$ 
   $\alpha_i = \text{Normal}(4,059; 0,57)$ 
  Projetar  $\alpha_i$  em  $[2,92 ; 5,58]$ 
   $\beta_i = \text{Normal}(-0,0029; 0,0011)$ 
  Projetar  $\beta_i$  em  $[-0,0082 ; -0,000225]$ 
   $L_i = 0,85 \frac{S_i}{0,65}$ 
   $U_i = 1,15 \frac{L_i}{0,85}$ 
end for

```

---

No algoritmo 2.1, cada grandeza foi gerada como uma variável aleatória normal limitada. Foram utilizados os dados da tabela 2.5. Para criar uma distribuição normal, foi utilizado o comando *RAND('Normal', média, desvio)* do SAS. Detalhes podem ser encontrados no manual online [SASDoc]. A tabela 2.6 contém as estatísticas descritivas das bases simuladas.



Tabela 2.6: Estatísticas Descritivas das Bases Aleatórias

Grandeza	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
$\alpha$	4,062	0,56	2,92	5,58
$\beta$	-0,0029	0,0011	-0,0082	-0,000225
Sinistro(reais)	786,18	482,76	105,50	27.607,50

## Capítulo 3

### Características da solução do problema - Condições KKT

Felizmente, nós provamos que o problema tem solução ótima, mesmo sem as restrições de caixa, isto é, mesmo em uma região factível não-compacta. A existência desse máximo irrestrito é importante pois facilita a argumentação para justificar os algoritmos e provas para o caso restrito. Além disso, provamos um resultado fortíssimo: a unicidade da solução.

Primeiramente, analisaremos a estrutura das funções que compõem o objetivo e as restrições. Como destaque, teremos a separabilidade total e subsídios para estudar a estrutura geral do problema. Depois, descreveremos sobre a existência da solução. Em seguida, mostraremos que todo ponto que satisfaz as condições necessárias de primeira ordem também satisfaz as condições suficientes de segunda ordem. Assim, graças ao *Mountain Pass Lemma* em [Ekeland], provaremos que o máximo é único. Por fim, mostraremos as condições de KKT para as possibilidades de solução do problema. Com base nessas condições é que os algoritmos de resolução serão construídos, posto que o máximo é único.

#### 3.1 Estrutura do Problema

Nesta seção analisaremos a estrutura do problema. Para tal descreveremos o gradiente e o hessiano da função objetivo e das restrições.

##### 3.1.1 Análise da função probabilidade de renovação

Considerando a restrição (2.7), a probabilidade de renovação de uma apólice, em função do prêmio de valor  $p$ , é dada por:

$$\gamma(p) = \frac{\exp(\alpha + \beta p)}{1 + \exp(\alpha + \beta p)}. \quad (3.1)$$

Diferenciando a expressão acima em função de  $p$ , obtemos:

$$\gamma'(p) = \frac{\beta \gamma(p)}{1 + \exp(\alpha + \beta p)}. \quad (3.2)$$

Note que  $\gamma(p) > 0$  para todo  $p$  e, como  $\beta < 0$ ,  $\gamma'(p) < 0$  para todo  $p$ .

Derivando novamente a expressão acima, obtemos:

$$\gamma''(p) = \frac{\beta \gamma'(p) (1 - \exp(\alpha + \beta p))}{1 + \exp(\alpha + \beta p)}. \quad (3.3)$$

Note que a derivada segunda de  $\gamma$  muda de sinal em  $p = \frac{-\alpha}{\beta}$ . Logo,  $\gamma$  não é convexa nem côncava. Entretanto, a função probabilidade de renovação possui características necessárias para uma boa função de demanda conforme a seguinte definição:

**Definição 3.1** Uma função  $f$  satisfaz as Condições de Taylor para Função de Demanda se:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f(p) = 0, \quad (3.4)$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} f(p) = M = \text{constante}, \quad (3.5)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0, \quad (3.6)$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0. \quad (3.7)$$

Filosoficamente, as condições de Taylor traduzem o comportamento esperado para função de demanda em situações extremas de preços.

**Teorema 3.2** A função probabilidade de renovação  $\gamma(p)$  satisfaz as “Condições de Taylor para Função de Demanda”.

Demonstração no apêndice.

### 3.1.2 Análise da função de Utilidade

A função de utilidade (2.9) pode ser reescrita como:

$$U_{\text{lote}}(\mathbf{p}) = \sum f_i(\mathbf{p}_i),$$

com

$$f_i(\mathbf{p}_i) = (\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i) \gamma_i(\mathbf{p}_i),$$

com  $\gamma(p)$  definida em (3.1).

Devido à construção da utilidade do lote, destacamos a sua separabilidade. Em outras palavras, a coordenada  $i$  do gradiente da função utilidade depende apenas de  $\mathbf{p}_i$ . Matematicamente:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i = f'_i(\mathbf{p}_i) = \gamma_i(\mathbf{p}_i) \left( 1 + \frac{\beta_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right). \quad (3.8)$$

Diferenciando novamente, para obter o hessiano da função Utilidade, percebemos que a mesma tem estrutura diagonal. Além disso, cada elemento  $i$  da diagonal depende apenas das grandezas relacionadas à apólice  $i$ . Algebricamente:

$$(\nabla^2 U(\mathbf{p}))_{ii} = f_i''(\mathbf{p}_i) = \gamma_i'(\mathbf{p}_i) \left( 2 + \frac{\beta_i (\mathbf{p}_i - s_i) (1 - \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i))}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right). \quad (3.9)$$

### 3.1.3 Análise da restrição de renovação

Tal qual ocorre com a função utilidade, o gradiente da restrição de renovação é totalmente separável. Assim, diferenciando a expressão (2.6), temos:

$$(\nabla R(\mathbf{p}))_i = \gamma_i'(\mathbf{p}_i) = \frac{\beta_i \gamma_i(\mathbf{p}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)}. \quad (3.10)$$

Conseqüentemente, o hessiano é:

$$(\nabla^2 R(\mathbf{p}))_{ii} = \gamma_i''(\mathbf{p}_i) = \frac{\beta \gamma'(\mathbf{p}_i) (1 - \exp(\alpha + \beta \mathbf{p}_i))}{1 + \exp(\alpha + \beta \mathbf{p}_i)}. \quad (3.11)$$

### 3.1.4 Análise da restrição de sinistralidade

Diferenciando a expressão da restrição de sinistralidade (2.8), obtemos, também, uma estrutura separável. Assim, temos:

$$(\nabla \pi(\mathbf{p}))_i = \gamma(\mathbf{p}_i) \left( -\bar{\pi} + \frac{\beta_i (s_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right). \quad (3.12)$$

onde  $\bar{\pi}$  representa a meta de sinistralidade do lote de renovação. Para o hessiano, diagonal, temos:

$$(\nabla^2 \pi(\mathbf{p}))_{ii} = \gamma'(\mathbf{p}_i) \left( -2\bar{\pi} + \frac{\beta_i (s_i - \mathbf{p}_i) (1 - \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i))}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right). \quad (3.13)$$

## 3.2 Região factível e existência da solução

Começaremos esta seção enumerando lemas que ajudarão a provar a existência de solução para o caso irrestrito. O caminho de prova será determinar um limitante superior e um limitante inferior para o ponto ótimo  $\mathbf{p}^*$ , ou seja, mostrar que os ótimos estão contidos em uma caixa suficientemente grande. Todas as demonstrações estão no anexo.

**Lema 3.3** Para todo  $i$ , existe  $p_i^U$  tal que, se  $p_i > p_i^U$ , então:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i < 0. \quad (3.14)$$

**Lema 3.4** Para todo  $i$ , temos:

$$(\nabla R(\mathbf{p}))_i > 0. \quad (3.15)$$

**Lema 3.5** Para todo  $i$ , existe  $p_i^\pi$  tal que, se  $p_i > p_i^\pi$ , temos:

$$(\nabla\pi(\mathbf{p}))_i > 0. \quad (3.16)$$

**Corolário 3.6** Para todo  $i$ , existe  $p_i^c$  tal que, se  $p_i > p_i^c$ , temos:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i < 0, \quad (3.17)$$

$$(\nabla R(\mathbf{p}))_i > 0, \quad (3.18)$$

$$(\nabla\pi(\mathbf{p}))_i > 0. \quad (3.19)$$

Filosoficamente, o corolário 3.6 garante que a solução do problema de apreçamento de preços não ocorre para preços tendendo ao infinito. Agora, vamos enunciar a existência de um limitante inferior para o preço ótimo. Demonstrações estão no apêndice.

**Lema 3.7** Se  $\bar{R} < 1$ , então existe  $\hat{p}^R$  tal que, se  $p < \hat{p}^R$ , temos:

$$R(\mathbf{p}) < 0. \quad (3.20)$$

**Lema 3.8** Existe  $\hat{p}_i^U$  tal que, se  $p_i < \hat{p}_i^U$ , temos:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i > 0. \quad (3.21)$$

**Lema 3.9** Existe  $\hat{p}_i^\pi$  tal que, se  $p_i < \hat{p}_i^\pi$ , temos:

$$(\nabla\pi(\mathbf{p}))_i < 0. \quad (3.22)$$

**Corolário 3.10** Para todo  $i$ , existe  $\hat{p}_i$  tal que, se  $p_i < \hat{p}_i$ , temos:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i > 0, \quad (3.23)$$

$$R(\mathbf{p}) < 0, \quad (3.24)$$

$$(\nabla\pi(\mathbf{p}))_i < 0. \quad (3.25)$$

O corolário 3.10 nos garante a existência de um limitante inferior para o problema sem as restrições de caixa. Entretanto, é fácil perceber que esse ínfimo pode assumir valores muito baixos, até negativos. Assim, as restrições de caixa são interessantes para evitar a formação de preços ridiculamente baixos. Em virtude da existência de limites inferiores e superiores para o ponto ótimo, podemos enunciar a existência da solução.

**Teorema 3.11** Dado o problema  $\mathbb{P}$  de maximização em  $\mathbf{p}$ :

Maximizar

$$U(\mathbf{p}),$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) \leq 0, \quad (3.26)$$

$$\pi(\mathbf{p}) \leq 0. \quad (3.27)$$

temos que, se  $\mathbb{P}$  é viável, então  $\mathbb{P}$  possui máximo.

### 3.3 Condição de qualificação de independência linear

Nesta seção, discutiremos a independência linear dos gradientes das restrições ativas do problema  $\mathbb{P}$ . Apesar de não mostrarmos prova formal, veremos que os gradientes são linearmente independentes a menos de certos casos patológicos. Para esses casos, uma perturbação infinitesimal em um parâmetro do problema é suficiente para tornar os gradientes linearmente independentes.

Para o caso das restrições de sinistralidade e renovação ativas, os gradientes são linearmente dependentes se:

$$\mu_R \nabla R + \mu_\pi \nabla \pi = 0.$$

com  $\mu_R \neq 0$  ou  $\mu_\pi \neq 0$ .

Para uma apólice  $i$ , devemos ter:

$$\mu_R (-\gamma_i(\mathbf{p}_i^*)) + \mu_\pi \gamma_i(\mathbf{p}_i^*) \left( \frac{\beta_i(s_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i^*)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} - \bar{\pi} \right) = 0 \Rightarrow -\beta_i \mu_R + (\beta_i s_i - \bar{\pi} (1 + \beta_i \mathbf{p}_i^* + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*))).$$

Para os gradientes serem l.i., no mínimo, o sistema de equações para duas apólices deve possuir solução trivial. Assim, é necessária seguinte relação para toda apólice  $i$  e  $j$  do lote de renovação:

$$\frac{\beta_i}{\beta_j} = \frac{\beta_i s_i - \bar{\pi} (1 + \beta_i \mathbf{p}_i^* + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*))}{\beta_j s_j - \bar{\pi} (1 + \beta_j \mathbf{p}_j^* + \exp(\alpha_j + \beta_j \mathbf{p}_j^*))} \quad (3.28)$$

É pouco provável que 100.000 apólices respeitem a relação acima. Seria necessário que todo o lote de renovação fosse composto de duas apólices que se repetissem. Entretanto, mesmo que a relação acima fosse respeitada, bastaria uma perturbação infinitesimal em  $s_j$ , por exemplo, para tornar os gradientes l.i..

Para as restrições de caixa ativas, elas tornariam os gradientes l.d. caso, pelo menos,  $n - 1$  restrições de caixa estivessem ativas. Mesmo esse fato sendo pouco provável, caso ele acontecesse, uma perturbação infinitesimal em  $\mathbf{l}_i$  seria suficiente para tornar os gradientes das restrições ativas l.i..

### 3.4 Condição de Complementaridade Estrita

Nesta seção, discorreremos sobre a propriedade de complementaridade estrita dos pontos KKT do problema  $\mathbb{P}$ . De forma análoga à seção 3.3, mostraremos que a possibilidade de uma restrição ser ativa e seu multiplicador de Lagrange ser nulo é baixa. Além disso, também mostraremos que pequenas perturbações

em parâmetros do problema fazem com que os pontos KKT sempre apresentem complementaridade estrita.

Para o problema  $\mathbb{P}$ , com apenas as restrições de sinistralidade e renovação ativas, as condições KKT são:

$$\nabla U(\mathbf{p}^*) - \lambda_R \nabla R(\mathbf{p}^*) - \lambda_\pi \nabla \pi(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.29)$$

$$R(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.30)$$

$$\pi(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.31)$$

$$\lambda_R \geq 0, \quad (3.32)$$

$$\lambda_\pi \geq 0. \quad (3.33)$$

Tomando ambos os multiplicadores de Lagrange como nulos, temos:

$$\nabla U(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.34)$$

$$R(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.35)$$

$$\pi(\mathbf{p}^*) = 0. \quad (3.36)$$

Como  $U(\mathbf{p})$  é unimodal, ou seja, existe apenas um único  $\mathbf{p}^*$  tal que  $\nabla U(\mathbf{p}^*) = 0$ , a equação (3.34) torna única a escolha de  $\mathbf{p}^*$ . Assim, para satisfazermos (3.35) e (3.36), a escolha dos escalares  $\bar{R}$  e  $\bar{\pi}$  também é única. Filosoficamente, essa construção torna as restrições dispensáveis, uma vez que a solução do problema restrito é igual à solução do problema irrestrito.

Apesar desse fato ser extremamente improvável, caso ele ocorresse, uma perturbação infinitesimal em  $\bar{R}$  e  $\bar{\pi}$  seria suficiente para tornar as restrições de sinistralidade e renovação não-ativas, garantindo que o ponto KKT respeitasse as folgas complementares.

Para as restrições de caixa, ocorre o mesmo efeito. Como, novamente, a equação (3.34) torna única a escolha de  $\mathbf{p}^*$ , existe a necessidade da escolha perfeita de, e.g.,  $I_i = \mathbf{p}_i^*$  para tornar essa restrição ativa com seu multiplicador de Lagrange nulo. Mesmo se isso ocorresse, uma perturbação infinitesimal em  $I_i$  seria suficiente para eliminar essa característica.

Dentro do exposto, enunciamos o teorema sobre complementaridade estrita do problema  $\mathbb{P}$ .

**Teorema 3.12** *Para o problema  $\mathbb{P}$ , todo ponto  $\mathbf{p}^*$  que satisfaz as condições necessárias de primeira ordem apresenta a propriedade de complementaridade estrita.*

### 3.5 Condições Necessária de Primeira Ordem e Suficiente de Segunda Ordem

Primeiramente, mostraremos as condições necessária de primeira ordem(KKT) e as condições suficientes de segunda ordem. Nosso objetivo central é assegurar uma importante característica do problema  $\mathbb{P}$ : todo ponto que satisfaz as condições necessárias de primeira ordem também satisfaz as condições suficientes de segunda ordem.

Para enunciar as condições de primeira e segunda ordem, utilizaremos a seguinte forma canônica do problema  $\mathbb{P}$ :

### 3.5. CONDIÇÕES NECESSÁRIA DE PRIMEIRA ORDEM E SUFICIENTE DE SEGUNDA ORDEM 25

Maximizar em  $\mathbf{p}$

$$U(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{s})' \Gamma(\mathbf{p}),$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) = - \sum_{j=1}^n \gamma_j(\mathbf{p}_j) + n \cdot \bar{R} \leq 0, \quad (3.37)$$

$$\pi(\mathbf{p}) = (\mathbf{s} - \bar{\pi} \mathbf{p})' \Gamma(\mathbf{p}) \leq 0, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{u} \leq 0, \quad (3.39)$$

$$-\mathbf{p} + \mathbf{l} \leq 0. \quad (3.40)$$

Para as condições necessárias de primeira ordem, com as condições de caixa não-ativas, temos:

$$\nabla U(\mathbf{p}^*) - \lambda_R \nabla R(\mathbf{p}^*) - \lambda_\pi \nabla \pi(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.41)$$

$$R(\mathbf{p}^*) \leq 0, \quad (3.42)$$

$$\pi(\mathbf{p}^*) \leq 0, \quad (3.43)$$

$$\lambda_R \geq 0, \quad (3.44)$$

$$\lambda_\pi \geq 0, \quad (3.45)$$

$$\lambda_R R(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.46)$$

$$\lambda_\pi \pi(\mathbf{p}^*) = 0. \quad (3.47)$$

Definindo  $\mathcal{L}(\mathbf{p}^*)$  como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}^*) = U(\mathbf{p}^*) - \lambda_R R(\mathbf{p}^*) - \lambda_\pi \pi(\mathbf{p}^*), \quad (3.48)$$

para as condições suficientes de segunda ordem, temos:

$$\mathbf{y}' \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*) \mathbf{y} < 0, \quad (3.49)$$

para todo  $\mathbf{y}$  tal que:

$$\mathbf{y} \neq 0, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{y}' \nabla R(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{y}' \nabla \pi(\mathbf{p}^*) = 0. \quad (3.52)$$



Como os gradientes são separáveis, a equação matricial (3.41) pode ser representada por várias equações dependentes apenas da apólice  $i$ . Assim, temos:

$$(\nabla U(\mathbf{p}^*))_i - \lambda_R (\nabla R(\mathbf{p}^*))_i - \lambda_\pi (\nabla \pi(\mathbf{p}^*))_i = 0.$$

Utilizando as expressões (3.8), (3.10) e (3.12), temos:

$$\gamma_i(\mathbf{p}_i^*) \left( 1 + \frac{\beta_i(\mathbf{p}_i^* - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} \right) + \frac{\beta_i \lambda_R \gamma_i(\mathbf{p}_i^*)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} - \lambda_\pi \gamma_i(\mathbf{p}_i^*) \left( \frac{\beta_i(\mathbf{s}_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i^*)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} - \bar{\pi} \right) = 0.$$

Como  $\gamma(p) > 0$ , segue que:

$$1 + \frac{\beta_i(\mathbf{p}_i^* - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} + \frac{\beta_i \lambda_R}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} - \lambda_\pi \left( \frac{\beta_i(\mathbf{s}_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i^*)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} - \bar{\pi} \right) = 0. \quad (3.53)$$

Também devido a separabilidade, a matriz do Lagrangeano é diagonal. Assim, para cada diagonal, temos:

$$(\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*))_{ii} = (\nabla^2 U(\mathbf{p}^*))_{ii} - \lambda_R (\nabla^2 R(\mathbf{p}^*))_{ii} - \lambda_\pi (\nabla^2 \pi(\mathbf{p}^*))_{ii}.$$

Utilizando as expressões (3.9), (3.11) e (3.13), obtemos:

$$(\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*))_{ii} = \gamma'_i(\mathbf{p}_i^*) \left( 2 + 2\lambda_\pi \bar{\pi} + \frac{\beta_i(1 - \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*))(\mathbf{p}_i^* - \mathbf{s}_i + \lambda_R - \lambda_\pi(\mathbf{s}_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i^*))}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} \right). \quad (3.54)$$

Como  $\mathbf{p}_i^*$  satisfaz (3.53), simplificamos a expressão acima para:

$$(\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*))_{ii} = \gamma'_i(\mathbf{p}_i^*) \left( 1 + \lambda_\pi \bar{\pi} + \frac{\beta_i(\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*))(-\mathbf{p}_i^* + \mathbf{s}_i - \lambda_R + \lambda_\pi(\mathbf{s}_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i^*))}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} \right). \quad (3.55)$$

