

Matemática e algoritmos das dobras

Paulo Eduardo Azevedo Silveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Ciência da Computação**

Orientador: **Prof. Dr. José Coelho de Pina Jr.**

– São Paulo, fevereiro de 2007 –

Resumo

Origami computacional é um ramo recente da ciência da computação que estuda algoritmos eficientes para problemas envolvendo dobras. Esse ramo, essencialmente, nasceu há quase 15 anos com o trabalho de Robert J. Lang [46] em que métodos computacionais são empregados no auxílio do projeto de modelos de origami. Desde o trabalho de Lang, origami computacional tem crescido muito, devido ao esforço de vários pesquisadores [20].

Este texto trata de alguns aspectos matemáticos e algorítmicos de problemas envolvendo dobras. A relação entre as construções geométricas clássicas com régua e compasso e a geometria das construções com dobras é apresentada [26, 47], a complexidade computacional de alguns problemas relacionados é considerada [5, 10] e uma solução do problema de dobrar e cortar é descrita [9].

Abstract

Computational origami is a recent branch of computer science studying efficient algorithms for solving paper-folding problems. This field essentially began 15 years ago with Robert Lang's work on algorithmic origami design [46]. Since then the field of computational origami has grown significantly [20].

This text is concerned with some aspects of the underlying mathematics and algorithmic aspects of folding. The relationship between classical compass and straight-edge geometric constructions and paper folding is presented [26, 47], the computational complexity of some problems is considered [5, 10], and a solution to the one straight-cut problem is described [9].

Índice

Resumo	ii
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Construções geométricas	7
1.1 Modelo de Euclides	8
1.2 Modelo de dobras simples	11
1.3 Modelo de Huzita	13
1.4 Dobras binárias	21
1.5 Dobras racionais	24
1.6 Trisseção de ângulos	28
1.7 Duplicação de cubos	34
1.8 Modelo de Euclides com dobras	37
1.9 Modelo de dobras com régua e compasso	42
1.10 Raízes cúbicas com dobras	46
1.11 Equações cúbicas com dobras	50
2 Planaridade	55

2.1	Modelos retilíneos	56
2.2	Modelos planos	60
2.3	Mapas	64
2.4	Complexidade computacional	67
3	Moléculas	73
3.1	Orelha do coelho	74
3.2	Bomba d'água	75
3.3	Nesga	78
3.4	Moléculas compatíveis	80
3.5	União de moléculas compatíveis	82
4	Dobrar e cortar	89
4.1	Método do empacotamento de discos	91
4.2	Cobertura do polígono por discos	94
4.3	3-fendas e 4-fendas	95
4.4	Construção do diagrama	103
4.5	Planaridade do diagrama	108
4.6	Engorda	109
4.7	Complexidade do diagrama	110
5	Implementação do método do empacotamento de discos	111
5.1	Estruturas de dados	112
5.2	Cobertura do polígono por discos	116
5.3	3-fendas e 4-fendas	120
5.4	Orelha do coelho e nesga	127
5.5	Árvore de moléculas	129
5.6	Análise das heurísticas e resultados	131

6 Considerações finais	135
Referências Bibliográficas	141
Índice Remissivo	147

Lista de Figuras

1	Dobras do vale e da montanha.	2
2	Linha do vale e da montanha.	2
3	Um diagrama e o seu correspondente origami.	3
4	Processo de dobra de um mapa.	4
5	Exemplos de modelo plano e de não-plano.	5
6	Maneira de dobrar uma folha de papel quadrada de tal forma que com um apenas um corte obtém-se uma estrela.	5
1.1	Construção com régua e compasso E1.	9
1.2	Construção com régua e compasso E2.	9
1.3	Construção com régua e compasso E3.	9
1.4	Construção com régua e compasso E4.	10
1.5	Construção com régua e compasso E5.	10
1.6	Dobras para determinar o ponto central de um quadrado.	12
1.7	Processo de dobra através de dobras simples.	12
1.8	Operação com dobra O1.	14
1.9	Operação com dobra O2.	14
1.10	Tangentes a uma parábola através da operação O2.	15
1.11	Operação com dobra O3.	15

1.12	Operação com dobra O4.	16
1.13	Operação com dobra O5.	17
1.14	Intersecção entre uma linha e uma circunferência através da operação O5.	17
1.15	Operação com dobra O6.	18
1.16	Tangente à duas parábolas através da operação O6.	19
1.17	Tangente à duas parábolas com focos coincidentes.	19
1.18	Tangentes à duas parábolas com diretrizes coincidentes.	20
1.19	Operação com dobra O7.	21
1.20	Divisão de um quadrado em metades, quartos e oitavos.	21
1.21	Ilustração de como a partir de uma linha de comprimento r , em um quadrado de lado unitário, podem-se obter linhas de comprimento $r/2$ e $(1+r)/2$	22
1.22	Ilustração do processo de dobra de uma aproximação de $1/3$	25
1.23	Processo de dobra para obter $1/3$	25
1.24	Método das diagonais cruzadas.	27
1.25	Trisseção de Tsune Abe de um ângulo agudo.	30
1.26	Ilustração da correção do método de Abe.	31
1.27	Trisseção de Jacques Justin de um ângulo obtuso.	33
1.28	Ilustração de como a partir de ângulos θ e $r\theta$ podem-se obter os ângulos $r\theta/2$ e $(1+r)\theta/2$	34
1.29	Construção de $\sqrt[3]{2}$ de Peter Messer.	35
1.30	Simulação da construção E2 por dobras.	38
1.31	Simulação da construção E4 por dobras.	40
1.32	Idéia da redução da construção E5(O_1, O_2) à construção E4(O_1, l).	40
1.33	Circunferências no plano cartesiano.	41
1.34	Simulação da operação O2 com régua e compasso.	43
1.35	Simulação da operação O3 com régua e compasso.	44
1.36	Simulação da operação O4 com régua e compasso.	44

1.37	Simulação da operação O5 com régua e compasso.	45
1.38	Simulação da operação O7 com régua e compasso.	46
1.39	Construção de $\sqrt[3]{a/b}$ de Robert Geretschläger.	48
1.40	Parábolas usadas na solução da equação $x^3 = a/b$	49
1.41	Parábolas usadas na solução de equações cúbicas.	52
2.1	Exemplos de modelo plano e de não-plano.	55
2.2	Modelo retilíneo.	57
2.3	Modelo não-retilíneo.	57
2.4	Dobra de uma aresta prega.	58
2.5	(a) Modelo retilíneo em que a aresta prega uv e suas arestas adjacentes não são consecutivas. (b) Modelo retilíneo em que a aresta prega uv e suas arestas adjacentes são consecutivas.	59
2.6	Ilustração da demonstração do teorema de Maekawa.	61
2.7	Ilustração do teorema de Kawasaki.	62
2.8	Ilustração do teorema 2.8.	63
2.9	Diagrama que não corresponde a um modelo plano.	64
2.10	Exemplo de um mapa.	65
2.11	Dois mapas que não podem ser dobrados em um modelo plano através de dobras simples, mas podem ser dobrados em um modelo plano. Os números indicam a ordem em que as faces são sobrepostas.	65
2.12	Processo de dobra de um mapa através de dobras simples.	66
2.13	Diagrama da redução do problema PARTIÇÃO ao problema PLANAR.	69
2.14	Escada dobrada antes de passar pela moldura.	70
3.1	Orelha do coelho.	74
3.2	Um polígono e seu conjunto gerador.	75
3.3	Quadrilátero sem conjunto gerador.	75
3.4	Dois conjuntos geradores de um mesmo quadrilátero.	76

3.5	Molécula da bomba d'água.	77
3.6	Molécula da bomba d'água e conjunto gerador onde os vértices de tangência não coincidem com os pontos de intersecção.	77
3.7	Diagrama <i>nesga</i>	79
3.8	Nesga parece duas orelhas do coelho estendidas.	80
3.9	Molécula complexa de tamanho cinco.	80
3.10	(a) União de moléculas. (b) Vértices de tangência não coincidentes, desrespeitando a condição de Maekawa. (c) Vértices de tangência coincidentes, moléculas compatíveis.	81
3.11	Dois orelhas do coelho com discos geradores (a) não-coincidentes e (b) coincidentes.	82
3.12	Discos geradores coincidentes, moléculas compatíveis.	83
3.13	(a) União de duas orelhas do coelho. (b) União de uma orelha do coelho com uma nesga. (c) União de duas nesgas.	84
3.14	(a) União de uma molécula complexa e uma orelha do coelho. (b) Ponto da união que desrespeita a condição de Maekawa. (c) Alteração que torna o diagrama resultante em uma molécula.	85
3.15	União de uma molécula complexa e uma orelha do coelho.	86
4.1	Capa do livro de Kan Chu Sen e descrição do problema [18].	89
4.2	Maneira de dobrar uma folha de papel quadrada de tal forma que com um apenas um corte se obtém uma estrela.	90
4.3	(a) Um polígono e um empacotamento de discos. (b) Conjunto de polígonos induzidos pelo empacotamento.	91
4.4	Uma 3-fenda, uma 4-fenda e uma 6-fenda.	92
4.5	Induzindo triângulos e quadriláteros.	93
4.6	(a) Empacotamento de discos que cobre o triângulo e a margem do papel. (b) Extensão da cobertura da figura (a) em empacotamento com apenas 3-fendas e 4-fendas.	93
4.7	Cobrindo um vértice v	94

4.8	(a) Cobertura de aresta por um disco. (b) Quebra de disco que fazia intersecção.	95
4.9	Um disco tangente inválido.	95
4.10	Disco tangente a outros dois discos que produz uma 4-fenda e uma 5-fenda.	96
4.11	Disco interno tangente a três consecutivos não ajuda a eliminar a 7-fenda.	96
4.12	Inserção de um disco que não é tangente a três discos consecutivos.	97
4.13	Diagrama de Voronoi de 10 pontos.	98
4.14	Fenda e seu diagrama de Voronoi.	99
4.15	Disco internamente tangente a outros três.	100
4.16	APOLÔNIO pode ter até 8 soluções diferentes.	100
4.17	Fenda particionada.	102
4.18	Fenda particionada diferentemente da figura 4.17.	103
4.19	As moléculas induzidas pelas fendas são compatíveis.	103
4.20	Orientação inicial das futuras moléculas dentro de P e não possuem arestas de P , junto com a nomenclatura das arestas.	104
4.21	Grafo induzido pelos vértices que não satisfazem a condição do teorema de Maekawa da figura 4.20.	105
4.22	(a) Cortando em T_C para obter T_M . (b) Emparelhamento desejado.	106
4.23	Ilustração das três fases do método do empacotamento de discos do retângulo no centro do papel. (a) Cobertura inicial do polígono por discos. (b) Extensão da cobertura inicial por discos, gerando um empacotamento de discos onde toda fenda é uma 3-fenda ou 4-fenda. (c) Diagrama final obtido.	107
4.24	(a) Árvore de corte T_C . (b) Colando as arestas cortadas, percorrendo a árvore em pós-ordem: elas não se intersectam, permitindo a dobra.	108
4.25	Uma 4-fenda e sua versão engordada nos discos que cobrem arestas de P	109
5.1	Polígono P e papel R	112
5.2	A aresta alada modificada.	114
5.3	Um grafo planar com seus vértices, arestas e faces.	115

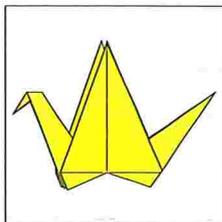
5.4	Cobertura inicial dos vértices.	116
5.5	Eliminação das intersecções em duas iterações.	117
5.6	Criação de fendas iniciais.	118
5.7	O disco O_2 será examinado para aumento de diâmetro antes do disco O_1 , se utilizada heurística da menor distância, e o contrário ocorrerá no caso de heurística da maior distância.	119
5.8	Cobertura do polígono através da heurística da menor distância e respectivas fendas iniciais.	119
5.9	Cobertura dos vértices pela heurística da maior distância e respectivas fendas iniciais.	120
5.10	Discos O e O' tangentes a três discos de centros colineares.	122
5.11	Uma 8-fenda e um disco para quebrá-la.	123
5.12	As três fendas novas criadas a partir da quebra da figura 5.11.	123
5.13	Quebra de todas as fendas sem utilizar heurística.	124
5.14	Empacotamento final utilizando heurística do maior disco.	125
5.15	Empacotamento final utilizando heurística do disco mediana.	125
5.16	Empacotamento final utilizando heurística dos maiores vizinhos.	126
5.17	Empacotamento final utilizando heurística dos menores vizinhos.	127
5.18	(a) Empacotamento sem heurística. (b) Empacotamento produzido pela heurística do disco mediana. (c) Empacotamento produzido pela heurística dos maiores vizinhos.	128
5.19	Moléculas construídas pelas fendas.	128
5.20	Grafo está desconexo para achar a árvore desejada.	130
5.21	Uma árvore de arestas T_C correspondente ao empacotamento da figura 5.13.	130
5.22	Diagrama antes e depois da troca de orientação de arestas de acordo com a árvore T_C da figura 5.21.	131
6.1	Estrela de quatro pontas.	137
6.2	A estrela de quatro pontas e três possíveis diagramas.	137

6.3	Empacotamento da estrela da figura 6.1, empacotando apenas a região do polígono, desconsiderando o papel.	138
6.4	Uma árvore e sua correspondente base.	139

Introdução

In recent years, origami has attracted the attentions of scientists and mathematicians, who have begun mapping the “laws of nature”, that underlie origami, converting words, concepts and images into mathematical expressions.

Origami design secrets
Robert J. Lang [48]



A mais conhecida e tradicional forma de dobradura é o *origami*. Origami é o nome dado à secular arte de dobrar um pedaço de material, tipicamente uma folha de papel quadrada, em formas visuais ou esculturais que representam uma grande variedade de modelos tais como aviões, barcos, animais, flores, insetos, pessoas etc [44, 55]. A palavra origami vem do japonês; *oru* significa dobrar e *kami* significa papel.

Acredita-se que origami exista desde da criação do papel na China há cerca de 2000 anos. No entanto, no Japão, o mais antigo texto que faz clara menção a origami é um poema de Ihara Saikaku de 1670 [43]. Na Europa, um desenho de um barco na edição de 1490 de “*Tractatus de Sphaera Mundi*,” escrito por Johannes de Sacrobosco, parece ser o de uma dobradura [43]. Mais sobre a fascinante história do origami, origem da palavra e várias referências podem ser encontradas, por exemplo, nas páginas na Internet mantidas por Eric M. Andersen [4], Hatori Koshiro [43] e David Mitchell [51].

A construção de um modelo de origami envolve um **processo de dobra** que consiste na realização de seqüência de dobras. Essas dobras são do “tipo” *vale* ou *montanha* (figura 1).

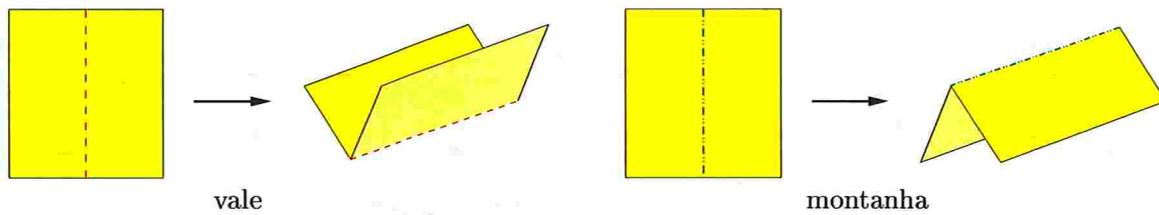


Figura 1: Dobras do vale e da montanha.

Por volta de 1950, o origamista Akira Yoshizawa utilizou uma notação para representar dobraduras que tornou-se padrão internacional [43]. Essa notação consiste de símbolos gráficos e diagramas (*crease patterns*). Nesses diagramas uma dobra do tipo vale é representada através de uma linha tracejada enquanto uma dobra do tipo montanha é representada através de uma linha com traços e pontos (figura 2).

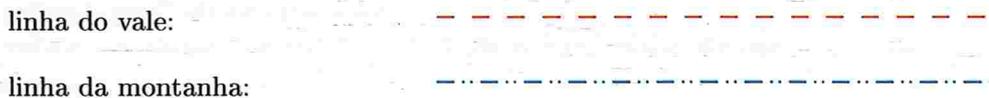


Figura 2: Linha do vale e da montanha.

A figura 3 mostra o diagrama de um modelo clássico de pássaro¹. No diagrama vemos as linhas do vale e da montanha indicando o local e tipo das dobras no modelo; os vincos de referência, muito úteis aos origamistas durante o processo de dobra, não são indicados no diagrama. Um diagrama é representação retilínea de um grafo planar² onde cada aresta é representada por um segmento de reta e os segmentos de reta só se intersectam em pontos que correspondem a vértices do grafo.

Vê-se que o diagrama não deixa evidente qual foi o processo de dobra, ou seja, não deixa evidente a seqüência das dobras que foram realizadas a fim de obter o modelo do pássaro.

Segundo Robert J. Lang [44], as relações entre origami e ciência ocorrem em vários níveis e incluem diversas áreas da ciência. Lang classifica essas relações em três categorias:

origami matemático : abrange a matemática que descreve as leis que regem as dobras;

¹Este é o conhecido *flapping bird*, não é o tradicional tsuru (*traditional crane*), que possui um par de dobras a mais.

²Um **grafo** é um objeto da forma (V, E) , onde V é um conjunto finito de elementos, chamados **vértices**, e E é um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V , chamados **arestas**.

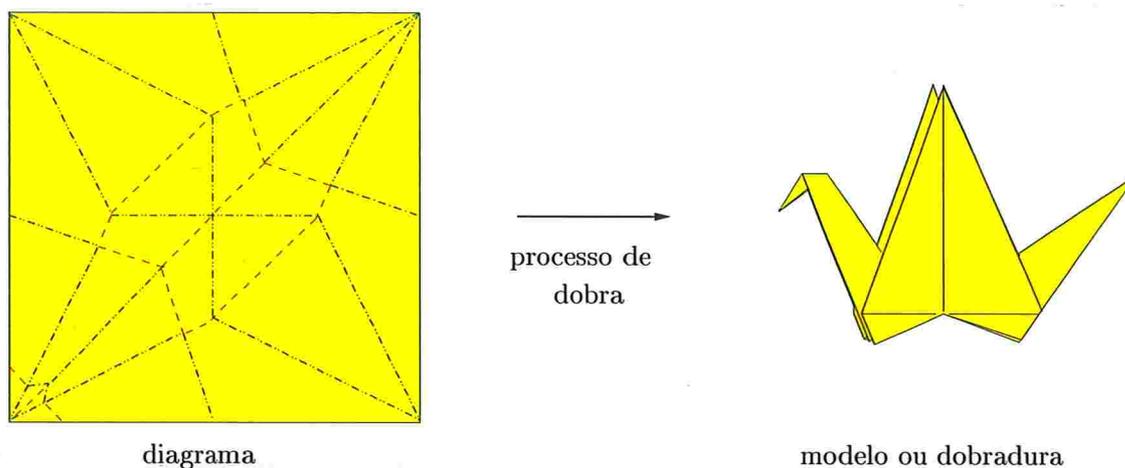


Figura 3: Um diagrama e o seu correspondente origami.

origami computacional : consiste em algoritmos e na teoria devotada à solução de problemas que envolvem dobras; e

origami tecnológico : trata das aplicações de dobras na solução de problemas que surgem em engenharia e na indústria.

Neste texto tratamos somente das duas primeiras categorias.

Inicialmente, no próximo capítulo, tratamos do origami matemático. Nesse capítulo são apresentadas as construções geométricas possíveis de serem feitas com determinado “modelo computacional” em que dobras são as operações elementares. A capacidade desse modelo computacional de dobras é então comparada à capacidade do conhecido modelo de Euclides das construções com régua e compasso. Em particular, nesse capítulo veremos que com dobras podemos realizar construções que são impossíveis de serem feitas com régua e compasso, como, por exemplo, a trisseção de um ângulo.

Em seguida, do capítulo 2 ao capítulo 5, o texto passa a considerar a segunda categoria de Lang, ou seja, origami computacional.

Origami computacional é um ramo recente da ciência da computação que estuda algoritmos eficientes para problemas envolvendo dobras. Esse ramo, essencialmente, nasceu há quase 15 anos com o trabalho de Robert J. Lang [46] em que métodos computacionais são empregados no auxílio do projeto de dobraduras. Desde o trabalho de Lang, origami computacional tem crescido muito, devido ao esforço de vários pesquisadores [20].

Segundo Erik D. Demaine e Martin L. Demaine [19, 20], a maioria dos resultados

em origami computacional podem ser classificados em três classes: algoritmos eficientes; resultados de intratabilidade; e resultados universais.

São considerados **algoritmos eficientes** aqueles cujo consumo de tempo cresce polinomialmente com o “tamanho da entrada”. Para alguns problemas de dobra o tamanho da entrada é o número de linhas de um dado diagrama. Por exemplo, existe um algoritmo eficiente para decidir se um **mapa**, ou seja, uma grade formada por linhas do vale e da montanha, pode ser dobrado numa seqüência de dobras “simples” [5] (figura 4). Isto é mostrado no capítulo 2.

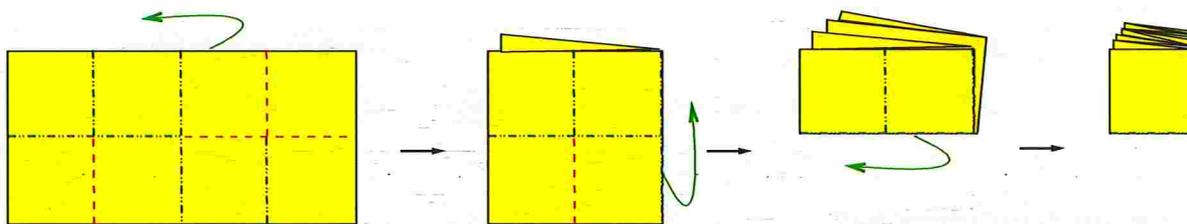


Figura 4: Processo de dobra de um mapa.

Resultados de **intratabilidade** mostram que para certos problemas de dobras não há, ou não se acredita que haja, algoritmo eficiente para resolvê-lo. Um exemplo desse tipo de resultado pode ser visto no capítulo 2. Nesse capítulo é demonstrado que decidir se um dado diagrama pode ser dobrado de tal forma que o modelo final esteja totalmente contido em um plano (figura 5) é uma tarefa computacionalmente não-trivial [8]. Mais precisamente, é demonstrado que esse problema é NP-completo. Intuitivamente, o fato desse problema ser NP-completo significa que à medida que o número de linhas do diagrama cresce, o problema torna-se rapidamente impraticável de ser resolvido por computador em uma quantidade de tempo razoável. Isso também significa que não há algoritmo eficiente para o problema, a menos que alguns dos problemas computacionais reconhecidamente difíceis possam ser resolvidos eficientemente [15, 25].

Nesse mesmo capítulo 2 também são demonstrados teoremas de Jun Maekawa e Toshikazu Kawasaki que descrevem condições necessárias para que a dobradura de um dado diagrama esteja contida em um plano [40].

São chamados de **resultados universais** aqueles em que, num determinado modelo computacional de dobra, tudo é possível. Por exemplo, todo pedaço de papel com um polígono desenhado sobre ele pode ser dobrado de maneira que com apenas um corte de

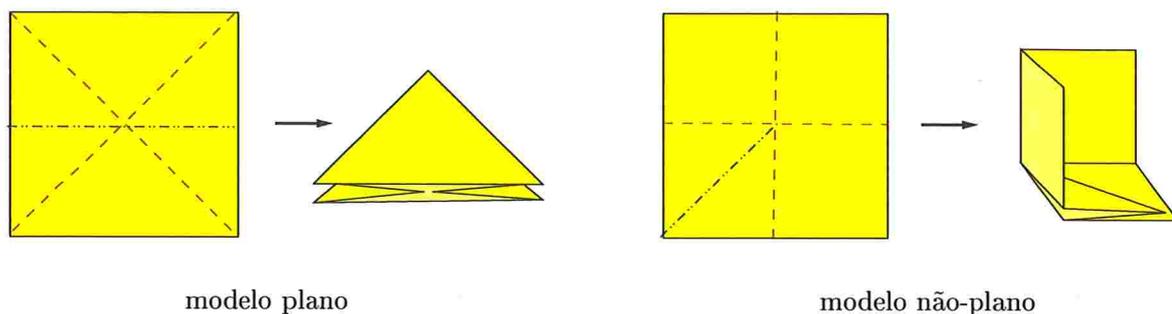


Figura 5: Exemplos de modelo plano e de não-plano.

tesoura em linha reta o polígono é separado do restante do papel (figura 6). Esse é o tópico central dos três últimos capítulos deste texto, onde o método de Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein e Barry Hayes [9] é apresentado e uma implementação deste é descrita. A implementação do método está disponível em

<http://jorigami.sourceforge.net/>.

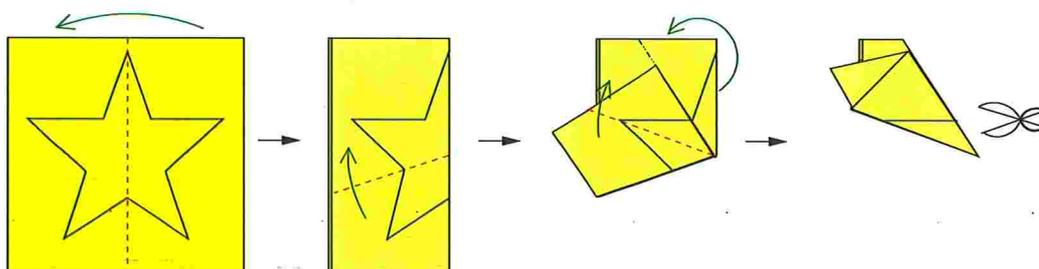


Figura 6: Maneira de dobrar uma folha de papel quadrada de tal forma que com um apenas um corte obtém-se uma estrela.

Este texto termina, no capítulo 6, com algumas observações e comentários.

Construções geométricas

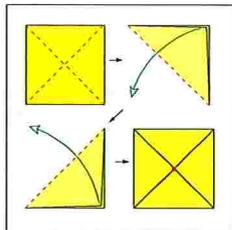
Listen to the paper.

Origami is collaboration of you and paper.

Be friends with paper, and paper will hear you.

Origami Tips

Hatori Koshiro [43]



São bem conhecidas as construções geométricas de Euclides que usavam como instrumentos régua e compasso. As regras dessas construções permitem desenhar arcos e transferir medidas com um compasso e traçar linhas¹ com uma régua. Apenas com esses instrumentos e regras, Euclides apresentou uma construção que resolveu o clássico problema de Apolônio proposto em 200 A.C., no qual são dadas três circunferências arbitrárias no plano e pede-se uma quarta circunferência que tangencie as três circunferências dadas.

Qualquer um que já dobrou um pedaço de papel percebeu que existem algumas formas de dobras que são básicas e naturais. Por exemplo, é natural fazer uma dobra a fim de obter-se um vinco que determina uma linha. Muitas dobraduras são tridimensionais, mas toda dobradura pode ser aberta e o que consideraremos neste capítulo é a geometria dos vincos obtidos no papel aberto, como em um diagrama. Apesar de muitas dobraduras serem obtidas a partir de um pedaço de papel quadrado ou retangular, para propósitos teóricos podemos considerar que o plano euclidiano está sendo dobrado.

Podemos enxergar ambos os tipos de construções como **modelos computacionais** que, como a tradicional máquina de Turing [25], têm o poder de computar certas funções e também têm suas limitações. Neste capítulo, pretendemos comparar essas duas “máquinas”, a saber, o **modelo de Euclides** das construções com régua e compasso e o **modelo**

¹Freqüentemente utilizamos a palavra linha indistintamente no sentido de reta, semi-reta, ou segmento de reta. O contexto deve deixar claro o significado. 7

de Huzita das operações por meio de dobras.

Primeiramente, na seção 1.1, são apresentadas as construções geométricas de Euclides. Se pretendemos comparar o modelo de Euclides e o modelo de Huzita, precisamos definir quais são as operações ou dobras permitidas. Nas seções 1.2 e 1.3, descrevemos as dobras permitidas no modelo de Huzita.

Na seção 1.4, vemos como um processo de dobra, que lembra o conhecido algoritmo de busca binária, é utilizado para construir razões da forma $a/2^n$, onde a e n são números inteiros positivos. Na seção seguinte, mostramos como uma extensão desse processo de dobra pode ser utilizada para construir qualquer número racional.

Mais adiante, nas seções 1.6 e 1.7, vemos como dois problemas clássicos da antigüidade, o problema da trisseção de um ângulo e duplicação do cubo, são resolvidos no modelo de dobras de Huzita.

Na seções 1.8 e 1.9, o modelo de Euclides é comparado ao modelo de Huzita. Em particular, veremos que todas as construções do modelo de Euclides podem ser simuladas pelas operações do modelo de Huzita, mas não vice-versa.

Finalmente, nas seções 1.10 e 1.11 veremos como as operações com dobras de Huzita podem ser empregadas na solução de equações cúbicas.

Este capítulo não tem pretensão de ser um texto completo sobre construções geométricas com dobras, mas sim apenas uma introdução. O texto mais completo que conhecemos sobre construções geométricas com dobras foi escrito por Robert Lang [47], onde várias referências podem ser encontradas. Roger C. Alperin [3] relaciona construções com origami e teoria de números.

Utilizaremos o verbo “traçar” para construções de Euclides e “dobrar” para operações com dobras.

1.1 Modelo de Euclides

Em geometria estudantes aprendem as **construções de Euclides** com régua e compasso [16]. A régua não possui marca alguma e admitimos que nos seja dado um comprimento unitário fundamental; alguma linha de comprimento unitário é conhecida.

Essas construções consistem numa seqüência finita das seguintes **construções elementares** de Euclides:

$E1(p_1, p_2)$: dados pontos não idênticos p_1 e p_2 , traçar uma linha passando por p_1 e p_2 (figura 1.1).

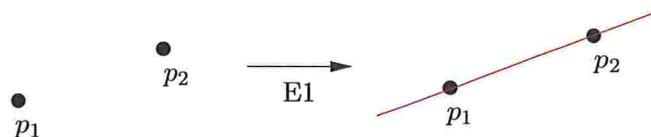


Figura 1.1: Construção com régua e compasso E1.

$E2(o, r)$: dados um ponto o e um segmento de reta de comprimento r , traçar uma circunferência $O = (o, r)$ de centro o e de raio igual a r (figura 1.2).

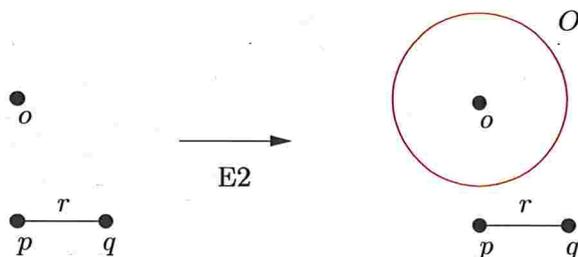


Figura 1.2: Construção com régua e compasso E2.

$E3(l_1, l_2)$: dadas duas linhas não paralelas, determinar o ponto de intersecção p entre l_1 e l_2 (figura 1.3).



Figura 1.3: Construção com régua e compasso E3.

$E4(O, l)$: dadas uma circunferência $O = (o, r)$ de centro o e raio r e uma linha l , determinar os pontos de intersecção entre O e l (figura 1.4).

$E5(O_1, O_2)$: dadas circunferências $O_1 = (o_1, r_1)$ e $O_2 = (o_2, r_2)$ não coincidentes, determinar os pontos de intersecção entre O_1 e O_2 (figura 1.5).

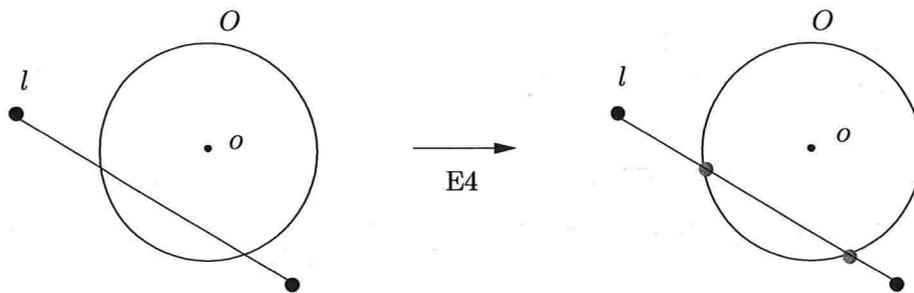


Figura 1.4: Construção com régua e compasso E4.

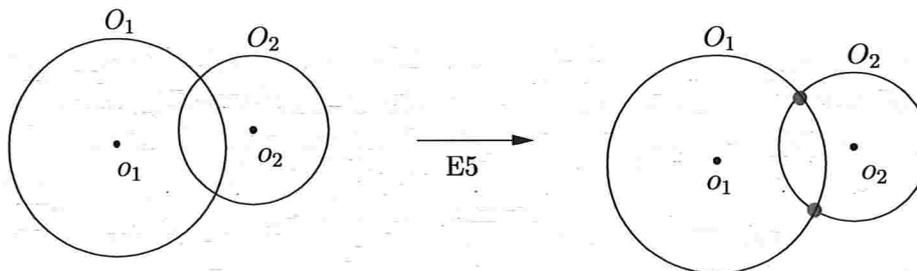


Figura 1.5: Construção com régua e compasso E5.

Um número real x é dito **construtível** no modelo de Euclides se, através do uso de apenas régua e compasso, podemos obter um segmento de reta de comprimento x .

Em problemas de construção geométrica são tipicamente dados segmentos de reta e procura-se um segmento de reta que satisfaça certas condições. Os segmentos de reta procurados podem ser lados de algum cubo, raio de alguma circunferência ou mesmo representar algum ponto. Problemas de construção geométrica podem ser formulados dessa maneira, mesmo aqueles que a primeira vista tenham aspecto aparentemente diferente [16]. Aqui estão alguns exemplos de problemas geométricos:

Problema APOLÔNIO(O_1, O_2, O_3): Dadas circunferências O_1, O_2 e O_3 , determinar as circunferências tangentes a O_1, O_2 e O_3 .

Problema RAIZ(l): Dado um segmento de reta l de comprimento a , construir um segmento de reta de comprimento \sqrt{a} .

Problema TRISSEÇÃO(l_1, l_2): Dados segmentos de reta $l_1 = ap$ e $l_2 = ab$, determinar um segmento de reta af tal que a medida do ângulo $\angle(f, a, b)$ seja $1/3$ da medida do ângulo $\angle(p, a, b)$.

Problema DUPLICA-CUBO(l): Dado um segmento l de comprimento a , construir um segmento de comprimento x tal que o cubo com arestas de comprimento x tem o dobro de volume do cubo com arestas de comprimento a .

Problema ENQUADRA-CÍRCULO(O): Dado um círculo $O = (o, r)$, construir um segmento de comprimento x tal que o quadrado de lado x tenha a mesma área de O .

Como foi mencionado no início deste capítulo, o problema APOLÔNIO pode ser resolvido através de uma seqüência de construções de Euclides. Também é bem sabida a solução do problema RAIZ pelas construções de Euclides. Já, como demonstrou Carl Friedrich Gauss aos 17 anos, o problema TRISSEÇÃO e o problema DUPLICA-CUBO, também chamado de **problema deliano**, não podem ser resolvidos utilizando-se apenas as construções de Euclides com régua e compasso.

Teorema 1.1 (Carl Friedrich Gauss): *Os problemas TRISSEÇÃO e DUPLICA-CUBO não admitem solução no modelo de Euclides.* ■

1.2 Modelo de dobras simples

No modelo de Euclides a entidade básica é o ponto; o conhecimento de pontos nos permite traçar retas e circunferências. Já no modelo de dobras, a entidade é a linha; vincos que são obtidos através de dobras. Parece ser razoável supormos que um vinco formando uma linha pode ser obtido por meio de uma dobra em qualquer lugar do plano.

Uma variação das idéias da seção anterior é o uso de dobras em papel para realizar construções geométricas. Dobrando-se um papel obtemos um vinco que determina uma linha. Dobrando-se duas vezes obtemos dois vincos que podem ser usados para determinar um ponto (figura 1.6).

Dobraduras podem ser bem complexas e conter dobras sofisticadas que inclusive devem ser realizadas simultaneamente, como, por exemplo, na conhecida rosa de Kawasaki [40]. O objetivo das construções geométricas com dobras é localizar pontos ou linhas no papel, na sua borda ou no seu interior, que satisfaçam alguma especificação geométrica. Esses pontos e linhas são chamados de **pontos e linhas de referência** e podem ser usados

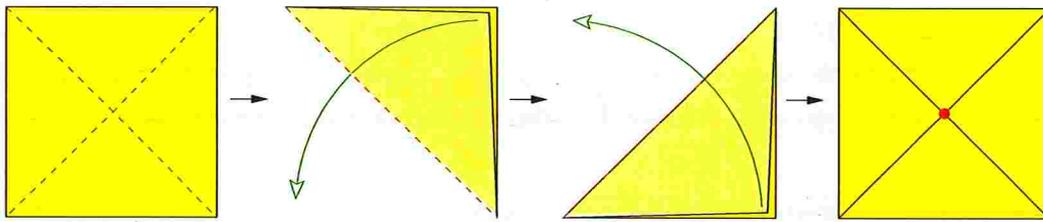


Figura 1.6: Dobras para determinar o ponto central de um quadrado.

pelos dobras subseqüentes. Assim, o **processo de dobra** consiste na realização de uma seqüência de dobras. Cada dobra é precisamente definida através do alinhamento de pontos ou linhas de referência no papel, que podem ser pontos, bordas, linhas vincadas ou intersecções de combinações destas.

Nas construções a seguir todas as dobras são **simples** (figura 1.7), ou seja, cada dobra é feita ao longo de um segmento de reta que liga as fronteiras do polígono plano determinado pelo estado corrente do papel.

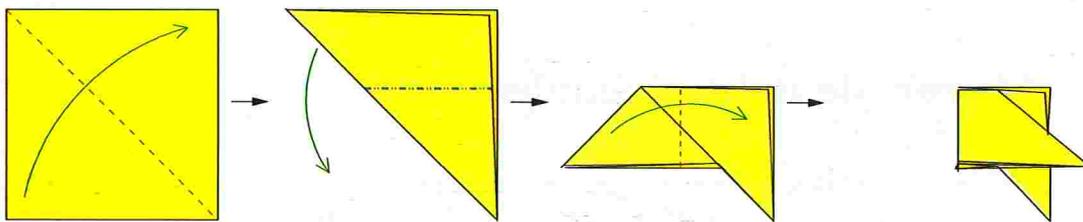


Figura 1.7: Processo de dobra através de dobras simples.

Neste capítulo estaremos implicitamente supondo que em construções com dobras:

- (1) todas as linhas são definidas por uma borda ou por um vinco sobre o papel;
- (2) todos os pontos são definidos pela intersecção de duas linhas;
- (3) todas as dobras devem ser unicamente definidas através do alinhamento de uma combinação de pontos ou linhas; e
- (4) todas as dobras são simples e planas.

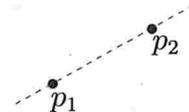
Apesar das dobras ilustradas neste texto mostrarem um quadrado representando um pedaço de papel, para nossos propósitos teóricos, podemos considerar que estamos dobrando o plano euclidiano infinito. Um número real x é dito **construtível** no modelo de dobras simples se, apenas com dobras simples, podemos construir um segmento de reta de comprimento x . Como no modelo de Euclides, aqui também admitimos que nos seja dado um comprimento unitário fundamental; alguma linha ou vinco de comprimento 1.

1.3 Modelo de Huzita

O matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita formulou uma lista de seis operações factíveis através de dobras simples [33, 36, 42]. Essas operações são conhecidas como **axiomas de Huzita**. Esses axiomas são, talvez, mais bem imaginados como operações que agem sobre pontos e linhas. Dado um conjunto de pontos ou linhas sobre um pedaço de papel ou plano, as **operações de Huzita** permitem que novas linhas sejam criadas e as intersecções entre as linhas velhas e novas definam novos pontos. Repetindo essas operações sobre o conjunto de linhas e pontos existente podemos obter ainda mais linhas e pontos.

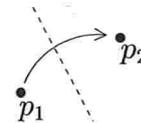
Por *dobrar X sobre Y* entendemos realizar uma dobra simples que coloca X sobre Y , onde X e Y são pontos ou linhas. As operações de Huzita são as seguintes:

O1(p_1, p_2): dados pontos p_1 e p_2 , fazer uma dobra passando por p_1 e p_2 .



Essa operação é claramente idêntica à construção E1.

O2(p_1, p_2): dados pontos p_1 e p_2 , dobrar p_1 sobre p_2 .



A operação O2(p_1, p_2) é semelhante à construção com régua e compasso em que a mediatriz do segmento p_1p_2 é obtida. A **mediatriz** de um segmento de reta p_1p_2 é a reta perpendicular ao segmento de reta p_1p_2 e que passa pelo seu ponto médio. Nesse

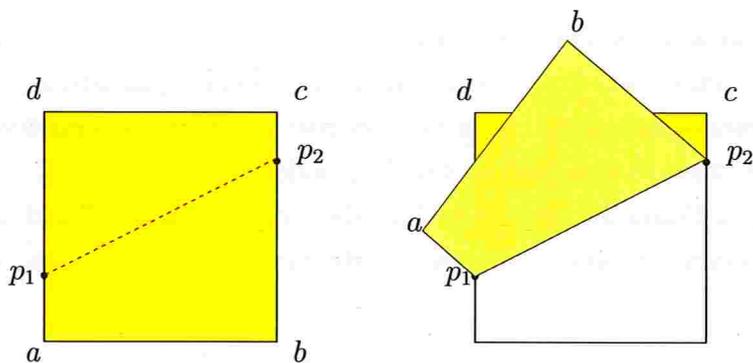


Figura 1.8: Operação com dobra O1.

caso, o vinco resultante da dobra é essa mediatriz. Vemos assim que mediatrizes são objetos elementares na geometria das dobras.

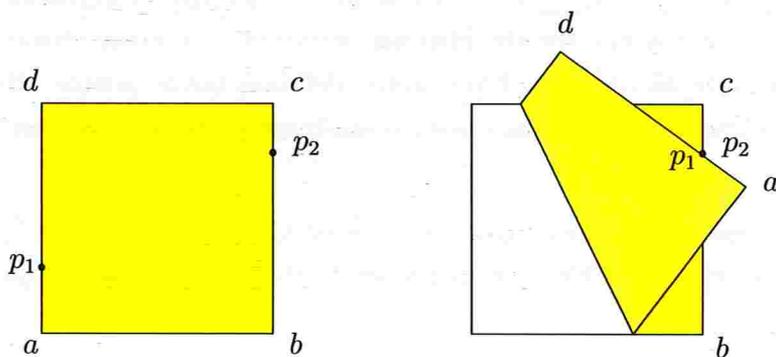


Figura 1.9: Operação com dobra O2.

Através da operação $O2(p_1, p_2)$ vemos que, dada uma linha l e um ponto p_1 fora de l podemos dobrar p_1 sobre qualquer ponto p_2 na reta l . Assim, o resultado de um número infinito de dobras de p_1 sobre pontos de l produz um conjunto de vincos que são as linhas mediatrizes desses segmentos. Essas linhas produzidas são precisamente o conjunto de tangentes à parábola que tem p_1 como foco e a linha l como diretriz (figura 1.10(a)). Uma **parábola** $P = (o, l)$ é o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto o dado, chamado de **foco**, e de uma reta l dada, chamada de **diretriz**.

Suponhamos que p_2 é um ponto de uma reta l e seja p_1 um ponto fora de l . Para verificarmos que o vinco t produzido pela operação $O2(p_1, p_2)$ é de fato tangente à parábola $P = (p_1, l)$, basta notarmos que o ponto determinado pela intersecção

entre t e a reta perpendicular a l passando por p_2 é o ponto da parábola ao qual t é tangente.

Assim vemos que parábolas, ou na verdade linhas tangentes às parábolas, têm um papel elementar na geometria das dobras.

