

Protocolos para jogos de Steiner

Lucas Mendes Marques Gonçalves

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Ramos Soares

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, setembro de 2016

Protocolos para jogos de Steiner

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo
candidato, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Resumo

Gonçalves, L. M. M. **Protocolos para jogos de Steiner**. 2016. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Nesse trabalho, analisamos jogos (no sentido de teoria dos jogos) baseados no problema da floresta de Steiner. Exibimos jogos em que a interação entre jogadores tentando minimizar seus próprios custos pode aumentar o custo global. Estudamos estratégias para minorar esse problema: como construir jogos em que os equilíbrios (situações em que nenhum jogador pode unilateralmente diminuir seu custo) são próximos do ótimo (têm custo próximo do custo de uma floresta de Steiner).

Palavras-chave: teoria dos jogos, construção de redes, floresta de Steiner, preço da anarquia, valor de Shapley ponderado.

Abstract

Gonçalves, L. M. M. **Protocols for Steiner games**. 2016. Dissertation - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

In this work, we study games (in the game-theoretical sense) based on the Steiner forest problem. In the games we exhibit, the interaction between players seeking to minimize individual costs can increase the global cost. We study strategies to cope with this problem: how to construct games in which equilibria (situations in which no player can unilaterally reduce his cost) are near an optimal solution (have cost similar to the cost of a Steiner forest).

Keywords: game theory, network formation games, Steiner forest, price of anarchy, weighted Shapley value.

Sumário

Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
1.1 Primeiro exemplo	2
1.2 Conceitos básicos de teoria dos jogos	2
1.2.1 Equilíbrio	3
1.3 Jogos de Steiner	4
1.3.1 Preço da anarquia e da estabilidade	5
1.3.2 Caso orientado	6
1.4 Outras definições	6
2 Exemplos de Protocolos	7
2.1 Protocolo ordenado	7
2.1.1 Preço da anarquia	8
2.1.2 Protocolo ordenado em multitransmissões	14
2.1.3 Protocolo de Prim	18
2.2 Protocolo de Shapley	20
2.3 O caso orientado	23
2.4 Dinâmica de melhor resposta	25
3 O Espaço dos Protocolos	27
3.1 Protocolos admissíveis e uniformes	27
3.1.1 Exemplos	28
3.2 Protocolos lineares, positivos e baseados em potenciais	28
3.2.1 Protocolos lineares	29
3.2.2 Protocolos positivos	30
3.2.3 Protocolos baseados em potenciais	31
3.2.4 Exemplos de protocolos baseados em potenciais	34
3.3 Caracterização dos protocolos uniformes lineares	36
3.3.1 O caso orientado	51
3.3.2 Valor de Shapley ponderado	52

4 Limitantes inferiores	53
4.1 Preço da anarquia para protocolos admissíveis	54
4.2 Multitransmissões e protocolos uniformes	58
4.3 Protocolos uniformes para digrafos	64
5 Abordagens alternativas	67
5.1 Preço da anarquia atingível	67
5.2 Jogo de Steiner com propaganda	68
5.3 Jogo com ofertas	68
6 Considerações finais	73
6.1 Pesquisas futuras	74
A Detalhes da demonstração do lema 3.31	77
A.1 Demonstração da igualdade 3.35	77
A.2 Demonstração da igualdade 3.36	77
Referências Bibliográficas	79
Índice Remissivo	81

Lista de Figuras

1.1	Primeiro exemplo	2
2.1	Grafo com preço da anarquia alto para o protocolo de Prim	20
2.2	Grafo com preço da anarquia alto para o protocolo de Shapley	23
2.3	Exemplo com preço da anarquia alto para grafos orientados	24
3.1	Construção para o lema 3.13	38
3.2	Construção para o lema 3.19	41
3.3	Substituindo arestas por arcos	51
3.4	Construção do lema 3.13 para grafos orientados	52
4.1	Construção para custos próximos	62
4.2	Construção para custos distantes	63
4.3	Exemplo com preço da estabilidade para multitransmissões orientadas alto	65

Capítulo 1

Introdução

O problema de Steiner (ou problema da floresta de Steiner) é um problema de otimização de grande importância. Dados um grafo com pesos nas arestas e alguns conjuntos de vértices desse grafo, estamos interessados em florestas que conectam, para cada conjunto, todos os seus vértices. O problema de Steiner é o problema de achar qual tal floresta é a de custo mínimo.

No contexto de redes de computadores (como a internet) com milhões de computadores conectados, o problema de atender necessidades de conectividade com custo mínimo é de óbvia importância.

Nesta dissertação estudamos o problema de Steiner, com uma mudança importante. Existem *jogadores* com a incumbência de conectar os vértices dos conjuntos. Cada jogador fica responsável por escolher a forma de conexão de um conjunto de vértices. É fixado um *protocolo* que determina como cada jogador paga pelo custo de conexão de seus vértices. Estudamos o que acontece quando esses jogadores buscam não minimizar o custo global, mas seus custos individuais.

A pergunta principal do trabalho é: quanto é possível minimizar a soma dos custos que cada jogador paga, se temos a liberdade de escolher o protocolo? Especificamente, estudamos a razão entre a soma dos custos dos jogadores e o ótimo do problema de Steiner.

O problema de projetar jogos para obter resultados desejáveis é um problema amplo, de grande interesse, dentre os estudados na teoria algorítmica dos jogos. Nossa abordagem nessa dissertação segue um texto de Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10]. Para uma introdução mais geral aos problemas de teoria algorítmica dos jogos, sugerimos ao leitor o livro de Nisan, Roughgarden, Tardos e Vazirani [NRTV07].

O trabalho está organizado como segue. Nessa introdução, apresentamos exemplos simples para ilustrar nosso intuito, e definimos os conceitos fundamentais (jogo, equilíbrio, problema de Steiner, protocolo, jogo de Steiner, preço da anarquia, preço da estabilidade). No capítulo 2, apresentamos dois exemplos concretos de protocolo (o protocolo ordenado e o protocolo de Shapley) e estudamos sua “qualidade” (preços da anarquia e estabilidade). No capítulo 3, definimos duas classes de protocolos que têm características desejáveis (os protocolos uniformes e os protocolos admissíveis) e estudamos em detalhes uma delas (a classe dos protocolos uniformes). No capítulo 4, estudamos a qualidade dessas classes gerais (por exemplo, achamos limitante inferior para o preço da anarquia de todos os protocolos admissíveis). No capítulo 5, discutimos brevemente abordagens diferentes, maneiras de gerar jogos que não se encaixam precisamente no conceito de protocolos.

A seguir, tentamos construir intuição a respeito do assunto do trabalho.

