

Transformações *Hit-or-Miss* para imagens tons de cinza

Felipe Breve Siola

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Nina S. T. Hirata

Durante parte do desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Agosto de 2014

Transformações *Hit-or-Miss* para imagens tons de cinza

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato Felipe Breve Siola, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

A Deus, a minha esposa Ana, aos meus pais Adair e Vera, a meu irmão Vitor e a professora Nina.

Resumo

SIOLA, F. B. **Transformações *Hit-or-Miss* para imagens tons de cinza**. 2014. XXX f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

A transformação *Hit-or-Miss* foi uma das primeiras transformações morfológicas definidas nos anos 60 por Jean Serra e Georges Matheron. Entre suas principais utilizações estão o reconhecimento de padrões e objetos, afinamento e esqueletização, etc. Trata-se de uma operação que, utilizando dois elementos estruturantes distintos, tem como objetivo ao mesmo tempo avaliar tanto o interior como o exterior de um objeto em uma imagem. No contexto de imagens binárias, trata-se de uma transformação bem definida com propriedades importantes e bem conhecidas, destacando-se principalmente o fato de ser um operador não crescente nem com relação ao *foreground*, nem ao *background* de uma imagem binária. Essa propriedade impede de, como acontece com operadores crescentes, que ocorra uma extensão direta do operador para o caso de imagens níveis de cinza. Este trabalho tem como objetivo estudar as diferentes extensões da transformação *Hit-or-Miss* para o caso níveis de cinza publicadas até o momento, as propostas de unificação existentes, relacionar as definições e as propostas de unificação, e avaliar aspectos práticos de sua aplicação em problemas reais.

Palavras-chave: hit-or-miss, casamento de padrões, operador intervalo.

Abstract

SIOLA, F. B. **Hit-or-Miss transformations for gray level images**. 2014. XXX f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

The Hit-Or-Miss Transformation was one of the first Mathematical Morphology transformations defined in the 60's by Jean Serra and Georges Matheron. The most important utilizations of the transformation are pattern and object matching, thinning and skeletonization, etc. The operation takes two different structuring elements and has as objective to analyze at the same time the interior and the exterior of an object in an image. For binary images, it is a well-defined operation with important and known properties, mainly the fact that it is non-increasing with respect to the foreground and the background. This property prevents a direct extension for gray level images, as it occurs for increasing operators. The objectives of this work are to study some of the different extensions published so far of the Hit-Or-Miss transformation for the gray level case, the proposals for unification, relate the definitions and the unification proposals, and evaluate practical aspects of its application in real world problems.

Keywords: hit-or-miss, pattern matching, interval operator.

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Organização do texto	2
2 Definições	3
2.1 Morfologia Matemática	3
2.2 Imagens digitais	4
2.3 Elemento estruturante ou Função estruturante	5
2.4 Operações sobre conjuntos e funções	6
2.4.1 Translação	6
2.4.2 Ordem entre funções	7
2.4.3 Ínfimo e Supremo	7
2.4.4 Complemento e Negação	7
2.4.5 Transposição ou Reflexão	7
2.4.6 <i>Threshold</i>	7
2.4.7 <i>Cross-section</i> e Decomposição <i>Threshold</i>	8
2.4.8 Umbra ou Sombra	8
2.5 Propriedades de transformações de imagens	8
2.5.1 Identidade	8
2.5.2 Idempotência	9
2.5.3 Invariância a translação	9
2.5.4 Invariância a rotação	9
2.5.5 Invariância a escala	9
2.5.6 Localmente definida	9
2.5.7 Linearidade	9
2.5.8 Invariância a decomposição <i>threshold</i>	9
2.5.9 Extensiva	10
2.5.10 Anti-Extensiva	10
2.5.11 Associativa	10
2.5.12 Comutativa	10
2.5.13 Crescente	10

2.6	Erosão	10
2.6.1	Erosão binária	10
2.6.2	Erosão tons de cinza	11
2.7	Dilatação	11
2.7.1	Dilatação binária	12
2.7.2	Dilatação tons de cinza	12
2.8	Dualidade entre Erosão e Dilatação	13
2.9	Abertura	14
2.10	Operações <i>rank-order</i>	14
3	Transformação <i>Hit-or-Miss</i>	15
3.1	Visão Histórica	15
3.2	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> binária	17
3.2.1	Definição	17
3.2.2	Propriedades e Aplicações	18
3.3	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> tons de cinza	19
3.3.1	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Khosravi & Schafer</i>	19
3.3.2	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Ronse</i>	20
3.3.3	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Banon & Faria</i>	21
3.3.4	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Raducanu & Grana</i>	21
3.3.5	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Soille</i>	22
3.3.6	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Barat et al.</i>	25
3.4	Propostas de unificação para a Transformação <i>Hit-or-Miss</i> tons de cinza	27
3.4.1	Proposta de unificação de Barat - Métricas de distância	27
3.4.2	Proposta de Unificação de Naegel et al. - <i>Fitting and Valuation</i>	29
4	Entendimento das diferentes implementações <i>Hit-or-Miss</i> níveis de cinza	33
4.1	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Khosravi & Schafer</i>	34
4.2	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Soille</i>	39
4.3	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de Barat	41
4.4	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Raducana & Grana</i>	42
5	Experimentos com problemas reais	49
5.1	<i>QR-Codes</i>	49
5.1.1	O problema	49
5.1.2	Abordagem adotada para detecção dos <i>QR-Codes</i>	49
5.1.3	Resultados	50
5.1.4	Avaliação	51
6	Conclusões	59
	Referências Bibliográficas	61

Lista de Abreviaturas

MM	Morfologia Matemática (<i>Mathematical Morphology</i>)
HMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> (<i>Hit-or-Miss Transformation</i>)
SE	Elemento Estruturante (<i>Structuring Element</i>)
BINHMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> BINária
CBHMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Crimmins & Brown</i>
KSHMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Khosravi & Schafer</i>
BFHMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Banon & Faria</i>
RGHMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Raducanu & Grana</i>
SUHMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Soille Unconstrained</i>
SCHMT	Transformação <i>Hit-or-Miss</i> de <i>Soille Constrained</i>
BDJSHMT	<i>Barat & Ducottet & Jourlin Single Hit-or-Miss Transformation</i>
BDJSHMT	<i>Barat & Ducottet & Jourlin Multiple Hit-or-Miss Transformation</i>
VDIP	<i>Virtual Double-sided Image Probing</i>

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de imagem binária em formato expandido. <i>Pixels</i> da imagem com valor zero (0) são representados por um quadrado preto; <i>pixels</i> com valor um (1) são representados por um quadrado preto com círculo branco no centro; o <i>pixel</i> central hachurado representa a origem <i>o</i> do espaço.	4
2.2	Exemplo de imagem tons de cinza onde a determinação de objeto e fundo não é trivial.	5
2.3	Exemplo de elementos estruturantes binários comumente utilizados no processo de afinamento morfológico (<i>thinning</i>) de imagens binárias.	6
2.4	Exemplo de SE <i>non-flat</i>	6
2.5	Exemplo de aplicação da erosão tons de cinza. A linha preta representa a função a ser erodida, as linhas verdes representam o elemento estruturante em diversos pontos de análise e a linha rosa pontilhada representa o resultado da erosão. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2010) e traduzida.	12
2.6	Exemplo de aplicação da dilatação níveis de cinza. A linha preta representa a função a ser dilatada, as linhas azuis representam o elemento estruturante em diversos pontos de análise e a linha rosa pontilhada representa o resultado da dilatação. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2010) e traduzida.	13
3.1	Parte da primeira página da patente do <i>Texture Analyser</i> de J. Serra. Retirado de Matheron e Serra (2002).	16
3.2	Esquemático do “Computador genérico de reconhecimento de padrões” de Crimmins & Brown. Retirado de Crimmins e Brown (1985).	17
3.3	Representação esquemática da <i>KSHMT</i> aplicada a um sinal exemplo. Retirado de Khosravi e Schafer (1996).	20
3.4	Exemplo de uso da <i>KSHMT</i> em um sinal exemplo. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2010).	21
3.5	Representação esquemática do operador <i>BFHMT</i> aplicado a uma imagem de entrada <i>g</i> e um padrão <i>f</i> a ser procurado. Retirado de Banon e Faria (1997).	22
3.6	Exemplo de uso da <i>BFHMT</i> em um sinal exemplo. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2010).	22
3.7	Exemplo numérico da <i>BFHMT</i> . Retirado de Banon e Faria (1997).	23

3.8	Diferença de posicionamento da origem do elemento estruturante pode levar a diferentes definições de HMT níveis de cinza. Retirado de Soille (2003). Legenda original: “On the extension of the hit-or-miss operator to grey tone images: two case studies depending on whether the origin of the composite SE belongs to B_{FG} or B_{BG} . In both diagrams, the centre of the pixels of each cross-section (or its complement) mated by the considered composite SE are marked with a bullet. When B_{FG} contains the origin, all these pixels belong to the subgraph of f while they all belong to the complement of the subgraph when the origin belongs to B_{BG} .”.	24
3.9	Resultado da aplicação da $SUHMT$ no sinal apresentado na Figura 3.8. A função f é representado pela linha pontilhada enquanto os pontos destacados referem-se a saída da $SUHMT$. Retirado de Soille (2003).	24
3.10	Resultado da aplicação da $SCHMT$ no sinal apresentado na Figura 3.8. A função f é representado pela linha pontilhada enquanto os pontos destacados referem-se a saída da $SCHMT$. Retirado de Soille (2003).	25
3.11	Exemplo da aplicação da $BDJSHMT$ em um sinal exemplo. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2003).	25
3.12	Exemplo da aplicação da $BDJMhMT$ em um sinal exemplo. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2003).	26
3.13	Características das funções estruturantes que podem ser variadas para aumentar ou diminuir a quantidade de padrões localizados na imagem de entrada na aplicação da $BDJMhMT$. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2003).	27
3.14	Exemplo de determinação de vizinhança usando distância (a) Euclidiana e (b) Uniforme. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2010).	29
3.15	Exemplo de aplicação da $VDIP$. Retirado de Barat <i>et al.</i> (2010).	30
3.16	Exemplificação da diferença entre a prova mecânica proposta por Barat <i>et al.</i> (2010) (esquerda) e o operador intervalo (direita). A prova mecânica consiste em procurar o menor intervalo $[t_v, t_w]$ enquanto o operador intervalo consiste em procurar o maior intervalo t entre V e W . Retirado de Naegel <i>et al.</i> (2007).	31
4.1	Imagem artificial com quadrados de diversos valores, apresentada com valores invertidos.	34
4.2	Imagem artificial com discos de raio 30 de diversos valores <i>flat</i> , apresentada com valores invertidos.	34
4.3	Imagem artificial com discos de raio 30 de diversos valores <i>non-flat</i> , apresentada com valores invertidos.	35
4.4	Resultado da aplicação de ruído do tipo <i>Salt-and-Pepper</i> a Figura 4.2, apresentada com valores invertidos.	35
4.5	Resultado da aplicação de ruído do tipo <i>Salt-and-Pepper</i> a Figura 4.3, apresentada aqui com valores invertidos.	36
4.6	Elementos estruturantes binários utilizados para detecção de objetos de interesse com a transformação de <i>Khosravi & Schafer</i> , apresentados na forma expandida. . . .	37
4.7	Elemento estruturante <i>non-flat</i> utilizado para detecção de discos na transformação de <i>Khosravi & Schafer</i> , apresentado com valores invertidos.	37

4.8	Resultados das aplicações da transformação de <i>Khosravi & Schafer</i> para o problema de detecção de quadrados em imagens, apresentados aqui de forma invertida.	38
4.9	Resultados das aplicações da transformação de <i>Khosravi & Schafer</i> para o problema de detecção de discos em imagens, apresentados com valores invertidos.	38
4.10	Resultados das aplicações da transformação de <i>Khosravi & Schafer</i> para o problema de detecção de discos de valores não constantes em imagens, apresentados aqui invertido.	39
4.11	Resultados das aplicações da transformação de <i>Khosravi & Schafer</i> para o problema de detecção de discos em imagens com ruídos do tipo <i>Salt-and-Pepper</i> em imagens, apresentados com valores invertidos.	39
4.12	Elementos estruturantes binários utilizados para detecção de objetos de interesse com a transformação de <i>Soille</i>	40
4.13	Resultados da aplicação da transformação de <i>Soille</i> aos problemas de detecção de quadrados e de discos, apresentadas de forma invertida.	41
4.14	Resultado da aplicação de definição de <i>Soille</i> a imagem 4.3 utilizando os elementos estruturantes 4.12c e 4.12d. Este resultado é apresentado com valores invertidos e dilatado por um disco de raio 20 <i>pixels</i>	42
4.15	Resultado da aplicação de definição de <i>Barat</i> a imagem 4.1 utilizando os elementos estruturantes 4.12a e 4.12b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.	43
4.16	Elementos estruturantes binários utilizados para detecção de discos na transformação <i>Barat</i> , apresentados na forma expandida.	44
4.17	Resultado da aplicação de definição de <i>Barat</i> a imagem 4.2 utilizando os elementos estruturantes 4.16a e 4.16b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.	44
4.18	Resultado da aplicação de definição de <i>Barat</i> a imagem 4.3 utilizando os elementos estruturantes 4.16a e 4.16b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.	45
4.19	Elementos estruturantes <i>non-flat</i> utilizados na definição de <i>Barat</i> para o problema de detecção de discos.	45
4.20	Resultados invertidos das aplicações da transformação de <i>Barat</i> ao problema de detecção de discos com valores constantes e não constantes, utilizando elementos estruturantes <i>non-flat</i>	46
4.21	Resultados das aplicações da transformação de <i>Barat</i> ao problema de detecção de discos com valores constantes e não constantes em imagens com presença de ruído <i>Salt-and-Pepper</i>	46
4.22	Elementos estruturantes binário utilizados para detecção de discos com a transformação de <i>Raducana & Grana</i> , apresentados na forma expandida.	47
4.23	Resultados da aplicação da transformação de <i>Raducana & Grana</i> aos problemas de detecção de quadrados e discos, apresentados com valores invertidos.	47
4.24	Resultado da aplicação de definição de <i>Raducana & Grana</i> a imagem 4.3 utilizando os elementos estruturantes 4.19a e 4.19b. Este resultado é apresentado invertido.	48
4.25	Resultados da transformação de <i>Raducana & Grana</i> ao problema de detecção de discos em imagens com presença de ruídos do tipo <i>Salt-and-Pepper</i>	48
5.1	Exemplo de <i>QR-Code</i> armazenando 100 caracteres alfanuméricos.	50

5.2 Pares de elementos estruturantes de diferentes escalas utilizados no experimento de localização de *QR-Codes* em imagens de enquadramento arbitrário utilizando a definição de *hit-or-miss* níveis de cinza de *Soille*. 52

5.3 Imagem exemplo de entrada utilizada para demonstração dos passos do método desenvolvido para localização de *QR-Code*. A região destacada refere-se a região a ser destacada nas imagens intermediárias do método desenvolvido. 53

5.4 Detalhes dos passos utilizados na solução adotada para localização de *QR-Code* em imagens com enquadramento arbitrário. 54

5.5 Resultado da aplicação da metodologia desenvolvida para localização de *QR-Code* aplicada a imagem apresentada na Figura 5.3. 55

5.6 Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos. 55

5.7 Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos. 56

5.8 Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos. 56

5.9 Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos. 56

5.10 Resultado da aplicação de *threshold* usando como limitante o maior valor presente na imagem, aplicado a imagem apresentada na Figura 5.5. 57

Capítulo 1

Introdução

O reconhecimento de padrões e detecção de objetos em imagens é alvo de estudo de longa data. A abordagem proposta por Crimmins e Brown para casamento de padrões (*template matching*) (Crimmins e Brown, 1985) somado ao conceito de *hit-or-miss* introduzidos por Serra e Matheron (Matheron e Serra, 2002; Serra, 1983; Soille, 2003) deram origem a abordagens de detecção de objetos e formas baseada na geometria de elementos. A transformação *hit-or-miss* é baseada em dois parâmetros: elementos estruturantes com formatos e tamanhos específicos, que são usados respectivamente para analisar a relação dos mesmos com objetos (*foreground*) e fundo (*background*) das imagens.

Em imagens binárias, o *template matching* de Crimmins e Brown é formulado de forma a encontrar uma forma específica na imagem. Já o *hit-or-miss* é mais flexível no sentido de que qualquer forma contendo uma forma mínima e que não extrapole uma forma maior fixa é considerada um ponto de casamento (*matching*).

Enquanto essa noção é bastante intuitiva e fácil de se compreender no caso de imagens binárias, no caso de imagens em tons de cinza não existe uma noção clara do que seja a extensão natural de conceito de casamento de padrões. Devido a esse fato, desde a década de 1990 diferentes definições vêm sendo propostas para a transformação *hit-or-miss* para imagens tons de cinza (Banon e Faria, 1997; Barat *et al.*, 2003, 2010; Khosravi e Schafer, 1996; Murray e Marshall, 2011; Naegel *et al.*, 2007; Odone *et al.*, 2001; Perret *et al.*, 2009; Raducanu e Grana, 2000; Ronse, 1996; Soille, 2003; Weeks *et al.*, 2004), sendo as mesmas influenciados pela definição de Crimmins e Brown ou pela definição de *hit-or-miss* para imagens binárias.

Sabe-se que no caso de imagens binárias, a transformação *hit-or-miss* é equivalente ao operador intervalo, e que qualquer operador invariante a translação pode ser expresso em uma forma canônica como supremo de operadores intervalo (Banon e Barrera, 1991; Heijmans, 1994). O valor do operador, que será um (1) ou zero (0), poderá ser calculado simplesmente verificando-se se a forma em análise pertence ou não a algum dos intervalos. Essa representação tem sido utilizada com sucesso no projeto de operadores binários (Barrera *et al.*, 1997; Hirata, 2009).

Esta mesma decomposição pode ser estendida para os operadores tons de cinza. Porém, nesse caso, deve-se notar que (1) o valor do operador poderá ser qualquer tom de cinza em $\{0, 1, \dots, t_{\max}\}$ (no qual t_{\max} é o valor máximo e representa o número total de tons de cinza mais um (1)) e (2) a representação como supremo de operadores intervalo pode ser extremamente complexa em termos de número de intervalos e computação (Barrera *et al.*, 2000; Naegel *et al.*, 2007). O cálculo do valor do operador para um dado padrão tons de cinza, a partir da representação do operador como

supremo de operadores intervalo, depende em calcular em quais dos intervalos de quais níveis o padrão está contido (Hirata *et al.*, 2007).

Não existe, até a presente data, nenhuma abordagem bem sucedida para projeto de operadores morfológicos tons de cinza que se apoia na decomposição canônica dos mesmos. Os resultados bem sucedidos são restritos a subclasses de operadores, como a classe dos *stack-filters*, cujo problema de projetá-los pode ser reduzido a um problema de projetar operadores binários crescentes (Dellamonica Jr. *et al.*, 2007).

1.1 Objetivos

A motivação deste trabalho reside em entender as diferentes definições existentes para a transformação *hit-or-miss* tons de cinza, tanto em termos formais como práticos. Acredita-se que esse entendimento será útil para uma melhor compreensão e desenvolvimento de maneiras para enfrentar as dificuldades existentes no projeto de operadores para imagens tons de cinza.

Os objetivos específicos são:

1. Estudar as diferentes definições de *hit-or-miss* existentes para imagens tons de cinza e entender a relação entre as mesmas;
2. Estudar as propostas de unificação existentes para as diversas definições da transformação *hit-or-miss* para níveis de cinza;
3. Apresentar uma compilação das diferentes definições de transformação *hit-or-miss* existentes para imagens tons de cinza;
4. Apresentar uma noção intuitiva de parte das definições existentes e suas aplicações em imagens artificiais e reais (detecção de *QR-Codes*, por exemplo).

1.2 Organização do texto

O texto segue a seguinte organização: neste capítulo (Capítulo 1) foi apresentado uma breve introdução do assunto a ser tratado durante o restante da dissertação. O Capítulo 2 apresenta os conceitos, notações e definições básicas utilizados no restante do texto. O Capítulo 3 apresenta a transformação *hit-or-miss* e as diversas definições para imagens tons de cinza juntamente com uma breve discussão das mesmas. O Capítulo 4 apresenta a utilização das definições da transformação *hit-or-miss* aplicadas a imagens artificiais e na presença de ruídos, enquanto o Capítulo 5 apresenta a utilização das definições em problemas reais: a localização de *QR-Codes* em imagens de enquadramento arbitrário, por exemplo. Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e possíveis pesquisas futuras a serem realizadas no tema.

Capítulo 2

Definições

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos de Morfologia Matemática, teoria dos conjuntos e conceitos de funções, necessários para a compreensão do restante do trabalho.

2.1 Morfologia Matemática

O nome Morfologia Matemática (MM) foi cunhado por Georges Matheron e Jean Serra na metade dos anos 60 (Matheron e Serra, 2002). MM refere-se ao conjunto de processamentos não-lineares de imagens e análises que se concentra na estrutura geométrica de objetos em imagens. Podemos chamar esta ciência desta forma pois “Morfologia” está relacionada a análise da forma, relação de vizinhança e formato de elementos, e “Matemática” pois se baseia na teorias de conjuntos e de reticulados, geometria e topologia.

O conceito básico consiste em examinar uma imagem com outro objeto, chamado de elemento ou função estruturante, verificando se a relação entre eles obedece uma propriedade desejada no estudo da imagem ou função (Soille, 2003). A partir do estudo de Banon e Barrera (1993), temos que o paradigma central da MM pode ser descrito como a decomposição de operadores sobre reticulados completos em termos de quatro classes de operadores elementares: dilatação, erosão, anti-dilatação e anti-erosão.

A pesquisa na área iniciou-se nos anos 60 com os estudos aplicados de G. Matheron e J. Serra, a princípio, a imagens binárias (Matheron e Serra, 2002). O objetivo dos pesquisadores era estudar características geométricas de objetos porosos em imagens binárias. Para isso, desenvolveram um formalismo para análise de imagens binárias baseada em teoria dos conjuntos. As duas transformações bases da MM desenvolvidas pelos pesquisadores foram a dilatação e a erosão (Soille, 2003). A dilatação consiste em verificar os pontos da imagem em que um elemento estruturante toca um objeto presente na imagem. A erosão consiste em verificar os pontos da imagem em que o elemento estruturante está contido em um objeto presente na imagem.

O conceito de elemento estruturante e a transformação *hit-or-miss* surgiram no artigo “*Contribution à l’analyse pétrographique quantitative*” de J. Serra em 1965. No artigo “*Etude théorique des granulométries*”, G. Matheron apresentou um formalismo matemático à transformação *hit-or-miss* proposta por J. Serra em 1965, chamando-a de “*Serra’s transformation*”. Neste mesmo artigo, G. Matheron apresentou ainda as propriedades algébricas da transformação, bem como propôs uma representação analítica da mesma. Ainda no ano de 1965, G. Matheron no artigo “*Axiomatique des milieux poreux aléatoires*” apresentou uma série de resultados adicionais sobre a transformação

que envolvem propriedades topológicas e questões relacionadas a convexidade de elementos estruturantes e objetos. Mais referências sobre os primeiros estudos sobre MM podem ser obtidos em [Matheron e Serra \(2002\)](#).

O estudo da análise de imagens através da MM foi estendido na sequência para imagens tons de cinza ([Matheron e Serra, 2002](#); [Serra, 1983](#); [Soille, 2003](#)). Para este caso, duas propostas se destacam: o conceito de funções e o conceito de reticulados completos. No primeiro caso, o conceito de teoria dos conjuntos foi estendido para o conceito de funções, fazendo uso da noção de sombra (umbral) de uma função ([Haralick et al., 1987](#)). Já a modelagem via reticulados completos generalizou as abordagens anteriores e tornou-se a base da MM atual. Maiores referências sobre o surgimento e evolução da área podem ser encontrados em [Matheron e Serra \(2002\)](#) e [Soille \(2003\)](#).

2.2 Imagens digitais

Uma imagem digital pode ser representada por uma função f que mapeia pontos de um subconjunto D do espaço $\mathbb{E} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com origem o , em valores do conjunto $\{0, \dots, t_{max}\}$. Uma imagem digital binária, ou simplesmente imagem binária, é aquela em que $t_{max} = 1$. Em imagens com esta característica, o conceito de objeto (*foreground*) e fundo (*background*) é direto e excludente, ou seja, um ponto ou pertence ao objeto ou pertence ao fundo. A relação de equivalência de uma imagem binária f e um conjunto S é definida da seguinte forma:

$$S \subseteq \mathbb{E} : x \in S \Leftrightarrow f(x) = 1, x \in \mathbb{E}.$$

A Figura 2.1 apresenta um exemplo de imagem binária S expandida. Cada pixel com valor zero (0) é representado por um quadrado preto; cada pixel com valor um (1) é representado por um quadrado preto com um círculo branco no centro; o pixel central hachurado representa a origem o de \mathbb{E} . A representação desta imagem S em forma de conjunto é a seguinte:

$$S = \{(0, 0); (-1, -1); (0, -1); (1, -1)\}$$

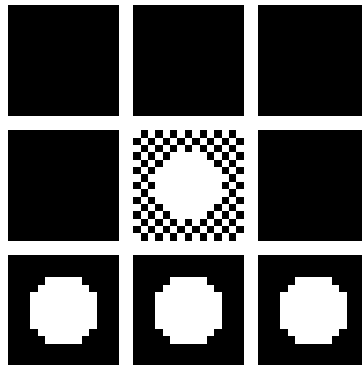


Figura 2.1: Exemplo de imagem binária em formato expandido. Pixels da imagem com valor zero (0) são representados por um quadrado preto; pixels com valor um (1) são representados por um quadrado preto com círculo branco no centro; o pixel central hachurado representa a origem o do espaço.

Uma imagem digital tons de cinza, ou simplesmente imagem tons de cinza, é qualquer imagem digital onde $t_{max} \geq 2$. Para imagens com esta característica, o conceito de objeto (*foreground*) e fundo (*background*) não é trivial, ou seja, definir se uma dada região da imagem pertence ao objeto

em estudo ou ao fundo consiste em uma verificação parametrizada com relação a um conhecimento prévio da imagem. Outro ponto a ser considerado no caso de imagens tons de cinza, é a não possibilidade de um mapeamento direto como ocorre com imagens binárias de uma imagem tons de cinza em conjuntos. Isto impossibilita a aplicação de operações sobre conjuntos (união, interseção, diferença, etc.), comumente utilizadas na MM para imagens binárias. Devido a necessidade e conveniência teórica, em imagens níveis de cinza, aos pontos que não estão em \mathbb{E} associa-se os valores ∞ ou $-\infty$. A Figura 2.2 apresenta uma imagem tons de cinza que exemplifica um caso onde a determinação de objeto e fundo não é trivial.



Figura 2.2: Exemplo de imagem tons de cinza onde a determinação de objeto e fundo não é trivial.

Para permitir análises semelhante às feitas no caso de imagens binárias, imagens tons de cinza podem ser interpretadas como funções. Os operadores aplicados sobre estas imagens são então os mesmo aplicados a funções: máximo, mínimo, supremo, ínfimo, etc.

2.3 Elemento estruturante ou Função estruturante

O conceito de elemento estruturante (ou SE - do inglês *structuring element*) foi inicialmente proposto por J. Serra em 1965 e é a denominação dada a uma imagem ou função (binária ou tons de cinza, respectivamente) que será utilizada por uma transformação morfológica para verificação de alguma relação e/ou propriedade existente em uma imagem de prova. Comumente, em situações onde se deseja analisar características pontuais de imagens, o SE é relativamente menor que a imagem a ser utilizada como prova. Contudo, em situações onde a imagem deve ser analisada como um todo, o SE pode ser definido tendo qualquer tamanho. É comum também que SEs estejam centrados na origem e sejam simétricos, a fim de garantir uma série de propriedades com relação a diversos operadores morfológicos (Serra, 1983; Soille, 2003).