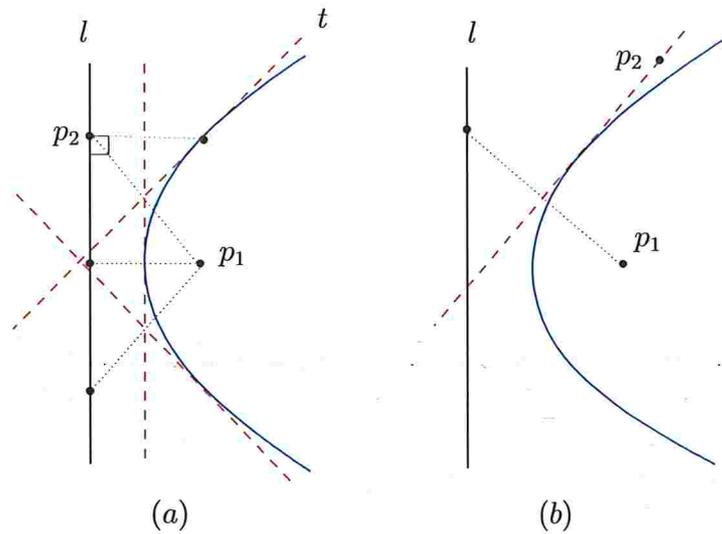


Figura 1.10: Tangentes a uma parábola através da operação O2.

O3(l_1, l_2): dadas linhas l_1 e l_2 , dobrar l_1 sobre l_2 .

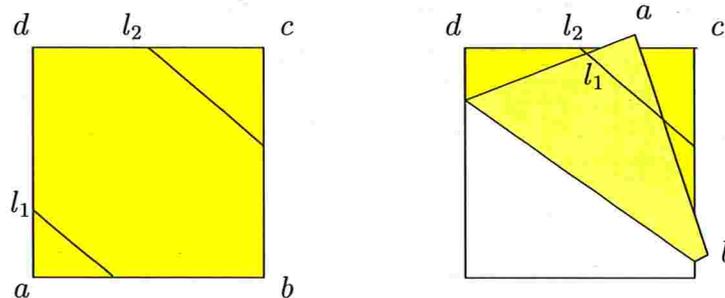
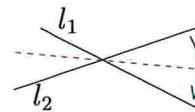
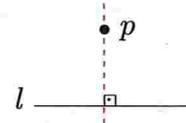


Figura 1.11: Operação com dobra O3.

Quando as linhas l_1 e l_2 têm intersecção, a operação O3(l_1, l_2) é idêntica à construção com régua e compasso em que a bissetriz de um ângulo é determinada. A **bissetriz**

de um ângulo $\angle(a, o, b)$ é linha oc tal que a medida dos ângulos $\angle(a, o, c)$ e $\angle(c, o, b)$ é a mesma, ou seja, a semi-reta “divide” o ângulo $\angle(a, o, b)$. A outra maneira de vermos a bissetriz é como sendo a linha formada pelos pontos que são equidistantes das linhas oa e ob . No caso da operação $O3(l_1, l_2)$, o vinco resultante da dobra é a bissetriz de um dos ângulos formados por l_1 e l_2 . Dessa forma vemos que bissetrizes também têm papel elementar na geometria das dobras. Se as linhas l_1 e l_2 são paralelas, então a operação $O3(l_1, l_2)$ produz a linha equidistante a l_1 e l_2 .

$O4(p, l)$: dados um ponto p e uma linha l , fazer uma dobra passando por p e perpendicular a l ;



De certa forma, esta operação é semelhante à construção com régua e compasso em que se determina a distância do ponto p à linha l .

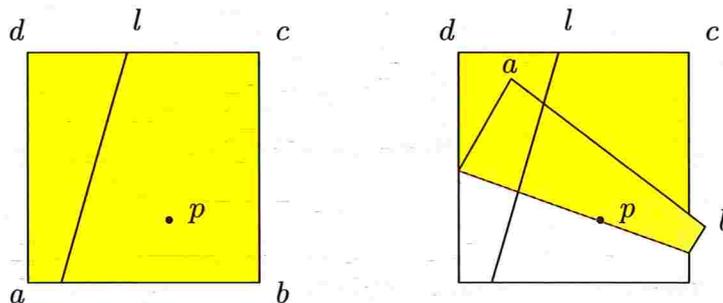
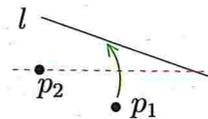


Figura 1.12: Operação com dobra $O4$.

$O5(p_1, p_2, l)$: dados pontos p_1 e p_2 e uma linha l , fazer uma dobra que passa por p_2 e coloca p_1 sobre l ;



O vinco resultante da operação $O5(p_1, p_2, l)$ é a linha que passa por p_2 e é tangente à parábola de foco p_1 e de diretriz l (figura 1.10(b)). Suponha que r é a distância entre os pontos p_1 e p_2 . Através da operação $O5(p_1, p_2, l)$ podemos determinar os dois pontos em l que estão à distância r de p_2 (figura 1.14). Assim, em outras palavras, através da operação $O5$ podemos determinar facilmente os pontos de intersecção entre uma linha e uma circunferência.

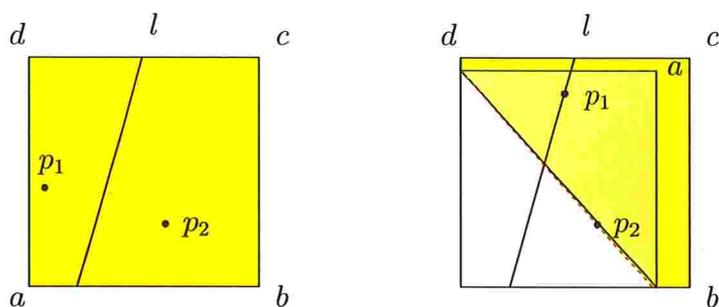


Figura 1.13: Operação com dobra O5.

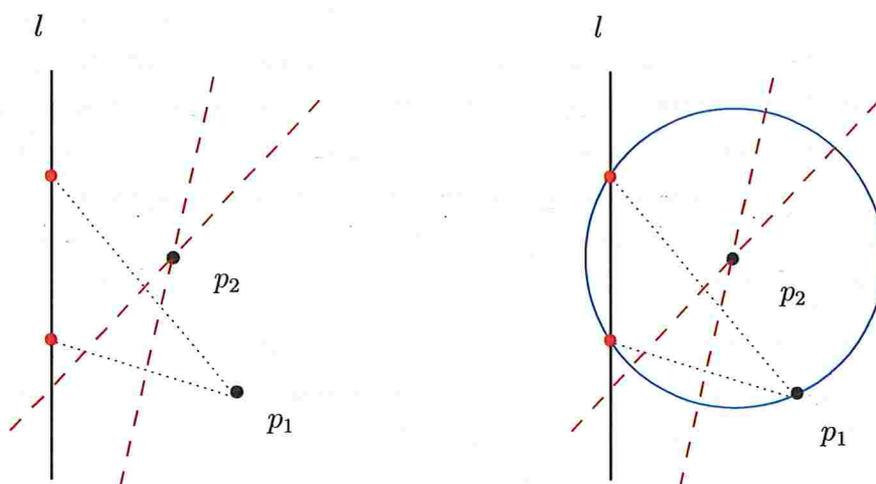


Figura 1.14: Intersecção entre uma linha e uma circunferência através da operação O5.

$O6(p_1, p_2, l_1, l_2)$: dados dois pontos p_1 e p_2 e linhas l_1 e l_2 , fazer uma dobra que coloca p_1 sobre l_1 e p_2 sobre l_2 .

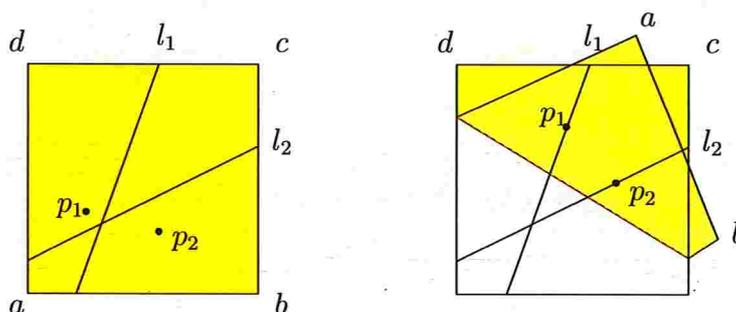
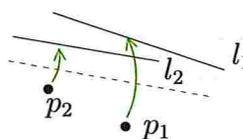


Figura 1.15: Operação com dobra O6.

O vinco resultante da operação $O6(p_1, p_2, l_1, l_2)$ é uma linha tangente às parábolas de foco p_1 e de diretriz l_1 e de foco p_2 e de diretriz l_2 (figura 1.16). A operação com dobra O6 é o que faz o modelo de dobras de Huzita fundamentalmente diferente do modelo das construções de Euclides. Essa operação não é possível para algumas configurações de pontos e linhas, e para outras configurações é possível de mais de uma maneira. Como veremos nas próximas seções, as construções de Euclides são equivalentes às operações com operações O1-O5, ou seja, todo número real construtível no modelo de Euclides é construtível no modelo de Huzita com as operações O1-O5 e vice-versa.

A operação O6, entretanto, permite construirmos números com dobras que não são possíveis com régua e compasso. As construções resultantes com dobras são similares àquelas utilizando uma régua “marcada” [26].

Não é surpreendente que as possibilidades com a operação O6 vão além das construções de Euclides, se considerarmos o seu significado analítico. É sabido que um par de cônicas (circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas), possuem, em geral, quatro tangentes. Se ambas as cônicas são parábolas, uma dessas tangentes é a linha no infinito. É portanto um problema cúbico determinar as tangentes comuns a duas parábolas, e não é de se esperar que um problema cúbico possa ser resolvido com as construções de Euclides.

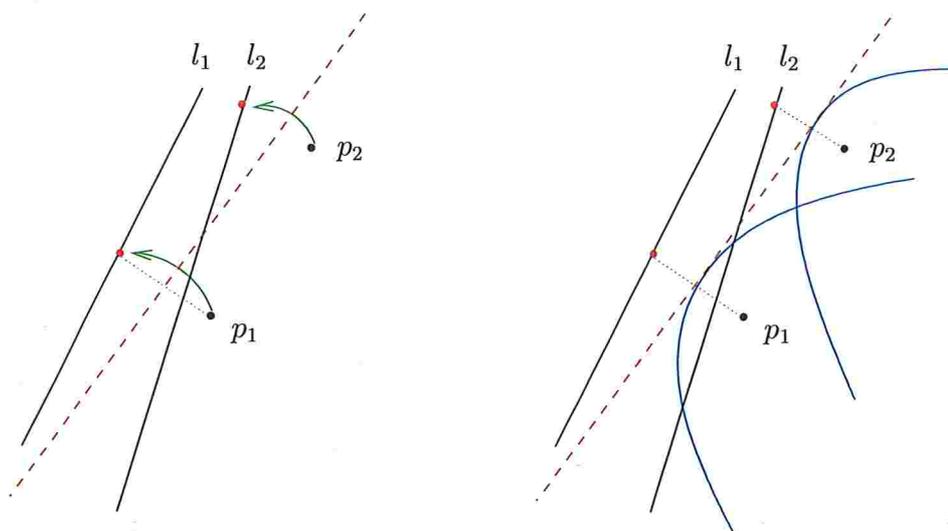


Figura 1.16: Tangente à duas parábolas através da operação O6.

Se os focos p_1 e p_2 são coincidentes, então a única tangente comum às parábolas é obtida dobrando esse ponto sobre o ponto de intersecção entre as linhas l_1 e l_2 (figura 1.17). Não é surpresa que exista somente uma única outra tangente comum às parábolas a ser encontrada, já que é sabido que focos comuns é equivalente a um par de tangentes complexas.

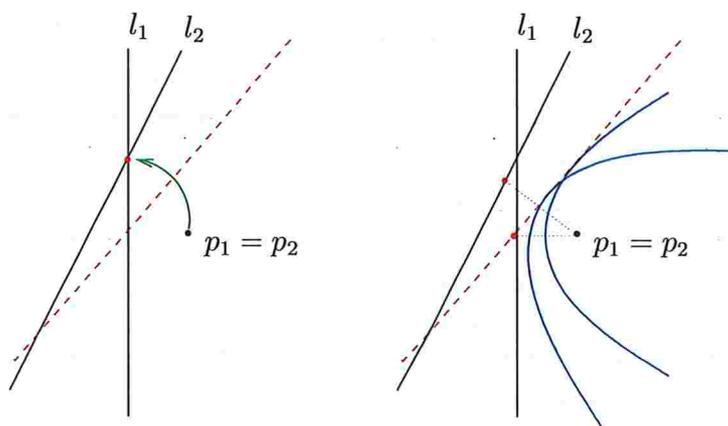


Figura 1.17: Tangente à duas parábolas com focos coincidentes.

Se as diretrizes l_1 e l_2 são coincidentes, as parábolas têm como tangente uma linha no infinito que as intersecta também no infinito. Esta tangente é dupla e há apenas duas outras tangentes a serem determinadas. Uma delas é a bissetriz entre diretriz

e a linha que liga os focos (figura 1.18(a)) e a outra tangencia cada parábola em um ponto (figura 1.18(b)). Nesse caso especial, as tangentes podem ser encontradas pelas construções de Euclides, já que analiticamente o problema é reduzido a um equação linear ou quadrática.

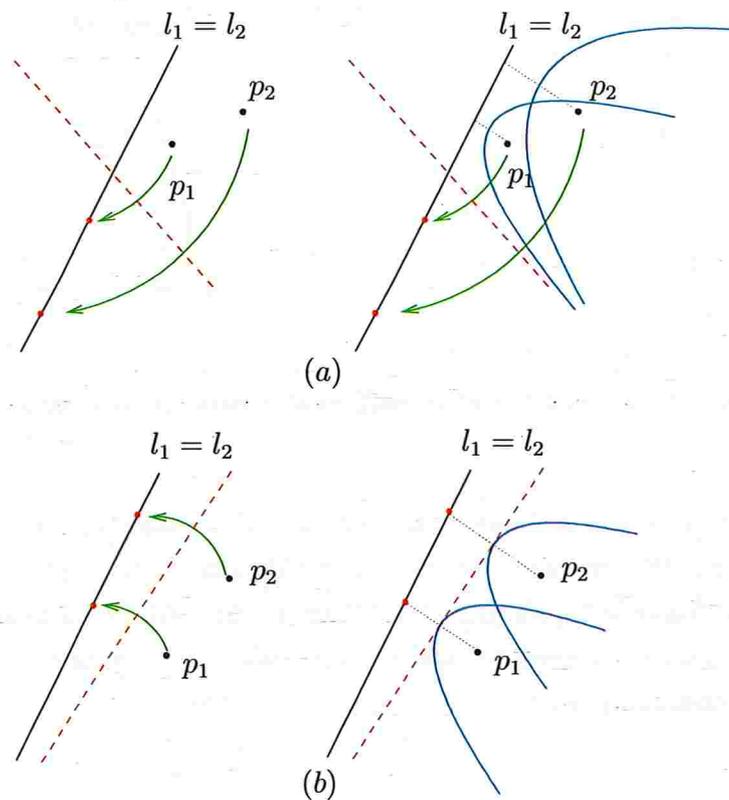
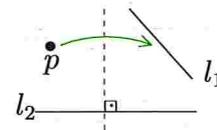


Figura 1.18: Tangentes às duas parábolas com diretrizes coincidentes.

Mais tarde, Koshiro Hatori [42] propôs ainda a seguinte operação simulada, que não é equivalente a nenhuma das operações O1–O6:

O7(p, l_1, l_2): dado um ponto p e duas linhas l_1 e l_2 , fazer uma dobra perpendicular a l_2 que coloca p_1 sobre l_1 .



As operações de Huzita-Hatori são completas no sentido de que estas são todas as operações que definem uma dobra simples através do alinhamento de pontos e linhas, como mostrou Robert J. Lang [47].

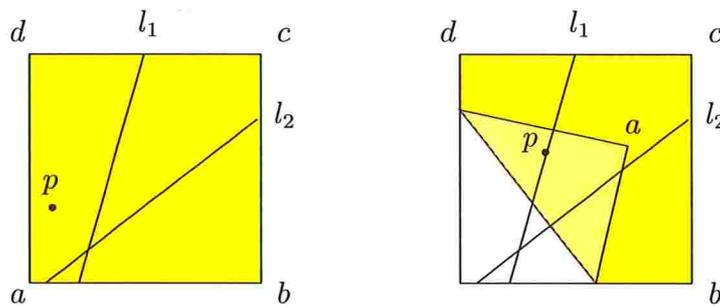


Figura 1.19: Operação com dobra O7.

A trisseção de um ângulo arbitrário, que é impossível de ser realizada com régua e compasso, além de factível através das construções de Huzita-Hatori [1, 23], é uma operação bem-conhecida e utilizada entre origamistas.

1.4 Dobras binárias

Uma das construções mais comuns em origami é dividir o lado de uma folha de papel quadrada em b partes iguais, onde b é um número inteiro positivo. A figura 1.20 mostra uma maneira muito conhecida de dividirmos o lado de um quadrado em b partes iguais quando b é uma potência de 2, ou seja $b = 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$. É evidente que esse método não se restringe a dividir o lado de um quadrado; a mesma estratégia pode ser utilizada para dividir um segmento de reta em b partes quando b é uma potência de 2. Nessa construção utilizamos repetidamente a operação O2. Esse método permite que dividamos

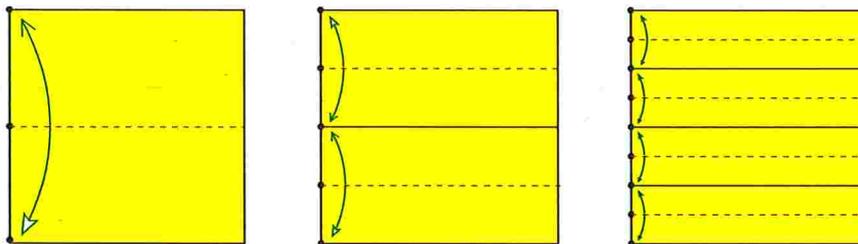


Figura 1.20: Divisão de um quadrado em metades, quartos e oitavos.

um segmento em proporções $1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n$, para qualquer inteiro n . Também é possível construir frações da forma $a/2^n$ para qualquer inteiro $a < 2^n$. O método requer $2^n - 1$ vincos no papel. Existe ainda um método para construir qualquer razão do tipo $a/2^n$

que utiliza um número muito menor de vincos. Esse método é o chamado de **algoritmo de dobra binária** (*binary folding algorithm*).

O algoritmo foi apresentado por James Brunton [13] e expandido por Lang [45]. Essa seção é baseada no manuscrito de Lang [47]. O algoritmo utiliza as duas dobras mostradas na figura 1.21. A figura mostra como dado um segmento construtível de comprimento r podemos, através de operações O2, obter segmentos de comprimento $r/2$ e $(1+r)/2$. Assim, por meio de uma método iterativo, que é semelhante ao conhecido algoritmo de busca binária, podem-se construir segmentos que têm comprimentos da forma $a/2^n$.

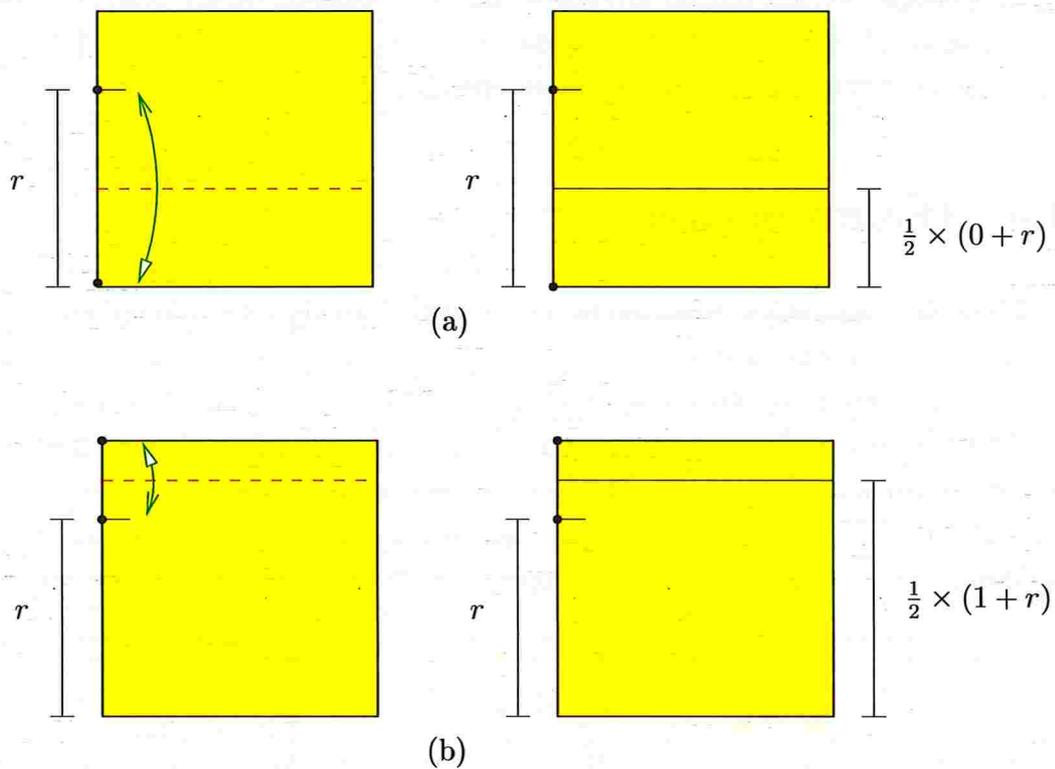


Figura 1.21: Ilustração de como a partir de uma linha de comprimento r , em um quadrado de lado unitário, podem-se obter linhas de comprimento $r/2$ e $(1+r)/2$.

O algoritmo de dobra binária considera a representação na base 2 da razão desejada; representação utilizando apenas os algarismos 0 e 1. Como exemplo consideremos a re-

apresentação binária de $23/32$:

$$\begin{aligned} \frac{23}{32} &= 0,11001 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{2} \times (1) \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

O algoritmo DOBRA-BINÁRIA recebe uma razão da forma $a/2^n$, $a < 2^n$ e descreve um processo de dobra que constrói uma linha de comprimento $a/2^n$ ao longo de um dos lados de um papel quadrado de lado unitário. As dobras utilizadas pelo algoritmo são as duas mostradas na figura 1.21 e o algoritmo usa o fato de que razões cujo denominador são potência de 2 possuem uma representação binária com um número finito de algarismos.

DOBRA-BINÁRIA (a, n)

- 1 Seja $0, b_1 b_2 \dots b_n$ a representação binária de $a/2^n$
- 2 $r \leftarrow 0$
- 3 **para** $i \leftarrow n$ **até** 1 **faça**
- 4 **se** $b_i = 1$
- 5 **então** dobre a razão $\frac{1}{2} \times (1 + r)$ ▷ figura 1.21(a)
- 6 $r \leftarrow \frac{1}{2} \times (1 + r)$
- 7 **senão** dobre a razão $\frac{1}{2} \times (0 + r)$ ▷ figura 1.21(b)
- 8 $r \leftarrow \frac{1}{2} \times (0 + r)$
- 9 Construímos uma linha de comprimento $r = a/2^n$

Suponhamos que $0, b_1 b_2 \dots b_n$ seja a representação binária da razão r dada. A correção do método é baseada na seguinte relação invariante:

após a k -ésima dobra vale que $r = 0, b_{n-k+1} b_{n-k+2} \dots b_n$.

Assim, após n dobras temos que $r = 0, b_1 b_2 \dots b_n$. Da correção do método temos o teorema a seguir.

Teorema 1.2 (da dobra binária): *No modelo de dobras de Huzita podemos construir razões da forma $a/2^n$, onde a e n são números inteiros não-negativos.* ■

O número de vincos utilizados para obtermos uma dada razão é uma certa medida da complexidade do processo de dobra. Essa medida é relevante do ponto de vista prático e é chamada de **posto** do processo de dobra. Assim, o posto do processo produzido pelo

algoritmo DOBRA-BINÁRIA é n ; que é muito menor do que o posto $2^n - 1$ do processo de dobra produzido pelo método óbvio do começo desta seção.

Dada um número real x , não necessariamente da forma $a/2^n$, podemos obter uma aproximação r de x tão próxima quanto desejarmos, através de uma variante do algoritmo DOBRA-BINÁRIA. O algoritmo a seguir recebe números x e ϵ e obtém uma linha de comprimento r ao longo do lado do quadrado com $|x - r| < \epsilon$.

DOBRA-BINÁRIA-APROX (x, ϵ)

- 1 Seja $0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ a representação binária de x tal que $1/2^{n+1} \leq \epsilon < 1/2^n$
- 2 $r \leftarrow 0$
- 3 **para** $i \leftarrow n$ **até** 1 **faça**
- 4 **se** $b_i = 1$
- 5 **então** dobre a razão $\frac{1}{2} \times (1 + r)$ ▷ figura 1.21(a)
- 6 $r \leftarrow \frac{1}{2} \times (1 + r)$
- 7 **senão** dobre a razão $\frac{1}{2} \times (0 + r)$ ▷ figura 1.21(b)
- 8 $r \leftarrow \frac{1}{2} \times (0 + r)$
- 9 Construímos uma linha de comprimento $r = a/2^n$ tal que $|r - x| < \epsilon$

O posto do processo de dobras produzido pelo algoritmo DOBRA-BINÁRIA-APROX é não superior a

$$\left\lceil \lg \frac{1}{\epsilon} \right\rceil,$$

onde \lg denota o logaritmo na base 2. A figura 1.22 mostra o processo de dobra produzido pelo algoritmo DOBRA-BINÁRIA-APROX para aproximar $1/3$. O valor $1/3$ tem $0,010101\dots$ como representação binária. O valor da aproximação obtida é $21/64$ que tem representação binária $0,010101$ e tem representação decimal $0,328125$.

1.5 Dobras racionais

Não podemos construir uma razão como $1/3$ através de dobras binárias. No entanto, o processo de dobra que é mostrado na figura 1.23 obtém $1/3$ e é bem conhecido entre os origamistas. Esse é um exemplo de uma construção mais geral conhecida como **método das diagonais cruzadas** [45] (*crossing diagonals method*) que podemos aplicar para obter qualquer razão da forma a/b onde a e b são números inteiros positivos, $a \leq b$ e b não é necessariamente uma potência de 2, como exigido na seção anterior.

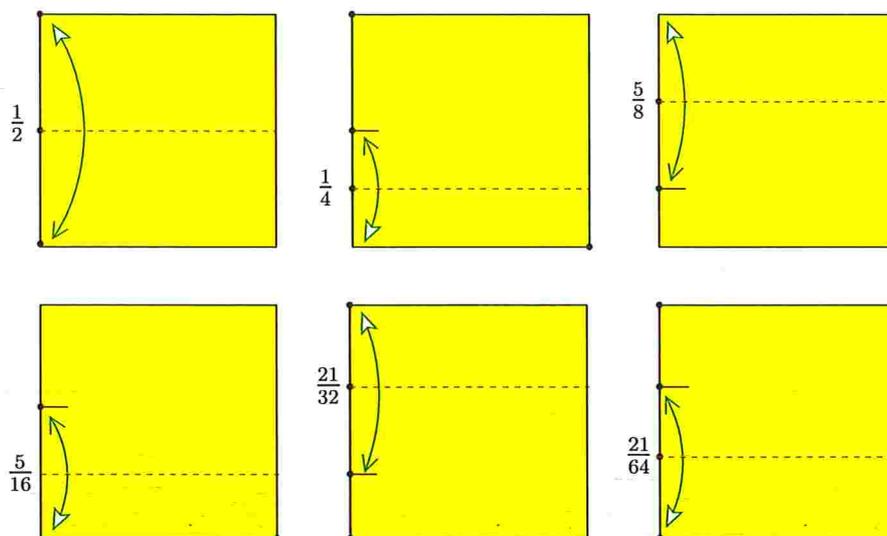


Figura 1.22: Ilustração do processo de dobra de uma aproximação de $1/3$.

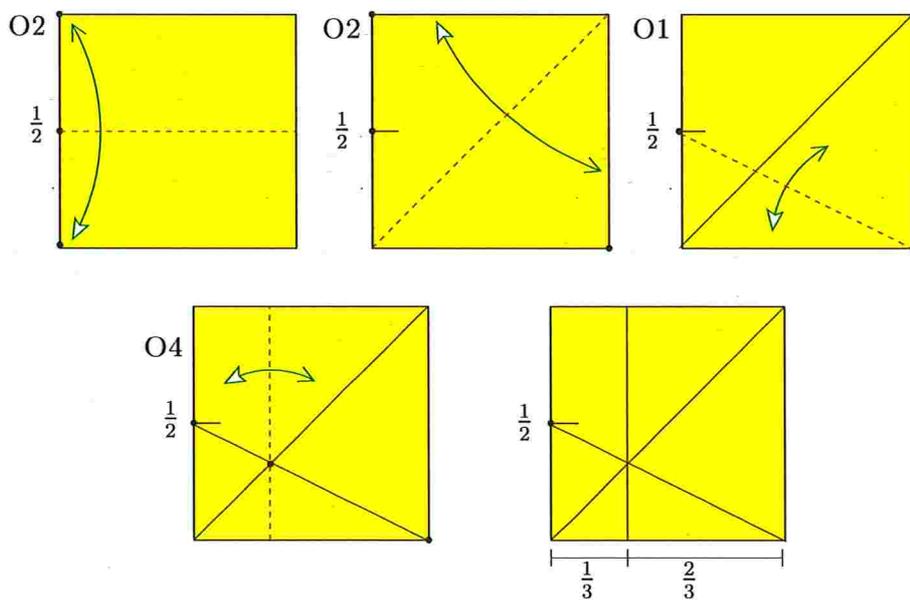


Figura 1.23: Processo de dobra para obter $1/3$.

A seguir descreveremos o **método das diagonais cruzadas**, mas antes de prosseguir gostaríamos de mencionar que além desse método há outras construções que através de dobras produzem todos os números racionais. Entre estas temos a construção de:

- Shuzo Fujimoto e M. Nishiwaki [22] que, segundo Robert J. Lang [47], foi independentemente redescoberta pela geómetra Jeannine Mosely;
- Masamichi Noma [52]; e
- Kazuo Haga [35, 39, 40].

Todos esses métodos estão descritos no texto *Origami and geometric constructions* escrito por Robert J. Lang [47].

Passamos a descrever o método das diagonais cruzadas. Considere o processo de dobra mostrado na figura 1.24. Começamos com um papel quadrado de lado unitário com dois pontos p_1 e p_2 nas laterais do papel. Esses pontos determinam segmentos de reta de comprimentos w e x ao longo das laterais do quadrado, como mostrado na figura. Inicialmente, vincamos uma das diagonais do papel. Em seguida, ligamos os pontos p_1 e p_2 através de um vinco. A intersecção dos dois vincos determina um novo ponto o , cuja projeção ortogonal em qualquer aresta do quadrado determina comprimentos y e $z = 1 - y$. Assim temos que

$$y = \frac{w}{1 + w - x} \quad \text{e} \quad z = \frac{1 - x}{1 + w - x}.$$

Para construirmos uma dada razão a/b , inicialmente obtemos razões da forma

$$w = \frac{a}{p} \quad \text{e} \quad x = \frac{p + a - b}{p},$$

onde p é uma potência de 2, $p \geq a$ e $p \geq b - a$ que, portanto, são relativamente fáceis de serem construídas através de dobras binárias. Dessa maneira, teremos que

$$\begin{aligned} y &= \frac{w}{1 + w - x} \\ &= \frac{a/p}{1 + a/p - (p + a - b)/p} \\ &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

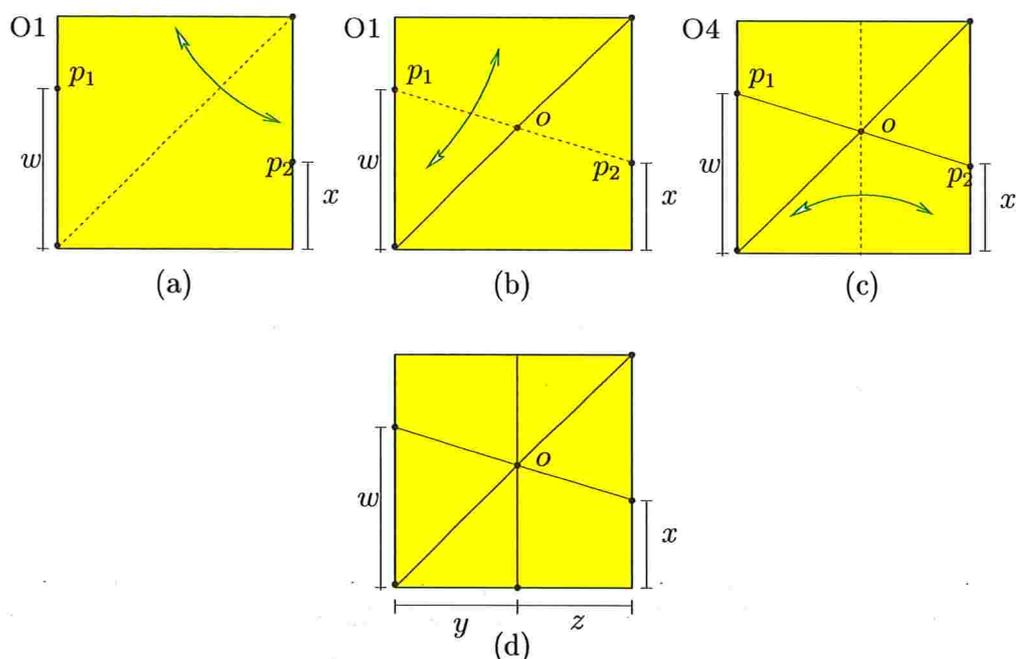


Figura 1.24: Método das diagonais cruzadas.

Por exemplo, se $a = 1$ e $b = 3$, então $p = 2$, $w = 1/2$ e $x = (p + a - b)/p = 0/2 = 0$, que nos remete ao processo de dobra mostrada na figura 1.23 para obtermos $1/3$.

O algoritmo DIAGONAIS-CRUZADAS recebe uma razão a/b onde a e b são inteiros positivos, $1 \leq a \leq b$ e produz um processo de dobra que obtém um segmento de comprimento a/b .

DIAGONAIS-CRUZADAS (a, b)

- 1 $p \leftarrow$ a menor potência de 2 tal que $p \geq a$ e $p \geq b - a$
- 2 $w \leftarrow a/p$ $x \leftarrow (p + a - b)/p$
- 2 Aplique DOBRA-BINÁRIA(w) para obter um ponto p_1 ▷ figura 1.24(a)
- 3 Aplique DOBRA-BINÁRIA(x) para obter um ponto p_2 ▷ figura 1.24(a)
- 4 Dobre a diagonal ▷ figura 1.24(a)
- 5 Dobre uma linha ligando os pontos p_1 e p_2 ▷ figura 1.24(b)
- 6 $o \leftarrow$ ponto de intersecção entre os vincos da diagonal e o segmento p_1p_2
- 7 Dobre uma linha passando por o e perpendicular a um dos lados ▷ figura 1.24(c)
- 8 Construimos a/b no lado do papel ▷ figura 1.24(d)

A tabela abaixo mostra algumas razões e os valores utilizados para obtê-las por meio de dobras e o posto do processo de dobra.

a/b	p	w	x	posto
1/3	2	1/3	0	4
1/5	4	1/4	0	5
1/6	8	1/8	3/8	9
1/7	8	1/8	1/4	8
2/7	8	1/4	3/8	8
3/7	4	3/4	0	5
1/9	8	1/8	0	6
2/9	8	1/4	1/8	8
4/9	8	1/2	3/8	7
1/10	16	1/16	7/16	11
3/10	8	3/8	1/8	9

O teorema a seguir resume o conteúdo desta seção.

Teorema 1.3 (da dobra racional): *No modelo de dobras de Huzita podemos construir razões da forma a/b , onde a é um número inteiro não-negativo e b é um número inteiro positivo.* ■

1.6 Trisseção de ângulos

Todo número construtível através das operações de Euclides pode ser escrito em termos da solução de uma equação do segundo grau [32, 16]. Dado um conjunto de linhas é possível, com régua e compasso, obter segmentos de reta que têm como comprimentos qualquer combinação linear ou raiz quadrada dos comprimentos das linhas dadas. Logo, com as construções de Euclides é possível “resolver” equações que podem ser reduzidas a equações quadráticas cujos coeficientes são comprimentos construtíveis.

Já o problema

Problema TRISSEÇÃO(l_1, l_2): Dados segmentos de reta $l_1 = ap$ e $l_2 = ab$, determinar um segmento de reta af tal que a medida do ângulo $\angle(f, a, b)$ seja $1/3$ da medida do ângulo $\angle(p, a, b)$.

exige a solução de uma equação cúbica e não pode ser resolvido utilizando-se apenas as construções de Euclides [32, 16]. No entanto, ele pode ser resolvido através das operações de Huzita e é uma construção bem conhecida e utilizada pelos origamistas. De fato, existem diferentes processos de dobra para se trissecar um ângulo. Um processo para se trissecar um ângulo agudo foi elaborado pelo matemático e origamista japonês Tsune Abe [1, 23]. Esse processo é ilustrado na figura 1.25.

O algoritmo ABE recebe três pontos p , a e b em um papel quadrado, sendo que o ângulo $\angle(p, a, b)$ é agudo. Por conveniência supomos que ab é o lado inferior do papel e p um ponto em algum outro lado (figura 1.25(a)). O algoritmo produz um processo de dobra que trisseca o ângulo $\angle(p, a, b)$.

ABE (p, a, b)

- | | | |
|---|--|------------------|
| 1 | Dobre uma linha qualquer ef paralela ao lado ab . | ▷ figura 1.25(b) |
| 2 | Dobre ab sobre ef e desdobre obtendo o vinco gh | ▷ figura 1.25(c) |
| 3 | Dobre e sobre ap e a sobre gh . | ▷ figura 1.25(d) |
| 4 | Na dobradura resultante dobre a sobre e e desdobre. | ▷ figura 1.25(e) |
| 5 | Desdobre a dobra feita na linha 2. | ▷ figura 1.25(f) |
| 6 | Faça uma dobra passando por a e o . | ▷ figura 1.25(g) |
| 7 | Dobre ab sobre aq . | ▷ figura 1.25(h) |
| 8 | Os vincos aq e ar trissecam o ângulo $\angle(p, a, b)$. | ▷ figura 1.25(i) |

A correção do método de Abe está ilustrada na figura 1.26. Primeiramente, notemos que os triângulos $\triangle(a, a', g'')$ e $\triangle(a', a, g)$ são congruentes pelo critério LLL (Lado, Lado, Lado) (figura 1.26(b)). Na dobra feita na linha 3 os segmentos ag e $a'g'$ são sobrepostos assim como os segmentos og e og' . Logo os segmentos ag e $a'g'$ têm o mesmo comprimento e os segmentos og e og' têm o mesmo comprimento. Portanto, novamente pelo critério LLL, temos que os triângulos $\triangle(a, a', g'')$ e $\triangle(a, a', g')$ são congruentes (figura 1.26(b)).

Devido à dobra feita na linha 4 do algoritmo temos que os segmentos $e'g'$ e $g'a'$ têm o mesmo comprimento e os $\angle(e', g', o)$ e $\angle(a', g', o)$ são ambos retos (figura 1.26(c)). Portanto os triângulos $\triangle(a, a', g')$ e $\triangle(e', a, g')$ são congruentes pelo critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).

Finalmente, da congruência dos triângulos $\triangle(e', a, g')$, $\triangle(a', a, g')$ e $\triangle(a', a, g'')$ (figura 1.26(d)) temos que os ângulos $\angle(e', a, g')$, $\angle(a', a, g')$ e $\angle(a', a, g'')$ são iguais e portanto fazem uma trisseção de ângulo $\angle(e', a, g'')$ que é igual ao ângulo $\angle(p, a, b)$. Com isso

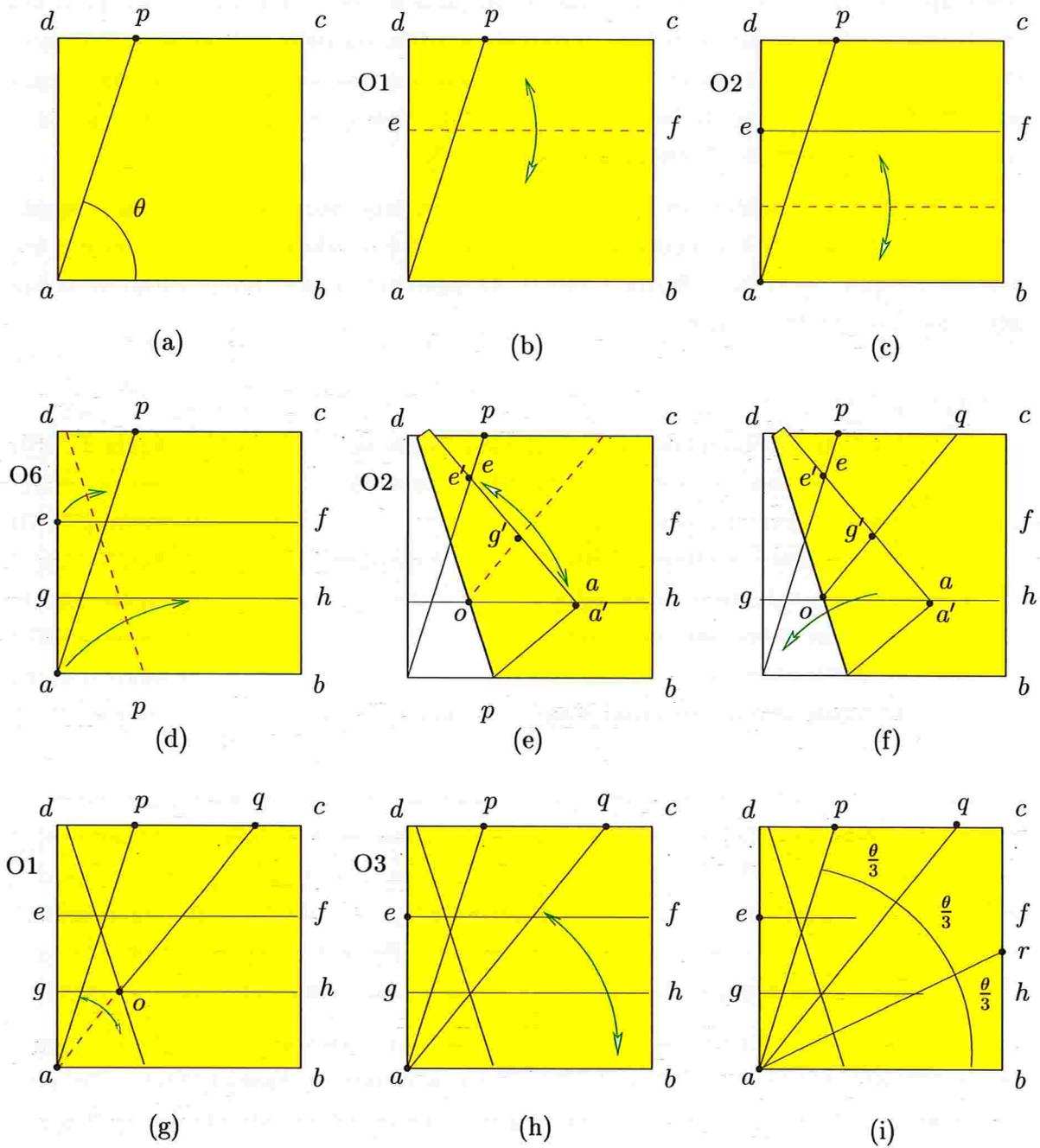


Figura 1.25: Trisseção de Tsune Abe de um ângulo agudo.