1.1 Primeiro exemplo

Suponha que temos 10 jogadores que desejam transmitir informações de um ponto S a um ponto T , por meio de cabos de alta capacidade. A variável em estudo é o custo de *instalação* dos cabos, assumimos que o custo de manutenção é desprezível e que, uma vez que os cabos estejam instalados, cada cabo atenderá simultaneamente às necessidades de todos os jogadores que tenham pago pela sua instalação.

Suponha que cada jogador pode escolher contribuir para um de dois cabos entre S e T : um cabo de custo 1, e outro de custo 10, como na figura 1.1.

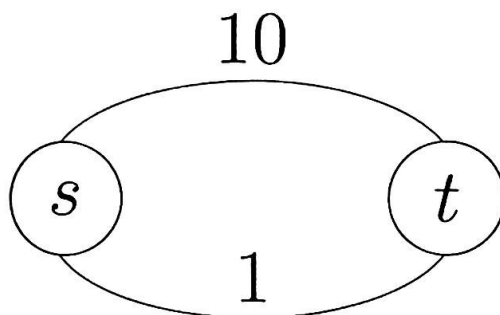


Figura 1.1: *Primeiro exemplo*

A maneira natural de dividir os custos (o custo de cada cabo ser dividido igualmente entre todos os jogadores que o usam) tem um efeito curioso: se todos os jogadores optarem pelo cabo de custo 10, nenhum jogador tem a ganhar se decidir unilateralmente optar pelo cabo de custo 1. Os jogadores podem pagar 10 vezes mais agindo “cada um por si” do que pagariam se buscassem agir de forma unificada.

Por outro lado, se denotamos os jogadores por números de 1 a 10 e, arbitrariamente, decidimos que o jogador 1 paga todos os custos dos cabos que usa, jogadores que tentam minimizar seus custos escolherão necessariamente o cabo de custo 1. Os jogadores pagam exatamente a mesma quantidade que pagariam agindo de forma unificada, mesmo quando cada um tenta minimizar seu próprio custo.

Mudando as regras do jogo, pudemos obter resultados socialmente mais desejáveis, mais próximos do que seria possível atingir ignorando os interesses individuais de cada jogador.

Esse é essencialmente o problema que desejamos estudar. Mas, em vez de buscar regras específicas para cada grafo, estudamos o problema de forma mais geral, o problema de como uma mesma regra se comporta em grafos diversos.

1.2 Conceitos básicos de teoria dos jogos

Um *jogo* é uma tripla (J, M, C) , onde:

- $J = \{1, 2, \dots, n\}$ é um conjunto de n inteiros consecutivos. Cada $i \in J$ é chamado de *jogador*,
- $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ é uma sequência de n conjuntos, um conjunto para cada jogador; cada M_i é chamado de conjunto de *estratégias* do jogador i e
- $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ é uma sequência de n funções, chamadas de *funções de custo*, uma para cada jogador. Cada c_i é da forma

$$c_i : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow R.$$

Intuitivamente, cada função c_i corresponde ao custo que o jogador i incorre quando cada jogador escolhe uma de suas possíveis estratégias.¹

Denotamos por \mathcal{M} o produto $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$. Um elemento $m \in \mathcal{M}$ é chamado de *configuração*. Cada configuração fixa uma estratégia para cada jogador.

Exemplificamos aqui a definição.

Exemplo 1.1 (Jogo dos escritórios). *Dois jogadores 1 e 2 desejam realizar um trabalho em conjunto. Para isso, desejam se encontrar em um escritório. Há duas opções: e_1 , o escritório de 1 e e_2 , o escritório de 2. Modelando essa situação como um jogo, temos:*

- $J = \{1, 2\}$;
- $M = (M_1, M_2)$ e $M_1 = M_2 = \{e_1, e_2\}$;
- $\mathcal{M} = \{(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_1), (e_2, e_2)\}$.

Nessa modelagem, cada jogador decide a qual escritório ir. Assim, as configurações (e_1, e_1) e (e_2, e_2) representam as duas pessoas indo ao mesmo escritório, enquanto as configurações (e_1, e_2) e (e_2, e_1) representam as pessoas indo a escritórios diferentes.

As funções de custos serão as seguintes:

- $c_1(e_1, e_1) = 0$, $c_2(e_1, e_1) = 1$, i.e., o jogador 2 incorre em custo 1 se tiver que ir ao escritório do jogador 1;
- $c_1(e_2, e_2) = 1$, $c_2(e_2, e_2) = 0$, i.e., o jogador 1 incorre em custo 1 se tiver que ir ao escritório do jogador 2;
- $c_1(e_1, e_2) = 10$, $c_2(e_1, e_2) = 10$, i.e., os dois jogadores incorrem custo 10 se ficarem cada um no seu escritório, perdendo um dia de trabalho;
- $c_1(e_2, e_1) = 11$, $c_2(e_2, e_1) = 11$, i.e., os dois jogadores incorrem custo 11 se forem cada um ao escritório do outro. Esse valor representa o custo do deslocamento, adicionado ao custo do dia perdido.

1.2.1 Equilíbrio

Denotamos por (m, e, i) a configuração obtida a partir da configuração m trocando sua i -ésima coordenada por uma estratégia $e \in M_i$. Ou seja, a tripla (m, e, i) denota a configuração em que apenas i muda sua estratégia para e , enquanto os demais jogadores mantêm sua estratégia como em m .

Dada uma configuração m , uma estratégia $e \in M_i$ é dita uma *melhor resposta* de i para m se, para cada estratégia $e' \in M_i$, temos $c_i(m, e, i) \leq c_i(m, e', i)$. Isto é, fixando-se as estratégias dos demais jogadores, uma melhor resposta de i é uma estratégia que minimiza o valor de c_i .

Uma configuração m é dita um *equilíbrio de estratégias puras* quando, para cada jogador i , a estratégia de i em m é uma melhor resposta de i para m .

No exemplo do *Jogo dos escritórios*, temos dois equilíbrios de estratégias puras: $a = (e_1, e_1)$ e $b = (e_2, e_2)$. Podemos verificar esse fato para a , por exemplo. Para isso, basta mostrar:

¹É mais usual definir uma função p_i , que denota o “payoff”, ou ganho, de um jogador, e denotar custos como ganhos negativos. Nessa dissertação, porém, trataremos apenas de custos. O problema que vamos estudar é um em que os jogadores desejam conectar dois vértices de um grafo, pagando o menor custo possível pelas arestas que usam. A formulação com payoffs definiria exatamente os mesmos problemas, com exatamente os mesmos resultados, mas traria o incômodo de lidar frequentemente com números negativos.

- que e_1 é uma melhor resposta do jogador 1 para a , o que de fato é verdade: seu custo aumentaria se ele escolhesse a estratégia e_2 ;
- que e_1 é uma melhor resposta do jogador 2 para a , o que também é verdade: seu custo aumentaria se ele escolhesse a estratégia e_2 .