A definição de um elemento estruturante “ótimo” ou “correto” para utilização em uma transformação morfológica é algo complexo e que requer, além de conhecimento prévio do problema sendo

estudado, certa prática por parte do cientista que deseja utilizar MM para solucionar um problema. Muitas abordagens para construção automática de elementos estruturantes já foram apresentadas e este trata-se de um problema ainda em aberto na área da MM (Soille, 2003).

Elementos estruturantes podem ser do tipo *flat* (binários) ou *non-flat* - neste caso, os SEs são comumente chamados de “função estruturante”. A Figura 2.3 apresenta um conjunto de SEs *flat* em formato expandido comumente utilizadas no processo de afinamento morfológico (*thinning*) de objetos em imagens binárias. A Figura 2.4 apresenta um exemplo de SE *non-flat*.

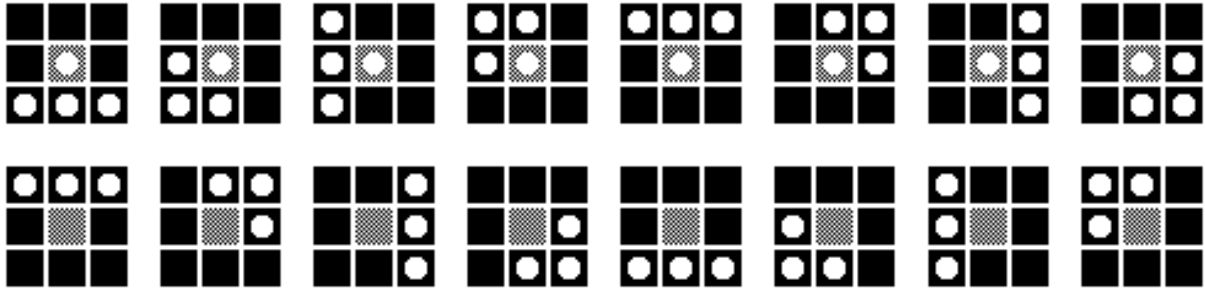


Figura 2.3: Exemplo de elementos estruturantes binários comumente utilizados no processo de afinamento morfológico (*thinning*) de imagens binárias.

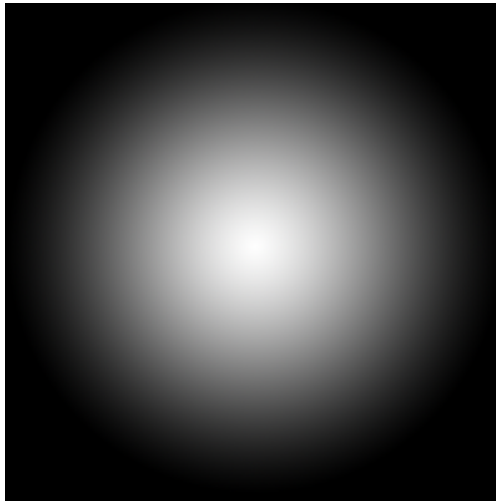


Figura 2.4: Exemplo de SE *non-flat*.

2.4 Operações sobre conjuntos e funções

2.4.1 Translação

Seja A um conjunto, f uma função e $h \in \mathbb{E}$. A translação horizontal é definida como:

$$A_h = \{a + h : a \in A\}$$

$$f_h(x) = f(x - h), \forall x \in \mathbb{E}$$

Seja $v \in \mathbb{Z}$. A translação vertical é definida como:

$$(f + v)(x) = f(x) + v, \forall x \in \mathbb{E}$$

2.4.2 Ordem entre funções

Sejam f e g duas funções. Denota-se por $D(f)$ e $D(g)$ os domínios das funções. Diz-se que $f \leq g$:

- se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D(f) \cap D(g)$,
- se $x \in D(f)$, mas $x \notin D(g) \Rightarrow g(x) = -\infty$
- se $x \in D(g)$ e $x \notin D(f) \Rightarrow f(x) = -\infty$

2.4.3 Ínfimo e Supremo

Sejam f e g duas funções. O ínfimo das funções é definido como:

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \forall x \in \mathbb{E}$$

O supremo das funções, a definição dual do ínfimo, é definido como:

$$(f \vee g)(x) = \begin{cases} \max\{f(x), g(x)\}, & \text{se } x \in D(f) \cap D(g) \\ f(x), & \text{se } x \in D(f) \text{ e } x \notin D(g) \\ g(x), & \text{se } x \in D(g) \text{ e } x \notin D(f) \\ \text{não definido}, & \text{se } x \notin D(f) \cup D(g) \end{cases}$$

2.4.4 Complemento e Negação

Seja $A \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto. O complemento de A é definido como:

$$A^c = \{x : x \in \mathbb{E} \text{ e } x \notin A\}$$

Seja f uma função. A negação de f é definida como:

$$f^c(x) = -f(x), \forall (x) \in D(f)$$

2.4.5 Transposição ou Reflexão

Seja $A \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto. A transposição de A é definida como:

$$\check{A} = \{-a : a \in A\}$$

Seja f uma função. A reflexão de f é definida como:

$$\check{f}(x) = f(-x), \forall x \in D(f)$$

2.4.6 Threshold

A operação *threshold* trata-se de uma transformação que mapeia uma função ou imagem tons de cinza em uma função ou imagem binária. Esta consiste em, para cada ponto da função e baseado em valores de níveis, determinar se o ponto na imagem de saída corresponde a zero (0) ou um (1). Sejam f uma função e t_i e t_j constantes. A definição formal da operação *threshold* é:

$$[T_{[t_i, t_j]}(f)](x) = \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \leq f(x) \leq t_j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.4.7 Cross-section e Decomposição Threshold

Denotamos como *cross-section* da função f no nível t ($CS_t(f)$) o conjunto de *pixels* da imagem f que possuem valores maiores ou iguais a t . Esta definição é também conhecida como *level set* de f na altura t . Claramente, essa definição coincide com a do operador *threshold* para todos os *pixels* com intensidade $\geq t$. Avaliando-se o *cross-section* como uma função binária temos:

$$[CS_t(f)](x) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x) \geq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$CS_t(f) = T_{t, t_{\max}}$$

Partindo-se da definição de função binária, quando analisando esta transformação no sentido de conjuntos, temos que por definição:

$$CS_{t_{\max}}(f) \subseteq CS_{t_{\max}-1}(f) \subseteq \dots \subseteq CS_0(f)$$

Daí, temos que a decomposição de uma imagem tons de cinza com relação a soma de suas sucessivas *cross-sections* é chamada de decomposição *threshold*.

Uma imagem tons de cinza pode ser construída a partir da soma das *cross-sections* para cada nível de cinza possível. Ou seja,

$$f = \sum_{t=1}^{t_{\max}} CS_t(f)$$

Assim, o valor de uma imagem em um determinado ponto x corresponde ao maior valor de t tal que x pertence a *cross-section* de f no nível t :

$$f(x) = \sum_{t=1}^{t_{\max}} [CS_t(f)](x) = \max\{t : [CS_t(f)](x) = 1\}$$

2.4.8 Umbra ou Sombra

A umbra ou sombra de uma função f é definida como o conjunto de pontos que encontram-se abaixo da superfície da função (Haralick *et al.*, 1987).

$$U[f] = \{(x, t) : x \in D[f], t \in \{0, \dots, t_{\max}\} \text{ e } t \leq f(x)\}$$

2.5 Propriedades de transformações de imagens

2.5.1 Identidade

Seja f uma função. A transformação Ψ é dita identidade se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é identidade} \Leftrightarrow \Psi(f) = f$$

2.5.2 Idempotência

Seja f uma função. A transformação Ψ é dita idempotente se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é idempotente} \Leftrightarrow \Psi(\Psi(f)) = \Psi(f)$$

2.5.3 Invariância a translação

Sejam f uma função e b um vetor. A transformação Ψ é dita invariante a translação se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é invariante a translação} \Leftrightarrow \forall f, \forall b, \Psi(f_b) = [\Psi(f)]_b$$

2.5.4 Invariância a rotação

Seja Θ uma rotação. A transformação Ψ é dita invariante a rotação se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é invariante a rotação} \Leftrightarrow \Psi\Theta = \Theta\Psi$$

2.5.5 Invariância a escala

Sejam f uma função e b e r escalares e rf_b o produto de r por f trasladado de b . A transformação Ψ é dita invariante a escala se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é invariante a escala} \Leftrightarrow \forall f, \forall b, \forall r, \Psi(rf_b) = r([\Psi(f)]_b)$$

2.5.6 Localmente definida

A transformação Ψ é dita localmente definida se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é localmente definida} \Leftrightarrow \forall Z', \exists Z : [\Psi(X \cap Z)] \cap Z' = \Psi(X) \cap Z'$$

2.5.7 Linearidade

Sejam a_i escalares e f_i funções. A transformação Ψ é dita linear se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é linear} \Leftrightarrow \Psi\left(\sum_i a_i f_i\right) = \sum_i a_i [\Psi(f_i)]$$

2.5.8 Invariância a decomposição *threshold*

A transformação Ψ é dita invariante a decomposição *threshold* se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é invariante a decomposição } threshold \Leftrightarrow \Psi = \sum_{t=1}^{t_{\max}} \Psi C S_t$$

2.5.9 Extensiva

Seja f uma função. A transformação Ψ é dita extensiva se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é extensiva} \Leftrightarrow f \leq \Psi(f)$$

2.5.10 Anti-Extensiva

Seja f uma função. A transformação Ψ é dita anti-extensiva se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é anti-extensiva} \Leftrightarrow f \geq \Psi(f)$$

2.5.11 Associativa

Sejam f, g e h funções. A transformação Ψ é dita associativa se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é associativa} \Leftrightarrow \Psi(\Psi(f, g), h) = \Psi(f, \Psi(g, h))$$

2.5.12 Comutativa

Sejam f e g funções. A transformação Ψ é dita comutativa se obedece a seguinte propriedade:

$$\Psi \text{ é comutativa} \Leftrightarrow \Psi(f, g) = \Psi(g, f)$$

2.5.13 Crescente

Sejam f e g funções. A transformação Ψ é dita crescente se preserva a relação de ordem entre as imagens, ou seja, se obedece a seguinte propriedade

$$\Psi \text{ é crescente} \Leftrightarrow f \leq g \rightarrow \Psi(f) \leq \Psi(g)$$

Um resultado importante referente a esta propriedade é o apresentado em [Maragos e Schafer \(1987a\)](#) e [Maragos e Schafer \(1987b\)](#): qualquer operador de imagens binário que obedece a essa propriedade pode ser diretamente estendido a imagens tons de cinza fazendo uso da decomposição *threshold*.

2.6 Erosão

A transformação morfológica erosão de uma imagem X por um elemento estruturante B consiste em avaliar os pontos da imagem em que o elemento estruturante “cabe” completamente no objeto presente na imagem. Dentre os efeitos da aplicação de erosão em uma imagem destacam-se: alargar vales; eliminar picos; escurecer uma imagem. Entre as propriedades da erosão destacam-se: invariância a translação; crescente; invariância a escala.

2.6.1 Erosão binária

Para imagens binárias, podemos utilizar a definição de erosão via teoria dos conjuntos:

$$\varepsilon_B(X) = \{x \in \mathbb{E} : B_x \subseteq X\}$$

Podemos escrever a erosão binária também em termos da Subtração de Minkowski.

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B = \{y : \forall_y \in B, (\exists x \in X, y = x - b)\} = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

2.6.2 Erosão tons de cinza

Como mencionado na Seção 2.2, as imagens tons de cinza podem ser interpretadas como funções e as transformações sobre elas podem ser realizadas através das operações sobre funções apresentadas na Seção 2.4. A erosão de uma imagem tons de cinza por um elemento estruturante *flat* é definida como a seguinte função:

$$[\varepsilon_B(f)](x) = \min\{f(x + b) : b \in B\} = \min\{f(z) : z \in B_x\}$$

Ou seja, o valor do ponto x na imagem erodida é o valor mínimo da imagem dentro da janela delimitada pelo elemento estruturante, em torno de x .

Para o caso em que o elemento estruturante é *non-flat*, o elemento estruturante corresponde então a uma função g com domínio $D[g] \subseteq \mathbb{E}$. Nesse caso, a erosão é definida como:

$$[\varepsilon_g(f)](x) = \max\{y : g_x + y \leq f\}$$

Utilizando o conceito da Subtração de Minkowski, temos também a seguinte definição equivalente para erosão tons de cinza:

$$\varepsilon_g(f) = \bigwedge_{x \in D[g]} f_x - \check{g}(x)$$

Ou seja, o valor da imagem erodida no ponto x é igual ao valor da constante máxima que pode ser somada ao elemento estruturante transladado de x que seja menor que o valor da função na janela do elemento estruturante.

Tanto no caso de elementos *flat* como *non-flat*, a erosão pode ser interpretada como “subir” o elemento estruturante por baixo da função até o momento em que este toca a função. A altura em que ocorrer o toque, com relação ao centro do SE é então o valor da erosão no ponto. No caso de SEs *non-flat*, podem ocorrer situações em que o valor de um ponto x em uma imagem erodida pode ser menor que o menor valor que a imagem pode assumir. Nessas situações, pode-se assumir o valor de $-\infty$, zero (0), ou outro valor que faça sentido para a implementação da transformação. A Figura 2.5 apresenta uma representação gráfica de exemplo da erosão tons de cinza, retirada de Barat *et al.* (2010) e traduzida.

2.7 Dilatação

A transformação morfológica dilatação de uma imagem X por um elemento estruturante B consiste em avaliar os pontos da imagem em que o elemento estruturante “toca” o objeto presente na imagem. Dentre os efeitos da aplicação de dilatação em uma imagem destacam-se: alargar picos; conectar picos; eliminar vales; clarear uma imagem. Entre as propriedades da dilatação destacam-se: invariância a translação; associação; comutação; crescente; invariância a escala.

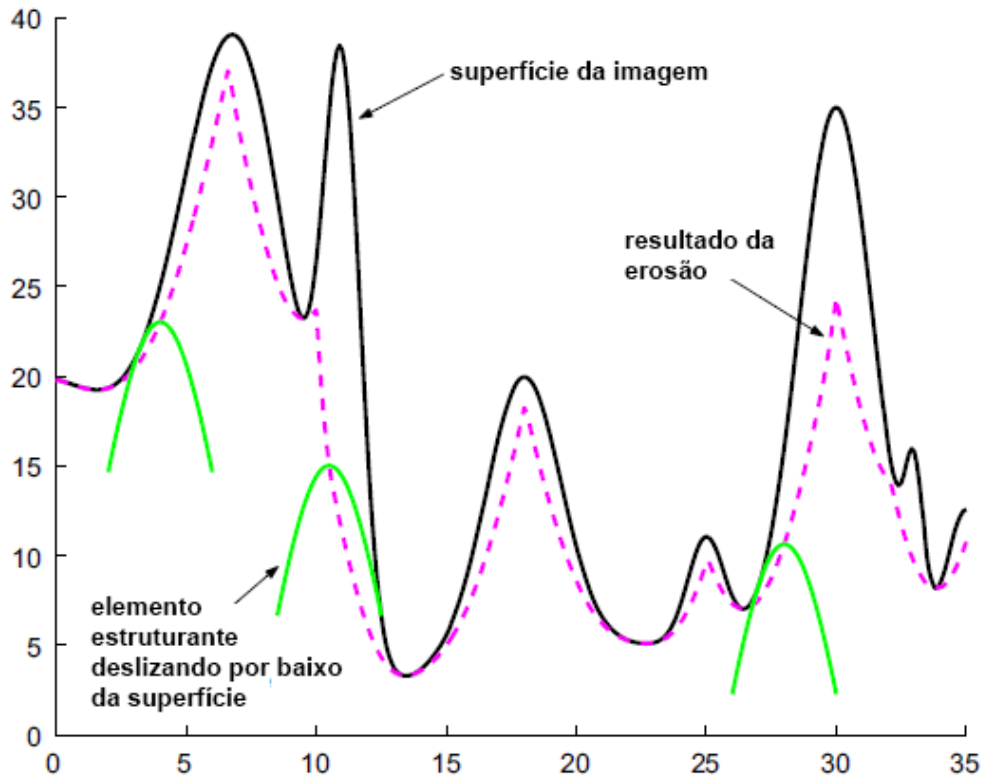


Figura 2.5: Exemplo de aplicação da erosão tons de cinza. A linha preta representa a função a ser erodida, as linhas verdes representam o elemento estruturante em diversos pontos de análise e a linha rosa pontilhada representa o resultado da erosão. Retirado de Barat et al. (2010) e traduzida.

2.7.1 Dilatação binária

Para imagens binárias, podemos utilizar a definição de dilatação via teoria dos conjuntos:

$$\delta_B(X) = \{x \in E : \check{B}_x \cap X \neq \emptyset\}$$

Podemos escrever a dilatação binária também em termos da Adição de Minkowski. Essa definição pode ser interpretada como a translação do elemento estruturante pela imagem.

$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B} = \{y : \exists x \in X, \exists b \in \check{B}, y = x + b\} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b$$

2.7.2 Dilatação tons de cinza

A dilatação de uma imagem tons de cinza por um elemento estruturante *flat* é definida como:

$$[\delta_B(f)](x) = \max\{f(x - b) : b \in B\} = \max\{f(z) : z \in \check{B}_x\}$$

Ou seja, o valor da imagem dilatada no ponto x é o valor máximo da imagem dentro da janela delimitada pelo elemento estruturante.

Para o caso em que o elemento estruturante é *non-flat*, o elemento estruturante corresponde então a uma função g com domínio $D[g] \subseteq \mathbb{E}$. Nesse caso, a dilatação é definida como:

$$[\delta_g(f)](x) = \min\{y : \check{g}_x + y \geq f\}$$

Utilizando o conceito da Adição de Minkowski, temos também a seguinte definição equivalente para dilatação:

$$\delta_g(f) = \bigvee_{x \in D_{[g]}} f_x - g(x)$$

Ou seja, o valor do ponto x na imagem dilatada é igual ao valor da menor constante que pode ser somada ao elemento estruturante transladado de x que seja maior que o valor da função na janela do elemento estruturante. Tanto no caso de elementos *flat* como *non-flat*, a dilatação pode ser interpretada como “descer” o elemento estruturante por cima da função até o momento em que este toca a função. A altura em que ocorrer o toque, com relação ao centro do SE é então o valor da dilatação no ponto. No caso de SEs *non-flat*, podem ocorrer situações em que o valor de um ponto x em uma imagem dilatada pode ser maior que o maior valor (t_{\max}) que a imagem pode assumir. Nessas situações, pode-se assumir o valor de $+\infty$, t_{\max} , ou outro valor que faça sentido para a implementação da transformação. A Figura 2.6, retirada de Barat *et al.* (2010) e traduzida, apresenta uma representação gráfica de exemplo da dilatação níveis de cinza.

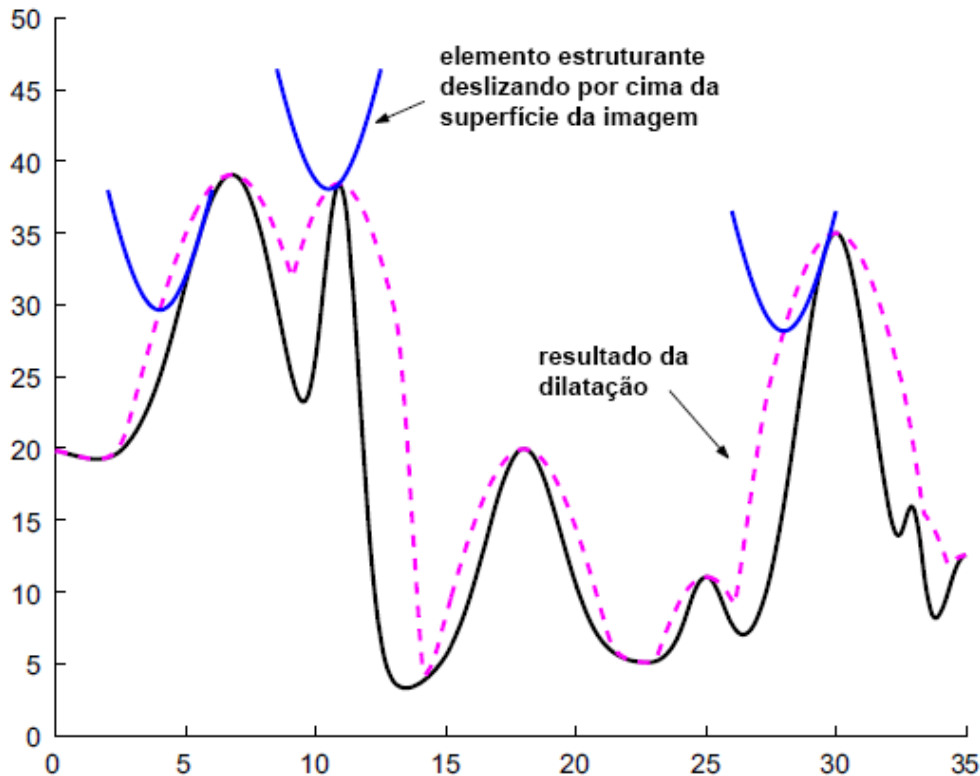


Figura 2.6: Exemplo de aplicação da dilatação níveis de cinza. A linha preta representa a função a ser dilatada, as linhas azuis representam o elemento estruturante em diversos pontos de análise e a linha rosa pontilhada representa o resultado da dilatação. Retirado de Barat *et al.* (2010) e traduzida.

2.8 Dualidade entre Erosão e Dilatação

As transformações de erosão e dilatação são duais com relação ao complemento. Isso significa que uma dilatação de X por B é equivalente ao complemento da erosão por B do complemento de X . Uma prova desta dualidade pode ser encontrada em Soille (2003).

$$\delta_B(X) = [\varepsilon_{\tilde{B}}(X^c)]^c$$

Essa dualidade com relação ao complemento mostra que a erosão e dilatação não processam o fundo e objeto de uma imagem simetricamente. Em outras palavras, a dilatação aumenta o objeto mas também diminui o fundo ao mesmo tempo. Logo, temos que tanto erosão, como dilatação, não preservam a homotopia de uma imagem. Essa característica leva a importante conclusão de que não existe uma transformação inversa para ambas as transformações.

2.9 Abertura

A transformação morfológica abertura de uma imagem X por um elemento estruturante B consiste na dilatação por B da erosão de X por B . Dentre os efeitos da aplicação de abertura em uma imagem destacam-se: eliminar objetos menores que o elemento estruturante; eliminar partes pequenas do objeto. Entre as propriedades da abertura destacam-se: idempotência, crescente, invariante a translação. A abertura é definida formalmente da seguinte maneira:

$$\gamma_B(X) = \delta_B(\varepsilon_B(X))$$

2.10 Operações *rank-order*

O surgimento de operações morfológicas do tipo *rank-order* está intimamente relacionado a necessidade de uma maior robustez das operações morfológicas tradicionais com relação à presença de ruídos nas imagens. Seja B um elemento estruturante e $r \in \mathbb{N}$ o parâmetro de *rank*. O valor de r é tal que $1 \leq r \leq |B|$, onde $|B|$ corresponde a cardinalidade de B ou o tamanho da região de suporte de B . Para imagens binárias, a definição do operador é:

$$Rank_{B,r}(X) = 1 \iff |X \cap B| \geq r$$

Já para o caso tons de cinza, o operador é definido como:

$$[Rank_{B,r}(f)](x) = r\text{-ésimo maior valor de } \{f(x+z) : z \in B\}$$

Note que a erosão e dilatação tons de cinza correspondem às seguintes definições:

$$[Rank_{B,|B|}(f)] = \varepsilon_B(f)$$

$$[Rank_{B,1}(f)] = \delta_B(f)$$

Capítulo 3

Transformação *Hit-or-Miss*

Este capítulo é dedicado ao tema central desta dissertação: a transformação *hit-or-miss*. A Seção 3.1 apresenta uma revisão histórica da transformação. A transformação para o caso binário é apresentada na Seção 3.2. A Seção 3.3 apresenta as diferentes definições para a transformação em imagens tons de cinza. A Seção 3.4 apresenta as duas principais propostas de unificação existentes para as diferentes definições da transformação em imagens níveis de cinza.

3.1 Visão Histórica

A transformação *hit-or-miss* (HMT, do inglês *Hit-or-Miss Transformation*) é uma operação morfológica que tem como objetivo analisar não somente o interior ou exterior de um objeto em uma imagem e sim avaliar ambos ao mesmo tempo. Entre as principais utilizações do operador destacam-se análise de textura, reconhecimento de objetos, afinamento, etc. Diferentemente das transformações morfológicas como erosão e dilatação, a HMT utiliza dois elementos estruturantes distintos. O par de elementos estruturantes é chamado também de *composite SE* ou *hit-or-miss template* e possuem em comum a mesma origem.

A transformação *hit-or-miss* trata-se de uma operação morfológica ponto a ponto que foi apresentada pela primeira vez no trabalho “*Contribution à l’analyse pétrographique quantitative*” de J. Serra no ano de 1965 (Matheron e Serra, 2002). Neste trabalho, J. Serra introduziu a HMT propondo o estudo de como formas conhecidas *a priori* (elementos estruturantes) interagem com os objetos em estudo de uma imagem. Diferentes elementos estruturantes foram então utilizados para reconhecimento de formas geométricas como círculos, linhas retas, pares de pontos, etc. em uma imagem sendo analisada.

Dando continuidade ao trabalho de J. Serra, G. Matheron no artigo “*Etude théorique des granulimétries*” introduziu uma formulação formal para os resultados obtidos por J. Serra. Uma das formalizações apresentadas por Matheron foi para a HMT, chamando-a de “*Serra’s transformation*” e descrevendo propriedades algébricas além de uma representação analítica para a mesma. J. Serra publicou na sequência então o artigo “*La transformation en tout ou rien*” que estendia seu primeiro artigo ao formalismo apresentado por G. Matheron. Ainda em 1965, G. Matheron no artigo “*Axiomatique des milieux poreux aléatoires*” apresentou uma série de resultados adicionais com relação a propriedades topológicas e convexidade da HMT. Com todos os resultados obtidos, J. Serra publicou então a patente do *Texture Analyser*. A Figura 3.1 apresenta parte da primeira página da patente do *Texture Analyser* (Matheron e Serra, 2002). Este trata-se de um aparelho que realiza

com maior facilidade, quando comparado a um computador, operações morfológicas conhecidas. A ideia de J. Serra era de um aparelho que, com a mesma facilidade que um computador realiza operações algébricas, realizasse operações morfológicas. Foram construídos quatro protótipos entre 1965 e 1975, sendo que em 1970 a *Wild-Leitz Company* comprou a licença do *Texture Analyzer*. J. Serra em 1982 no livro “*Image Analysis and Mathematical Morphology*” apresentou as definições para HMT binária utilizada até hoje, juntamente com suas propriedades e provas (Serra, 1983).