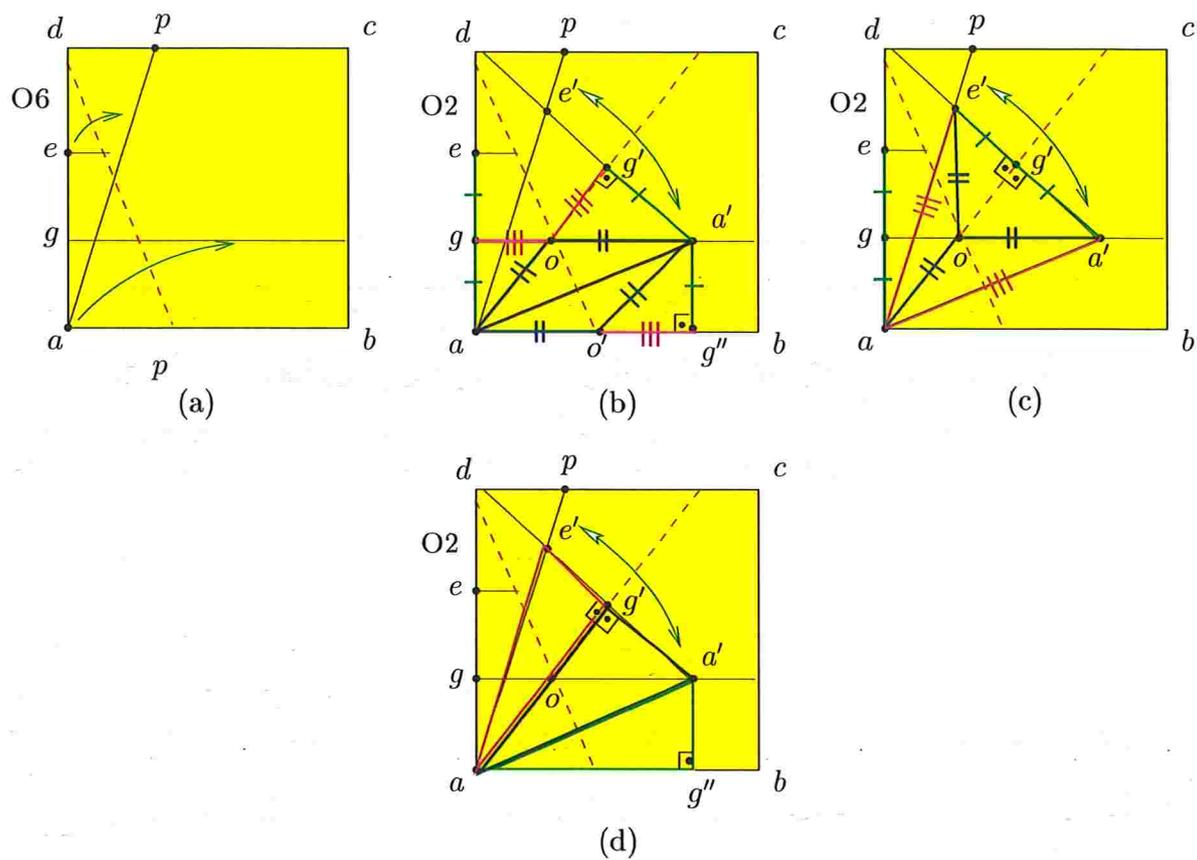


Figura 1.26: Ilustração da correção do método de Abe.

encerramos a verificação da correção do algoritmo ABE.

Um processo de dobra para trissecar um ângulo obtuso foi projetado pelo origamista e matemático francês Jacques Justin [37]. Esse processo está ilustrado na figura 1.27. No processo de Justin não é utilizado o canto do papel. Tanto no método de Abe quanto no de Justin o alinhamento simultâneo de dois pontos em duas linhas, a operação O6 de Huzita, é fundamental para o processo. O algoritmo JUSTIN recebe três pontos p, o e q em um papel quadrado, sendo que o ângulo $\angle(p, o, q)$ é obtuso (figura 1.25(a)). O algoritmo produz um processo de dobra que trisseca o ângulo $\angle(p, o, q)$.

JUSTIN (p, o, q)

- 1 Faça uma dobra passando por o e q produzindo o ponto a ▷ figura 1.27(b)
- 2 Faça uma dobra passando por o e p produzindo o ponto b ▷ figura 1.27(c)
- 3 Faça uma dobra passando por o e perpendicular a eq produzindo o ponto c ▷ figura 1.27(d)
- 4 Marque pontos r e s sobre pf tal que so e ro têm o mesmo comprimento ▷ figura 1.27(e)
- 5 Faça uma dobra que coloca s sobre ao e r sobre oc ▷ figura 1.27(f)
- 6 Faça uma dobra passando por o e perpendicular a de produzindo o ponto f ▷ figura 1.27(g)
- 7 Dobre of sobre op produzindo o ponto g ▷ figura 1.27(h)
- 8 Os segmentos of e og trissecam o ângulo $\angle(p, o, q)$ ▷ figura 1.27(i)

Resumindo o conteúdo desta seção temos o teorema a seguir.

Teorema 1.4 (da trisseção): *O problema TRISSEÇÃO admite solução no modelo de dobras de Huzita.* ■

Combinando a bisseção e trisseção de ângulos podemos dividir ângulos em qualquer número da forma $2^n 3^m$ de ângulos iguais, onde n e m são números inteiros não-negativos e pelo menos um é não-nulo. Assim, utilizando-se dobraduras podemos dividir um dado ângulo em 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, ... ângulos iguais. Isso também implica que polígonos regulares com um número de lados da forma $2^n 3^m$ podem ser obtidos através de dobras. Robert J. Lang [47] cita outras famílias de divisões de ângulos com dobraduras que foram projetadas pelo matemático austríaco Robert Geretschläger [26, 27, 28, 29].

Finalmente, terminamos esta seção mencionando que um processo de dobra semelhante

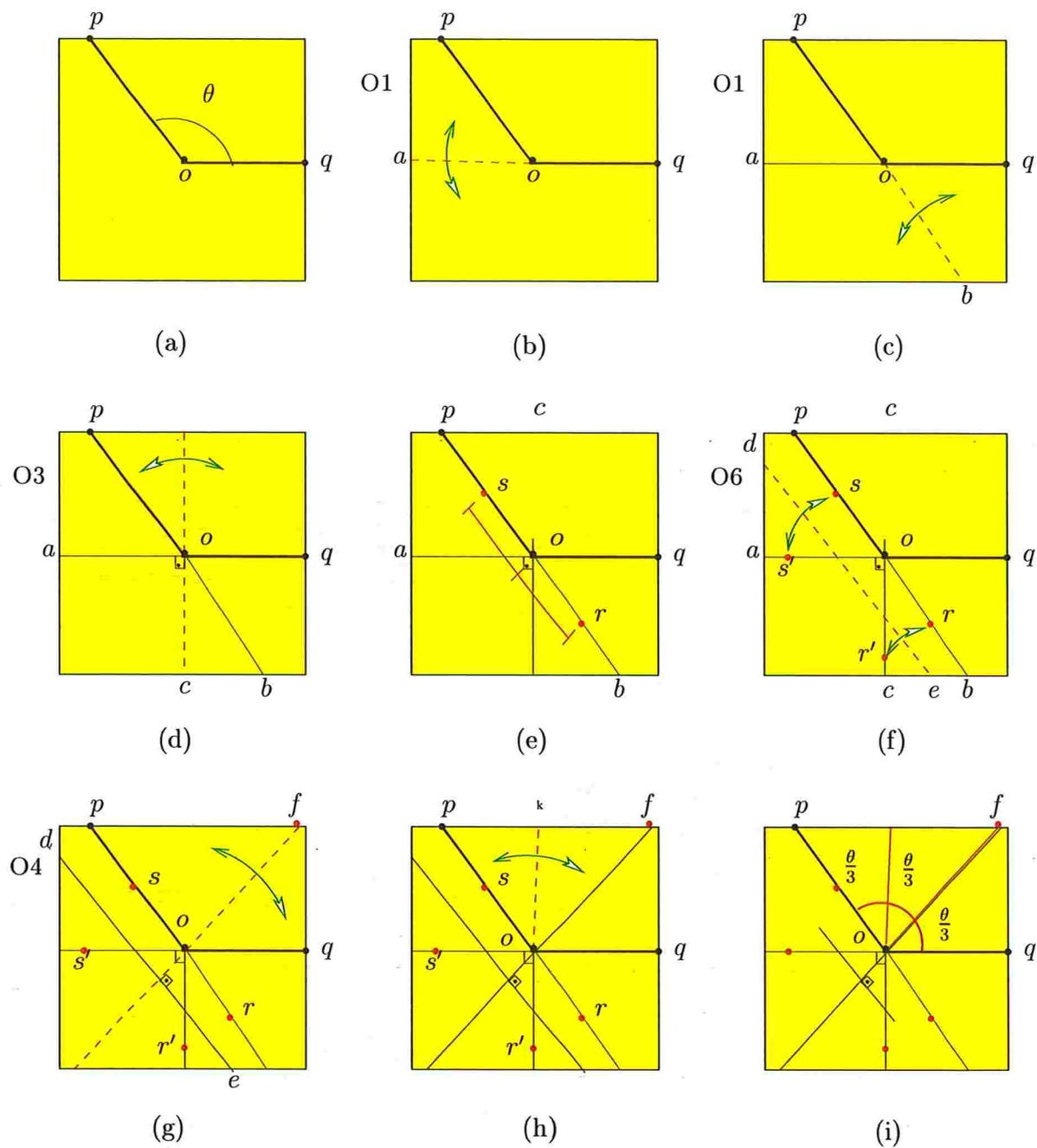


Figura 1.27: Trisseção de Jacques Justin de um ângulo obtuso.

ao realizado pelo algoritmo DOBRA-BINÁRIA pode ser utilizado para dividir um ângulo por um número da forma $a/2^n$, onde a e n são números inteiros positivos. A chave desse processo está nas dobras ilustradas na figura 1.28.

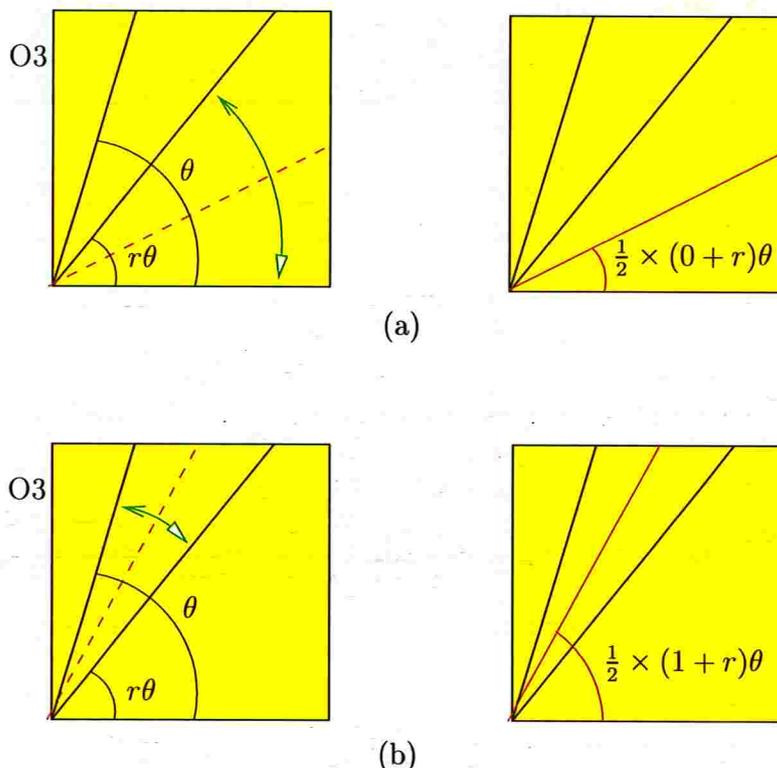


Figura 1.28: Ilustração de como a partir de ângulos θ e $r\theta$ podem-se obter os ângulos $r\theta/2$ e $(1 + r)\theta/2$.

1.7 Duplicação de cubos

Robert J. Lang [47] menciona que em 1995 David Auckly e John Cleveland [6] mostraram a impossibilidade de resolver o problema DUPLICA-CUBO utilizando-se dobras e que afirmaram que as operações com dobras eram mais restritas do que as construções com régua e compasso. No artigo, os autores utilizaram um subconjunto das operações com dobras conhecidas; eles não consideraram a operação que permite o alinhamento simultâneo de dois pontos em duas linhas diferentes, a operação O6 de Huzita. Essa operação permite a solução de equações cúbicas e a solução dos problemas TRISSEÇÃO da seção anterior e DUPLICA-CUBO nesta seção:

Problema DUPLICA-CUBO(l): Dado um segmento l de comprimento a , construir um segmento de comprimento x tal que o cubo com arestas de comprimento x tenha o dobro de volume do cubo com arestas de comprimento a .

Esse problema também é chamado de problema deliano². Talvez o exemplo mais famoso do uso de dobras para resolver equações cúbicas seja a solução de Peter Messer [50] do problema DUPLICA-CUBO. O comprimento x do segmento desejado deve satisfazer a equação $x^3 = 2a^3$. Assim temos que $x = \sqrt[3]{2}a$ e o problema é essencialmente determinar $\sqrt[3]{2}$.

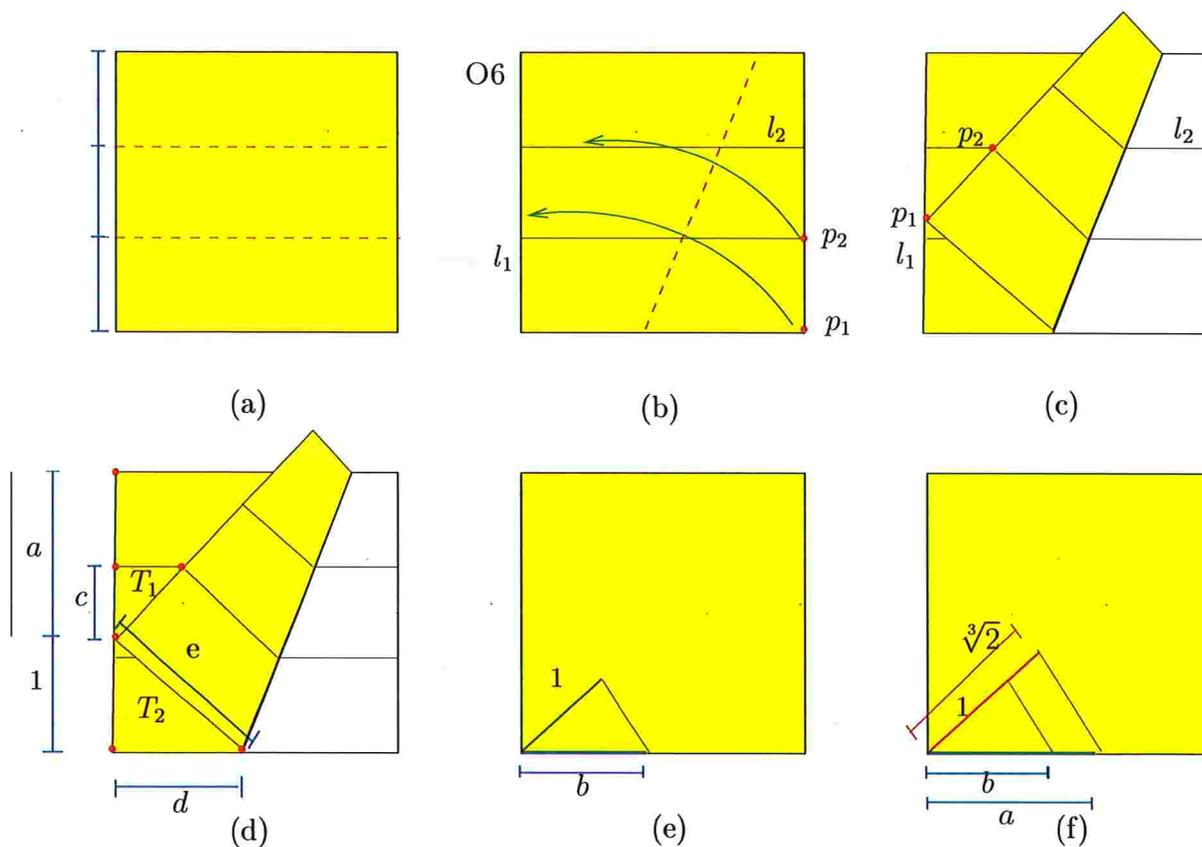


Figura 1.29: Construção de $\sqrt[3]{2}$ de Peter Messer.

²De acordo com a lenda, em 430 A.C., havia uma praga devastando a Grécia. Os habitantes da ilha de Delos consultaram o oráculo de Apolo em Delos sobre como terminar com essa praga. Eles foram então aconselhados pelo oráculo a duplicar o volume do altar de Apolo, o qual tinha uma forma cúbica. Talvez o oráculo fosse um origamista [26, 31, 49].

Passamos a descrever o método de Peter Messer. Considere o processo de dobra mostrado na figura 1.29. Começamos dividindo um papel quadrado em três faixas horizontais iguais (figura 1.29(a)). Isso é essencialmente o serviço que faz o algoritmo DIAGONAIS-CRUZADAS(1/3) criando dois vincos. Agora fazemos a operação $O6(p_1, p_2, l_1, l_2)$ onde p_1 é o canto direito do papel, p_2 é o ponto no vinco horizontal à distância 1/3 de p_1 , l_1 é o lado do papel oposto a p_1p_2 e l_2 é o outro vinco do papel (figura 1.29(b) e (c)). Após a operação $O6$, o ponto onde p_1 é sobreposto à linha l_1 divide o lado do papel em segmentos de comprimentos, digamos, a e b e determina dois triângulos semelhantes T_1 e T_2 (figura 1.29(d)). Mostraremos que

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}.$$

Durante a demonstração estaremos fazendo constante menção às definições ilustradas na figura 1.29(d). Como o triângulo T_2 é retângulo, temos que

$$e = \sqrt{b^2 + d^2}. \quad (1.1)$$

Por outro lado, como o lado do quadrado tem comprimento $a + b$ vemos que

$$e = a + b - d. \quad (1.2)$$

Combinando (1.1) e (1.2) obtemos que

$$b^2 + d^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2ab - 2ad - 2bd$$

e portanto

$$d = \frac{a^2 + 2ab}{2a + 2b}. \quad (1.3)$$

Sabemos que $c = a - (a + b)/3 = (2a + b)/3$ e como os triângulo T_1 e T_2 são semelhantes vale $c/((a + b)/3) = e/d$, e assim

$$\frac{2a + b}{a + b} = \frac{c}{(a + b)/3} = \frac{e}{d} = \frac{a + b - d}{d} = \frac{a + b}{d} - 1$$

e, isolando d obtemos

$$d = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3a + 2b}. \quad (1.4)$$

Agora, combinando (1.3) e (1.4), temos que

$$(a^2 + 2ab)(3a + 2b) = (a^2 + 2ab + b^2)(2a + 2b) \quad (1.5)$$

o que implica que

$$3a^3 + 6a^2b + 2ab^2 + 4ab^2 = 2a^3 + 4a^2b + 2ab^2 + 2a^2b + 4ab^2 + 2b^3$$

e conseqüentemente

$$a^3 = 2b^3 .$$

Finalmente, concluímos que

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2} .$$

O processo de dobra acima mostrou como podemos obter segmentos de reta de comprimentos a e b tais que $a/b = \sqrt[3]{2}$. A fim de construirmos uma linha de comprimento $\sqrt[3]{2}$ podemos proceder da seguinte maneira: tendo um segmento de comprimento b , podemos dobrar um triângulo T de lados 1 e b (O_1, O_2 e O_3 ; figura 1.29(e)). Agora, como o comprimento a é conhecido, podemos dobrar um triângulo T' semelhante ao triângulo T com um lado de comprimento a correspondendo ao lado de comprimento 1 de T (O_2, O_3 e O_4 ; figura 1.29(f)). O lado de T' correspondente ao lado de comprimento b de T tem comprimento $a/b = \sqrt[3]{2}$.

Assim acabamos de demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 1.5 (da raiz cúbica): *No modelo de dobra de Huzita é possível construirmos $\sqrt[3]{2}$.* ■

Como conseqüência imediata do teorema 1.5 temos o corolário abaixo.

Corolário 1.6 (da duplicação): *O problema DUPLICA-CUBO admite solução no modelo de dobras de Huzita.* ■

1.8 Modelo de Euclides com dobras

Nesta seção veremos que as construções de Euclides E1 a E5 podem ser simuladas pelas operações O1 a O5 de Huzita. Isso mostra que o modelo de Huzita é computacionalmente tão poderoso quanto o modelo de Euclides. O conteúdo desta seção é devido a Robert Geretschlager [26].

Simulação de $E1(p_1, p_2)$

Essa construção é idêntica à operação com dobra $O1(p_1, p_2)$.

Simulação de $E2(o, r)$

Uma circunferência não pode ser traçada através de dobras. No entanto, uma circunferência pode ser considerada determinada se o seu centro o e raio r são conhecidos, já que, com essa informação, qualquer número de pontos e tangentes à circunferência $O = (o, r)$ podem ser determinados através de dobras. Isso pode ser feito como ilustra a figura 1.30. Desta forma, com dobras, temos todos os pontos da circunferência de maneira implícita.

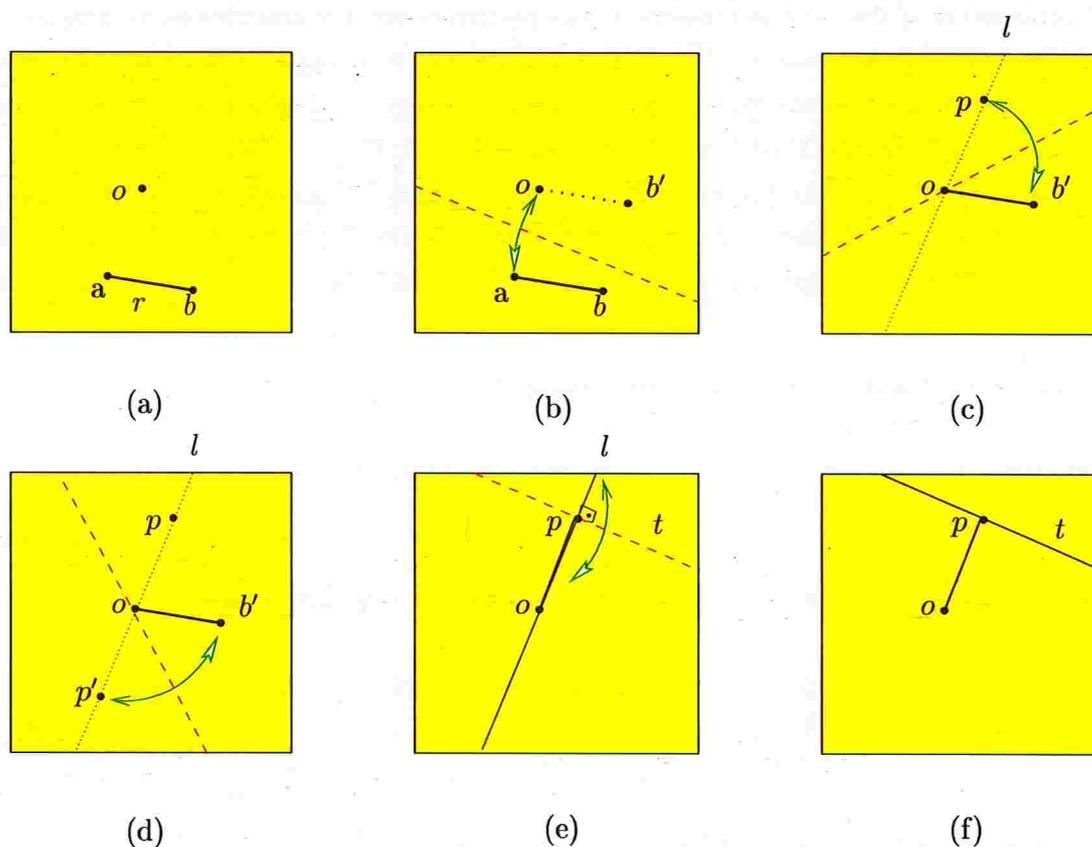


Figura 1.30: Simulação da construção $E2$ por dobras.

Suponha que uma circunferência $O = (o, r)$ seja dada através do seu centro o e seu raio r seja determinado pelo comprimento de um também dado segmento ab (figura 1.30(a)). Um ponto b' da circunferência pode ser obtido essencialmente através da

dobra $O1(a, o)$. Com isso, e mais algumas dobras simples auxiliares, podemos obter um ponto b' da circunferência (figura 1.30(b)).

Se uma linha l que passa pelo centro o da circunferência é dada, então a operação $O5(b', o, l)$ coloca b' sobre l e cria um vinco passando por o . O ponto sobre o qual b' é sobreposto é um dos pontos da circunferência sobre a linha l (figura 1.30(c)). O vinco resultante é a bissetriz do ângulo $\angle(p, o, b')$. Da mesma maneira, fazendo-se uma dobra que tem como vinco a bissetriz do ângulo $\angle(b', o, p)$ obtemos o outro ponto p' da circunferência na linha l (figura 1.30(d)).

Finalmente, para obtermos uma linha tangente à circunferência em um ponto p , basta realizarmos a dobra $O4(p, l)$ que produz um vinco passando por p e perpendicular a l (figura 1.30(e)). Esse vinco é a linha tangente desejada.

Simulação de $E3(l_1, l_2)$

Para obtermos o ponto de intersecção entre l_1 e l_2 basta produzirmos uma dobra que tem como vinco l_1 e outra dobra que tem como vinco l_2 . A intersecção dos vincos é o ponto procurado.

Simulação de $E4(O, l)$

Em virtude do que foi discutido na simulação da construção $E2$, podemos supor que a circunferência $O = (o, r)$ é dada através de seu centro o e de um ponto p da circunferência tal que o comprimento do segmento op seja r . Os pontos de intersecção entre a circunferência O e uma dada linha l podem ser obtidos através da dobra $O5(p, o, l)$ que coloca p sobre l e cria um vinco passando pelo centro o da circunferência (figura 1.31(a)). Vemos que encontrar os pontos de intersecção entre uma circunferência e uma linha é, de certa forma, equivalente a determinar as retas passando por o e tangentes à parábola com foco p e diretriz l (figura 1.31(b)).

Simulação de $E5(O_1, O_2)$

Como circunferências só são acessíveis por dobras através do conhecimento de pontos específicos e de tangentes, não é possível encontrar diretamente a intersecção de duas circunferências dadas $O_1 = (o_1, r_1)$ e $O_2 = (o_2, r_2)$. Entretanto, é possível encontrar a

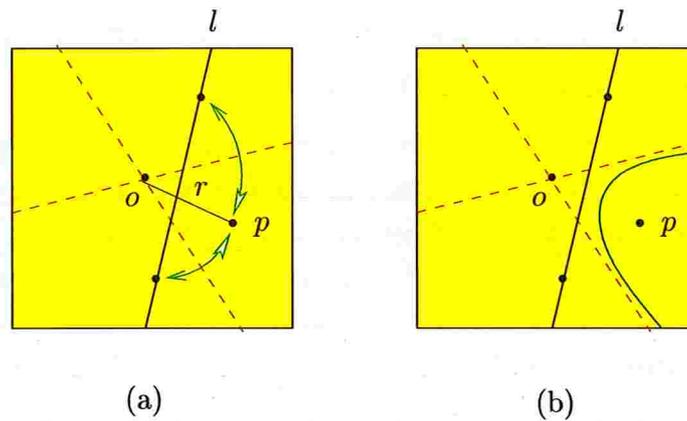


Figura 1.31: Simulação da construção E4 por dobras.

corda comum l às duas circunferências e, portanto, reduzir E5(O_1, O_2) a E4(O_1, l) ou E4(O_2, l) (figura 1.32).

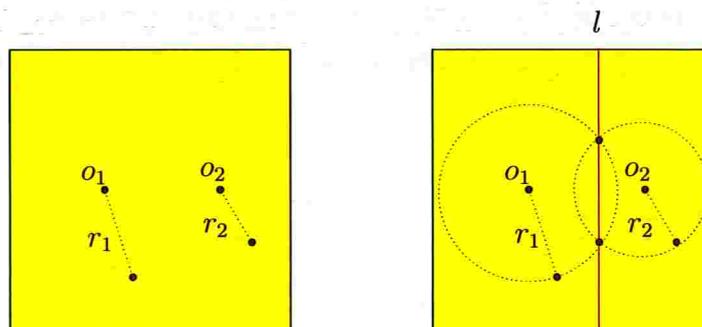


Figura 1.32: Idéia da redução da construção E5(O_1, O_2) à construção E4(O_1, l).

Suponha que o centro o_1 é a origem das coordenadas cartesianas e que o centro o_2 está localizado no eixo das abscissas no ponto $(0, a)$ (figura 1.33). Dessa forma, temos que a equação que descreve O_1 é $x^2 + y^2 = r_1^2$ e a equação que descreve O_2 é $(x - a)^2 + y^2 = r_2^2$.

A equação da linha l que passa pelos pontos de intersecção entre O_1 e O_2 é $x = d$, onde d é o valor da abscissa dos pontos de intersecção. Para determinarmos d basta encontrarmos o valor de x que satisfaz

$$x^2 + y^2 - r_1^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - r_2^2 .$$

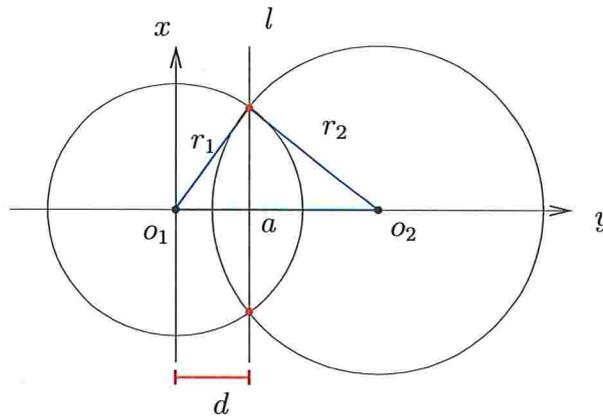


Figura 1.33: Circunferências no plano cartesiano.

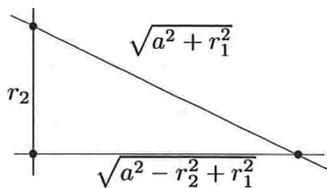
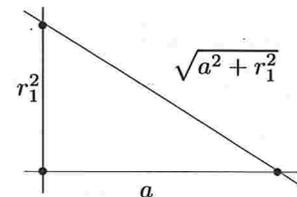
Logo, $d = (a^2 - r_2^2 + r_1^2)/2a$ e

$$x = \frac{a^2 - r_2^2 + r_1^2}{2a} \tag{1.6}$$

é a equação da linha l . Essa linha pode ser determinada através de dobras e dessa forma a construção $E5(O_1, O_2)$ se reduz a construção $E4(O_1, l)$. Para a determinação da linha l obtemos uma linha de comprimento d . Depois, essa medida d pode ser transferida sobre segmento o_1o_2 para obtermos o ponto $p = (d, 0)$, essencialmente como foi feito na simulação de E2. Finalmente, realizando a dobra $O4(p_1, o_1o_2)$ obtemos a linha l .

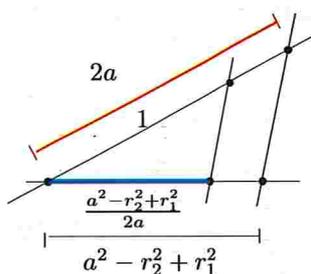
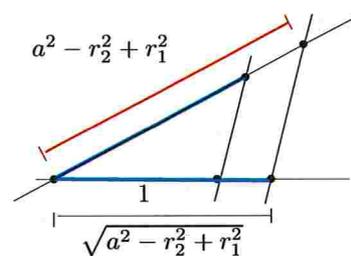
Uma maneira de obtermos o comprimento d está descrita a seguir.

Como os comprimentos a e r_1 são conhecidos, é possível através de dobras obtermos um triângulo retângulo de catetos de comprimento a e r_1 ($O1, O2, O3$ e $O4$). O comprimento da hipotenusa é $\sqrt{a^2 + r_1^2}$.



Agora os comprimentos r_2 e $\sqrt{a^2 + r_1^2}$ são também conhecidos. Assim, é possível dobrar um triângulo retângulo com um cateto de comprimento r_2 e hipotenusa de comprimento $\sqrt{a^2 + r_1^2}$ ($O1, O2, O3$ e $O4$). O comprimento do outro cateto é $\sqrt{a^2 - r_2^2 + r_1^2}$.

Podemos dobrar agora um triângulo com um lado de comprimento 1 e um outro lado de comprimento $\sqrt{a^2 - r_2^2 + r_1^2}$ (O1, O2 e O3). Agora também pode ser dobrado um triângulo semelhante a esse e com um dos lados de comprimento $\sqrt{a^2 - r_2^2 + r_1^2}$ correspondendo ao lado de comprimento 1 (O2, O3 e O4). Nesse segundo triângulo, o lado correspondente ao lado de comprimento $\sqrt{a^2 - r_2^2 + r_1^2}$ do primeiro triângulo, tem comprimento $a^2 - r_2^2 + r_1^2$.



Finalmente, podemos dobrar um triângulo com um lado de comprimento $2a$ e outro de comprimento $a^2 - r_2^2 + r_1^2$ (O1, O2 e O3). Agora podemos obter um triângulo semelhante a esse primeiro e com um lado de comprimento 1 correspondendo ao lado de comprimento $2a$ do primeiro triângulo (O2, O3 e O4). Nesse segundo triângulo, o lado correspondente ao lado de comprimento $a^2 - r_2^2 + r_1^2$ do primeiro triângulo tem comprimento $(a^2 - r_2^2 + r_1^2)/2a$. Esse é precisamente o valor de d procurado.

O conteúdo desta seção é o teorema a seguir de Robert Geretschläger [26].

Teorema 1.7: *Todas as construções factíveis no modelo de Euclides podem ser realizadas no modelo de dobras de Huzita. Mais especificamente, as construções E1-E5 podem ser simuladas pelas operações O1-O5.* ■

1.9 Modelo de dobras com régua e compasso

Nesta seção veremos que as operações com dobras O1-O5 e O7 podem ser simuladas pelo modelo de Euclides. É evidente que nem todas as operações do modelo de dobras de Huzita podem ser simuladas pelo modelo de Euclides, já que, como foi mencionado, o problema TRISSEÇÃO admite solução no modelo de Huzita mas não é solúvel no modelo de Euclides. Como foi dito anteriormente, a operação que é a grande responsável por esse maior poder computacional do modelo de Huzita é a operação O6, que não pode ser

simulada no modelo de Euclides.

Simulação de $O1(p_1, p_2)$

Essa operação é idêntica à construção $E1(p_1, p_2)$.

Simulação de $O2(p_1, p_2)$

O vinco resultante da dobra $O2(p_1, p_2)$ pode ser obtido através de régua e compasso determinando-se a mediatriz do segmento p_1p_2 ($E1$, $E2$, e $E4$, figura 1.34).

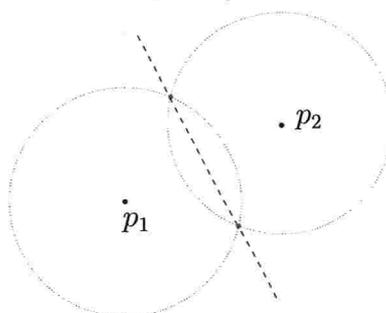


Figura 1.34: Simulação da operação $O2$ com régua e compasso.

Simulação de $O3(l_1, l_2)$

A operação $O3(l_1, l_2)$ equivale à construção de uma bissetriz ou de uma paralela equidistante de outras duas paralelas. Essas são construções bem conhecidas no modelo de Euclides ($E1$, $E2$, $E4$ e $E5$, figura 1.35).

Simulação de $O4(p, l)$

Traçar uma linha passando por um dado ponto p e perpendicular a uma reta dada l é outra construção bem conhecida no modelo de Euclides ($E1$, $E2$, $E4$ e $E5$, figura 1.34).

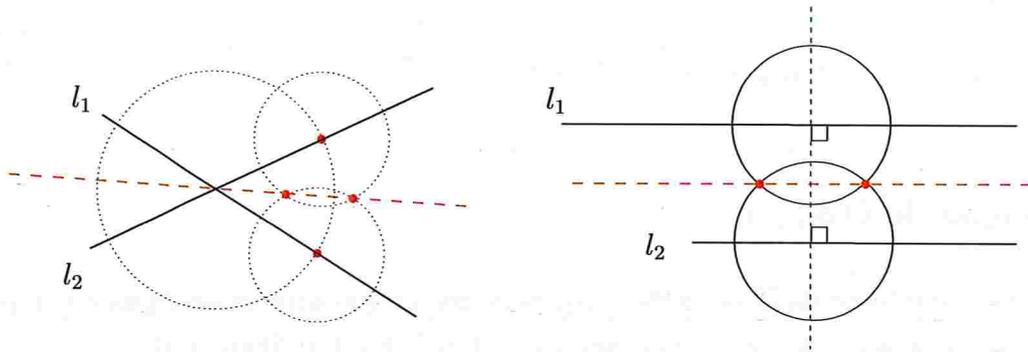


Figura 1.35: Simulação da operação O3 com régua e compasso.

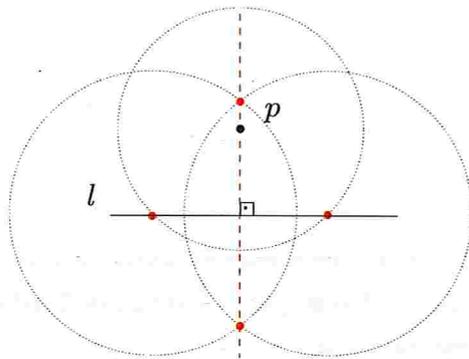


Figura 1.36: Simulação da operação O4 com régua e compasso.

Simulação de $O5(p_1, p_2, l)$

Como já foi mencionado, o vinco resultante da operação $O5(p_1, p_2, l)$ é a linha tangente à parábola de foco p_1 e diretriz l e que passa por p_2 . No modelo de Euclides é possível determinar retas tangentes a uma dada parábola através de seu foco p_1 e de sua diretriz l passando por um também dado ponto p_2 ; apesar de o método talvez não ser tão conhecido quanto os utilizados até agora. Se um ponto a de uma parábola com foco p_1 e diretriz l é conhecido, então, pela definição de parábola, o comprimento do segmento de reta ap_1 é igual à distância de a até a reta l (figura 1.37). Seja m a reta passando por p_1 e perpendicular à diretriz l . A reta paralela a m e contendo a tem intersecção com l em um ponto b . Assim, os segmentos de reta ap_1 e ab têm o mesmo comprimento. Se determinarmos o ponto c em m tal que o quadrilátero com vértices p_1, a, b e c seja um losango, então a diagonal ac determina a reta tangente à parábola no ponto a .

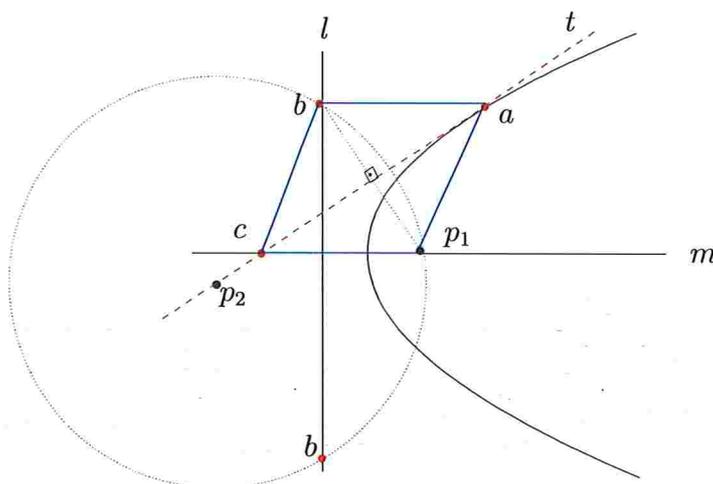


Figura 1.37: Simulação da operação $O5$ com régua e compasso.

Dessa forma, a reta t tangente à parábola (p_1, l) e passando pelo ponto p_2 pode ser construída com régua e compasso da seguinte forma. Como a tangente t é a mediatriz do segmento p_1b , então os segmentos de reta bp_2 e p_1p_2 têm o mesmo comprimento, digamos, r . Através da construção $E2(p_2, r)$ traçamos uma circunferência $O = (p_2, r)$ e com a construção $E4(O, l)$ obtemos os dois pontos em l candidatos a serem o ponto b . Finalmente, através das operações $E1$, $E2$ e $E5$ determinamos a tangente t .

Simulação de $O7(p, l_1, l_2)$

O método para simular $O7(p, l_1, l_2)$ baseia-se no fato de que a linha l produzida pela dobra é a mediatriz de um segmento pq , onde q é o ponto na reta determinada por l_1 que está na reta t que passa por p e é paralela a l_2 . Dado um tal ponto p , a mediatriz de pq pode ser facilmente determinada através das construções E1, E2 e E5.

Para obtermos t , e conseqüentemente q , podemos proceder da seguinte maneira. Primeiro traçamos a reta s passando por p e perpendicular a l_2 . Isso pode ser feito utilizando as construções E1, E2, E4 e E5 (figura 1.38(a)). De maneira semelhante, traçamos a reta passando por p e perpendicular a s . Essa última reta é reta t paralela a l_2 . O ponto de intersecção entre t e a reta l_1 é o ponto q procurado, que pode ser determinado através da construção E4 (figura 1.38(b)).

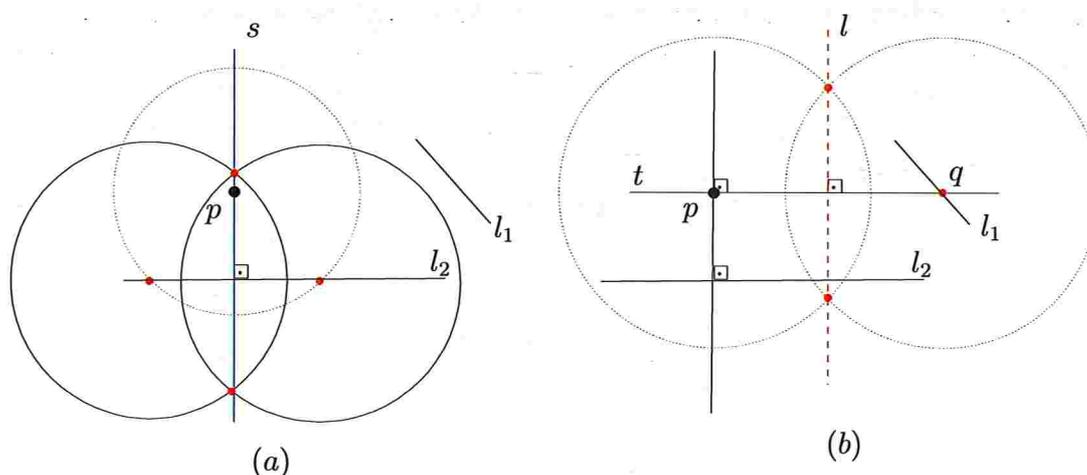


Figura 1.38: Simulação da operação $O7$ com régua e compasso.

O que foi visto nesta seção foi é o teorema a seguir de Robert Geretschläger[26].

Teorema 1.8: *Todas as construções factíveis no modelo de dobras de Huzita com as operações $O1$ - $O5$ e $O7$ podem ser realizadas no modelo de Euclides.* ■

1.10 Raízes cúbicas com dobras

Na seção 1.7 vimos como no modelo Huzita é possível construir $\sqrt[3]{2}$ com o método de Peter Messer [50]. Nesta seção veremos uma pequena generalização desse método.

Trataremos do problema:

Problema RAIZ-CÚBICA(l_1, l_2): Dado um segmento de reta l_1 de comprimento a e um segmento l_2 de comprimento b , construir um segmento de reta de comprimento $\sqrt[3]{a/b}$.

Analicamente, o processo de dobra de Peter Messer mostra como, no modelo de Huzita, podemos dobrar a raiz real de

$$x^3 = 2 .$$

Veremos agora como resolver a equação

$$x^3 = \frac{a}{b} ,$$

onde a e b são números positivos. O método que veremos a seguir é baseado em parábolas com um vértice comum e eixos perpendiculares³ e é devido a Robert Geretschläger [26].