Já a configuração (e_1, e_2) não é um equilíbrio. A estratégia do jogador 1 não é uma melhor resposta (ele poderia reduzir seu custo escolhendo e_2) e a estratégia do jogador 2 não é uma melhor resposta (ele poderia reduzir o seu custo escolhendo e_1).

Em teoria dos jogos, há diferentes conceitos de “solução” de um jogo, chamados de equilíbrio. Dois dos mais importantes são o equilíbrio de estratégias puras já citado, o equilíbrio de estratégias mistas, mas há outros. Nesse trabalho, nos interessamos apenas por equilíbrios de estratégias puras. Quando nos referirmos a um *equilíbrio* sem mais qualificações, queremos dizer equilíbrio de estratégias puras.

1.3 Jogos de Steiner

Nessa seção, apresentaremos os chamados jogos de Steiner (introduzidos por Anshelevich e colaboradores [ADK⁺08], veja também o trabalho de Machado [Mac12]), que serão o tema principal da dissertação.

Para apresentar o problema claramente, é necessário definir o *problema de Steiner*: uma instância do problema é uma tripla (G, P, w) , onde G é um grafo (não orientado), $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ uma sequência de pares ordenados de vértices de G e w uma função que associa cada aresta de G a um custo racional não-negativo. O problema consiste em achar uma floresta de custo mínimo, que conecte cada par de vértices em P . Denominaremos uma tal floresta de *floresta de Steiner*.² Naturalmente, estamos interessados apenas em instâncias tais que há caminho entre cada par de vértices em P . Quando dissermos “uma instância do problema de Steiner” estamos especificamente nos referindo uma tripla (G, P, w) que respeite essa condição.

Um *jogo de Steiner* (J, M, C) é construído sobre uma instância do problema de Steiner (G, P, w) . Se na instância temos $|P| = n$ pares, o conjunto de jogadores é $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Por abuso de notação, algumas vezes nos referiremos a J como o *conjunto de jogadores* da instância (G, P, w) e a n como *número de jogadores* dessa instância.

Cada jogador i está associado ao par p_i . O conjunto de estratégias M_i é o conjunto dos caminhos que ligam os vértices em p_i . Dada uma configuração $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, dizemos que o jogador i *usa o caminho* m_i . Da mesma forma, dizemos que o jogador i *usa uma aresta* se ela pertence a m_i .

A definição da sequência C , de funções de custo, é mais delicada. Podemos definir diferentes C sobre a mesma instância, criando jogos diferentes. À função que, dada uma instância do problema de Steiner, constrói a sequência C , chamaremos de *protocolo*.

Um protocolo T constrói a sequência C da seguinte forma: a cada aresta e , T associa uma função ξ_e . Dada uma aresta e e uma configuração m , definimos $S(e, m)$ como o conjunto de jogadores cujos caminhos (em m) contém a aresta e . A função ξ_e é da forma $\xi_e(i, S(e, m))$. Ela retorna racionais não negativos para $i \in S(e, m)$ e retorna 0 para $i \notin S(e, m)$. Para cada jogador i , sendo m_i o caminho que i utiliza em uma estratégia m , a função c_i é definida

²O problema de Steiner, como usualmente definido na literatura, permite que os conjuntos p_1, p_2, \dots, p_n tenham mais do que dois vértices. Adotamos, nesse trabalho, essa versão simplificada porque não estamos interessados no objeto mais geral

por $c_i(m) = \sum_{e \in m_i} \xi_e(i, S(e, m))$. Ou seja, o jogador paga um quantidade por cada aresta que utiliza, e essa quantidade depende dos outros jogadores que a utilizam.

Diremos que $\xi_e(i, S(e, m))$ é o *custo que o jogador i paga por usar a aresta e na configuração m* . Diremos que ξ_e é a *função de distribuição de custos associada à aresta e* . Às funções ξ , chamaremos *funções de distribuição de custos*.

Diremos que uma tal ξ é uma *função que distribui custo r entre n jogadores* se recebe um jogador $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, um conjunto $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ e retorna valores racionais não negativos de forma que, para todo $S \neq \emptyset$, $\sum_{i \in S} \xi(i, S) = r$. Ou seja, se ξ é uma função que poderia ser associada a uma aresta de custo r , em um jogo com n jogadores, de forma a sempre cobrar o valor exato da aresta dos jogadores que a usam.

Em suma, dada uma instância do problema de Steiner, o jogo de Steiner (J, M, C) é tal que o conjunto de jogadores J depende apenas da instância; a sequência M , que descreve as estratégias de cada jogador, depende apenas da instância; a sequência C , de funções de custo, depende do protocolo utilizado e da instância.

1.3.1 Preço da anarquia e da estabilidade

A questão fundamental que esse trabalho aborda é o “custo da falta de coordenação”. Desejamos, dado um jogo de Steiner, comparar o custo de uma floresta de Steiner (um ótimo global) com o custo de um equilíbrio (uma configuração que ocorre quando cada jogador otimiza seu próprio custo).

Vamos usar duas medidas para esse “custo da falta de coordenação”, o *preço da anarquia* e o *preço da estabilidade*.

Um dos primeiros trabalhos a explorar o preço da anarquia foi de Koutsoupias e Papadimitriou [KP09]. Esse trabalho usava o preço da anarquia em outro contexto, não no contexto de jogos de Steiner. Já o preço da estabilidade foi originalmente definido no contexto de jogos de Steiner, por Anshelevich e colaboradores [ADK⁺08].

Dados um protocolo T e uma instância I do problema de Steiner o *custo de uma configuração* é definido como o custo do conjunto de arestas utilizadas por algum jogador na configuração. O *custo de um equilíbrio* é definido da mesma forma.

Dados um protocolo T e uma instância I do problema de Steiner, definimos o *preço da anarquia do protocolo T para a instância I* , $A(T, I)$, como a relação entre o custo de um equilíbrio de maior custo do jogo gerado por T para I e o custo de uma floresta de Steiner de I .

Note que essa definição só faz sentido se pudermos garantir a existência de um equilíbrio de estratégias puras no jogo que o protocolo T gera para a instância I . De fato, nas definições que seguem (e em todo esse texto) estamos apenas interessados em protocolos T tais que, para qualquer instância, o jogo associado tem pelo menos um equilíbrio. Provaremos esse fato para todos os protocolos que formos definir, e exigiremos essa propriedade de qualquer candidato a protocolo.

Dados um protocolo T e uma instância I do problema de Steiner, definimos o *preço da estabilidade do protocolo T para a instância I* , $E(T, I)$ como a relação entre o custo de um equilíbrio de *menor* custo do jogo gerado por T para I e o custo de uma floresta de Steiner de I .