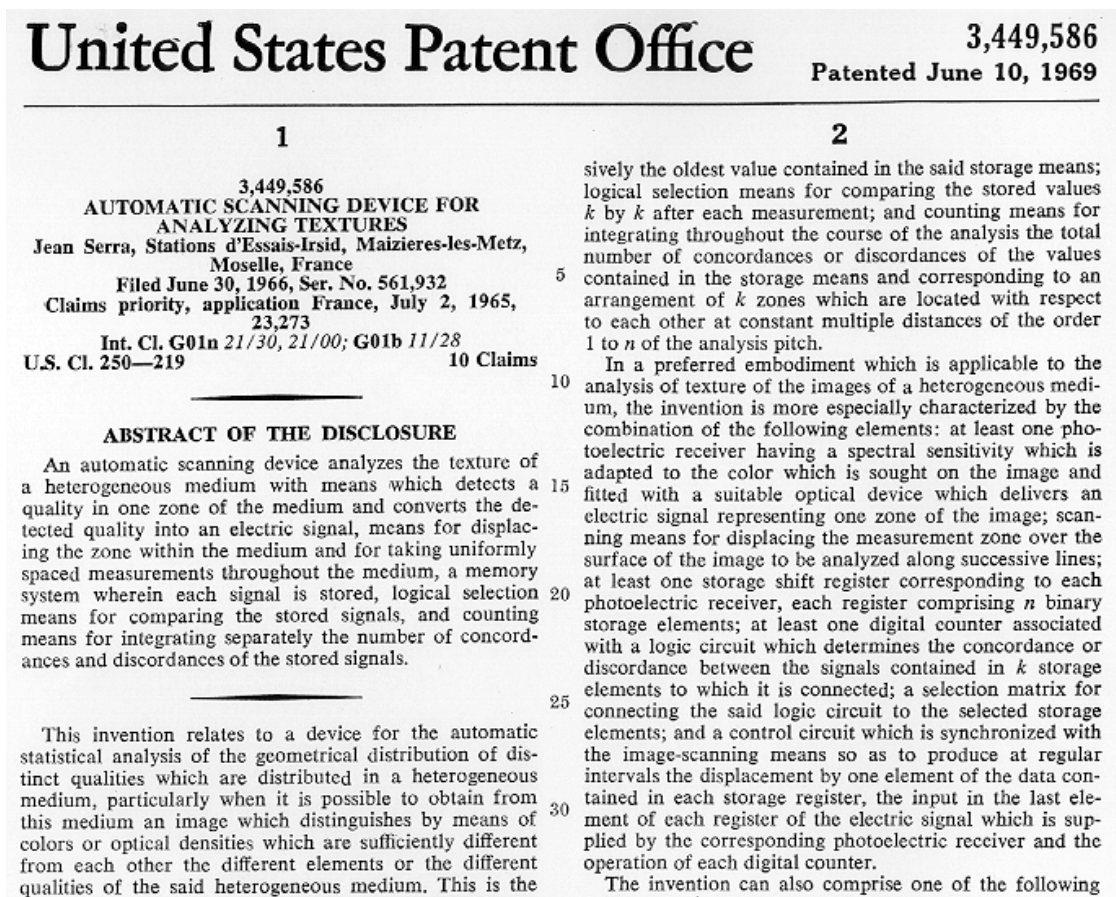


Figura 3.1: Parte da primeira página da patente do *Texture Analyser* de J. Serra. Retirado de Matheron e Serra (2002).

No ano de 1985, Crimmins e Brown no artigo “*Image Algebra and Automatic Shape Recognition*” propõem soluções para o problema de reconhecimento automático de padrões em imagens (Crimmins e Brown, 1985). Utilizando como base a definição da erosão tanto para casos binários como casos tons de cinza, os autores apresentaram o que eles chamaram de “Computador genérico de reconhecimento de padrões”, aqui denominado por *CBHMT* (Transformação *Hit-or-Miss* de Crimmins & Brown). Esta trata-se de uma combinação de erosões de forma a detectar na imagem de entrada um padrão desejado, definido por um elemento estruturante e seu complemento. A Figura 3.2 apresenta o esquemático da solução proposta. Em 1991, Zhao e Daut apresentam propostas para utilização da HMT binária para reconhecimento de objetos com formas “perfeitas” e/ou “imperfeitas”. A proposta dos autores é a utilização de elementos estruturantes que se assemelham a borda do objeto em estudo, assim como um conjunto de elementos estruturantes suavizados por operações de abertura, dessa forma, tentando mitigar a dificuldade de utilização da HMT em imagens ruidosas (Zhao e Daut, 1991).

Segundo Soille (2003), a HMT para o caso binário corresponde a responder a seguinte pergunta

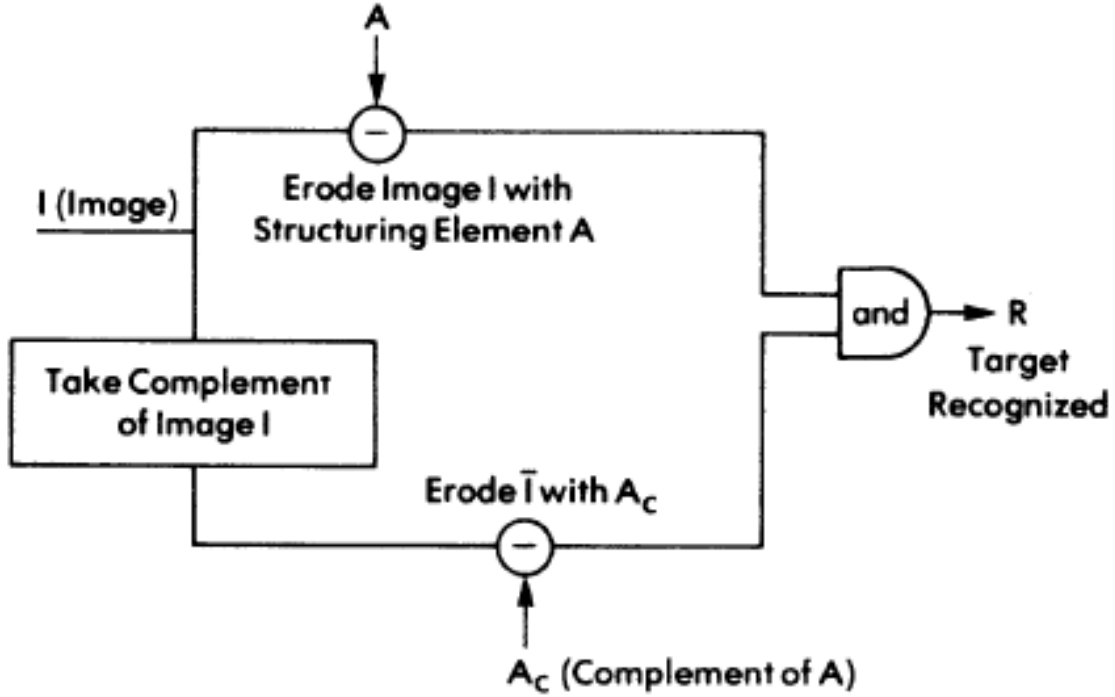


Figura 3.2: Esquemático do “Computador genérico de reconhecimento de padrões” de Crimmins & Brown. Retirado de Crimmins e Brown (1985).

para cada ponto da imagem em estudo:

“Does the first set (SE) fit the foreground while, simultaneously, the second set (SE) misses it (ie, fits the background)?”

3.2 Transformação *Hit-or-Miss* binária

3.2.1 Definição

Seja $\mathbf{B} = (B_{FG}, B_{BG})$ um par de elementos estruturantes (*composite SE*). O elemento B_{FG} corresponde ao elemento estruturante que define os *pixels* que devem coincidir com o objeto, enquanto B_{BG} é o elemento estruturante que define os *pixels* que devem coincidir com o fundo. Por definição, B_{FG} e B_{BG} possuem a mesma origem e $B_{FG} \cap B_{BG} = \emptyset$.

A definição formal da HMT no caso binário (neste texto representado por *BINHMT*) é:

$$BINHMT_{\mathbf{B}}(X) = BINHMT_{(B_{FG}, B_{BG})}(X) = X \otimes \mathbf{B} = \{x : (B_{FG})_x \subseteq X, (B_{BG})_x \subseteq X^c\}$$

Analisando esta definição, temos que tratam-se de duas erosões combinadas e podemos então reescrever a *BINHMT* como:

$$\begin{aligned} BINHMT_{\mathbf{B}}(X) &= \{x : (B_{FG})_x \subseteq X, (B_{BG})_x \subseteq X^c\} \\ &= \{x : (B_{FG})_x \subseteq X\} \cap \{x : (B_{BG})_x \subseteq X^c\} \\ &= \varepsilon_{B_{FG}}(X) \cap \varepsilon_{B_{BG}}(X^c) \end{aligned}$$

Analisando esta expressão podemos dizer informalmente que um ponto x de uma imagem está

na saída da *BINHMT* se, e somente se, B_{FG} transladado de x está contido em X **ao mesmo tempo que** B_{BG} transladado de x está contido em X^c .

A definição formal da *CBHMT*, apresentado em [Crimmins e Brown \(1985\)](#) faz uso de um único elemento estruturante B , seu complemento B^c e duas erosões combinadas com uma intersecção:

$$CBHMT(X, B) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B^c}(X^c).$$

Uma avaliação desta definição nos leva a seguinte definição da *CBHMT* em função de *BINHTM*:

$$CBHMT(X, B) = BINHMT_{(B, B^c)}(X)$$

3.2.2 Propriedades e Aplicações

Dentre todas as propriedades da HMT binária, a principal, e que possui maior relevância neste trabalho, é o fato de tratar-se de uma operação **não crescente** com relação ao *foreground* nem com relação ao *background*. Este fato, quando analisado com o resultado apresentado em [Maragos e Schafer \(1987a\)](#) e [Maragos e Schafer \(1987b\)](#), leva a conclusão de que a transformação HMT binária não tem então uma definição trivial para o caso tons de cinza, uma vez que não é possível utilizar o conceito de *cross-sections* como acontece com os outros operadores morfológicos crescentes. A *BINHMT* é também uma operação invariante a translação e escala.

Thinning

A transformação de *thinning* consiste em, dada uma imagem X e um par de elementos estruturantes $\mathbf{B} = (B_{FG}, B_{BG})$, subtrair de X o resultado da HMT por \mathbf{B} . Neste caso, B_{FG} deve conter a origem.

$$thinning(X, \mathbf{B}) = X - HMT_{\mathbf{B}}(X)$$

Uma utilização frequente de *thinning* é a chamada *thinning* sequencial que tem como saída um esqueleto do objeto. Esta consiste em realizar a transformação de *thinning* por uma sequência de elementos estruturantes \mathbf{B} até o momento de convergência. O segredo do *thinning* sequencial está na construção destes elementos estruturantes de modo a cada iteração eliminar pontos do objeto diminuindo sua forma porém preservando as características homotópicas do mesmo. Um exemplo de sequência de elementos estruturantes que é comumente utilizado para *thinning* sequencial é apresentado na Figura 2.3. Quando o processo de subtração converge, temos então o esqueleto da forma. Esta transformação tem aplicações que vão desde análise estrutural até compactação de imagens.

Thickening

A transformação de *thickening* consiste em, dada uma imagem X e um par de elementos estruturantes $\mathbf{B} = (B_{FG}, B_{BG})$, unir a X o resultado da HMT por \mathbf{B} .

$$thickening(X, \mathbf{B}) = X \cup HMT_{\mathbf{B}}(X)$$

Neste caso, B_{FG} não deve conter a origem. Entre os usos desta transformação encontram-se a determinação do fecho convexo (*convex hull*) de um objeto.

Detecção de objetos

A utilização da HMT para reconhecimento de objetos foi a primeira aplicação da HMT proposta por G. Matheron e J. Serra (Matheron e Serra, 2002). Contudo, a definição dos elementos estruturantes corretos para detecção dos objetos na imagem de entrada é uma tarefa extremamente complexa, uma vez que a imagem é sujeita a ruídos, diferença de iluminação, diferença nos dispositivos de captura, etc.

3.3 Transformação *Hit-or-Miss* tons de cinza

Como apresentado na Seção 3.2.2, o *BINHMT* é uma operação não crescente, não sendo possível então, uma definição direta do caso binário para o caso tons de cinza. Esta Seção tem como objetivo apresentar as principais referências encontradas na literatura para a HMT tons de cinza.

3.3.1 Transformação *Hit-or-Miss* de Khosravi & Schafer

Medhi Khosravi e Ronald W. Schafer, em 1996, no artigo “*Template Matching Based on a Grayscale Hit-or-Miss Transform*” apresentam uma proposta de solução para o problema de *template matching* em imagens tons de cinza (Khosravi e Schafer, 1996). Para isto, é apresentada no artigo uma definição para a HMT níveis de cinza, denominada pelos autores de *GHMT* - “*Grayscale Hit-or-Miss Transformation*” (aqui denominada *KSHMT* - *Khosravi & Schafer Hit or Miss Transformation*). A *KSHMT* tem como base a superposição de duas erosões sobre a imagem de entrada utilizando uma única função estruturante b . Seja $D[b]$ o suporte da função estruturante, ou seja, o conjunto discreto do espaço em que a função estruturante b está definida. A *KSHMT* de uma função f por uma função estruturante b é definida como:

$$\begin{aligned} KSHMT_b(f)(x) &= \varepsilon_b(f)(x) + \varepsilon_{-b}(-f)(x) \\ &= \min_{n \in D[b]} \{f(n+x) - b(n)\} + \min_{n \in D[b]} \{-f(n+x) + b(n)\} \end{aligned}$$

A Figura 3.3, retirada de Khosravi e Schafer (1996), e a Figura 3.4, retirada de Barat *et al.* (2010), apresentam exemplos da aplicação da *KSHMT* em sinais genéricos. Comparando a definição da *KSHMT* com a *BINHMT*, temos que estas seguem o mesmo princípio de combinação de erosões. Seguindo a ideia da erosão apresentada na seção 2.6.2, a primeira erosão calcula o melhor ajuste da função estruturante por baixo da superfície da imagem, enquanto a segunda erosão faz o mesmo por cima.

A *KSHMT* apresenta valores no máximo iguais a zero (0), e estes só ocorrem nos pontos em que o casamento da imagem de entrada com a função estruturante é “perfeito”. Khosravi e Schafer apresentam ainda duas possíveis modificações a *KSHMT* para tornar a operação mais robusta a ruído impulsivo. A primeira modificação consiste em trocar as operações de mínimo por operações de *rank-order*. A segunda alteração proposta consiste em explorar o fato de que amostras não-zeradas no ruído impulsivo estão presentes somente em pequenas amostras no sinal original, ou seja, quanto menor o tamanho do *template*, mais robusta a *KSHMT* é ao ruído.

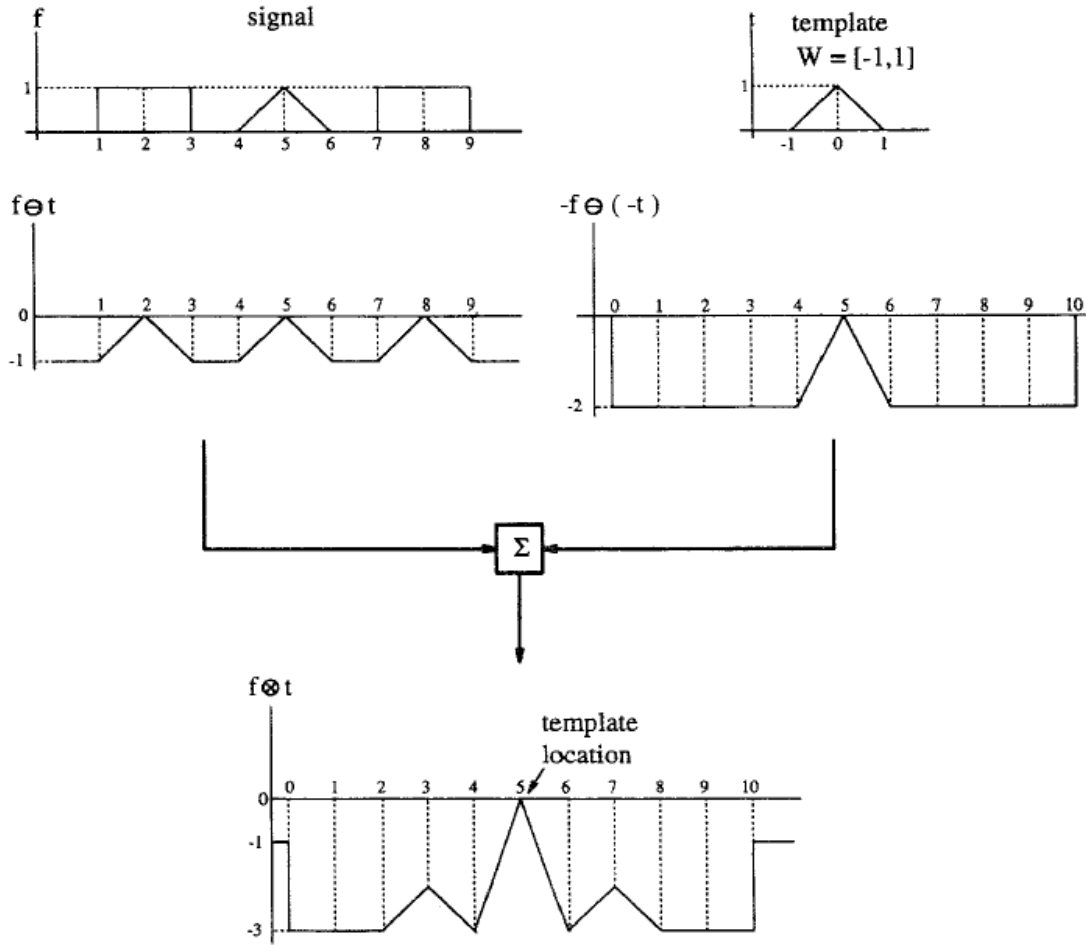


Figura 3.3: Representação esquemática da KSHMT aplicada a um sinal exemplo. Retirado de *Khosravi e Schafer (1996)*.

3.3.2 Transformação *Hit-or-Miss* de Ronse

Ronse (1996) apresenta um estudo relativo a *template extraction* de imagens no contexto de reticulados. Neste artigo, o autor apresenta um novo operador para realização da tarefa proposta, que segue a propriedade de *overcondensation*. O operador anti-extensivo e idempotente, mais tarde chamado de operador intervalo supremal (η^s), recebe dois elementos estruturantes (A e B) e uma imagem de entrada (X) e consiste em uma abertura pelo primeiro elemento estruturante aplicada sobre o resultado da *HMT*.

$$\eta_{(A,B)}^s(X) = \bigcup \{A_p \mid p \in E, A_p \subseteq X \text{ e } B_p \subseteq X^c\} = \gamma_A(HMT_{A,B}(X))$$

$$\text{Se } X \subseteq Y \subseteq Z \text{ e } \eta_{(A,B)}^s(X) = \eta_{(A,B)}^s(Z), \text{ então } \eta_{(A,B)}^s(Y) \subseteq \eta_{(A,B)}^s(X)$$

Ronse, utilizando-se de resultado anteriores da literatura, prova que qualquer operador que apresente essas propriedades é a composição de um operador *inf-separável* seguido de uma dilatação (Banon e Barrera, 1993). Ainda neste artigo, é apresentada uma primeira ideia da unificação da *HMT* para tons de cinza através do operador intervalo, amplamente avaliada no artigo Naegel *et al.* (2007), uma das mais importantes referências atuais para a *HMT* e discutido com

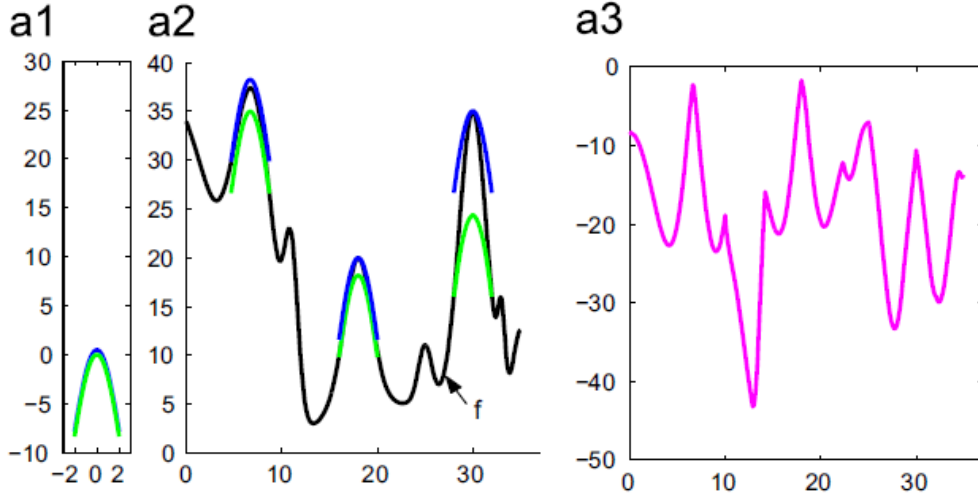


Figura 3.4: Exemplo de uso da KSHMT em um sinal exemplo. Retirado de Barat et al. (2010).

maior aprofundamento na Seção 3.4.

3.3.3 Transformação Hit-or-Miss de Banon & Faria

No artigo “*Morphological Approach for Template Matching*”, Banon e Faria apresentam uma formulação para encontrar *templates* extraídos de uma imagem em outra imagem (Banon e Faria, 1997). Um *template* é definido como uma região de uma imagem f delimitada por uma janela W , e por conveniência é considerado que essa região é centrada na origem. Define-se as funções estruturantes f_W^- e f_W^+ de forma que $0 \leq f_W^-(x) \leq f_W^+(x) \leq t_{max}, \forall x \in W$. O operador de *template matching* é definido como

$$[\phi(g)](x) = |\{w_i : g(x + w_i) \in [f_W^-(w_i), f_W^+(w_i)]\}|$$

A *BFHMT* tem como saída, para cada ponto x , quantos pontos da imagem g em uma região restrita a W em torno de x tem intensidade no intervalo $[f_W^-, f_W^+]$. Em seguida, detecta-se o ponto de máximo da imagem resultante, que indicará os pontos nos quais o *matching* do padrão foi melhor (Banon e Faria, 1997; Barat et al., 2010). A Figura 3.5, retirada de Banon e Faria (1997), apresenta uma representação esquemática do operador *BFHMT*. A Figura 3.6 apresenta um exemplo retirado de Barat et al. (2010) da utilização do operador do *BFHMT* em um sinal exemplo. A Figura 3.7, retirada de Banon e Faria (1997) apresenta um exemplo numérico da *BFHMT*.

3.3.4 Transformação Hit-or-Miss de Raducanu & Grana

Seguindo uma abordagem baseada na decomposição *threshold* de uma imagem tons de cinza, Raducanu e Grana no artigo “*A Grayscale Hit-Or-Miss Transform based on Level Sets*” propõem a construção de uma HMT tons de cinza, denominada *Level Set HMT*, aqui denominada *RGHMT* (Raducanu & Grana HMT), baseada na aplicação da *BINHMT* a cada uma das *cross-sections* da imagem de entrada usando respectivamente como elementos estruturantes as *cross-sections* da função estruturante nos mesmos níveis (Raducanu e Grana, 2000). Seja f uma imagem tons de cinza e b uma função estruturante. Então a definição formal da *RGHMT* é a seguinte:

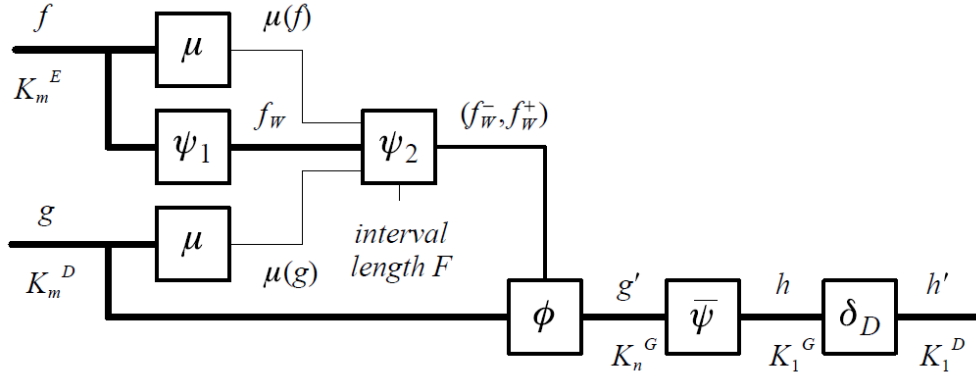


Figura 3.5: Representação esquemática do operador BFHMT aplicado a uma imagem de entrada g e um padrão f a ser procurado. Retirado de *Banon e Faria (1997)*.

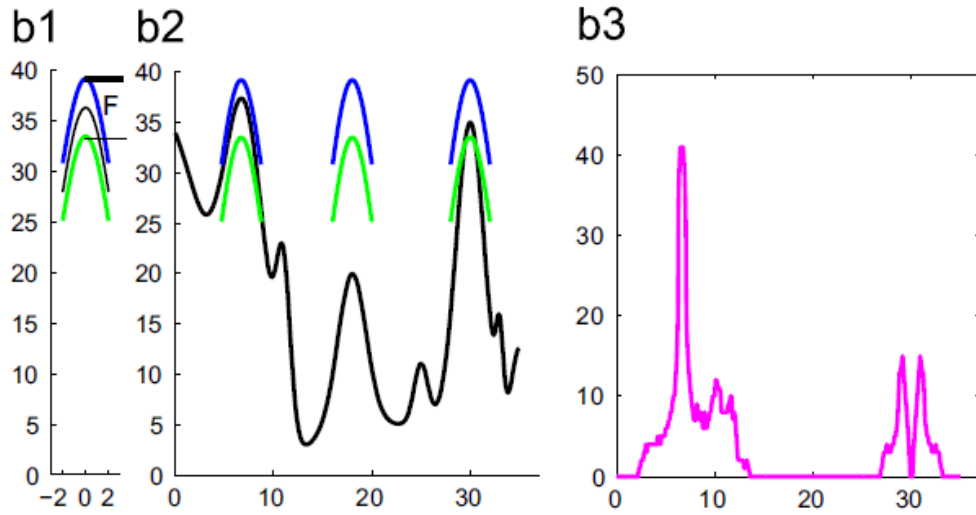


Figura 3.6: Exemplo de uso da BFHMT em um sinal exemplo. Retirado de *Barat et al. (2010)*.

$$RGHMT_b(f)(x) = \sup_{t \in 1 \dots t_{max}} (x \in HMT_{\mathbf{B}_t}(CS_t(f))),$$

na qual $\mathbf{B}_t = (CS_t(b), Sup(b) \setminus CS_t(b))$.

3.3.5 Transformação *Hit-or-Miss* de Soille

Soille em seu livro “*Morphological Image Analysis: Principles and Applications*” apresenta duas definições para a HMT em tons de cinza (Soille, 2003). A primeira, chamada pelo autor de *Unconstrained HMT*, aqui denotada por *SUHMT* (*Soille Unconstrained HMT*), trata-se de uma definição de HMT baseada na diferença entre uma erosão e uma dilatação da imagem de entrada por elementos estruturantes distintos. A segunda definição, chamada pelo autor de *Constrained HMT*, aqui denotada por *SCHMT* (*Soille Constrained HMT*), trata-se de uma definição de HMT semelhante a *SUHMT* com uma restrição referente a posição da origem dentro dos elementos estruturantes utilizados na HMT. A Figura 3.8, retirada de Soille (2003), apresenta a diferente interpretação que uma transformação HMT pode ter dependendo do posicionamento da origem dos SEs utilizados.