Para obter $\sqrt[3]{a/b}$ procedemos da seguinte maneira. Primeiramente, dobramos o eixo das abscissas e ordenadas (figura 1.39(a)). Utilizando um segmento de comprimento a , marcamos o ponto $f_1 = (a/2, 0)$ e vincamos a linha l_1 de equação $x = -a/2$ (figura 1.39(b)). Em seguida, com um segmento de comprimento b , marcamos o ponto $f_2 = (0, b/2)$ e vincamos a linha l_2 de equação $y = -b/2$ (figura 1.39(c)). Realizamos agora a operação $O6(f_1, f_2, l_1, l_2)$ que coloca f_1 sobre l_1 e f_2 sobre l_2 (figura 1.39(d)). Essa operação cria um vinco que é a tangente comum t à parábola P_1 de foco f_1 e diretriz l_1 e à parábola P_2 de foco f_2 e diretriz l_2 (figura 1.39(e)). Dobramos agora um triângulo que tem a hipotenusa sobre qualquer ponto de t e um cateto de comprimento 1 (figura 1.39(f)). O comprimento do outro cateto é $\sqrt[3]{a/b}$, como verificaremos mais adiante.

A equação da parábola P_1 que tem foco no ponto $(a/2, 0)$ e tem como diretriz a reta $x = -a/2$ é

$$y^2 = 2ax$$

e a equação da parábola P_2 que tem foco no ponto $(0, b/2)$ e tem como diretriz a reta $y = -b/2$ é

$$x^2 = 2by .$$

³A relação entre parábolas intersectantes e a solução de equações cúbicas era sabida por Descartes e a relação dessas parábolas e raiz cúbicas era conhecida desde a antigüidade [26].

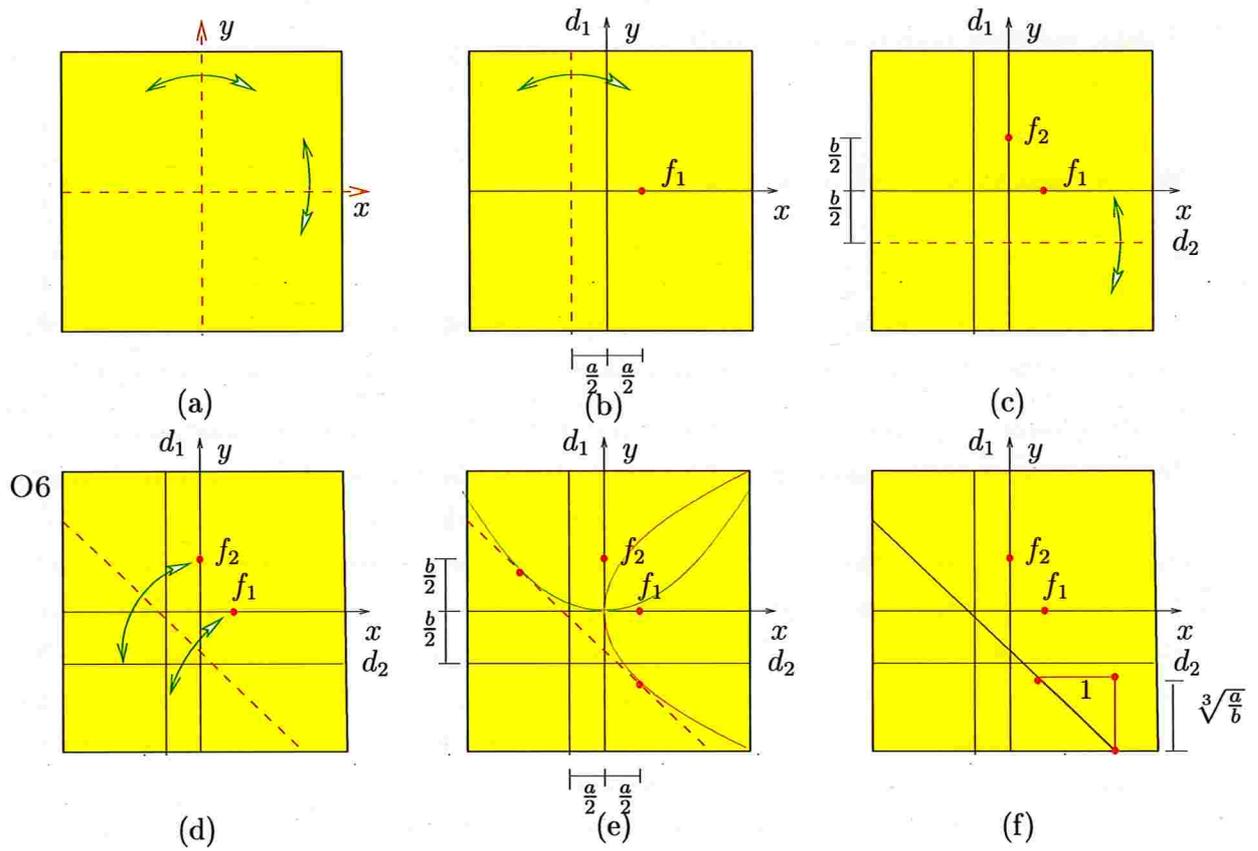


Figura 1.39: Construção de $\sqrt[3]{a/b}$ de Robert Geretschläger.

Como P_1 e P_2 se intersectam, então elas têm apenas uma tangente real comum. Podemos supor que essa tangente t comum tem equação da forma

$$y = cx + d, \quad (1.7)$$

já que t não pode ser paralela ao eixo das abscissas nem ao eixo das ordenadas (figura 1.40).

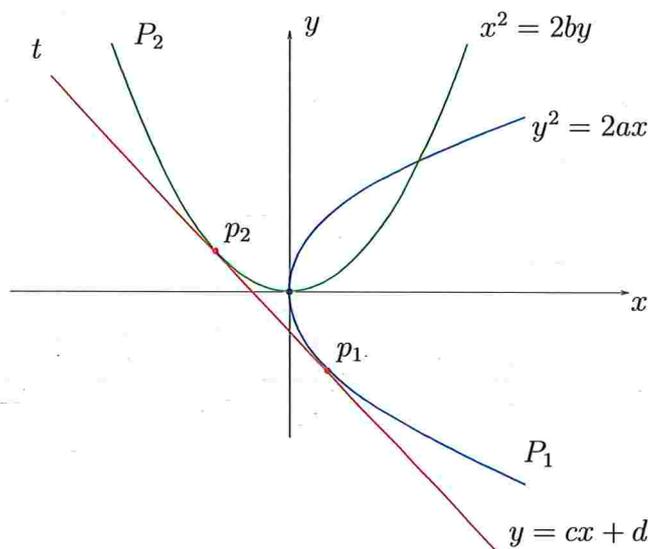


Figura 1.40: Parábolas usadas na solução da equação $x^3 = a/b$.

Suponha que $p_1 := (x_1, y_1)$ é o ponto da reta t na parábola P_1 . A equação da reta tangente a P_1 passando por p_1 é

$$y = \frac{a}{y_1}x + \frac{ax_1}{y_1}.$$

Logo,

$$c = \frac{a}{y_1} \quad \text{e} \quad d = \frac{ax_1}{y_1}$$

e portanto

$$y_1 = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{d}{c}.$$

Como $y_1^2 = 2ax_1$, então $a^2c^2 = 2a(d/c)$ e

$$a = 2cd. \quad (1.8)$$

De maneira análoga, suponha que $p_2 := (x_2, y_2)$ é o ponto da reta t na parábola P_2 . A equação da reta tangente a P_2 passando por p_2 é

$$y = \frac{x_2}{b}x - y_2. \quad (1.9)$$

Portanto,

$$c = \frac{x_2}{b} \quad \text{e} \quad d = -y_2$$

e assim

$$x_2 = bc \quad \text{e} \quad d = -y_2 .$$

Já que $x_2^2 = 2by_2$, então $b^2c^2 = -2bd$ e

$$d = -\frac{bc^2}{2} . \tag{1.10}$$

Combinando (1.8) e (1.10) obtemos que $a = -bc^3$ de onde concluímos que

$$-c = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} . \tag{1.11}$$

Com isso vemos que o valor negativo do coeficiente angular da reta t é a raiz cúbica desejada. As construções mostradas nas figuras 1.39(a), (b), (c) e (d) obtêm a reta de equação $y = cx + d$ tangente às parábolas enquanto as dobras mostradas nas figuras 1.39(e) e (f) produzem $-c$.

Resumindo o conteúdo desta seção temos o teorema a seguir, também devido a Robert Geretschläger [26].

Teorema 1.9: *O problema RAIZ-CÚBICA admite solução no modelo de dobras de Huzita.* ■

1.11 Equações cúbicas com dobras

Na seção anterior vimos como é possível extrair raízes cúbicas no modelo de dobras de Huzita ou, mais especificamente, como resolver equações da forma

$$x^3 - \frac{a}{b} = 0 ,$$

onde a e b são valores dados. Esse é um tipo particular de equação cúbica. Nesta seção veremos uma generalização do que vimos na seção anterior, veremos como resolver equações cúbicas mais gerais:

Problema EQUAÇÃO-CÚBICA(l_1, l_2, l_3): Dados segmentos de reta l_1, l_2 e l_3 de comprimentos p, q e r , respectivamente, construir um segmento de reta de comprimento x tal que

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 .$$

Como veremos, as soluções reais do problema EQUAÇÃO-CÚBICA são coeficientes angulares de retas tangentes a duas parábolas. Como na seção anterior, esses coeficientes angulares são valores construtíveis no modelo de dobras de Huzita. A construção é feita através da localização dos focos e diretrizes das duas parábolas e da aplicação da operação de dobra O6 para a obtenção das retas tangentes.

No processo de dobra que passamos a descrever, a, b, m e n são constantes que serão escolhidas mais adiante de maneira apropriada. O processo de dobra para obter uma solução do problema EQUAÇÃO-CÚBICA é o seguinte. Inicialmente, marcamos o foco

$$f_1 := \left(m + \frac{a}{2}, n\right)$$

e dobramos a reta diretriz l_1 de equação

$$x = m - \frac{a}{2}$$

de uma parábola P_1 . Em seguida, marcamos o foco

$$f_2 := \left(0, \frac{b}{2}\right)$$

e dobramos a reta diretriz l_2 de equação

$$y = -\frac{b}{2}$$

de uma parábola P_2 (figura 1.41). Através da dobra O6(p_1, p_2, l_1, l_2) obtemos um vinco que é a reta tangente a ambas as parábolas. O coeficiente angular dessa reta tangente é solução de EQUAÇÃO-CÚBICA(l_1, l_2, l_3), após a escolha apropriada das constantes a, b, m e n em função de p, q e r .

A equação da parábola $P_1 = (f_1, l_1)$ é

$$(y - n)^2 = 2a(x - m)$$

e a equação da parábola $P_2 = (f_2, l_2)$ é

$$x^2 = 2by,$$

onde a, b, n e m são constantes e (m, n) é o vértice da parábola P_1 . Suponha que t é reta tangente a ambas as parábolas. Essa tangente não pode ser paralela ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas. Assim podemos supor que a equação de t é da forma

$$y = cx + d.$$

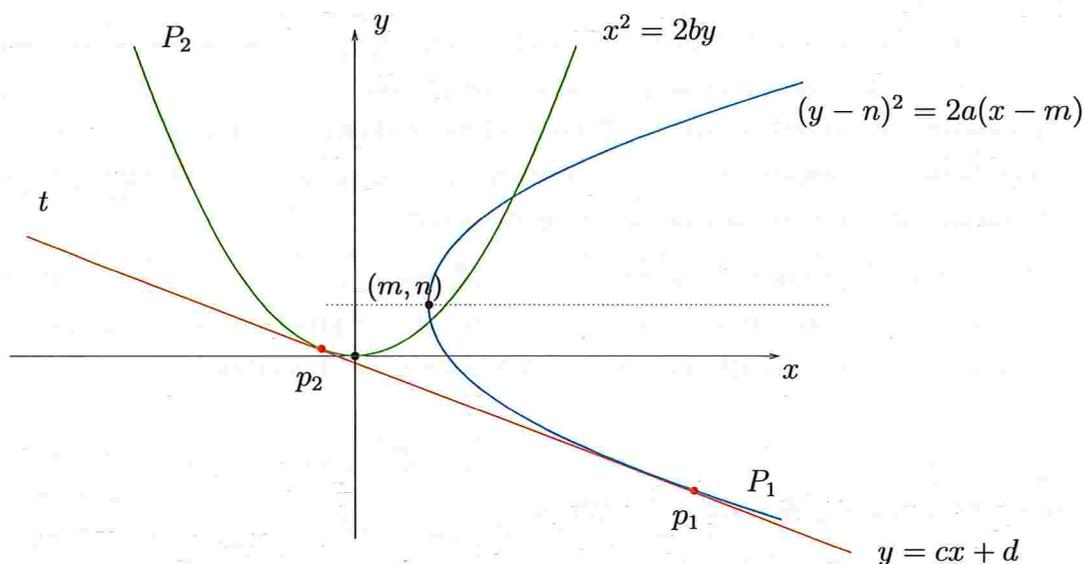


Figura 1.41: Parábolas usadas na solução de equações cúbicas.

Suponha que $p_1 := (x_1, y_1)$ é o ponto de t na parábola P_1 e $p_2 := (x_2, y_2)$ é o ponto de t na parábola P_2 (figura 1.41).

A equação da reta tangente a P_1 passando pelo ponto (x_1, y_1) é

$$y = \frac{a}{y_1 - n}x + n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n}.$$

Logo,

$$c = \frac{a}{y_1 - n} \quad \text{e} \quad d = n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n}$$

e portanto

$$y_1 = \frac{a + nc}{c} \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{d - n}{c} + 2m.$$

Como $(y_1 - n)^2 = 2a(x_1 - m)$, então $(a/c)^2 = 2a((d - n)/c + m)$ e

$$a = 2c(d - n + cm). \quad (1.12)$$

De maneira análoga, suponha que $p_2 := (x_2, y_2)$ seja o ponto da reta t na parábola P_2 . A equação da reta tangente a P_2 passando por p_2 é

$$y = \frac{x_2}{b}x - y_2.$$

Logo, como na seção anterior,

$$c = \frac{x_2}{b} \quad \text{e} \quad d = -y_2$$

e portanto

$$x_2 = bc \quad e \quad d = -y_2$$

Como $x_2^2 = 2by_2$, então $b^2c^2 = -2bd$ e

$$d = -\frac{bc^2}{2}. \quad (1.13)$$

Combinando (1.12) e (1.13) obtemos

$$a = 2c\left(-\frac{bc^2}{2} - n + cm\right)$$

de onde concluímos que

$$c^3 - \frac{2m}{b}c^2 + \frac{2n}{b}c + \frac{a}{b} = 0. \quad (1.14)$$

Portanto, vemos que o coeficiente angular c da reta tangente t é solução da equação cúbica (1.14).

A equação (1.14) pode ter uma raiz real e duas raízes complexas ou três raízes reais, sendo que duas ou as três são iguais. Isso corresponde a parábolas que se intersectam e parábolas que não se intersectam, respectivamente. Duas soluções são iguais se e somente se duas tangentes são iguais e portanto as parábolas são tangentes. Já as três raízes são iguais se e somente se elas têm um contato de terceira ordem.

Portanto, vemos que o processo de dobra descrito resolve o problema EQUAÇÃO-CÚBICA se tomarmos

$$b := 1, \quad m := -\frac{p}{2}, \quad n := \frac{q}{2} \quad e \quad a := r.$$

Isso conclui a demonstração de Robert Geretschläger [26] do teorema a seguir.

Teorema 1.10: *O problema EQUAÇÃO-CÚBICA admite solução no modelo de dobras de Huzita.* ■

O método de Robert Geretschläger nos mostra uma maneira alternativa para trissecarmos um dado ângulo (seção 1.6). Sabemos que para todo ângulo α vale que

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad (1.15)$$

Suponhamos que o ângulo 3α que desejamos trissecar seja conhecido. Com esse ângulo podemos construir um segmento de comprimento $\cos 3\alpha$ e assim podemos supor que esse

coosseno também seja conhecido. Agora, determinar $\cos \alpha$ é equivalente a encontrar uma solução da equação

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \cos 3\alpha = 0 .$$

Essa equação pode ser resolvida por dobras. Primeiramente, determinamos o foco

$$p_1 := \left(-\frac{1}{8} \cos 3\alpha, -\frac{3}{8} \right)$$

e a diretriz l_1 de equação

$$x = \frac{1}{8} \cos 3\alpha \tag{1.16}$$

da parábola P_1 . Em seguida, obtemos o foco

$$p_2 := \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

e a diretriz l_2 de equação

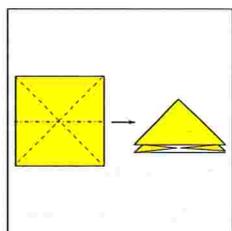
$$y = -\frac{1}{2} \tag{1.17}$$

de uma parábola P_2 . Agora, através da dobra $O6(p_1, p_2, l_1, l_2)$ determinamos uma reta tangente às parábolas P_1 e P_2 . O valor do coeficiente angular da linha produzida pela dobra é igual a $\cos \alpha$. Finalmente, podemos utilizar $\cos \alpha$ para construir α .

Planaridade

The easiest way to refold a road map
is differently.

Jone's Rule of the Road
Martin Gardner [24]



Apesar de o estudo da matemática e algoritmos das dobras estar muito longe daquele alcançado do ponto de vista artístico, muitos trabalhos já são dedicados a alguns tópicos bem específicos. Entre esses tópicos, os problemas mais estudados têm a seguinte forma geral: decidir se um dado diagrama corresponde a um certo “tipo” de modelo.

Sem dúvida, dentre os problemas dessa forma, o mais estudado é o da *planaridade de modelos*. Neste contexto o modelo é **plano**, ou seja, um modelo que, pelo menos do ponto de vista teórico no sentido de “limite”, está contido em um plano (figura 2.1).

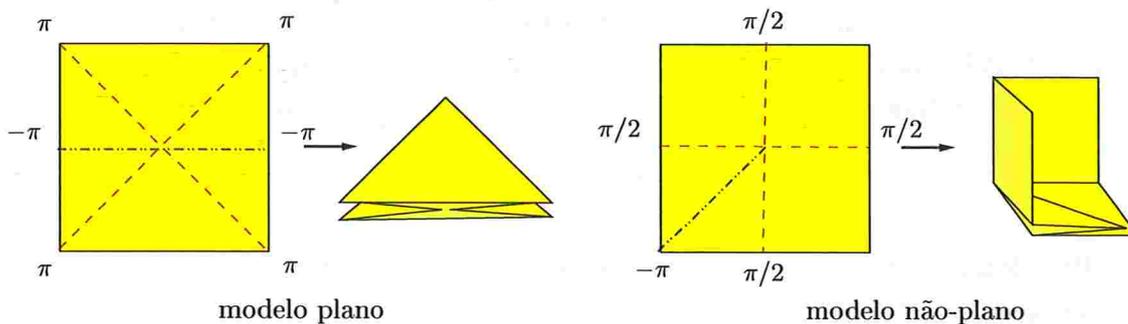


Figura 2.1: Exemplos de modelo plano e de não-plano.

Em particular, num modelo plano todas as dobras têm ângulo diedral, formado pela linha de cada dobra, de π ou de $-\pi$ radianos, onde os ângulos são medidos conforme alguma orientação arbitrária, porém fixa, do papel. Definições mais formais dos conceitos anteriores podem ser encontradas nos trabalhos de Marshall Bern e Barry Hayes [8] e Thomas Hull [34].

Antes de tratarmos os problema de planaridade na sua versão bidimensional natural, veremos na seção 2.1 sua versão unidimensional, onde as estruturas e aspectos computacionais são significativamente mais simples. Na seção 2.2 apresentamos, principalmente, condições “locais” que devem ser satisfeitas por um diagrama para que corresponda a um modelo plano. Em seguida, na seção 2.3, consideraremos diagramas, chamados de mapas, que possuem uma certa estrutura muito particular. Finalmente, na seção 2.4, consideraremos aspectos de complexidade computacionais.

No que segue, consideramos que todas as dobras do vale são de π radianos e da montanha são de $-\pi$ radianos.

2.1 Modelos retilíneos

Esther Arkin e colaboradores [5] fizeram um estudo sobre questões relativas a retilinearidade de modelos. Na versão retilínea de um diagrama (*linkage*¹) temos uma coleção de linhas rígidas, chamadas de **barras** ou **arestas**, ligadas através de suas extremidades, chamadas de **articulações** ou **vértices**, de tal maneira que o grafo formado seja um caminho. O diagrama pode ser dobrado movendo os seus vértices de maneira que os comprimentos e adjacências das arestas sejam preservados.

É evidente que todo diagrama retilíneo em que cada vértice é alternadamente do tipo vale ou montanha corresponde a um modelo retilíneo, ou seja, uma dobradura cuja forma final está contida em uma reta. É conveniente supormos que cada uma das duas extremidades do diagrama é simultaneamente um vértice vale e montanha (figura 2.2).

Considere agora o seguinte problema.

Problema RETILINEAR(D): um dado diagrama D corresponde a um modelo retilíneo?

¹Na verdade, um *linkage* é um objeto mais geral. Um *linkage* consiste de uma coleção de segmentos rígidos ligados através de suas extremidades móveis formando um grafo.

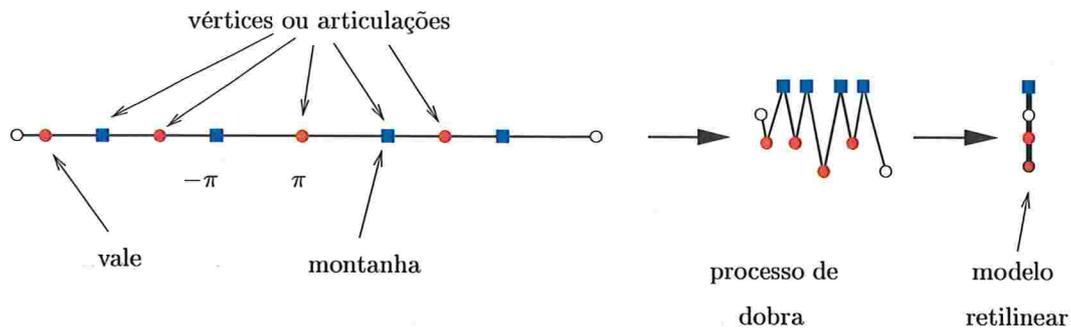


Figura 2.2: Modelo retilíneo.

Notemos que existem diagramas retilíneos para os quais a resposta ao problema RETILINEAR é NÃO, como mostra a figura 2.3. Pelo menos em essência, essa figura mostra a única situação em que um diagrama retilíneo não corresponde a um modelo retilíneo.

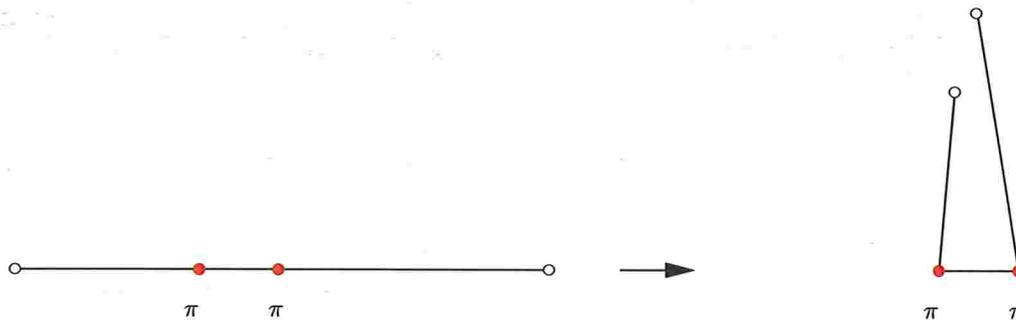


Figura 2.3: Modelo não-retilíneo.

Diremos que uma aresta uv de um diagrama é uma **prega** se u é um vértice vale e v é um vértice montanha ou vice-versa e o comprimento da aresta uv é menor ou igual ao comprimento das arestas adjacentes. É evidente que, se uv é uma prega, então realizando as dobras em u e em v o novo diagrama terá um menor número de vértices, como ilustra a figura 2.4. Diremos que esta é a **dobra da prega** uv .

Esther Arkin e colaboradores [5] demonstraram que se um diagrama corresponde a um modelo retilíneo então qualquer dobra através de arestas prega preserva essa propriedade. Ademais, se um diagrama corresponde a um modelo retilíneo, então ele possui uma aresta prega.

Lema 2.1: *Se D é um diagrama de um modelo retilíneo e uv é uma prega, então*

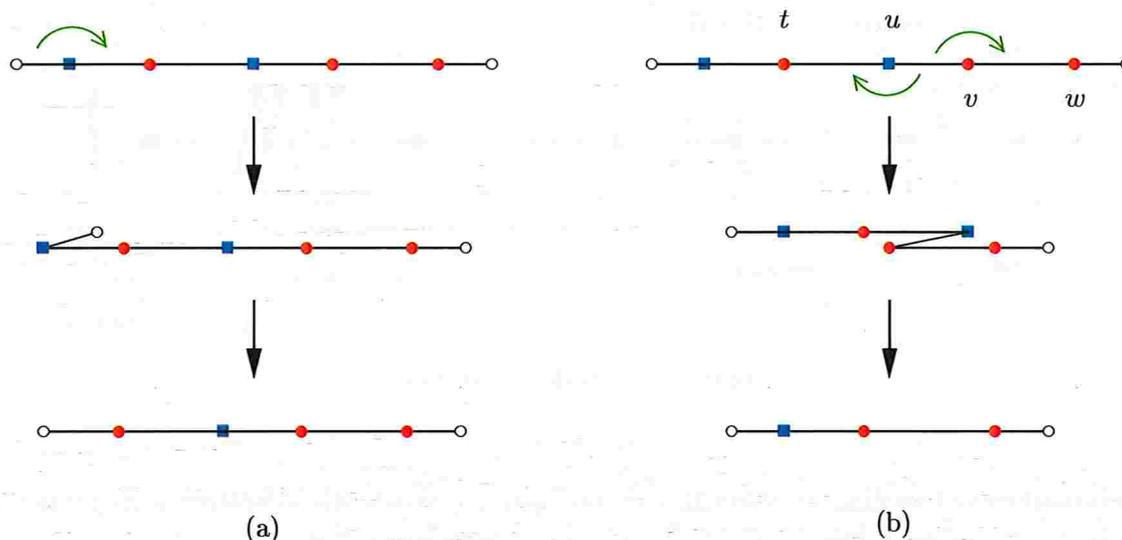


Figura 2.4: Dobra de uma aresta prega.

o diagrama obtido realizando as dobras u e v é de um modelo retilíneo.

Demonstração: Se a prega uv é aresta de uma ponta do diagrama, então a dobra dessa prega é equivalente a remover essa aresta (figura 2.4(a)). Portanto, como D é diagrama de um modelo retilíneo, então é evidente que a remoção da aresta uv mantém essa propriedade.

Assim podemos supor que uv não seja uma aresta em uma das pontas do diagrama e que tu e vw são as arestas adjacentes à aresta uv . Além disso, também podemos supor que u é um vértice montanha e v é um vértice vale (figura 2.4(b)).

Considere um modelo retilíneo M correspondente a D . Se em M temos que tu está imediatamente acima da aresta uv e a aresta uv está imediatamente acima da aresta vw , então não há o que demonstrar. Dessa forma, podemos supor que em M há partes do diagrama que estão entre as aresta tu e uv ou entre as arestas uv e vw , como ilustra a figura 2.5(a). As camadas do modelo entre tu e uv podem ser movidas para “baixo” da aresta vw e as camadas do modelo entre as arestas uv e vw podem ser movidas para “cima” da aresta tu , como ilustra a figura 2.5(b). Esses movimentos só são possíveis pois o comprimento de uv é menor ou igual aos comprimentos de tu e vw e, portanto, não encontraremos nenhuma obstrução ao fazer esses movimentos.

Dessa forma, obtemos um modelo retilíneo de D que pode ser obtido realizando as

dobras u e v . ■

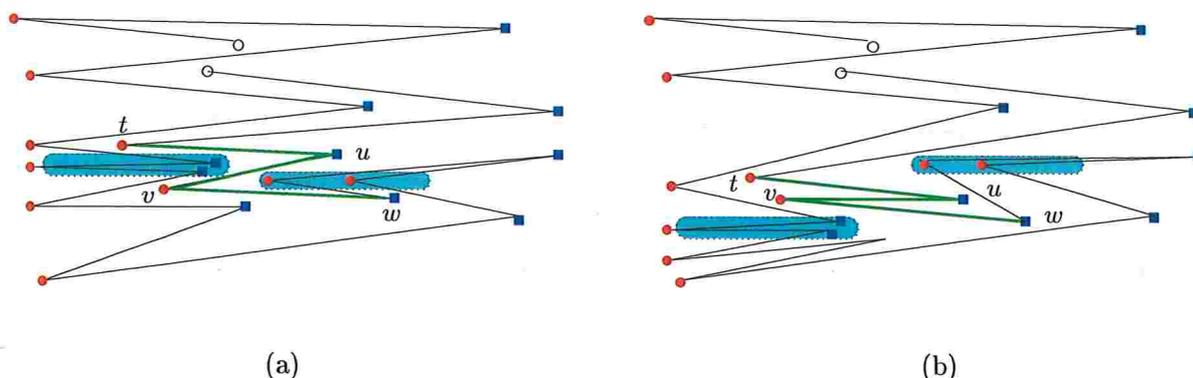


Figura 2.5: (a) Modelo retilíneo em que a aresta prega uv e suas arestas adjacentes não são consecutivas. (b) Modelo retilíneo em que a aresta prega uv e suas arestas adjacentes são consecutivas.

Lema 2.2: *Se D é um diagrama de um modelo retilíneo, então D possui uma aresta prega.*

Demonstração: Sejam u_0, u_1, \dots, u_n os vértices consecutivos de D . Seja i o maior índice tal que os vértices u_0, u_1, \dots, u_i têm a mesma orientação. Se o comprimento de u_0u_1 é menor ou igual ao comprimento de u_1u_2 , então u_0u_1 é uma prega. Assim, como D é diagrama de um modelo retilíneo, podemos supor que a seqüência dos comprimentos dos segmentos $u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{i-1}u_i$ é não crescente. Se $i = n$ então $u_{n-1}u_n$ é uma prega.

Se o comprimento de $u_{i-1}u_i$ é menor ou igual que o comprimento de u_iu_{i+1} , então $u_{i-1}u_i$ é uma prega. Portanto, de maneira semelhante ao que já fizemos, seja j o maior índice tal que u_{i+1}, \dots, u_j têm a mesma orientação. Podemos supor que a seqüência dos comprimentos dos segmentos $u_{i+1}u_{i+2}, \dots, u_{j-1}u_j$ é não crescente. Se $j = n$, então $u_{n-1}u_n$ é uma prega e se o comprimento u_ju_{j+1} é maior que o comprimento de $u_{j-1}u_j$ então $u_{j-1}u_j$ é uma prega. Repetindo esse raciocínio terminaremos por encontrar uma prega no diagrama D . ■

Com o lema 2.1 e o lema 2.2, temos o teorema a seguir.

Teorema 2.3: *Todo diagrama que corresponde a um modelo retilíneo pode ser*

dobrado através de uma seqüência de dobras de pregas. ■

Com isto mostra-se a existência de um algoritmo iterativo muito simples para o problema RETILINEAR: basta em cada iteração encontrar alguma aresta prega e realizar a dobra correspondente; caso tal dobra não seja encontrada a resposta ao problema é NÃO. Uma implementação ingênua desse algoritmo consumiria tempo $O(n^2)$, onde n é o número de vértices. No entanto, mantendo as arestas em uma lista circular e inicialmente marcando todas as pregas pode-se, após cada dobra de uma prega, verificar se uma das suas arestas vizinhas tornou-se uma prega. Com isso obtém-se, em cada iteração, uma aresta prega em tempo constante e o algoritmo resultante consome tempo $O(n)$. Assim, temos o teorema a seguir.

Teorema 2.4: *O problema RETILINEAR(D) pode ser resolvido em tempo $O(n)$, onde n é o número de arestas do diagrama D .* ■

2.2 Modelos planos

Nesta seção passaremos a considerar o problema a seguir.

Problema PLANAR(D): um dado diagrama D corresponde a um modelo plano?

Esse problema é computacionalmente muito mais difícil que a sua versão unidimensional, como é mostrado na próxima seção. Aqui nos concentraremos em propriedades “locais” de modelos planos que há muito tempo são conhecidas dos origamistas.

Jun Maekawa é um físico japonês que tem origami como passatempo. Ele é criador de modelos complexos como o conhecido demônio alado (*winged demon*). Maekawa observou que em um diagrama de modelo plano a diferença entre o número de linhas da montanha e de linhas do vale incidentes a cada vértice “interno” é sempre 2 ou -2 . Essa observação foi denominada de teorema de Maekawa no livro *Origami for the Connoisseur* de Kunihiko Kasahara e Toshie Takahama [40]. Independentemente, o matemático francês Jacques Justin chegou a essa mesma relação e a publicou em 1986 na revista *British Origami* da *British Origami Society* [38].

Teorema 2.5 (de Maekawa): *Em um diagrama que corresponde a um modelo*

plano a diferença entre o número de linhas da montanha e de linhas do vale incidentes a cada vértice interno ao diagrama é igual 2 ou -2 .

A demonstração a seguir é devida a Jan Siwanowicz e aparece no artigo de Thomas Hull [34].

Demonstração: Seja m o número de linhas da montanha e v o número de linhas do vale incidentes sobre um certo vértice. Esse vértice corresponde a uma ponta em um correspondente modelo plano. Cortando essa ponta através de um plano, um polígono nos será revelado, como ilustra a figura 2.6. Os ângulos internos desse polígono são de

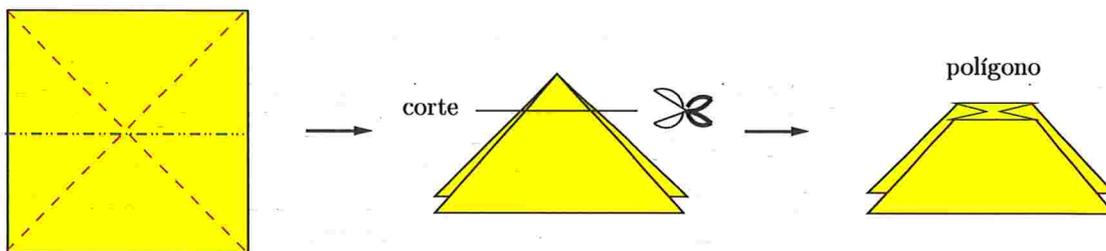


Figura 2.6: Ilustração da demonstração do teorema de Maekawa.

0 ou 2π graus correspondentes às linhas da montanha e do vale respectivamente. Logo, como a soma dos ângulos internos do polígono é $(m + v - 2)\pi$, concluímos que

$$m \cdot 0 + v \cdot 2\pi = (m + v - 2)\pi \Rightarrow m - v = 2.$$

É evidente que olhando o modelo “por baixo” obtemos que $m - v = -2$. ■

Conseqüência imediata do teorema de Maekawa é que o número de linhas incidentes sobre um vértice de um diagrama de modelo plano é sempre par. Os vértices que estão na borda do diagrama não possuem necessariamente grau par. Dessa relação de paridade segue que as faces de um diagrama de modelo plano podem ser coloridas com duas cores de forma que faces adjacentes tenham cores diferentes, isto é que chamamos de uma **2-coloração** das suas faces.

Corolário 2.6: *Todo diagrama de um modelo plano é 2-coloração das suas faces.* ■

É muito fácil obter essa coloração a partir de um modelo plano. Para isso basta colorirmos as faces voltadas para cima de uma cor e as voltadas para baixo de outra cor. Ao desfazer o processo de dobra temos uma bicoloração, já que cada linha implica em uma dobra que “joga” a face vizinha para o outro lado do modelo e portanto foi colorida com a outra cor.

Uma segunda relação, batizada no livro de Kunihiko Kasahara e Toshie Takahama [40] de teorema de Kawasaki [41], também aparece no artigo de Jacques Justin na revista *British Origami* [38]. Esse teorema diz respeito à soma alternada dos ângulos formados pelas linhas do vale e da montanha ao redor de um vértice de um diagrama de modelo plano (figura 2.7).

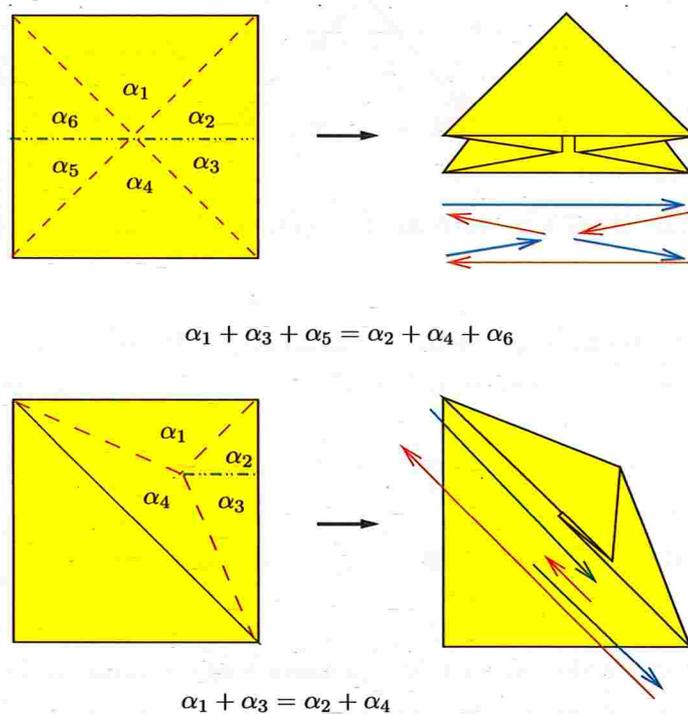


Figura 2.7: Ilustração do teorema de Kawasaki.

Teorema 2.7 (de Kawasaki): *A soma alternada das medidas dos ângulos formados pelas linhas do vale e da montanha ao redor de um vértice de um diagrama de modelo plano é igual a π .*

Demonstração: Suponha que $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ são as medidas dos ângulos ao redor de um vértice. É evidente que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n} = 2\pi.$$

Considerando esse vértice no modelo resultante (figura 2.7), vemos que

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n} = 0,$$

e portanto

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \pi.$$

■

Toshikazu Kawasaki [41] demonstrou que se os ângulos ao redor de um vértice satisfazem a condição do teorema 2.8, então existe uma atribuição de vale e montanha às linhas do diagrama incidentes sobre o vértice de tal forma que o modelo resultante seja planar em uma vizinhança desse vértice.

Teorema 2.8 (Kawasaki): *Suponha que α, β e γ sejam ângulos consecutivos ao redor de um vértice de um diagrama associado a um modelo plano. Se $\beta < \alpha$ e $\beta < \gamma$, então as linhas que formam o ângulo β não podem ser ambas do vale ou ambas da montanha.*

■

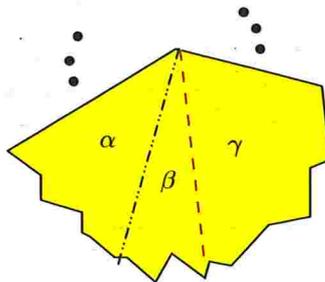


Figura 2.8: Ilustração do teorema 2.8.

A figura 2.9 exibe um diagrama em que cada vértice satisfaz a hipótese do teorema de Kawasaki e que, no entanto, não corresponde a algum modelo plano, independentemente da atribuição de vale e montanha que forem feitas às linhas do diagrama. A razão dessa não planaridade é devida ao teorema 2.8, pois como os ângulos α, β e γ são menores que

os ângulos vizinhos isto força uma certa inconsistência das linhas que formam o triângulo central. Este exemplo mostra que as condições vistas de “planaridade local” não são extensíveis à “planaridade global”.

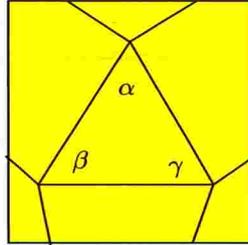


Figura 2.9: Diagrama que não corresponde a um modelo plano.

Thomas Hull [34] conjecturou que um dado diagrama corresponderia a um modelo plano se e somente se as condições dos teoremas de Maekawa e Kawasaki fossem satisfeitas e o grafo linha² associado ao diagrama fosse bipartido. Por exemplo, o grafo linha associado ao diagrama da figura 2.9 não é bipartido. No entanto, essa conjectura é falsa, como mostraram Marshall Bern e Barry Hayes [8].

2.3 Mapas

Nesta seção trataremos de uma generalização dos resultados vistos na seção 2.1. No problema que passaremos a considerar teremos um diagrama em um pedaço de papel retangular formado apenas por linhas horizontais ou verticais. Aqui estamos considerando como horizontais ou verticais as linhas que são paralelas aos lados do papel. É evidente que se um diagrama como este corresponde a um modelo plano então, devido à condição do teorema de Maekawa (teorema 2.5), temos quatro linhas incidentes sobre cada vértice interno do diagrama. Portanto, neste caso, cada uma das linhas deve atravessar o papel de uma margem à outra, como nas linhas do vale e da montanha em um mapa rodoviário comum. Devido a essa analogia, passaremos a chamar de **mapa** qualquer diagrama em um papel retangular que tenha esse aspecto de “grade” (figura 2.10).

Jack Edmonds observou³ que há mapas que correspondem a um modelo plano, mas que apesar disto não podem ser transformados em um modelo plano através de um processo

²O grafo linha $L(G)$ de um grafo G é o grafo que tem como conjunto de vértices as arestas de G e como conjunto de arestas todos os pares de arestas de G que são adjacentes.

³Este fato é mencionado no trabalho de Esther M. Arkin e colaboradores [5].

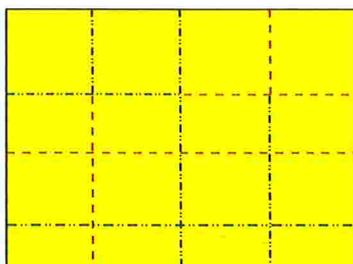


Figura 2.10: Exemplo de um mapa.

de dobras em que cada dobra seja simples (seção 1.2). A figura 2.11 mostra dois exemplos desse tipo de diagrama.

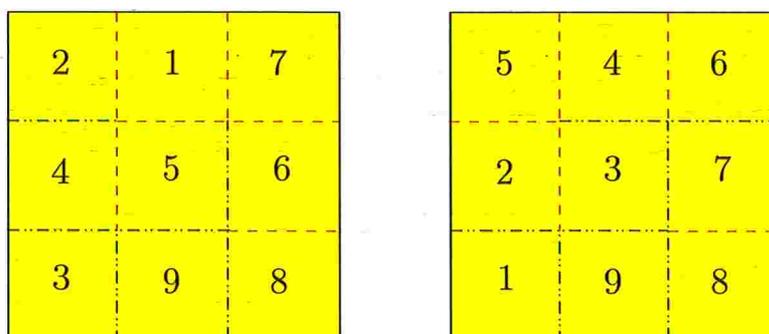


Figura 2.11: Dois mapas que não podem ser dobrados em um modelo plano através de dobras simples, mas podem ser dobrados em um modelo plano. Os números indicam a ordem em que as faces são sobrepostas.

Chamaremos de **processo de dobra simples** todo processo de dobra em que cada dobra é simples. O problema para o qual veremos uma solução nesta seção é o seguinte:

Problema DOBRA-MAPA(M): dado um mapa M , encontrar um processo de dobra simples que transforma M em um modelo plano.

Notemos que os mapas da figura 2.11 não possuem uma linha do vale ou da montanha que atravessa o papel de uma margem a outra. Portanto, é claro que não existe um processo de dobra simples que transforma algum desses diagramas em um modelo plano. Logo, em um digrama que pode ser transformado em um modelo plano através de um processo de dobras simples, como o processo ilustrado na figura 2.12, deve existir pelo menos uma linha do vale ou da montanha que atravesse o papel de uma margem à

atravessa o papel é formada por arestas que são linhas do vale e por arestas que são linhas da montanha. Para cada linha horizontal e cada linha vertical, mantemos o número de arestas do vale e o número de arestas da montanha que formam a linha. A fim de atualizarmos esses números à medida que as dobras são realizadas, percorremos a linha que desaparecerá após a dobra e decrementamos os números das arestas correspondentes. O custo de percorrer essa linha é proporcional ao número de linhas que a cruzam. Toda vez que o número de arestas do vale ou o número de arestas da montanha de uma linha atinge zero, inserimos essa linha à lista das linhas que serão dobradas na próxima fase. Assim, obtemos um algoritmo de consumo de tempo total é $O(hv)$. ■

Notemos que o consumo de tempo do algoritmo descrito na demonstração do teorema 2.9 é linear, já que o espaço para descrever a orientação vale e montanha de cada aresta do diagrama é $\Theta(hv)$.