Podemos também definir o *preço da anarquia de um protocolo T para instâncias com n jogadores*: O preço da anarquia de T para n jogadores é $A(T, n) = \sup_{I=(G, P, w) \parallel |P|=n} (A(T, I))$. Da mesma forma, definimos o *preço da estabilidade de um protocolo T para n jogadores* como $E(T, n) = \sup_{I=(G, P, w) \parallel |P|=n} (E(T, I))$.

Fixado um protocolo T , diremos que seu *preço da anarquia* é a função $g(n) = A(T, n)$, e seu *preço da estabilidade* a função $h(n) = E(T, n)$.

1.3.2 Caso orientado

Podemos também definir o problema de Steiner orientado: tome uma tripla (D, P, w) , onde D é um grafo orientado, P é um conjunto de pares ordenados de vértices de D e w é uma função que associa cada arco de D a um custo não negativo. Para cada par p_i em P , D é tal que há caminho orientado, saindo do primeiro vértice de p_i e chegando no segundo vértice de p_i . O *problema de Steiner orientado* consiste em achar caminhos orientados entre todos os pares de P de forma que a soma dos custos de todas as arestas utilizadas seja mínima. Chamaremos um tal conjunto de caminhos orientados simplesmente de um ótimo da instância.

Dado um protocolo T , e uma instância I do problema de Steiner orientado, definimos um jogo de Steiner orientado da mesma forma que já definimos um jogo de Steiner: as jogadas de um jogador são caminhos orientados entre os vértices do par associado a ele, o custo de um jogador é a soma dos custos das arestas que usa, levando em conta o restante da configuração e as funções de distribuição de custos designadas pelo protocolo.

Definimos também o *preço da anarquia de T para grafos orientados* e o *preço da estabilidade de T para grafos orientados* da mesma forma que definimos os preços da anarquia e estabilidade para grafos não orientados.

1.4 Outras definições

Dado um grafo A , denotamos por $w(A)$ a soma dos pesos de todas as suas arestas, fazendo um abuso de notação.

H_n é o n -ésimo número harmônico. Ou seja,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Em um grafo G , um *ciclo* é uma sequência de vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) tal que há uma sequência (e_1, e_2, \dots, e_n) de arestas de G , onde cada aresta ocorre no máximo uma vez, com $e_n = \{v_n, v_1\}$ e, para $i < n$, com $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Um *circuito* é um ciclo em que cada vértice ocorre no máximo uma vez.

Um ciclo é dito *euleriano* se todas as arestas presentes no grafo ocorrem na sequência de arestas (e_1, e_2, \dots, e_n) associada ao ciclo. Um teorema célebre de teoria dos grafos (veja, por exemplo, o livro de Diestel [Die05], teorema 1.8.1) afirma que todo grafo conexo em que todo vértice tem grau par tem ciclo euleriano. Tais grafos são chamados de *grafos eulerianos*.

Todos os logaritmos tomados nesse trabalho são em base 2.

Capítulo 2

Exemplos de Protocolos

Nesse capítulo, estudamos dois protocolos, o protocolo ordenado e o protocolo de Shapley. Já tivemos breve contato com eles, na seção 1.1. Apresentamos também uma variação do protocolo ordenado, o protocolo de Prim.

Para o protocolo ordenado, estudamos o preço da anarquia, na seção 2.1.

Para o protocolo de Shapley, estudamos o preço da anarquia e o preço da estabilidade, na seção 2.2.

Em seguida, aplicamos os dois protocolos para o caso de grafos orientados, na seção 2.3.

Por fim, discutimos uma propriedade que ambos o protocolo ordenado e o protocolo de Shapley compartilham: se esperamos “tempo o suficiente”, podemos contar com os jogadores atingirem “por conta própria” um equilíbrio. Fazemos isso na seção 2.4.

2.1 Protocolo ordenado

O protocolo ordenado é o protocolo que cobra o custo integral de uma aresta do jogador de menor número que a usa. Ou seja, o protocolo que, em um jogo com n jogadores, para uma aresta e , de custo $w(e)$, associa uma função ξ_e tal que:

$$\xi_e(i, S) = \begin{cases} w(e), & \text{se } i \text{ é o menor elemento de } S; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

(Note que, em particular, $\xi_e(i, S) = 0$ se $i \notin S$.)

Pretendemos estudar, nas seções seguintes, o preço da anarquia desse protocolo, e o preço da anarquia para multitransmissões (que definiremos na seção 2.1.2). Também estudaremos uma variação do protocolo ordenado, o protocolo de Prim.

Mas, antes de mais nada, cumpre provar que o protocolo ordenado gera equilíbrio para qualquer instância do problema de Steiner. Fazemos isso nos dois próximos lemas.

Na verdade, obteremos uma caracterização dos equilíbrios que esse protocolo gera: em um equilíbrio, cada jogador usará um caminho de menor custo, considerando custo zero nas arestas utilizadas por jogadores de número menor.

Façamos isso.

Lema 2.2. *O protocolo ordenado, ao ser aplicado a uma instância do problema de Steiner, sempre gera jogos que têm pelo menos um equilíbrio.*

Demonstração. Tome uma instância do problema de Steiner, com n jogadores.

Seja H_0 o grafo, com pesos nas arestas, que a instância descreve.

Seja m_1 um caminho de menor custo entre os dois vértices associados ao jogador 1, em H_0 . Seja H_1 uma cópia de H_0 em que cada aresta de m_1 teve seu custo alterado para 0.

Em geral, para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, seja m_{k+1} um caminho de menor custo entre os dois vértices associados ao jogador $k+1$, em H_k . Seja H_{k+1} uma cópia de H_k em que cada aresta de m_{k+1} teve seu custo alterado para 0.

Provemos que toda configuração da forma (m_1, m_2, \dots, m_n) , descrita acima, é um equilíbrio.

Esse resultado é uma consequência imediata da definição de equilíbrio: um equilíbrio é uma configuração em que a jogada de cada jogador é uma melhor resposta.

Isso pois, em um protocolo ordenado, as melhores respostas do jogador 1 são completamente independentes das jogadas dos demais: são precisamente os caminhos de custo mínimo entre seus dois vértices.

Da mesma forma, as melhores respostas do jogador $k+1$ só dependem dos k jogadores anteriores: $k+1$ não paga nada pelas arestas que algum desses k jogadores está usando. Então, definindo como acima o grafo H_k , as melhores respostas de $k+1$ são precisamente os caminhos de menor custo em H_k .

Assim, em uma sequência (m_1, m_2, \dots, m_n) como a descrita, cada m_k é uma melhor resposta para o jogador k . \square

Incidentalmente, a prova do lema 2.2 mostra que *todo* equilíbrio num jogo definido por um protocolo ordenado é da forma (m_1, m_2, \dots, m_n) descrita: não só cada m_k é uma melhor resposta para o jogador k , mas *toda* melhor resposta tem essa forma.