A *SUHMT* de um ponto x de uma função f por um elemento estruturante $\mathbf{B} = (B_{FG}, B_{BG})$ tem como saída o número de *cross-sections* $CS_t(f)$ tal que B_{FG} no ponto x coincide com $CS_t(f)$

$$\begin{array}{c}
\text{origin} \swarrow \\
W \quad \boxed{w_1 \quad w_2 \quad w_3} \\
f \quad \boxed{42 \quad 40 \quad 38 \quad 40 \quad 52 \quad 40 \quad 27 \quad 26 \quad 26} \\
g \quad \boxed{42 \quad 49 \quad 49 \quad 41 \quad 52 \quad 40 \quad 27 \quad 25 \quad 26} \\
\mu(f) = 37 \quad \mu(g) = 39 \quad \text{eq. (1)} \quad d\mu = 2 \quad \text{eq. (5)} \\
F = 4 \quad (\text{parameter}) \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 4 \quad \text{eq. (4)} \\
f_w^+ \quad \boxed{44 \quad 56 \quad 44} \quad \text{eq. (2)} \\
f_w \quad \boxed{40 \quad 52 \quad 40} \\
f_w^- \quad \boxed{40 \quad 52 \quad 40} \quad \text{eq. (3)} \\
\lambda^1(g) \quad \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0} \quad \text{eq. (8)} \\
\lambda^2(g) \quad \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \quad \text{eq. (8)} \\
\lambda^3(g) \quad \boxed{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \quad \text{eq. (8)} \\
g' = \phi(g) \quad \boxed{1 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0} \quad \text{eq. (7)} \\
h = \bar{\psi}(g') \quad \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \quad \text{eq. (9)} \\
\delta_D(h) \quad \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \quad \text{eq. (10)}
\end{array}$$

Figura 3.7: Exemplo numérico da BFHMT. Retirado de Banon e Faria (1997).

enquanto, simultaneamente, B_{BG} em x coincide com $(CS_t(f))^c$.

$$[SUHTM_{\mathbf{B}}(f)](x) = \text{card}\{t : (B_{FG})_x \subseteq CS_t(f) \text{ e } (B_{BG})_x \subseteq (CS_t(f))^c\}$$

Como $\max\{t : (B_{FG})_x \subseteq CS_t(f)\}$ é igual ao valor da erosão de f por B_{FG} no ponto x , e $\min\{t : (B_{BG})_x \subseteq (CS_t(f))^c\}$ é um (1) mais o valor da dilatação de f por B_{BG} no ponto x , podemos escrever a *SUHMT* baseada em dilatações e erosões:

$$[SUHTM_{\mathbf{B}}(f)](x) = \begin{cases} [\varepsilon_{B_{FG}}(f)](x) - [\delta_{B_{BG}}(f)](x) & \text{se } [\delta_{B_{BG}}(f)](x) \leq [\varepsilon_{B_{FG}}(f)](x). \\ 0 & \text{cc.} \end{cases}$$

A Figura 3.9 apresenta o resultado da aplicação da *SUHMT* no sinal apresentando na Figura 3.8.

Com relação a *SUHMT*, a *SCHMT* inclui uma restrição adicional com relação a origem dos SEs. A definição formal da *SCHMT* é a seguinte:

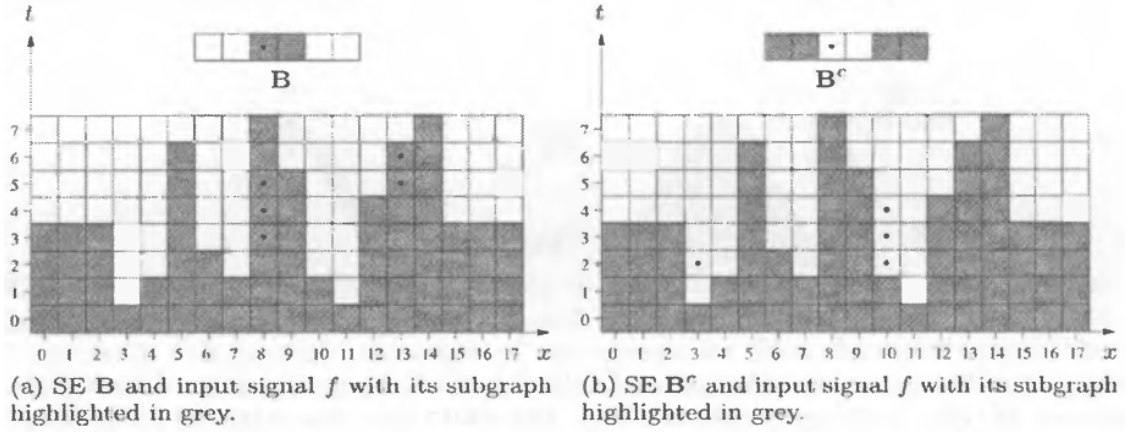


Figura 3.8: Diferença de posicionamento da origem do elemento estruturante pode levar a diferentes definições de HMT níveis de cinza. Retirado de Soille (2003). Legenda original: “On the extension of the hit-or-miss operator to grey tone images: two case studies depending on whether the origin of the composite SE belongs to B_{FG} or B_{BG} . In both diagrams, the centre of the pixels of each cross-section (or its complement) mated by the considered composite SE are marked with a bullet. When B_{FG} contains the origin, all these pixels belong to the subgraph of f while they all belong to the complement of the subgraph when the origin belongs to B_{BG} .”.

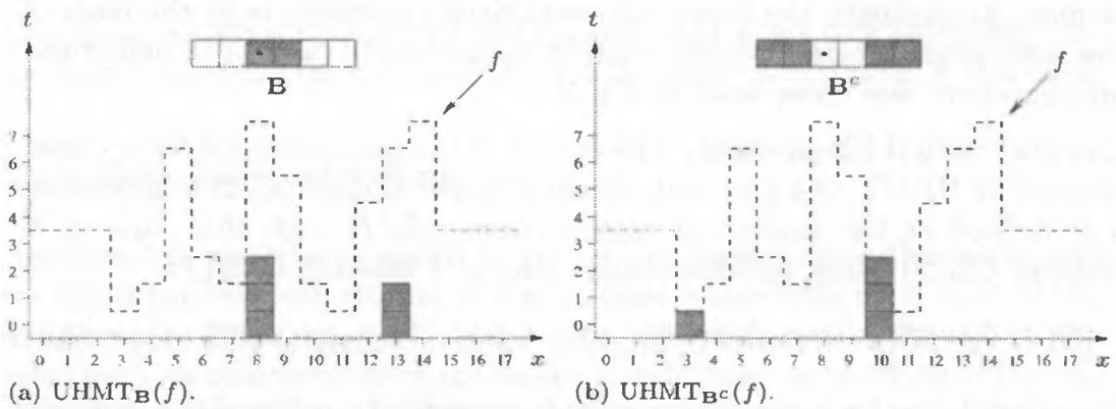


Figura 3.9: Resultado da aplicação da SUHMT no sinal apresentando na Figura 3.8. A função f é representado pela linha pontilhada enquanto os pontos destacados referem-se a saída da SUHMT. Retirado de Soille (2003).

$$[SCHMT_{\mathbf{B}}(f)](x) = \begin{cases} f(x) - [\delta_{B_{BG}}(f)](x), & \text{se } f(x) = [\varepsilon_{B_{FG}}(f)](x) \text{ e } [\delta_{B_{BG}}(f)](x) \leq f(x). \\ [\varepsilon_{B_{BG}}(f)](x) - f(x), & \text{se } f(x) = [\delta_{B_{FG}}(f)](x) \text{ e } [\varepsilon_{B_{BG}}(f)](x) \geq f(x). \\ 0 & \text{cc.} \end{cases}$$

Caso $o \in B_{FG}$, somente o primeiro teste deve ser avaliado. Caso $o \in B_{BG}$, somente o segundo teste deve ser avaliado. A Figura 3.10 apresenta o resultado da aplicação da $SCHMT$ no sinal apresentando na Figura 3.8.

Entre as características relevantes das operações temos que, $SCHMT \leq SUHMT$ e o fato de que ambas são não crescentes. Para o caso binário $SUHMT$ e $SCHMT$ são equivalentes. Soille (2003) prova que no caso níveis de cinza elas são equivalentes somente em situações onde o elemento estruturante de \mathbf{B} que contém a origem é restrito a um único pixel.

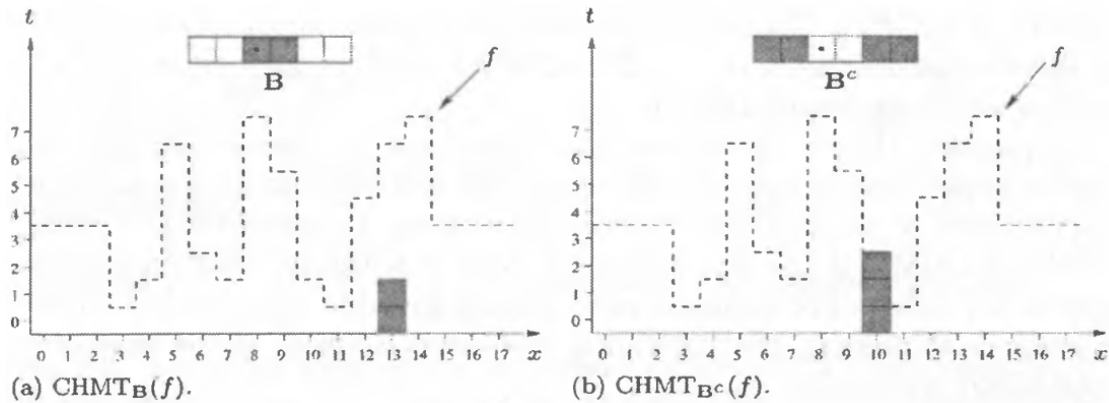


Figura 3.10: Resultado da aplicação da SCHMT no sinal apresentado na Figura 3.8. A função f é representado pela linha pontilhada enquanto os pontos destacados referem-se a saída da SCHMT. Retirado de Soille (2003).

3.3.6 Transformação Hit-or-Miss de Barat et al.

Ainda em 2003, Barat et al. (2003) apresentam em seu artigo “Line pattern segmentation using morphological probing” uma proposta de operador morfológico que tem como ideia central uma prova mecânica do sinal de entrada por elementos estruturantes, bastante semelhante a HMT. Neste artigo, os autores apresentam duas definições para a técnica de prova mecânica sugerida: *SSMP* (Single Object Matching using Probing - aqui denominada Barat & Ducottet & Jourlin Single HMT - *BDJSHMT*) e *MSMP* (Multiple Shape Matching using Probing - aqui denominada Barat & Ducottet & Jourlin Multiple HMT - *BDJMHMT*).

A *BDJSHMT* consiste em, dado um elemento estruturante, utilizando uma erosão e uma anti-dilatação, avaliar a diferença da função nestes pontos. A Figura 3.11 apresenta um exemplo da *BDJHMT* retirado de Barat et al. (2003). A definição formal da mesma é a seguinte:

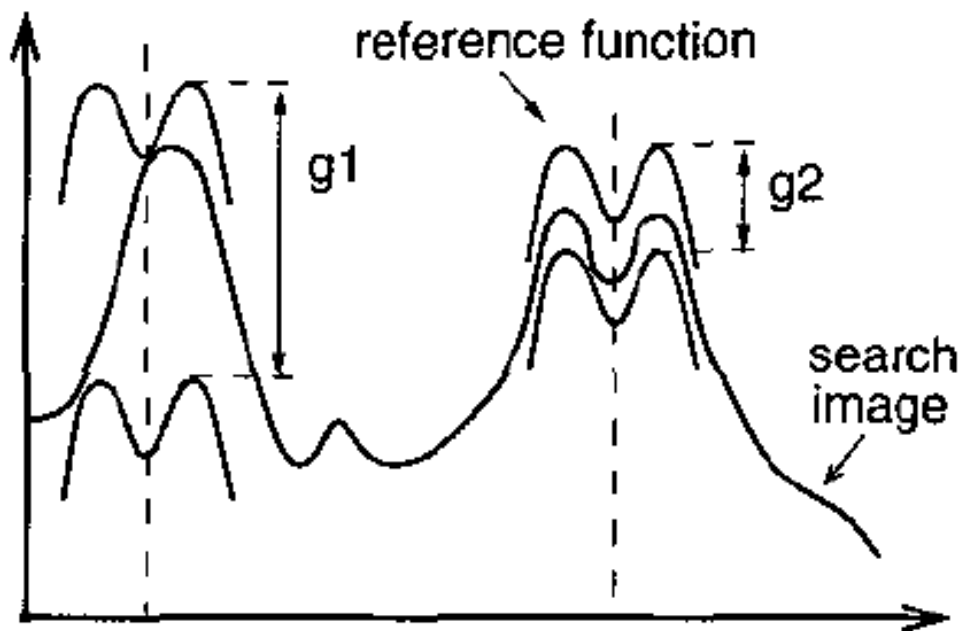


Figura 3.11: Exemplo da aplicação da *BDJSHMT* em um sinal exemplo. Retirado de Barat et al. (2003).

$$BDJHMT_b(f) = \delta_{\check{b}}(f) - \varepsilon_{\check{b}}(f).$$

Comparando a *BDJSHMT* com *KSHMT*, temos que estão são semelhantes em ideia mas distintas em resultado. Enquanto a *KSHMT* possui valores somente negativos ou iguais a zero (0) para pontos onde o *hit-or-miss* é perfeito, *BDSJHMT* apresenta somente valores positivos onde, quanto maior o valor, mais perfeito é o *hit-or-miss* (Barat *et al.*, 2003; Khosravi e Schafer, 1996).

Já a definição de *BDJMHMT* surge da necessidade de localizar em uma mesma imagem diversos padrões de tamanhos distintos mas com formas semelhantes. Para isto, a *BDJMHMT* faz uso de um par funções estruturantes b_{inf} e b_{sup} que correspondem a generalizações do objeto desejado. A definição da *BDJMHMT* e dos elementos estruturantes, onde b_i é o i -ésimo elemento a ser localizado, é a seguinte:

$$BDJMHMT_b(f) = \delta_{\check{b}_{\text{sup}}}(f) - \varepsilon_{\check{b}_{\text{inf}}}(f)$$

$$BDJMHMT_{(b_{\text{inf}}, b_{\text{sup}})}(f) \supseteq \bigcup_i BDTSHMT_{b_i}(f)$$

Um padrão está presente na imagem de entrada se no ponto referente a saída da *BDJMHMT* o valor é inferior a um parâmetro determinado A , que define o limite vertical máximo entre as duas funções estruturantes durante a etapa de prova. A Figura 3.12 apresenta um exemplo de função estruturante para detecção de linhas em imagens utilizando a *BDJMHMT*. As funções estruturantes são representados por segmentos com características próprias, que definem qual será o *range* de padrões a ser procurado. A Figura 3.13 apresenta exemplos de como as características das funções estruturantes podem aumentar ou diminuir este *range* de padrões (Barat *et al.*, 2003).

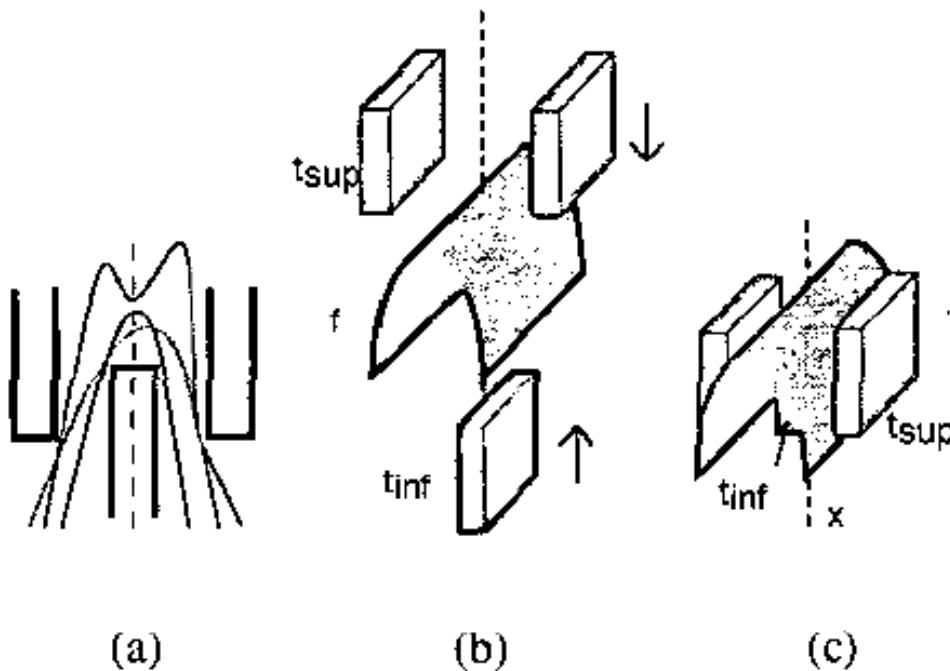


Figura 3.12: Exemplo da aplicação da *BDJMHMT* em um sinal exemplo. Retirado de Barat *et al.* (2003).

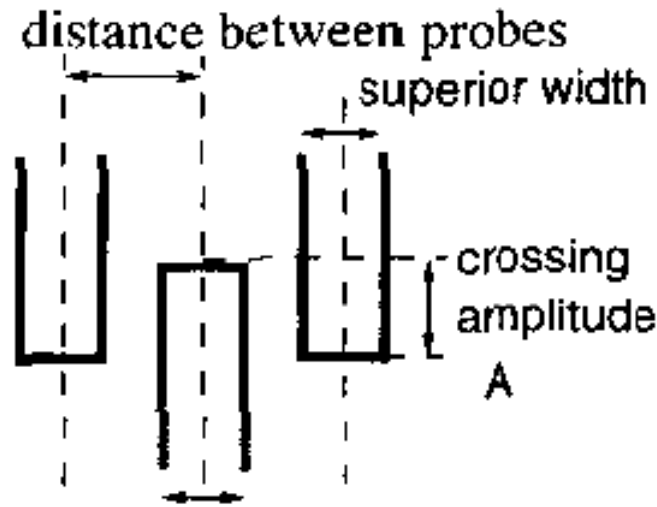


Figura 3.13: Características das funções estruturantes que podem ser variadas para aumentar ou diminuir a quantidade de padrões localizados na imagem de entrada na aplicação da BDJMHMT. Retirado de Barat *et al.* (2003).

3.4 Propostas de unificação para a Transformação *Hit-or-Miss* tons de cinza

Dadas as diversas propostas existentes de extensão da HMT para tons de cinza, dois artigos, seguindo abordagens distintas, apresentaram propostas de unificação das diversas definições de HMT tons de cinza. Nesta seção serão apresentadas estes dois artigos, destacando seus conceitos principais, como algumas das definições apresentadas anteriormente se enquadram nelas e, destacando sua similaridade de proposta de unificação.

3.4.1 Proposta de unificação de Barat - Métricas de distância

No artigo “*Virtual double-sided image probing: A unifying framework for non-linear grayscale pattern matching*” de 2010, Barat, Ducottet e Jourlin tem como objetivo principal apresentar uma unificação das definições utilizando como base a teoria de topologias, o conceito de ε -vizinhança e a distância de Hausdorff (Barat *et al.*, 2003). Eles utilizam como base três importantes definições de localização de padrões em imagens tons de cinza, se atentando principalmente ao conceito de cada uma e não tanto a suas implementações. São elas: *KSHMT*, *BFHMT* e uma proposta de Odone baseada em distância de Hausdorff (Odone *et al.*, 2001). Os autores apresentam, de maneira intuitiva algumas características em comum das três propostas. Entre estas características destaca-se a necessidade de um parâmetro de *threshold*, a utilização de elementos estruturantes semelhantes entre as propostas *KSHMT* e *BFHMT*, e o cálculo de similaridade via medição de interseções da imagem e uma função auxiliar usada tanto por *BFHMT* como pela proposta de Odone (Barat *et al.*, 2010).

A proposta de unificação apresentada no artigo tem como início a seguinte relação de equivalência \sim entre duas imagens f e g :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, f = g + k$$

Desta relação, a classe de equivalência de f com relação a \sim , dentro do espaço I de imagens, é definida como:

$$[f] = \{g \in I : g \sim f\}$$

Com o objetivo de medir a proximidade das imagens em estudo, os autores apresentam o conceito de ε -vizinhança. Esta é definida como, com uma métrica d , o conjunto de funções que estão a uma distância até ε de f :

$$N_d(f, \varepsilon) = \{g \in I : d(f, g) \leq \varepsilon\}$$

No artigo, os autores consideram as distâncias Euclidiana (d_2) e uniforme (d_∞).

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_{x \in D} (f(x) - g(x))^2}, \forall (f, g) \in I^2$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|, \forall (f, g) \in I^2$$

A distância de Hausdorff entre dois conjuntos A e B é definida como:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subset N_d(B, \varepsilon) \text{ e } B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$$

Dada a aplicação da HMT em reconhecimento de padrões, temos que podemos utilizar o conceito de ε -vizinhança para comparar uma imagem de entrada f a um padrão t , seja utilizando uma perspectiva global ou uma perspectiva local. Globalmente, o tamanho da ε -vizinhança permanece fixo com relação a f ou t durante toda a análise. Intuitivamente, isso corresponde a checar se é possível transladar t dentro da vizinhança de f . Matematicamente, corresponde a determinar se existe ou não uma função t^* na classe de equivalência $[t]$ que seja elemento de $N_d(f, \varepsilon)$. Localmente, o tamanho da ε -vizinhança de f ou t varia. Para cada pixel, é calculado o menor valor da ε -vizinhança de f com tamanho ε que contém t para todas as adições de t (Barat *et al.*, 2010).

A Figura 3.14(a) e 3.14(b), retiradas de Barat *et al.* (2010), apresentam a ε -vizinhança $N_{d_2}(f_0, \varepsilon)$ e $N_{d_\infty}(f_0, \varepsilon)$ da função f_0 , demarcada pela região entre f_0^- e f_0^+ . Qualquer função que resida nesta região é considerada similar a f_0 com relação a ε , sendo que para N_{d_2} a vizinhança é definida por uma esfera transladada sobre a função, enquanto para N_{d_∞} a vizinhança é definida por uma distância fixa.

Com esta proposta, os autores provaram que existe uma relação entre as definições divergentes de HMT tons de cinza que são baseadas na teoria dos reticulados. Desta forma, estas poderiam ser redefinidas alterando seu conceito de ε -vizinhança para melhor se adequarem as aplicações, de acordo com os objetos de interesse.

Dada esta proposta de unificação baseada em vizinhança, os autores propõem o conceito de *Virtual Double-sided Image Probing (VDIP)* que estende e generaliza a *BDJSHMT* e *BDJMHMT*. O conceito da *VDIP* consiste em utilizar duas funções auxiliares t_{inf} e t_{sup} com mesma origem e suporte como elementos estruturantes. O parâmetro A é definido usando o centro destas duas

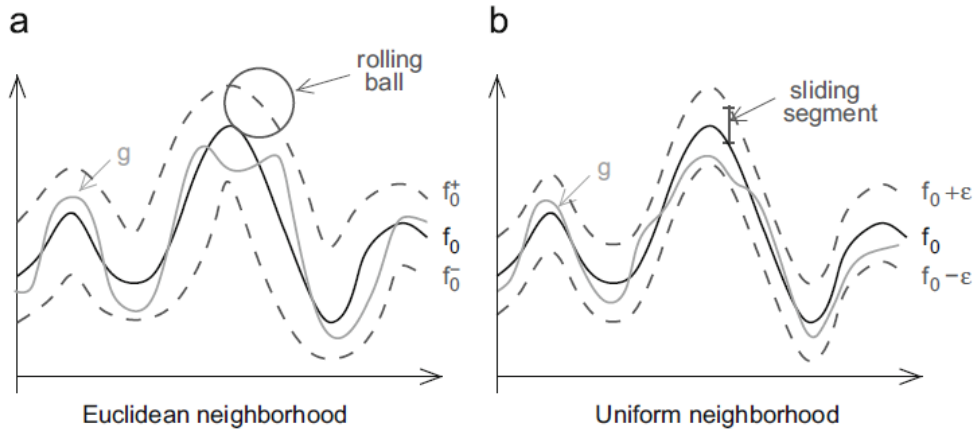


Figura 3.14: Exemplo de determinação de vizinhança usando distância (a) Euclidiana e (b) Uniforme. Retirado de *Barat et al. (2010)*.

funções e tem como objetivo definir a distância entre os elementos estruturantes para determinação do casamento entre a imagem e os SEs. O valor da *VDIP* em cada ponto da imagem corresponde a diferença entre as posições verticais das funções suportes verificadas “abaixo” e “acima” da imagem de entrada.

$$A = t_{\text{sup}}(0) - t_{\text{inf}}(0)$$

$$VDIP(f, (t_{\text{inf}}^*, t_{\text{sup}}^*))(x) = \delta_{-t_{\text{sup}}}(f)(x) - \varepsilon_{t_{\text{inf}}}(f)(x), \forall x \in D$$

Em que t_{inf}^* corresponde a $\sup_{y \in T} \{t(y)\} = 0$ e T o suporte do elemento estruturante, que é a classe de equivalência das funções. Essa configuração de equivalência permite a localização de padrões com variação de tamanho e ruído. A verificação de pertencimento de um ponto a HMT tons de cinza nessa abordagem está associada ao valor da *VDIP* com relação ao parâmetro A . Se $VDIP(x) \leq A$ então o ponto analisado é um ponto onde os SEs coincidem com a imagem dada a tolerância definida pelo intervalo. Devido à invariância a translação da dilatação e erosão, *VDIP* é invariante a translação. A Figura 3.15, retirada de *Barat et al. (2010)*, apresenta um exemplo de aplicação da *VDIP*.

3.4.2 Proposta de Unificação de Naegel et al. - *Fitting and Valuation*

Também no ano de 2010, Naegel, Passat e Ronse apresentaram no artigo “*Grey-level hit-or-miss transformation - Part I: Unified theory*” uma proposta para a unificação das diversas definições de HMT tons de cinza existentes (*Naegel et al., 2007*). Esta proposta, de bastante relevância na literatura, consiste basicamente em duas etapas:

fitting : etapa onde é determinado se um ponto deve ou não pertencer a saída da HMT e qual o valor de *fit* (valor intermediário na análise) deste ponto;

valuation : etapa onde os pontos determinados na etapa de *fitting* são avaliados para determinação do valor destes na saída da HMT.

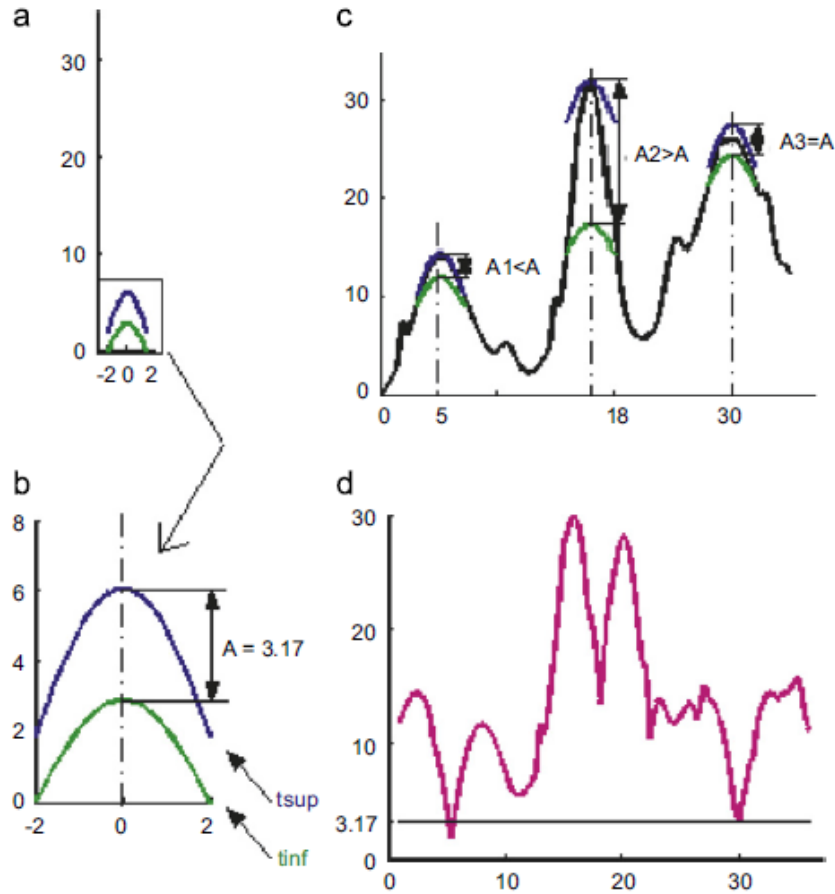


Figura 3.15: Exemplo de aplicação da VDIP. Retirado de *Barat et al. (2010)*.