2.4 Complexidade computacional

Esther M. Arkin e colaboradores [5] mostraram que decidir se um dado diagrama corresponde a um modelo plano é um problema NP-completo, pela redução ao problema da partição:

Problema PARTIÇÃO(X): Dado um conjunto X de n números inteiros positivos a_1, a_2, \dots, a_n cuja soma é A , existe um subconjunto S de X tal que a soma dos elementos de S seja igual a $A/2$?

Para facilitar a demonstração, vamos supor que sempre que a resposta ao problema PARTIÇÃO(X) é SIM, então o elemento a_1 está em S .

Vamos transformar uma instância do problema PARTIÇÃO em uma instância do problema PLANAR. Mais especificamente, mostraremos como transformar uma instância X do problema PARTIÇÃO em um diagrama, que é uma instância do problema PLANAR. Esse diagrama será bem particular; todas as linhas serão verticais ou horizontais e todas serão do tipo vale.

No esquema de dobras da figura 2.13 a ser considerado, todas as linhas são do vale, a largura ϵ é menor que 1, e existe uma formação em escada em que cada degrau tem sua altura igual ao valor de um elemento a_i de X . Além disso, existem mais dois degraus, de

altura L e $2L$, onde L é um valor arbitrário maior que $A/2$. A largura total w_1 da escada é menor que a largura w_2 da moldura.

Intuitivamente, podemos pensar que, para o diagrama da figura 2.13, precisamos “enrolar” a escada de tal maneira que seja possível dar a volta através do espaço da moldura. Para isso ser feito, a escada deverá ser enrolada de forma que, antes de passar pela moldura, ela se encontre exatamente no ponto central da mesma, só dessa maneira as linhas dos vales l_0 e l_1 poderão ser dobradas.

A maneira pela qual dobramos a escada antes de passar pela moldura fornece uma solução para o PARTIÇÃO(X): os degraus que sobem fazem parte de S , e os que descem de X/S .

Lema 2.10: *Se a resposta do problema PARTIÇÃO(X) é SIM, então o diagrama construído corresponde a um modelo plano.*

Demonstração: Suponha que S é uma parte de X tal que a soma dos elementos em S é $A/2$. Para cada linha do vale l_i diferente de l_1 , dobramos essa linha se apenas um dos valores a_{i-1} e a_i está em S .

Depois de efetuar as dobras, estamos andando na direção $-y$ para os elementos que estão em S e em $+y$ para os que estão em X/S . Já que a soma dos elementos desses subconjuntos são iguais a $A/2$, os pontos p_4 e p_5 vão ficar alinhados na horizontal. Como $L > A/2$, todas as dobras dos degraus de altura a_i vão ficar entre os pontos p_1 e p_2 , isto é, dentro da moldura. Já o ponto p_6 vai ter a mesma coordenada y que p_1 ou p_2 , pois antes de dobrar ele dista L de p_5 , e isso continua valendo agora, mas ele pode estar para cima ou para baixo de p_5 pois não sabemos se a linha l_{n+1} foi dobrada.

Dobramos l_{n+2} , fazendo com que p_7 fique horizontalmente alinhado com p_1 ou p_2 , e dessa forma deixando p_6 e p_7 exatamente entre as coordenadas da moldura, conforme figura 2.14.

Agora, dobramos o vale l_1 , fazendo toda a escada passar pelo retângulo de vértices p_0, p_1, p_2 e p_3 pois $w_2 > w_1$, e dobramos l_0 , passando a escada de vez pela moldura. Finalmente podemos facilmente dobrar o restante dos vales que correspondem a degraus. ■

Lema 2.11: *Se o diagrama construído corresponde a um modelo plano, então a resposta ao problema PARTIÇÃO(X) é SIM.*

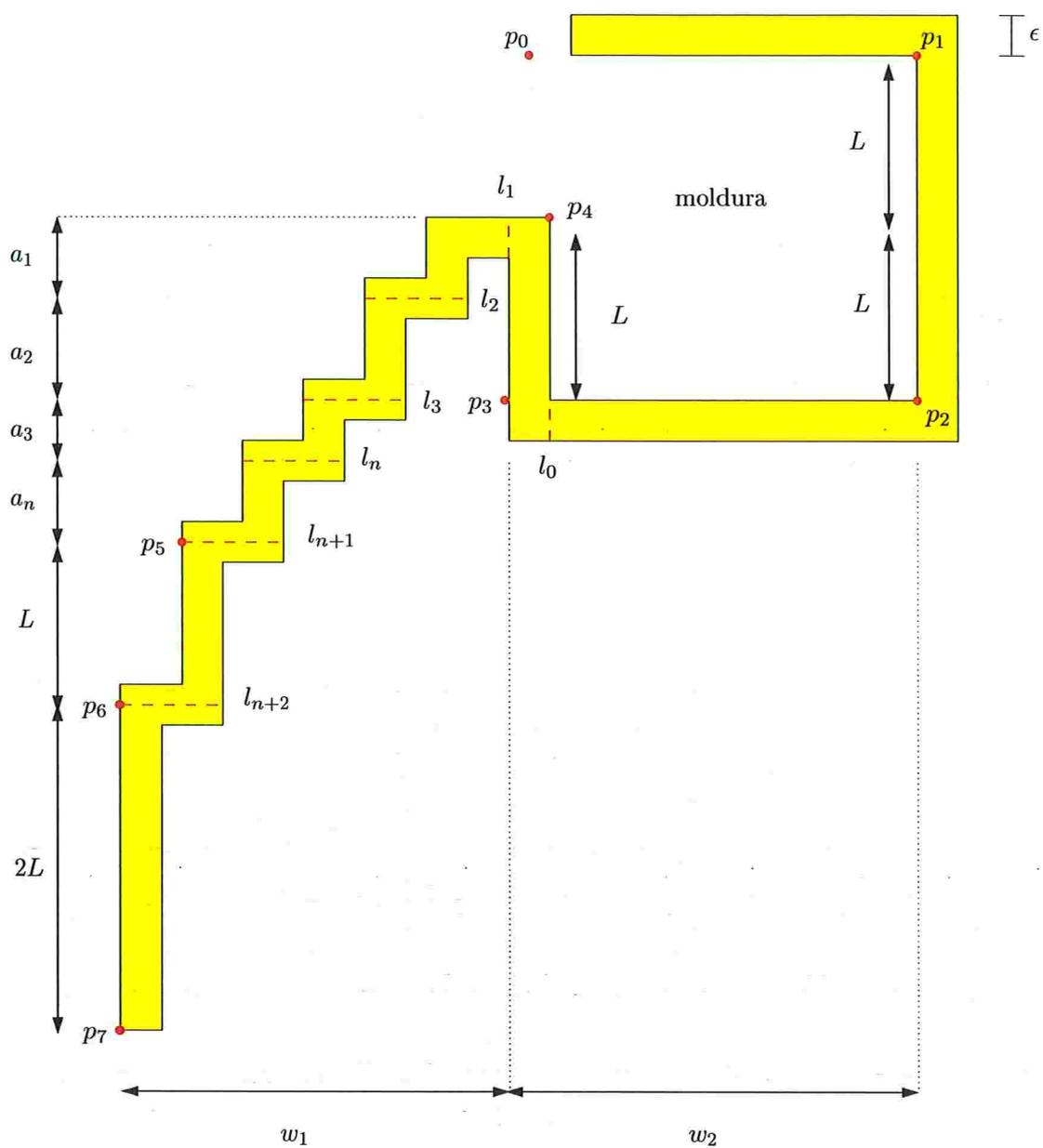


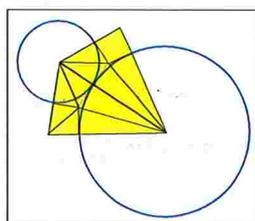
Figura 2.13: Diagrama da redução do problema PARTIÇÃO ao problema PLANAR.

A redução apresentada nesta seção mostra que o problema planar, mesmo com linhas do vale e da montanha verticais e horizontais é NP-completo. Como a redução é a partir do problema PARTIÇÃO, a conclusão é que o problema PLANAR é NP-completo “no sentido fraco”. Desse ponto de vista, é de particular relevância o trabalho de Marshall Bern e Barry Hayes [10] que demonstraram, através de redução muito mais envolvente do que a que foi aqui apresentada, que o problema PLANAR é NP-completo no “sentido forte”. No entanto, o diagrama produzido pela redução de Marshall Bern e Barry Hayes utiliza linhas que não são verticais nem horizontais.

Moléculas

Every now and again talented individuals emerge who have the ability to drive origami design forwards (or sometimes backwards, depending on your point of view) and who influence the direction of future origami design to a greater or larger extent.

A brief outline of origami design history
David Mitchell [51]



Em dobraduras, alguns padrões de diagramas de dobras aparecem e reaparecem com frequência. O origamista Toshiyuki Meguro cunhou o termo molécula (em japonês *bun-shi*) para descrever diversos diagramas regulares. Robert J. Lang passou a utilizar esse termo para diagramas que seguem algumas outras propriedades [46].

Molécula é um diagrama que quando dobrado plano tem seu perímetro ao longo de uma mesma linha e tem determinados pontos do perímetro que se tornam coincidentes e que são chamados de **vértices de tangência**. A razão do nome desses pontos ficará clara mais adiante.

Iniciaremos este capítulo, nas seções 3.1, 3.2 e 3.3, descrevendo algumas moléculas simples: a orelha do coelho, a bomba d'água e a nesga. Essas moléculas serão os blocos a partir dos quais construiremos moléculas mais complexas no restante deste capítulo.

Moléculas aparecem para os origamistas como bases de diversas dobraduras e, em nosso estudo, serão de fundamental importância para resolver o problema de dobrar e cortar, que veremos no próximo capítulo.

3.1 Orelha do coelho

A molécula **orelha do coelho** (*rabbit ear*) é a forma mais simples de dobrar um triângulo tal que o modelo final fique plano como na figura 3.1(a).

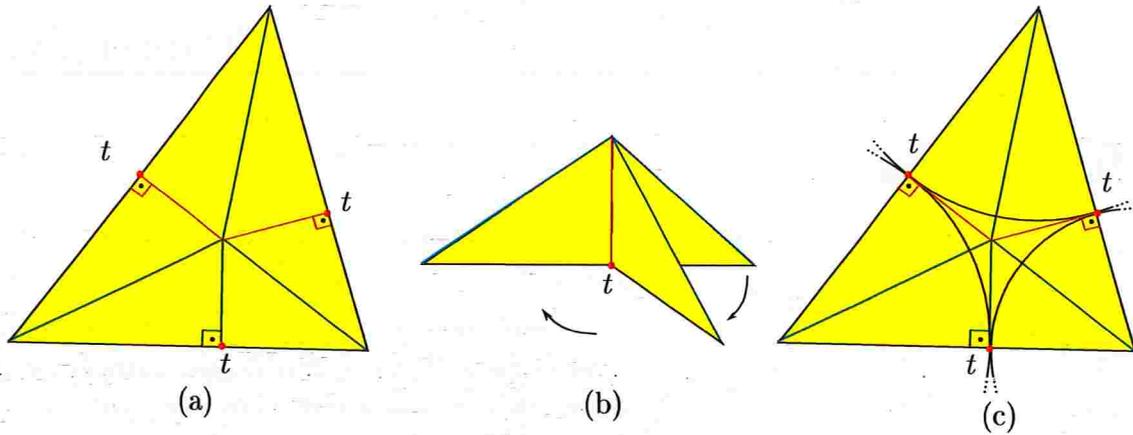


Figura 3.1: Orelha do coelho.

Para construir esse diagrama, criamos três montanhas a partir das bissetrizes desse triângulo, até o seu incentro. Outras três linhas são criadas ligando o incentro a cada um dos lados do triângulo, formando ângulo reto (figura 3.1(a)). Dessas últimas três linhas, escolhemos duas linhas para ser vale e a outra para ser montanha. Os pontos nos lados do triângulo são os vértices de tangência que se tornam coincidentes no diagrama quando dobrado plano; na figura 3.1 esses pontos são indicados por t .

É fácil perceber que esse diagrama respeita a condição do teorema de Maekawa (teorema 2.5), pois temos quatro linhas da montanha e duas linhas do vale. O diagrama também respeita as condições dos teoremas de Kawasaki (teoremas 2.7 e 2.8), pois o incentro é a intersecção de bissetrizes.

O modelo plano resultante é mostrado na figura 3.1(b). Repare que poderíamos deixar de dobrar uma das pontas da orelha do coelho, não dobrando duas das nossas quatro dobras, e mesmo assim teríamos um modelo planar. Vamos analisar um pouco mais o diagrama orelha do coelho.

O incentro de um triângulo é o centro da circunferência inscrita, então sabemos que esse ponto está a mesma distância, digamos r , de cada um dos lados.

Por semelhança de triângulos, a distância de cada vértice do triângulo aos vértices de tangência nas arestas incidentes sobre esse vértice é a mesma. Esse fato é ilustrado na

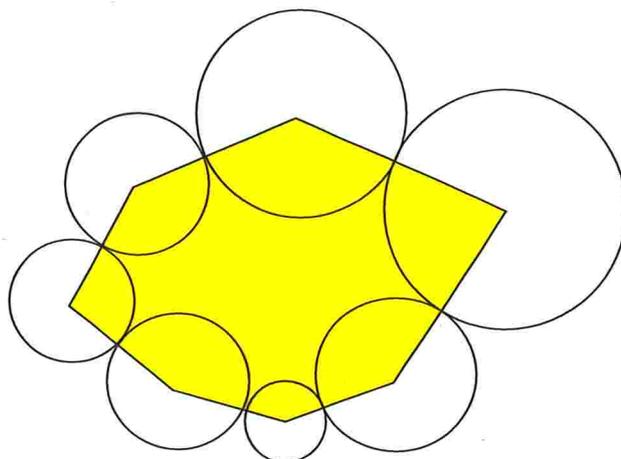


Figura 3.2: Um polígono e seu conjunto gerador.

figura 3.1(c), através dos discos centrados em cada um dos vértices. Esses discos formam o que chamaremos de conjunto gerador do triângulo. De forma mais geral, um conjunto de discos internamente disjuntos é **gerador** de um polígono se o centro de cada disco é vértice do polígono e cada disco é tangente a exatamente dois discos, como na figura 3.2.

Na molécula orelha do coelho, os pontos definidos pela intersecção dos discos de um conjunto gerador com seu polígono coincidem com os vértices de tangência (figura 3.1(c)).

3.2 Bomba d'água

Uma das diferenças entre triângulos e quadriláteros é que triângulos possuem um único conjunto gerador e os quadriláteros possuem zero ou infinitos conjuntos geradores. Por exemplo, o quadrilátero da figura 3.3 não possui conjunto gerador.

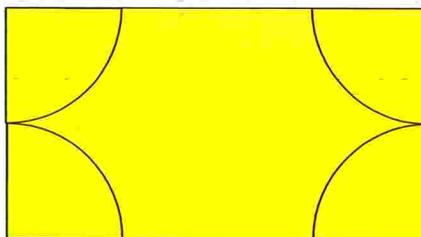


Figura 3.3: Quadrilátero sem conjunto gerador.

Considere um quadrilátero que possui um conjunto gerador (figura 3.4(a)). Podemos formar dois pares de discos tais que dois discos estejam no mesmo par se eles não são tangentes. Sempre podemos somar um valor positivo ϵ suficientemente pequeno aos raios dos discos de um dos pares e subtrair o mesmo valor ϵ dos raios dos discos do outro par para obter outro conjunto gerador para o mesmo quadrilátero (figura 3.4(b)).

Isso nos permite concluir que um quadrilátero possui zero ou infinitos conjuntos geradores. Então construir uma molécula para quadrilátero não será tão simples como foi para triângulo, pois para ser molécula um diagrama deve levar os vértices de tangência em um único ponto para **todo** conjunto gerador do polígono.

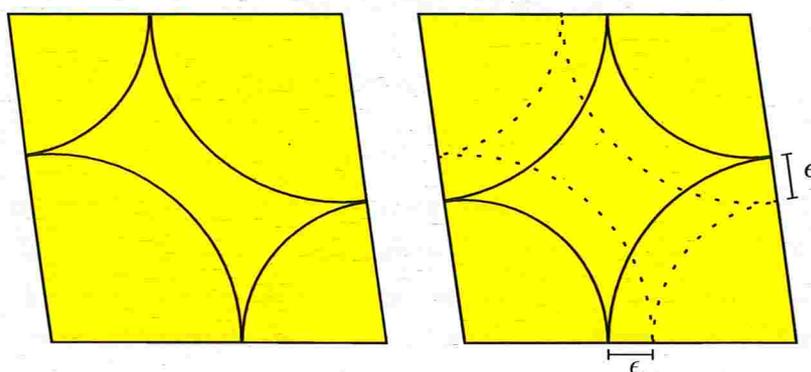


Figura 3.4: Dois conjuntos geradores de um mesmo quadrilátero.

Queremos construir moléculas que tenham como perímetro quadriláteros que possuam conjuntos geradores, pois os que não possuem não serão de nosso interesse, como veremos.

A molécula mais simples que tem como perímetro um quadrilátero que possui conjunto gerador é a **bomba d'água** (*waterbomb*) da figura 3.5(a). Esse diagrama usa o fato de que todo quadrilátero gerado por discos tem a propriedade de suas bissetrizes se encontrarem em um mesmo ponto [48], o centro da circunferência inscrita.

A descrição da molécula da bomba d'água é como se segue:

1. linhas da montanha são traçadas a partir de cada vértice do quadrilátero e em direção ao ponto de intersecção de todas as bissetrizes;
2. três linhas do vale e uma da montanha são traçadas a partir do ponto de intersecção das bissetrizes na direção dos lados do quadrilátero, formando ângulo reto.

Quando dobramos a molécula bomba d'água, o perímetro do quadrilátero fica ao longo

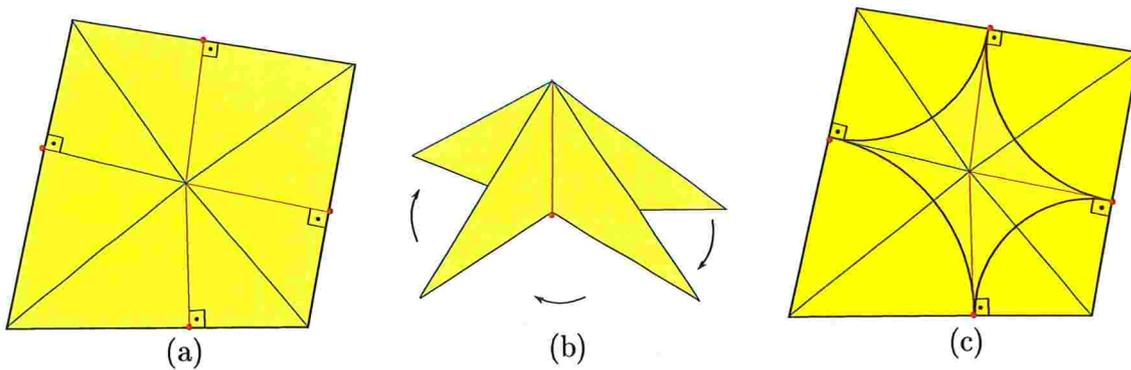


Figura 3.5: Molécula da bomba d'água.

de uma mesma linha (figura 3.5(b)). Somente para um conjunto gerador do quadrilátero os vértices de tangência coincidem com os pontos de intersecção entre os discos (figura 3.5(c)). Usando semelhança de triângulos podemos verificar que sempre existe tal conjunto gerador.

Dado um conjunto gerador de quadrilátero, a molécula na qual estamos interessados deve ter como vértices de tangência as intersecções dos discos. Nesse sentido, a molécula bomba d'água não será sempre do nosso interesse, como mostra a figura 3.6, onde os vértices de tangência não coincidem com os pontos de intersecção para o conjunto gerador dado. Na próxima seção apresentamos uma molécula que nos será mais conveniente.

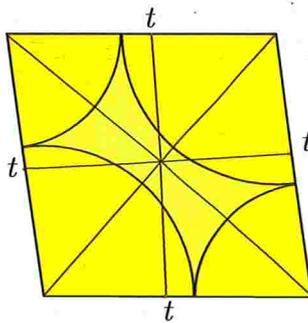


Figura 3.6: Molécula da bomba d'água e conjunto gerador onde os vértices de tangência não coincidem com os pontos de intersecção.

3.3 Nesga

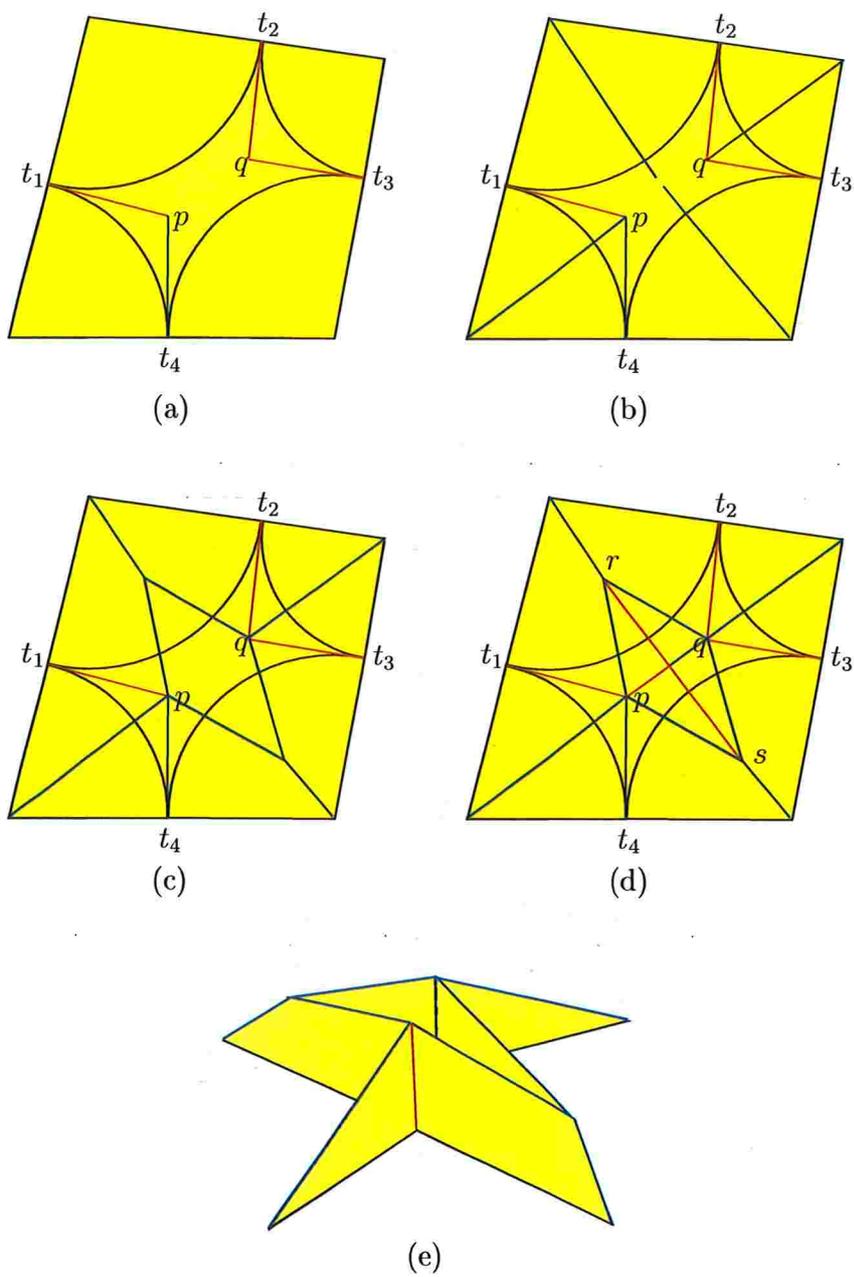
Robert J. Lang [48] criou a molécula **nesga** (*gusset*) que tem como perímetro um quadrilátero e é construída a partir de um de seus conjuntos geradores. Essa molécula terá como vértices de tangência os pontos de intersecção entre os discos. A figura 3.7 ilustra o processo de construção dessa molécula, que é obtida da seguinte maneira:

1. Quatro linhas partem dos vértices de tangência perpendicularmente aos lados do polígono. Duas dessas linhas encontram-se em um ponto p e as outras duas em um ponto q . Três dessas linhas serão do vale, e o restante da montanha. Sem perda de generalidade suponha que a linha que foi escolhida para ser da montanha incide no ponto p (figura 3.7(a)).
2. Quatro linhas da montanha partem dos vértices do polígono. Essas são as bissetrizes dos ângulos formados nos vértices. Uma delas encontrará o ponto p e outra encontrará o ponto q , as demais ficam incompletas por enquanto (figura 3.7(b)).
3. Duas linhas da montanha partem do ponto p . Uma é bissetriz do ângulo $\angle(t_1, p, q)$ e outra é bissetriz do ângulo $\angle(t_4, p, q)$, ambas encontram-se com linhas do tipo montanha que estavam incompletas. Analogamente, são criadas mais duas linhas da montanha partindo do ponto q e traçadas sobre as bissetrizes dos ângulos $\angle(t_2, q, p)$ e $\angle(t_3, q, p)$ (figura 3.7(c)).
4. Entre os pontos r e s é criada uma dobra do tipo vale. Entre os pontos p e q serão criadas duas dobras, uma será montanha e a outra vale. Esta última é a que incide em p .

Notemos que, quando na construção descrita anteriormente os pontos p, q, r e s são coincidentes, obtemos uma molécula bomba d'água.

Podemos verificar que a nesga respeita a condição do teorema de Maekawa, e as de Kawasaki, mas isso não basta para concluirmos que a nesga produz um modelo plano, já que essas condições são apenas necessárias.

Para perceber que essa molécula produz um modelo plano, podemos notar que ela é essencialmente o resultado da “união” de duas orelhas do coelho envoltas por uma “moldura” de determinada largura, como ilustra a figura 3.8. A partir da próxima seção passaremos a tratar dessa união de moléculas.

Figura 3.7: Diagrama *nesga*.

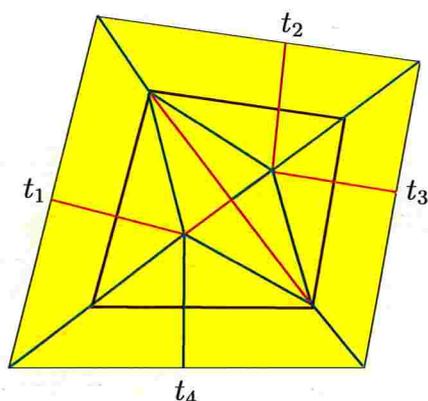


Figura 3.8: Nesga parece duas orelhas do coelho estendidas.

3.4 Moléculas compatíveis

Podemos obter moléculas mais complexas a partir da combinação de moléculas simples. A orelha do coelho e a nesga serão os blocos básicos a partir dos quais construiremos moléculas mais complexas. Entretanto, para essa construção que passaremos a descrever, será de fundamental importância que as orelhas do coelho e nesgas envolvidas tenham conjuntos geradores “compatíveis”.

Diremos que o **tamanho** de uma molécula é o número de orelhas do coelho e de nesgas que a compõe. Na figura 3.9 vemos uma molécula de tamanho cinco, composta por quatro orelhas do coelho e uma nesga (nesse caso uma bomba d’água). Por molécula complexa entendemos uma molécula de tamanho pelo menos dois.

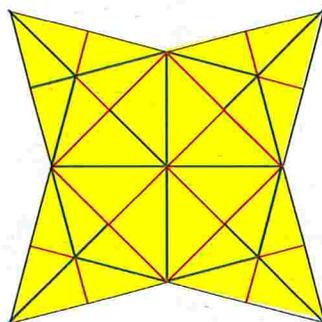


Figura 3.9: Molécula complexa de tamanho cinco.

O processo que descreveremos para a obtenção de moléculas mais complexas é incremental. Por incremental queremos dizer um processo que a cada iteração une uma

molécula de tamanho k a uma molécula simples para obter uma nova molécula de tamanho $k + 1$. Nessa união os diagramas das moléculas são “colados” e, possivelmente, as orientações vale montanha de algumas linhas são alteradas para que o novo diagrama seja uma molécula.

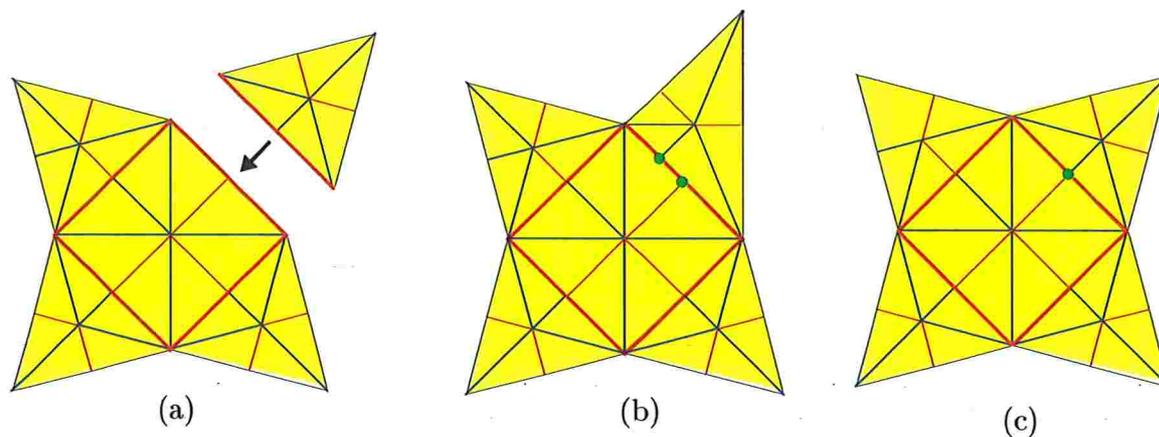


Figura 3.10: (a) União de moléculas. (b) Vértices de tangência não coincidentes, desrespeitando a condição de Maekawa. (c) Vértices de tangência coincidentes, moléculas compatíveis.

Quando unirmos duas moléculas, ao menos um dos lados do polígono determinado pela molécula de tamanho k sobrepõe-se a um dos lados do polígono da molécula simples, como na figura 3.10(a). Para ocorrer a sobreposição de dois lados, precisamos que estes tenham o mesmo comprimento. Essa é a primeira condição para unirmos duas moléculas.

Quando sobrepusermos dois lados, os vértices de tangência podem ou não ser coincidentes. Se os vértices de tangência não forem coincidentes, teremos três linhas incidentes a cada um desses vértices, como mostra a figura 3.10(b). Obtemos assim um diagrama que não satisfaz a condição do teorema de Maekawa, e que portanto não corresponde a um modelo plano, e muito menos a uma molécula.

No caso de os vértices de tangência serem coincidentes, este será um vértice no qual quatro linhas são incidentes (figura 3.10(c)). Assim, a segunda condição necessária para unirmos duas moléculas é que os vértices de tangência dos lados que estão se sobrepondo sejam coincidentes.

Supondo que as moléculas que estamos unindo foram produzidas a partir de discos geradores, a primeira e a segunda condições equivalem a dizer que os discos geradores que estão sobre os lados a serem sobrepostos devem ser coincidentes. Isso é ilustrado na

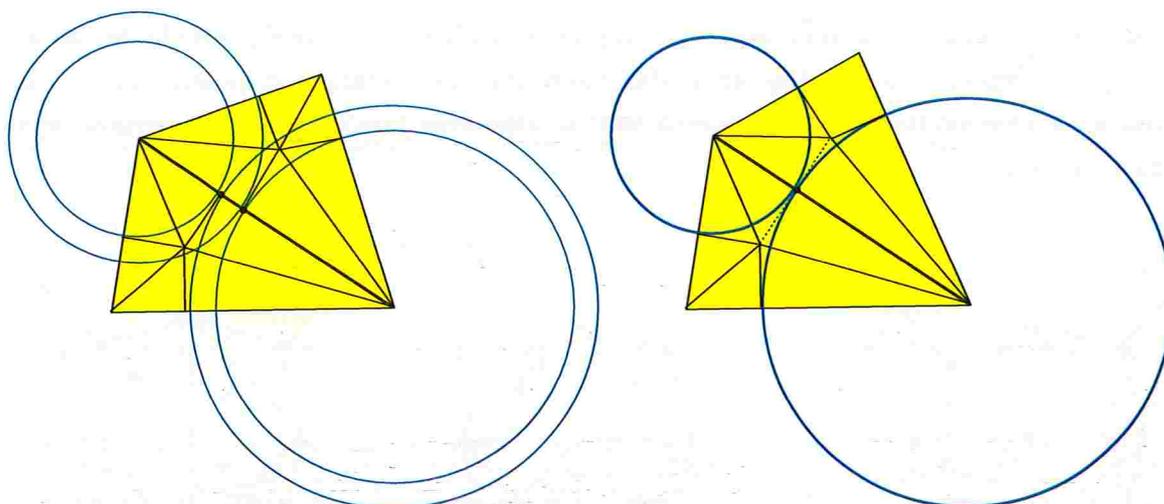


Figura 3.11: Duas orelhas do coelho com discos geradores (a) não-coincidentes e (b) coincidentes.

figura 3.11 através da união de duas orelhas do coelho.

Passaremos a dizer que duas moléculas construídas a partir de conjuntos geradores são **compatíveis** quando os discos geradores que estão sobre os lados a serem sobrepostos são coincidentes. Na figura 3.12 vemos a mesma molécula do início da seção, junto com seu conjunto gerador. Podemos notar que as moléculas adjacentes são compatíveis.

3.5 União de moléculas compatíveis

Até agora discutimos condição de compatibilidade para que duas moléculas possam se unir, a saber, os seus vértices de tangência devem ser coincidentes. Esta condição foi capturada através da sobreposição de conjuntos geradores. Supondo agora que as moléculas a serem unidas são compatíveis, passaremos a considerar as orientações das linhas (vale e montanha) para que o diagrama resultante obtido pela união corresponda a um modelo plano de uma molécula.

União de duas moléculas simples

Inicialmente consideramos os três tipos de união entre moléculas simples.

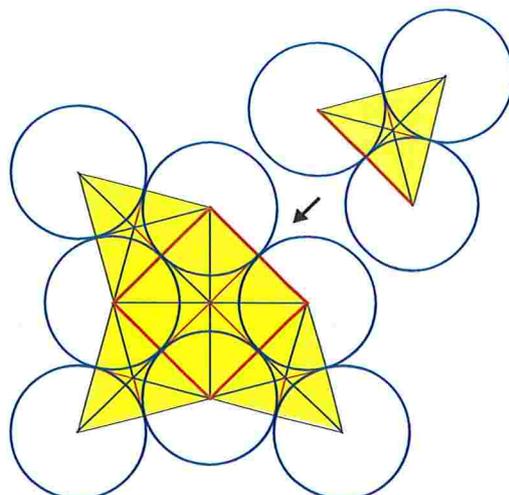


Figura 3.12: Discos geradores coincidentes, moléculas compatíveis.

Quando unimos duas orelhas do coelho compatíveis devemos, possivelmente, modificar a orientação vale ou montanha de uma linha incidente sobre os vértices de tangência que são coincidentes. Em particular, nesse caso é suficiente modificarmos uma dessas linhas de tal maneira que a condição do teorema de Maekawa seja satisfeita (figura 3.13(a)). Esse processo é, intuitivamente, semelhante a encaixarmos os modelos planos de cada molécula como em um livro infantil de encaixes.

De maneira semelhante, quando unimos uma orelha do coelho e uma nesga compatíveis (figura 3.13(b)), ou duas nesgas (figura 3.13(c)), alteramos a orientação de uma linha para que o diagrama resultante respeite a condição do teorema de Maekawa. Nesses casos, isto também basta para que os modelos das moléculas se encaixem, e o diagrama produzido seja de fato o de uma molécula de tamanho dois.

Assim obtivemos todas as moléculas complexas de tamanho dois. Esse será o primeiro passo na demonstração indutiva que mostra que é possível unirmos uma molécula complexa e uma molécula simples compatíveis a fim de obter moléculas de tamanho maior.

União de uma molécula complexa e uma simples

Analisando os três tipos de moléculas complexas de tamanho dois que obtivemos, observamos uma característica comum a elas: nos vértices do polígono determinado pelo perímetro dessas moléculas, o número de linhas do tipo montanha é um a mais que o

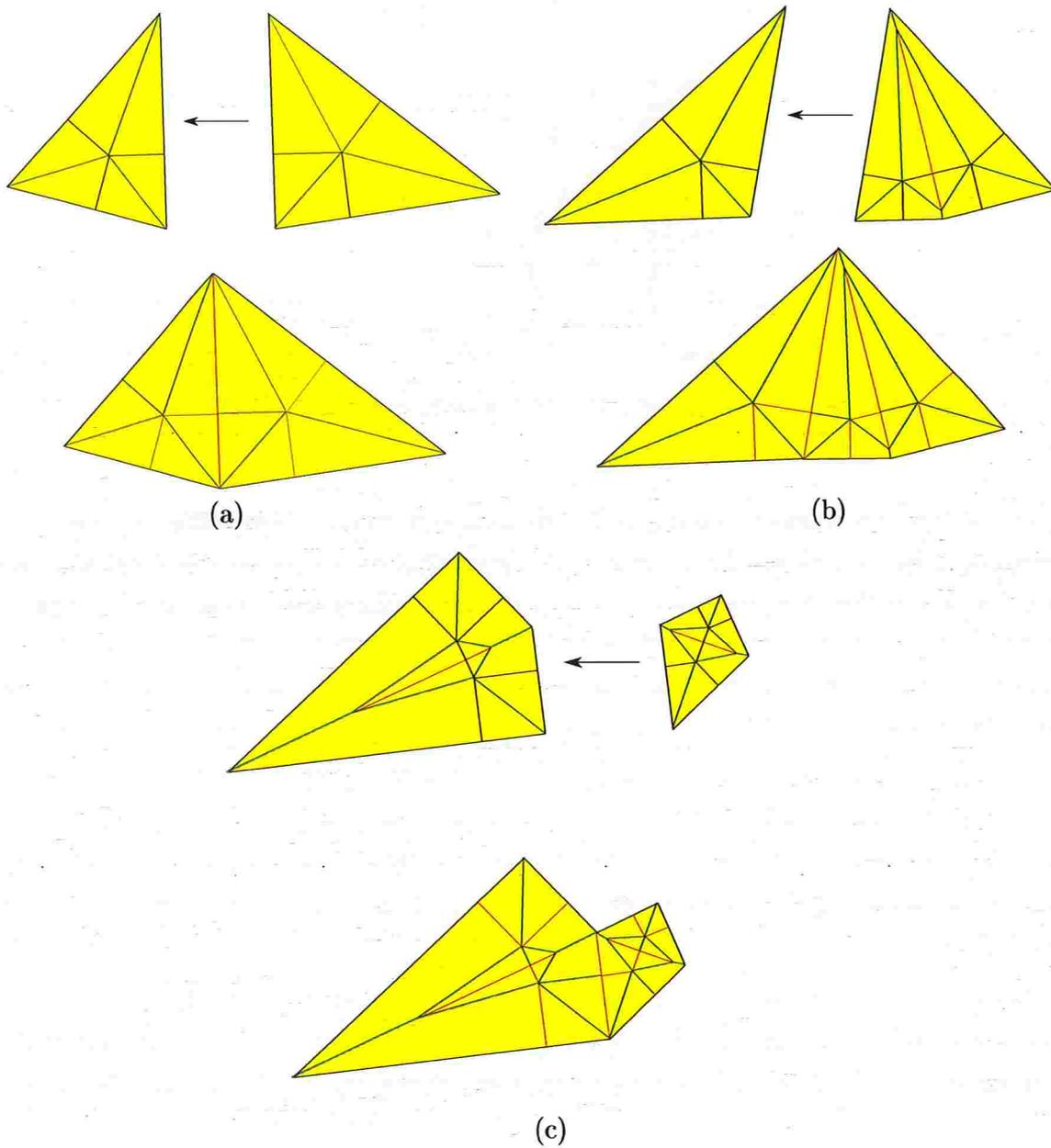


Figura 3.13: (a) União de duas orelhas do coelho. (b) União de uma orelha do coelho com uma nesga. (c) União de duas nesgas.

número de dobras do tipo vale. Veremos que essa é na verdade uma relação invariante para qualquer molécula complexa.

Como vimos, essa relação vale para moléculas de tamanhos um e dois. Consideremos uma molécula de tamanho k , $k \geq 2$, para a qual essa relação se verifica. Verificaremos que é possível unir essa molécula complexa de tamanho k a uma molécula simples, obtendo uma molécula complexa de tamanho $k + 1$ que mantém essa relação invariante. Para isso, mostraremos que é possível definir uma orientação para as determinadas linhas.

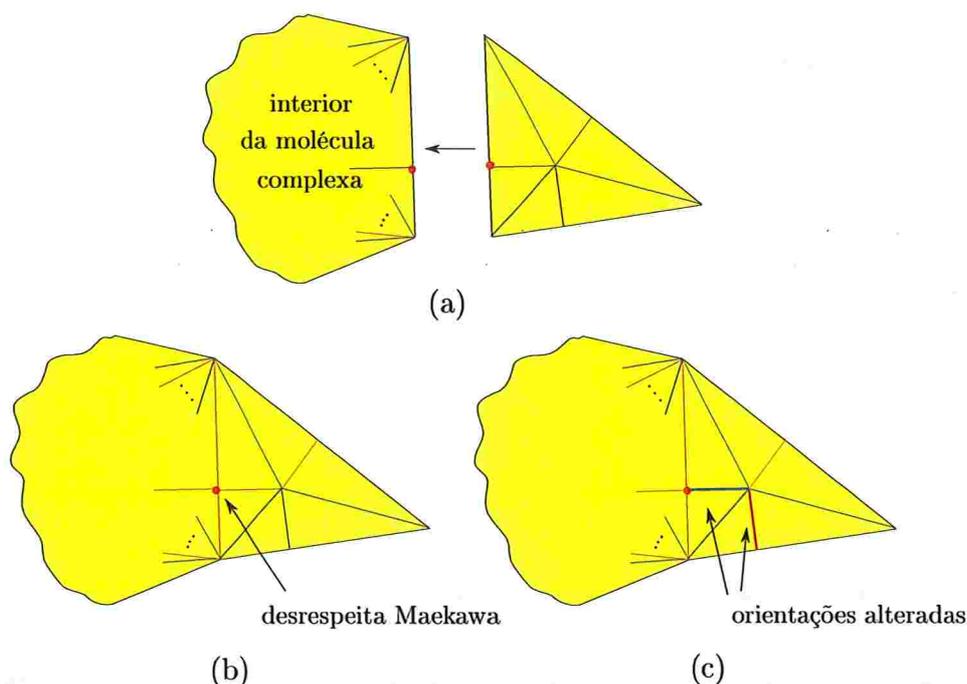


Figura 3.14: (a) União de uma molécula complexa e uma orelha do coelho. (b) Ponto da união que desrespeita a condição de Maekawa. (c) Alteração que torna o diagrama resultante em uma molécula.

Há duas maneiras de unirmos uma molécula complexa de tamanho k a uma orelha do coelho. Na primeira, apenas um dos lados do triângulo da orelha do coelho se sobrepõe a um dos lados do polígono da molécula complexa (figura 3.14(a)). Nessa situação há duas configurações possíveis para as dobras da molécula complexa, dependendo da orientação da linha da molécula complexa incidente sobre o vértice de tangência comum. A figura 3.14(b) ilustra a configuração quando essa linha incidente é do vale e o vértice de tangência comum desrespeita a condição do teorema de Maekawa. Na figura 3.14(c) é mostrado como essa situação pode ser remediada, alterando a orientação de apenas duas linhas da orelha

do coelho. O diagrama resultante agora é uma molécula, e podemos verificar que nos vértices do polígono formado pelo seu perímetro, o número de linhas do tipo vale é um a mais que as do tipo montanha.