Registramos esse fato no lema seguinte.

Lema 2.3. *Considere um jogo definido para uma instância do problema de Steiner por um protocolo ordenado. Seja G o grafo com pesos nas arestas correspondente a instância, m um equilíbrio desse jogo.*

O equilíbrio m é tal que a jogada m_k do jogador k é um caminho de menor custo entre os dois vértices associados ao jogador k no grafo H_{k-1} , que tem o mesmo conjunto de vértices e arestas de G , custo 0 em todas as arestas pertencentes a caminhos selecionados por jogadores de número menor que k , e custo idêntico ao de G para as demais arestas. \square

2.1.1 Preço da anarquia

Desejamos provar que o protocolo ordenado tem preço da anarquia $O(\log^2 n)$, onde n é o número de jogadores. Esse fato será provado no teorema 2.7.

O plano de prova é o seguinte. Dada uma componente conexa de uma floresta de Steiner, definir um grafo auxiliar $G_{c,D}$. As arestas desse grafo corresponderão a jogadores que pagam “muito” em um equilíbrio, e poderemos limitar o número de arestas desse grafo.

A prova que apresentamos é devida a Awerbuch, Azar e Bartal [AAB04], mas foi desenvolvida no contexto de algoritmos on-line para o problema de Steiner. Pode ser usada sem quase nenhuma adaptação em nosso contexto. A adaptação da prova para o contexto presente foi feita por Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

Começamos a prova com a definição de um grafo auxiliar $G_{c,D}$.

Tome uma instância I do problema de Steiner, G o grafo com pesos nas arestas associado. Tome, para essa instância, uma solução ótima e um equilíbrio do jogo que o protocolo ordenado gera.

Tome A uma componente conexa da solução ótima, $w(A)$ a soma dos pesos das suas arestas.

Seja $\text{dist}_G(v_1, v_2)$ o custo de um caminho de menor custo em G entre dois vértices v_1 e v_2 . Tome um racional positivo d . Uma d -rede sobre os vértices de A é uma função D , dos vértices de A para os vértices de A , tal que:

- para todo vértice v de A , temos $\text{dist}_G(v, D(v)) \leq d$;
- para quaisquer dois vértices distintos v_i e v_j na imagem de D , temos $\text{dist}_G(v_i, v_j) > d$.

Note que uma d -rede necessariamente existe, porque podemos construir uma com um algoritmo guloso.

Denotamos por V_D a imagem da d -rede D .

Tome o (multi)conjunto de pares $P(A)$ que são conectados pela componente conexa A . Cada um desses pares equivale a um jogador j . Denotemos o custo de j no equilíbrio como c_j . Pelo lema 2.3, esse c_j é o custo de um caminho de custo mínimo, no grafo auxiliar H_{j-1} onde as arestas usadas por jogadores de número menor tem custo 0.

Usando os c_j e um real c , podemos construir um grafo sobre V_D . Partimos de um grafo sem arestas. Tome um par $j = (v_a, v_b)$ em $P(A)$. Seja $v_1 = D(v_a)$ e $v_2 = D(v_b)$. Se $c_j \geq c$, adicione a aresta $\{v_1, v_2\}$ ao grafo.

Fazendo o mesmo para cada par em $P(A)$, construímos o multigrafo $G_{c,D}$. Chamamos de *multigrafo* um grafo que pode conter *arestas múltiplas* (duas ou mais arestas que ligam o mesmo par de vértices) e *laços* (um *laço* é uma aresta com duas pontas iguais). Note que $G_{c,D}$, como definido, pode conter arestas múltiplas ou laços. Denotamos o multiconjunto de arestas de $G_{c,D}$ por $E_{c,D}$. Note que $G_{c,D}$ é um grafo sem custos nas arestas.

Nos próximos lemas, obteremos um limitante para $|E_{c,D}|$, usando valores apropriados de c e d e uma d -rede D qualquer. Isso é interessante por limitar o número total de jogadores de $P(A)$ que pagam c ou mais no equilíbrio dado.

Começamos estudando a cintura de $G_{c,D}$. A *cintura* de um grafo é o número de arestas do seu menor circuito.

Lema 2.4. *Seja D uma d -rede sobre A , onde A é uma componente conexa de uma solução ótima de uma instância do problema de Steiner. Seja G o grafo com pesos nas arestas dessa instância. Seja c um número racional positivo. Defina um grafo $G_{c,D}$ como acima.*

Supondo que $G_{c,D}$ não tem laços temos que a cintura de $G_{c,D}$ é pelo menos $c/(2d)$.

Demonstração. Faremos uma prova por contradição. Suponha que há um circuito de $G_{c,D}$, de tamanho l tal que $l < c/(2d)$. Tomemos um tal circuito.

Cada uma de suas arestas foi adicionada a $E_{c,D}$ por um jogador. Tome j o jogador de maior número que adicionou uma aresta ao circuito, u_1 e u_2 os vértices associados a j .

Provaremos que j não está usando uma melhor resposta nessa configuração: por ele ter adicionado uma aresta a $E_{c,D}$, está pagando pelo menos c . Mas, mantendo as jogadas dos demais jogadores, iremos exibir um caminho para j de custo no máximo $2dl < c$.

Seja H_{j-1} um grafo igual a G , a não ser por ter custo 0 nas arestas utilizadas por algum jogador de número menor que j . A afirmação do parágrafo anterior pode ser reescrita como: vamos exibir caminho no grafo H_{j-1} entre u_1 e u_2 de custo no máximo $2dl < c$.

Provemos que há tal caminho.

Tomemos (v_1, v_2, \dots, v_l) os vértices do circuito de $G_{c,D}$, começando por $v_1 = D(u_1)$ e terminando por $v_l = D(u_2)$. Para todo i com $1 \leq i < l$, há um caminho entre v_i e v_{i+1} cujo custo em H_{j-1} vamos mostrar ser máximo $2d$. Esse caminho entre v_i e v_{i+1} será a união de 3 caminhos, um de custo d ou menos, um de custo 0 e um de custo d ou menos.

Começemos pelo caminho de custo 0. Há um caminho totalmente usado por um jogador de número menor que j , da contra-imagem de D para v_i para a contra-imagem de D para v_{i+1} . Esse caminho tem custo 0 em H_{j-1} . Denotemos os extremos desse caminho por a_i e b_i .

Passemos aos caminhos de custo d ou menos. Há um caminho em G (e em H_{j-1}) de custo no máximo d de v_i para a_i , pela definição de d -rede; da mesma forma, há caminho de custo no máximo d de b_i para v_{i+1} .