O artigo apresenta uma revisão matemática das propostas de HMT tons de cinza propostas por *Ronse (1996)*, *Soille (2003)* e *Barat et al. (2003)*, associando-as com a utilização do operador intervalo no contexto das duas etapas apresentadas.

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ tal que $A \subseteq B$. O intervalo $[A, B]$ é definido como:

$$[A, B] = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) : A \subseteq C \subseteq B\}$$

O operador intervalo $\eta_{[A,B]}$, é definido como:

$$\begin{aligned} \eta_{[A,B]}(X) &= \{p \in E : X_{-p} \in [A, B]\} \\ &= \{p \in E : A_p \subseteq X \subseteq B_p\} \\ &= \text{BINHMT}_{(A, B^c)}(X) \end{aligned}$$

Para a proposta de *Ronse (1996)*, os autores provam que a operação proposta originalmente trata-se da utilização do operador intervalo usando o conceito de supremos para localização dos pontos, e assim o operador intervalo supremal, como é chamado no artigo, faz parte da família dos operadores *open-overcondensation*. Para a proposta de *Soille (2003)*, primeiramente os autores apresentam uma prova de que este aceita SEs *non-flat* (funções estruturantes) fazendo uso do conceito de cilindros. Posteriormente, os autores apresentam o operador intervalo integral, como é chamado no artigo, que corresponde à proposta de *Soille* do *SUHMT*. Ambos operadores intervalo

são capazes de localizar em uma imagem os pontos desta que correspondem a um intervalo definido pelos SEs utilizados. Enquanto o operador intervalo supremal age como uma erosão pelo primeiro elemento estruturante, o operador intervalo integral mede a diferença efetiva entre os tons de cinza dos elementos estruturantes e a imagem.

Para a definição de Barat *et al.* (2003), baseada em uma ideia de prova mecânica, os autores apresentam um breve comentário relacionado a sua similaridade com o operador intervalo integral. A Figura 3.16, retirada de Naegel *et al.* (2007) apresenta a principal diferença entre os conceitos do operador intervalo e da prova mecânica.

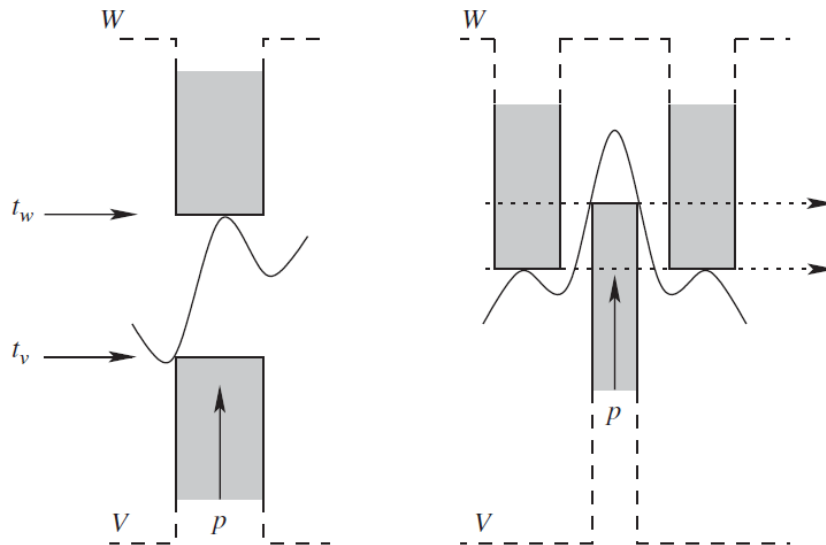


Figura 3.16: Exemplificação da diferença entre a prova mecânica proposta por Barat *et al.* (2010) (esquerda) e o operador intervalo (direita). A prova mecânica consiste em procurar o menor intervalo $[t_v, t_w]$ enquanto o operador intervalo consiste em procurar o maior intervalo t entre V e W . Retirado de Naegel *et al.* (2007).

Dados os resultados teóricos obtidos pelos autores, eles propõem então sua proposta de unificação que se baseia nas duas etapas já citadas previamente: *fitting* e *valuation*. Para a etapa de *fitting* são possíveis a utilização dos operadores intervalo supremal ou integral, sejam com ou sem a restrição proposta por Soille (2003). Para a etapa de *valuation* são possíveis a utilização do operador utilizado por Ronse que associa o valor supremal ao ponto na imagem de saída, a medida proposta por Soille que avalia cardinalidade para definição do valor do ponto na imagem de saída ou ainda a utilização de uma consulta binária simples gerando uma imagem de saída binária.

Capítulo 4

Entendimento das diferentes implementações *Hit-or-Miss* níveis de cinza

Embora todas as versões da transformação *hit-or-miss* níveis cinza se baseiem no operador intervalo, conforme apresentado no artigo de proposta de unificação de Naegel *et al.* (2007) e discutido na Seção 3.4.2, a maneira como os elementos estruturantes são utilizados para as etapas de *fitting* e *valuation* diferem, dificultando ainda mais a tarefa de definição destes. Este Capítulo tem como objetivo apresentar exemplos em imagens artificiais da utilização das diferentes definições da transformação *hit-or-miss* apresentadas ao longo deste trabalho. São apresentados exemplos simples com o objetivo de facilitar o entendimento de como cada definição faz uso dos elementos estruturantes e avalia o casamento destes com a imagem de entrada. São também apresentados estudos para exemplificação do uso de elementos estruturantes *flat* e *non-flat* em cada uma das definições. Por fim, o desempenho de cada definição é avaliado na presença de ruído.

Todas as definições e exemplos abaixo foram implementados na linguagem de programação *Python* e disponibilizados em <https://github.com/fsiola/HMTGrayScale>, utilizando como base as bibliotecas *PIL* (*Python Image Library*), *ia870* e *OpenCV*.

Os exemplos apresentados neste Capítulo tem como objetivo detectar a presença de diversos objetos com formas simples, de valores distintos, utilizando elementos estruturantes específicos para cada uma das definições. A Figura 4.1 apresenta a imagem exemplo de entrada onde o objetivo do problema é localizar quadrados de valores distintos. A Figura 4.2 apresenta a imagem exemplo de entrada com discos de raio 30 de valores fixos distintos a serem detectados, já a Figura 4.3 apresenta a imagem exemplo de entrada de discos com valores não fixos, todos estes com picos de valor 255. Todas as Figuras são aqui apresentadas com valores invertidos.

Outra dificuldade intrínscica à utilização da transformação *hit-or-miss* ocorre quando as imagens de entrada apresentam ruídos. Neste Capítulo são também apresentados os resultados da aplicação das transformações *hit-or-miss* listadas nesse trabalho quando as imagens de entrada apresentam ruídos. Para estes experimentos foi aplicado às imagens das Figuras 4.2 e 4.3 ruído do tipo *Salt-and-Pepper* com valores variando entre 0 e 255, resultando nas imagens apresentadas nas Figuras 4.4 e 4.5, respectivamente.



Figura 4.1: Imagem artificial com quadrados de diversos valores, apresentada com valores invertidos.

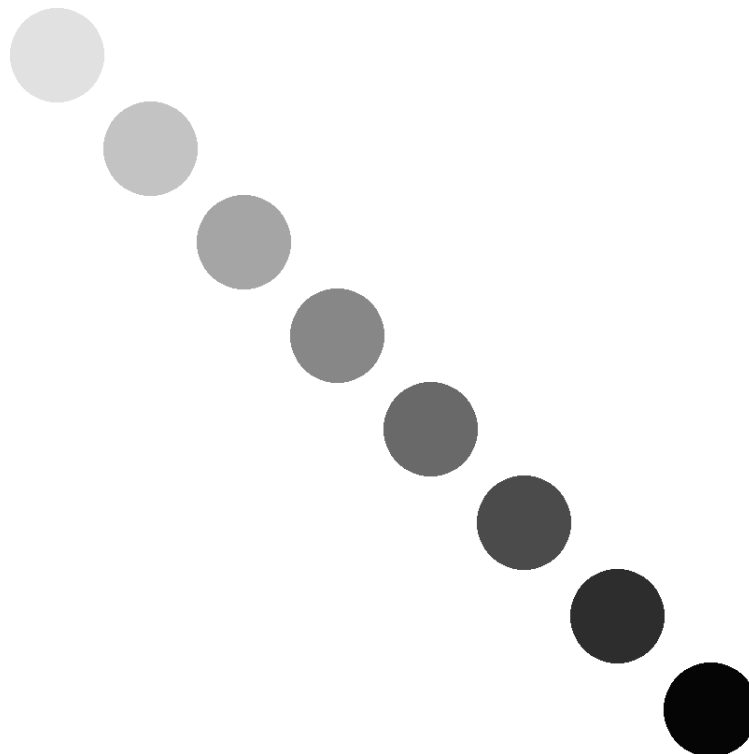


Figura 4.2: Imagem artificial com discos de raio 30 de diversos valores flat, apresentada com valores invertidos.

4.1 Transformação *Hit-or-Miss* de *Khosravi & Schafer*

A definição de *Khosravi & Schafer*, apresentada em [Khosravi e Schafer \(1996\)](#) e neste trabalho na Seção 3.3.1, tem como característica a utilização de um único elemento estruturante na sua

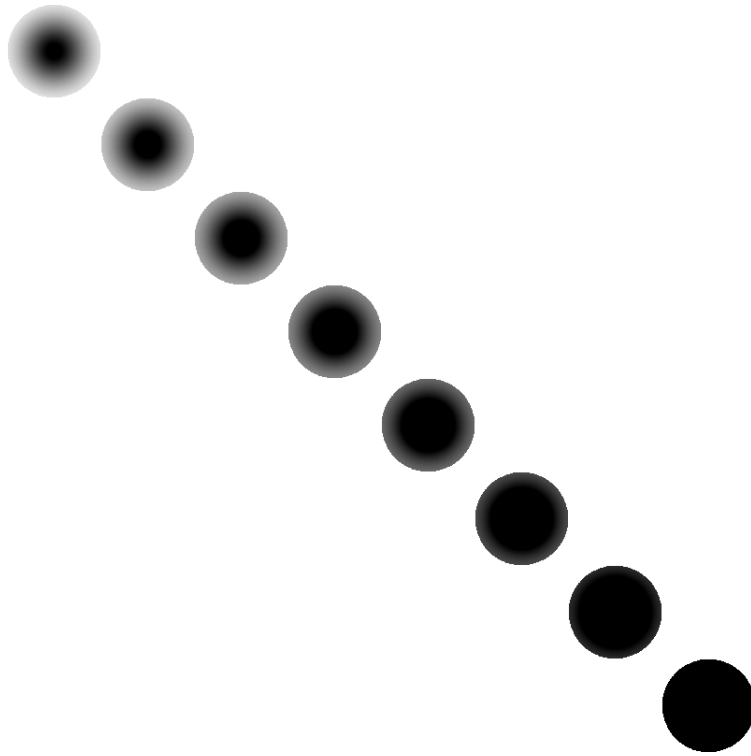


Figura 4.3: Imagem artificial com discos de raio 30 de diversos valores non-flat, apresentada com valores invertidos.

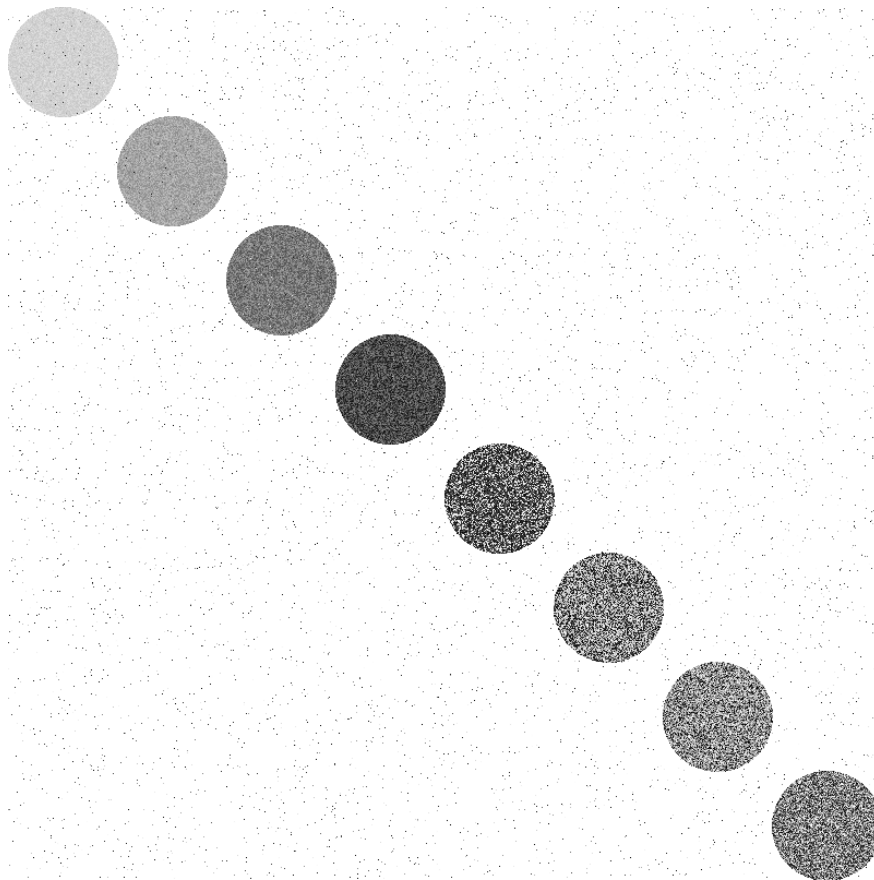


Figura 4.4: Resultado da aplicação de ruído do tipo Salt-and-Pepper a Figura 4.2, apresentada com valores invertidos.

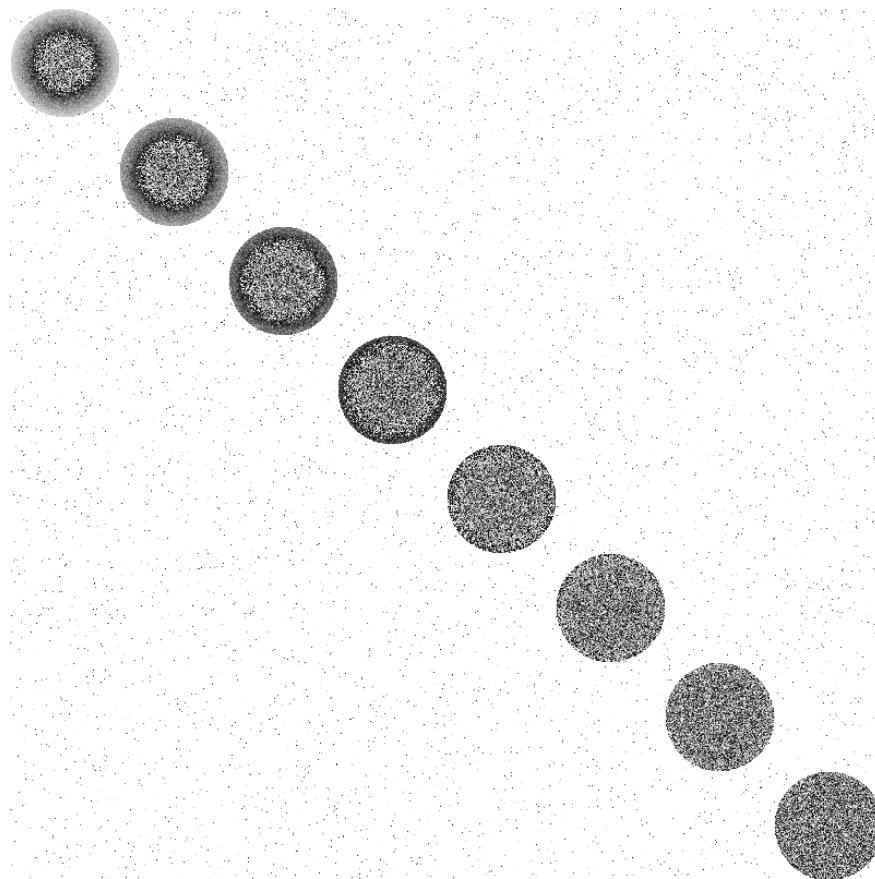
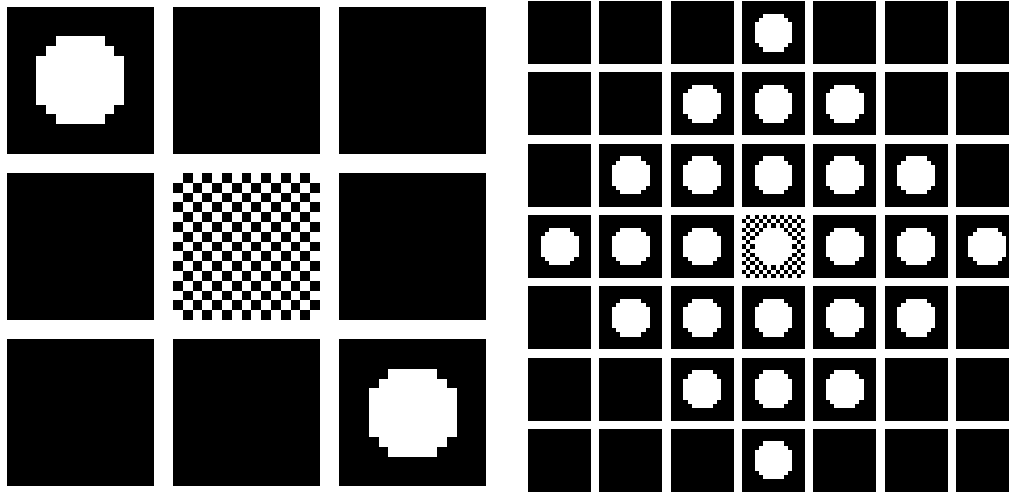


Figura 4.5: Resultado da aplicação de ruído do tipo Salt-and-Pepper a Figura 4.3, apresentada aqui com valores invertidos.

definição e ter como resultado valores que variam de -255 a 0 para o caso 8 bits, onde valores mais próximos de 0 são os pontos onde o elemento estruturante melhor se adequou a imagem de entrada. A transformação é baseada na soma entre uma erosão da imagem pelo elemento estruturante com a erosão da negação da imagem pela negação do elemento estruturante. A Figura 4.6a apresenta o elemento estruturante utilizado para atingir o objetivo de detectar os quadrados na imagem artificial de entrada apresentada na Figura 4.1. Esta definição de elemento estruturante surge da característica do problema a ser resolvido; os *pixels* com valor 1 tem o papel de, nas erosões localizar os pontos de borda desejados.

A Figura 4.8a apresenta o resultado com valores invertidos da transformação para o problema dos quadrados. As bordas dos quadrados foram localizadas pela transformação e, com a utilização de um elemento estruturante binário, o valor retornado para as bordas foi inversamente proporcional ao valor de cada quadrado na imagem original. O quadrado localizado no canto inferior direito, que tinha como valor inicial 255 , teve como resultado na transformação um resultado de -255 . Com isso, temos que usando-se um elemento estruturante binário, a aplicação da transformação tem como característica preservar uma relação com o valor original dos pontos localizados pelo elemento estruturante. A Figura 4.8b apresenta o resultado com valores invertidos da aplicação da transformação utilizando-se um elemento estruturante com valores que vão de 0 a 255 . Neste caso todos os quadrados foram localizados, porém, o valor de saída de todos se tornou 0 , não preservando parte da informação referente a imagem inicial.

Para o problema de detecção de discos com valores fixos, o elemento estruturante a ser utilizado



(a) Elemento estruturante binário utilizado para detecção de bordas em quadrados na transformação de Khosravi & Schafer, apresentado de forma expandida.

(b) Elemento estruturante binário utilizado para detecção de discos na transformação de Khosravi & Schafer, apresentado na forma expandida.

Figura 4.6: Elementos estruturantes binários utilizados para detecção de objetos de interesse com a transformação de Khosravi & Schafer, apresentados na forma expandida.

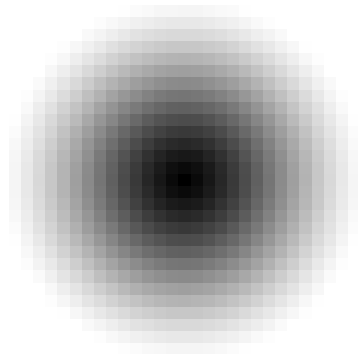


Figura 4.7: Elemento estruturante non-flat utilizado para detecção de discos na transformação de Khosravi & Schafer, apresentado com valores invertidos.

deve ter como característica principal uma forma semelhante a dos discos a serem detectados. A Figura 4.6b apresenta o elemento estruturante utilizado para detecção dos discos presentes nas Figuras 4.2 e 4.3. Os resultados das aplicações da transformação são apresentados nas Figuras 4.9a e 4.9b. Novamente, utilizando-se elemento estruturante na forma binária (0 e 1) fez com que a informação presente na imagem original, do valor do disco seja preservado no resultado final.

Com relação ao problema de detecção de discos com valores não fixos (Figura 4.3), as Figuras 4.10a e 4.10b apresentam respectivamente, o resultado da aplicação da transformação de Khosravi & Schafer quando utilizado o elemento estruturante *flat* apresentado na Figura 4.6b e o elemento estruturante *non-flat* apresentado na Figura 4.7. Devido ao fato dos discos não terem valor constante, o efeito do valor do elemento estruturante se reflete também no valor de saída da transformação.

A presença de ruídos nas imagens de entrada é um dos assuntos abordados no artigo que apresenta a transformação de Khosravi e Schafer (1996). Neste artigo, os autores apresentam como solução para reduzir o efeito dos ruídos na transformação a utilização de operações do tipo *rank-*

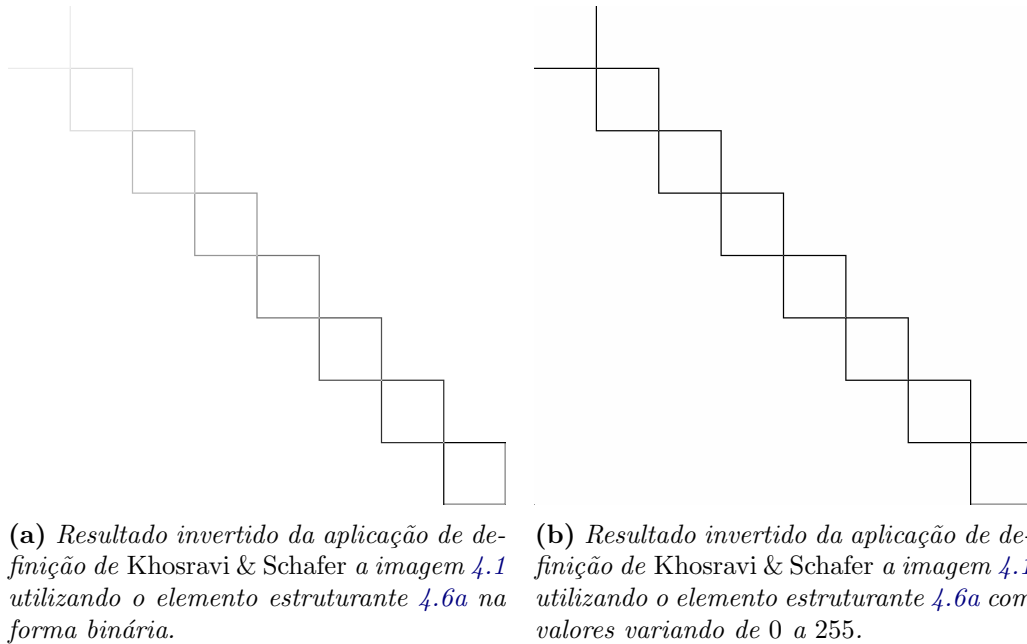


Figura 4.8: Resultados das aplicações da transformação de Khosravi & Schafer para o problema de detecção de quadrados em imagens, apresentados aqui de forma invertida.

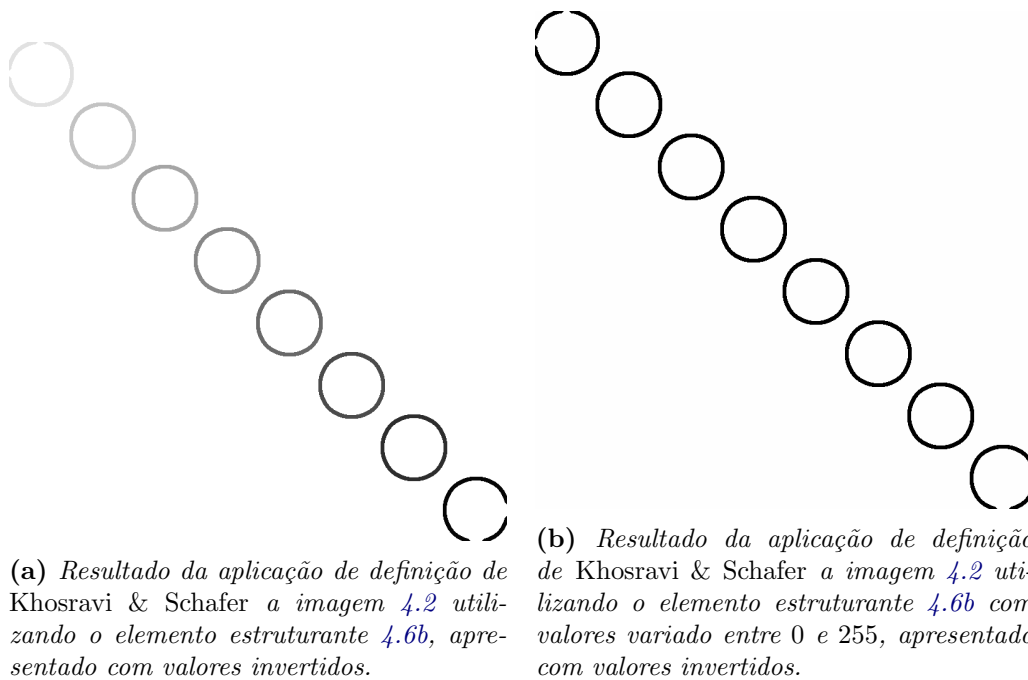
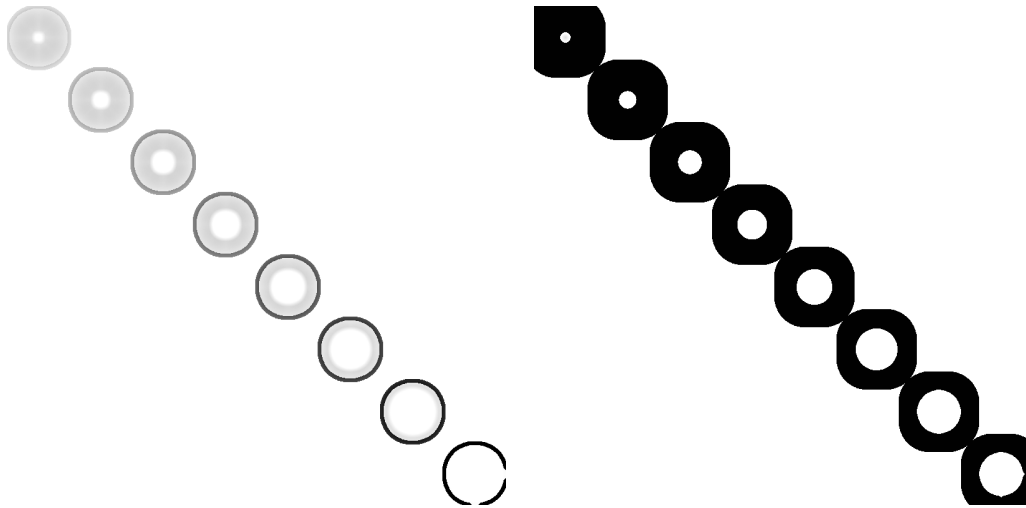


Figura 4.9: Resultados das aplicações da transformação de Khosravi & Schafer para o problema de detecção de discos em imagens, apresentados com valores invertidos.

order e filtros Gaussianos nas imagens de entrada. A Figura 4.11a apresenta o resultado da aplicação da transformação à imagem de entrada de discos com valores fixos com ruídos apresentada na Figura 4.4 e o elemento estruturante *flat* apresentado na Figura 4.6b. Avaliando de forma visual o resultado, fica claro que a região de interesse foi destacada no resultado, porém o ruído teve um grande efeito degradante na imagem, dificultando o possível uso computacional da imagem resultante para processamento futuro. A mesma avaliação se aplica quando realizamos a transformação da imagem de entrada de discos com valores *non-flat* apresentada na Figura 4.5, com resultado apresentado

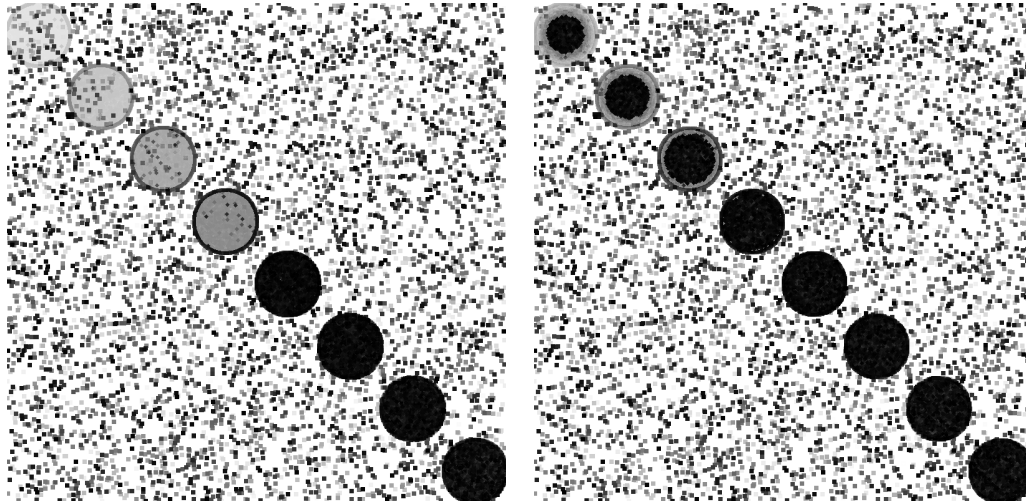


(a) Resultado da aplicação de definição de Khosravi & Schafer a imagem 4.2 utilizando o elemento estruturante 4.6b, apresentado aqui invertido.