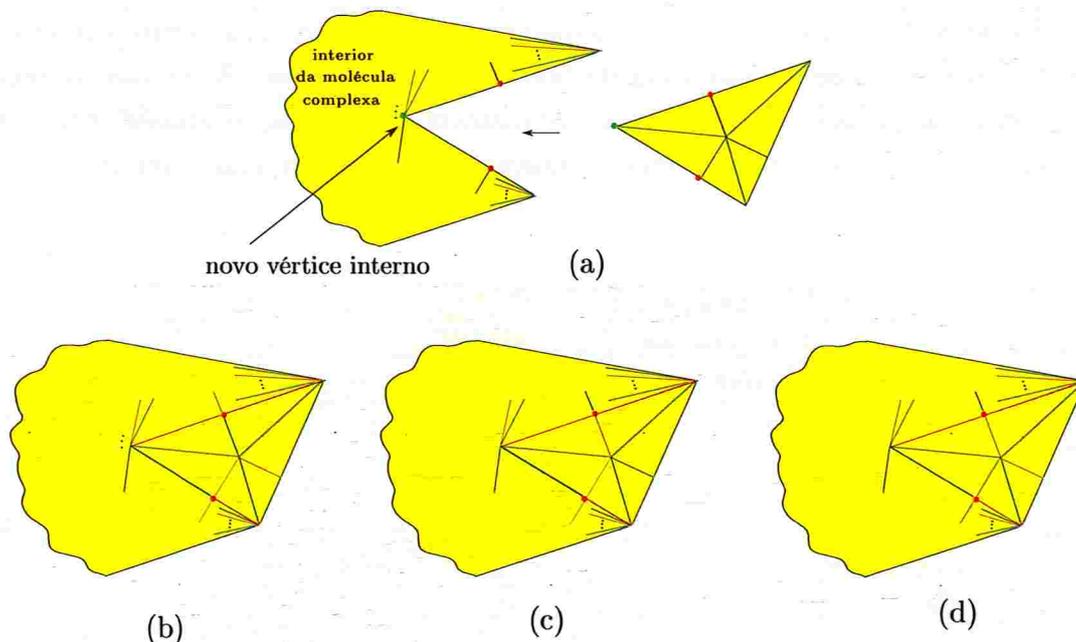


Figura 3.15: União de uma molécula complexa e uma orelha do coelho.

Na segunda maneira de unirmos uma molécula complexa de tamanho k a uma orelha do coelho, dois lados do triângulo da orelha do coelho se sobrepõem a dois lados consecutivos do polígono da molécula complexa e o diagrama resultante tem novo vértice interno (figura 3.15(a)).

Há essencialmente três configurações a serem consideradas para as linhas da molécula complexa, dependendo da orientação das linhas incidentes sobre os vértices de tangência coincidentes. A figura 3.15(b) ilustra a situação quando essas duas linhas são do vale, junto com a orientação das linhas da orelha do coelho que satisfazem a condição de Maekawa e garantem que o diagrama resultante seja uma molécula. Notemos que, da relação invariante, o novo vértice interno também satisfaz a condição de Maekawa, já que há duas novas linhas da montanha incidentes a esse vértice, e uma nova linha do vale. Podemos também verificar que nos vértices do novo polígono o número de linhas do tipo vale é um a mais que as do tipo montanha.

As situações onde as linhas incidentes sobre os dois vértices de tangência coincidentes são uma do vale e outra da montanha e ambas da montanha, são ilustradas nas figu-

ras 3.15(c) e 3.15(d), respectivamente. Nos dois casos podemos verificar que o diagrama resultante é de fato de uma molécula.

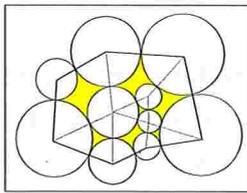
Há três maneiras de unirmos uma molécula complexa de tamanho k a uma nesga. Na primeira, apenas um dos lados do quadrilátero da nesga se sobrepõe a um dos lados do polígono da molécula complexa; e há essencialmente uma possibilidade para as linhas da molécula complexa, semelhante à união ilustrada na figura 3.14. Na segunda maneira, dois lados do quadrilátero da nesga se sobrepõem a dois lados consecutivos do polígono da molécula complexa, e há essencialmente três configurações possíveis para as linhas da molécula complexa, semelhante a união da figura 3.15. Na terceira maneira, três lados do quadrilátero da nesga se sobrepõem a três lados consecutivos do polígono da molécula complexa. Nesse último caso há essencialmente seis configurações possíveis para as linhas da molécula complexa. De maneira exaustiva, como fizemos anteriormente para os casos mais simples, é possível obter uma orientação para as linhas de tal maneira que o diagrama resultante é uma molécula e mantém a relação invariante.

Acabamos de ver como moléculas complexas podem ser obtidas a partir de moléculas mais simples. Robert J. Lang [46, 48] propôs outro método de construir moléculas, as quais chamou de moléculas universais. Essas moléculas não são obtidas, como fizemos aqui, a partir de conjuntos geradores. Para a solução do problema que veremos nos próximos capítulos, os conjuntos geradores terão papel fundamental.

Dobrar e cortar

Most models have their structures.
 You should understand them.
 And find out the best sequence.
 Change some folds if necessary.
 You don't have to follow the diagrams.

Origami Tips
 Hatori Koshiro [43]



Em um livro de problemas matemáticos publicado em 1721, o autor Kan Chu Sen desafia o leitor a dobrar um pedaço de papel e depois com apenas um corte em linha reta formar a figura de um brasão ao abrir o papel (figura 4.1). O grande ilusionista Houdini fazia uma apresentação na qual mostrava truque similar ao de Kan Chu Sen para criar uma estrela de 5 pontas. Esse truque é descrito em 1922 no livro *Paper Magic* (figura 4.2).



Figura 4.1: Capa do livro de Kan Chu Sen e descrição do problema [18].

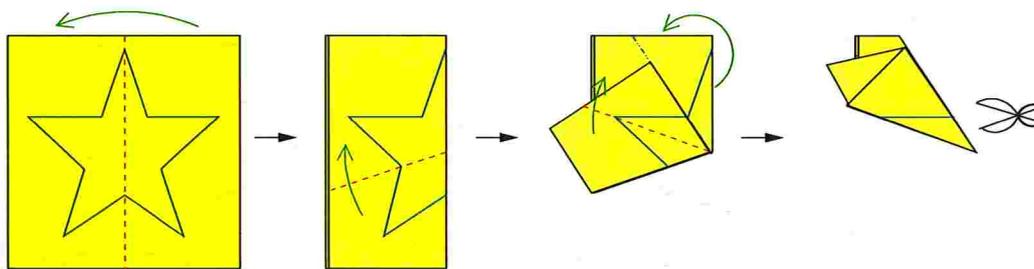


Figura 4.2: Maneira de dobrar uma folha de papel quadrada de tal forma que com um apenas um corte se obtém uma estrela.

Suponhamos que temos um pedaço de papel retangular, e nele esteja desenhado algum polígono, como a estrela de cinco pontas de Houdini ou um simples quadrado. Agora imaginemos que fomos desafiados a separar o polígono do restante do papel com um único corte de tesoura em linha reta, e para isso precisamos dobrar o papel. Para quais tipos de polígono isto é possível? Mais especificamente estamos interessados no seguinte problema:

Problema DOBRAR-E-CORTAR-BOOLEANO(P, R): Dado um polígono simples P desenhado em um pedaço de papel retangular R , é possível dobrar o papel de tal forma que com apenas um “corte reto de tesoura” obtenhamos o polígono P ?

Surpreendentemente, a resposta ao problema DOBRAR-E-CORTAR-BOOLEANO é sempre SIM, independentemente do polígono; mesmo que este tenha “buracos”, como mostraram Erik Demaine, Martin Demaine e Anna Lubiw [21] e Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein e Barry Hayes [9]. Veremos aqui como gerar um diagrama que soluciona não apenas esse problema de decisão, mas também o seguinte problema:

Problema DOBRAR-E-CORTAR(P, R): Dado um polígono simples P desenhado em um retângulo de papel R , obter um diagrama de um modelo plano de tal forma que com apenas um “corte reto de tesoura” obtenhamos o polígono P .

Há dois algoritmos que resolvem o problema. Ambas as soluções utilizam-se de algoritmos e primitivas bem conhecidos na geometria computacional. Um é baseado no diagrama chamado de **esqueleto rígido** (*straight skeleton*) [2, 21]; o outro utiliza o empacotamento de discos (*disk packing*) [9].

Neste texto detalharemos a solução de Bern, Demaine, Eppstein e Hayes [9], o qual utiliza esse empacotamento de discos juntamente com o conceito de molécula visto no capítulo anterior.

Começaremos este capítulo dando, na próxima seção, uma visão geral do método de Marshall Bern e colaboradores [9]. Cada uma das seções restantes do capítulo descreverá uma fase do método.

4.1 Método do empacotamento de discos

Se o polígono P do problema DOBRAR-E-CORTAR é um triângulo, então uma solução para o problema é o diagrama da orelha do coelho (seção 3.1). Já se o polígono for um quadrilátero, é possível que a molécula bomba d'água (seção 3.2) ou a nesga (seção 3.3) sejam uma solução para o problema. Se para o polígono P dado, nenhuma dessas moléculas é a solução, a idéia de Marshall Bern e colaboradores [9] foi de particionar o polígono em polígonos menores para os quais essas moléculas simples são solução, e posteriormente unir essas moléculas (seção 3.5). A solução do problema será essencialmente a construção de uma molécula que tem o polígono P como perímetro.

Para resolver esse problema, uniremos moléculas que são compatíveis, ou seja, para as moléculas que criaremos os discos geradores que estão sobre os lados a serem sobrepostos serão coincidentes, como vimos na seção 3.4.

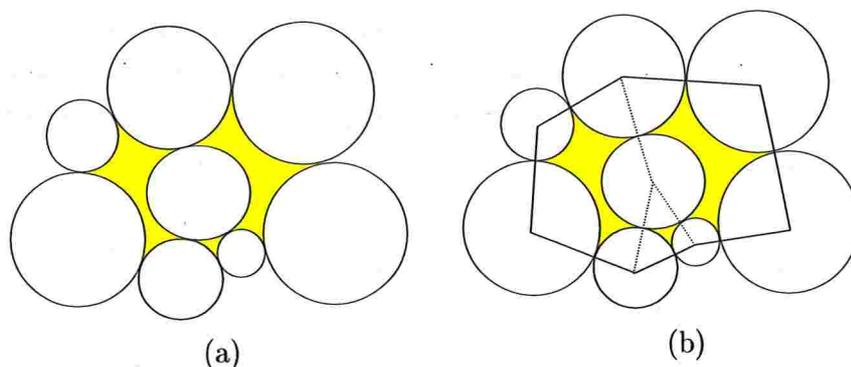


Figura 4.3: (a) Um polígono e um empacotamento de discos. (b) Conjunto de polígonos induzidos pelo empacotamento.

Assim o problema muda de perspectiva: em vez de procurarmos moléculas cujos discos geradores são coincidentes, começaremos produzindo um empacotamento de discos que

induz moléculas compatíveis.

Um empacotamento de discos (figura 4.3(a)) **induz**, de uma maneira natural, um conjunto de polígonos (figura 4.3(b)), onde os vértices dos polígonos são centros dos discos e as arestas são formadas por linhas ligando os centros dos discos tangentes.

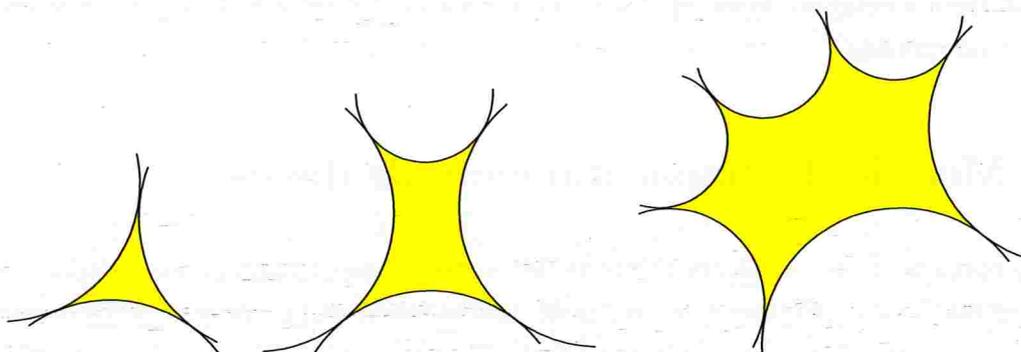


Figura 4.4: Uma 3-fenda, uma 4-fenda e uma 6-fenda.

Diremos que uma **fenda** (*gap*)¹ de um empacotamento de discos é uma região limitada por discos tangentes, excluindo os próprios discos. Por exemplo, o empacotamento da figura 4.3(b) tem três fendas. Uma **k -fenda** é uma fenda limitada por k discos. Ainda na figura 4.3(b), temos duas 5-fendas e uma 3-fenda. Na figura 4.4 temos a ilustração de uma 3-fenda, uma 4-fenda e uma 6-fenda.

Se cada um dos polígonos induzidos pelo empacotamento de discos for um triângulo ou quadrilátero, então naturalmente eles corresponderão a um conjunto de moléculas orelha do coelho e nesga compatíveis. Para isso nosso empacotamento de discos deve ter apenas 3-fendas e 4-fendas, pois estas induzem triângulos e quadriláteros respectivamente (figura 4.5).

Diremos que um empacotamento de disco **cobre** um polígono P , se os vértices de P são vértices dos polígonos induzidos pelo empacotamento e as arestas de P são cobertas pelas arestas dos polígonos induzidos pelo empacotamento (figura 4.6).

Uma solução do problema a seguir é particularmente útil para o método da solução do problema DOBRAR-E-CORTAR proposto por Marshall Bern e colaboradores [9].

Problema EMPACOTAR-DISCOS(P, R): Dado um polígono simples P desenhado em uma folha de papel retangular R , obter um empacotamento de

¹Utiliza-se também o termo *arc-gon* em vez de *gap* [12].

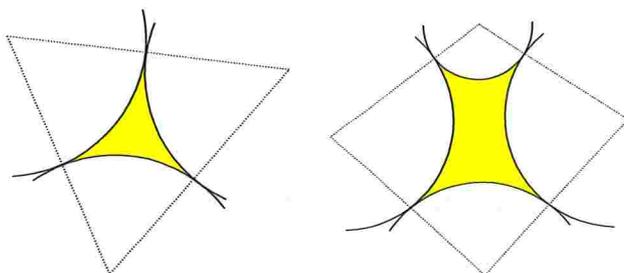


Figura 4.5: Induzindo triângulos e quadriláteros.

discos que cobre o polígono e a margem do papel e todas as fendas sejam 3-fendas e 4-fendas.

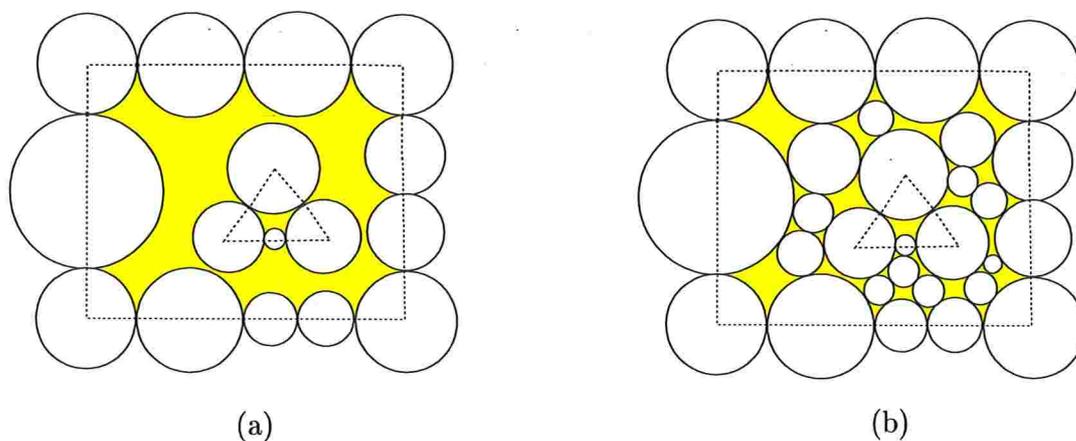


Figura 4.6: (a) Empacotamento de discos que cobre o triângulo e a margem do papel. (b) Extensão da cobertura da figura (a) em empacotamento com apenas 3-fendas e 4-fendas.

Não é evidente, mas como veremos nas próximas seções, o problema EMPACOTAR-DISCOS sempre tem solução. O método de Marshall Bern e colaboradores [9] é composto por três fases:

- determinação de uma cobertura inicial do polígono por discos (figura 4.6(a));
- extensão da cobertura inicial por discos, gerando um empacotamento de discos onde toda fenda é uma 3-fenda ou 4-fenda (figura 4.6(b));
- construção das moléculas e da orientação de suas linhas.

As duas primeiras fases são os passos para obter uma solução para o problema EMPACOTAR-DISCOS. Cada uma dessas fases será descrita em uma seção.

4.2 Cobertura do polígono por discos

Inicialmente, posicionamos um disco centrado em cada vértice do polígono P e em cada canto do papel R . Em cada vértice v , a medida do raio do disco será igual à metade da distância de v às arestas, não incidentes a v , mais próximas. Com isto esses discos iniciais são disjuntos ou têm apenas um ponto de tangência. Cada um desses pontos de tangência será vértice de tangência de uma molécula no diagrama final.

Se O é um disco com centro num vértice v , então, inicialmente, esse disco produzirá dois vértices de tangência, digamos t_1 e t_2 , que são os pontos extremos de O sobre as duas arestas e_1 e e_2 incidentes sobre v . Cada uma dessas arestas será subdividida como mostra a figura 4.7.

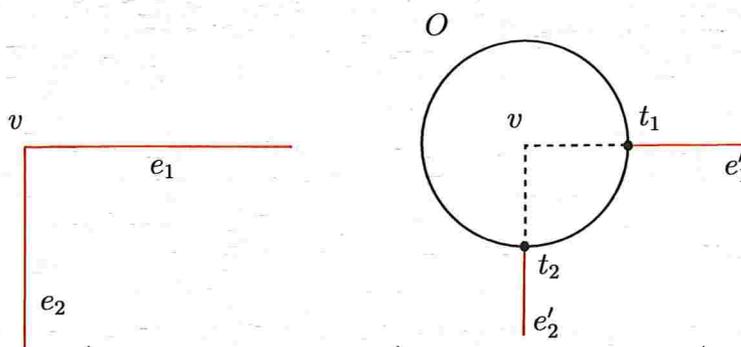


Figura 4.7: Cobrindo um vértice v .

Considere cada nova aresta e' criada através da subdivisão de uma aresta e pelo posicionamento desses discos. Agora, cobriremos cada uma dessas novas arestas acrescentando um novo disco, com centro sobre a aresta e com diâmetro de mesmo tamanho que a aresta, como na figura 4.8(a). Quebramos em dois cada um dos novos discos que intersectam outros discos. Essa quebra deve ser repetida até que todos os discos sejam disjuntos, como na figura 4.8(b). Esse processo pode gerar discos muito pequenos, dificultando o processo de dobra do diagrama a ser gerado.

Através desse procedimento obtivemos uma cobertura inicial das arestas do polígono e da margem do papel por discos, formando algumas fendas, como ilustra a figura 4.6.

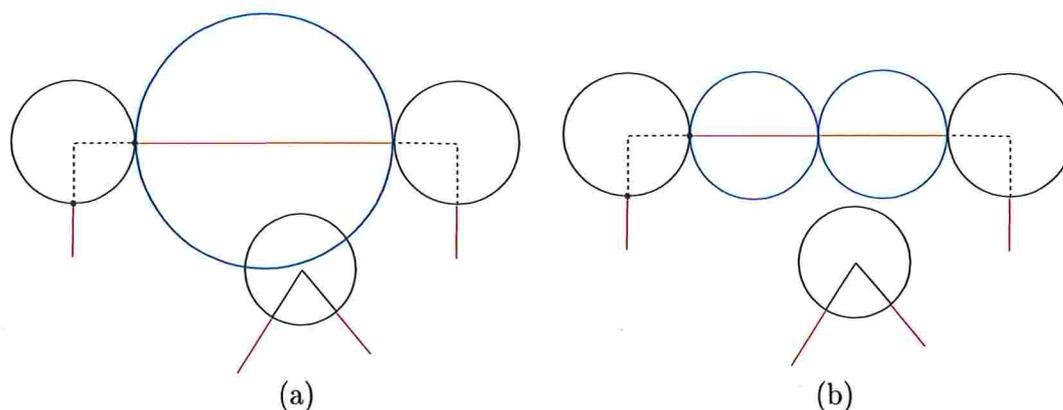


Figura 4.8: (a) Cobertura de aresta por um disco. (b) Quebra de disco que fazia intersecção.

Passamos para o processo de quebrá-las em fendas menores, através do posicionamento de novos discos.

4.3 3-fendas e 4-fendas

Nesta seção descrevemos como estender um empacotamento de discos que cobre o polígono P e a margem do papel R a fim de obter um empacotamento em que cada fenda é uma 3-fenda ou 4-fenda.

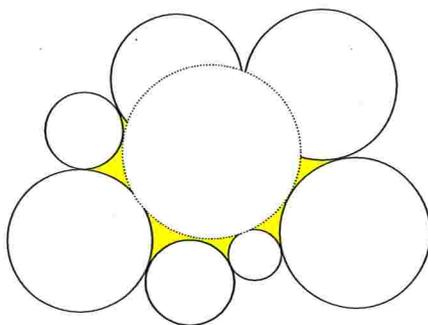


Figura 4.9: Um disco tangente inválido.

Eliminaremos as k -fendas com $k \geq 5$, inserindo discos nessas fendas, a fim de obter k' -fendas com $k' < k$. Esses novos discos devem ser disjuntos dos discos já pertencentes ao empacotamento. Assim, não estaremos interessados em discos como o mostrado na

figura 4.9.

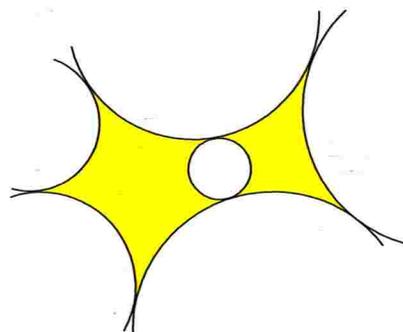


Figura 4.10: Disco tangente a outros dois discos que produz uma 4-fenda e uma 5-fenda.

Notemos que nem todo disco que tangencia alguns outros de uma k -fenda nos ajudará a obtermos uma k' -fenda com $k' < k$. Se um disco tangencia apenas dois outros, ele pode não ajudar a diminuir o problema. Na figura 4.10 vemos uma 5-fenda que foi quebrada em duas novas: uma 5-fenda e uma 4-fenda. Desta maneira não diminuímos o número de 5-fendas, apenas aumentamos o número de 4-fendas.

No método proposto por Marshall Bern e colaboradores [9], procuramos discos que tangenciam no mínimo outros três discos do empacotamento já produzido. No entanto, mesmo isso não garante a criação apenas de fendas menores, como é o caso do disco que tangencia três discos consecutivos na fenda, como ilustrado na figura 4.11. O novo disco não diminuiu o número de 7-fendas, e ainda produziu duas 3-fendas.

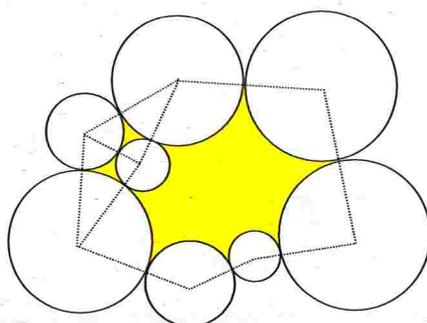


Figura 4.11: Disco interno tangente a três consecutivos não ajuda a eliminar a 7-fenda.

Inserir um disco em uma k -fenda, $k \geq 5$, que seja tangente a três consecutivos, produz

duas 3-fendas e uma nova k -fenda. Aqui não há progresso na eliminação da fenda original. Olhando o polígono tracejado na figura 4.11, podemos perceber que tudo se passa como se ligássemos dois vértices v_i e v_{i+2} por um caminho com duas novas arestas. Assim, ficamos com um novo polígono de mesmo número de lados, além de outros dois triângulos.

Evitando três discos consecutivos, como ilustra a figura 4.12, podemos finalmente quebrar a 7-fenda em três outras menores: uma 6-fenda, uma 4-fenda e uma 3-fenda, diminuindo assim o “tamanho” do problema original.

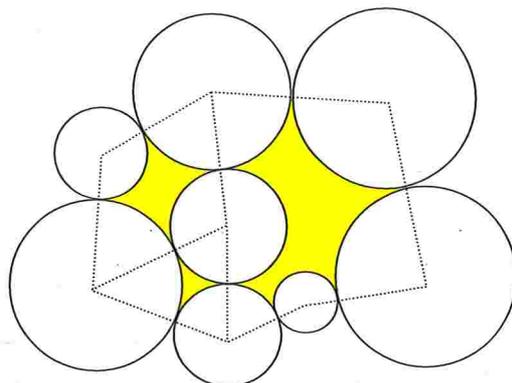


Figura 4.12: Inserção de um disco que não é tangente a três discos consecutivos.

A estratégia é inserimos discos em k -fendas, $k \geq 5$, até que todas as fendas sejam uma 3-fenda ou uma 4-fenda. Podemos fazer isso de várias formas. Marshall Bern e colaboradores [9] sugerem utilizar o diagrama de Voronoi dos discos que geram a k -fenda. Uma maneira alternativa é resolvermos várias vezes o problema:

Problema APOLÔNIO(O_1, O_2, O_3): Dadas circunferências O_1, O_2 e O_3 , determinar as circunferências tangentes a O_1, O_2 e O_3 .

Dentre todas as soluções para APOLÔNIO(O_1, O_2, O_3), onde O_1, O_2 e O_3 determinam discos na fronteira da k -fenda, escolhemos aquela que quebre a k -fenda em fendas menores. A seguir discutiremos as duas estratégias.

Diagrama de Voronoi de uma Fenda

Considere um conjunto S de k pontos no plano. Para cada ponto p em S , seja $V(p)$ a região dos pontos do plano que estão mais próximos de p do que de qualquer outro

ponto em S . As k regiões $V(p)$ formam uma partição do plano, chamada de **diagrama de Voronoi**. A figura 4.13 ilustra essa definição. Cada ponto p em S é chamado de sítio, e cada ponto do diagrama simultaneamente na fronteira de pelo menos três regiões é dito **vértice de Voronoi**.

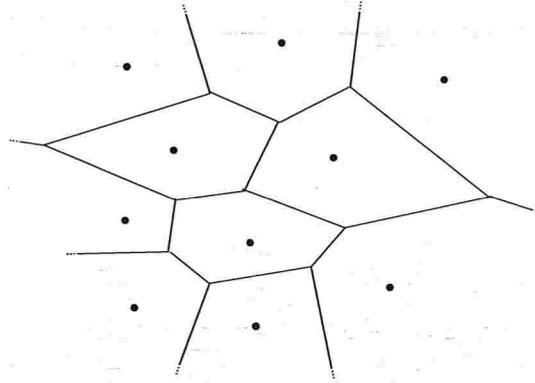


Figura 4.13: Diagrama de Voronoi de 10 pontos.

Construir o diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos pode ser feito em tempo $O(n \log n)$ [17]. Esse diagrama possui uma característica que é importante para o nosso problema: cada vértice de Voronoi v , na junção de três regiões $V(p_1)$, $V(p_2)$ e $V(p_3)$, é equidistante de p_1 , p_2 e p_3 . Logo v é o centro do disco que possui p_1 , p_2 e p_3 na sua fronteira.

O diagrama de Voronoi de pontos é muito conhecido na geometria computacional. Aqui utilizaremos uma pequena variação desse conceito. O diagrama de Voronoi de uma k -fenda F_n é definido de maneira análoga ao de pontos, mas estamos trabalhando com discos: o diagrama divide a fenda em k regiões dos pontos mais próximos a cada um dos discos [12]. Dessa forma os discos fazem o papel dos sítios do diagrama de Voronoi.

Em cada ponto do diagrama de Voronoi da fenda podemos colocar um disco que é tangente a pelo menos dois discos da fronteira da fenda, pois um ponto do diagrama de Voronoi é equidistante a dois sítios.

De maneira análoga ao diagrama de Voronoi clássico, cada vértice do diagrama de Voronoi da fenda é o centro de um disco tangente a pelo menos três discos da fronteira da fenda, como na figura 4.14.

A estratégia sugerida por Marshall Bern e colaboradores [9] para quebrar uma k -fenda, $k \geq 5$, consiste em colocar um disco maximal com centro em um dos vértices de Voronoi da fenda, atualizar o diagrama e repetir o processo recursivamente para cada nova fenda.

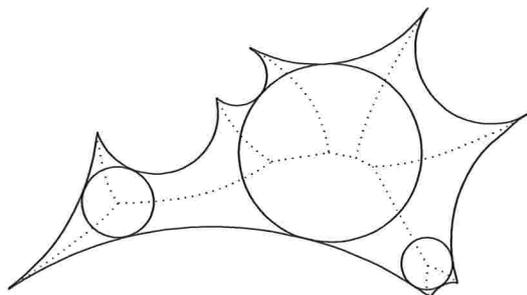


Figura 4.14: Fenda e seu diagrama de Voronoi.

Outra abordagem para obtermos apenas 3-fendas e 4-fendas, é procurar todos os discos tangentes a cada terno de discos da fronteira da fenda. Esse algoritmo ingênuo consome $O(n^3)$, utilizando-se da primitiva que veremos a seguir.

Décimo problema de Apolônio

Apolônio de Perga foi um matemático e astrônomo grego que viveu no século II AC. Ele formulou o seguinte problema: dados três objetos geométricos, onde cada um deles pode ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, desenhe uma circunferência tangente a esses três objetos. Na verdade, essa é uma formulação compacta de dez problemas diferentes. Os mais simples são quando todos os objetos são pontos ou retas, e nesse caso basta determinarmos o incentro de um certo triângulo formado. O problema mais difícil é quando os três objetos são circunferências. Euclides, utilizando régua e compasso, resolveu os dois problemas mais simples e Apolônio resolveu todos os outros, exceto quando os três objetos são circunferências. Esse é o chamado décimo problema de Apolônio, que só foi resolvido em 1595 por François Viète [54].

No nosso caso estamos interessados em uma pequena variação do problema de Apolônio, onde os objetos dados são discos, como foi convenientemente enunciado, nesta seção, na página 97.

Como ilustra a figura 4.15, dados os três discos amarelos O_1 , O_2 e O_3 , estamos interessados em encontrar o disco branco. Para encontrar tal disco, teremos que encontrar uma solução apropriada para o problema APOLÔNIO, já que nem toda solução do problema determinará o disco que estamos interessados. A figura 4.16 mostra uma situação em que existem pelo menos três circunferências que são solução do problema APOLÔNIO, já que todos eles tangenciam os discos amarelos.

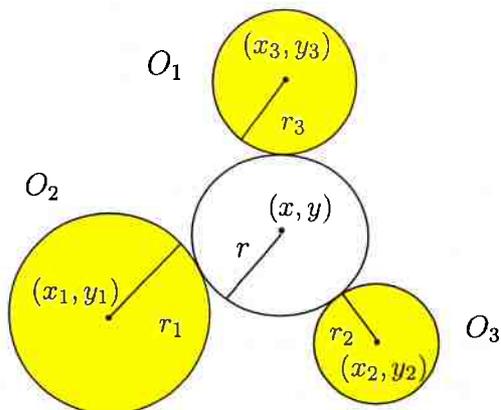


Figura 4.15: Disco internamente tangente a outros três.

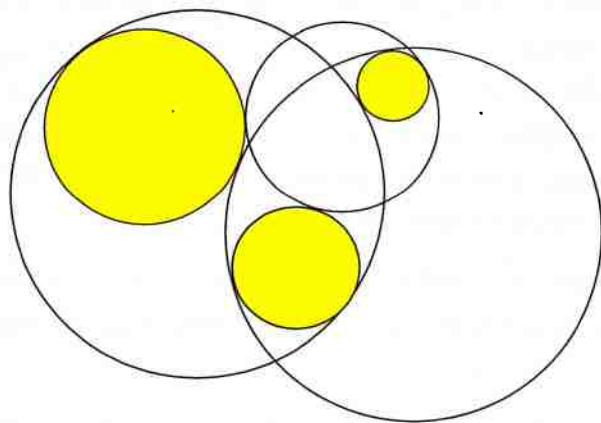


Figura 4.16: APOLÔNIO pode ter até 8 soluções diferentes.

Estamos procurando uma circunferência que determina o disco O de raio r e centro em (x, y) que tangencie os discos O_i de raio r_i e centro (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$). O raio r e o ponto (x, y) são solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 &= 0 \\(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 &= 0 \\(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 &= 0\end{aligned}$$

Podem existir oito circunferências diferentes como resposta, pois ao definirmos o sistema de equações acima consideramos que a distância entre o centro (x, y) até o centro (x_i, y_i) pode ser tanto $r + r_i$ quanto $r - r_i$, indicando, respectivamente, que procuramos uma circunferência que tangencie externamente ou internamente o disco O_i .

Só estamos interessados no disco que tangencia os outros três sem contê-los, isto é, tocando-os externamente, portanto o sistema fica apenas com o sinal positivo:

$$\begin{aligned}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r + r_1)^2 &= 0 \\(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r + r_2)^2 &= 0 \\(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r + r_3)^2 &= 0\end{aligned}$$

Temos três equações quadráticas com três incógnitas x , y e r . Desenvolvendo as equações, temos:

$$(x^2 + y^2 - r^2) + (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - 2xx_1 - 2yy_1 - 2rr_1 = 0 \quad (4.1)$$

$$(x^2 + y^2 - r^2) + (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) - 2xx_2 - 2yy_2 - 2rr_2 = 0 \quad (4.2)$$

$$(x^2 + y^2 - r^2) + (x_3^2 + y_3^2 - r_3^2) - 2xx_3 - 2yy_3 - 2rr_3 = 0 \quad (4.3)$$

Subtraindo a equação (4.2) de (4.1) e (4.3) de (4.1) eliminamos os termos quadráticos, pois (4.1), (4.2) e (4.3) possuem os mesmos coeficientes para os termos de segundo grau.

Agora podemos resolver facilmente esse sistema de duas equações, achando x e y em função de r , para depois jogar seus valores dentro de qualquer uma das equações quadráticas, ficando apenas com uma incógnita r , achando-a através da solução geral de uma equação de segundo grau, para então substituímos r e obtermos x e y .

Alguns aspectos práticos

Para quebrar uma k -fenda em fendas menores, podemos resolver várias vezes o problema APOLÔNIO ou utilizar o diagrama de Voronoi da fenda. Do ponto de vista de análise assintótica do pior caso, o diagrama de Voronoi é uma solução mais eficiente. No entanto, acreditamos que do ponto de vista prático, resolvendo o problema APOLÔNIO quebramos a k -fenda em 3-fendas e 4-fendas mais rapidamente, já que frequentemente não precisamos resolver $\Omega(n^3)$ instâncias do problema APOLÔNIO para encontrar disco apropriado.

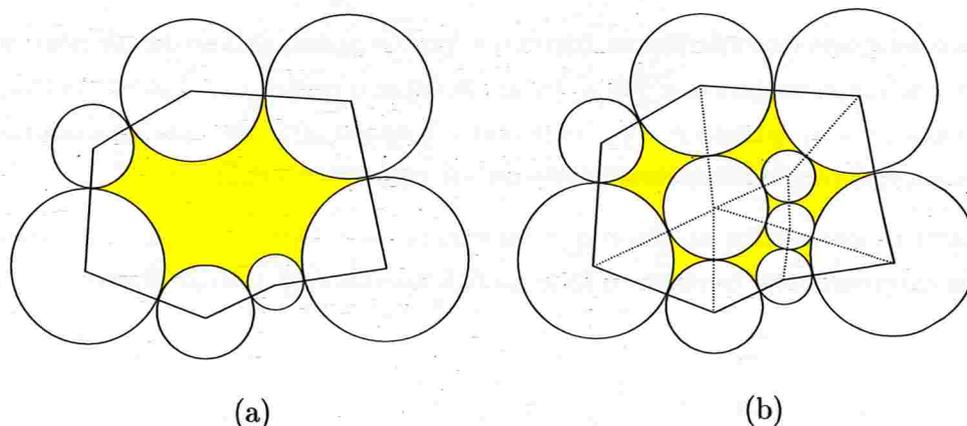


Figura 4.17: Fenda particionada.

A figura 4.17(b) mostra uma extensão do empacotamento da figura 4.17(a), onde toda fenda é uma 3-fenda ou 4-fenda. Vale observar que essa é apenas uma das possíveis extensões em que toda fenda é uma 3-fenda ou 4-fenda. Na figura 4.18 podemos ver uma outra extensão possível.

Sobre a escolha do disco para eliminar k -fendas, $k \geq 5$, escolher um disco de raio máximo nem sempre pode ser boa solução. Esta escolha pode criar fendas de área pequena, que induziria polígonos pequenos, gerando dobras difíceis.

Diferentes heurísticas podem ser usadas a fim de maximizar ou minimizar diferentes critérios, gerando empacotamentos muito distintos, como veremos no próximo capítulo.

Com apenas 3-fendas e 4-fendas, cada triângulo e quadrilátero gera uma molécula compatível com as suas vizinhas, como na figura 4.19, pois seus discos geradores são coincidentes. Como sabemos, isso garante a união das moléculas. Na próxima seção, tratamos da geração do diagrama de cada uma dessas moléculas e a determinação da

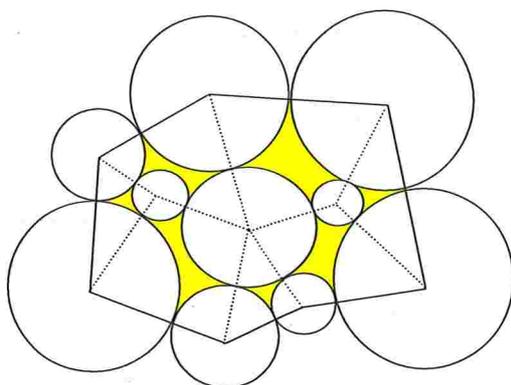


Figura 4.18: Fenda particionada diferentemente da figura 4.17.

orientação de suas linhas.

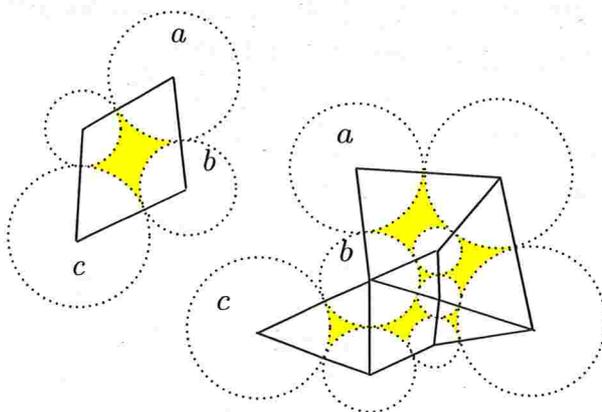


Figura 4.19: As moléculas induzidas pelas fendas são compatíveis.

4.4 Construção do diagrama

Resolvido o problema EMPACOTAR-DISCOS, passaremos agora à fase de construção do diagrama que será a solução do problema DOBRAR-E-CORTAR.

Suponha dado um empacotamento de discos que é solução do problema EMPACOTAR-DISCOS(P, R). Cada 3-fenda do empacotamento induz um triângulo, e cada 4-fenda induz um quadrilátero. Para cada triângulo produziremos uma molécula orelha do coelho, e para cada quadrilátero uma nesga. Não teremos nenhum problema em unir essas moléculas, já que, por construção, elas são compatíveis.

Fica agora o problema de ajustar a orientação vale ou montanha de cada uma das arestas ou linhas das moléculas, de tal maneira que o diagrama resultante corresponda a um modelo plano, e o polígono P tenha todas suas arestas alinhadas neste modelo

Chamaremos de **arestas de tangência** as arestas que são tangentes aos discos que produzem os vértices de tangência, e chamaremos de **arestas laterais** as arestas do perímetro do polígono (figura 4.20). A nesga ainda possui **arestas do diamante**, ou seja, do quadrilátero central, e **arestas internas ao diamante**.

As arestas bissetrizes dentro do polígono P serão linhas da montanha, e as de fora serão vale. Na nesga, as arestas do diamante serão linhas da montanha dentro de P , e do vale fora de P . Para as demais, definimos uma orientação inicial para cada uma das arestas das futuras moléculas, que poderão ser alteradas. As arestas de tangência e arestas laterais serão linhas do vale dentro de P e da montanha fora de P . Na nesga, as arestas internas ao diamante serão do vale dentro de P e da montanha fora de P . As arestas laterais ao longo do perímetro de P não serão dobradas.

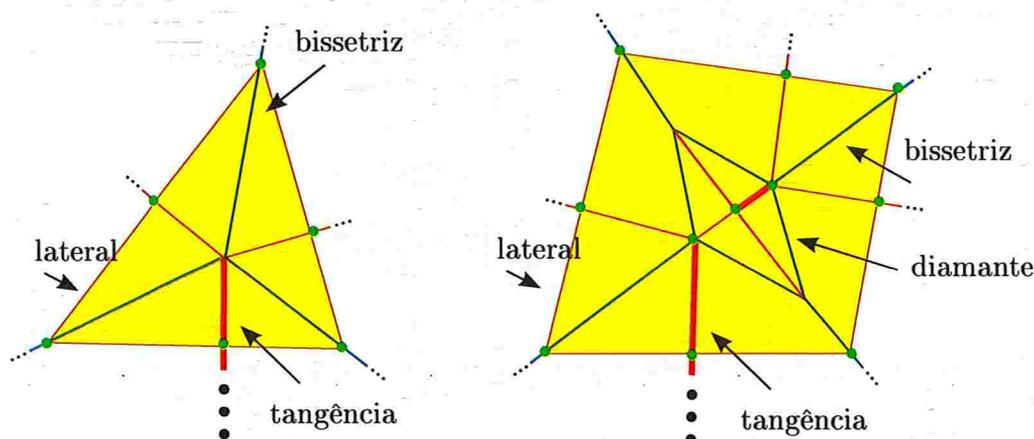


Figura 4.20: Orientação inicial das futuras moléculas dentro de P e não possuem arestas de P , junto com a nomenclatura das arestas.

A figura 4.20 mostra diagramas que seguem a orientação inicial das arestas, considerando que estão dentro do polígono P . Claramente esses diagramas não correspondem a modelos planos, pois a orientação inicial desrespeita a condição do teorema de Maekawa. Os vales em destaque são exemplos de arestas que poderão ter suas orientações alteradas. Na nesga, ao decidirmos qual das arestas de tangência terá sua orientação trocada, a outra aresta a ser modificada fica implícita, pois fica existindo então uma única possibilidade de troca para respeitar Maekawa. Diagramas como os da figura 4.20, depois de terem as

orientações de algumas arestas alteradas, serão orelhas do coelho e nexas no diagrama final. Assim, no que segue, chamaremos esses diagramas de orelha do coelho e nexa mesmo faltando alguns ajustes, que passaremos a descrever.

Para que diagramas como os da figura 4.20 respeitem a condição do teorema de Maekawa, precisamos alterar a orientação de exatamente uma aresta incidente a cada vértice em verde, já que cada um desses vértices tem número igual de linhas do vale e linhas da montanha incidentes a ele. Para tanto, definiremos um certo grafo auxiliar e encontraremos nesse grafo um emparelhamento perfeito².

A orientação das arestas bisetrixes é fixada de tal maneira que moléculas dentro do polígono tenham a sua área interna acima da linha “de corte”, e as moléculas de fora tenham sua área interna abaixo dessa linha.