Juntando esses três caminhos (um de custo 0 e dois de custo no máximo d) temos o caminho de custo no máximo $2d$ que queríamos.

Aplicando repetidas vezes a construção dos parágrafos anteriores, vemos que há caminho de custo no máximo $2d(l-1)$ entre v_1 e v_l , em H_{j-1} .

Mas sabemos que há caminho de custo no máximo d em G (e em H_{j-1}) entre u_1 e v_1 , e também há tal caminho entre v_l e u_2 .

Assim, há caminho de custo no máximo $2dl$ entre u_1 e u_2 em H_{u-1} , mas, como $l < c/2d$, esse caminho tem custo menor que c . Portanto, o caminho de custo c que o jogador j está usando na configuração não é uma melhor resposta, e a configuração não é um equilíbrio, o que não poderia ser verdade pela construção de $G_{c,D}$.

Contradição. □

O próximo passo é relacionar $w(A)$ e $|V_D|$.

Lema 2.5. *Seja D uma d -rede sobre A , onde A é uma componente conexa de uma solução ótima de uma instância do problema de Steiner. Seja G o grafo com pesos nas arestas dessa instância.*

Se $d < 2 \cdot w(A)$, então

$$|V_D| \leq \frac{w(A)}{d/2}.$$

Demonstração. Se $|V_D| = 1$, a condição $d < 2 \cdot w(A)$ implica o lema.

Se $|V_D| > 1$, pretendemos dividir $w(A)$ em “esferas” de “diâmetro” $d/2$, cada uma em torno de um vértice de V_D e afirmar que cada tal “esfera” tem custo pelo menos $d/2$. Nos parágrafos seguintes, o custo de uma “esfera” será definido como a soma de um peso interno e um peso externo de um vértice v .

Tome um vértice de $v \in V_D$. Definimos a sua *vizinhança* como o conjunto de vértices $\{u_1, u_2, \dots\}$ em A tais que $\text{dist}_A(v, u_i) \leq d/2$.

O peso interno de v é a soma de todos os custos de arestas de A com as duas pontas na vizinhança de v .

O peso externo de v é um pouco mais complicado. Para u na vizinhança de v , se $\text{dist}_A(u, v) < d/2$ e u pertence a uma aresta de A que tem a outra ponta fora da vizinhança de v , tome $X_{u,v}$ o conjunto das tais arestas. Cada aresta $e \in X_{u,v}$ contribui $x_{e,v}$ para o peso externo, de forma que $x_{e,v} + \text{dist}_A(u, v) = d/2$. O peso externo de v é a soma dos tais $x_{e,v}$.

Note que $x_{e,v}$ não excede o custo da aresta e , caso contrário as duas pontas de e estariam na vizinhança de v .

O peso de v é a soma de seu peso interno e seu peso externo.

Note que nenhuma aresta de A contribui para o peso interno para mais do que um vértice em V_D . Se houvesse tal aresta $\{u_1, u_2\}$, contribuindo para o peso interno de v_1 e v_2 , teríamos que $\text{dist}_A(v_1, u_1) \leq d/2$ e $\text{dist}_A(v_2, u_1) \leq d/2$ e, portanto $\text{dist}_G(v_1, v_2) \leq d$, em contradição com a construção de V_D .

Note que nenhuma aresta de A contribui para o peso externo de mais do que dois vértices em V_D . Se houvesse uma tal aresta $\{u_1, u_2\}$, e tais $v_1, v_2, v_3 \in V_D$, haveria pelo menos dois entre v_1, v_2 e v_3 que teriam u_1 em sua vizinhança, ou, caso contrário, pelo menos dois entre v_1, v_2 e v_3 com u_2 em sua vizinhança. Obteríamos a mesma contradição com a construção de V_D .

Note que nenhuma aresta de A contribui para o peso externo de dois vértices v_1 e v_2 de forma que sua contribuição total seja maior que seu peso. Nesse caso, obteríamos novamente a mesma contradição com a construção de V_D .

Note que nenhuma aresta de A contribui para o peso interno de um vértice e também para o peso externo de outro vértice. Se isso ocorresse, obteríamos a mesma contradição com a construção de V_D .

Note que nenhuma aresta contribui para o peso externo e para o peso interno para um mesmo vértice, pelas definições de peso interno e externo.

Assim, temos que a soma dos pesos de todos os vértices em V_D é necessariamente menor ou igual a $w(A)$.

Note que o peso de um vértice de V_D , com $|V_D| > 1$, é necessariamente maior ou igual a $d/2$. Isso porque A conecta os vértices de V_D , o que implica que há caminho entre cada vértice de V_D e algum outro vértice de V_D . Pela construção de V_D , esse caminho tem comprimento no mínimo d . Pela definição de peso, as arestas desse caminho contribuem com no mínimo $d/2$ para o peso de cada um dos dois vértices de V_D envolvidos.

Assim, temos que a soma dos pesos de todos os vértices é necessariamente maior ou igual a $|V_D| \cdot d/2$.

Temos então $w(A) \geq |V_D| \cdot d/2$ e portanto

$$|V_D| \leq \frac{w(A)}{d/2}$$

como queríamos. □

Agora, enunciamos sem prova um resultado relacionando o número de arestas de um grafo, sua cintura e seu número de vértices. Esse resultado servirá para, na prova do teorema, relacionar o resultado do lema 2.4 com o resultado do lema 2.5.

Lema 2.6. *Um grafo de cintura l e número de vértices q tem número de arestas $|E|$ tal que*

$$|E| < q^{1+6/l}.$$

Demonstração. Não apresentamos prova desse lema, apenas como adaptar um teorema de teoria extremal dos grafos para obter o lema.

Seja $H = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ um conjunto de grafos e q um inteiro. Um grafo G é dito extremal para H e q se: tem exatamente q vértices; não contém nenhum dos grafos H_i como subgrafo; não há grafo G' , com q vértices, sem nenhum H_i como subgrafo, que tenha mais arestas que G .

O número de arestas de um tal grafo é denotado $\text{ex}(q, H)$.

Enunciamos, a seguir, um resultado de Alon, Hoory e Linial [AHL02], com uma formulação mais conveniente ([FS13], no teorema 4.1).

Seja $\{C_3, C_4, \dots, C_{2k}\}$ o conjunto de todos os circuitos, do circuito de 3 vértices C_3 até o circuito de $2k$ vértices, C_{2k} . Temos

$$\text{ex}(q, \{C_3, C_4, \dots, C_{2k}\}) < \frac{1}{2}q^{1+1/k} + \frac{1}{2}q.$$

Esse resultado implica que

$$|E| < q^{1+(1/\lfloor (l-1)/2 \rfloor)},$$

o que implica $|E| < q^{1+6/l}$, como queríamos.