(b) Resultado da aplicação de definição de Khosravi & Schafer a imagem 4.3 utilizando o elemento estruturante 4.7, apresentado aqui invertido.

Figura 4.10: Resultados das aplicações da transformação de Khosravi & Schafer para o problema de detecção de discos de valores não constantes em imagens, apresentados aqui invertido.

na Figura 4.21b. A utilização de elemento estruturante do tipo *non-flat* na imagem de entrada com presença de ruído, fez com que a transformação não fosse capaz de localizar os objetos de interesse, retornando imagens sem nenhuma informação.



(a) Resultado da aplicação da transformação de Khosravi & Schafer a imagem de entrada apresentada em 4.4 com o elemento estruturante apresentado na Figura 4.6b.

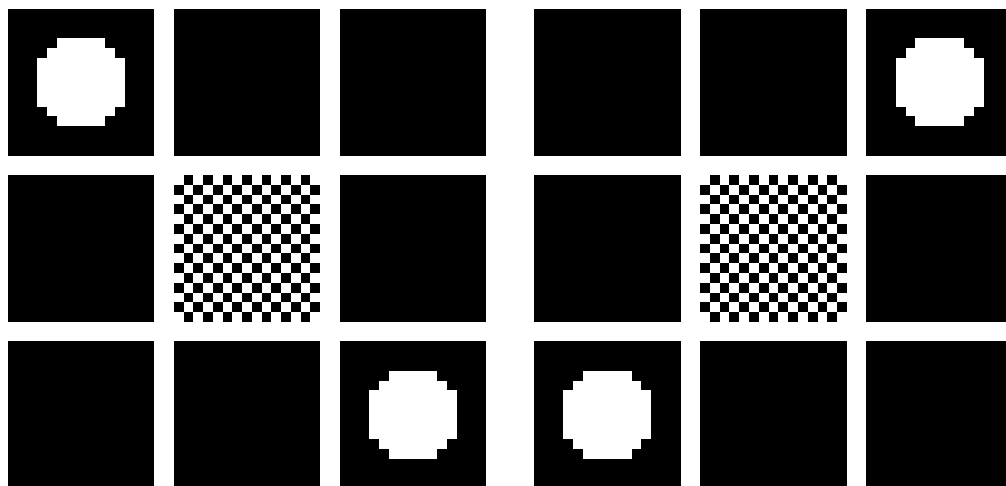
(b) Resultado da aplicação da transformação de Khosravi & Schafer a imagem de entrada apresentada em 4.5 com o elemento estruturante apresentado na Figura 4.6b

Figura 4.11: Resultados das aplicações da transformação de Khosravi & Schafer para o problema de detecção de discos em imagens com ruídos do tipo Salt-and-Pepper em imagens, apresentados com valores invertidos.

4.2 Transformação *Hit-or-Miss* de Soille

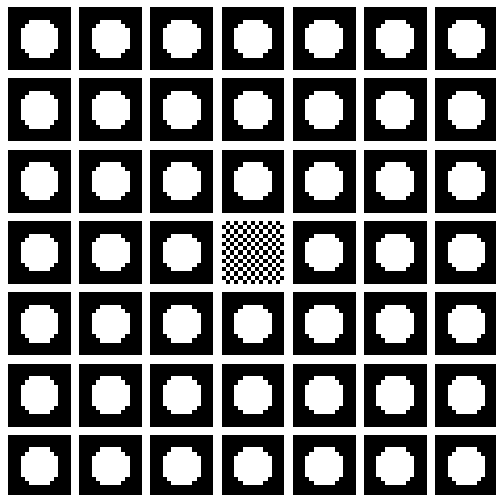
A transformação de *Soille* apresentada em Soille (2003) e neste trabalho em 3.3.5 é baseada no resultado de uma subtração de uma erosão da imagem pelo elemento estruturante definido para o

foreground com uma dilatação da imagem pelo elemento estruturante definido para o *background*. O resultado da transformação assume valores que variam de 0 a 255 para o caso 8 *bits*, onde valores mais próximos de 255 são os pontos onde o *template* definido pelos elementos estruturantes melhor se adequou a imagem de entrada. Devido a definição de *Soille* ter como resultado a subtração de uma erosão por uma dilatação, a determinação dos elementos estruturantes deve ser feita tendo como objetivo fazer com que a dilatação utilizada sempre produza pontos na imagem com valores menores que a erosão utilizada produzirá. As Figuras 4.12a e 4.12b apresentam os elementos estruturantes utilizados para atingir o objetivo de detectar os quadrados na imagem de entrada, já as Figuras 4.12c e 4.12d apresentam os elementos estruturantes utilizados para detecção dos discos.

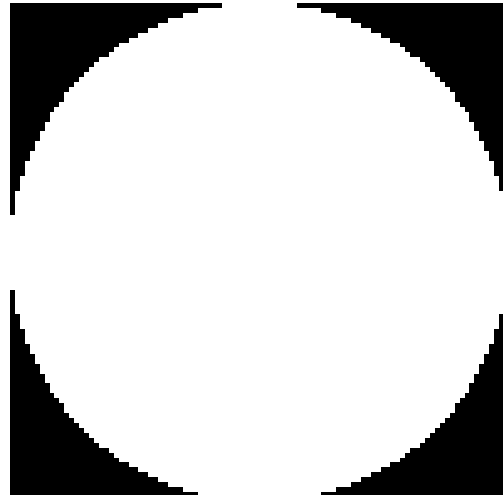


(a) Elemento estruturante binário referente ao foreground utilizado para detecção de quadrados na transformação de Soille, apresentado na forma expandida.

(b) Elemento estruturante binário referente ao background utilizado para detecção de quadrados na transformação de Soille, apresentado na forma expandida.



(c) Elemento estruturante binário referente ao foreground utilizado para detecção de discos na transformação de Soille, apresentado na forma expandida.



(d) Elemento estruturante binário em forma de disco de raio igual a 50 pixels referente ao background utilizado para detecção de discos na transformação de Soille.

Figura 4.12: Elementos estruturantes binários utilizados para detecção de objetos de interesse com a transformação de Soille.

A Figura 4.13a apresenta o resultado da transformação de Soille invertida dilatado por um elemento estruturante em forma de caixa de lado igual a 40 *pixels*. Com os elementos estruturantes

utilizados, o ponto inferior direito de cada quadrado foi detectado, onde este coincide com um quadrado vizinho, e por termos utilizado um elemento estruturante binário, a informação referente ao valor de cada quadrado foi preservado na imagem de saída. Para o problema de localização de discos, a Figura 4.13b apresenta o resultado da transformação dilatado por um disco de raio 20 *pixels* para os elementos estruturantes apresentados nas Figuras 4.12c e 4.12d.

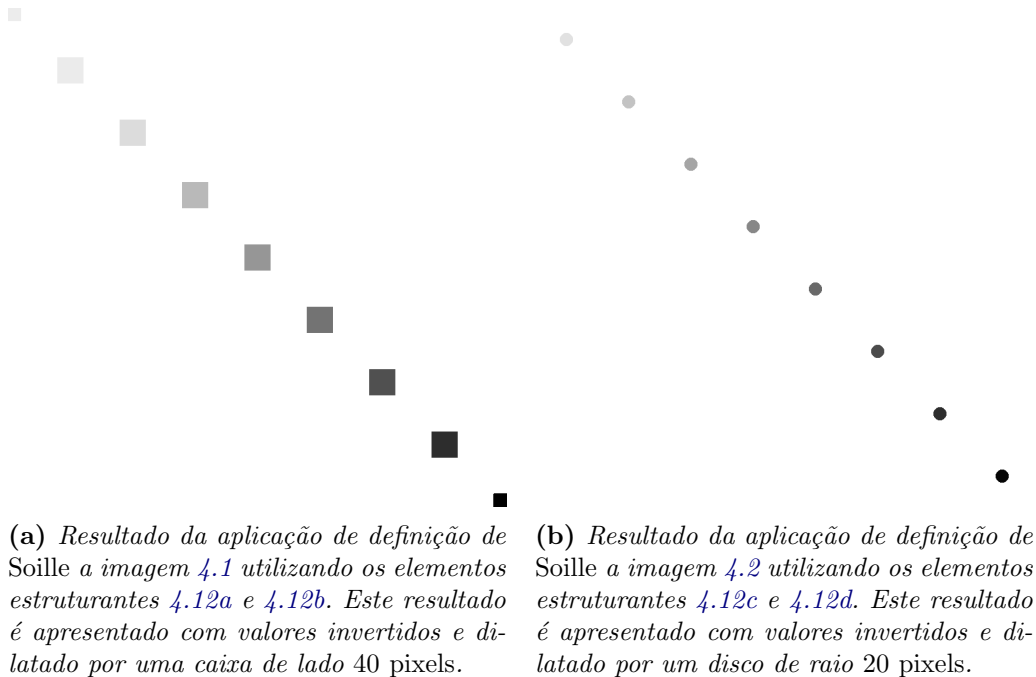


Figura 4.13: Resultados da aplicação da transformação de Soille aos problemas de detecção de quadrados e de discos, apresentadas de forma invertida.

Uma importante característica da transformação de *Soille* é o fato desta não ser definida para o caso em que os elementos estruturantes são *non-flat*, conforme apresentado em [Soille \(2003\)](#). Embora a limitação se de com relação aos elementos estruturantes, a imagem de entrada pode sim conter estruturas *non-flats*. A Figura 4.14 apresenta o resultado da aplicação da definição de *Soille* para a Figura 4.3 com os elementos estruturantes 4.12c e 4.12d, dilatada por um disco de raio igual a 20 *pixels*. Para as situações em que existem ruídos nas imagens, a transformação de *Soille* apresentou para todos os casos imagens resultado com todos os *pixels* de valor 0.

4.3 Transformação *Hit-or-Miss* de Barat

Barat definiu a transformação *Hit-or-Miss* para níveis de cinza como o resultado da subtração da dilatação da imagem de entrada pelo elemento estruturante para o *background* pela erosão da imagem de entrada pelo elemento estruturante para o *foreground*, conforme apresentado em [Barat et al. \(2010\)](#) e na Seção 3.3.6. Para o problema de detecção de quadrados em imagens, utilizando-se os mesmos elementos estruturantes usados para a definição de *Soille* (Figuras 4.12a e 4.12b), o resultado da transformação de *Barat* é o apresentado na Figura 4.15. Com relação ao problema de localização de discos, os elementos estruturantes usados são os apresentados nas figuras 4.16a e 4.16b. O resultado da operação por estes elementos estruturantes é o apresentado na Figura 4.17.

Para o problema de discos com valores não constantes, a Figura 4.18 apresenta o resultado da

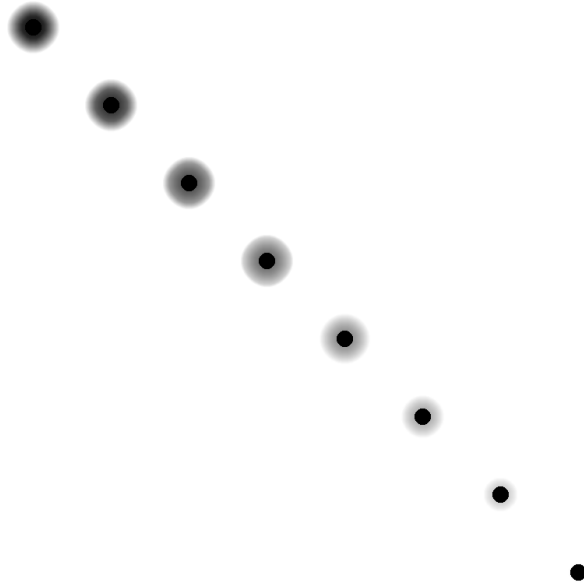


Figura 4.14: Resultado da aplicação de definição de Soille a imagem 4.3 utilizando os elementos estruturantes 4.12c e 4.12d. Este resultado é apresentado com valores invertidos e dilatado por um disco de raio 20 pixels.

aplicação da transformação de *Barat* a Figura 4.3 com elementos estruturantes 4.16a e 4.16b. A utilização de elementos estruturantes *non-flat* tem como consequência no resultado da transformação de *Barat* valores muito acima dos de entrada. As Figuras 4.20a e 4.20b apresentam o resultado ajustado para a faixa de valores de 0 a 255 da aplicação da definição de *Barat* utilizando-se elementos estruturantes *non-flat* (Figuras 4.19a e 4.19b) na Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

Semelhante ao que ocorreu com a transformação de *Khosravi & Schafer*, a transformação de *Barat* foi capaz de detectar parte dos objetos de interesse em imagens ruidosas, contudo, a quantidade de ruídos na imagem de saída também inviabiliza a sua utilização em uma possível futura aplicação. As Figuras 4.21a e 4.20b apresentam o resultado da aplicação da transformação às imagens de entrada com ruídos apresentadas em 4.4 e 4.5, respectivamente.

4.4 Transformação *Hit-or-Miss* de *Raducana & Grana*

Para a transformação *hit-or-miss* níveis de cinza, *Raducana & Grana* propuseram a utilização da transformação *hit-or-miss* binária aplicada a cada nível da imagem, conforme apresentado em [Raducanu e Grana \(2000\)](#) e na Seção 3.3.4. O resultado dessa soma de transformações *hit-or-miss* é então subtraída da imagem de entrada e este valor é retornado. A Figura 4.23a apresenta o resultado da aplicação da definição para o problema de detecção de bordas de quadrados utilizando os mesmos elementos estruturantes utilizados para a definição de *Soille* (Figuras 4.12a e 4.12b). Para o problema de detecção de discos, os elementos estruturantes usados são os apresentados nas figuras 4.22a e 4.22b. O resultado da operação por estes elementos estruturantes é o apresentado na Figura 4.23b.

Quando utilizando elementos estruturantes *non-flat*, a transformação de *Raducana & Grana* apresenta um resultado que mantém informação com relação aos valores dos objetos e os elementos estruturantes. A Figura 4.24 apresenta o resultado da transformação à imagem de entrada

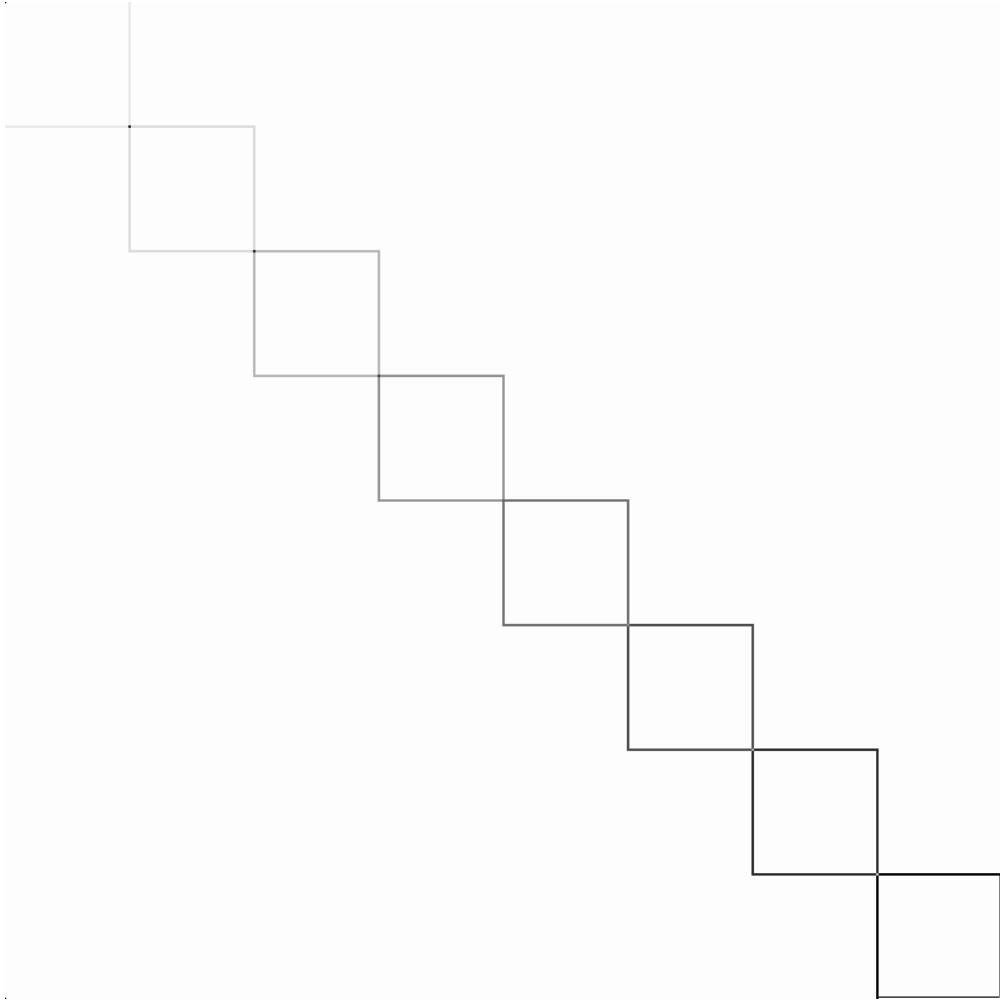
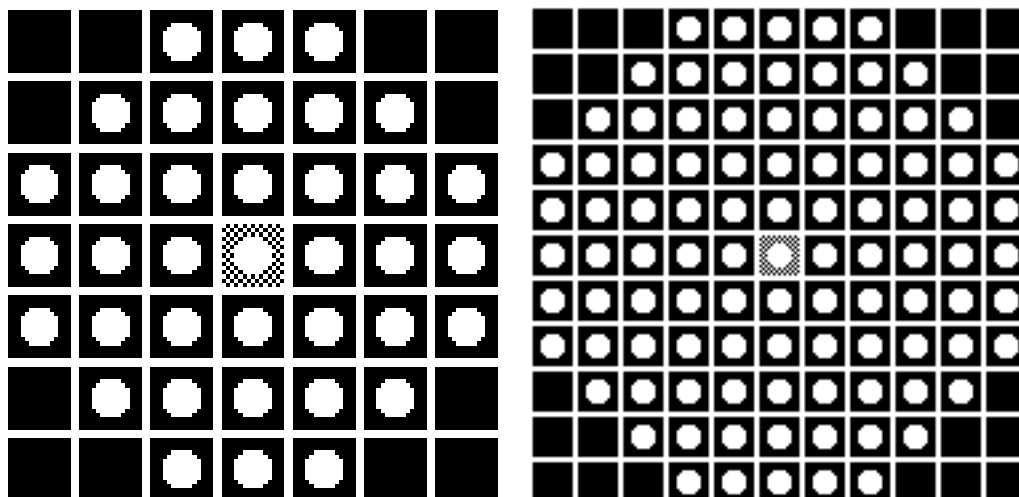


Figura 4.15: Resultado da aplicação de definição de Barat a imagem 4.1 utilizando os elementos estruturantes 4.12a e 4.12b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.

apresentada na Figura 4.3 pelos elementos estruturantes apresentados nas Figuras 4.19a e 4.19b.

Semelhante ao resultado obtido para a transformação de *Khosravi & Schafer* e *Barat*, a transformação *Raducana & Grana* embora destaque o objeto de interesse, apresenta resultado não satisfatório para a utilização em imagens com ruídos. A Figura 4.25a apresenta o resultado da aplicação da transformação à imagem de entrada com ruído apresentada em 4.4. Devido ao conceito de *cross-section* utilizado na transformação de *Raducana & Grana*, quando utilizado elemento estruturante *non-flat*, o resultado apresenta resultados melhores, conforme apresentado na Figura 4.25b.



(a) Elemento estruturante binário referente ao foreground utilizado para detecção de discos na transformação de Barat, apresentado na forma expandida.

(b) Elemento estruturante binário referente ao background utilizado para detecção de discos na transformação de Barat, apresentado na forma expandida.

Figura 4.16: Elementos estruturantes binários utilizados para detecção de discos na transformação Barat, apresentados na forma expandida.

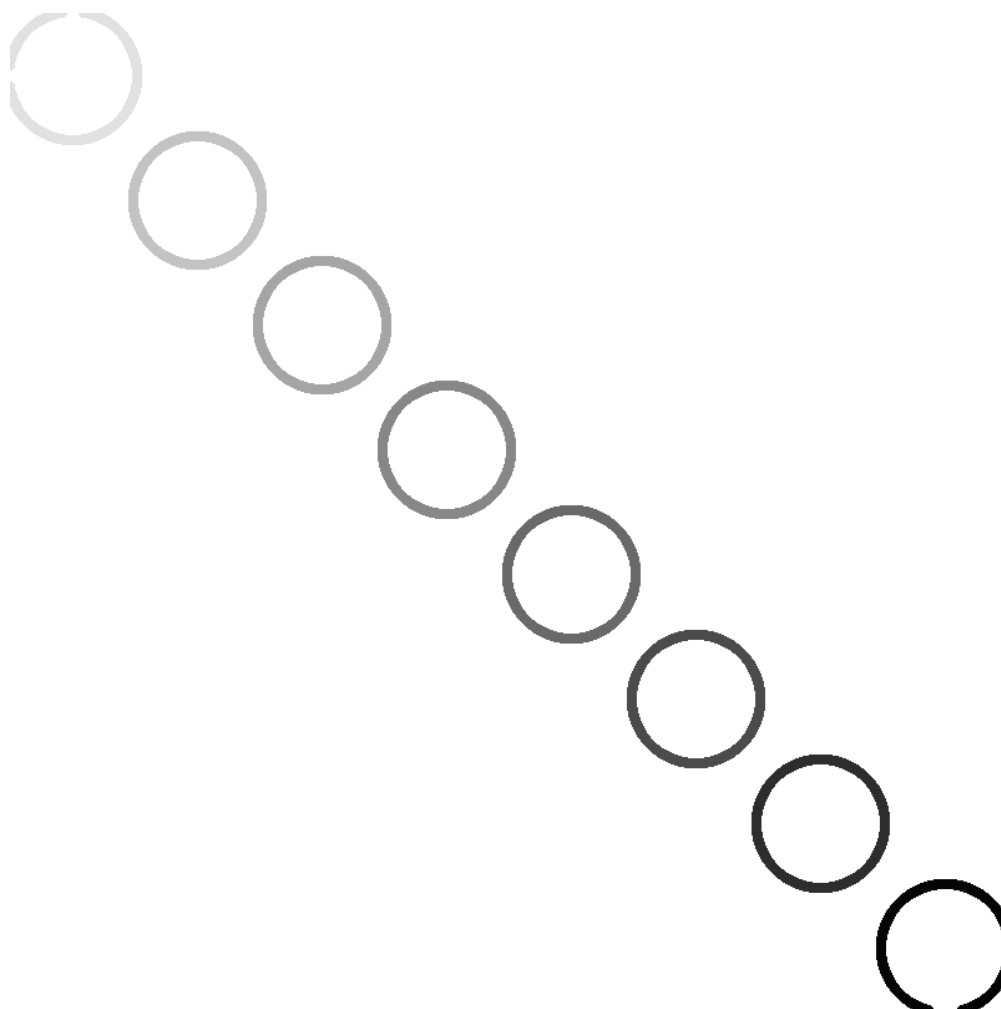


Figura 4.17: Resultado da aplicação de definição de Barat a imagem 4.2 utilizando os elementos estruturantes 4.16a e 4.16b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.