Seja G o subgrafo do diagrama induzido pelos vértices que não satisfazem a condição do teorema de Maekawa e excluindo-se ainda as arestas bisetrixes e as arestas do polígono P e da fronteira de R . Para os diagramas da figura 4.20, os vértices e arestas no grafo G são mostrados na figura 4.21.

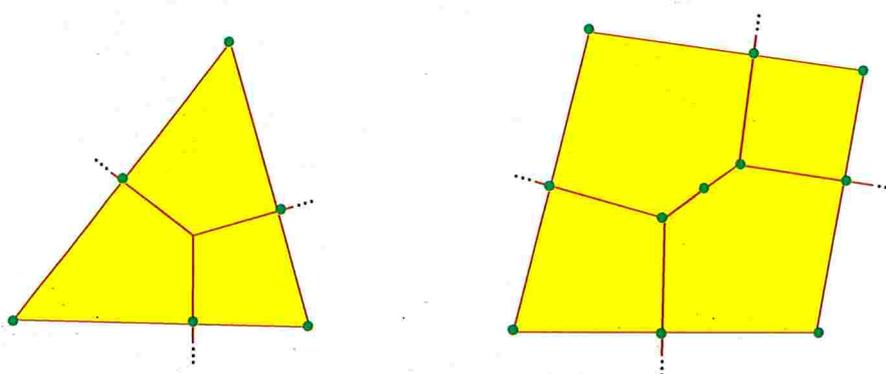


Figura 4.21: Grafo induzido pelos vértices que não satisfazem a condição do teorema de Maekawa da figura 4.20.

Queremos agora encontrar um emparelhamento em G tal que todo vértice de G seja ponta de uma aresta do emparelhamento, isto é, um emparelhamento perfeito. Trocando, no diagrama inicial, as orientações de todas as arestas do emparelhamento, obteremos um diagrama que satisfaz a condição do teorema de Maekawa.

Para encontrar tal emparelhamento, devido à especificidade desse grafo, Marshall Bern

²Um **emparelhamento** em um grafo é um conjunto de arestas que não têm pontas em comum. Um emparelhamento é dito **perfeito**, se cada vértice do grafo é ponta de uma aresta do emparelhamento.

e colaboradores [9] sugerem o seguinte algoritmo. Seja T_C uma árvore formada por arestas laterais de G tal que:

- T_C gera todos os vértices dos polígonos que são fronteiras das moléculas e estão no interior do papel. Esses são vértices nos “cantos” das moléculas;
- T_C gera exatamente um vértice na fronteira do papel R , que chamaremos de raiz de T_C .

Se cortarmos o papel ao longo das arestas de T_C , obteremos uma certa **árvore de moléculas** T_M como na figura 4.22(a). Os quadriláteros estão sendo representados por bombas d’água por simplicidade, as nesgas teriam duas arestas internas trocadas, como sugerido na figura 4.20. Consideraremos T_M como sendo uma árvore com raiz em uma das moléculas incidente sobre a raiz de T_C .

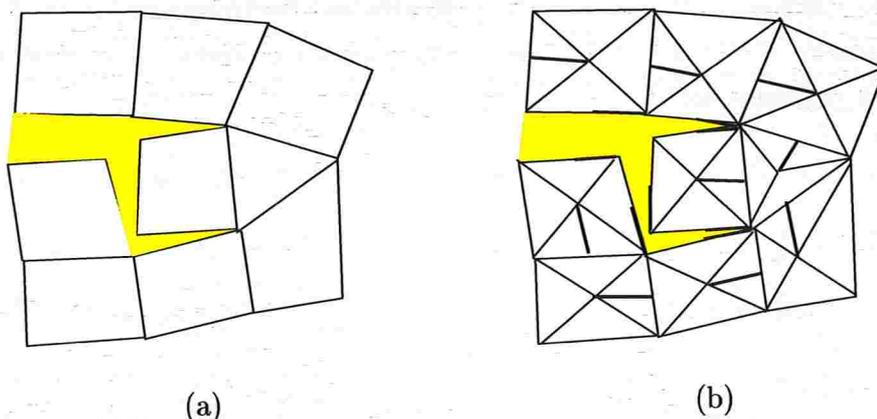


Figura 4.22: (a) Cortando em T_C para obter T_M . (b) Emparelhamento desejado.

O emparelhamento será formado pelas arestas de tangência que ligam o centro de uma molécula ao lado que é também incidente sobre a sua molécula ancestral em T_M e pelas arestas laterais de um canto em direção ao seu ancestral na árvore T_C , como ilustra a figura 4.22(b).

Com isso terminamos a descrição de como obter o emparelhamento, e portanto a orientação de todas as arestas do diagrama. O diagrama produzido satisfaz a condição do teorema de Maekawa, e também as condições do teorema de Kawasaki, já que o diagrama é a união de orelhas do coelho e nesgas. A figura 4.23 ilustra as três fases do método.

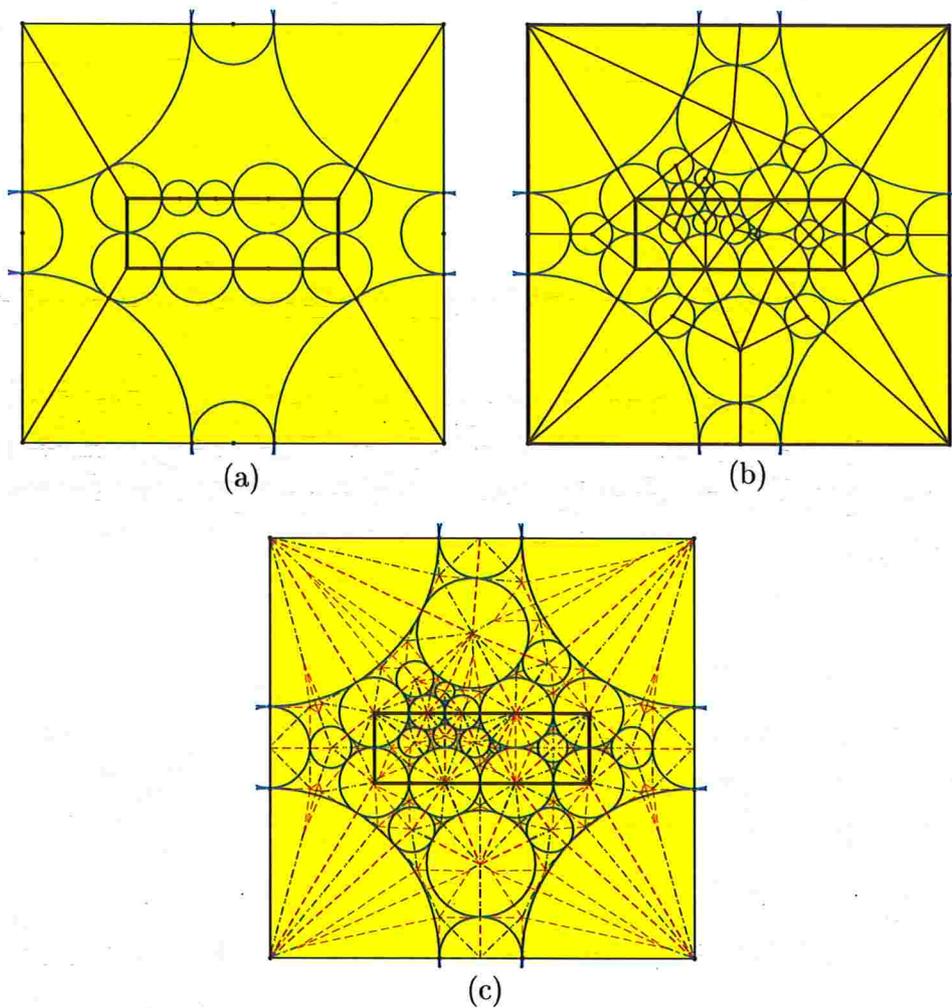


Figura 4.23: Ilustração das três fases do método do empacotamento de discos do retângulo no centro do papel. (a) Cobertura inicial do polígono por discos. (b) Extensão da cobertura inicial por discos, gerando um empacotamento de discos onde toda fenda é uma 3-fenda ou 4-fenda. (c) Diagrama final obtido.

4.5 Planaridade do diagrama

A fim de dobrar o diagrama em um modelo plano, podemos proceder da seguinte maneira. Imagine que de fato cortamos o papel ao longo das arestas da árvore T_C para obter a árvore de moléculas T_M , como na figura 4.22. Podemos dobrar cada molécula, uma a uma, percorrendo a árvore de moléculas em pré ordem. A molécula raiz de T_M pode ser vista como capa de livro infantil, cheio de encaixes dentro, onde cada dobradura de encaixe é uma molécula. Cada nova molécula vai encaixando no livro através de sua molécula antecessora. Sempre que cruzamos a fronteira de P , grudamos o encaixe acima ou abaixo da linha de corte, de tal maneira que as arestas na fronteira de P não são dobradas.

Agora podemos imaginar que as arestas da árvore T_C que foram cortadas são coladas percorrendo T_C em pós-ordem. O ponto aqui é que esses pares de arestas que precisam ser colados, pois possuem nesse livro de encaixes uma certa estrutura de parênteses, como na figura 4.24.

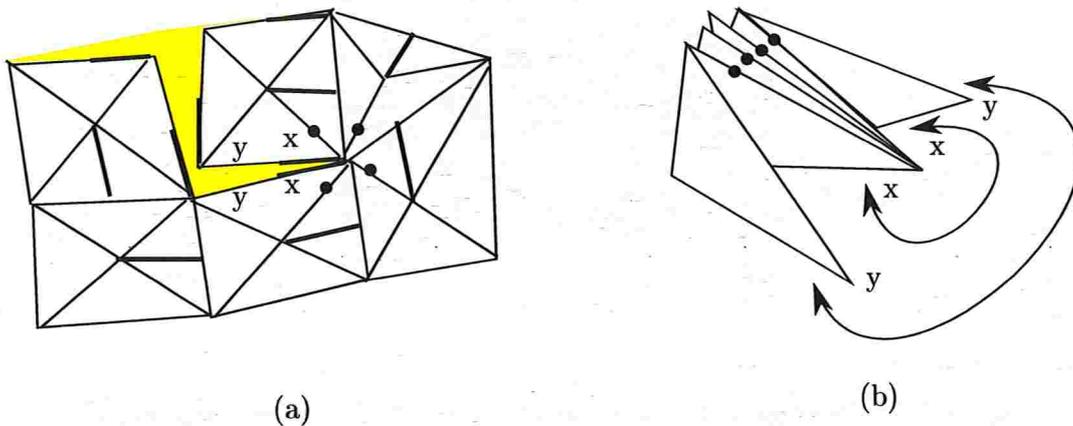


Figura 4.24: (a) Árvore de corte T_C . (b) Colando as arestas cortadas, percorrendo a árvore em pós-ordem: elas não se intersectam, permitindo a dobra.

Ao final obtemos um modelo plano, em que P está acima da linha que contém o perímetro de P , e o restante do papel está abaixo dessa linha.

4.6 Engorda

Considere um diagrama obtido pelo método de empacotamento de discos para resolver o problema $\text{DOBRAR-E-CORTAR}(P, R)$.

Se dobrarmos o diagrama e cortarmos o papel a fim de obter P , além de separar P do restante do papel R iremos cortar também o polígono P nos perímetros das moléculas que o compõem, já que essas têm seus perímetros alinhados. Assim nosso polígono, além de ser separado do papel, seria cortado em triângulos e quadriláteros.

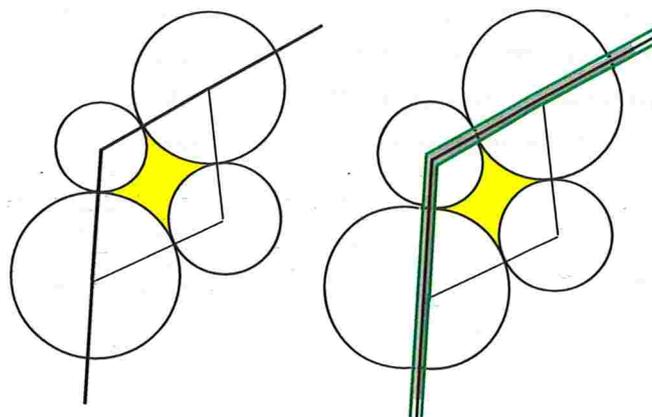


Figura 4.25: Uma 4-fenda e sua versão engordada nos discos que cobrem arestas de P .

Uma alternativa para resolver esse problema seria cortar um pouco abaixo da linha que contém o perímetro do polígono P depois de o diagrama ter sido dobrado. Entretanto isso adicionaria uma pequena “extensão” ao polígono.

Para evitar que isso ocorra, e para que P saia ileso da operação, podemos, como sugerem Marshall Bern e colaboradores [9], “engordar” o perímetro de P como sugere a figura 4.25, criando uma fita muito estreita. O perímetro de P deve ficar no interior dessa fita. Para que essa fita não interfira nas dobras, ela precisa ter largura menor que a menor distância existente entre um vértice do diagrama e qualquer aresta não incidente sobre esse vértice.

A mudança deve ser feita nos passos iniciais. Assim devemos cobrir os vértices do grafo e as arestas remanescentes com setores de discos, em vez de discos, porém calculados com base nestes. As arestas tangentes incidirão com ângulo reto na fita, então não criarão novos vértices. O mesmo ocorrerá com as bissetrizes dos ângulos, que cruzarão a fita.

4.7 Complexidade do diagrama

O número de dobras produzidas pelo método do empacotamento de discos é proporcional ao número de discos produzidos.

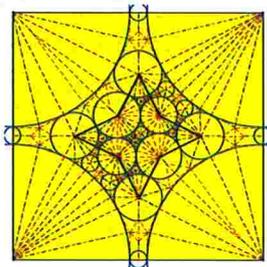
Lembremos que, no método, discos são gerados na primeira fase a fim de cobrir inicialmente o polígono, e também são produzidos na segunda fase, onde discos são inseridos para obtermos apenas 3-fendas e 4-fendas.

O número de discos inseridos na segunda fase do método é proporcional ao número de discos gerados na primeira fase, pois o número de discos inseridos em uma k -fenda, $k \geq 5$, para produzir apenas 3-fendas e 4-fendas, é de no máximo $k - 4$ discos [12]. Logo o número de dobras é diretamente proporcional ao número de discos produzidos na primeira fase, e verificaremos esse fato empiricamente no fim do próximo capítulo.

Implementação do método do empacotamento de discos

You can make highly complex models, such as a six-legged, four-winged, and five-horned beetle, by folding a sheet of square paper. But remember all the shapes are prepared in it. No one can elicit more than what the piece of paper embrace.

Philosophy of origami
Hatori Koshiro [43]



Descrevemos neste capítulo a nossa implementação do método do empacotamento de discos de Marshall Bern e colaboradores [9] para o problema DOBRAR-E-CORTAR. Desenvolvemos uma implementação em cerca de 7800 linhas em Java. O código fonte e binário estão disponíveis em

<http://jorigami.sourceforge.net/>

O programa pode ser executado em qualquer máquina virtual Java na versão 5 ou superior.

Aqui descreveremos detalhes da nossa implementação de cada passo do método, bem como das estruturas de dados utilizadas. Também veremos modificações e heurísticas que criamos e testamos para duas fases do método, assim como os resultados obtidos.

Para ilustrar os detalhes de cada fase da implementação, utilizaremos ao longo de todo este capítulo o polígono exibido na figura 5.1.

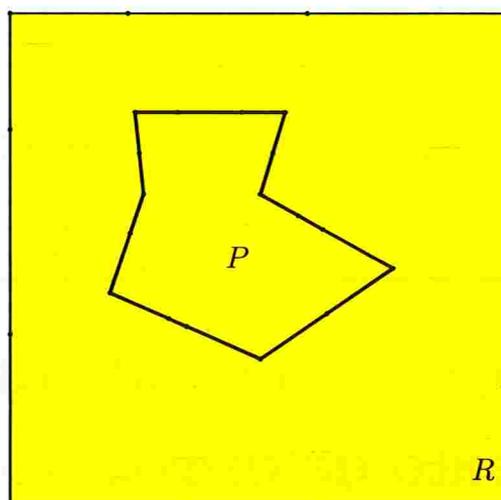


Figura 5.1: Polígono P e papel R .

5.1 Estruturas de dados

Antes de prosseguirmos com a descrição da implementação do método, precisamos de uma estrutura de dados para representar o diagrama produzido à medida que ele vai sendo construído.

Um diagrama é uma representação retilínea de um grafo planar onde cada aresta é representada por um segmento de reta e os segmentos de reta só se intersectam em pontos que correspondem a vértices do grafo. Para representar diagramas, utilizamos a estrutura de dados **arestas aladas** (*winged edge*), que foi desenvolvida por Bruce G. Baumgart [7] em 1975 e é ainda a estrutura de dados mais popular para representar a superfície de um poliedro [14].

Essa estrutura de dados é capaz de fornecer rapidamente todas as possíveis relações de adjacência entre vértices, arestas e faces do diagrama. Por exemplo, dadas duas faces do diagrama podemos determinar se elas são adjacentes em tempo linear no número total de vértices dessas faces. Dado um vértice do diagrama seremos capazes de listar todas as faces que são incidentes sobre este vértice em tempo linear no número destas faces.

O foco da estrutura de dados aresta alada é, como diz o nome, a aresta. Esta estrutura mantém listas de vértices, arestas e faces onde:

Vértice: a estrutura que representa cada vértice v mantém as coordenadas (x, y) do

vértice juntamente com uma referência para uma aresta arbitrária incidente sobre o vértice, denotaremos por $av(v)$ a aresta incidente sobre vértice v .

Face: para cada face f mantemos uma referência para uma aresta arbitrária $af(f)$ contida na fronteira de f .

Aresta: a estrutura correspondente a cada aresta e tem oito referências:

1. Duas referências para os vértices $start(e)$ e $end(e)$ que são pontas da aresta e . A ordem destes vértices fornece uma orientação para a aresta.
2. Uma referência para cada uma das duas faces $ccw(e)$ e $cw(e)$ incidentes sobre e . A face $ccw(e)$ é à esquerda de e (*counterclockwise*, já que a orientação induzida por e nesta face é anti-horária) e a face $cw(e)$ é a aresta à direita (*clockwise*, já que a orientação induzida por e nesta face é horária).
3. Quatro referências para arestas adjacentes a e , as asas (*wings*) de e , uma referência para cada aresta que precede e sucede e nas faces $ccw(e)$ e $cw(e)$. Assim $previousCcw(e)$ (*previous counterclockwise*) e $nextCcw(e)$ (*next counterclockwise*) representam as arestas que precedem e sucedem a aresta e na face $ccw(e)$, respectivamente. Analogamente $previousCw(e)$ e $nextCw(e)$ representam as arestas que precedem e sucedem a aresta e na face $cw(e)$. A figura 5.2 ilustra esta clássica estrutura, juntamente com uma pequena modificação: uma referência ao disco que a cobre (*coveringDisk*).

A estrutura aresta alada que correspondente ao grafo planar da figura 5.3 está representada pelas lista de vértices, arestas e faces abaixo.

vértice	av
p_1	e_1
p_2	e_2
p_3	e_3
p_4	e_4
p_5	e_9
p_6	e_{10}
p_7	e_{11}
p_8	e_{12}

face	af
f_1	e_1
f_2	e_2
f_3	e_{10}
f_4	e_{12}
f_5	e_1
f_6	e_8

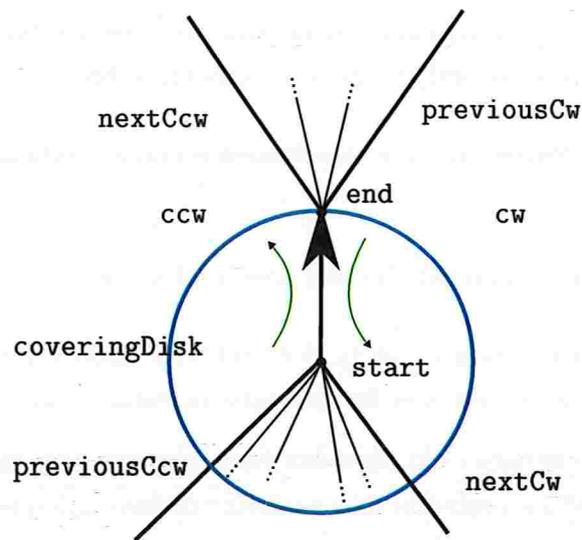


Figura 5.2: A aresta alada modificada.

aresta	start	end	ccw	cw	previousCcw	nextCcw	previousCw	nextCw
e_1	p_1	p_2	f_1	f_5	e_4	e_2	e_6	e_5
e_2	p_2	p_3	f_1	f_2	e_1	e_3	e_7	e_6
e_3	p_3	p_4	f_1	f_6	e_2	e_4	e_8	e_7
e_4	p_4	p_1	f_1	f_4	e_3	e_1	e_5	e_8
e_5	p_1	p_5	f_5	f_4	e_1	e_9	e_{12}	e_4
e_6	p_2	p_6	f_2	f_5	e_2	e_{10}	e_9	e_1
e_7	p_3	p_7	f_6	f_2	e_3	e_{11}	e_{10}	e_2
e_8	p_4	p_8	f_4	f_6	e_4	e_{12}	e_{11}	e_3
e_9	p_5	p_6	f_5	f_3	e_5	e_6	e_{10}	e_{12}
e_{10}	p_6	p_7	f_2	f_3	e_6	e_7	e_{11}	e_9
e_{11}	p_7	p_8	f_6	f_3	e_7	e_8	e_{12}	e_{10}
e_{12}	p_8	p_5	f_4	f_3	e_8	e_5	e_9	e_{11}

Nossa implementação tem uma classe chamada *WingedEdge*, que representa essa estrutura:

```
public class WingedEdge implements Edge, Drawable
{
    private WingedVertex start, end;
```

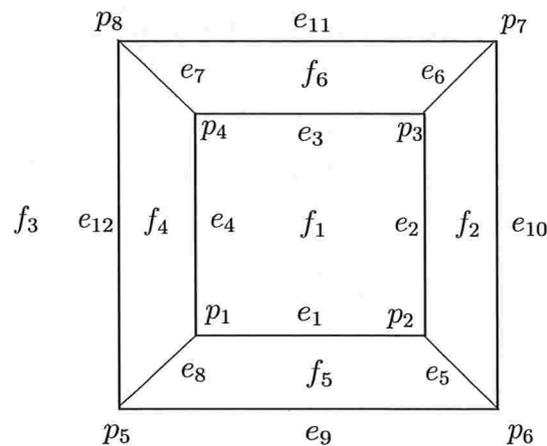


Figura 5.3: Um grafo planar com seus vértices, arestas e faces.

```
private WingedFace ccw, cw;

private WingedEdge nextCw, nextCcw, previousCw, previousCcw;

private Disk coveringDisk;
}
```

Além das referências para os seus vértices `start` e `end`, suas faces vizinhas `cw` e `ccw`, e suas quatro arestas incidentes `nextCw`, `nextCcw`, `previousCw` e `previousCcw`, possuímos uma referência para o disco `coveringDisk` que cobre essa aresta, conforme já ilustrado na figura 5.2. Com essa modificação, ao percorrermos uma face do diagrama, podemos listar todos os discos que formam a fenda dessa face.

Leonidas Guibas e Jorge Stolfi [30] desenvolveram uma estrutura de dados, a **quad-edge**, que simplifica muitas das operações e algoritmos. Ela pode representar qualquer subdivisão de uma superfície, e não somente grafos planares. No decorrer da implementação percebemos que a utilização de uma estrutura de dados como essa teria evitado alguns problemas, como é o caso das arestas ponte que podem aparecer no decorrer da criação do diagrama. Uma aresta é uma **ponte** se a sua remoção aumenta o número de componentes conexos do grafo.

5.2 Cobertura do polígono por discos

Esse é o primeiro passo do método e é um dos mais importantes já que o número de dobras do diagrama produzido é proporcional ao número de discos aqui produzidos (seção 4.7).

Cobertura inicial

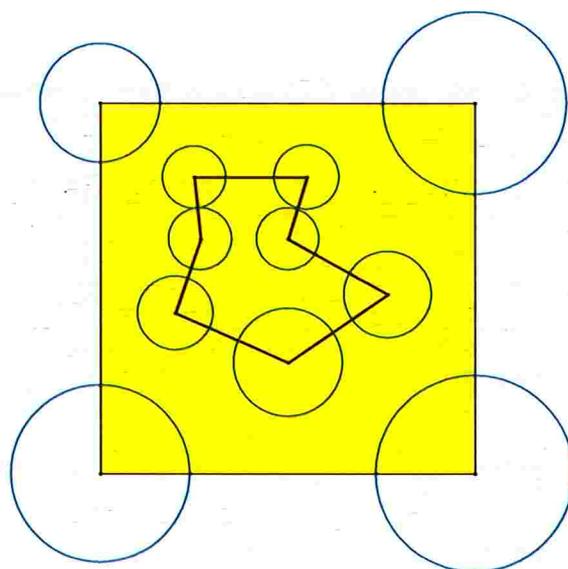


Figura 5.4: Cobertura inicial dos vértices.

Conforme já foi visto (seção 4.2), nessa fase inicial do método posicionamos um disco centrado em cada vértice do polígono e em cada canto do papel com raio igual à metade da distância entre o centro desses discos e a aresta mais próxima, conforme ilustrado na figura 5.4. Utilizamos aqui primitivas básicas de geometria computacional para calcular distância de ponto a segmento de reta.

Logo em seguida inserimos os discos sobre as arestas que não estão completamente cobertas, mas isso pode gerar intersecções entre os discos. Para eliminar essas intersecções, dividimos tais discos em dois novos, com metade do diâmetro do antigo. Observamos que mesmo assim podem ser necessárias mais iterações desse processo, como na figura 5.5. Para facilitar nossa implementação, cada disco aqui posicionado quebra a sua respectiva aresta em duas. Dessa forma todo centro de disco passa a ser um vértice do nosso

diagrama.

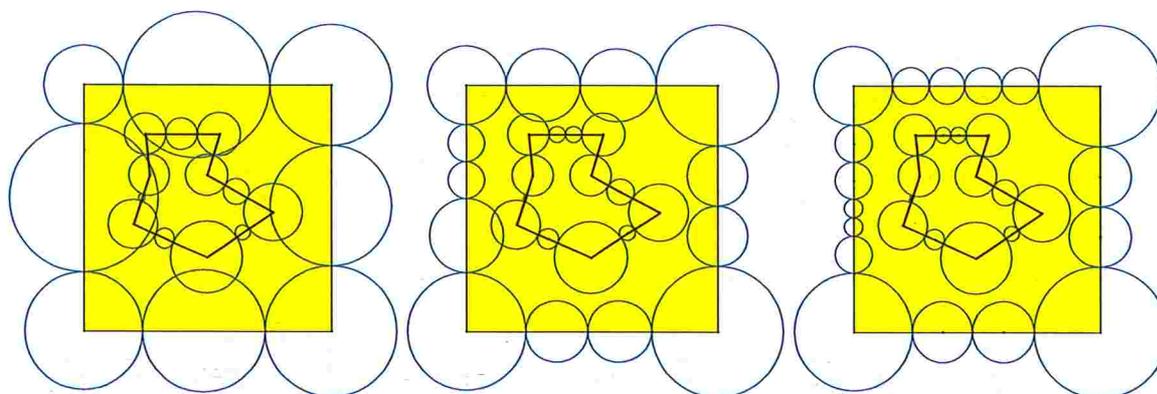


Figura 5.5: Eliminação das intersecções em duas iterações.

Fendas iniciais

Nesse ponto do método as arestas do polígono e a margem do papel estão cobertas por discos. É possível que ainda não tenhamos formado as fendas que serão manipuladas na próxima fase do método. Pode ser que haja uma fenda interna à outra. Para eliminar esse tipo de configuração, inserimos alguns discos, conforme ilustra a figura 5.6.

Até mesmo essa pequena decisão influencia o empacotamento final. Escolher inserir um disco, entre os discos mais distantes, geraria um disco de maior diâmetro, formando moléculas maiores, tornando mais factível a dobra do diagrama produzido. Entretanto é possível que com essa estratégia sejamos obrigados a inserir discos de diâmetro pequeno durante a fase de produção de 3-fendas e 4-fendas.

Em nossa implementação permitimos que tanto os discos que cobrem os vértices quanto os que cobrem as arestas sejam posicionados manualmente, possibilitando um melhor ajuste do diagrama resultante. Além disso, utilizamos duas heurísticas para essa fase do algoritmo, que são aplicadas logo após o posicionamento dos discos sobre os vértices.

A idéia básica dessas heurísticas é expandir os discos iniciais o máximo possível para que possamos cobrir uma parte maior das arestas, diminuindo assim, possivelmente, o número de discos necessários para cobrirmos as arestas remanescentes.

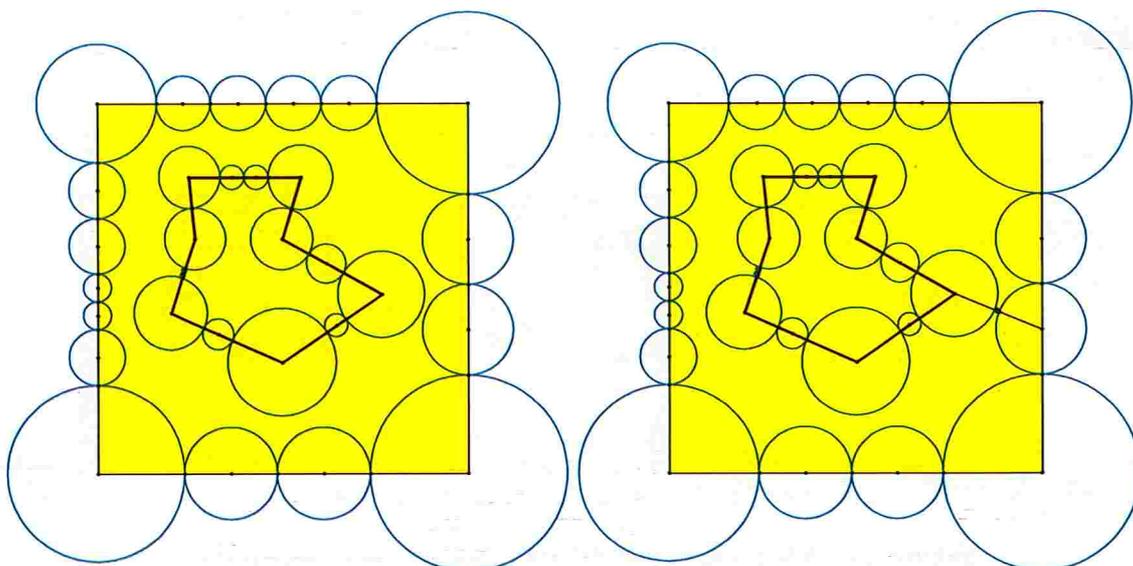


Figura 5.6: Criação de fendas iniciais.

Heurística da menor distância

A heurística da menor distância aumenta o diâmetro dos discos o máximo possível, examinando os discos em uma certa ordem. Em cada iteração aumentamos o diâmetro de um disco que admite a menor expansão possível, mantendo os discos internamente disjuntos. Mais precisamente, suponha que no início de uma iteração tenhamos discos O_1, \dots, O_N . Em cada iteração aumentamos o diâmetro do disco O_i , tal que

$$\min\{\text{dist}(O_i, O_j) : j = 1, \dots, N, j \neq i\} \leq \min\{\text{dist}(O_k, O_j) : j = 1, \dots, N, j \neq k\}$$

para $k = 1, \dots, N$, onde $\text{dist}(O, O')$ indica a distância entre os discos O e O' .

A intenção aqui é que as partes das arestas não seriam cobertas, partes as quais podem ser bem pequenas, sejam logo cobertas, evitando a necessidade de inserir novos pequenos discos.

Na figura 5.7, considerando apenas os discos na figura, o disco O_2 deverá ser expandido **antes** do disco O_1 , pois $\min\{\text{dist}(O_2, O_j) : j \neq 2\} < \min\{\text{dist}(O_1, O_j) : j \neq 1\}$.

A figura 5.8 mostra a cobertura do polígono através da heurística da menor distância e suas fendas iniciais. Há significativa melhora em comparação com a cobertura mostrada na figura 5.5, onde seguimos o método à risca, em relação ao número de discos. Vale também reparar que aqui não houve a necessidade de adicionarmos um disco novo, como

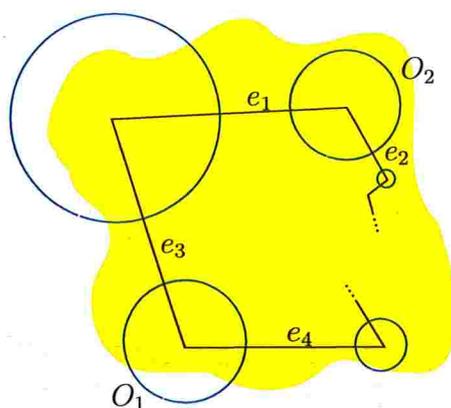


Figura 5.7: O disco O_2 será examinado para aumento de diâmetro antes do disco O_1 , se utilizada heurística da menor distância, e o contrário ocorrerá no caso de heurística da maior distância.

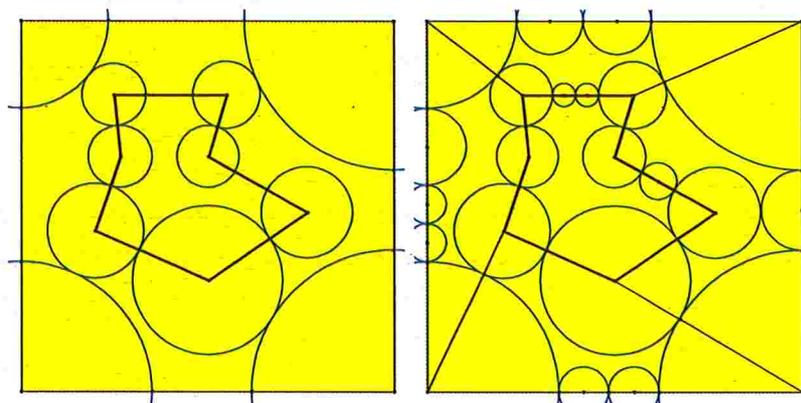


Figura 5.8: Cobertura do polígono através da heurística da menor distância e respectivas fendas iniciais.

ocorreu na figura 5.6, já que algum disco que cobre P toca um disco que cobre a margem do papel.

Heurística da maior distância

A heurística da maior distância é semelhante à heurística anterior. Dessa vez, em cada iteração aumentamos o diâmetro de um disco que admite a maior expansão possível, mantendo os discos internamente disjuntos. Em cada iteração aumentamos o diâmetro do disco O_i , tal que

$$\min\{\text{dist}(O_i, O_j) : j = 1, \dots, N, j \neq i\} \geq \min\{\text{dist}(O_k, O_j) : j = 1, \dots, N, j \neq k\}$$

para $k = 1, \dots, N$.

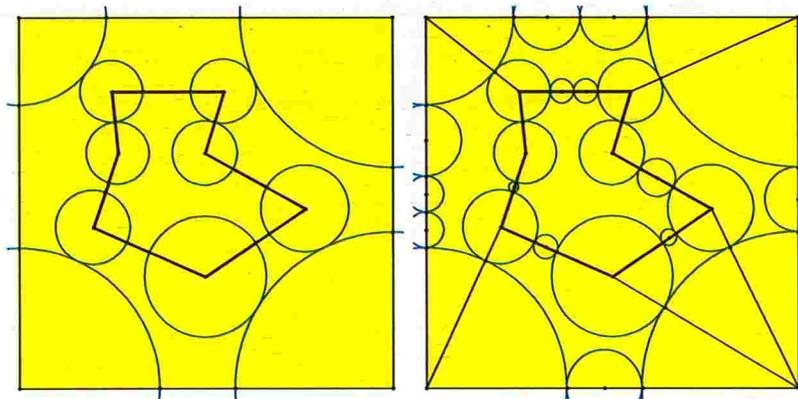


Figura 5.9: Cobertura dos vértices pela heurística da maior distância e respectivas fendas iniciais.

Na mesma figura 5.7 o disco O_2 será expandido **depois** do O_1 , pois $\min\{\text{dist}(O_1, O_j) : j \neq 1\} > \min\{\text{dist}(O_2, O_j) : j \neq 2\}$. A figura 5.9 aplica essa heurística, e nesse caso ela gera um número um pouco maior de discos ao fim da cobertura, em comparação com a heurística da menor distância (figura 5.8).

5.3 3-fendas e 4-fendas

Neste ponto temos formadas as fendas iniciais através dos discos que cobrem o polígono e a margem do papel. Nessa fase, estenderemos essa cobertura inicial gerando um empacotamento de discos onde toda fenda é uma 3-fenda ou 4-fenda (seção 4.3).

Conversão da estrutura

Nesse momento, em nossa implementação, possuímos em memória apenas as listas de adjacências do grafo que representa as arestas já criadas do diagrama durante a primeira fase. Não possuímos a informação sobre quais discos, arestas e vértices pertencem a cada fenda, sendo essa uma informação necessária para esta fase do método.

Assim, inicialmente, convertemos essa estrutura simples na estrutura arestas aladas. Para essa conversão, percorremos as listas de adjacências criando uma aresta alada para cada aresta e formando novas faces toda vez que passamos por uma aresta já visitada e não houver nenhuma outra aresta dentro dessa face. Verificamos isso através de diversas primitivas básicas de geometria computacional, tais como a primitiva `LEFT`¹. Utilizamos de uma face para denotar a face externa do grafo.

Há também um caso particular que devemos ter muito cuidado durante a implementação: as pontes do grafo. Em um poliedro todas as arestas são biconexas, mas aqui, como visto na figura 5.6, podemos gerar uma ponte por necessidade de tornar o nosso grafo conexo. Representar uma ponte com arestas aladas requer uma série de cuidados especiais, pois durante o passeio em uma face, ao passar pela segunda vez por uma ponte não indica que a face tenha chegado ao fim. Tomamos uma série de cuidados complicados aqui, quando mais tarde percebemos que a simples adição de uma segunda aresta e disco tornaria o grafo biconexo e simplificaria muito a manipulação de nossa estrutura de dados.

Primitiva APOLÔNIO

Em nossa implementação, cada k -fenda é representada por uma face na estrutura de dados aresta alada. Aqui, recursivamente, vamos quebrar as k -fendas, $k \geq 5$, com discos tangentes a três ou mais discos. A primitiva a ser usada será `APOLÔNIO(O_1, O_2, O_3)`, que recebe três discos O_1, O_2 e O_3 , e devolve, caso exista, um disco O que tangencia O_1, O_2 e O_3 .

Implementar `APOLÔNIO` requer certo cuidado. O sistema de equações apresentado na seção 4.3 pode ter oito soluções. A fim de obter apenas o disco que tangencia externamente

¹A primitiva `LEFT(a, b, c)` recebe três pontos e devolve verdadeiro se o ponto c está à esquerda do segmento orientado que vai de a até b [53].

os outros três discos, fixamos os sinais das equações, obtendo assim o sistema

$$\begin{aligned}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r + r_1)^2 &= 0 \\(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r + r_2)^2 &= 0 \\(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r + r_3)^2 &= 0,\end{aligned}$$

onde (x, y) e r são a coordenada do centro e o raio do disco O , e (x_i, y_i) e r_i são a coordenada do centro e o raio do disco O_i ($i = 1, 2, 3$). No caso de O_1, O_2 e O_3 terem seus centros colineares, então temos dois possíveis discos tangentes. Nesse caso fazemos uma pequena perturbação nas coordenadas de um dos discos, afim de encontrar apenas o que está do lado de dentro da fenda, como ilustra a figura 5.10.

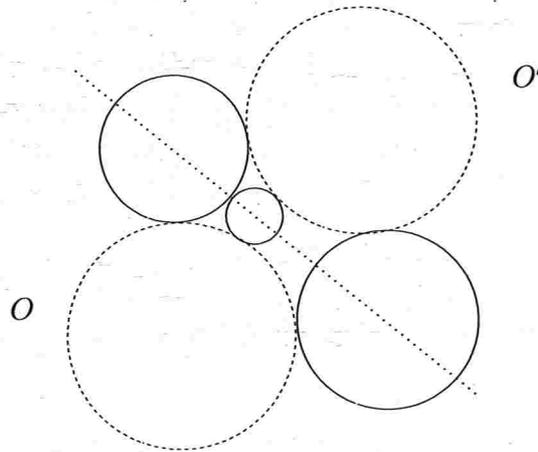


Figura 5.10: Discos O e O' tangentes a três discos de centros colineares.

Além dessa primitiva precisamos verificar se o disco candidato não intersecta nenhum outro disco da fenda dada, o que pode ser facilmente verificado com uma primitiva de distância entre pontos.

A figura 5.11 mostra uma 8-fenda e o uso da primitiva APOLÔNIO para encontrar um disco tangente a três outros dentro dessa fenda. A figura 5.12 mostra as três novas fendas resultantes pelo posicionamento desse disco. Aqui é interessante notar que o polígono induzido pela primeira dessas fendas, a 5-fenda, já é um quadrilátero. No entanto, como ele é induzido por cinco discos, teremos de inserir mais discos no interior dessa 5-fenda, para efeito de compatibilidade.

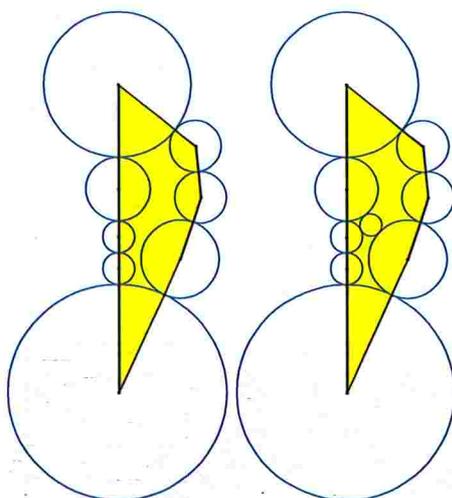


Figura 5.11: Uma 8-fenda e um disco para quebrá-la.

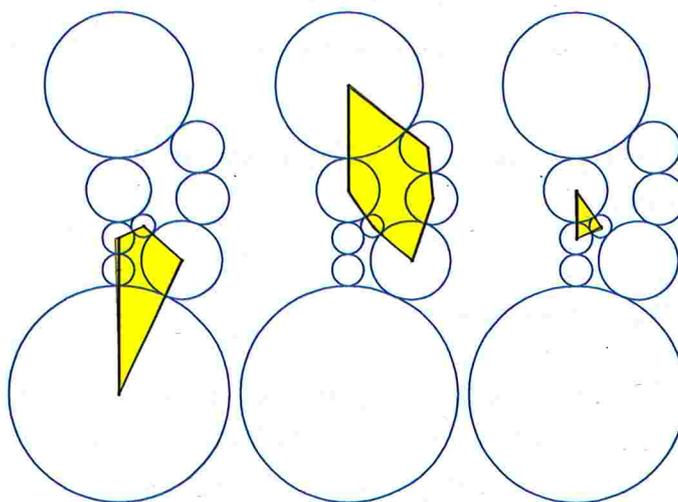


Figura 5.12: As três fendas novas criadas a partir da quebra da figura 5.11.

Empacotamento final

Adicionando discos sem nenhum critério especial, apenas obedecendo à necessidade de tangenciar três discos não consecutivos, chegamos ao empacotamento de discos final. Os polígonos induzidos são todos triângulos e quadriláteros compatíveis, conforme ilustra figura 5.13. Essa figura, bem como as que foram apresentadas ao longo do capítulo, utilizam da heurística da menor distância para o posicionamento inicial dos discos, diminuindo possivelmente a quantidade total de discos e conseqüentemente diminuindo o número de dobras e facilitando a visualização das figuras.

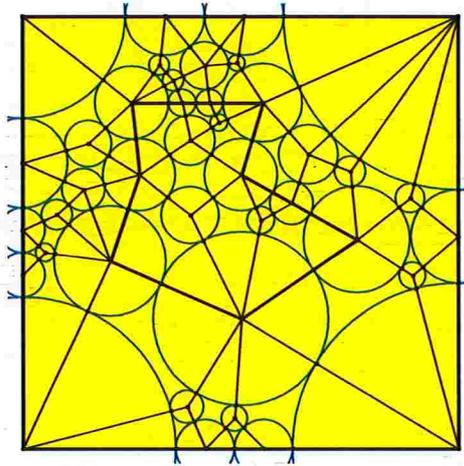


Figura 5.13: Quebra de todas as fendas sem utilizar heurística.