Também de (3.53), segue que:

$$\frac{\beta_i(-\mathbf{p}_i^* + \mathbf{s}_i - \lambda_R + \lambda_\pi(\mathbf{s}_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i^*))}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)} = 1 + \lambda_\pi \bar{\pi}.$$

Assim, a forma final de (3.54) é:

$$(\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*))_{ii} = \gamma'_i(\mathbf{p}_i^*) (1 + \lambda_\pi) (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i^*)) < 0. \quad (3.56)$$

Logo, concluímos que  $\mathbf{y}' \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*) \mathbf{y} < 0$ , se  $\mathbf{y} \neq 0$ . Assim, com as condições de caixa não ativas, todo ponto que satisfaz as condições de primeira ordem também satisfaz as condições de segunda ordem.

Para o caso com as restrições de caixa ativas, não podemos garantir que o valor de  $(\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*))_{ii}$  quando  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{l}_i$  ou  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{u}_i$ . Entretanto, para esse caso, o vetor  $\mathbf{y}$  é tal que  $y_i = 0$ . Assim, o sinal de  $\mathbf{y}' \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*) \mathbf{y}$  depende apenas das coordenadas  $i$  que não se encontram na face da caixa. Logo, temos  $\mathbf{y}' \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{p}^*) \mathbf{y} < 0$  também para o caso com restrições de caixa ativas.

Após toda essa argumentação, enunciamos uma importante característica do problema  $\mathbb{P}$ :

**Teorema 3.13** *Todo ponto  $p^*$  que satisfaz as condições necessárias de primeira ordem também satisfaz as condições suficientes de segunda ordem.*

### 3.6 Unicidade da solução

Após toda a caracterização da estrutura do problema, temos os recursos necessários para assegurar que o máximo é único. Para isso, utilizaremos o seguinte corolário do *Mountain Pass Lemma*:

**Corolário 3.14** *Dado o problema:*

*Maximizar*

$$f(x),$$

*sujeito a*

$$g_i(x) \leq 0.$$

*Se todo  $x^*$  que satisfaz as condições de qualificação de independência linear e satisfaz as condições de KKT com complementaridade estrita também satisfaz as condições suficientes de segunda ordem, então o problema apresenta máximo único.*

Antes de tratarmos especificamente da unicidade da solução, definimos o que é um problema normal. Filosoficamente, um problema normal é aquele que não apresenta os casos patológicos descritos nas seções 3.3 e 3.4.

**Definição 3.15** *O problema  $\mathbb{P}$  é dito **normal** se:*

- *todo ponto viável satisfaz as condições de qualificação de independência linear;*
- *todo ponto que satisfaz as condições de KKT apresenta complementaridade estrita.*

Para problemas normais, devido aos corolários 3.6, 3.10, e ao teoremas 3.13 e 3.12, temos as condições do corolário 3.14. Portanto, enunciaremos o teorema de solução única.

**Teorema 3.16** *O problema  $\mathbb{P}$  normal tem máximo único.*

### 3.7 Condições KKT

Como a solução existe e é única, concentraremos em estudar a sua determinação através da determinação do ponto que satisfaz a condição de KKT. Para o problema  $\mathbb{P}$ , temos quatro possibilidades para seu ponto de máximo:

- Caso A: Nenhuma restrição ativa;
- Caso B: Apenas a restrição de renovação ativa;
- Caso C: Apenas a restrição de sinistralidade ativa;

- Caso D: Restrição de renovação e sinistralidade ativas;

Para cada caso específico, escreveremos as respectivas condições KKT que servirão como base no desenvolvimento de algoritmos.

### 3.7.1 Caso A: Nenhuma restrição ativa

Para o caso de nenhuma restrição ativa temos o problema:

Maximizar em  $\mathbf{p}$

$$U(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{s})' \Gamma(\mathbf{p}),$$

sujeito a

$$\mathbf{p} - \mathbf{u} \leq 0, \quad (3.57)$$

$$-\mathbf{p} + \mathbf{l} \leq 0. \quad (3.58)$$

Para o problema acima, sem restrições, as condições necessárias de primeira ordem são:

$$\nabla L(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.59)$$

### 3.7.2 Caso B: Apenas restrição de renovação ativa

Com apenas a restrição de renovação ativa, o problema de apereçamento de apólices assume a forma:

Maximizar em  $\mathbf{p}$

$$U(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{s})' \Gamma(\mathbf{p}),$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) = - \sum_{j=1}^n \gamma_j(\mathbf{p}_j) + n\bar{R} \leq 0, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{u} \leq 0, \quad (3.61)$$

$$-\mathbf{p} + \mathbf{l} \leq 0. \quad (3.62)$$

Com base nessa forma canônica, as condições KKT, sem as restrições de caixa, resumem-se a:

$$\nabla U(\mathbf{p}) = \lambda \cdot \nabla R(\mathbf{p}), \quad (3.63)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (3.64)$$

$$R(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.65)$$

### 3.7.3 Caso C: apenas restrição de sinistralidade ativa

Para o caso C, apenas com a restrição de sinistralidade ativa, o problema assume a forma:

Maximizar em  $\mathbf{p}$

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n ((\mathbf{p}_i - S_i) \cdot \gamma_i(\mathbf{p}_i)),$$

sujeito a

$$\pi(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n (S_j \cdot \gamma_j(\mathbf{p}_j)) - \bar{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{p}_j \cdot \gamma_j(P_j)) \leq 0, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{p} - U \leq 0, \quad (3.67)$$

$$-\mathbf{p} + L \leq 0. \quad (3.68)$$

Para o problema acima, considerando a restrição de sinistralidade ativa, as condições de KKT são:

$$\nabla U(\mathbf{p}) = \lambda \cdot \pi(\mathbf{p}), \quad (3.69)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (3.70)$$

$$\pi(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.71)$$

### 3.7.4 Caso D: restrição de renovação e sinistralidade ativas

Resgatando o problema, com as restrições de renovação e sinistralidade ativas, temos:

Maximizar em  $\mathbf{p}$

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i - S_i) \gamma_i(\mathbf{p}_i),$$

sujeito a

$$-R(\mathbf{p}) = -\sum_{j=1}^n \gamma_j(\mathbf{p}_j) + n\bar{R} = 0, \quad (3.72)$$

$$\pi(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n (S_j \cdot \gamma_j(\mathbf{p}_j)) - \bar{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{p}_j \cdot \gamma_j(P_j)) = 0, \quad (3.73)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{u} \leq 0, \quad (3.74)$$

$$-\mathbf{p} + \mathbf{l} \leq 0. \quad (3.75)$$

As condições KKT equivalentes, desconsiderando as restrições de caixa, são:

$$\nabla U(\mathbf{p}) = \lambda_R \nabla R(\mathbf{p}) + \lambda_\pi \nabla \pi(\mathbf{p}), \quad (3.76)$$

$$R(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.77)$$

$$\pi(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.78)$$

$$\lambda_R \geq 0, \quad (3.79)$$

$$\lambda_\pi \geq 0. \quad (3.80)$$



## Capítulo 4

### Análise Numérica do Laço interno

Neste capítulo desenvolveremos métodos numéricos para resolver as equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76). Ao investigar estas equações, obtemos um formato único. Em seguida, descreveremos técnicas de aproximação para acelerar a convergência do algoritmo de Newton.

#### 4.1 Formato único para as equações dos gradientes

Observando as equações envolvendo o gradiente da função objetivo dos casos A, B, C e D, (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76), temos:

$$\begin{aligned} A : \nabla U(\mathbf{p}) &= 0, \\ B : \nabla U(\mathbf{p}) &= \lambda \nabla R(\mathbf{p}), \\ C : \nabla U(\mathbf{p}) &= \lambda \nabla \pi(\mathbf{p}), \\ D : \nabla U(\mathbf{p}) &= \lambda_R \nabla R(\mathbf{p}) + \lambda_\pi \nabla \pi(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Como todas os gradientes são separáveis, podemos substituir cada equação matricial por  $n$  equações equivalentes. Essas equações, em vista de (3.8), (3.10), (3.12), são:

$$\begin{aligned} A : \gamma_i(\mathbf{p}_i) \left( 1 + \frac{\beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right) &= 0, \\ B : \gamma_i(\mathbf{p}_i) \left( 1 + \frac{\beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right) &= -\lambda \frac{\beta_i \gamma_i(\mathbf{p}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)}, \\ C : \gamma_i(\mathbf{p}_i) \left( 1 + \frac{\beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right) &= \lambda \gamma(\mathbf{p}_i) \left( -\bar{\pi} + \frac{\beta_i(\bar{\pi} \mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right), \\ D : \gamma_i(\mathbf{p}_i) \left( 1 + \frac{\beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right) &= \frac{-\lambda_R \beta_i \gamma_i(\mathbf{p}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} + \lambda_\pi \gamma(\mathbf{p}_i) \left( \frac{\beta_i(\bar{\pi} \mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} - \bar{\pi} \right). \end{aligned}$$

Desenvolvendo as expressões para eliminar as frações, temos:

$$\begin{aligned} A : 1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i) &= 0, \\ B : 1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i) &= -\lambda \beta_i, \\ C : 1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i) &= \lambda (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi} (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i)), \\ D : 1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i) &= -\lambda_R \beta_i + \lambda_\pi (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi} (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i)). \end{aligned}$$

Isolando expressões com  $\mathbf{p}$  nos lados esquerdos das igualdades, obtemos:

$$A : \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i = \beta_i \mathbf{s}_i - 1, \quad (4.1)$$

$$B : \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i = \beta_i \mathbf{s}_i - 1 - \lambda \beta_i, \quad (4.2)$$

$$C : \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i = \frac{\beta_i \mathbf{s}_i - 1 + \lambda (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi})}{1 + \bar{\pi} \lambda}, \quad (4.3)$$

$$D : \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i = \frac{\beta_i \mathbf{s}_i - 1 - \lambda_R \beta_i + \lambda_\pi (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi})}{1 + \bar{\pi} \lambda_\pi}. \quad (4.4)$$

Somando  $\alpha_i$  em ambos os lados das expressões e tomando  $x_i = \alpha_i + \beta_i$ , temos:

$$A : \exp(x_i) + x_i = \alpha_i + \beta_i \mathbf{s}_i - 1, \quad (4.5)$$

$$B : \exp(x_i) + x_i = \alpha_i + \beta_i \mathbf{s}_i - 1 - \lambda \beta_i, \quad (4.6)$$

$$C : \exp(x_i) + x_i = \alpha_i + \frac{\beta_i \mathbf{s}_i - 1 + \lambda (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi})}{1 + \bar{\pi} \lambda}, \quad (4.7)$$

$$D : \exp(x_i) + x_i = \alpha_i + \frac{\beta_i \mathbf{s}_i - 1 - \lambda_R \beta_i + \lambda_\pi (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi})}{1 + \bar{\pi} \lambda_\pi}. \quad (4.8)$$

É fácil ver que o lado esquerdo das expressões acima apresenta o mesmo formato. Definindo  $g(x)$  como:

$$g(x) = \exp(x) + x, \quad (4.9)$$

temos:

$$A : g(x_i) = c_i^A, \quad (4.10)$$

$$B : g(x_i) = c_i^B, \quad (4.11)$$

$$C : g(x_i) = c_i^C, \quad (4.12)$$

$$D : g(x_i) = c_i^D, \quad (4.13)$$

com:

$$c_i^A = \alpha_i + \beta_i \mathbf{s}_i - 1, \quad (4.14)$$

$$c_i^B = \alpha_i + \beta_i \mathbf{s}_i - 1 - \lambda \beta_i, \quad (4.15)$$

$$c_i^C = \alpha_i + \frac{\beta_i \mathbf{s}_i - 1 + \lambda (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi})}{1 + \bar{\pi} \lambda}, \quad (4.16)$$

$$c_i^D = \alpha_i + \frac{\beta_i \mathbf{s}_i - 1 - \lambda_R \beta_i + \lambda_\pi (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi})}{1 + \bar{\pi} \lambda_\pi}. \quad (4.17)$$

Logo, para determinar uma solução do problema, concentraremos esforços na resolução rápida de:

$$g(x) = c \quad (4.18)$$

Definindo  $h(c)$  como a inversa de  $g(x)$ , construiremos uma aproximação  $\tilde{h}(c)$  de  $h(c)$ . Com essa aproxi-

mação, forneceremos um  $x^0$  próximo da solução para o algoritmo de Newton, garantindo a convergência em poucos passos. Para assegurar a convergência do método de Newton em poucos passos, buscaremos  $\tilde{h}(c)$  que satisfaça a hipótese do teorema de Kantorovich:

$$\frac{M |g(\tilde{h}(c)) - c|}{(g'(\tilde{h}(c)))^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.19)$$

Por simplicidade das próximas análises, denotaremos  $K(c)$  o lado esquerdo de (4.19).

## 4.2 A estrutura de $g(x)$

Nesta seção descreveremos alguns fatos sobre  $g(x)$ . Com isso, será mais fácil construir aproximações para sua inversa  $h(c)$ . Primeiramente, devido aos dados do problema, temos uma limitação superior para o domínio de  $g(x)$ :

$$\sup(x) = \sup(\alpha + \beta P) \Rightarrow (\text{Como } \beta < 0) \sup(x) = \sup(\alpha) + (\sup(\beta)) (\inf(L)) \quad (4.20)$$

Consultando a tabela 2.5, obtemos:

$$\sup(x) = (5,58) + (-0,000225)(137,97) \approx 5,55. \quad (4.21)$$

Para suas derivadas, seguem:

$$g'(x) = \exp(x) + 1, \quad (4.22)$$

$$g''(x) = \exp(x). \quad (4.23)$$

Além disso, temos os seguintes fatos sobre  $g$ :

**Teorema 4.1** *A função  $g$  tem constante de Lipschitz  $L = \exp(5.55) + 1$ .*

**Teorema 4.2** *A derivada da função  $g$  tem constante de Lipschitz  $L = \exp(5.55)$ .*



Por fim, apresentamos o esboço de  $g$  no gráfico 4.1.

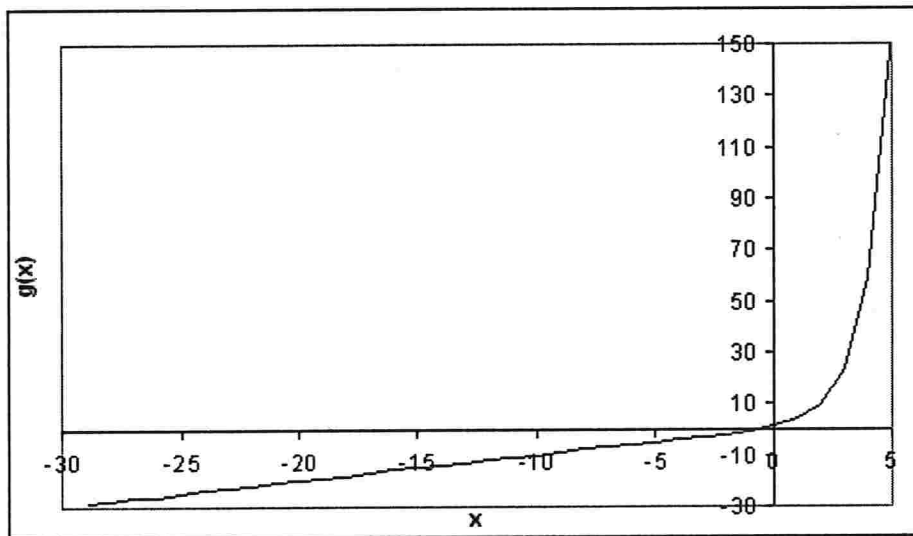


Figura 4.1: Gráfico de  $g(x)$

### 4.3 Análise da aproximação $h(c) \approx c$

Para valores muito pequenos de  $x$ , temos:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \exp(x) \rightarrow 0 \Rightarrow g(x) \rightarrow x$$

Dessa forma, construímos uma aproximação  $\tilde{h}(c) = c$  para  $h(c)$ . No gráfico 4.2, temos uma comparação visual da acuracidade dessa aproximação.

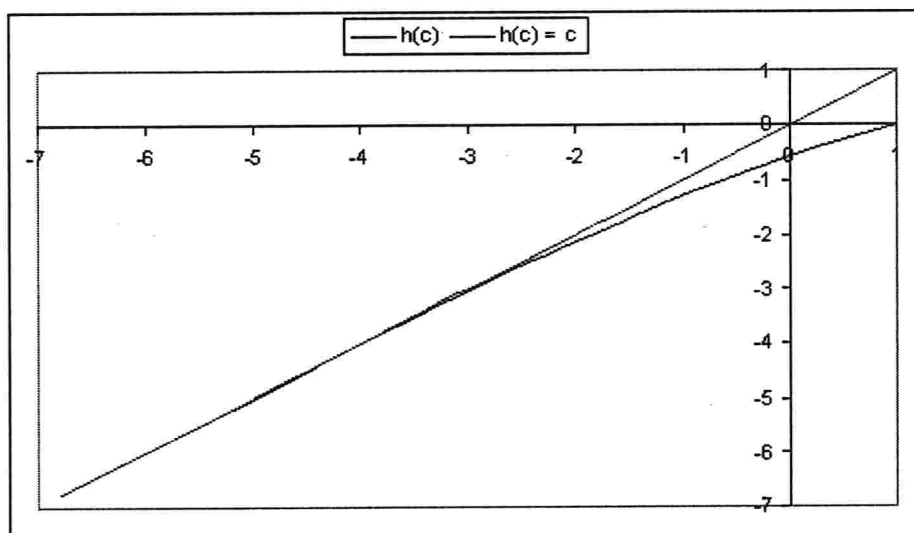


Figura 4.2: Comparação entre  $h(c)$  e  $\tilde{h}(c) = c$

Construída a aproximação, provaremos que ela gera pontos que respeitam as condições do teorema de Kantorovich. Antes, investigaremos o ponto de máximo do raio  $K(c)$  da hipótese deste teorema.

**Lema 4.3**  $K(c)$  com  $\tilde{h}(c) = c$  tem máximo em  $c = 0$ .

Como o raio de Kantorovich possui um máximo, basta investigar esse ponto para garantir a convergência do método de Newton. Esse é o caminho de prova do próximo teorema.

**Teorema 4.4** *Dados:*

$$c \leq 0,65, \quad (4.24)$$

$$\tilde{h}(c) = c. \quad (4.25)$$

*Temos:*

$$K(c) \leq \frac{1}{2}.$$

#### 4.4 Análise da aproximação $h(c) \approx \ln(c)$

Para valores muito grandes de  $x$ , temos:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \exp(x) \gg x \Rightarrow g(x) \rightarrow \exp(x)$$

Dessa forma, construímos uma aproximação  $\tilde{h}(c) = \ln(c)$  para  $h(c)$ . No gráfico 4.3, temos uma visualização da qualidade dessa aproximação.

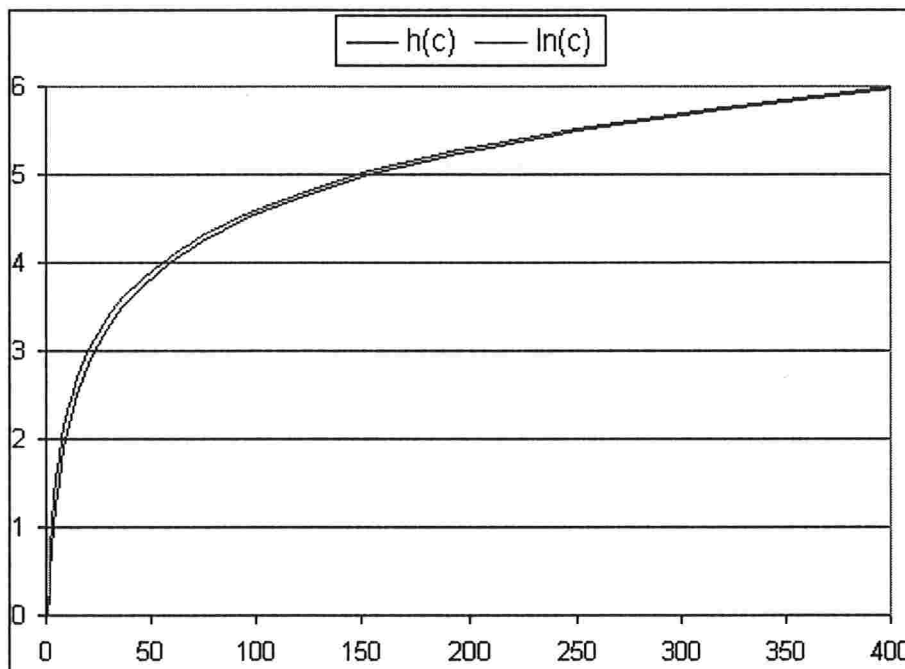


Figura 4.3: Comparação entre  $h(c)$  e  $\tilde{h}(c) = \ln(c)$

De forma análoga à seção anterior, provaremos que essa aproximação gera pontos dentro do raio de Kantorovich. Entretanto, para este caso, primeiramente provaremos que a função do raio é estritamente decrescente.

**Lema 4.5**  $K(c)$  com  $\tilde{h}(c) = \ln(c)$  é estritamente decrescente para  $c \geq 43$ .

**Teorema 4.6** Dados:

$$c \geq 43, \quad (4.26)$$

$$\tilde{h}(c) = \ln(c). \quad (4.27)$$

Temos:

$$K(c) \leq \frac{1}{2}.$$

#### 4.5 Análise da aproximação $h(c) \approx P(c)$

Até aqui já desenvolvemos aproximações razoáveis para  $h(c)$  quando  $c > 43$  ( $c \rightarrow +\infty$ ) ou  $c < 0,65$  ( $c \rightarrow -\infty$ ), faltando apenas construir  $\tilde{h}(c)$  para  $0,65 < c < 43$ . Como  $g(-0,2) = 0,65$  e  $g(3,7) = 43$ , construiremos, então, uma aproximação racional para  $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  no intervalo  $-0,2 < z < 3,7$  e resolveremos, em  $c$ , a equação  $Q(z)c = P(z)$ .

A aproximação será feita com a função *MiniMaxApproximation* do software *Mathematica*. Como essa função gera uma aproximação com o menor erro relativo e desejamos minimizar o erro geral, faremos a seguintes transformação:

$$\tilde{g}(z) = \frac{g(3,7) + g(-0,2)}{2} + 0,1 \left( g(z) - \frac{g(3,7) + g(-0,2)}{2} \right). \quad (4.28)$$

De forma análoga, efetuaremos a mesma transformação em  $c$ :

$$\tilde{c} = \frac{g(3,7) + g(-0,2)}{2} + 0,1 \left( c - \frac{g(3,7) + g(-0,2)}{2} \right). \quad (4.29)$$

Dessa forma, obtemos a seguinte aproximação para  $\tilde{g}(z)$ :

$$\tilde{g}(z) = \frac{19,6879 - 7,1728z + 0,727815z^2}{1 - 0,37399z + 0,0375049z^2} \quad (4.30)$$

No gráfico 4.4 podemos observar o erro da aproximação racional.

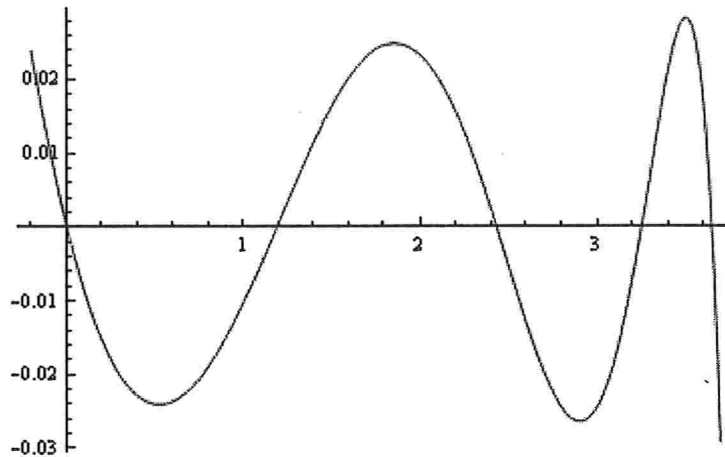


Figura 4.4: Erro da aproximação de  $g(z)$

Ao resolver a equação  $\tilde{c} = \tilde{g}(z)$  obtemos uma solução analítica pois o denominador e o numerador de  $\tilde{g}(z)$  apresentam grau 2. Assim, utilizando a função *Solve* do *Mathematica*, obtemos a seguinte aproximação  $P(c)$ :

$$P(c) = \frac{a_1 + a_2c - a_3 \sqrt{(a_4 - c)(a_5 + c)}}{2(a_6 + a_7c)}, \quad (4.31)$$

onde:

$$a_1 = 109,95605947193194, \quad (4.32)$$

$$a_2 = 26,903571574717636, \quad (4.33)$$

$$a_3 = 7,247850125228305, \quad (4.34)$$

$$a_4 = 103,00819338743189, \quad (4.35)$$

$$a_5 = 2,4954426350222034, \quad (4.36)$$

$$a_6 = 4,909739003853446, \quad (4.37)$$

$$a_7 = 2,697974811897915. \quad (4.38)$$

No gráfico 4.5 podemos observar o erro aproximação  $P(c)$  para  $h(c)$ .

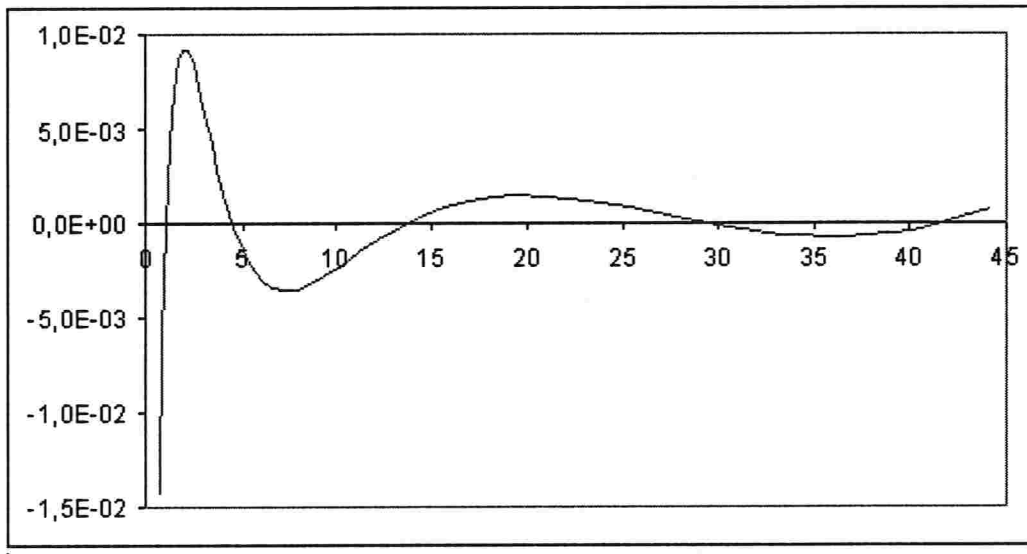


Figura 4.5: Comparação entre  $h(c)$  e  $\tilde{h}(c) = P(c)$

Dada a construção da aproximação, provaremos que ela satisfaz as condições do teorema de Kantorovich. Como caminho de prova, investigaremos os pontos de máximo do raio através do seu gráfico.

**Teorema 4.7** Para  $\tilde{h}(c) = P(c)$  temos:

$$K(c) \leq \frac{1}{2}.$$

#### 4.6 Algoritmos para resolver as equações dos gradientes

Dada a construção completa de  $\tilde{h}(c)$ , definimos os algoritmos de resolução das equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76). Desconsiderando as restrições de caixa, podemos utilizar o algoritmo 4.1 para determinar o ponto ótimo  $\tilde{p}$ .

---

##### Algoritmo 4.1 Construção de $\tilde{p}$

---