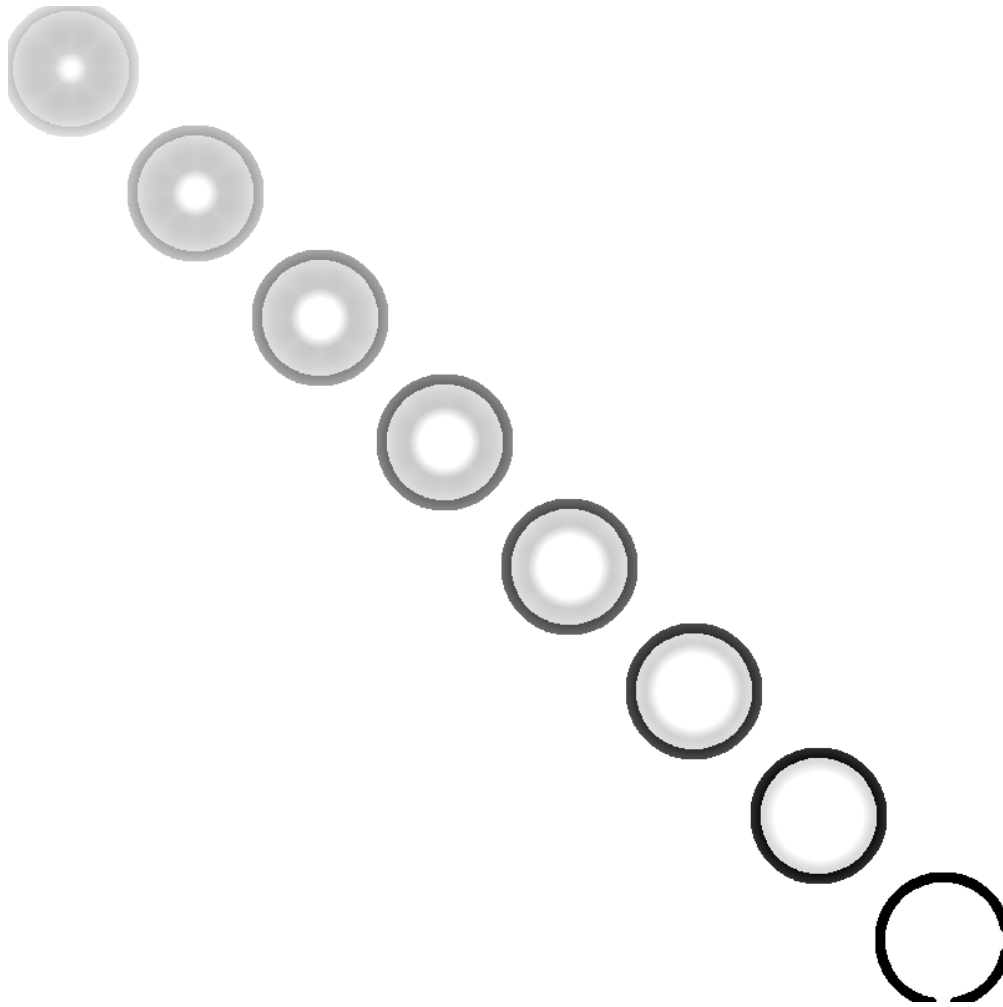
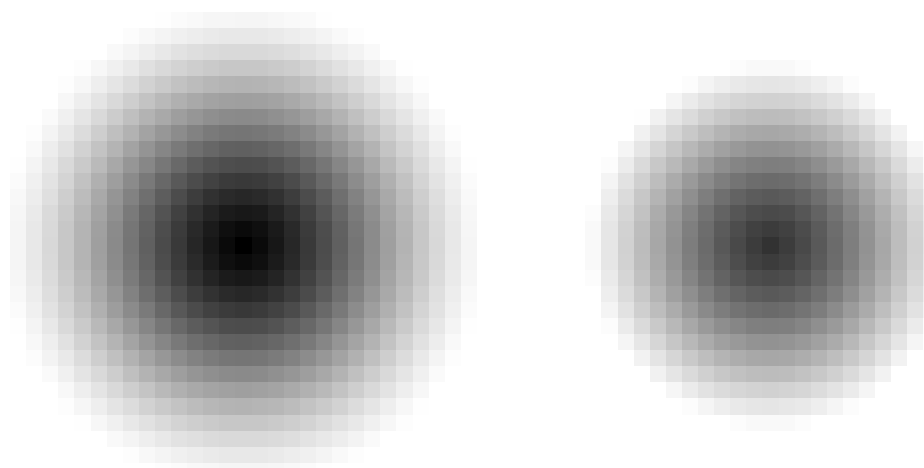


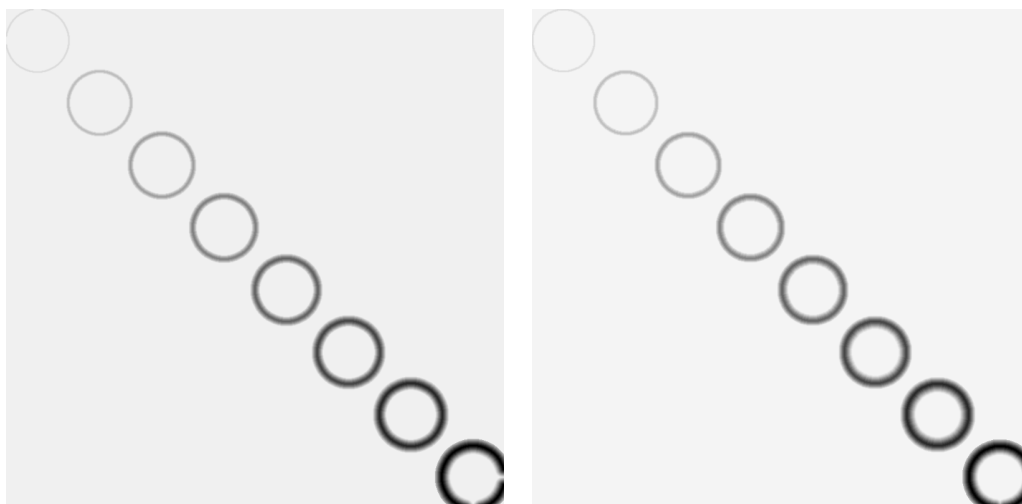
Figura 4.18: Resultado da aplicação de definição de Barat a imagem 4.3 utilizando os elementos estruturantes 4.16a e 4.16b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.



(a) Elemento estruturante non-flat referente ao foreground utilizado para detecção de discos na transformação de Barat, apresentado com valores invertidos.

(b) Elemento estruturante non-flat referente ao background utilizado para detecção de discos na transformação de Barat, apresentado com valores invertidos.

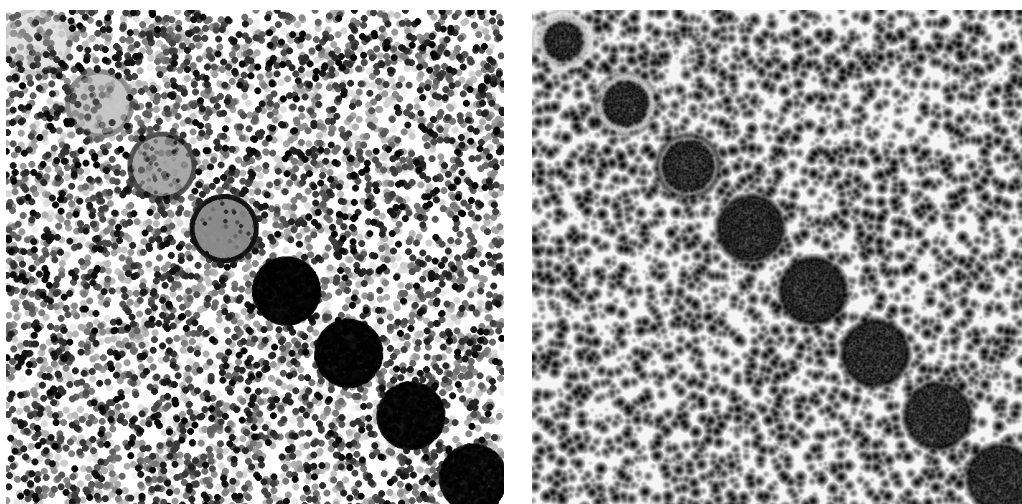
Figura 4.19: Elementos estruturantes non-flat utilizados na definição de Barat para o problema de detecção de discos.



(a) Resultado da aplicação de definição de Barat a imagem 4.2 utilizando os elementos estruturantes 4.19a e 4.19b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.

(b) Resultado da aplicação de definição de Barat a imagem 4.3 utilizando os elementos estruturantes 4.19a e 4.19b. Este resultado é apresentado com valores invertidos.

Figura 4.20: Resultados invertidos das aplicações da transformação de Barat ao problema de detecção de discos com valores constantes e não constantes, utilizando elementos estruturantes non-flat.



(a) Resultado da aplicação da transformação de Barat a imagem de entrada apresentada em 4.4 com os elementos estruturantes apresentados nas Figuras 4.16a e 4.16b.

(b) Resultado da aplicação da transformação de Barat a imagem de entrada apresentada em 4.5 com o elemento estruturante apresentado nas Figuras 4.19a e 4.19b.

Figura 4.21: Resultados das aplicações da transformação de Barat ao problema de detecção de discos com valores constantes e não constantes em imagens com presença de ruído Salt-and-Pepper.

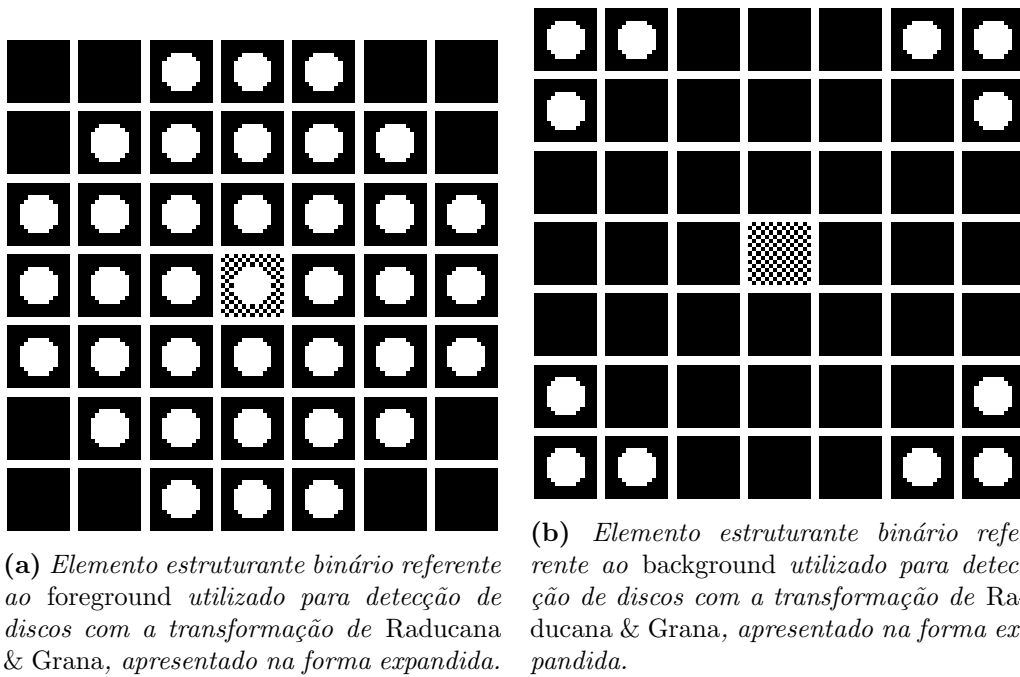


Figura 4.22: Elementos estruturantes binário utilizados para detecção de discos com a transformação de Raducana & Grana, apresentados na forma expandida.

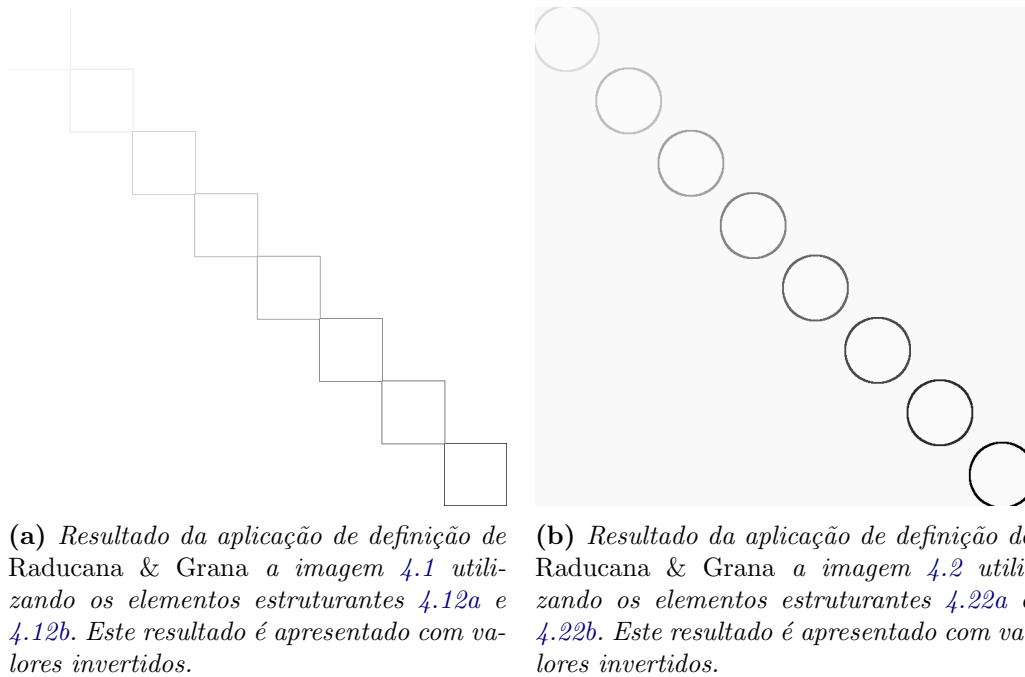


Figura 4.23: Resultados da aplicação da transformação de Raducana & Grana aos problemas de detecção de quadrados e discos, apresentados com valores invertidos.

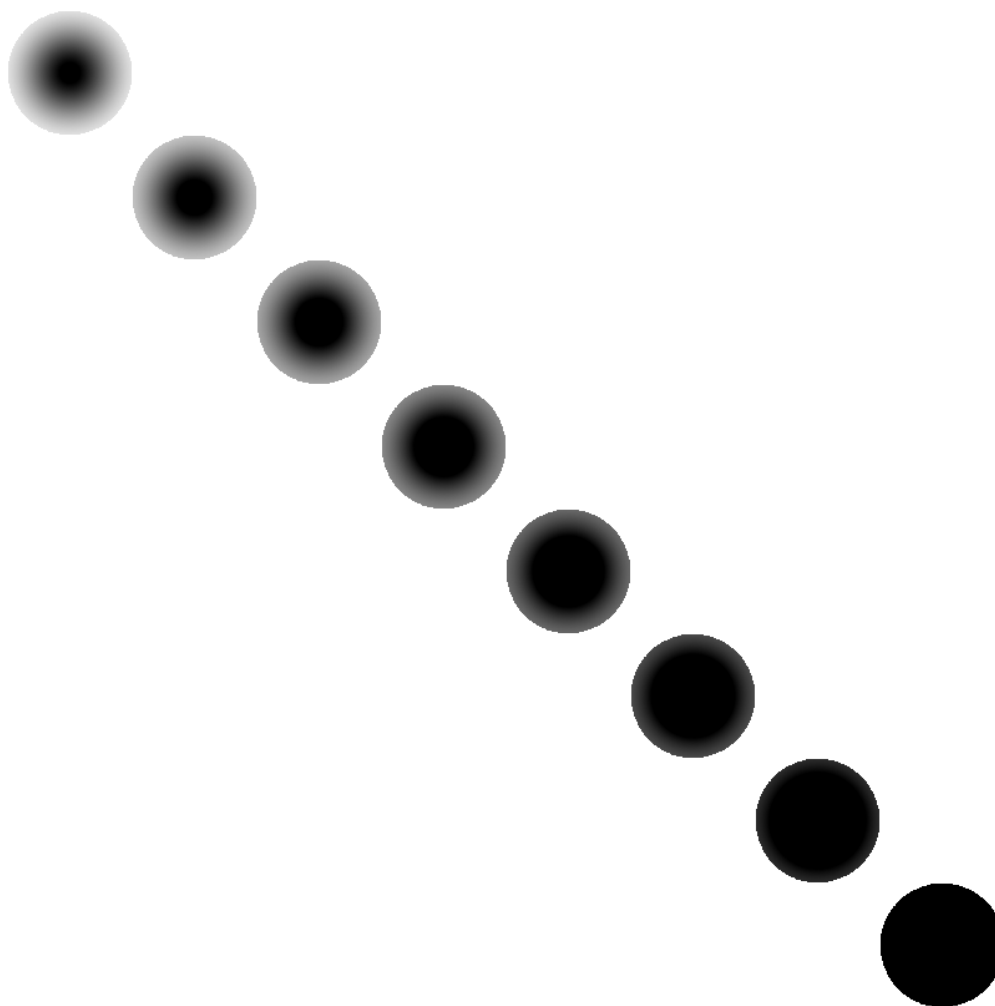
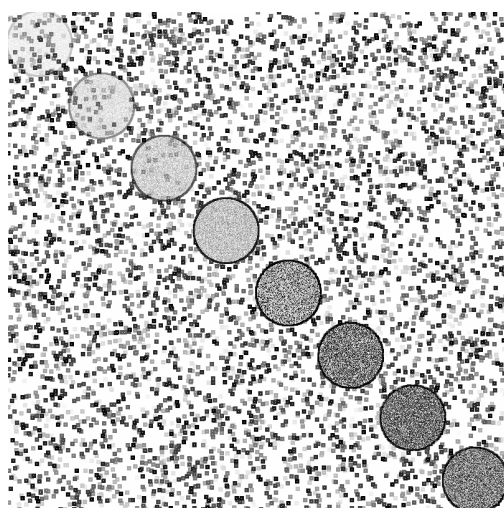
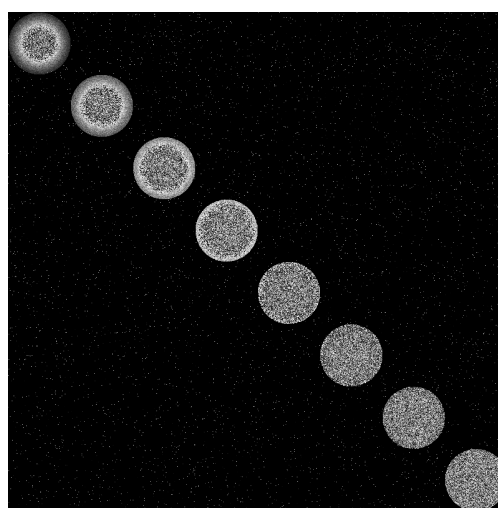


Figura 4.24: Resultado da aplicação de definição de Raducana & Grana a imagem 4.3 utilizando os elementos estruturantes 4.19a e 4.19b. Este resultado é apresentado invertido.



(a) Resultado da aplicação da transformação de Raducana & Grana a imagem de entrada apresentada em 4.4 com os elementos estruturantes apresentados nas Figuras 4.22a e 4.22b.



(b) Resultado da aplicação da transformação de Raducana & Grana a imagem de entrada apresentada em 4.5 com o elemento estruturante apresentados nas Figuras 4.22a e 4.22b.

Figura 4.25: Resultados da transformação de Raducana & Grana ao problema de detecção de discos em imagens com presença de ruídos do tipo Salt-and-Pepper.

Capítulo 5

Experimentos com problemas reais

Neste Capítulo são apresentados os resultados obtidos em experimentos para detecção de objetos de interesse em imagens reais usando algumas das definições da transformação *hit-or-miss* apresentadas neste texto. São discutidas as decisões de uso de cada definição para cada problema, bem como a motivação para definição dos elementos estruturantes.

5.1 *QR-Codes*

5.1.1 O problema

QR-Codes são códigos de resposta rápida (*Quick Response* - em inglês). Tratam-se de códigos de barras 2D capazes de armazenar uma quantidade de informação muito superior aos códigos de barras 1D normalmente encontrados. A Figura 5.1 apresenta um exemplo de *QR-Code* que armazena em seu conteúdo 100 caracteres alfanuméricos. O problema de localização destes códigos em imagens com enquadramento arbitrário já foi abordado utilizando diversas técnicas de processamento de imagens. Um estudo detalhado deste problema pode ser encontrado em [Belussi e Hirata \(2013\)](#). Até o nosso conhecimento, a abordagem de utilização da transformação *hit-or-miss*, tanto para o caso binário como para o caso níveis de cinza, nunca havia sido avaliada para a detecção destes códigos em imagens com enquadramento arbitrário.

Um *QR-Code* como o apresentado na Figura 5.1, possui como características fundamentais:

- o contraste entre seus elementos;
- uma grande quantidade de bordas;
- padrões que se repetem pela imagem.

No contexto da transformação *hit-or-miss*, para detectar com sucesso um *QR-code* em imagens de enquadramento arbitrário, essas características devem ser refletidas nos elementos estruturantes. Outro ponto a ser considerado no contexto de imagens de enquadramento arbitrário trata-se da possível variação de escala e rotação que um *QR-Code* pode apresentar dentro da imagem.

5.1.2 Abordagem adotada para detecção dos *QR-Codes*

Os elementos estruturantes a serem utilizados nas transformações *hit-or-miss* para localização dos *QR-Codes* em imagens de enquadramento arbitrário desenhados neste texto se baseiam no

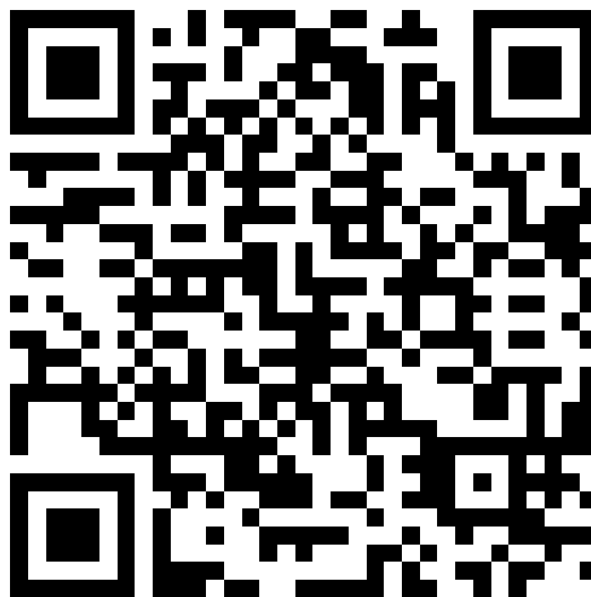


Figura 5.1: Exemplo de QR-Code armazenando 100 caracteres alfanuméricos.

padrão de tabuleiro comumente encontrado na região central dos códigos. A definição de transformação *hit-or-miss* níveis de cinza escolhida para esta tarefa foi a de [Soille \(2003\)](#).

Para resolução dos problemas de diferentes escalas, foram considerados pares de elementos estruturantes semelhantes, em três diferentes escalas, apresentados na Figura 5.2. O resultado das aplicações das transformações de *Soille* na imagem de entrada para cada um dos pares de elementos estruturantes foi então somado, resultando em uma imagem níveis de cinza. Por fim, o resultado obtido foi dilatado por um disco de raio 10 *pixels*, para facilitar a visualização e, por fim, os objetos resultantes que tocavam a borda foram removidos, assumindo aqui a premissa de que o *QR-Code* não se encontra na borda da imagem. Neste experimento, foi desconsiderado o problema de possível rotação do *QR-Code* com relação ao enquadramento da imagem.

5.1.3 Resultados

Neste experimento foram utilizadas imagens de entradas de fontes e dimensões distintos, variando de 480 por 640 *pixels* até 4000 por 3000 *pixels*, disponíveis livremente na Internet. A Figura 5.3 apresenta uma das imagens de entrada utilizadas neste experimento, já convertida para níveis de cinza, e para a qual serão apresentados todos os passos seguidos no procedimento desenvolvido. A região destacada na imagem refere-se à área da imagem que será representada nas imagens intermediárias que serão apresentadas para demonstração do método desenvolvido. A Figura 5.4 apresenta os resultados da aplicação da definição de *Soille* para os três pares de elementos estruturantes utilizados, na região destacada na Figura 5.3.

A soma destas três aplicações, dilatada por um disco de raio 10 é apresentada na Figura 5.4. Nesta Figura é possível verificar a presença de um ponto da imagem em que o casamento com os elementos estruturantes ocorreu somente para um dos três pares de elementos, no caso o maior, fazendo com que o ponto apresente menor valor na imagem de saída. Os outros pontos em que o casamento de padrão ocorreu para os três tamanhos de elemento estruturante tiveram um resultado que traz maior confiança para a real presença de um *QR-Code* na região. Observando o resultado

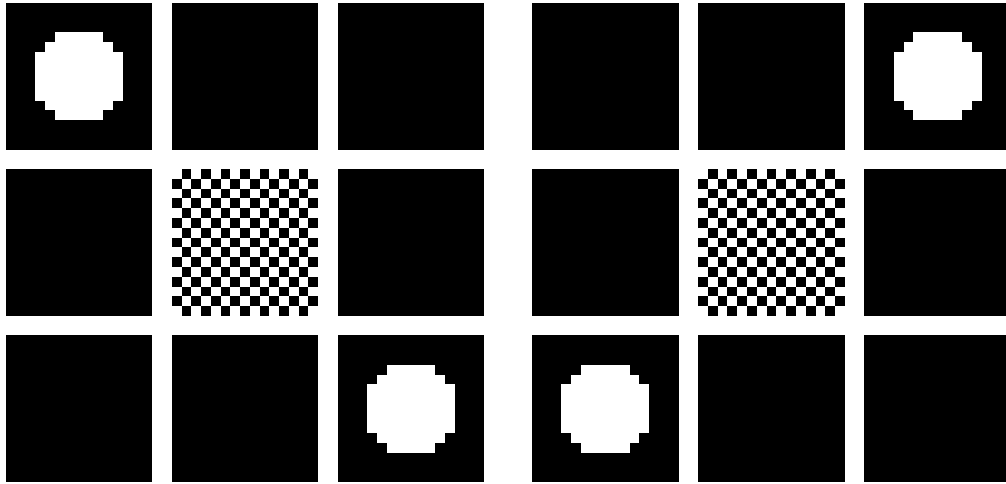
da metodologia desenvolvida na imagem resultante total apresentada na Figura 5.5, temos que a metodologia desenvolvida apresentou um resultado satisfatório de forma que a região com maior quantidade de pontos de maior valor na imagem estão presentes na região onde de fato existia um *QR-Code*.

As Figuras 5.6, 5.7, 5.8 apresentam outras imagens utilizadas no experimento e seu resultado. A Figura 5.9 apresenta uma imagem em que o *QR-Code* apresenta rotação com relação ao enquadramento da imagem e verifica-se então que, de fato, o método desenvolvido não foi capaz de localizar essas situações.

5.1.4 Avaliação

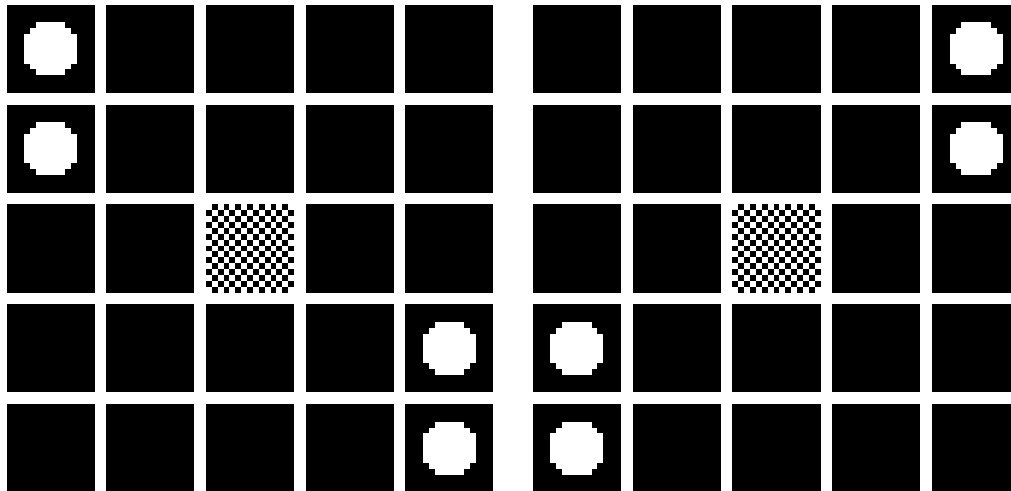
A utilização da transformação *hit-or-miss* de *Soille* com os elementos estruturantes apresentados na Figura 5.2 apresentou resultado satisfatório em imagens onde o *QR-Code* se apresenta sem rotação com relação ao ângulo de aquisição da imagem, conforme resultados apresentados nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8. Embora uma grande quantidade de ruído tenha se mantido em algumas imagens (por exemplo, Figura 5.8), este é facilmente removido com uma simples operação de *threshold*. A Figura 5.10 apresenta o resultado de uma transformação *threshold* simples, usando como limiar o maior valor presente na imagem, aplicado à imagem apresentada na Figura 5.5. A utilização de técnicas de *threshold* mais sofisticadas, como o método de *Otsu* ou *threshold* adaptativo podem apresentar resultados mais satisfatórios para permitir a utilização da saída do método aqui apresentado em procedimentos futuros.