A seguir, apresentaremos algumas heurísticas para a escolha mais apropriada de discos a serem inseridos nas fendas.

Heurística do maior disco

Conforme Marshall Bern e colaboradores [9] sugerem, em vez de escolher um disco a esmo, podemos inserir em uma fenda, dentre todos os discos possíveis, aquele que tem o maior raio. Para isso geramos uma lista com todos os discos candidatos a serem inseridos. Isso é feito executando-se a primitiva APOLÔNIO $\binom{k}{3}$ vezes, para uma k -fenda. Dentre esses discos possíveis, inserimos aquele de maior raio.

A figura 5.14 mostra o empacotamento final que foi obtido utilizando a heurística do maior disco. A ganância dessa heurística pode fazer com que sejamos obrigados a inserir discos de raio muito pequeno, dependendo da área das fendas que são geradas.

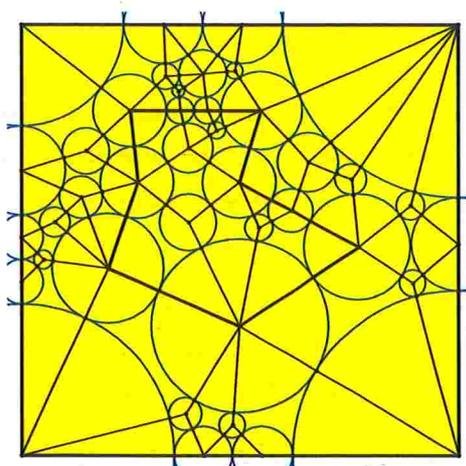


Figura 5.14: Empacotamento final utilizando heurística do maior disco.

Heurística do disco mediano

Tendo em vista o problema da heurística do maior disco, em vez de pegar o maior disco, dentre a lista de todos os discos candidatos possíveis, inserimos aquele cujo raio é a mediana dos raios.

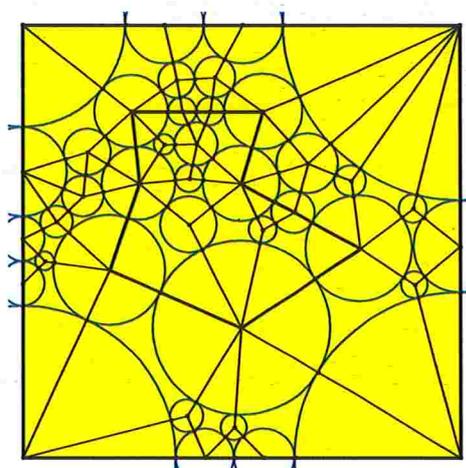


Figura 5.15: Empacotamento final utilizando heurística do disco mediana.

Um empacotamento final produzido pela heurística do disco mediana é mostrado na figura 5.15. Intuitivamente, com essa heurística, evitamos produzir fendas muito pequenas, que produziriam moléculas difíceis de serem dobradas.

Heurística dos maiores vizinhos

Na heurística dos maiores vizinhos, dentre os discos candidatos a serem inseridos em uma fenda, inserimos aquele que é tangente aos discos de maior raio. Por maior raio queremos dizer o terno de discos que tem seus raios lexicograficamente máximos.

Diferentemente das duas heurísticas anteriores, nesta não precisamos produzir de antemão a lista com os discos candidatos, evitando possivelmente utilizar $\binom{k}{3}$ vezes a primitiva APOLÔNIO para inserir um disco em uma k -fenda. Aqui basta ordenarmos decrescentemente pelo raio os discos da k -fenda, testar as $\binom{k}{3}$ possibilidades e inserir o primeiro disco encontrado.

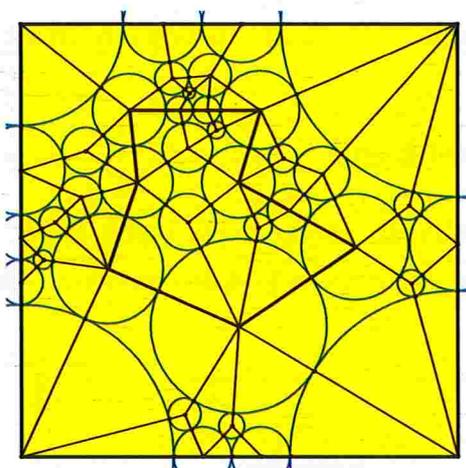


Figura 5.16: Empacotamento final utilizando heurística dos maiores vizinhos.

A preocupação dessa heurística é diminuir o tempo consumido para inserirmos um disco. Um empacotamento de discos que foi produzido utilizando a heurística dos maiores vizinhos está apresentado na figura 5.16.

Heurística dos menores vizinhos

A heurística dos menores vizinhos é análoga à heurística dos maiores vizinhos e está representada na figura 5.17. Nessa heurística, dentre os discos candidatos a serem inseridos em uma fenda, inserimos aquele que é tangente aos discos de menor raio, onde por menor raio entendemos o terno de discos que tem seus raios lexicograficamente mínimos.

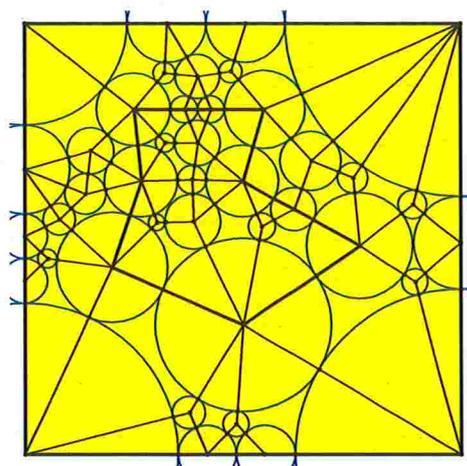


Figura 5.17: Empacotamento final utilizando heurística dos menores vizinhos.

Intuitivamente, a idéia dessa heurística é inserir um disco que tangencie, possivelmente, mais do que três discos, procurando com isso diminuir o número de discos do empacotamento.

Empacotamentos sem heurísticas iniciais

Para efeito de comparação, a figura 5.18 ilustra empacotamentos de discos obtidos por diferentes heurísticas de produção de 3-fendas e 4-fendas, mas dessa vez sem utilizar heurísticas durante a fase de cobertura inicial. Podemos perceber que o número de discos produzidos nesses empacotamentos é muito grande e há muitos discos de raio muito pequeno; dois ingredientes que tornam um diagrama humanamente impossível de ser dobrado.

5.4 Orelha do coelho e nesga

Com todas as nossas fendas reduzidas a 3-fendas e 4-fendas, o próximo passo é criar os diagramas das moléculas orelha do coelho (seção 3.1) para cada 3-fenda e das moléculas nesga (seção 3.3) para cada 4-fenda.

A orelha do coelho é bastante simples, como já vimos. Basta determinarmos o incentro

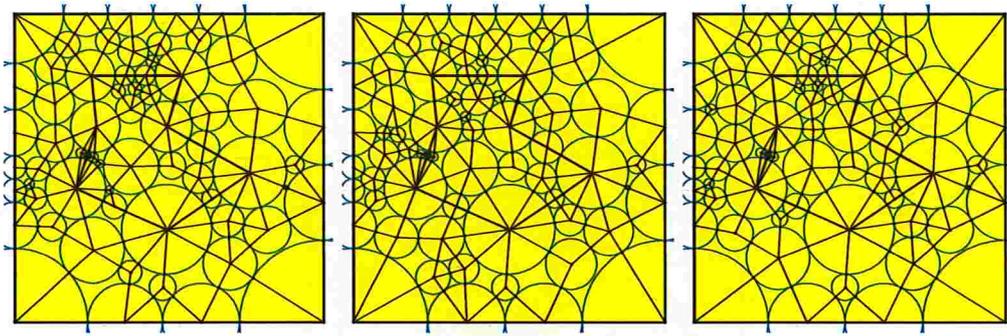


Figura 5.18: (a) Empacotamento sem heurística. (b) Empacotamento produzido pela heurística do disco mediana. (c) Empacotamento produzido pela heurística dos maiores vizinhos.

do triângulo, que é o encontro das bissetrizes dos seus ângulos.

Se temos um triângulo que tem como vértices $a = (x_a, y_a)$, $b = (x_b, y_b)$ e $c = (x_c, y_c)$ então a coordenada de seu incentro é

$$\left(\frac{\text{dist}(a, b)x_c + \text{dist}(b, c)x_a + \text{dist}(c, a)x_b}{\text{dist}(a, b) + \text{dist}(b, c) + \text{dist}(c, a)}, \frac{\text{dist}(a, b)y_c + \text{dist}(b, c)y_a + \text{dist}(c, a)y_b}{\text{dist}(a, b) + \text{dist}(b, c) + \text{dist}(c, a)} \right).$$

O incentro é uma média ponderada dos vértices tomando como peso os comprimentos dos seus lados.

Depois de calculado o incentro, basta unir esse ponto aos vértices de tangência, formando linhas do vale. Também ligamos o incentro aos vértices do triângulo, formando linhas da montanha. Essa orientação considera que o triângulo é interno ao polígono; se ele for externo, as orientações devem ser trocadas, como já visto na seção 4.4.

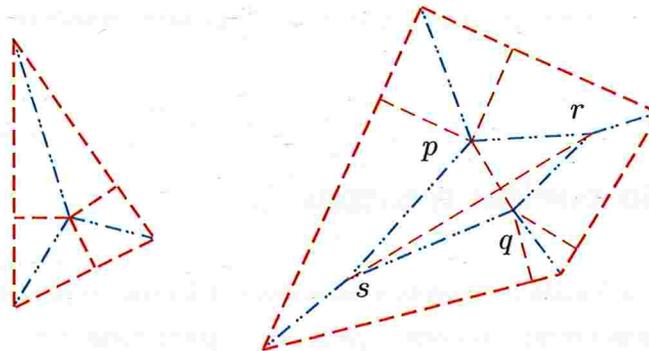


Figura 5.19: Moléculas construídas pelas fendas.

Para a construção da nesga, inicialmente determinamos os dois pares de tangentes que se encontram primeiro, formando assim dois vértices internos da nesga, p e q . Ligamos cada um desses vértices ao vértice do polígono através da bissetriz que ele pertence.

Diferente da orelha do coelho, para a nesga necessitamos de uma primitiva BISSETRIZ(p_1, p_2, p_3), que devolve a bissetriz do ângulo formado por $\angle(p_1, p_2, p_3)$ e é interna ao triângulo definido por eles. Aqui foi necessário definir uma certa orientação para não obtermos duas bissetrizes. Utilizando essa primitiva encontramos os outros dois vértices da nesga r e s conforme a descrição detalhada da seção 3.3. Ligamos esses quatro vértices de forma que crie duas arestas que se cruzam, formando o quinto e último vértice da nesga e subdividindo essas duas arestas em quatro.

A figura 5.19 mostra uma orelha do coelho e uma nesga geradas pela implementação, juntamente com sua atribuição padrão de vale e montanha. Precisamos ainda ajustar essas orientações.

5.5 Árvore de moléculas

Para Marshall Bern e colaboradores [9], as arestas no perímetro do polígono P não devem ser utilizadas para a construção da árvore T_C e, conseqüentemente, da árvore T_M :

... Let T_C be a tree of side edges such that: T_C includes no edges along the boundary of R or P ; T_C spans all interior corners of molecules; and T_C spans exactly one corner along the boundary of T , which we consider to be its root. ...

No entanto, essa árvore T_C como definida nem sempre existe, como mostra a figura 5.20. Ao remover as arestas do polígono P da figura, o grafo G fica desconexo. Dos vértices da face externa (verdes), conseguimos em G apenas atingir os vértices azuis dos polígonos que são fronteiras das moléculas, mas os vértices vermelhos não são alcançáveis.

Sugerimos aqui a seguinte modificação. Consideremos as arestas de P para dobra e durante a determinação a árvore T_C , dessa forma deixamos o grafo conexo. A diferença é que ao final do processo teremos o perímetro de P não apenas alinhado como também dobrado, o que impossibilita o uso de uma tesoura; é isso que o algoritmo proposto tenta evitar ao não considerar as arestas de P para dobra. Para essa nossa modificação funcionar, consideramos que podemos fazer um corte sem rasgar o papel em duas partes,

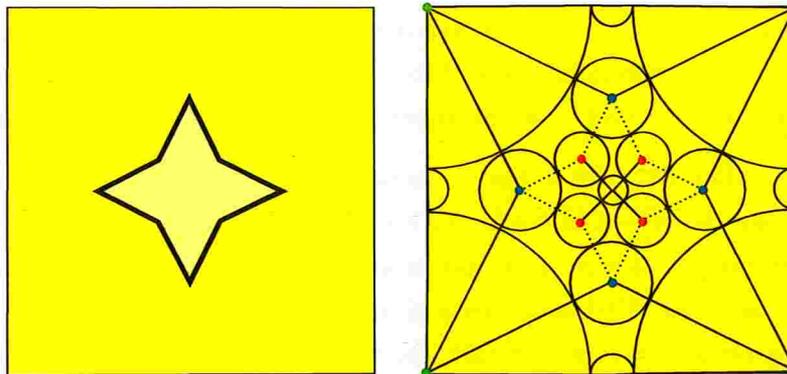


Figura 5.20: Grafo está desconexo para achar a árvore desejada.

como se usássemos um *laser* [5] ao invés de uma tesoura. No entanto, mesmo com essa modificação o diagrama subjacente produzido é o mesmo.

Tomando um vértice da face externa como raiz, fazemos uma busca em profundidade a fim de obter uma árvore T_C .

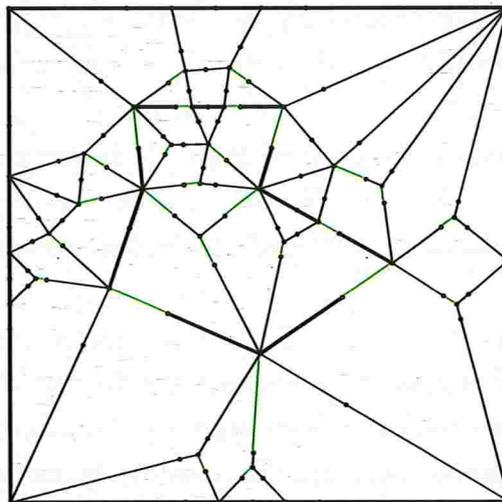


Figura 5.21: Uma árvore de arestas T_C correspondente ao empacotamento da figura 5.13.

As arestas verdes na figura 5.21 indicam as arestas laterais de T_C que fazem parte do emparelhamento, e terão suas orientações trocadas.

Na figura 5.22 podemos ver o esquema de dobras que ainda desrespeita Maekawa e a sua versão depois das trocas de atribuição das arestas tangentes de acordo com a T_C escolhida. Esta já está pronta para ser dobrada.

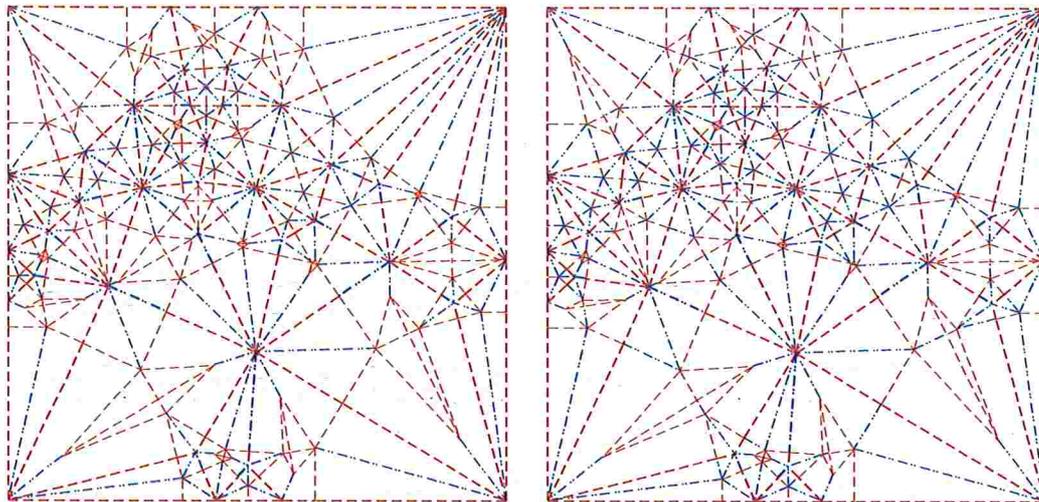


Figura 5.22: Diagrama antes e depois da troca de orientação de arestas de acordo com a árvore T_C da figura 5.21.

5.6 Análise das heurísticas e resultados

Marshall Bern e colaboradores [9] sugerem que alguns atalhos podem ser tomados para melhorar o diagrama resultante. É isso que tentamos através das heurísticas criadas, mas o que viria a ser um diagrama melhor? Definimos a seguir alguns aspectos que utilizaremos para comparar as heurísticas:

Número de linhas: apesar de ser proporcional ao número de moléculas (4.7), o número de linhas no diagrama resultante também depende do número de moléculas que são orelha do coelho e do número de moléculas que são nêsgas. Moléculas orelhas do coelho, por serem as mais simples e gerarem um número menor de linhas, são preteridas. Ao minimizar o número de linhas, estamos seguindo a política “quanto menos linhas, melhor”.

Número de moléculas: o número de linhas é proporcional ao número de moléculas, mas ambos os valores são dados interessantes.

Área das moléculas: A área da molécula é forte indicador de quão fácil ou difícil será dobrá-la. Utilizaremos a área média das moléculas produzidas, juntamente com seu desvio padrão, para efeito de comparação entre os diagramas.

Notemos que nem sempre minimizar ou maximizar um dos três aspectos acima vai gerar um esquema de dobras mais factível: podemos ter um diagrama com número menor de dobras, só que algumas moléculas são tão pequenas que tornam o processo de dobras humanamente impossível. É evidente que o ideal seria otimizar esses critérios simultaneamente, mas estes são conflitantes.

Aplicamos o método ao diagrama da figura 5.1. A tabela 5.1 mostra os resultados obtidos combinando todas as possíveis heurísticas, e também sem utilizar nenhuma delas.

Tabela 5.1: Resultados das 15 combinações de heurísticas

Posicionamento inicial	Quebra das fendas	Linhas	Moléculas	Área média	Desvio
sem heurística	sem heurística	1200	85	4281	501
	maior disco	1250	82	4394	519
	disco mediano	1218	87	4159	457
	maiores vizinhos	1202	84	4328	484
	menores vizinhos	1264	84	4234	473
maior distância	sem heurística	778	51	7064	1071
	maior disco	742	47	7660	1150
	disco mediano	724	45	8007	1232
	maiores vizinhos	744	46	7827	1202
	menores vizinhos	760	49	7346	1093
menor distância	sem heurística	656	41	8780	1416
	maior disco	654	42	8572	1394
	disco mediano	632	42	8571	1409
	maiores vizinhos	656	41	8781	1471
	menores vizinhos	672	44	8181	1340

Examinando os resultados podemos notar que as heurísticas criadas para o posicionamento inicial dos discos são fatores muito mais importantes que as heurísticas que decidem como quebrar uma k -fenda, $k \geq 5$. Um detalhe importante é que nossa amostra

é muito pequena. Precisaríamos testar o método com vários polígonos, ou até mesmo com polígonos gerados aleatoriamente².

Durante nossos testes, mesmo com polígonos diferentes, as heurísticas para a produção de 3-fendas e 4-fendas não nos pareceram melhorar o diagrama produzido. Elas aparentam fazer apenas trocas de discos: apesar de uma determinada fenda do empacotamento ser quebrada com menos discos, parece que outra passa a precisar de um disco a mais, por causa da economia em sua vizinha. Sabemos que para quebrarmos uma k -fenda, $k \geq 5$, necessitamos de não mais que $k - 4$ discos, no entanto parece-nos improvável que um empacotamento possa utilizar um número significativamente menor que esses $k - 4$ discos para cada k -fenda, pois seriam necessários discos que tangenciassem vários discos da fronteira da fenda, que é um caso bem particular.

No quesito de praticidade, conseguimos apenas dobrar e cortar polígonos muito simples. Para alguns necessitamos de um pequeno acerto do empacotamento, feito manualmente.

²Gerar polígonos aleatórios não nos pareceu interessante para testar o algoritmo.

Considerações finais

Este texto pode ser dividido em duas partes que de certa forma são auto contidas. Na primeira parte, que consta do capítulo 1, tratamos das construções geométricas com dobras. Esse é o chamado origami matemático que descreve as leis que regem as operações com dobras. No restante do texto tratamos de algoritmos e da teoria devotada à solução de um problema em origami computacional, o problema DOBRAR-E-CORTAR.

Construções geométricas com dobras

Vimos como o poder do modelo de dobras de Huzita ultrapassa o poder computacional do modelo de Euclides, das construções com régua e compasso. Em particular vimos que dois problemas clássicos em geometria que não possuem solução no modelo de Euclides, admitem solução no modelo de dobras de Huzita. Esses problemas são o problema TRISSEÇÃO (seção 1.6) e o problema DUPLICA-CUBO (seção 1.7).

Além disso, vimos que todas construções factíveis no modelo de Euclides podem ser realizadas no modelo de dobras de Huzita (seção 1.8).

Modelos planos

No capítulo 2, tratamos do problema mais estudado em origami computacional, o problema PLANAR, que consiste em determinar se um dado diagrama corresponde a um modelo plano. Aqui vimos condições locais necessárias para que um diagrama corresponda a um modelo plano, através dos teoremas de Jun Maekawa e de Toshikazu Kawasaki

(seção 2.2). Essas condições são muito empregadas nos capítulos posteriores.

Também vimos que o problema PLANAR é NP-completo “no sentido fraco” (seção 2.4). Mencionamos também que o problema PLANAR é na verdade NP-completo “no sentido forte”, mas a demonstração deste teorema de Marshall Bern e Barry Hayes [10] não foi apresentada neste texto. Essa dificuldade computacional do problema planar pode ser sentida nos outros capítulos, quando não conseguimos apresentar um certificado “curto” da planaridade dos diagramas produzidos pelos algoritmos.

Um problema em origami computacional

Nos capítulos 3 e 4, tratamos do problema

Problema DOBRAR-E-CORTAR(P, R): Dado um polígono simples P desenhado em um retângulo de papel R , obter um diagrama de um modelo plano que com apenas um “corte reto de tesoura” obtenhamos o polígono P .

A primeira solução desse problema foi apresentada por Erik Demaine, Martin Demaine e Anna Lubiw [21]. No capítulo 4 apresentamos o método de empacotamento de discos de Marshall Bern e colaboradores [9] para esse problema. Essa solução é baseada numa recursão em que moléculas (capítulo 3) formam a sua base.

Implementação

No capítulo 5 descrevemos uma implementação feita por nós do método do empacotamento de discos para o problema DOBRAR-E-CORTAR. Essa implementação usou aritmética de ponto flutuante, onde também tivemos problemas, em especial para a representação de números muito próximos de zero. Com isso algumas vezes o programa não parava ou ainda não encontrava algum lugar geométrico necessário, como o disco devolvido pela primitiva APOLÔNIO, devida a possível falha na detecção de intersecções. Para contornar tais problemas, alguns pequenos valores ϵ foram utilizados.

Em relação às heurísticas, podemos tirar algumas conclusões. A implementação permite que a cobertura inicial dos vértices e das arestas seja manualmente modificada. Fazendo ajustes manuais conseguimos atingir resultados muito melhores do que com as

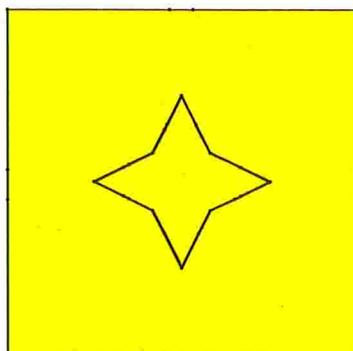


Figura 6.1: Estrela de quatro pontas.

heurísticas de cobertura inicial dos vértices. A figura 6.1 mostra a estrela de quatro pontas, um polígono que vamos empacotar tanto com as heurísticas quanto manualmente.

A figura 6.2 mostra três diagramas diferentes para a estrela de quatro pontas. Os três utilizam a heurística do maior disco para a quebra de fendas, o que os difere é a heurística para cobertura inicial de discos. A primeira imagem não usa heurística alguma, conforme descrito no algoritmo. A segunda imagem utiliza heurística da menor distância, e a terceira imagem teve os discos iniciais posicionados manualmente. A quantidade de linhas geradas é de 1250, 518 e 248, respectivamente. Isso reforça o fato de que o número de linhas gerado é proporcional ao número de discos utilizados na primeira fase do método.

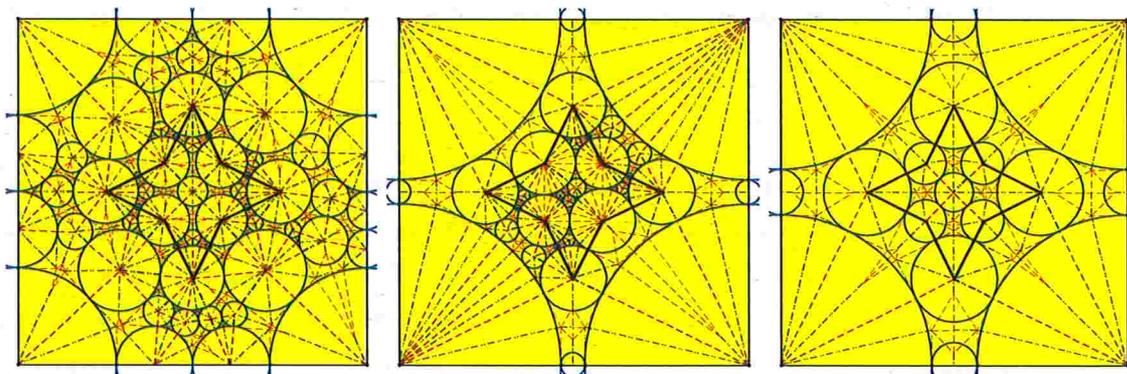


Figura 6.2: A estrela de quatro pontas e três possíveis diagramas.

Outra opção, que não foi explorada nessa implementação, seria utilizar um otimizador para procurar o empacotamento que maximizasse ou minimizasse algum critério, como talvez o número de discos utilizados. Certamente se chegássemos a um resultado como o

de nosso empacotamento manual seria um resultado muito satisfatório.

Aparentemente esta é a primeira implementação do método de Marshall Bern e colaboradores [9]. Nossa intenção não era de que a implementação fosse a melhor possível no sentido de consumo de tempo assintótico, pretendíamos estudar os diagramas gerados.

Apesar dos autores do método afirmarem que ele produziria diagramas que na prática não são muito difíceis de serem dobrados, o número e o tamanho das dobras produzidas até mesmo quando aplicado a polígonos simples, como o da figura 4.23, mostra que eles não são tão simples. Em uma troca de mensagens com Marshall Bern, Barry Hayes e David Eppstein, eles já suspeitavam da complexidade dos diagramas produzidos.

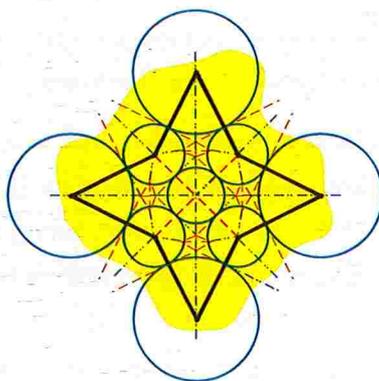


Figura 6.3: Empacotamento da estrela da figura 6.1, empacotando apenas a região do polígono, desconsiderando o papel.

Marshall Bern não ficou surpreso com os problemas que enfrentamos na implementação, em especial na busca da árvore de corte e atribuição da orientação das arestas, e disse que o artigo é um pouco superficial nesse ponto. Ele também nos enviou o manuscrito *Origami embedding of piecewise-linear two-manifolds* [11] com mais detalhes sobre esta fase do método, juntamente com problemas que podem ser enfrentados quando o polígono em questão possui buracos. Esse é exatamente o caso ao considerarmos que o polígono a ser cortado é R e este possui um buraco P , como na figura 6.3; apenas devemos tomar cuidado com as linhas que se cruzam fora do polígono mas ainda dentro do papel formando novos vértices. Com essa consideração, precisamos apenas empacotar o polígono e seu interior, e dessa forma sempre é possível encontrar a árvore T_C , conforme descrito por Marshall Bern e colaboradores [9].

Construção de bases

Apesar de não ter sido tratado neste texto, não podemos deixar de mencionar o trabalho de Robert J. Lang, que deu início ao origami computacional.

O projeto de um origami pode ser dividido em duas partes: dobrar uma base e dobrar os detalhes. Uma *base* é uma forma geométrica que tem uma estrutura similar ao do modelo desejado. As dobras dos detalhes transformam a base no origami final. A fim de obtermos uma base, alguns métodos são conhecidos, como o *circle/river method* e o *tree method*. O TreeMaker é um programa desenvolvido por Robert J. Lang [46] que implementa alguns desses métodos e que auxilia na obtenção das chamadas bases uniaxiais, onde moléculas têm um papel fundamental.

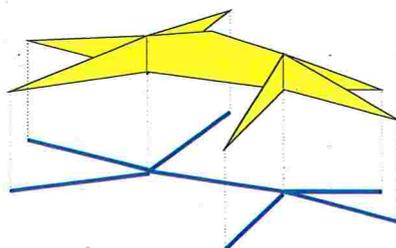


Figura 6.4: Uma árvore e sua correspondente base.

Dada uma árvore, que representa a base do origami desejado (figura 6.4), indicando sua conectividade, proporções e, principalmente, suas “pontas”, o TreeMaker é capaz de gerar um diagrama que após dobrado produz essa base. A partir do diagrama o origamista deve, então, dobrar a base e realizar o acabamento de cada uma das partes; uma tarefa artística nada fácil.

Esse empacotamento de discos utilizado por Robert J. Lang no TreeMaker foi particularmente inspirador para a criação da solução do problema DOBRAR-E-CORTAR aqui estudada.

Próximos passos

A solução do problema DOBRAR-E-CORTAR através de esqueletos rígidos [2, 21], que não foi aqui apresentada, parece dar resultados mais práticos do que através do empacotamento de discos, porém também não há até agora uma implementação, apenas simulações manuais desse método.

Essa outra implementação teria aplicação para problemas reais, como o problema de dobrar airbags de uma melhor maneira, de acordo com trocas de mensagens com Robert J. Lang.

O origami computacional é uma área em expansão. Erik Demaine e Joseph O'Rourke estão escrevendo um livro intitulado *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, and Polyhedra*, que possivelmente será publicado este ano, formalizando diversas definições e trazendo um certo padrão nesta área, algo que sentimos falta enquanto redigimos este texto ¹.

¹Este livro foi publicado no início de 2008, logo após a apresentação deste texto.

Referências Bibliográficas

- [1] Tsune Abe, sem título, *British Origami* (1984), no. 108, 9. Citado na(s) página(s) 21, 29
- [2] Oswin Aichholzer e Franz Aurenhammer, Straight skeletons for general polygonal figures in the plane, *Proceedings of the Second Annual International Conference on Computing and Combinatorics (COCOON)* (Jin yi Cai e C.K. Wong, eds.), Lecture Notes In Computer Science, vol. 1090, 1996, pp. 117–126. Citado na(s) página(s) 90, 139
- [3] Roger C. Alperin, A mathematical theory of origami constructions and numbers, *New York Journal of Mathematics* **6** (2000), 119–133. Citado na(s) página(s) 8
- [4] Eric M. Andersen, *Paper folding*, <http://www.paperfolding.com/>. Citado na(s) página(s) 1
- [5] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Joseph S. B. Mitchell, Saurabh Sethia e Steven S. Skiena, When can you fold a map?, *Computational Geometry: Theory and Applications* **29** (2004), no. 1, 23–46, Special issue of selected papers from the 10th Annual Fall Workshop on Computational Geometry, 2000. Citado na(s) página(s) ii, 4, 56, 57, 64, 66, 67, 70, 130
- [6] David Auckly e John Cleveland, Totally real origami and impossible paper folding, *The American Mathematical Monthly* **102** (1995), no. 3, 215–226. Citado na(s) página(s) 34
- [7] Bruce Guenther Baumgart, A polyhedron representation for computer vision, *Proc. AFIPS Natl. Comput. Conf.*, vol. 44, 1975, pp. 589–596. Citado na(s) página(s) 112

- [8] Marshal Bern e Barry Hayes, The complexity of flat origami, *Proceedings of the 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (Atlanta), ACM-SIAM, January 1996, pp. 175–183. Citado na(s) página(s) 4, 56, 64
- [9] Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein e Barry Hayes, A disk-packing algorithm for an origami magic trick, *Proceedings of the 3rd International Meeting of Origami Science, Math, and Education (OSME 2001)* (Monterey, California), March 9–11 2001, pp. 17–28. Citado na(s) página(s) ii, 5, 90, 91, 92, 93, 96, 97, 98, 106, 109, 111, 124, 129, 131, 136, 138
- [10] Marshall Bern e Barry Hayes, The complexity of flat origamis, *7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1996, pp. 175–183. Citado na(s) página(s) ii, 71, 136
- [11] Marshall Bern e Berry Hayes, *Origami embedding of piecewise-linear two-manifolds*, 2007, manuscrito. Citado na(s) página(s) 138
- [12] Marshall Bern, Scott Mitchell e Jim Ruppert, Linear-size nonobtuse triangulation of polygons, *SCG '94: Proceedings of the tenth annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA), ACM Press, 1994, pp. 221–230. Citado na(s) página(s) 92, 98, 110
- [13] James Brunton, Mathematical exercises in paper folding, *Mathematics in School* 2 (1973), no. 4, 25, Longmans for Mathematical Association. Citado na(s) página(s) 22
- [14] Paulo Cezar Pinto Carvalho e Luiz Henrique de Figueiredo, *Introdução à geometria computacional*, 18 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991. Citado na(s) página(s) 112
- [15] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest e Clifford Stein, *Introduction to algorithms*, second ed., The MIT press, Cambridge, Massachusetts, 2001. Citado na(s) página(s) 4
- [16] Richard Courant e Herbert Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, New York, 1941. Citado na(s) página(s) 8, 10, 28, 29
- [17] Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars e Otfried Schwarzkopf, *Computational geometry: Algorithms and applications*, Springer, 2000. Citado na(s) página(s) 98

- [18] Erik Demaine, *Kan chu sen wakoku chiyekurabe*, March 2002, theory.lcs.mit.edu/~edemaine/foldcut/sen_book.html. Citado na(s) página(s) xii, 89
- [19] Erik D. Demaine, *Folding and unfolding*, Ph.D. thesis, Department of Computer Science, University of Waterloo, 2001. Citado na(s) página(s) 3
- [20] Erik D. Demaine e Martin L. Demaine, Recent results in computational origami, *Origami³: Proceedings of the 3rd International Meeting of Origami Science, Math, and Education (SME)* (Monterey, California), A.K. Peters, March 9-11 2001, pp. 3–16. Citado na(s) página(s) ii, 3
- [21] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine e Anna Lubiw, Folding and cutting paper, *Revised Papers from the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry (JCDCG'98)* (Tokyo, Japan), Lecture Notes in Computer Science, vol. 1763, December 9–12 1998, (Shorter version in *Proceedings of the Japan Conference on Computational Geometry*, pages 5–9), pp. 104–117. Citado na(s) página(s) 90, 136, 139
- [22] Shuzo Fujimoto e M. Nishiwaki, *Sojo suru origami asobi eno shotai (invitation to creative origami playing)*, Asahi Culture Centre, 1982. Citado na(s) página(s) 26
- [23] Koji Fusimi, Trisection of angle by abe, *Saiensu* (1980), 8, supplement. Citado na(s) página(s) 21, 29
- [24] Martin Gardner, The combinatorics of paper folding, *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, 1983, pp. 60–73. Citado na(s) página(s) 55
- [25] Michael R. Garey e David S. Johnson, *Computers and intractability: a Guide to the Theory of NP-completeness.*, Freeman, 1979. Citado na(s) página(s) 4, 7
- [26] Robert Geretschläger, Euclidean constructions and the geometry of origami, *Mathematics Magazine* **68** (1995), no. 5, 357–371. Citado na(s) página(s) ii, 18, 32, 35, 37, 42, 46, 47, 50, 53
- [27] ———, *Folding the regular 19-gon*, presented at AMS Joint Mathematics Meeting, Baltimore, MD, January 1998. Citado na(s) página(s) 32
- [28] ———, *Folding the regular triskaidekagon*, presented at AMS Joint Mathematics Meeting, Baltimore, MD, January 1998. Citado na(s) página(s) 32

- [29] ———, *Solving quartic equations in origami*, presented at AMS Joint Mathematics Meeting, Baltimore, MD, January 1998. Citado na(s) página(s) 32
- [30] Leonidas Guibas e Jorge Stolfi, Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of voronoi diagrams, *ACM Transactions on Graphics* 4 (1985). Citado na(s) página(s) 115
- [31] Thomas Heath, *History of greek mathematics*, Courier Dover Publications, New York, 1981. Citado na(s) página(s) 35
- [32] I.N. Hernstein, *Tópicos de Álgebra*, Polígono, 1970. Citado na(s) página(s) 28, 29
- [33] Thomas Hull, *Origami geometric constructions*, <http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html>. Citado na(s) página(s) 13
- [34] ———, On the mathematics of flat origamis, *Congressus Numeratum* 100 (1994), 215–224. Citado na(s) página(s) 56, 61, 64
- [35] Koji Husimi, *Origami no kikagaku (origami and geometry)*, Nippon Hyoronsha, Tokyo, 1979. Citado na(s) página(s) 26
- [36] Humiaki Huzita, Understanding geometry through origami axioms, *First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)* *First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)* (J. Smith, ed.), British Origami Society, 1992. Citado na(s) página(s) 13
- [37] Jacques Justin, Sem título, *British Origami* (1984), no. 108, 9. Citado na(s) página(s) 32
- [38] ———, Sem título, *British Origami* (1986), 30. Citado na(s) página(s) 60, 62
- [39] Kunihiro Kasahara, *Origami omnibus*, Japan Publications, 1988. Citado na(s) página(s) 26
- [40] Kunihiro Kasahara e Toshie Takahama, *Origami for the connoisseur*, first edition: march 1987; tenth printing: september 2004. ed., Japan Publications, 1987, The original Japanese-language edition published by Sanrio Co., Ltd., Tokyo in 1985. Citado na(s) página(s) 4, 11, 26, 60, 62

- [41] Toshikazu Kawasaki, On the relation between mountain-creases and valley-creases of a flat origami, *Origami Science and Technology* (Humiaki Huzita, ed.), ?, 1989, pp. 229–237. Citado na(s) página(s) 62, 63
- [42] Hatori Koshiro, *Origami constructions*, <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>. Citado na(s) página(s) 13, 20
- [43] ———, *Origami page*, <http://origami.ousaan.com/>. Citado na(s) página(s) 1, 2, 7, 89, 111
- [44] Robert J. Lang, *Origami page*, <http://www.langorigami.com/>. Citado na(s) página(s) 1, 2
- [45] ———, Four problems III, *British Origami* (1988), no. 132, 7–11. Citado na(s) página(s) 22, 24
- [46] ———, A computational algorithm for origami design, *Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry* (Philadelphia, PA), ACM, 1996, pp. 98–105. Citado na(s) página(s) ii, 3, 73, 87, 139
- [47] ———, *Origami and geometric constructions*, <http://www.langorigami.com/>, 2003. Citado na(s) página(s) ii, 8, 20, 22, 26, 32, 34
- [48] ———, *Origami design secrets: Mathematical methods for an ancient art*, A K Peters, Printed in India at Replika Press, 2003. Citado na(s) página(s) 1, 76, 78, 87
- [49] Jorge C. Lucero, *O problema deliano*, Janeiro 2006, www.mat.unb.br/~lucero/origami/Notas_2.pdf. Citado na(s) página(s) 35
- [50] Peter Messer, Problem 1054, *Cruz Mathematicorum* **12** (1986), no. 10. Citado na(s) página(s) 35, 46
- [51] David Mitchell, *Origami heaven page*, <http://www.origamiheaven.com/>. Citado na(s) página(s) 1, 73
- [52] Masamichi Noma, *Origami tanteidan newsletter*, issue 14. Citado na(s) página(s) 26
- [53] Joseph O'Rourke, *Computational geometry in C*, second edition ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Citado na(s) página(s) 121
- [54] François Viete, *Opera Mathematica*, ch. Apollonius Gallus, Leiden, 1646. Citado na(s) página(s) 99

[55] Joseph Wu, *Origami page*, <http://www.origami.as/>. Citado na(s) página(s) 1

Índice Remissivo

- algoritmo
 - ABE, 29
 - de dobra binário, 22
 - DIAGONAIS-CRUZADAS, 27
 - DOBRA-BINÁRIA, 23
 - DOBRA-BINÁRIA-APROX, 24
 - JUSTIN, 32
- arestas, 56
 - aladas, 112
 - de tangência, 104
 - do diamante, 104
 - internas ao diamante, 104
 - laterais, 104
 - ponte, 115
- articulações, 56
- árvore
 - de moléculas, 106
- axiomas de Huzita, 13
- barras, 56
- bissetriz, 15
- bomba d'água, 76
- cônicas, 18
- conjunto
 - gerador, 75
- construção
 - E1, 9
 - E2, 9
 - E3, 9
 - E4, 9
 - E5, 9
- construções
 - de Euclides, 8
- diagrama, 2
 - de Voronoi, 98
 - de Voronoi de uma fenda, 98
 - pássaro, 2
- digrama
 - 2-coloração, 61
- dobra
 - da montanha, 1
 - da prega, 57
 - da vale, 1
 - simples, 12
- empacotamento
 - de discos, 92
- emparelhamento, 105
 - perfeito, 105
- esqueleto
 - rígido, 90
- estruturas de dados, 112

- grafo, 2
 - arestas, 2
 - vértices, 2
- lg, 24
- linha
 - da montanha, 2
 - de referência, 11
 - do vale, 2
- linkage*, 56
- mapa, 64
- mediatriz, 13
- método
 - das diagonais cruzadas, 26
- modelo
 - computacional, 7
 - de Euclides, 7
 - de Huzita, 8
 - plano, 55
- molécula, 73
 - bomba d'água, 76
 - compatível, 82
 - nesga, 78
 - orelha do coelho, 74
- nesga, 78
- número
 - construtível, 10, 13
- operação
 - O1, 13
 - O2, 13
 - O3, 15
 - O4, 16
 - O5, 16
 - O6, 18
 - O7, 20
- operações
 - de Huzita, 13
- orelha do coelho, 74
- origami, 1
 - computacional, 3
 - matemático, 2
 - tecnológico, 3
- parábola, 14
 - diretriz, 14
 - foco, 14
- polígonos
 - induzidos por empacotamento de discos, 92
- polígonos regulares, 32
- ponto
 - de referência, 11
- posto, 23
- prega, 57
- problema
 - APOLÔNIO, 10, 97
 - deliano, 11
 - DOBRA-MAPA, 65
 - DOBRAR-E-CORTAR-BOOLEANO, 90
 - DOBRAR-E-CORTAR, 90, 136
 - DUPLICA-CUBO, 11, 35
 - ENQUADRA-CÍRCULO, 11
 - EQUAÇÃO-CÚBICA, 50
 - PARTIÇÃO, 67
 - PLANAR, 60
 - RAIZ, 10
 - RAIZ-CÚBICA, 47
 - RETILINEAR, 56
 - TRISSEÇÃO, 10, 28
- processo de dobra, 1, 12

simples, 65

resultado

- universal, 4
- de intratabilidade, 4

rosa de Kawasaki, 11

tamanho

- de molécula, 80

teorema

- de Kawasaki, 62
- de Maekawa, 60

tsuru, 2

vértice

- de tangência, 73

vértice

- de Voronoi, 98

vértices, 56