```

for  $i = 1$  até  $n$  do
  Calcule  $c_i$  ((4.14), (4.15), (4.16) ou (4.17))
   $z = h(c)$  (4.42)
  while  $|g(z) - c| > tol$  do
     $z = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$ 
  end while
end for
Devolva  $\tilde{p}$ .

```

---

Pela própria construção da aproximação  $\tilde{h}(c)$ , é fácil ver que o algoritmo acima converge. Este fato é demonstrado no apêndice.

**Teorema 4.8** O algoritmo 4.1 converge para a solução das equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76).

Para a construção do algoritmo focalizando o problema com as restrições de caixa, utilizaremos uma solução semelhante a técnica de gradiente projetado. Assim, a solução ótima  $\mathbf{p}^*$  simplesmente será a projeção de  $\tilde{\mathbf{p}}$  nas caixas. Em virtude das projeções e da monotonicidade de  $g(x)$ , é possível definir dois limitantes para  $c$ :

$$c_i^{max} = g(\alpha_i + \beta_i \mathbf{u}_i), \quad (4.39)$$

$$c_i^{min} = g(\alpha_i + \beta_i \mathbf{l}_i). \quad (4.40)$$

Como  $g'(x) > 0$ , um  $c_i$ , tal que  $c_i > c_i^{max}$ , resultará em  $\tilde{\mathbf{p}}_i > \mathbf{u}_i$ . Naturalmente, após a projeção, obteremos  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{u}_i$ . Dessa forma, se  $c_i > c_i^{max}$ , tomaremos a solução  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{u}_i$ . Para  $c_i < c_i^{min}$ , segue  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{l}_i$  em um desenvolvimento análogo. Assim, a determinação  $\mathbf{p}^*$  é feita pelo algoritmo 4.2.

---

**Algoritmo 4.2** Construção de  $\mathbf{p}^*$ 


---

```

for  $i = 1$  até  $n$  do
  Calcule  $c_i$  ((4.14), (4.15), (4.16) ou (4.17))
  if  $c \geq c_i^{max}$  then
    Devolva  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{l}_i$ 
  else if  $c \leq c_i^{min}$  then
    Devolva  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{u}_i$ 
  end if
   $z = h(c)$  (4.42)
  while  $|g(z) - c| > tol$  do
     $z = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$ 
  end while
end for
Projete  $\tilde{\mathbf{p}}$  na caixa, obtendo  $\mathbf{p}^*$  e devolva-o como solução.

```

---

Como o algoritmo 4.2 é semelhante à técnica de gradiente projetado, utilizaremos um caminho de prova semelhante para mostrar a sua convergência para a solução da equação dos gradientes do sistema KKT.

**Teorema 4.9** *O algoritmo 4.2 converge para a solução das equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76).*

#### 4.7 Resultados Numéricos

Nesta seção, analisaremos o desempenho das aproximações de  $g$  descritas anteriormente. Para isso, utilizamos o caso B como parâmetro. Além disso, implementamos em Fortran77 o algoritmo 4.2 e utilizamos 0,0001 como tolerância da solução. Na tabela 4.1 temos o desempenho da solução caso fosse utilizado sempre  $z_0 = 0$  como ponto inicial do algoritmo de Newton.

Tabela 4.1: Resultados numéricos para o laço interno - Algoritmo Newton

Tamanho da base	Laços Externos	Equações Resolvidas	Newton(Total)	Newton(Média)	Newton(Máximo)
1,0E+05	34	11961925	1615235	7,41	9
2,0E+05	32	20143410	2984038	6,75	9
3,0E+05	34	31219137	4831973	6,46	9
4,0E+05	36	44259110	7003265	6,32	9
5,0E+05	36	54315430	8683431	6,26	9

Em seguida, construímos a aproximação abaixo baseados nas seções 4.3 e 4.4:

$$h(c) = \begin{cases} c & \text{se } c < 0,65 \\ \ln(c) & \text{outro caso} \end{cases} \quad (4.41)$$

Utilizando (4.41) como fornecedora do ponto inicial do algoritmo de Newton, obtivemos os resultados descritos na tabela 4.2. É importante frisar que não houve alteração nas soluções encontradas, apenas no desempenho do algoritmo.

Tabela 4.2: Resultados numéricos para o laço interno - Melhoria intermediária

$n$	Laços Externos	Equações	Newton(Total)	Newton(Média)	Newton(Máximo)	Tempo(s)
1,0E+05	34	5958353	1498205	3,9770	4	3,18
2,0E+05	33	12324432	3099582	3,9761	4	6,56
3,0E+05	36	20606097	5179507	3,9784	4	10,91
4,0E+05	34	25974834	6532271	3,9763	4	13,73
5,0E+05	36	34542941	8683431	3,9780	4	18,25

Finalmente, utilizamos a seguinte função inversa, baseada nas seções 4.3, 4.4 e 4.5:

$$h(c) = \begin{cases} c & \text{se } c < 0,65 \\ P(c) & \text{se } 0,65 \leq c < 43 \\ \ln(c) & \text{outro caso} \end{cases} \quad (4.42)$$

No gráfico 4.6 temos a visualização do erro da aproximação (4.42).

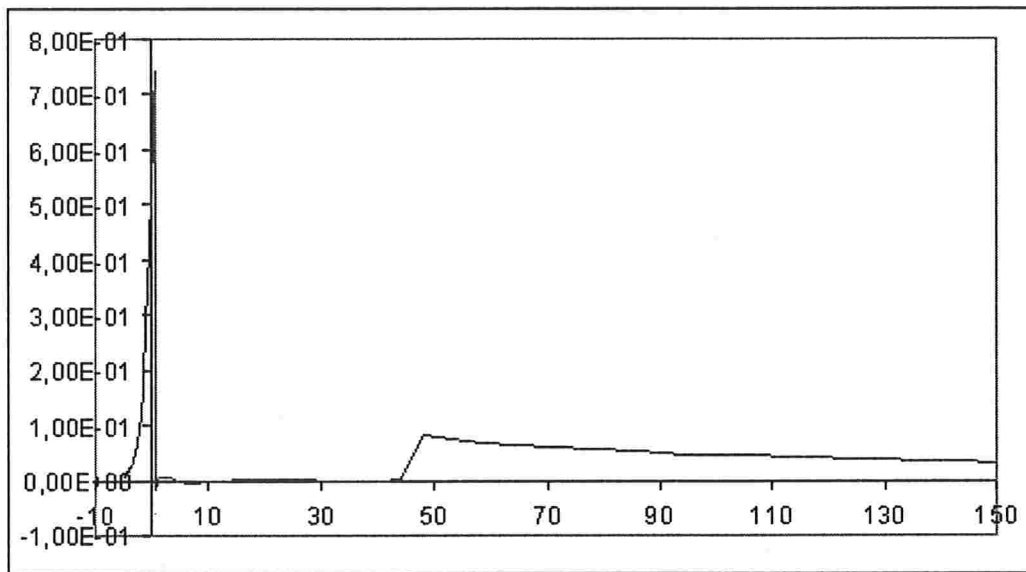


Figura 4.6: Comparação entre  $h(c)$  e  $\tilde{h}(c)$

Utilizando (4.42) como fornecedora do ponto inicial do algoritmo de Newton, obtivemos os resultados descritos na tabela 4.3. É importante frisar que não houve alteração nas soluções encontradas, apenas no desempenho do algoritmo.

Tabela 4.3: Resultados numéricos para o laço interno - Versão final

$n$	Laços Externos	Equações	Newton(Total)	Newton(Média)	Newton(Máximo)	Tempo(s)
1,0E+05	34	3280799	1615238	2,0312	4	2,85
2,0E+05	34	6529507	3215126	2,0309	4	5,67
3,0E+05	35	10159394	5005756	2,0295	4	8,80
4,0E+05	35	13731618	6767778	2,029	4	11,82
5,0E+05	37	18194461	8974820	2,0273	4	15,63

Percebe-se uma forte diminuição da quantidade de passos de Newton necessários para resolver cada equação. Conseqüentemente, existe uma clara diminuição do tempo de execução. Para melhor comparação dos tempos de execução, podemos utilizar o gráfico 4.7



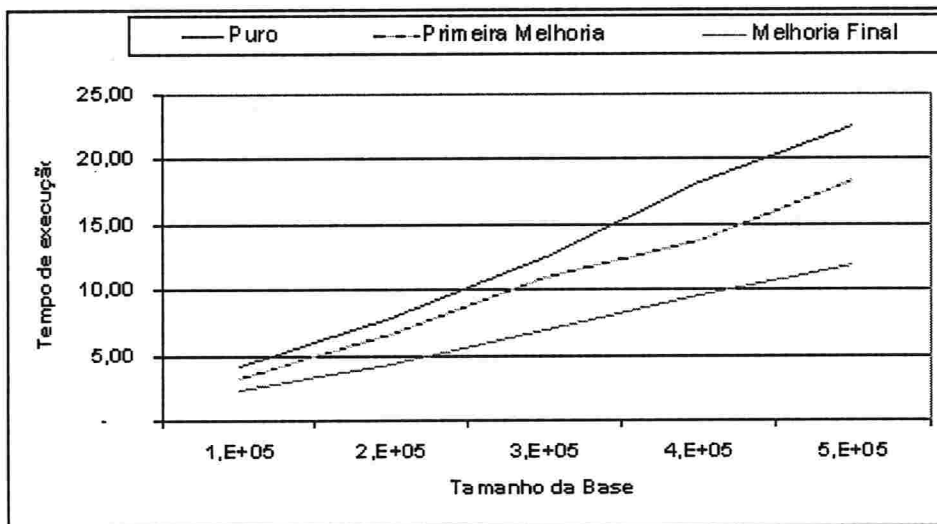


Figura 4.7: Comparação as soluções do caso B

## Capítulo 5

### Desenvolvimento do laço externo

#### 5.1 Desenvolvimento da Solução para o Caso A

Para a solução do Caso A, no qual apenas as restrições de caixa podem estar ativas, primeiramente estudamos a estrutura do problema sem as restrições de caixa. Em seguida, generalizamos a solução encontrada para também resolver o problemas com as restrições de caixa ativas.

##### 5.1.1 Caso A sem restrições de caixa

Como o gradiente da função lucro é totalmente separável, a equação matricial (3.59) corresponde a  $n$  equações da forma:

$$\frac{(\beta_i \mathbf{p}_i - \beta_i \mathbf{s}_i + 1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)) \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)}{(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i))^2} = 0.$$

Para simplificar a algebra, suprimimos o índice  $i$  das variáveis e também utilizamos as seguintes substituições de variável:

$$y = -\beta \mathbf{p} > 0, \quad (5.1)$$

$$\sigma = \exp(\alpha), \quad (5.2)$$

$$k = 1 - \beta \mathbf{s} > 0. \quad (5.3)$$

Com essas transformações, obtemos:

$$\frac{\sigma \cdot \exp(-y)}{(1 + \sigma \cdot \exp(-y))^2} (\sigma \cdot \exp(-y) - y + k) = 0.$$

Como  $\sigma \exp(-y) \neq 0$  e  $(1 + \sigma \exp(-y))^2 \neq 0$  a forma final dessa equação transcendental é:

$$\sigma \exp(-y) = y - k \quad (5.4)$$

Uma vez que  $\sigma > 0$  e  $k > 0$ , o gráfico dessa equação é da forma:

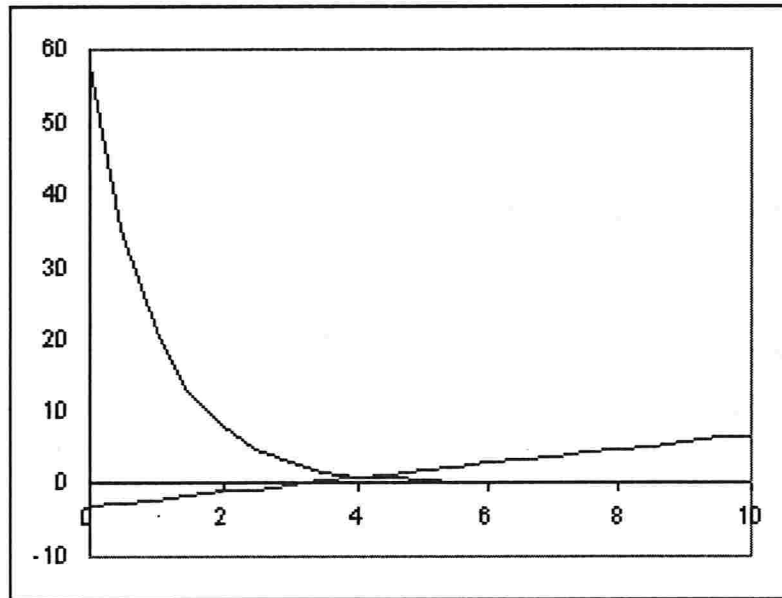


Figura 5.1: Gráfico da equação central do Caso A

Com base no gráfico acima, conclui-se que a equação (5.4) sempre possui uma única solução positiva  $\tilde{y}$ . Por conseqüência, há um  $\tilde{\mathbf{p}}$  tal que  $\nabla L(\tilde{\mathbf{p}}) = 0$ .

### 5.1.2 Caso A com restrições de caixa

Para determinar a solução do Caso A com a restrição de caixa, basta projetar  $\tilde{\mathbf{P}}$  da caixa (2.10) conforme mostrado em [Nocedal]. Assim, para resolver o Caso A completo utilizaremos o algoritmo 5.1.

---

#### Algoritmo 5.1 Solução para o caso A

---

**for**  $i = 1$  até  $n$  **do**

    Resolva, utilizando método de Newton, a equação (5.4) associada a apólice  $i$ , obtendo  $\tilde{\mathbf{p}}_i$

**end for**

    Projete  $\tilde{\mathbf{p}}$  na caixa, obtendo a solução final  $\mathbf{p}^*$

---

Antes de demonstrar que o algoritmo 5.1 resolve o caso A, vamos considerar um lema sobre a estrutura de  $\nabla L(\tilde{\mathbf{p}})$ .

**Lema 5.1** Dado um ponto  $\bar{\mathbf{p}}$ , se existir  $\tilde{\mathbf{p}}_j$  tal que  $\bar{\mathbf{p}}_j < \tilde{\mathbf{p}}_j$  e  $(\nabla L(\tilde{\mathbf{p}}))_j = 0$ , então  $(\nabla L(\bar{\mathbf{p}}))_j > 0$ .

O lema 5.1 garante que, ao projetarmos  $\tilde{\mathbf{p}}$  na caixa, o valor de  $\tilde{\mathbf{p}}_j$  sempre terá o sinal adequado ao multiplicador de Lagrange da face ativa da caixa. Dessa forma, podemos provar a corretude ao algoritmo 5.1.

**Teorema 5.2** O ponto  $\mathbf{p}^*$ , identificado pelo algoritmo (5.1), satisfaz as condições KKT do problema no Caso A.

## 5.2 Desenvolvimento da Solução para o Caso B

Considerando o desenvolvimento feito no capítulo 4, a solução do caso B, no qual apenas as restrições de caixa e a restrição de renovação podem estar ativas, consiste em determinar  $\lambda$  tal que  $R(\mathbf{p}^*(\lambda)) = 0$ . Logo, o algoritmo 5.2 será o esqueleto da solução final.

---

### Algoritmo 5.2 Solução para o Caso B

---