□

De posse desse lema, estamos prontos para provar o resultado desejado.

Teorema 2.7. *O protocolo ordenado tem preço da anarquia $O(\log^2 n)$, onde n é o número de jogadores.*

Demonstração. Seja $I = (G, P, w)$ uma instância do problema de Steiner. Tome uma solução ótima dessa instância e um equilíbrio do jogo gerado por um protocolo ordenado para essa instância. Tome A uma componente conexa dessa solução ótima.

Pretendemos provar que os jogadores que são conectados por A na solução ótima não pagam mais do que $w(A) \cdot \log^2 n$ em um equilíbrio.

Seja $P(A)$ o conjunto de pares da instância que têm as duas extremidades em A (e note que não há par da instância I que tenha apenas uma extremidade em A , por A fazer parte de uma solução para a instância I).

Seja (por abuso de notação) $P(A)$ o conjunto de jogadores associado ao conjunto de pares $P(A)$ anteriormente definido.

No equilíbrio, cada jogador de $P(A)$ está pagando um custo pelo caminho que selecionou. Tomemos uma ordenação desses jogadores, $p_1, p_2, \dots, p_{|P(A)|}$, de forma que p_i sempre pague mais ou o mesmo que p_{i+1} . Seja c_i o custo pago pelo jogador p_i .

Seja P_{c_i} o conjunto dos jogadores de $P(A)$ que estão pagando, no equilíbrio selecionado, um custo maior ou igual a c_i . Temos

$$|P_{c_i}| \geq i, \quad (2.8)$$

isso porque, por definição, esse conjunto contém todos os jogadores de número i ou menor.

Tome

$$d_i = c_i / (8 \cdot \log n), \quad (2.9)$$

onde n , lembremos, é o número de jogadores da instância.

Construa D_i uma d_i -rede sobre A .

Construa G_{c_i, D_i} , V_{D_i} , E_{c_i, D_i} como anteriormente no texto: V_{D_i} a imagem de D_i , E_{c_i, D_i} um conjunto de arestas que ligam dois elementos v_1 e v_2 de V_{D_i} se e somente se há jogador pagando c_i por um caminho que “começa próximo” de v_1 e “termina próximo” de v_2 .

Temos

$$|E_{c_i, D_i}| = |P_{c_i}|. \quad (2.10)$$

Isso porque as arestas em E_{c_i, D_i} correspondem, cada uma, a um par pagando c_i ou mais.

Provemos que G_{c_i, D_i} não tem laços: tome um tal vértice contido em um laço. A existência do laço implicaria que um jogador está pagando c_i ou mais para ligar dois vértices que tem uma distância menor que $2d_i$ em G , mas $2d_i$ é menor que c_i .

Seja l_{c_i, D_i} a cintura de G_{c_i, D_i} .

Como G_{c_i, D_i} não tem laços, podemos aplicar o lema 2.4, obtendo

$$l_{c_i, D_i} \geq \frac{c_i}{2d_i} = 4 \cdot \log n. \quad (2.11)$$

Em particular, isso implica que não há arestas múltiplas em G_{c_i, D_i} . Assim, podemos aplicar o lema 2.6.

Pelo lema 2.6, temos

$$|E_{c_i, D_i}| < |V_{D_i}|^{1+6/l_{c_i, D_i}}. \quad (2.12)$$

Podemos aplicar o lema 2.5, pois $d_i < c_i \leq w(A)$. Pelo lema 2.5, temos $|V_{D_i}| \leq w(A) / (d_i/2) = 16 \log n \cdot w(A) / c_i$.

Assumamos que $w(A)/c_i \leq n$. Posteriormente trataremos (de maneira simples) o caso de custos no equilíbrio pequenos o suficiente para não verificar essa desigualdade.

Assim, temos $|V_{D_i}| \leq 16 \log n \cdot w(A)/c_i \leq (16 \log n) \cdot n \leq 16n^2$. Aplicando isso em 2.12, temos

$$\begin{aligned}
|E_{c_i, D_i}| &< |V_{D_i}|^{1+6/l_{c_i, D_i}} \\
&= |V_{D_i}| \cdot |V_{D_i}|^{6/l_{c_i, D_i}} \\
&\leq |V_{D_i}| \cdot (16n^2)^{6/l_{c_i, D_i}} \\
&\leq |V_{D_i}| \cdot (16n^2)^{6/(4 \cdot \log n)} && \text{usando 2.11} \\
&= |V_{D_i}| \cdot 16^{6/(4 \cdot \log n)} \cdot (n^2)^{6/(4 \cdot \log n)} \\
&\leq |V_{D_i}| \cdot 16^{6/4} \cdot (n^2)^{6/(4 \cdot \log n)} \\
&= 512 \cdot |V_{D_i}| && \text{(pois } (n^2)^{6/(4 \cdot \log n)} = 8).
\end{aligned}$$

Mas, temos $|V_{D_i}| \leq \frac{w(A)}{d_i/2}$, pelo lema 2.5, $d_i = c_i/(8 \cdot \log n)$, pela definição 2.9 e $|E_{c_i, D_i}| = |P_{c_i}|$, pela equação 2.10.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
|P_{c_i}| = |E_{c_i, D_i}| &\leq 512 \cdot |V_{D_i}| \leq 512 \cdot \frac{w(A)}{d_i/2} \\
&\leq 8192 \cdot \frac{w(A) \cdot \log n}{c_i}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Assim (ainda sob a condição $w(A)/c_i \leq n$), temos

$$c_i \leq 8192 \cdot \frac{w(A) \cdot \log n}{|P_{c_i}|} \leq 8192 \cdot \frac{w(A) \cdot \log n}{i} \tag{2.14}$$

usando 2.8 para obter a última desigualdade.

Mas o custo de um equilíbrio é $\sum_{i=1}^{|P(A)|} c_i$. Podemos quebrar essa somatória em dois termos: os primeiros jogadores, de custo maior, que verificam $w(A)/c_i \leq n$, e os demais jogadores, que verificam $w(A)/c_i > n$ (ou têm $c_i = 0$). Seja k o número do jogador de maior número que verifica $w(A)/c_i \leq n$. O custo do equilíbrio é, então,

$$\sum_{i=1}^k c_i + \sum_{i=k+1}^{|P(A)|} c_i. \tag{2.15}$$

O primeiro termo da soma pode ser limitado da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^k c_i \leq \sum_{i=1}^k 8192 \cdot \frac{w(A) \cdot \log n}{i} = w(A) \cdot O(\log n \cdot \log k) = w(A) \cdot O(\log^2 n)$$

(onde a última igualdade vem do fato de que k é o tamanho de um subconjunto do conjunto de jogadores).