A variação de valor gerado, acentuando a localização do *QR-Code* se dá pela sumarização feita dos resultados para múltiplas escalas. Enquanto ruídos são detectados por escalas menores, pontos reais dentro dos *QR-Codes* são detectados pelas várias escalas. Para imagens em que o *QR-Code* se apresenta rotacionado com relação ao ângulo de aquisição da imagem (por exemplo, Figura 5.9), não avaliado neste trabalho, uma solução similar pode ser aplicada, apenas considerando-se elementos estruturantes igualmente rotacionados. A região correspondente à região do *QR-Code* pode ser acentuada ainda mais considerando-se um conjunto maior de elementos estruturantes, similares aos usados aqui, considerando-se outros padrões comuns dentro do *QR-Code*. Isso permite balancear a confiança no resultado obtido e o tempo de processamento necessário.



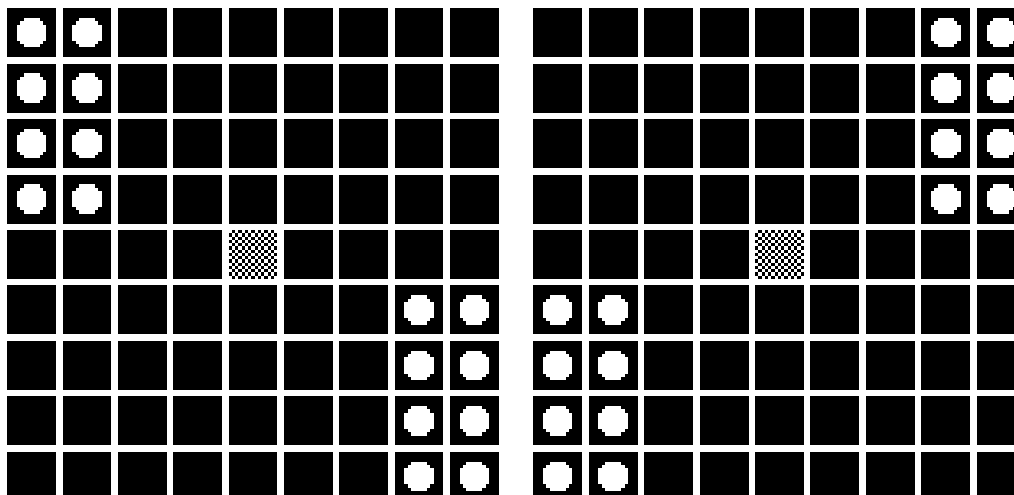
(a) Primeiro elemento estruturante referente ao foreground utilizado para detecção de padrão de tabuleiro em QR-Codes, apresentado na forma expandida.

(b) Primeiro elemento estruturante referente ao background utilizado para detecção de padrão de tabuleiro em QR-Codes, apresentado na forma expandida.



(c) Segundo elemento estruturante referente ao foreground utilizado para detecção de padrão de tabuleiro em QR-Codes, apresentado na forma expandida.

(d) Segundo elemento estruturante referente ao background utilizado para detecção de padrão de tabuleiro em QR-Codes, apresentado na forma expandida.



(e) Terceiro elemento estruturante referente ao foreground utilizado para detecção de padrão de tabuleiro em QR-Codes, apresentado na forma expandida.

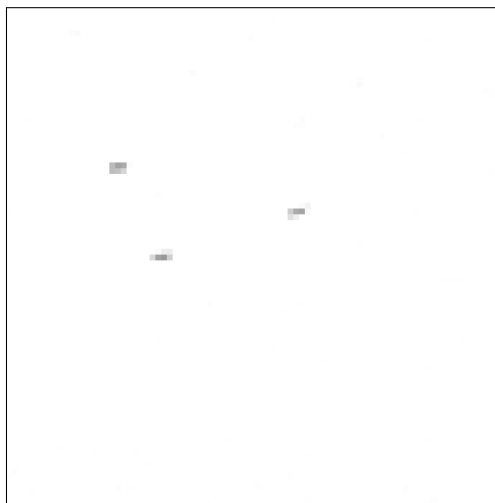
(f) Terceiro elemento estruturante referente ao background utilizado para detecção de padrão de tabuleiro em QR-Codes, apresentado na forma expandida.



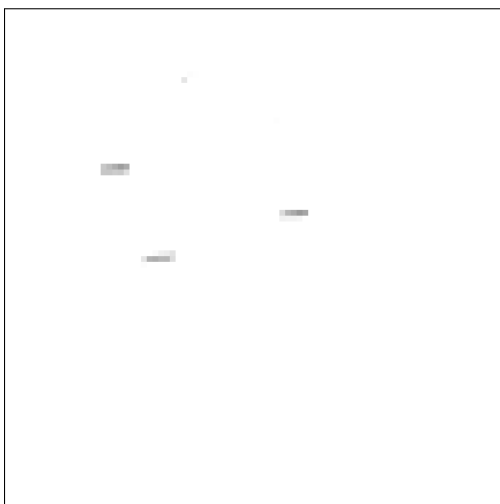
Figura 5.3: Imagem exemplo de entrada utilizada para demonstração dos passos do método desenvolvido para localização de QR-Code. A região destacada refere-se a região a ser destacada nas imagens intermediárias do método desenvolvido.



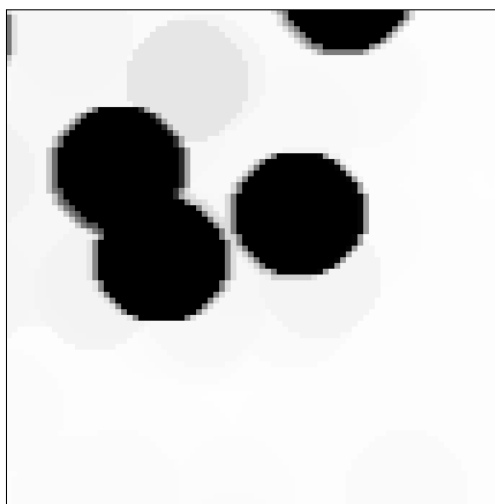
(a) Destaque do resultado da aplicação da transformação hit-or-miss de Soille a imagem de entrada apresentada na Figura 5.3 utilizando os elementos estruturantes apresentados nas Figuras 5.2(a) e 5.2(b), apresentado com valores invertidos.



(b) Destaque do resultado da aplicação da transformação hit-or-miss de Soille a imagem de entrada apresentada na Figura 5.3 utilizando os elementos estruturantes apresentados nas Figuras 5.2(c) e 5.2(d), apresentado com valores invertidos.



(c) Destaque do resultado da aplicação da transformação hit-or-miss de Soille a imagem de entrada apresentada na Figura 5.3 utilizando os elementos estruturantes apresentados nas Figuras 5.2(e) e 5.2(f), apresentado com valores invertidos.



(d) Destaque do resultado das somas das imagens apresentadas nas Figuras 5.4(a), 5.4(b) e 5.4(c) seguidas de uma dilatação por um disco de raio 10, apresentado com valores invertidos.

Figura 5.4: Detalhes dos passos utilizados na solução adotada para localização de QR-Code em imagens com enquadramento arbitrário.

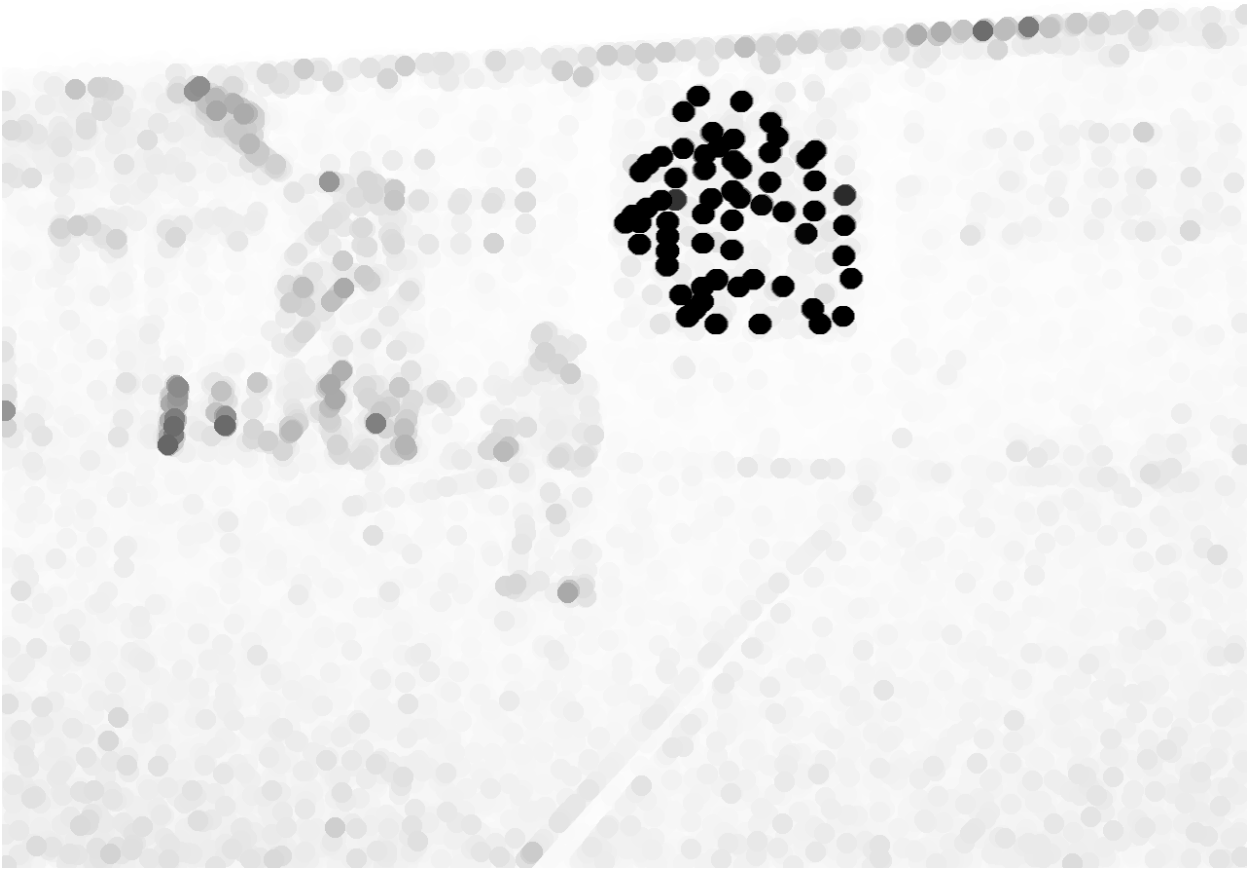
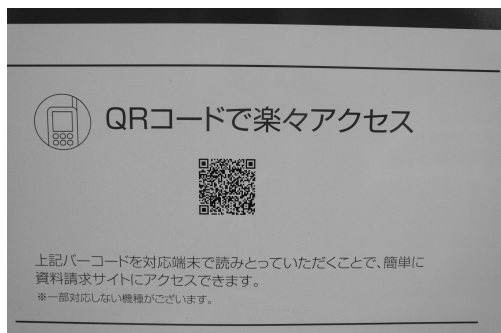


Figura 5.5: Resultado da aplicação da metodologia desenvolvida para localização de QR-Code aplicada a imagem apresentada na Figura 5.3.



(a) Imagem original.



(b) Imagem resultado.

Figura 5.6: Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos.

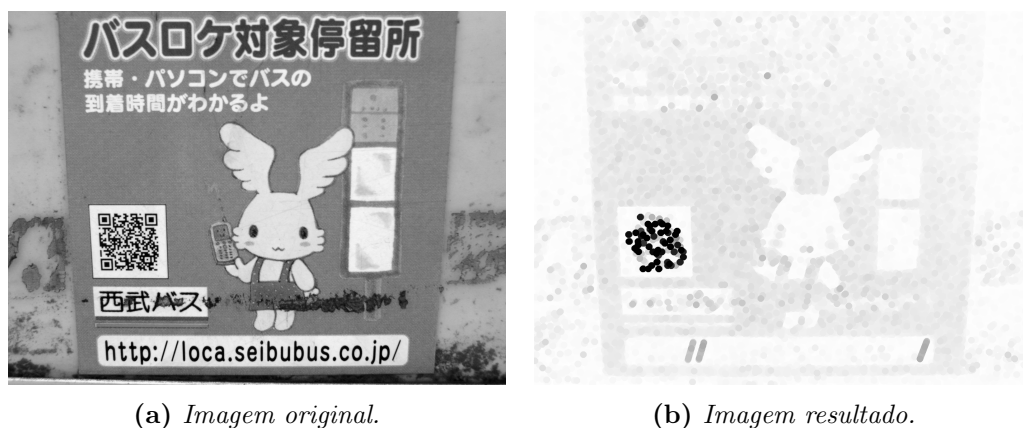


Figura 5.7: Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos.

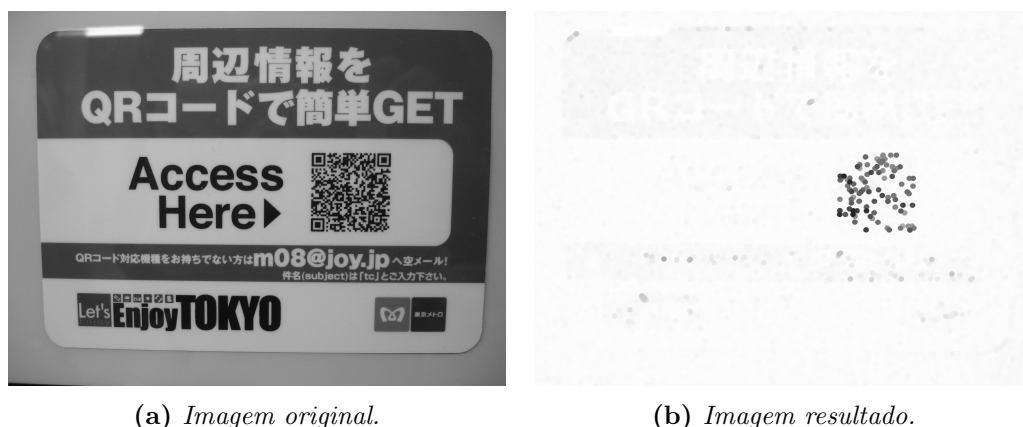


Figura 5.8: Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos.

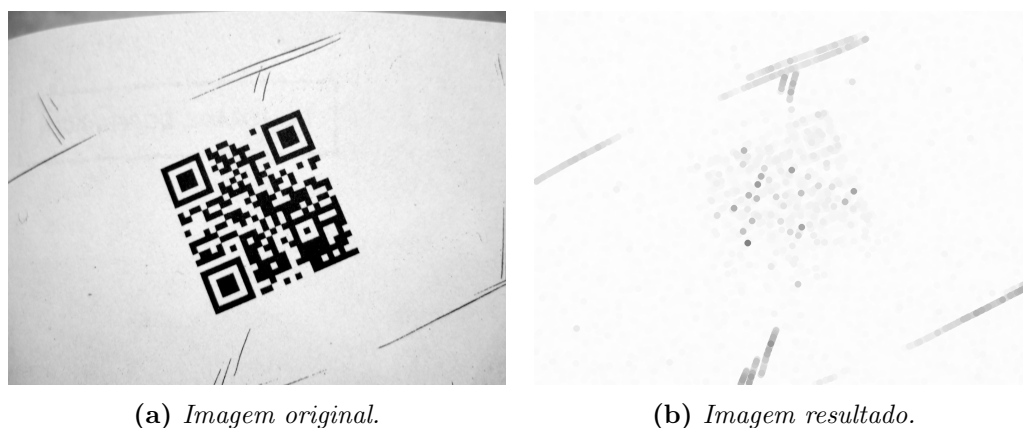


Figura 5.9: Imagem utilizada no experimento e o resultado da aplicação do método desenvolvido, com valores invertidos.

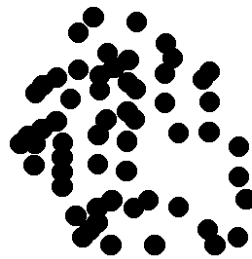


Figura 5.10: Resultado da aplicação de threshold usando como limitante o maior valor presente na imagem, aplicado a imagem apresentada na Figura 5.5.

Capítulo 6

Conclusões

Avaliando-se todas as propostas de definição para a transformação *hit-or-miss* níveis de cinza apresentadas neste texto temos que, embora distintas, todas surgem com um mesmo propósito e ideia fundamental: a extensão da definição para tons de cinza deve, de alguma forma, medir a maneira que a imagem se comporta entre elementos estruturantes e ter como saída um valor que quantifique este comportamento. As propostas de unificação aqui apresentadas são formulações e provas matemáticas de que todas as propostas de extensão da transformação existentes seguem este conceito. Enquanto [Barat et al. \(2010\)](#) utilizam o conceito de prova mecânica para unificar as diferentes definições, [Naegel et al. \(2007\)](#) fazem uso do operador intervalo e suas propriedades no contexto de reticulados.

As duas propostas de unificação, embora com apresentações e provas matemáticas bastante distintas, são no fundo, semelhantes quando analisadas na ótica das duas etapas da unificação apresentadas por [Naegel et al. \(2007\)](#) (*fitting* e *valuation*). De fato, o nome dado às etapas propostas vai ao encontro de a uma afirmação de [Soille \(2003\)](#) em seu estudo sobre HMT: um nome muito mais apropriado à transformação seria “*fit-and-miss*”.

Existem na literatura diversas outras definições para HMT tons de cinza que fazem uso ou não das propostas de unificação aqui apresentadas. Entre as propostas mais recentes destaca-se a utilização de lógica *fuzzy* para determinação do conceito de *hit* em imagens níveis de cinza e também o conceito de porcentagem de ocupação de um elemento estruturante na imagem [Dimitrova e Popov \(2008\)](#); [Intajag et al. \(2006\)](#); [Murray e Marshall \(2011\)](#); [Perret et al. \(2009\)](#). Um ponto importante a se destacar é que todos os trabalhos comentam a dificuldade de se construir corretamente os parâmetros adequados para uso da transformação *hit-or-miss*, sejam ele a forma e valores dos elementos estruturantes, valores de *threshold*, utilização na presença de ruídos, etc.

Entre os pontos principais deste trabalho destaca-se a compilação de diversas extensões da transformação *hit-or-miss* existentes para o caso níveis de cinza e também a comparação de duas propostas distintas de unificação existentes. Foi também feita uma implementação de algumas das definições e as mesmas estão disponibilizadas para consulta futura. Foram apresentados exemplos de utilização das definições em imagens artificiais com e sem a presença de ruídos. Para imagens reais, foi estudado e proposta solução para a detecção de *QR-Code* em imagens com enquadramento arbitrário, fazendo uso da combinação de resultados da transformação aplicada a elementos estruturantes com diferentes escalas.

Como trabalhos futuros na área, destaca-se a possibilidade de estudo das diferentes definições já existentes da transformação *hit-or-miss* para imagens com múltiplas bandas (coloridas ou médi-

cas). As implementações disponibilizadas também permitem uma possível continuação do trabalho criando métodos de avaliação automatizada para definição dos elementos estruturantes através de aprendizado de máquina, semelhante ao apresentado em (Murray e Marshall, 2011).

Referências Bibliográficas

- Banon e Barrera (1991)** G. J. F. Banon e J. Barrera. Minimal Representations for Translation-Invariant Set Mappings by Mathematical Morphology. *SIAM J. Applied Mathematics*, 51(6): 1782–1798. Citado na pág. 1
- Banon e Barrera (1993)** G. J. F. Banon e J. Barrera. Decomposition of Mappings Between Complete Lattices by Mathematical Morphology, Part I. General lattices. *Signal Processing*, 30(3): 299 – 327. ISSN 0165-1684. doi: 10.1016/0165-1684(93)90015-3. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165168493900153>. Citado na pág. 3, 20
- Banon e Faria (1997)** G.J.F. Banon e S.D. Faria. Morphological approach for template matching. Em *Proceedings of the X Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, páginas 171 –178. doi: 10.1109/SIGRA.1997.625169. Citado na pág. xi, 1, 21, 22, 23
- Barat et al. (2003)** C. Barat, C. Ducottet e M. Jourlin. Line pattern segmentation using morphological probing. Em *Proceedings of the 3rd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, volume 1, páginas 417–422 Vol.1. doi: 10.1109/ISPA.2003.1296933. Citado na pág. xii, 1, 25, 26, 27, 30, 31
- Barat et al. (2010)** C. Barat, C. Ducottet e M. Jourlin. Virtual double-sided image probing: A unifying framework for non-linear grayscale pattern matching. *Pattern Recogn.*, 43(10):3433–3447. ISSN 0031-3203. doi: 10.1016/j.patcog.2010.04.020. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.patcog.2010.04.020>. Citado na pág. xi, xii, 1, 11, 12, 13, 19, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 31, 41, 59
- Barrera et al. (1997)** J. Barrera, E. R. Dougherty e N. S. Tomita. Automatic Programming of Binary Morphological Machines by Design of Statistically Optimal Operators in the Context of Computational Learning Theory. *Electronic Imaging*, 6(1):54–67. Citado na pág. 1
- Barrera et al. (2000)** J. Barrera, R. Terada, R. Hirata Jr e N. S. T. Hirata. Automatic Programming of Morphological Machines by PAC Learning. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2):229–258. Citado na pág. 1
- Belussi e Hirata (2013)** Luiz F. F. Belussi e Nina S. T. Hirata. Fast Component-Based QR Code Detection in Arbitrarily Acquired Images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 45(3):277–292. Citado na pág. 49
- Crimmins e Brown (1985)** T.R. Crimmins e W.M. Brown. Image algebra and automatic shape recognition. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-21(1):60 –69. ISSN 0018-9251. doi: 10.1109/TAES.1985.310539. Citado na pág. xi, 1, 16, 17, 18
- Dellamonica Jr. et al. (2007)** D. Dellamonica Jr., P. J. S. Silva, C. Humes Jr., N. S. T. Hirata e J. Barrera. An Exact Algorithm for Optimal MAE Stack Filter Design. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(2):453–462. Citado na pág. 2
- Dimitrova e Popov (2008)** D. Dimitrova e A. Popov. Finding face features in color images using fuzzy hit-or-miss transform. Em *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Fuzzy Systems*, FS’08, páginas 79–84, Stevens Point, Wisconsin, USA. World Scientific and

- Engineering Academy and Society (WSEAS). ISBN 978-960-6766-57-2. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1416056.1416069>. Citado na pág. 59
- Haralick et al. (1987)** R. M. Haralick, S. R. Sternberg e X. Zhuang. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 9(4):532–550. Citado na pág. 4, 8
- Heijmans (1994)** H. J. A. M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, Boston. Citado na pág. 1
- Hirata et al. (2007)** N. S. T. Hirata, R. Hirata Jr. e J. Barrera. Basis computation algorithms. Em *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing (Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology)*, páginas 15–26. Citado na pág. 2
- Hirata (2009)** Nina S. T. Hirata. Multilevel training of binary morphological operators. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 31(4):707–720. Citado na pág. 1
- Intajag et al. (2006)** S. Intajag, K. Paithoonwatanakij e A.P. Cracknell. Iterative satellite image segmentation by fuzzy hit-or-miss and homogeneity index. *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings -*, 153(2):206 – 214. ISSN 1350-245X. doi: 10.1049/ip-vis:20045211. Citado na pág. 59
- Khosravi e Schafer (1996)** M. Khosravi e R. W. Schafer. Template matching based on a grayscale hit-or-miss transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6):1060–1066. ISSN 1057-7149. doi: 10.1109/83.503921. Citado na pág. xi, 1, 19, 20, 26, 34, 37
- Maragos e Schafer (1987a)** P. Maragos e R. W. Schafer. Morphological Filters: Part I: Their Set-Theoretic Analysis and Relations to Linear Shift-Invariant Filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-35:1153–1169. Citado na pág. 10, 18
- Maragos e Schafer (1987b)** P. Maragos e R. W. Schafer. Morphological Filters: Part II: Their Relations to Median, Order Statistic, and Stack-Filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-35:1170–1184. Corrections in Vol. ASSP-37, April 1989, p. 597. Citado na pág. 10, 18
- Matheron e Serra (2002)** G. Matheron e J. Serra. The birth of mathematical morphology. Em *Proceedings*, páginas 1–16, Sydney. CSIRO Publishing. Citado na pág. xi, 1, 3, 4, 15, 16, 19
- Murray e Marshall (2011)** P. Murray e S. Marshall. A new design tool for feature extraction in noisy images based on grayscale hit-or-miss transforms. *IEEE Trans. Img. Proc.*, 20(7):1938–1948. ISSN 1057-7149. doi: 10.1109/TIP.2010.2103952. URL <http://dx.doi.org/10.1109/TIP.2010.2103952>. Citado na pág. 1, 59, 60
- Naegel et al. (2007)** B. Naegel, N. Passat e C. Ronse. Grey-level Hit-or-Miss Transforms-Part I: Unified Theory. *Pattern Recogn.*, 40(2):635–647. ISSN 0031-3203. doi: 10.1016/j.patcog.2006.06.004. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.patcog.2006.06.004>. Citado na pág. xii, 1, 20, 29, 31, 33, 59
- Odone et al. (2001)** F. Odone, E. Trucco e A. Verri. General purpose matching of grey level arbitrary images. Em *Proceedings of the 4th International Workshop on Visual Form, IWVF-4*, páginas 573–582, London, UK, UK. Springer-Verlag. ISBN 3-540-42120-3. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=645651.665187>. Citado na pág. 1, 27
- Perret et al. (2009)** B. Perret, S. Lefèvre e Ch. Collet. A robust hit-or-miss transform for template matching applied to very noisy astronomical images. *Pattern Recogn.*, 42(11):2470–2480. ISSN 0031-3203. doi: 10.1016/j.patcog.2009.02.013. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.patcog.2009.02.013>. Citado na pág. 1, 59

- Raducanu e Grana (2000)** B. Raducanu e M. Grana. A grayscale hit-or-miss transform based on level sets. Em *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume 2, páginas 931–933 vol.2. doi: 10.1109/ICIP.2000.899869. Citado na pág. 1, 21, 42
- Ronse (1996)** C. Ronse. A Lattice-Theoretical Morphological View on Template Extraction in Images. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 7:273–295. doi: 10.1006/jvci.1996.0024. Citado na pág. 1, 20, 30
- Serra (1983)** J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA. ISBN 0126372403. Citado na pág. 1, 4, 5, 16
- Soille (2003)** P. Soille. *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2 ed. ISBN 3540429883. Citado na pág. xii, 1, 3, 4, 5, 6, 13, 16, 22, 24, 25, 30, 31, 39, 41, 50, 59
- Weeks et al. (2004)** A. R. Weeks, L. J. Sartor e Samuel S. R. New grayscale hit-miss operator. *J. Electronic Imaging*, 13(1):169–174. Citado na pág. 1
- Zhao e Daut (1991)** D. Zhao e D. G. Daut. Morphological hit-or-miss transformation for shape recognition. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2(3):230 – 243. ISSN 1047-3203. doi: 10.1016/1047-3203(91)90025-B. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/104732039190025B>. Citado na pág. 16