```

 $\lambda = 0$ 
while  $|R(\mathbf{p}^*)| > tol$  do
  Determine  $\mathbf{p}^*(\lambda)$  através do algoritmo 4.2.
  Calcule  $R(\mathbf{p}^*)$ .
  if  $R(\mathbf{p}^*) < 0$  e  $\lambda = 0$  then
    PARE e devolva  $\mathbf{p}^*$  como solução.
  end if
  Calcule um novo  $\lambda$ .
end while

```

---

É importante destacar que a solução geral construída para o caso B também resolve o problema  $\mathbb{P}$  quando a restrição de renovação não é ativa. Assim, o algoritmo, o qual será desenvolvido para o caso B, também garante a determinação da solução para o caso A.

Para construir um caminho em  $\lambda$ , analisaremos a estrutura de  $R(\lambda)$ . Em seguida, desenvolveremos algoritmos para o laço exterior.

### 5.2.1 A estrutura de $R(\lambda)$

Considerando a definição de  $\mathbf{p}^*(\lambda)$  através do algoritmo 4.2 e a fórmula da restrição de renovação  $R(\mathbf{p})$ , podemos definir implicitamente a função  $R(\lambda)$ . Temos a seguinte definição para a derivada de  $R(\lambda)$ :

$$\frac{\partial R(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_i} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda} \right). \quad (5.5)$$

Para determinar  $\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda}$ , vamos resgatar a equação (3.63):

$$\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i = \alpha_i - \beta_i \lambda.$$

Diferenciando em  $\lambda$  obtemos:

$$(\beta_i \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i) \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda} = -\beta_i.$$

e daí

$$\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda} = \frac{-1}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \neq 0. \quad (5.6)$$

Unificando (3.10), (5.5) e (5.6), obtemos:

$$\frac{\partial R(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)}{(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i))^3} < 0. \quad (5.7)$$

Naturalmente, esse resultado só é válido quando inexitem restrições de caixa ativas. Entretanto, com esse resultado, vamos demonstrar que  $R(\lambda)$  é monótona.

**Teorema 5.3** *A função  $R(\lambda)$  é monótona decrescente.*

Em virtude da estrutura de  $R(\lambda)$ , o laço externo da solução pode utilizar algoritmos clássicos de determinação de raiz. Entretanto, não podemos utilizar o método de Newton, pois não há uma expressão algébrica fixa com os multiplicadores de Lagrange das restrições de caixa. Assim, na próxima seção, estudaremos apenas técnicas livre de derivadas.

### 5.2.2 Técnicas para resolver $R(\lambda) = 0$

#### Determinação do intervalo da solução

A primeira etapa do desenvolvimento da solução é construir um intervalo  $[\lambda^{min}; \lambda^{max}]$  que contenha a solução. Para tal, devemos ter:

$$R(\lambda^{min}) > 0, \quad (5.8)$$

$$R(\lambda^{max}) < 0. \quad (5.9)$$

Para  $\lambda^{min}$ , tomaremos simplesmente  $\lambda^{min} = 0$ . Caso  $R(\lambda^{min}) \leq 0$ , já encontramos a solução do problema. No caso de  $\lambda^{max}$ , a construção será baseada na equação de determinação de  $\mathbf{p}^*$ . Resgatando (4.15), temos:

$$c_i^B = \alpha_i + \beta_i s_i - 1 - \lambda \beta_i \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial c_i^B} = \frac{-1}{\beta_i} > 0.$$

Logo, podemos definir  $\lambda^{max}$  como

$$\lambda^{max} = -\alpha_i - \beta_i s_i - \frac{\sup(c_i^{max})}{\beta_i}. \quad (5.10)$$

É importante ver que essa definição de  $\lambda^{max}$  gera  $\mathbf{p}^* = \mathbf{1}$ . Assim, se tivermos  $R(\lambda^{max}) > 0$ , então o problema é inviável, pois, mesmo atribuindo o preço mínimo a todas as apólices, não satisfazemos a condição  $R(\mathbf{p}) < 0$ .

#### Bisseção

Dada a existência do intervalo de solução  $[\lambda^{min}; \lambda^{max}]$  e a estrutura decrescente de  $R(\lambda)$ , a solução mais simples é determinar  $\lambda^*$  através de bisseção do intervalo. Assim, podemos utilizar o algoritmo 5.3 para resolver o caso B.

É interessante verificar que o primeiro teste do algoritmo verifica a solução apenas com as restrições de caixa ativas. Além disso, também é feita a verificação de viabilidade no início do processo. Na tabela 5.1 temos o desempenho numérico desse algoritmo.

#### Algoritmo de Brent

Outra possibilidade é utilizar o Algoritmo de Brent da determinação de  $\lambda$ . No algoritmo 5.4, temos a solução para o caso B utilizando esse método no laço externo.

**Algoritmo 5.3** Solução para o Caso B utilizando bisseção

---

```

 $\lambda = \lambda^{min} = 0$ 
Calcule  $\lambda_{max}$  através de (5.10).
if  $R(\lambda_{max}) > 0$  then
    PARE -> problema inviável.
end if
while  $|R(\tilde{P})| > tol$  do
    Determine  $\mathbf{p}^*(\lambda)$  através do algoritmo 4.2.
    Calcule  $R(\mathbf{p}^*)$ .
    if  $R(\mathbf{p}^*) < 0$  e  $\lambda = 0$  then
        PARE e devolva  $\mathbf{p}^*$  como solução.
    end if
    Calcule um novo  $\lambda$  através da bisseção do intervalo  $[\lambda^{min}; \lambda^{max}]$ .
    Atualize o intervalo  $[\lambda^{min}; \lambda^{max}]$ .
end while

```

---

Tabela 5.1: Resultados Numéricos para o Caso B - Bisseção

$n$	Laços Externos	Tempo(s)
1,0E+05	34	4,19
2,0E+05	32	7,81
3,0E+05	34	12,24
4,0E+05	36	18,03
5,0E+05	36	22,38

Na tabela 5.2, temos os resultados dos testes comparando os algoritmos 5.3 e 5.4. É fácil verificar que houve diminuição na quantidade de laços externos e, naturalmente, diminuição no tempo de execução. Entretanto, a diminuição foi menor que o esperado, conforme pode ser observado no gráfico 5.2.

Tabela 5.2: Resultados Numéricos para o Caso B - Algoritmo de Brent

$n$	Laços Externos	Tempo(s)
1,0E+05	34	2,85
2,0E+05	32	5,05
3,0E+05	33	7,86
4,0E+05	34	10,93
5,0E+05	35	14,03

Para compreender o motivo da piora, analisaremos a evolução dos  $|R(\lambda)|$  ao longo dos laços externos. O gráfico 5.3 traduz essa comparação.

**Algoritmo 5.4** Solução para o Caso B utilizando o método de Brent

```

 $\lambda = \lambda^{min} = 0$ 
Calcule  $\lambda_{max}$  através de (5.10).
if  $R(\lambda_{max}) > 0$  then
  PARE -> problema inviável.
end if
while  $|R(\mathbf{p}^*)| > tol$  do
  Determine  $\mathbf{p}^*(\lambda)$  através do algoritmo 4.2.
  Calcule  $R(\mathbf{p}^*)$ .
  if  $R(\mathbf{p}^*) < 0$  e  $\lambda = 0$  then
    PARE e devolva  $\mathbf{p}^*$  como solução.
  end if
  Calcule um novo  $\lambda$  através do algoritmo de Brent.
end while

```

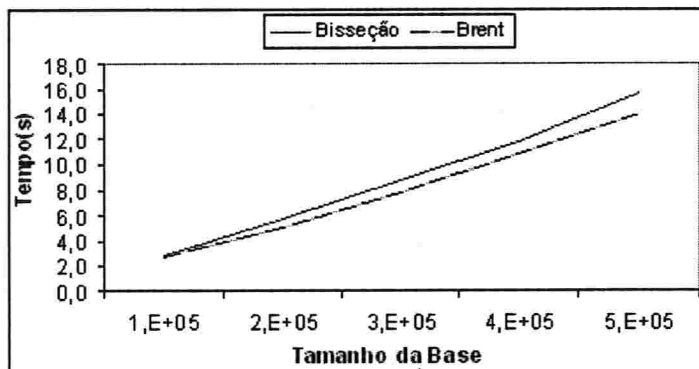


Figura 5.2: Comparação entre bisseção e Brent - tempo de execução

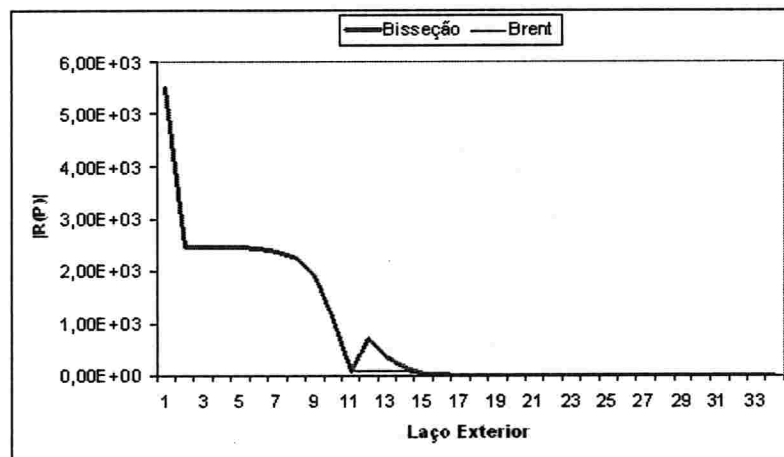


Figura 5.3: Comparação entre bisseção e Brent - Evolução das soluções

Em linhas gerais, a evolução dos algoritmos é muito similar. A principal diferença é que a versão com Brent não descarta soluções de qualidade prematuramente, tal qual faz a bisseção. Entretanto, o problema

parece estar no intervalo inicial  $[\lambda^{min}; \lambda^{max}]$ , tomado sempre como o maior possível.

### Melhoria do Extremo Superior de $\lambda$

No gráfico 5.4, temos um esboço de  $R(\lambda)$ . É fácil notar que a inclinação da curva diminui com o aumento de  $\lambda$  devido a presença da restrição de caixa para  $p$ .

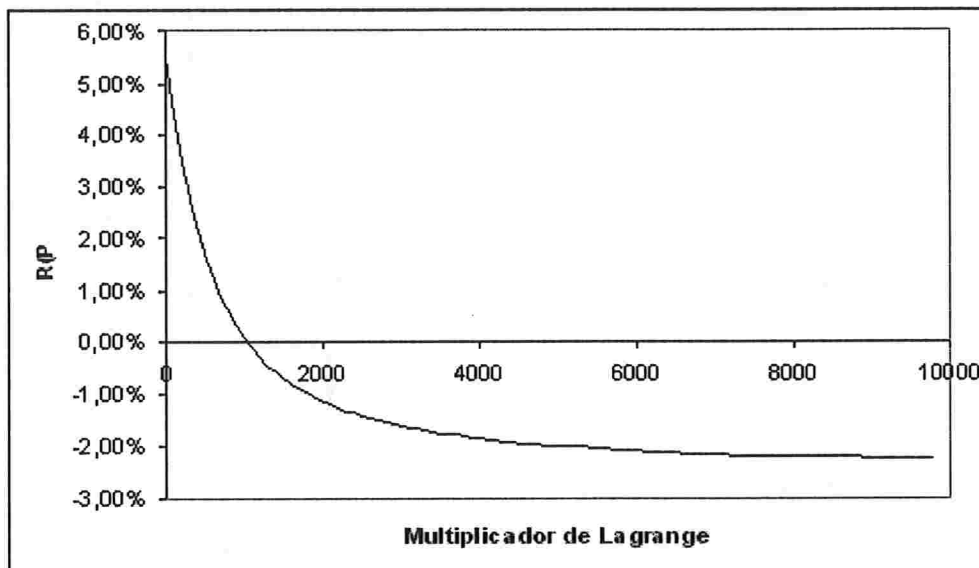


Figura 5.4: Esboço de  $R(\lambda)$

Devido a forma de  $R(\lambda)$ , uma alternativa para diminuir a quantidade de laços externos é desenvolver um processo que construa  $\lambda^{aux}$  com as seguintes características:

$$\lambda^{aux} \ll \lambda^{max} \quad (5.11)$$

$$R(\lambda^{aux}) < 0 \text{ (intervalo } [\lambda^{min}; \lambda^{aux}] \text{ contém a solução)}. \quad (5.12)$$

Para determinar  $\lambda^{aux}$  vamos utilizar o algoritmo 5.5.

---

#### Algoritmo 5.5 Determinação de $\lambda^{aux}$ - Inicialização para Brent

---

```

 $\lambda^{aux} = \lambda^{min}$ 
while  $R(\lambda^{aux})R(\lambda^{min}) > 0$  do
   $\lambda^{aux} = \lambda^{aux} + \frac{\lambda^{max}}{r}$ 
  Calcule  $R(\lambda^{aux})$ 
end while

```

---



O parâmetro  $r$  será determinado empiricamente resolvendo-o problema para  $n = 500.000$ . Os dados desses testes encontram-se na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Resultados Numéricos para o Caso B - Algoritmo de Brent com inicialização

$r$	Laços Externos	Determinação de $\lambda^{aux}$	Laços de Brent	Tempo(s)
1	35	0	35	14,03
10	32	2	30	13,5
50	28	2	26	12,48
50	28	2	26	12,48
500	26	2	24	12,16
750	25	2	23	11,78
1.000	27	2	25	12,77
10.000	38	11	27	17,5

Com base na tabela acima, adotaremos  $r = 750$ . Dessa forma, utilizaremos o algoritmo 5.6 para resolver o caso B.

---

#### Algoritmo 5.6 Solução final para o Caso B

---

```

 $\lambda = \lambda^{min} = 0$ 
Calcular  $\lambda_{max}$  através de (5.10).
if  $R(\lambda_{max}) > 0$  then
    PARE -> problema inviável.
end if
Calcular  $\lambda_{aux}$  através do algoritmo 5.5.
while  $|R(\mathbf{p}^*)| > tol$  do
    Determinar  $\mathbf{p}^*(\lambda)$  através do algoritmo 4.2.
    Calcular  $R(\mathbf{p}^*)$ .
    if  $R(\mathbf{p}^*) < 0$  e  $\lambda = 0$  then
        PARE e devolva  $\mathbf{p}^*$  como solução.
    end if
    Calcular um novo  $\lambda$  através do algoritmo de Brent.
end while

```

---

### 5.3 Desenvolvimento da Solução para o Caso C

O caso C é parecido com o caso B, posto que existe apenas uma restrição a ser examinada. Além disso, a função  $\pi(\lambda)$  também é monótona, o que permite o aproveitamento dos algoritmos desenvolvidos no capítulo anterior.

#### 5.3.1 A estrutura de $\pi(\lambda)$ .

A derivada de  $\pi(\lambda)$  é dada por:

$$\frac{\partial \pi(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum \left( \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{p}_i} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda} \right)$$

Podemos obter  $\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda_\pi}$  implicitamente através de (4.16):

$$g(\alpha + \beta \mathbf{p}_i) = c_i^C(\lambda_\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda \bar{\pi})g(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) = (1 + \lambda \bar{\pi})\alpha_i + \beta_i s_i - 1 + \lambda(\beta_i s_i - \bar{\pi})$$

Derivando em relação a  $\lambda$  em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}g(z) + (1 + \lambda_\pi \bar{\pi})\beta(\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1) \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda_\pi} &= \bar{\pi}\alpha_i + \beta_i s_i - \bar{\pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 + \lambda_\pi \bar{\pi})\beta(\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1) \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda_\pi} &= \beta_i s_i - \bar{\pi}(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \lambda_\pi} &= \frac{\beta_i s_i - \bar{\pi}(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i)}{\beta_i(1 + \lambda_\pi \bar{\pi})(\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1)} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Considerando (3.12), temos:

$$\frac{\partial \pi(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum \left( \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{p}_i} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda} \right) = \left( \gamma(\mathbf{p}_i) \left( \frac{\beta_i(s_i - \bar{\pi} \mathbf{p}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} - \bar{\pi} \right) \right) \left( \frac{\beta_i s_i - \bar{\pi}(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i)}{\beta_i(1 + \lambda_\pi \bar{\pi})(\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1)} \right)$$

Assim, concluímos:

$$\frac{\partial \pi(\lambda)}{\partial \lambda} = \gamma \frac{(\beta_i s_i - \bar{\pi}(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i))^2}{\beta_i(1 + \lambda_\pi \bar{\pi})(\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1)^2} < 0 \quad (5.14)$$

O resultado acima garante um método de resolução com as restrições de caixa não ativas. Entretanto, é fácil provar a monotonicidade de  $\pi(\lambda)$  também para o problema com restrições de caixa.

**Lema 5.4** *A função  $\pi(\lambda)$ , definida com as restrições de caixa, é decrescente.*

### 5.3.2 Algoritmo final para o caso C

Como  $\pi(\lambda)$  é monótona, podemos utilizar o algoritmo de Brent no laço exterior. Portanto, a solução do caso C será dada pelo algoritmo 5.7. Além do desenvolvimento de um algoritmo, toda a estrutura do caso C permite assegurar a existência de apenas uma única solução, tal qual feito com o Caso B.

---

#### Algoritmo 5.7 Solução para o caso C

---

$\lambda = \lambda^{\min} = 0$

Determine  $\lambda^{\max}$  através do algoritmo 5.5.

**while**  $\pi(\mathbf{p}^*) \neq 0$  **do**

    Construa um novo  $\lambda$  utilizando o algoritmo de Brent.

    Determine  $\mathbf{p}^*(\lambda)$  utilizando o algoritmo 4.2.

    Calcule  $\pi(\mathbf{p}^*)$

**end while**

Devolva  $\mathbf{p}^*$  como solução.

---

## 5.4 Desenvolvimento da Solução para o Caso D

Convém lembrar que o caso D representa o problema  $\mathbb{P}$  propriamente dito, uma vez que ele considera que todas as restrições podem estar ativas. Para a construção de sua solução, aproveitaremos os algoritmos desenvolvidos e as provas realizadas nas seções 5.2 (caso B) e 5.3 (caso C).

### 5.4.1 Esqueleto da Solução

Conforme mostrado no capítulo 4, a equação matricial (3.76) equivale a  $n$  equações do tipo:

$$F_i(\mathbf{p}_i, \lambda_R, \lambda_\pi) = g(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) - c^D(\lambda_R, \lambda_\pi) = 0. \quad (5.15)$$

Dessa forma, o caso D pode ser resolvido com o algoritmo geral 5.8, equivalente a forma básica dos casos anteriores.

---

#### Algoritmo 5.8 Solução do Caso D

---

```

 $\lambda = (\lambda_R; \lambda_\pi) = (0; 0)$ 
while ( $|R(\mathbf{p}^*)| > tol$  E  $|\pi(\mathbf{p}^*)| > tol$ ) do
  Calcule  $\mathbf{p}^*$  com o algoritmo 4.2.
  Calcule  $R(\mathbf{p}^*)$  e  $\pi(\mathbf{p}^*)$ .
end while

```

---

A fim de lidar adequadamente com o caso D, estudaremos  $R(\lambda_R, \lambda_\pi)$  e  $\pi(\lambda_R, \lambda_\pi)$ .

### 5.4.2 A função $R(\lambda_R, \lambda_\pi)$

Para avaliar  $\nabla R(\lambda_R, \lambda_\pi)$ , calcularemos primeiramente a derivada em relação a  $\lambda_R$ . Assim, temos:

$$\frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \lambda_R} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda_R} \right). \quad (5.16)$$

Para o cálculo de  $\frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \mathbf{p}_i}$ , resgatando (3.76), temos:

$$\begin{aligned}
 g(\alpha + \beta p) = c(\lambda_R, \lambda_\pi) &\Rightarrow \beta (\exp(\alpha + \beta p) + 1) \frac{\partial p}{\partial \lambda_R} = \frac{(-\beta)}{1 + \lambda_\pi \pi} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \lambda_R} &= \frac{-1}{(1 + \lambda_\pi \pi) (\exp(\alpha + \beta p) + 1)} < 0. \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Logo, de (3.10), (5.16) e (5.17), temos:

$$\frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \lambda_R} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\beta_i \gamma_i(\mathbf{p}_i)}{(1 + \lambda_\pi \pi) (1 + \exp(\alpha + \beta \mathbf{p}_i))^2} \right). \quad (5.18)$$

Analogamente, para  $\frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \lambda_\pi}$ :

$$\frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \lambda_\pi} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda_\pi} \right). \quad (5.19)$$

Para  $\frac{\partial p}{\partial \lambda_\pi}$ , resgatando (3.76), temos:

$$\begin{aligned} g(\alpha + \beta p) &= c(\lambda_R, \lambda_\pi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\pi} g(z) + (1 + \lambda_\pi \bar{\pi}) \beta (\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1) \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda_\pi} &= \bar{\pi} \alpha_i + \beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 + \lambda_\pi \bar{\pi}) \beta (\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1) \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \lambda_\pi} &= \beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi} (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \lambda_\pi} &= \frac{\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi} (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i)}{\beta_i (1 + \lambda_\pi \bar{\pi}) (\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + 1)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Logo, de (3.12), (5.19) e (5.20), temos:

$$\frac{\partial R(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \lambda_\pi} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_i(\mathbf{p}_i) (\bar{\pi} (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i) - \beta_i \mathbf{s}_i)}{(1 + \lambda_\pi \bar{\pi}) (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i))^2} \right). \quad (5.21)$$

#### 5.4.3 Estrutura de $\pi(\lambda_R, \lambda_\pi)$

Analogamente à seção anterior, as derivadas parciais de  $\pi(\lambda_R, \lambda_\pi)$  são:

$$\frac{\partial \pi(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \lambda_R} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_i(\mathbf{p}_i) (\pi (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)) - \beta (S - \pi \mathbf{p}_i))}{(1 + \lambda_\pi \bar{\pi}) (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i))^2} \right). \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \pi(\lambda_R, \lambda_\pi)}{\partial \lambda_\pi} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_i(\mathbf{p}_i) (\beta_i \mathbf{s}_i - \bar{\pi} (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i))}{\beta_i (1 + \lambda_\pi \bar{\pi}) (1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i))^2} \right). \quad (5.23)$$

#### 5.4.4 Construindo $\lambda_R(\lambda_\pi)$

Resgatando as equações (3.77), (5.15) e (5.18) temos:

$$G(\mathbf{p}) = C(\lambda_R, \lambda_\pi), \quad (5.24)$$

$$R(\lambda_R, \lambda_\pi) = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_R} < 0. \quad (5.26)$$

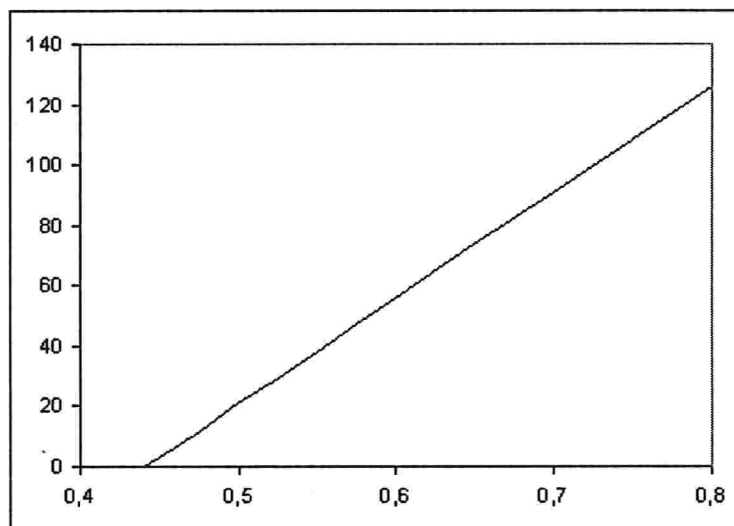
Considerando (5.24), (5.25) e (5.26), podemos definir, implicitamente,  $\lambda_R = \lambda_R(\lambda_\pi)$ . Assim, desenvolvemos o algoritmo 5.9 para calcular  $\lambda_R(\lambda_\pi)$ .

**Algoritmo 5.9** Cálculo de  $\lambda_R = \lambda_R(\lambda_\pi)$ **Require:** Multiplicador de Lagrange  $\lambda_\pi$ **Ensure:** Multiplicador de Lagrange  $\lambda_R$ 

$$\lambda_R = \lambda_R^{\min} = 0$$

Determine  $\lambda_R^{\max}$  através do algoritmo 5.5.**while**  $R(\mathbf{p}^*) > tol$  **do**    Construa um novo  $\lambda_R$  utilizando o algoritmo de Brent.    Determine  $\mathbf{p}^*(\lambda_R, \lambda_\pi)$  utilizando o algoritmo 4.2.    Calcule  $R(\mathbf{p}^*)$     **if**  $R(\mathbf{p}^*) < 0$  E  $\lambda_R = 0$  **then**        Devolva  $\lambda_R$  como solução.    **end if****end while**Devolva  $\lambda_R$  como solução.

Note que, a partir da definição do valor de  $\lambda_\pi$ , a determinação de  $\lambda_R(\lambda_\pi)$  consiste simplesmente na solução do caso B. Ao utilizar o algoritmo 5.9, traçamos um esboço de  $\lambda_R(\lambda_\pi)$  no gráfico 5.5.

Figura 5.5: Esboço de  $\lambda_R(\lambda_\pi)$

5.4.5 Cálculo de  $\pi(\lambda_R(\lambda_\pi), \lambda_\pi)$ 

Considerando (3.78), (5.23) e função implícita  $\lambda_R(\lambda_\pi)$ , temos:

$$\pi(\lambda_R(\lambda_\pi), \lambda_\pi) = 0, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda_\pi} < 0. \quad (5.28)$$

De (5.27) e (5.28), concluímos que existe apenas um  $\lambda_\pi$  que satisfaz as condições KKT para o caso D. Um esboço de  $\pi(\lambda_R(\lambda_\pi), \lambda_\pi)$  encontra-se no gráfico 5.6.

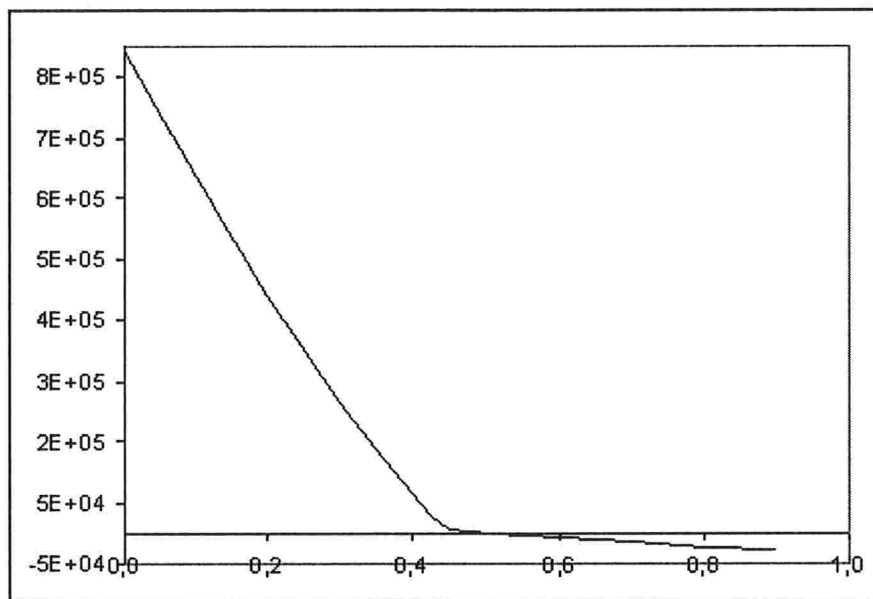


Figura 5.6: Esboço de  $\pi(\lambda_R(\lambda_\pi), \lambda_\pi)$

Finalmente, podemos construir o algoritmo 5.10, responsável por determinar  $\lambda_\pi$  e resolver o caso D.

---

**Algoritmo 5.10** Cálculo de  $\lambda_\pi$  - Solução para o caso D
 

---

$$\lambda_\pi = \lambda_\pi^{\min} = 0$$

Determine  $\lambda_\pi^{\max}$  através do algoritmo 5.5.

**while**  $\pi(\mathbf{p}^*) \neq 0$  **do**

    Construa um novo  $\lambda_\pi$  utilizando o algoritmo de Brent.

    Determine  $\lambda_R(\lambda_\pi)$  utilizando o algoritmo 5.9

    Calcule  $\pi(\lambda_\pi)$

**if**  $\pi(\mathbf{p}^*) < 0$  E  $\lambda_\pi = 0$  **then**

        PARE e devolva  $\mathbf{p}^*$  como solução.

**end if**

**end while**

Devolva  $\lambda_\pi$  como solução.

---

Note que o algoritmo 5.10 possui a mesma estrutura do algoritmo 5.7, utilizado na solução do caso C.



## Capítulo 6

### Desempenho das Implementações

Os algoritmos aqui descritos foram implementados em Fortran77 e foram comparados ao [Algencan]. Sempre que possível, trabalhamos com uma tolerância de  $10^{-4}$ ; quando necessário, devido ao longo tempo de execução, aumentamos a tolerância para  $10^{-2}$ . Os tempos de execução foram obtidos através da média de cinco execuções diferentes de forma que o p-valor correspondente fosse inferior a 1%. Para um melhor comparativo, todos os algoritmos foram testados em bases de dados de tamanhos diferentes.

A tabela 6.1 mostra as características da plataforma de testes utilizada.

Tabela 6.1: *Plataforma de Teste*

Processador	Intel Pentium 4 2.20GHz
Memória	1Gb
Sistema Operacional	Windows XP
Compilador	g77
Opção de compilação	-O4 -xf77 -cpp -input

#### 6.1 Caso A

Para a resolução do Caso A, implementamos o algoritmo 5.1. Os resultados constam na tabela 6.2.

Tabela 6.2: *Resultados Numéricos para o Caso A*

Algoritmo	Tempo(s)	gradiente projetado (norma do sup)	Lucro	Renovação	$n$
Algencan	3,0E+00	8,6E-5	2,3E+07	5,9E-01	1,0E+05
Algencan	7,0E+00	1,4E-6	4,7E+07	5,9E-01	2,0E+05
Algencan	1,0E+01	9,9E-9	7,0E+07	5,9E-01	3,0E+05
Algencan	1,2E+01	5,7E-5	9,4E+07	5,9E-01	4,0E+05
Algencan	1,8E+01	1,2E-8	1,1E+08	5,9E-01	5,0E+05
Solução A	2,1E-01	2,4E-05	2,3E+07	5,9E-01	1,0E+05
Solução A	4,4E-01	2,4E-05	4,7E+07	5,9E-01	2,0E+05
Solução A	6,5E-01	2,4E-05	7,0E+07	5,9E-01	3,0E+05
Solução A	8,6E-01	2,4E-05	9,4E+07	5,9E-01	4,0E+05
Solução A	1,0E+00	2,4E-05	1,1E+08	5,9E-01	5,0E+05

Resumidamente, ambos os algoritmos atingiram a mesma solução com precisões equivalentes. Dessa



forma, consideramos como correto os resultados obtidos pela solução desenvolvida. A grande diferença foi o tempo de execução de cada técnica. Para um melhor comparativo, temos o gráfico 6.1 com os tempos de execução.

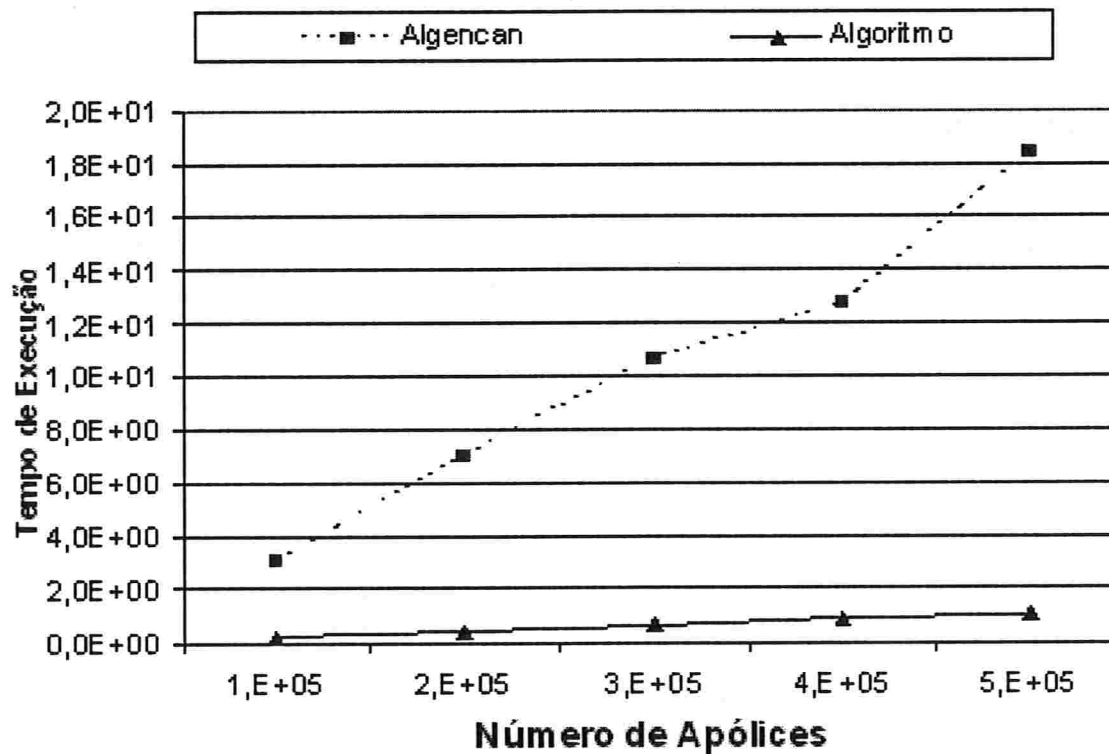


Figura 6.1: Tempos de Execução para o Caso A

## 6.2 Caso B

Para resolver o Caso B, implementamos o algoritmo 5.6 e sempre tomamos  $\bar{R}$  como 0,65. Os resultados constam na tabela 6.3.

Tabela 6.3: Resultados Numéricos para o Caso B

Algoritmo	Tempo(s)	gradiente projetado(SUP-NORM)	Lucro	Violação da restrição	$n$
Algencan	2,6E+01	6,5E-5	2,1E+07	1,3E-05	1,0E+05
Algencan	6,1E+01	6,2E-5	4,2E+07	1,6E-05	2,0E+05
Algencan	1,1E+02	4,8E-5	6,4E+07	5,6E-05	3,0E+05
Algencan	3,6E+02	6,6E-5	8,6E+07	2,4E-05	4,0E+05
Algencan	1,7E+02	5,1E-5	1,0E+08	1,3E-05	5,0E+05
Solução B	4,1E+00	7,0E-08	2,1E+07	3,8E-05	1,0E+05
Solução B	7,8E+00	6,9E-08	4,2E+07	2,2E-05	2,0E+05
Solução B	1,2E+01	7,3E-08	6,4E+07	2,8E-05	3,0E+05
Solução B	1,8E+01	7,3E-08	8,6E+07	9,4E-05	4,0E+05
Solução B	2,2E+01	7,0E-08	1,0E+08	7,6E-05	5,0E+05

Resumidamente, ambos os algoritmos atingiram a mesma solução com precisões equivalentes. A grande diferença foi o tempo de execução de cada técnica. Para um melhor comparativo, temos o gráfico abaixo com os tempos de execução.

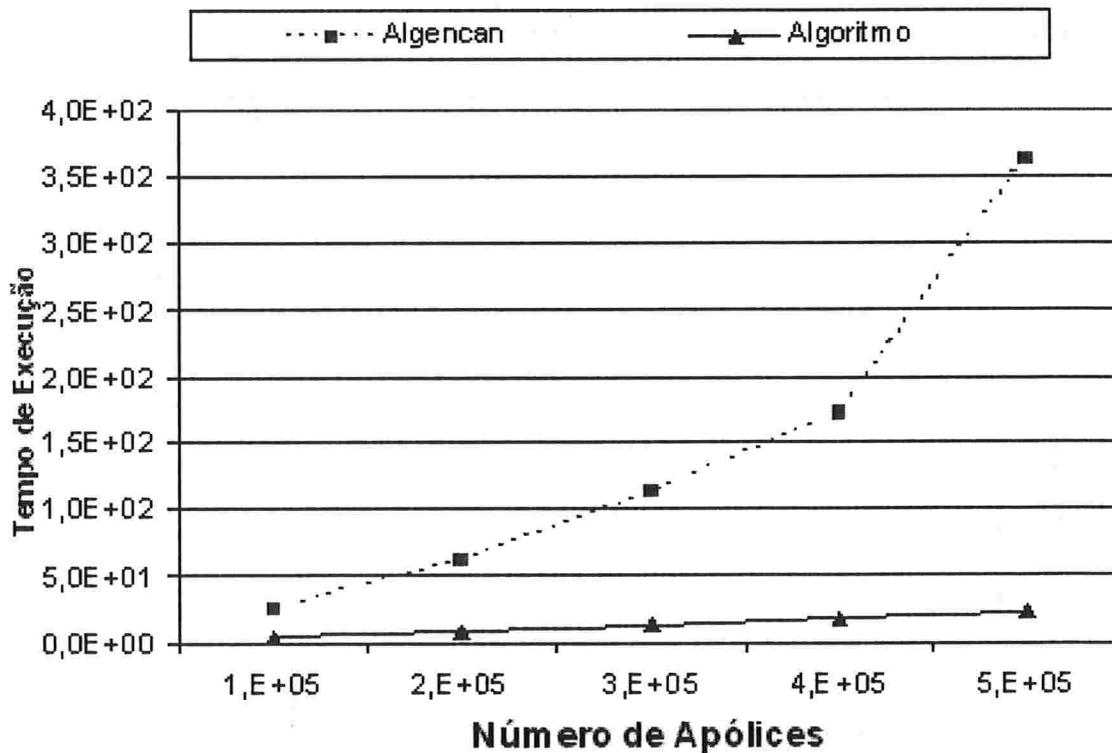


Figura 6.2: Tempos de Execução para o Caso B

### 6.3 Caso C

Para resolver o caso C, utilizamos o algoritmo 5.7. Configuramos o parâmetro  $\bar{\pi}$  como 0,58. Como tolerância, utilizamos 0,001 para quase todos os testes do Algencan (para  $n = 1E5$  foi 0,0001), posto que o Algencan apresentava muita demora para a tolerância padrão. Os resultados constam na tabela 6.4.

Tabela 6.4: Resultados Numéricos para o Caso C

Algoritmo	Tempo(s)	gradiente projetado(SUP-NORM)	Lucro	Violação da restrição	$n$
Algencan	9,1E+01	9,6E-5	2,3E+07	1,1E-05	1,0E+05
Algencan	1,2E+02	6,7E-4	4,6E+07	7,2E-04	2,0E+05
Algencan	2,2E+02	4,6E-4	7,0E+07	5,7E-05	3,0E+05
Algencan	2,8E+02	9,5E-4	9,3E+07	4,6E-05	4,0E+05
Algencan	3,6E+02	4,2E-4	1,1E+08	2,9E-04	5,0E+05
Solução C	2,9E+00	2,5E-5	2,3E+07	2,5E-09	1,0E+05
Solução C	5,6E+00	2,6E-5	4,6E+07	2,7E-05	2,0E+05
Solução C	8,4E+00	2,6E-5	7,0E+07	3,9E-05	3,0E+05
Solução C	1,1E+01	2,6E-5	9,3E+07	5,7E-05	4,0E+05
Solução C	1,4E+01	2,5E-5	1,1E+08	6,8E-07	5,0E+05

Apenas o algoritmo 5.7 foi capaz de resolver todos os problemas com a tolerância desejada. Além disso, seu tempo de execução foi, aproximadamente, vinte vezes menor que o Algencan. Uma comparação visual dos tempos de execução pode ser obtida através do gráfico 6.3.

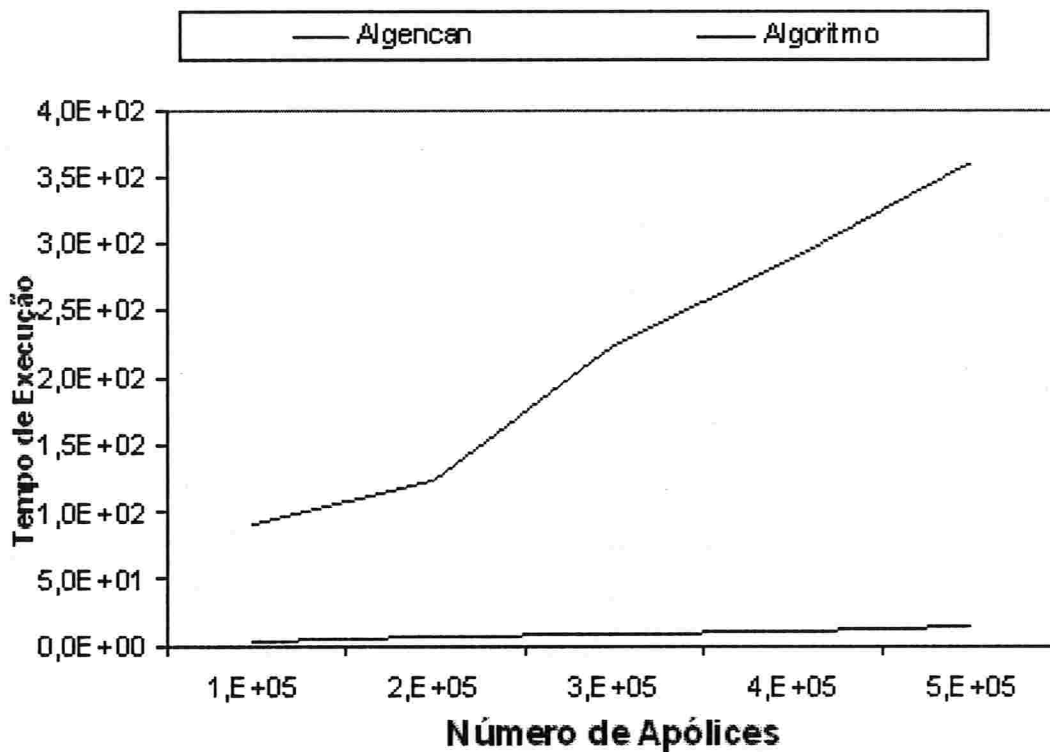


Figura 6.3: Tempos de Execução para o Caso C

### 6.4 Caso D

Para a solução do caso D, os parâmetros utilizados em cada teste encontram-se na tabela 6.5. Devido à complexidade do problema, foi necessário diminuir a tolerância para que o Algencan resolvesse o problema em tempo hábil.

Tabela 6.5: Parâmetros dos testes para o caso D

$n$	$\bar{\pi}$	$\bar{R}$	Tolerância Algencan	Tolerância Solução D
1,0E+05	0,58	0,576	0,0001	0,0001
2,0E+05	0,58	0,576	0,01	0,0001
3,0E+05	0,58	0,576	0,01	0,0001
4,0E+05	0,58	0,577	0,01	0,0001
5,0E+05	0,58	0,577	0,01	0,0001

Os resultados dos testes constam na tabela 6.6. É possível verificar que o algoritmo 5.10 foi capaz de resolver todos os problemas com a precisão desejada. Além disso, o seu tempo de execução foi menor que o Algencan, mesmo trabalhando com uma precisão maior.

Tabela 6.6: Resultados Numéricos para o Caso D

Algoritmo	Tempo(s)	gradiente projetado(SUP-NORM)	$U(\mathbf{p})$	$ \pi(\mathbf{p}) $	$ R(\mathbf{p}) $	$n$
Algencan	4,6E+02	9,4E-5	2,3E+07	9,6E-07	6,0E-05	1,0E+05
Algencan	5,9E+02	7,2E-3	4,6E+07	1,0E-04	1,3E-03	2,0E+05
Algencan	4,1E+02	4,8E-3	7,0E+07	1,0E-04	7,8E-03	3,0E+05
Algencan	4,3E+02	2,5E-3	9,3E+07	3,1E-03	2,7E-03	4,0E+05
Algencan	8,9E+02	2,5E-3	1,1E+08	2,0E-05	6,4E-03	5,0E+05
Solução D	3,0E+01	2,6E-5	2,3E+07	4,6E-05	6,4E-07	1,0E+05
Solução D	1,2E+02	2,6E-5	4,6E+07	2,8E-05	3,4E-05	2,0E+05
Solução D	1,9E+02	2,9E-5	7,0E+07	1,3E-05	6,5E-05	3,0E+05
Solução D	2,8E+02	3,8E-5	9,3E+07	6,5E-06	1,1E-05	4,0E+05
Solução D	3,3E+02	2,8E-5	1,1E+08	1,8E-05	1,5E-05	5,0E+05



## Capítulo 7

# Conclusão

### 7.1 Sumário

Nesse trabalho, primeiramente analisamos o funcionamento do mercado segurador, a estrutura de custos de uma seguradora e os tipos de vendas. Assim, caracterizamos o papel do preço no seguro e também a importância das renovações internas para o sucesso do negócio. Por fim, definimos como objetivo desenvolver uma técnica de apreçamento para um lote de renovação.

Para caracterizar matematicamente nosso problema, pesquisamos as soluções já desenvolvidas. Com isso, elaboramos nosso Modelo de Preços de forma a reunir boas características e obter uma resposta. Devido a estrutura de somatório das funções utilizadas, obtemos separabilidade total nos gradientes e todos os hessianos diagonais. Também devido às características particulares, provamos um resultado forte: unicidade da solução. Na construção do algoritmo de programação não-linear, optamos por uma estrutura geral de laço interno e laço externo. O laço externo busca os multiplicadores de Lagrange ótimos enquanto o laço interno determina o ponto ótimo, dado os multiplicadores.

Para o laço interno, desenvolvemos um cuidadoso trabalho de análise numérica. Independente de quais restrições fossem ativas, formulamos uma forma única de determinar o ponto ótimo. Outra vantagem foi o desenvolvimento de uma função que gera pontos iniciais para o método de Newton capaz de garantir sua convergência em poucos passos.

O laço externo, por sua vez, quando apenas uma restrição está ativa, consistiu em uma técnica de determinação de raiz de equação. Para o caso das restrições de renovação e sinistralidade ativas, também devido à estrutura do problema, elaboramos um laço externo que resolveu iterativamente duas equações, também garantindo uma solução rápida do problema.

Nos testes numéricos validamos nossos resultados com um algoritmo de solução geral. Encontramos soluções de qualidade igual ou superior, sempre em um menor tempo de execução. Também foi possível averiguar que nosso algoritmo apresenta uma escalabilidade para resolução de problemas maiores que os utilizados nesse trabalho.

Por fim, concluímos que atingimos nosso objetivo de desenvolver um processo de programação não-linear para apreçar apólices de seguro. Além disso, desenvolvemos um algoritmo de boa performance que utiliza a estrutura do problema.

Para terminar a dissertação, na próxima seção apresentaremos alguns exemplos de aplicações práticas do modelo de preços desenvolvido. Depois, descreveremos sobre sugestões de trabalhos futuros e alguns

"becos sem saída" encontrados no desenvolvimento do trabalho.

## 7.2 Aplicações Gerenciais

Nesta seção mostraremos algumas aplicações práticas para o Modelo de Preços aqui desenvolvido. O foco é mostrar que estudos o gestor de um produto de seguro pode desenvolver com o resultado desta dissertação.

### 7.2.1 Apreçamento de lote de renovação

Esse é o uso mais natural do modelo aqui desenvolvido. Primeiramente, precisamos das seguintes definições estratégicas:

- a meta de renovação  $\bar{R}$ ;
- a meta de sinistralidade  $\bar{\pi}$ ;
- a filosofia de construção das restrições de caixa.

Com isso, executamos nosso processo de otimização. Caso o problema seja inviável, devemos rever as posições estratégicas e qual restrição será "relaxada". Em caso de sucesso, o vetor de preços ótimos  $\mathbf{p}^*$  contém todos os preços a serem oferecidos as apólices do lote de renovação.

### 7.2.2 Relacionamento de pacto e impacto

Uma forma de utilização do modelo proposto é avaliar os impactos de mudanças nas estruturas de negócio da seguradora. Em linhas gerais, antes de uma decisão de caráter executivo, é vital considerar qual o resultado esperado de cada ação.

Em um primeiro exemplo, consideremos um cenário de inflação no valor das peças de reposição de veículos. Nesse caso, o aumento do custo com peças eleva o valor do prêmio de risco  $s$ . Com o modelo desenvolvido, podemos simular o quanto cairia o lucro de um lote de renovação em virtude desses agravos de custos. A tabela 7.1 mostra um exemplo desse estudo.

Tabela 7.1: *Impacto do aumento de mão-de-obra*

Aumento de $s$	Lucro(R\$ Milhões)
00%	117,23
05%	109,51
10%	101,14
15%	92,95
20%	84,85

Outro uso é a avaliação de políticas de valores máximos de preços. Dependendo do cenário, pode ser necessária uma mudança nos valores máximos oferecidos em uma renovação. Em praças com guerras de preços, pode ser necessário não subir muito os preços para manter a carteira atual. Por outro lado, com a diminuição de competidores é possível aumentar a lucratividade através do aumento de preços. A tabela 7.2 mostra o resultado de algumas simulações de variação.

Tabela 7.2: Impacto da alteração do limite superior  $u$ 

Variação de $u$	Lucro(R\$ Milhões)
00%	117,23
05%	125,41
10%	132,10
15%	138,17
-05%	114,09
-10%	100,89
-15%	90,79

Naturalmente, também é possível investigar os dois efeitos conjuntos. Assim, aumentos no custo de peças podem ser compensados pelo aumento dos preços máximos. De forma análoga, políticas de guerra de preços também podem ser sustentadas por estratégias de diminuição do prêmio de risco.

### 7.2.3 Desenvolvimento de um orçamento de sinistralidade e renovação

Na construção de um orçamento anual de uma seguradora, é comum a definição de um desejo de lucratividade e um desejo de vendas. Além disso, tipicamente, as equipes técnicas tem seus contratos de metas atrelados ao resultado de sinistralidade; as equipes comerciais, por sua vez, tem a comissão nas vendas como principal remuneração variável.

Apesar dos focos das diferentes áreas, as metas de vendas e resultados são muito correlacionadas. Uma meta elevada de vendas causa a deterioração do resultado da mesma forma que um lucratividade exagerada impossibilita crescimento em vendas.

Nesse contexto, é vital que o principal líder da operação considere esses aspectos na construção dos contratos de resultados. Para tal, podemos utilizar o nosso modelo de preços para verificar quais alvos de sinistralidade e renovação são viáveis. A tabela 7.3 mostra alguns cenários ótimos viáveis.

Tabela 7.3: Cenários viáveis de renovação e sinistralidade

Renovação	Sinistralidade
64,6%	80,0%
74,5%	83,1%
63,6%	79,0%
68,6%	82,0%
66,2%	81,0%
73,0%	83,0%
65,3%	80,5%

Para uma melhor visualização e uma maior flexibilidade na escolha dos alvos, interpolamos os dados acima para construir a fronteira. O gráfico 7.1 mostra a curva resultante desse processo.

Em posse dessa curva, é possível construir alvos orçamentários viáveis de sinistralidade e renovação, sendo justos os contratos de metas com as áreas técnicas e de vendas.



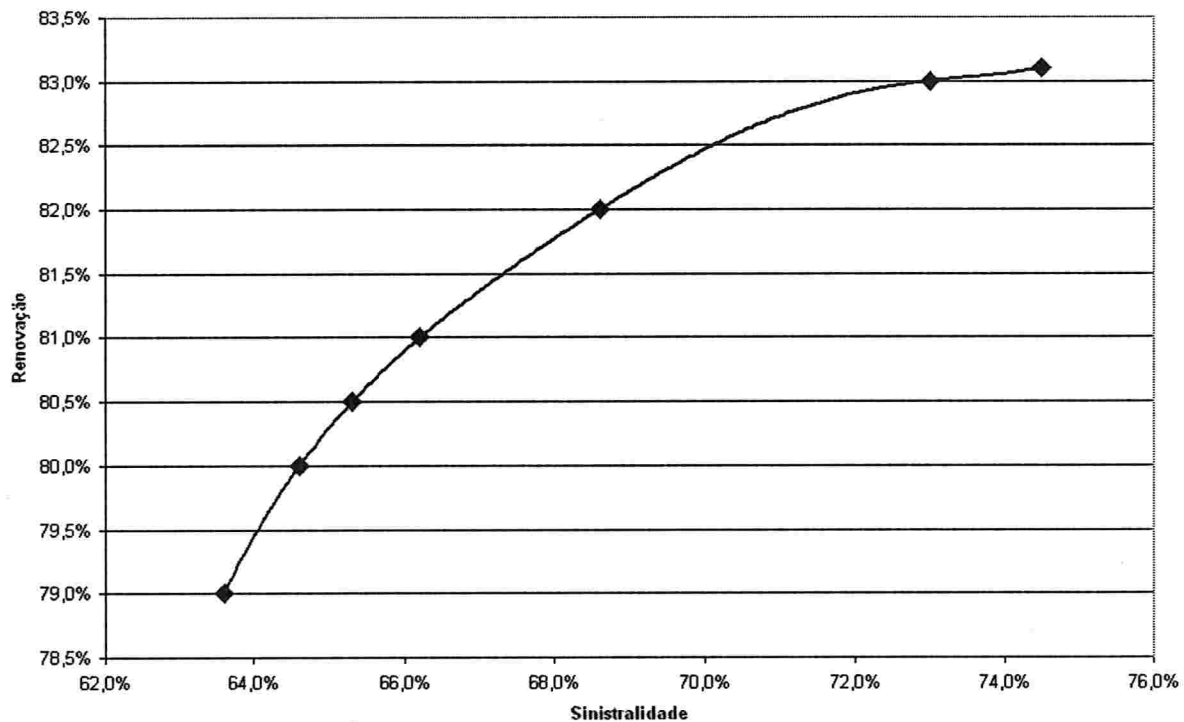


Figura 7.1: Fronteira ótima de renovação e sinistralidade

#### 7.2.4 Estudo de impacto de investimentos retenção de clientes

Por fim, podemos utilizar o modelo de preços desenvolvido para avaliar investimentos em retenção de clientes. Imagine uma situação na qual, com investimento em brindes aos clientes, é possível aumentar sua propensão natural a renovar.

Matematicamente, para cada valor financeiro investido, temos um aumento na valor da variável  $\alpha$  do modelo de probabilidade de renovação. Com essa alteração, dada a restrição de renovação, é possível respeitar a mesma com valores maiores de prêmios médios.

Com esse procedimento, para cada cenário de investimento avaliamos quanto de lucro com essa nova propensão de renovar causa. Comparando com o cenário sem investimento, sabemos o adicional de lucro que cada investimento gera. A tabela 7.4 traduz três desses cenários.

Tabela 7.4: Cenários de investimento em propaganda

Investimento (R\$ Milhões)	Melhoria de $\alpha$ (desvios padrões)	Lucro do lote (R\$ Milhões)	Lucro adicional (R\$ Milhões)
00	0	118,08	0
20	1	137,73	-0,32
30	2	157,13	9,08
60	5	175,77	-2,28

Com esse estudo e uso do modelo de preços, vemos que a investimento de trinta milhões de reais é aquele que gera o maior lucro adicional. Dessa forma, o investimento em retenção de clientes é promissor.

### 7.3 Trabalhos futuros

#### 7.3.1 Análise do Problema com Despesas Comerciais

A definição de lucro utilizada é equivalente a de [Taylor]. Entretanto, no mercado brasileiro de seguros, as despesas comerciais podem ser aproximadas por pagamento de comissão sobre o prêmio. Dessa forma, temos a seguinte definição de lucro por apólice:

$$lucro = (1 - \varphi)p - s \quad (7.1)$$

Assim, teríamos uma nova definição de função utilidade:

$$U(\mathbf{p}) = ((1 - \varphi)\mathbf{p} - s)\Gamma(\mathbf{p}) \quad (7.2)$$

Naturalmente, as equações (7.1) e (7.2) pressupõem que a comissão é fixa independente da apólice. Uma evolução natural é considerar que cada apólice apresenta seu próprio valor de comissão. Assim, temos a nova função objetivo:

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n ((1 - \varphi_i)\mathbf{p}_i - s_i)\gamma_i(\mathbf{p}_i) \quad (7.3)$$

#### 7.3.2 Apreçamento ao longo de vários anos

Tipicamente, os modelos de apreçamento para seguros consideram a evolução dos preços e do mercado ao longo tempo. Dessa forma, é natural evoluirmos o modelo de preços a fim de considerar  $J$  momentos de renovação. Apenas como exemplo, a fórmula de utilidade para um contexto de duas renovações seguidas seria:

$$U_{lote} = U^1(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) + U^2(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) = (\mathbf{p}^1 - \mathbf{s}^1)'\Gamma^1(\mathbf{p}^1) + (\mathbf{p}^2 - \mathbf{s}^2)'\Gamma^2(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2). \quad (7.4)$$

É importante notar que a possibilidade de uma segunda renovação depende da ocorrência da primeira renovação. Assim, temos:

$$(\Gamma^2(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2))_i = \gamma_i^1(\mathbf{p}^1)\gamma_i^2(\mathbf{p}^2).$$

Mais genericamente, temos:

$$(\Gamma^J(\mathbf{p}))_i = \prod_{j=1}^J \gamma_i^j(\mathbf{p}^j).$$

Tal qual feito em [Taylor], é possível reestruturar o problema de otimização e utilizar técnicas de programação dinâmica para resolvê-lo. Assim, determinaríamos uma seqüência de vetores de preço  $\mathbf{p}^j$  para cada

ano  $j$  os quais seriam o ponto máximo de:

$$U^j(\mathbf{p}^j) = \sum_{i=1}^{i=1} n((\mathbf{p}_i^j - \mathbf{s}_i^j)\gamma_i(\mathbf{p}_i^j) + K_i^{j+1}\gamma_i^j(\mathbf{p}_i^j))$$

com  $K_i^{j+1}$  sendo a utilidade obtida pela apólice  $i$  no ano  $j + 1$ .

### 7.3.3 Introduzir restrições de Variância

O problema de apreamento de apólices de seguro é uma variação de problemas de portfólio. Como mostrado em [Markowitz], nesse tipo de problema, é interessante introduzir estudo das variâncias das grandezas envolvidas. Assim, é interessante introduzir a análise da variância do lucro do lote de renovação e da sinistralidade, posto que queremos a garantia de solvência das apólices renovadas. Em virtude dessas análises, uma alternativa é considerar o problema de apreamento como:

Maximizar

$$U(\mathbf{p})$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) \leq 0, \quad (7.5)$$

$$\pi(\mathbf{p}) \leq 0, \quad (7.6)$$

$$\sigma^2(U(\mathbf{p})) \leq \delta_U, \quad (7.7)$$

$$\sigma^2(\pi(\mathbf{p})) \leq \delta_\pi \quad (7.8)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{u} \leq 0, \quad (7.9)$$

$$-\mathbf{p} + \mathbf{l} \leq 0, \quad (7.10)$$

com

$$\delta_U \geq 0, \quad (7.11)$$

$$\delta_\pi \geq 0. \quad (7.12)$$

Outra possibilidade, é montar o problema como:

Maximizar

$$U(\mathbf{p}) - \eta_U \sigma^2(U(\mathbf{p})),$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) \leq 0, \quad (7.13)$$

$$\pi(\mathbf{p}) + \eta_\pi \sigma^2(\pi(\mathbf{p})) \leq 0, \quad (7.14)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{u} \leq 0, \quad (7.15)$$

$$-\mathbf{p} + \mathbf{l} \leq 0, \quad (7.16)$$

com

$$\eta_U \geq 0, \quad (7.17)$$

$$\eta_\pi \geq 0. \quad (7.18)$$

#### 7.4 Das negativas (ou *Deadends*)

O<sup>1</sup> objetivo dessa seção é descrever duas tentativas de melhorias do algoritmo desenvolvido e explicar o motivo de duas não-implementações<sup>2</sup>.

Dessa forma, para melhorar o algoritmo já desenvolvido, buscamos técnicas de melhoria para o laço interno e externo. Para o interno, analisamos a técnica de agregação para diminuir a quantidade de equações a resolver. Entretanto, devido à presença de restrições de caixa, não foi possível implementar essa técnica com qualidade.

Estudamos a possibilidade de substituir o laço externo por uma técnica de Lagrangeano Aumentado. Entretanto, o novo problema interno não apresentaria mais separabilidade, sendo necessário um grande estudo de análise numérica para garantir a convergência do processo a uma solução. Além disso, não encontramos evidências que garantissem a melhora do tempo de execução com essa técnica. Dessa forma, também descartamos a implementação de Lagrangeano Aumentado.

##### 7.4.1 Agregação

###### O princípio

Agregação consiste em transformar um problema de  $n$  variáveis em um problema de  $m$  variáveis, com  $m \ll n$ . No nosso caso, o objetivo é diminuir a quantidade de equações a serem resolvidas pelo algoritmo 4.2.

Em linhas gerais, quando estivermos longe da determinação dos multiplicadores de Lagrange ótimos, resolveremos sempre o problema agregado. Conforme nos aproximamos do ponto ótimo, aumentaremos os grupos de trabalho até a quantidade total de apólices do lote de renovação.

Dentro do nosso desenvolvimento, é importante que as operações de agregação e desagregação sejam

<sup>1</sup>"Deadends", em uma tradução livre, significa "becos sem saída".

<sup>2</sup>Apesar de pouco usual, o registro de insucessos também é importante para a evolução dos trabalhos científicos.

rápidas. Se o *overhead* dessas operações superar o ganho com a diminuição de variáveis, a implantação dessa técnica não reduzirá o tempo de execução.

A seguir, trataremos de detalhes desse algoritmo. Também será apresentado seu principal contratempo e o motivo da não-implantação dessa técnica.

### O dilema das restrições de caixa

Para reduzir o número de variáveis, basta substituir cada conjunto  $q$  de apólices por uma macro-apólice que represente o todo. Por simplicidade, todos os parâmetros dessa macro-apólice serão construídos como a mediana dos parâmetros das apólices originais.

Apesar da construção acima ser lógica, utilizar a mediana, ou a média, não é a melhor solução para agregar as restrições de caixa  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{l}$ . No uso da mediana, quando ocorresse o processo de desagregação, haveria apólices cujas restrições estariam ativas, mesmo a restrição da macro-apólice não sendo ativa. Logo, o processo de desagregação geraria um ponto inviável e, ao tornar esse ponto viável através da projeção na caixa, seria possível ter um ponto muito distante do ponto ótimo procurado.

Uma outra possibilidade de agregar  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{l}$  seria tomar  $\mathbf{u}_j$  da macro-apólice  $j$  como o menor de todos os  $\mathbf{u}_i$  das apólices  $i$  que ela representa. De forma análoga,  $\mathbf{l}_j$  seria tomado pelo maior valor disponível. Nesse formato, a solução encontrada pelo problema agregado sempre seria um ponto viável do problema original. Entretanto, pela forma de construção, a restrição de caixa pode não ser consistente, ou mesmo que seja consistente, a diferença entre  $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{l}_j$  ser muito pequena e o ponto ótimo do problema agregado estar muito distante da solução do problema original.

Uma forma de contornar essa situação é determinar o ponto ótimo  $\bar{\mathbf{p}}$  do problema agregado sem considerar as restrições de caixa, desagregar e determinar o ponto viável  $\mathbf{p}$  do problema original através de projeção na caixa. Tal procedimento permitiria aproveitar a técnica de agregação e respeitar as restrições de caixa. Entretanto, esse procedimento faria operações de ordem  $O(n)$  a cada laço, sendo que o objetivo principal da agregação era trabalhar centrado em  $O(m)$ . Logo, não haveria uma concreta diminuição do tempo de execução do algoritmo através dessa implementação.

Devido a não trazer benefícios práticos ao algoritmo originalmente desenvolvido, abandonamos a técnica.

### 7.4.2 Lagrangeano Aumentado

#### Princípio

O laço externo do algoritmo desenvolvido, nesta dissertação, para resolver o problema IP apresenta os seguintes dois defeitos:

- **Crescimento exponencial com as restrições:** devido à estrutura de laços encaixados, a adição de mais uma restrição geraria um laço encaixado extra. Com isso, temos um crescimento exponencial do tempo de execução;
- **Apenas passos ortogonais na busca de  $\lambda^*$ :** também devido a estrutura de laços encaixados, o algoritmo ora altera  $\lambda_R$ , ora altera  $\lambda_\pi$ .

Uma forma de corrigir esses dois defeitos é substituir o laço externo pela técnica de Lagrangeano Aumentado. Com isso, teríamos uma técnica de otimização mais geral e também uma potencial diminuição do tempo de execução, posto que este novo laço externo modificaria simultaneamente  $\lambda_R$  e  $\lambda_\pi$ .

A fim de desenvolvermos nosso algoritmo de Lagrangeano Aumentado, utilizaremos como base o algoritmo desenvolvido em [Nocedal]. Para isso, com auxílio das variáveis de folga  $u_R$  e  $u_\pi$ , escreveremos re-escreveremos o problema  $\mathbb{P}$  como:

Maximizar

$$U(\mathbf{p})$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) + u_R = 0, \quad (7.19)$$

$$\pi(\mathbf{p}) + u_\pi = 0, \quad (7.20)$$

$$-\mathbf{p} + \mathbf{l} \leq 0, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{u} \leq 0, \quad (7.22)$$

$$u_R \geq 0, \quad (7.23)$$

$$u_\pi \geq 0. \quad (7.24)$$

Conforme dito anteriormente, para atualizar dos multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_R$  e  $\lambda_\pi$ , e os coeficientes de penalização,  $\rho_R$  e  $\rho_\pi$ , utilizaremos o algoritmo e os parâmetros descritos em [Nocedal]. Dessa forma, basta desenvolver o algoritmo para resolver os sub-problemas para termos nossa versão de Lagrangeano Aumentado. Na próxima seção, trataremos desse tópico.

#### O desafio do problema interno

O problema interno  $\mathbb{Q}$ , no laço interno do algoritmo de Lagrangeano Aumentado, é:

Maximizar

$$U(\mathbf{p}) - \lambda_R R(\mathbf{p}) - \frac{\rho_R}{2} (R(\mathbf{p}))^2 - \lambda_\pi \pi(\mathbf{p}) - \frac{\rho_\pi}{2} (\pi(\mathbf{p}))^2,$$

sujeito a

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{u}.$$

Para determinar a solução de  $\mathbb{Q}$ , ignorando as caixas, devemos determinar  $\mathbf{p}^*$  tal que:

$$\nabla U(\mathbf{p}^*) - (\lambda_R + \rho_R R(\mathbf{p}^*)) \nabla R(\mathbf{p}^*) - (\lambda_\pi + \rho_\pi \pi(\mathbf{p}^*)) \nabla \pi(\mathbf{p}^*) = 0. \quad (7.25)$$

Infelizmente, o sistema acima não é separável. Logo, resolvê-lo exigirá mais tempo que o algoritmo 4.2. Porém, podemos re-escrever esse sistema a fim de obter uma forma separável:

$$\nabla U(\mathbf{p}^*) - \omega_R \nabla R(\mathbf{p}^*) - \omega_\pi \nabla \pi(\mathbf{p}^*) = 0, \quad (7.26)$$

$$\omega_R - (\lambda_R + \rho_R R(\mathbf{p}^*)) = 0, \quad (7.27)$$

$$\omega_\pi - (\lambda_\pi + \rho_\pi \pi(\mathbf{p}^*)) = 0. \quad (7.28)$$

Claramente, a equação (7.26) é separável e, dados  $\omega_R$  e  $\omega_\pi$ , pode ser resolvida com o algoritmo 4.2. Entretanto, é necessário utilizar um processo iterativo, resumido no algoritmo 7.1.

---

**Algoritmo 7.1** Solução iterativa do problema Q

---

$(\omega_R; \omega_\pi) = (0; 0)$ .

**while** Convergência não é obtida **do**

    Encontre  $\mathbf{p}^*$ , solução de (7.26), com o algoritmo 4.2.

    Atualize  $(\omega_R; \omega_\pi)$  através de (7.27) e (7.28).

**end while**

---

Apesar de ser facilmente implementável, é desafiador determinar em quais condições o algoritmo acima converge. Para tal, seria necessário um estudo de análise semelhante ao desenvolvido no capítulo 4. Tal estudo, naturalmente, exploraria as especificidades do problema P, eliminando a possibilidade de um algoritmo de fácil expansão para mais restrições. Outro ponto importante é que, mesmo com a convergência garantida, não existe indicação clara de diminuição do tempo de execução. Apesar da tendência de menos passos em  $(\lambda_R; \lambda_\pi)$ , esse ganho pode ser compensado pela lenta convergência do algoritmo 7.1. Devido a inexistência de um algoritmo mais geral e a possibilidade do novo tempo de execução ser maior que o algoritmo já testado, não implementamos a solução com Lagrangeano Aumentado.

## Apêndice A

### Demonstrações

#### A.1 Capítulo 3

##### A.1.1 Teorema 3.2

###### Enunciado

A função probabilidade de renovação  $\gamma(p)$  satisfaz as “Condições de Taylor para Função de Demanda”.

###### Demonstração

Vamos calcular os limites de  $\exp(\alpha + \beta p)$ , com  $\beta < 0$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \exp(\alpha + \beta p) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \exp(\alpha + \beta p) = \infty. \quad (\text{A.2})$$

Assim, para os limites de  $\gamma(p)$  temos:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\exp(\alpha + \beta p)}{1 + \exp(\alpha + \beta p)} = \frac{0}{1 + 0} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \gamma(p) = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\exp(\alpha + \beta p)}{1 + \exp(\alpha + \beta p)} = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\beta \exp(\alpha + \beta p)}{\beta \exp(\alpha + \beta p)} = 1. \quad (\text{A.4})$$

E, para os limites de  $\gamma'(p)$ , temos:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma'(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\beta \exp(\alpha + \beta p)}{(1 + \exp(\alpha + \beta p))^2} = \frac{0}{(1 + 0)^2} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \gamma'(p) = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\beta \exp(\alpha + \beta p)}{(1 + \exp(\alpha + \beta p))^2} = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\beta}{(1 + \exp(\alpha + \beta p))} = 0. \quad (\text{A.6})$$

De (A.3), (A.4), (A.5) e (A.6) segue o teorema.



**A.1.2 Lema 3.3****Enunciado**

Para todo  $i$ , existe  $p_i^U$  tal que, se  $\mathbf{p}_i > p_i^U$ , então  $(\nabla U(\mathbf{p}))_i < 0$ .

**Demonstração**

Para  $U(\mathbf{p})$ , temos:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i = \gamma_i(\mathbf{p}_i) \left( 1 + \frac{\beta(\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)} \right).$$

Logo, como  $\gamma > 0$  sempre, para termos  $(U(\mathbf{p}))_i < 0$ , devemos garantir que:

$$1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i - \beta_i \mathbf{s}_i < 0, \quad (\text{A.7})$$

para  $\mathbf{p}_i > p_i^U$ . Note que se

$$\mathbf{p}_i > p_i^U = -\frac{\alpha_i + 2}{\beta_i} + \mathbf{s}_i,$$

então, com  $\beta_i < 0$ , temos:

$$\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) < \exp(\alpha_i - \alpha_i + \beta_i \mathbf{s}_i - 2) = \exp(\beta_i \mathbf{s}_i - 2) < 1,$$

e

$$1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i - \beta_i \mathbf{s}_i < 1 + 1 - \alpha_i - 2 = -\alpha_i < 0.$$

Assim, garantimos a existência de  $p_i^U$  para todo  $i$ .

**A.1.3 Lema 3.4****Enunciado**

Para todo  $i$ , temos  $(\nabla R(\mathbf{p}))_i > 0$ .

**Demonstração**

Resgatando (3.10), temos:

$$(\nabla R(\mathbf{p}))_i = \frac{-\beta_i \gamma_i(\mathbf{p}_i)}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)}.$$

Como  $\beta < 0$ , segue o lema.

**A.1.4 Lema 3.5****Enunciado**

Para todo  $i$ , existe  $p_i^\pi$  tal que, se  $\mathbf{p}_i > p_i^\pi$ , então temos  $(\nabla \pi(\mathbf{p}))_i > 0$ .

**Demonstração**

Resgatando (3.12), temos que o sinal de  $(\nabla \pi(\mathbf{p}))_i$  é determinado por:

$$h(\mathbf{p}_i) = \beta \mathbf{s}_i - \bar{\pi}(1 + \beta_i \mathbf{p}_i + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)). \quad (\text{A.8})$$

Note que se

$$\mathbf{p}_i > p_i^\pi = -\frac{\alpha_i + 2}{\beta_i} + \frac{s_i}{\pi},$$

então, com  $\beta_i < 0$ , temos:

$$\exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) < \exp\left(\alpha_i - \alpha_i + \frac{\beta_i s_i}{\pi} - 2\right) = \exp\left(\frac{\beta_i s_i}{\pi} - 2\right) < 1,$$

e

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}_i) &= \beta_i s_i - \pi(1 + \beta_i \mathbf{p}_i + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i)) > \beta_i s_i - \pi\beta \left(-\frac{\alpha_i + 2}{\beta_i} + \frac{s_i}{\pi}\right) - \pi(1 + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(\mathbf{p}_i) = \beta_i s_i - \beta_i s_i + 2\pi + \pi\alpha_i - 2\pi = \pi\alpha_i > 0. \end{aligned}$$

Assim, garantimos a existência de  $p_i^\pi$  para todo  $i$ .

### A.1.5 Corolário 3.6

#### Enunciado

Para todo  $i$ , existe  $p_i^c$  tal que, se  $\mathbf{p}_i > p_i^c$ , então temos:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i < 0,$$

$$(\nabla R(\mathbf{p}))_i > 0,$$

$$(\nabla \pi(\mathbf{p}))_i > 0.$$

#### Demonstração

Dos lemas 3.3, 3.4 e 3.5, tomando  $p_i^c = \max(p_i^R, p_i^\pi)$ , segue o resultado.

### A.1.6 Lema 3.7

#### Enunciado

Se  $\bar{R} < 1$  então existe  $\hat{p}^R$  tal que, se  $\mathbf{p} < \hat{p}^R$ , então temos  $R(\mathbf{p}) < 0$ .

#### Demonstração

Note que se

$$\mathbf{p}_i < \hat{p}_i^R = \frac{\ln(\bar{R}) - \ln(1 - \bar{R}) - \alpha_i}{\beta_i},$$

então, como  $\beta_i < 0$ , temos:

$$\gamma_i(\mathbf{p}_i) > \gamma(\hat{p}_i^R) = \frac{\frac{\bar{R}}{1-\bar{R}}}{1 - \frac{\bar{R}}{1-\bar{R}}} = \bar{R}. \quad (\text{A.9})$$

De (A.9), aplicando para todo  $i$ , obtemos:

$$R(\mathbf{p}) < R(\hat{p}^R) = \bar{R},$$

finalizando a demonstração do lema.

### A.1.7 Lema 3.8

#### Enunciado

Existe  $\hat{p}_i^U$  tal que, se  $\mathbf{p}_i < \hat{p}_i^U$ , então temos  $(\nabla U(\mathbf{p}))_i > 0$ .

#### Demonstração

O sinal de  $(\nabla U(\mathbf{p}))_i$  é determinado por:

$$1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i - \beta_i \mathbf{s}_i.$$

Note que se

$$\mathbf{p}_i > \hat{p}_i^U = 0,$$

então

$$1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i - \beta_i \mathbf{s}_i > 1 + \exp(\alpha_i) - \beta_i \mathbf{s}_i > 0.$$

Dessa forma, tomando  $\hat{p}_i^U = 0$ , segue o lema.

### A.1.8 Lema 3.9

#### Enunciado

Existe  $\hat{p}_i^\pi$  tal que, se  $\mathbf{p}_i < \hat{p}_i^\pi$ , temos  $(\nabla \pi(\mathbf{p}))_i < 0$ .

#### Demonstração

O sinal de  $(\nabla \pi(\mathbf{p}))_i$  é determinado por:

$$\beta_i \mathbf{s}_i - \pi(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i)$$

Note que se

$$\mathbf{p}_i > \hat{p}_i^\pi = 0$$

então

$$\beta_i \mathbf{s}_i - \pi(1 + \exp(\alpha_i + \beta_i \mathbf{p}_i) + \beta_i \mathbf{p}_i) < \beta_i \mathbf{s}_i - \pi(1 + \exp(\alpha_i)) < 0$$

Dessa forma, tomando  $\hat{p}_i^\pi = 0$ , segue o lema.

### A.1.9 Corolário 3.10

#### Enunciado

Para todo  $i$ , existe  $\hat{p}_i$  tal que, se  $\mathbf{p}_i < \hat{p}_i$ , então temos:

$$(\nabla U(\mathbf{p}))_i > 0,$$

$$R(\mathbf{p}) < 0,$$

$$(\nabla \pi(\mathbf{p}))_i < 0.$$

**Demonstração**

Dos lemas 3.7, 3.8 e 3.9, tomando  $\hat{p}_i = \min(\hat{p}_i^U, \hat{p}_i^\pi, \hat{p}_i^R)$ , segue o resultado.

**A.1.10 Teorema 3.11****Enunciado**

Dado o problema  $\mathbb{P}$  de maximização em  $\mathbf{p}$ :

Maximizar

$$U(\mathbf{p}),$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) \leq 0,$$

$$\pi(\mathbf{p}) \leq 0.$$

temos que, se  $\mathbb{P}$  é viável, então  $\mathbb{P}$  possui máximo.

**Demonstração**

Consideremos o problema  $\mathbb{P}'$ :

maximizar

$$U(\mathbf{p})$$

sujeito a

$$R(\mathbf{p}) \leq 0, \tag{A.10}$$

$$\pi(\mathbf{p}) \leq 0, \tag{A.11}$$

$$\mathbf{p} \geq p^c, \tag{A.12}$$

$$\mathbf{p} \leq \hat{p}. \tag{A.13}$$

Trivialmente, afirmamos que se  $\mathbb{P}'$  é viável então  $\mathbb{P}'$  possui máximo. Isso ocorre pois o conjunto viável de  $\mathbb{P}'$  é compacto. Retornando ao problema  $\mathbb{P}$ , temos que seu ponto ótimo  $\mathbf{p}^*$  é limitado inferiormente. Pelo corolário 3.10, se  $\mathbf{p}^* < \hat{p}$ , então existe um novo ponto  $\mathbf{p}_{new}^*$  tal que:

$$U(\mathbf{p}_{new}^*) > U(\mathbf{p}^*), \tag{A.14}$$

$$R(\mathbf{p}_{new}^*) \leq 0, \tag{A.15}$$

$$\pi(\mathbf{p}_{new}^*) \leq 0. \tag{A.16}$$

Assim, afirmamos que o ponto ótimo  $\mathbf{p}^*$  é tal que:

$$\mathbf{p}^* \geq \hat{p}. \tag{A.17}$$

Analogamente,  $\mathbf{p}^*$  também possui um limitante superior. Pelo corolário 3.6, se  $\mathbf{p}^* > p^c$  então existe um

novo ponto  $\mathbf{p}_{new}^*$  tal que:

$$U(\mathbf{p}_{new}^*) > U(\mathbf{p}^*), \quad (\text{A.18})$$

$$R(\mathbf{p}_{new}^*) \leq 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\pi(\mathbf{p}_{new}^*) \leq 0. \quad (\text{A.20})$$

Logo, afirmamos que o ponto ótimo  $\mathbf{p}^*$  é tal que:

$$\mathbf{p}^* \leq p^c. \quad (\text{A.21})$$

De (A.17) e (A.21), concluímos que  $\mathbb{P}$  apresenta a mesma solução que  $\mathbb{P}$ . Assim, se  $\mathbb{P}$  for viável,  $\mathbb{P}$  tem ponto de máximo, finalizando a demonstração do teorema.

## A.2 Capítulo 4

### A.2.1 Teorema 4.1

#### Enunciado

A função  $g$  tem constante de Lipschitz  $L = \exp(5.55) + 1$ .

#### Demonstração

Como  $x \leq 5.58$ , segue que  $g'(x)$  é limitada. Assim,  $g(x)$  tem constante de Lipschitz:

$$L = \sup(g'(x)) = \sup(\exp(x) + 1) = \exp(\sup(x)) + 1 = \exp(5.55) + 1$$

### A.2.2 Teorema 4.2

#### Enunciado

A derivada da função  $g$  tem constante de Lipschitz  $L = \exp(5.55)$ .

#### Demonstração

Como  $x \leq 5.58$ , segue que a derivada de  $g''(x)$  é limitada. Assim,  $g'(x)$  tem constante de Lipschitz:

$$L = \sup(g''(x)) = \sup(\exp(x)) = \exp(\sup(x)) = \exp(5.55)$$

### A.2.3 Lema 4.3

#### Enunciado

$K(c)$  com  $\tilde{h}(c) = c$  tem máximo em  $c = 0$ .

#### Demonstração

Aplicando (4.25) em (4.19), temos:

$$K(c) = \frac{M(\exp(c))}{(\exp(c) + 1)^2}. \quad (\text{A.22})$$

Logo, sua derivada é:

$$K'(c) = \frac{M(\exp(c))(1 - \exp(c))}{(\exp(c) + 1)^3}.$$

E sua segunda derivada é expressa como:

$$K''(c) = \frac{2M(\exp(c))(\exp(c) - \exp(2c) - 1)}{(\exp(c) + 1)^4}.$$

Portanto, temos um máximo em  $c = 0$ , pois  $K'(0) = 0, K''(0) < 0$ , e  $K'(c) \neq 0$  se  $c \neq 0$ .

#### A.2.4 Teorema 4.4

##### Enunciado

Se  $c \leq 0,65$  e  $\tilde{h}(c) = c$ , então  $K(c) \leq \frac{1}{2}$ .

##### Demonstração

Como  $c \leq 0,65$ , temos  $M = \exp(0,65)$  Assim, para  $c = 0$ .

$$K(0) = \frac{M(\exp(c))}{(\exp(c) + 1)^2} = \frac{\exp(0,65)}{4} \approx 0,48 \leq \frac{1}{2}.$$

Como, pelo lema 4.3,  $K(0)$  é o máximo de  $K(c)$ , concluímos que  $K(c) \leq \frac{1}{2}$ .

#### A.2.5 Lema 4.5

##### Enunciado

$K(c)$  com  $\tilde{h}(c) = \ln(c)$  é estritamente decrescente para  $c \geq 43$ .

##### Demonstração

Aplicando  $\tilde{h}(c) = \ln(c)$  em (4.19) com  $c \geq 43$ , temos:

$$K(c) = \frac{M \ln(c)}{(c+1)^2}. \tag{A.23}$$

Logo, a derivada dela é:

$$K'(c) = \frac{M(c - c \ln(c) + 1)}{c(c+1)^3} < 0,$$

com  $c \geq 43$ . Assim, segue que  $K(c)$  é estritamente decrescente.

#### A.2.6 Teorema 4.6

##### Enunciado

Se  $c \geq 43$  e  $\tilde{h}(c) = \ln(c)$ , então  $K(c) \leq \frac{1}{2}$ .

**Demonstração**

Primeiramente, temos  $M = \exp(5,55)$  pelo lema 4.2. Assim, podemos calcular  $K(43)$ :

$$K(43) = \frac{\exp(5,55) \ln(c)}{(c+1)^2} \approx 0,4998 \leq \frac{1}{2}.$$

Como  $K(c)$  é estritamente decrescente, segue que  $K(c) \leq \frac{1}{2}$ .

**A.2.7 Teorema 4.7****Enunciado**

Se  $\tilde{h}(c) = P(c)$  então  $K(c) \leq \frac{1}{2}$ .

**Demonstração**

Aplicando  $\tilde{h}(c) = P(c)$  em (4.19) com  $0,65 \leq c \leq 43$ , temos:

$$K(c) = \frac{M |g(P(c)) - c|}{(\exp(P(c)) + 1)^2} \leq \frac{\exp(3,7) |g(P(c))|}{(\exp(-0,2) + 1)^2} \leq 12,5 |g(P(c)) - c| \quad (\text{A.24})$$

Para a expressão (A.24), temos o gráfico A.1.

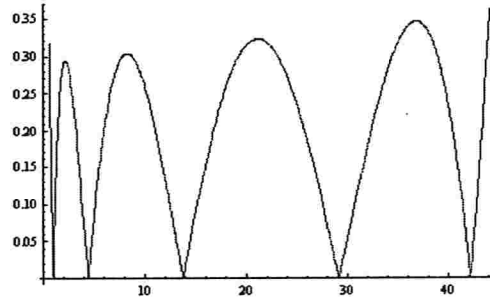


Figura A.1: Limitante superior de  $K(c)$  para  $\tilde{h}(c) = P(c)$

Com base no gráfico A.1, temos  $K(c) \leq 12,5 |g(P(43)) - c|$ . Logo, como

$$12,5 |g(P(43)) - c| \leq 12,5 |0,0303| \leq 0,38$$

concluimos que  $K(c) \leq \frac{1}{2}$ .

**A.2.8 Teorema 4.8****Enunciado**

O algoritmo 4.1 converge para a solução das equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76).

**Demonstração**

Dos lemas 4.4, 4.6 e 4.7, temos que o ponto inicial  $x_0$  é tal que:

$$K(x_0) \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, pelo teorema de Kantorovich, o algoritmo 4.1 sempre converge para a solução de  $g(x_i) = c_i$ . Assim, obtemos  $\bar{\mathbf{p}}$  o qual satisfaz as equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76).

**A.2.9 Teorema 4.9****Enunciado**

O algoritmo 4.2 converge para a solução das equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76).

**Demonstração**

Conforme as condições de finalização do algoritmo (4.2), cada coordenada  $j$  de  $\mathbf{p}^*$  admite três possibilidades:

- $c_j^{min} < c_j < c_j^{max}$ . Neste caso temos  $\mathbf{p}_j^* = \tilde{\mathbf{p}}_j$ . Pelo teorema 4.8, temos  $\mathbf{p}^*$  que satisfaz as equações (3.59), (3.63), (3.69) e (3.76).
- $c_j \geq c_j^{max}$ . Neste caso temos  $\mathbf{p}_j^* = \mathbf{u}_j > \tilde{\mathbf{p}}_j$ . Como  $g'(x) > 0$ , segue  $g(x_j) > c_j$ . Assim, tomando  $\lambda_j^u = g(x_j) - c$ , temos que  $\mathbf{p}_j^*$  satisfaz as condições KKT descritas como:

$$g(x_i) = c_j + \lambda_u, \quad (\text{A.25})$$

$$\lambda_j^u > 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{p}_j^* = \mathbf{u}_j. \quad (\text{A.27})$$

- $c_j \leq c_j^{min}$ . Neste caso temos  $\mathbf{p}_j^* = \mathbf{l}_j < \tilde{\mathbf{p}}_j$ . Como  $g'(x) > 0$ , segue  $g(x_j) < c_j$ . Assim, tomando  $\lambda_j^l = -g(x_j) + c$ , temos que  $\mathbf{p}_j^*$  satisfaz as condições KKT descritas como:

$$g(x_i) = c_j - \lambda_l, \quad (\text{A.28})$$

$$\lambda_j^l > 0, \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{p}_j^* = \mathbf{l}_j. \quad (\text{A.30})$$

Dos três ítems acima, segue o teorema.

**A.3 Capítulo 5****A.3.1 Lema 5.1****Enunciado**

Dado um ponto  $\bar{\mathbf{p}}$ , se existe um  $\tilde{\mathbf{p}}_j$  tal que  $\bar{\mathbf{p}}_j < \tilde{\mathbf{p}}_j$  e  $(\nabla L(\tilde{\mathbf{p}}))_j = 0$  então  $(\nabla L(\bar{\mathbf{p}}))_j > 0$ .



**Demonstração**

Conforme visto na seção 5.1, a expressão  $(\nabla L(\mathbf{p}))_j$  pode ser escrita como:

$$h(y) = \sigma \exp(-y) - y + k,$$

cuja derivada é dada por:

$$\frac{\partial h(y)}{\partial y} = -(\sigma \exp(-y) + 1) < 0.$$

Dessa forma,  $h(y)$  é estritamente decrescente. Portanto, dado  $\bar{y} < \tilde{y}$  com  $h(\tilde{y}) = 0$ , tem-se  $h(\bar{y}) > 0$ .

**A.3.2 Teorema 5.2****Enunciado**

O ponto  $\mathbf{p}^*$ , identificado pelo algoritmo (5.1), satisfaz as condições KKT do problema Caso A.

**Demonstração**

Conforme as condições de finalização do algoritmo (5.1), cada coordenada  $j$  de  $\mathbf{p}^*$  admite três possibilidades:

- $\mathbf{l}_j < \tilde{\mathbf{p}}_j < \mathbf{u}_j$ . Neste caso, temos  $\mathbf{p}_j^* = \tilde{\mathbf{p}}_j$  e  $(\nabla L(\mathbf{p}^*))_j = 0$ . Assim, é válida a condição de KKT relativa a essa variável:

$$(\nabla L(\mathbf{p}^*))_j = 0.$$

- $\tilde{\mathbf{p}}_j \geq \mathbf{u}_j$ . Neste caso, temos  $\mathbf{p}_j^* = \mathbf{u}_j < \tilde{\mathbf{p}}_j$  o que implica  $(\nabla L(\mathbf{p}^*))_j > 0$  (Lema 5.1). Assim, é válida a condição de KKT relativa a essa variável:

$$(\nabla L(\mathbf{p}^*))_j = \lambda_j^u,$$

$$\lambda_j^u > 0,$$

$$\mathbf{p}_j^* = \mathbf{u}_j.$$

- $\tilde{\mathbf{p}}_j \leq \mathbf{l}_j$ . Neste caso, temos  $\mathbf{p}_j^* = \mathbf{l}_j > \tilde{\mathbf{p}}_j$  o que implica  $(\nabla L(\mathbf{p}^*))_j < 0$  (Lema 5.1). Assim, é válida a condição de KKT relativa a essa variável:

$$(\nabla L(\mathbf{p}^*))_j = -\lambda_j^l,$$

$$\lambda_j^l > 0,$$

$$\mathbf{p}_j^* = \mathbf{l}_j.$$

Baseado nos três casos acima, concluímos que o ponto  $\mathbf{p}^*$  satisfaz as condições de KKT para o caso A.

### A.3.3 Teorema 5.3

#### Enunciado

A função  $R(\lambda)$  é monótona decrescente.

#### Demonstração

Para demonstrar a monotonocidade de  $R(\lambda)$ , provaremos que se  $u > v$  então  $R(u) \leq R(v)$ . Considerando  $u > v$ , a determinação de  $\mathbf{p}^1$  e  $\mathbf{p}^2$ , através do algoritmo 4.2, apresenta duas possibilidades para cada  $\mathbf{p}_j$ :

- $\mathbf{p}_j^1 = \mathbf{p}_j^2$  devido à caixa. Neste caso, a variável  $\mathbf{p}^2$  não contribui na alteração do valor de  $\pi(\lambda)$ . Se tivermos essa situação para todo  $j$ , teremos  $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^2$  e, conseqüentemente,  $R(v) = R(u)$ ;
- $\mathbf{p}_j^1 \neq \mathbf{p}_j^2$ . Neste caso, a variável  $\mathbf{p}_2$  contribui para a alteração do valor de  $R(\lambda)$  no sentido de sua derivada. Se essa situação ocorrer para, pelo menos, um  $j$ , teremos  $R(v) > R(u)$ .

Logo, se  $u > v$ , então  $R(u) \leq R(v)$ , demonstrando a monotonocidade de  $R(\lambda)$ .

### A.3.4 Lema 5.4

#### Enunciado

A função  $\pi(\lambda)$ , definida com as restrições de caixa, é decrescente.

#### Demonstração

Consideremos dois multiplicadores de Lagrange  $v$  e  $u$  com  $u > v$ . Na determinação de  $\mathbf{p}^1$  e  $\mathbf{p}^2$ , através do algoritmo 4.2, temos duas possibilidades:

- $\mathbf{p}_j^1 = \mathbf{p}_j^2$  devido à caixa. Neste caso, a variável  $\mathbf{p}^2$  não contribui na alteração do valor de  $\pi(\lambda)$ . Se tivermos essa situação para todo  $j$ , teremos  $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^2$  e, conseqüentemente,  $\pi(v) = \pi(u)$ ;
- $\mathbf{p}_j^1 \neq \mathbf{p}_j^2$ . Neste caso, a variável  $\mathbf{p}_2$  contribui para a alteração do valor de  $\pi(\lambda)$  no sentido de sua derivada. Se essa situação ocorrer para, pelo menos, um  $j$ , teremos  $\pi(v) > \pi(u)$ .

Logo, se  $u > v$ , então  $\pi(u) \leq \pi(v)$ , demonstrando a monotonocidade de  $\pi(\lambda)$ .



## Apêndice B

### Definições do Mercado Segurador

Fornecemos algumas expressões utilizadas no mercado segurador bem como suas definições matemáticas. Muitas dessas definições foram baseadas em [Prieto].

#### B.1 Seguro

É um contrato de convênio entre duas partes - a companhia ou entidade seguradora de um lado, e o tomador ou contratante do outro - mediante o qual a primeira se compromete a ressarcir economicamente a perda ou dano que o segurado possa sofrer durante a vigência do contrato. A obrigação do segurado é pagar o preço do seguro total ou parcial na assinatura do contrato.

#### B.2 Apólice

Documento em que se estabelece o contrato de seguro. Tem dois papéis importantes:

- A prova de que o contrato existe;
- Regula a relação entre os contratantes.

#### B.3 Risco

É a possibilidade de perda ou dano. O homem, desde que nasce, vive sob a constante ameaça de doença, acidente, morte e tragédias em geral. Da mesma forma, suas propriedades podem sofrer danos das mais variadas espécies como, por exemplo, incêndios, descargas elétricas e roubos.

#### B.4 Sinistro

É a concretização do risco. Por exemplo, um incêndio que destrói uma fábrica, o roubo de lojas, a morte em um acidente ou a colisão de um veículo. Essa grandeza pode ser quantificada pelo total de prejuízo causado pelo risco concreto.

#### B.5 Seguradora

Pessoa jurídica que se compromete a oferecer indenização em caso de sinistro. Para operar legalmente, esta deve ser autorizada pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), que é o órgão responsável pela regulamentação da atividade seguradora no Brasil.

## B.6 Segurado

É a pessoa, física ou jurídica, titular do interesse segurado. É quem sofre o prejuízo econômico ou cuja integridade física é maculada em caso de ocorrência do sinistro.

## B.7 Taxa de Renovação

A taxa de renovação é a razão entre a quantidade de apólices renovadas e a quantidade de apólices que poderiam ser renovadas. No texto, essa grandeza é representada por  $R$ .

## B.8 Prêmio

Em geral, é quanto o tomador paga para que a seguradora o indenize em um eventual sinistro. O prêmio é em geral por uma vigência anual do seguro. Essa grandeza não considera os impostos. Neste texto, o valor do prêmio da apólice  $i$  é representado por  $p_i$ .

## B.9 Prêmio de Risco ou Prêmio Puro

Pode também ser chamado de prêmio matemático ou estatístico. É a quantia que a seguradora deve cobrar para cobrir os riscos. Se baseia no conceito de esperança matemática como preço justo de uma eventualidade. No presente texto, o prêmio de risco associado à apólice  $i$  é representado por  $s_i$ .

## B.10 Prêmio Ganho

É a parcela do prêmio referente ao período de tempo de risco já passado. É a principal medida de faturamento do mercado segurador.

## B.11 Classe de bônus

É a forma de classificar o segurado quanto ao número de suas renovações na companhia sem a ocorrência de sinistro. Quanto maior a classe de bônus, tipicamente menor é o prêmio de risco e, por consequência, menor o prêmio a ser cobrado.

## B.12 Sinistralidade

É um principais indicadores do mercado segurador. Esse índice é a razão entre o sinistro e o prêmio. Matematicamente temos:

$$\pi_j = \frac{\sum s_j}{\sum p_j}.$$

Considerando um conjunto ou lote de apólices, a sinistralidade desse grupo é:

$$\pi_{grupo} = \frac{\sum_{i \in grupo} s_i}{\sum_{i \in grupo} p_i}. \quad (B.1)$$

Essa definição é importante porque ela permite a ocorrência de subsídio cruzado, posto que o prêmio de uma apólice pode ser utilizada para pagar o sinistro de outra. Neste texto, a sinistralidade é denotada por  $\pi$ .

**B.13 Solvência**

Economicamente, solvência é o estado de uma pessoa jurídica que possui um ativo maior que seu passivo. Dessa forma, uma entidade é dita solvente quando apresenta a capacidade de cumprir seus compromissos financeiros com recursos próprios. No ramo de seguros, solvência é a capacidade de honrar todos os seus sinistros com os prêmio retidos. Matematicamente, uma seguradora  $C$  é solvente se:

$$\sum_{i \in C} p_i - \sum_{i \in C} s_i \geq 0. \quad (\text{B.2})$$



## Referências Bibliográficas

- [Prieto] Felipe Villarino Prieto. Precificação de Seguros de Automóveis. 2005. 70 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática em Finanças) - Universidade de São Paulo
- [Algencan] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt, "On Augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints", *SIAM Journal on Optimization* 18, pp. 1286-1309, 2007.
- [Emms07A] Emms, Paul, Haberman, Steven and Savoulli, Irene. Optimal Strategies for Premium Pricing in General Insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 40, No. 1, pp. 15-34, 2007 Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=961373>
- [Emms07B] Emms, Paul. Pricing General Insurance with Constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 40, No. 2, pp. 335-355, 2007
- [Emms06] Emms, Paul and Haberman, Steven. Optimal Management of an Insurer's Exposure in a Competitive General Insurance Market(August 10, 2006). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=988901>
- [Taylor] Taylor, G. C. Underwriting strategy in a competitive insurance environment. *Insurance: Mathematics and Economics*, 5(1), 59-77. 1986.
- [Nocedal] Nocedal J. and Wright S. J., *Numerical Optimization (Springer Series in Operations Research)*, Springer Verlag, 1999.
- [SASDoc] SAS INSTITUTE INC. SAS OnlineDoc®. Version 9.1.2, Cary, NC: SAS Institute Inc. 2004.
- [Denuit] Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S. & Walhin, J.-F. *Actuarial modelling of claim counts: risk classification, credibility and bonus-malus scales*. Wiley.2007.
- [Mendes] Mendes, João José de Souza. *Bases técnicas do seguro*. São Paulo: Editora. Manuais Técnicos de Seguros Ltda, 1977.
- [Florentino] Florentino, Américo Matheus. *Análise de balanço para companhias de seguros*. São Paulo: Editora Manuais Técnicos de Seguros, 1976.



- [Brockman] BROCKMAN, M.J. Statistical motor rating: making effective use of your data. [Oxford]: Institute of Actuaries. 70 p. 1992.
- [Hall] Hall, Robert E. *Microeconomia: princípios e aplicações*/Robert E. Hall, Marc Lieberman; tradução Luciana Penteado Miquelino; revisão técnica Carlos Roberto Martins Passos - São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003
- [SUSEP] SUSEP: Superintendência de Seguros Privados. Acessado em: 14/10/2008, disponível em: <http://www.susep.gov.br/>
- [Lester] Lester, R., "Discussion of 'Underwriting strategy in a competitive insurance environment' by G.C. Taylor", *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, vol. 5(1), pages 85-86, January. 1986.
- [Benjamin] Lester, B., "Discussion of 'Underwriting strategy in a competitive insurance environment' by G.C. Taylor", *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, vol. 5(1), pages 79-80, January. 1986.
- [Pentikäinen] Pentikäinen, B., "Discussion of 'Underwriting strategy in a competitive insurance environment' by G.C. Taylor", *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, vol. 5(1), pages 81-83, January.1986.
- [Churchill] Churchill JR, G.A., Peter, J.P.. *Marketing: Criando valor para os clientes*. São Paulo. Saraiva, 2003
- [Markowitz] Markowitz, Harry M.. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New Jersey, John Wiley & Sons, 1959.
- [Ekeland] Ekeland and Ghoussoub, Selected new aspects of the calculus of variations on the large, *Bull. AMS*. 39 (2) 2002, pag. 207- 265