Para limitar o segundo termo, observemos que $w(A)/c_i > n$ implica $c_i \cdot n < w(A)$ (e $c_i = 0$ também implica isso). Usando que c_{k+1} é maior que todo custo subsequente, temos

$$\sum_{i=k+1}^{|P(A)|} c_i \leq c_{k+1} \cdot (|P(A)| - k) \leq c_{k+1} \cdot n < w(A).$$

Os dois termos de 2.15 somam um valor $w(A) \cdot O(\log^2 n)$. Repetindo esse argumento para as outras componentes conexas da solução ótima, temos que a razão entre o custo do equilíbrio e o custo de uma solução ótima é $O(\log^2 n)$, como queríamos. \square

Não se sabe se esse limitante superior é justo. Sabemos, porém, que esse protocolo tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$, como provaremos no teorema 4.5.

2.1.2 Protocolo ordenado em multitransmissões

Uma *multitransmissão* é uma instância do problema de Steiner (G, P, w) em que há um vértice que ocorre em todos os pares de P . Ou seja, uma instância do problema de Steiner com $P = ((v_1, r), (v_2, r), \dots, (v_{|P|}, r))$.

Podemos definir o preço da anarquia de um protocolo de forma a considerar apenas multitransmissões. Sendo I_m o conjunto de instâncias do problema de Steiner que são multitransmissões, definimos o *preço da anarquia de um protocolo T para multitransmissões com n jogadores*, $A_m(T, n)$, como $A_m(T, n) = \sup_{I=(G,P,w) \in I_m, |P|=n} (A(T, I))$. O *preço da anarquia do protocolo T para multitransmissões* é a função $g_m(n) = A_m(T, n)$.

Da mesma forma, podemos definir o *preço da estabilidade do protocolo T para multitransmissões*, *preço da estabilidade do protocolo T para multitransmissões orientadas* e o *preço da anarquia do protocolo T para multitransmissões orientadas*.

Nessa seção, provaremos que o preço da anarquia do protocolo ordenado para multitransmissões é $O(\log n)$ (onde n é o número de jogadores da instância).

Esse resultado foi provado por Imase e Waxman [IW91] no contexto de algoritmos on-line para o problema da árvore de Steiner.

O *problema da árvore de Steiner* é usualmente definido como o problema de achar uma árvore de custo mínimo que conecte um dado conjunto de vértices de um grafo. Nessa seção, descrevemos o problema, equivalentemente, como o problema de achar florestas de custo mínimo, em instâncias do problema de Steiner em que há um vértice que está presente em todos os pares P (e, como há tal vértice, a floresta de custo mínimo será necessariamente uma árvore).

Uma tal árvore de custo mínimo é chamada uma *árvore de Steiner*.

A prova de Imase e Waxman [IW91] utiliza um lema provado por Rosenkrantz, Stearns e Lewis [RSL77], no contexto do problema do caixeiro viajante (o problema de achar, em um grafo com peso nas arestas, um circuito hamiltoniano de custo mínimo – recordaremos as definições necessárias em breve).

Exibimos aqui a prova de [IW91], incluindo o lema de [RSL77], adaptada para o contexto de jogos de Steiner por Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

Faremos a prova em dois passos: Primeiro provaremos o lema 2.16 como em [RSL77], depois, o teorema 2.21, de maneira bastante similar a [IW91].

Em um grafo, um *circuito hamiltoniano* é um circuito que contém todos os vértices. Um *caminho hamiltoniano* é um caminho que contém todos os vértices, sem que nenhum vértice ocorra mais de uma vez.

Um grafo conexo, com pesos nas arestas, respeita a *desigualdade triangular* se, para todo par de vértices $\{u, v\}$, há uma aresta $\{u, v\}$ de custo menor ou igual ao custo de qualquer outro caminho que liga u a v . Em particular, um tal grafo tem arestas entre todos os seus pares de vértices.

Lema 2.16. *Tome um grafo G , que respeita a desigualdade triangular.*

Suponha que o custo de um circuito hamiltoniano de custo mínimo de G é $2C$.

Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{|V|}\}$ o conjunto de vértices de G , e tome uma $|V|$ -upla de números reais positivos $(d_1, d_2, \dots, d_{|V|})$.

Denote o custo de uma aresta e por $w(e)$.

Se

(i) $w(\{v_i, v_j\}) \geq \min(d_i, d_j)$ para cada aresta $\{v_i, v_j\}$ e

(ii) $d_i \leq C$ para todo vértice v_i

então

$$\sum_{i=1}^{|V|} d_i \leq (\lceil \log |V| \rceil + 1) C. \quad (2.17)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que os índices dos vértices são tais que $d_i \geq d_{i+1}$.

Primeiramente vamos provar que, para cada $1 \leq k \leq |V|$, temos

$$\sum_{a=k+1}^{\min(2k, |V|)} d_a \leq C. \quad (2.18)$$

Para isso, tome o conjunto de vértices $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_{\min(2k, |V|)}\}$. Tome H_k o circuito que contém apenas esses vértices, na ordem em que eles aparecem em um circuito hamiltoniano de custo mínimo. Pela desigualdade triangular, a soma dos custos das arestas desses circuito é menor ou igual a $2C$.

Por outro lado, por (i), para cada aresta $e_{i,j} = \{v_i, v_j\}$ desse circuito, temos que $w(e_{i,j}) \geq d_i$ ou $w(e_{i,j}) \geq d_j$.

Escolhendo, para cada aresta $e_{i,j}$, um dentre d_i e d_j , que tenha valor menor que o custo da aresta, podemos afirmar que

$$\sum_{a=1}^{\min(2k, |V|)} \gamma_a d_a \leq 2C, \quad (2.19)$$

onde γ_a é o número de vezes que d_a foi “escolhido”.

Para verificar a validade de (2.19), notemos que o lado esquerdo da desigualdade (2.19) é menor ou igual à soma dos custos das arestas de H_k , e o lado direito é maior ou igual a essa soma.

Note que γ_a é sempre 0, 1 ou 2. Também temos que a soma dos γ é o número de arestas de H_k – há um único d_i escolhido para cada aresta.

Assim, podemos tomar um limitante inferior para o lado esquerdo de 2.19, se tomarmos $\gamma = 2$ para os menores valores de d , $\gamma = 0$ para os maiores. Isto é, temos $\sum_{a=k+1}^{\min(2k, |V|)} 2d_a \leq \sum_{a=1}^{\min(2k, |V|)} \gamma_a d_a$

Assim, temos $\sum_{a=k+1}^{\min(2k, |V|)} 2d_a \leq 2C$ e, portanto, $\sum_{a=k+1}^{\min(2k, |V|)} d_a \leq C$. Provamos a validade da equação 2.18.

Agrupando os d_i , podemos provar (quase) o que queríamos:

$$\sum_{b=0}^{\lceil \log |V| \rceil - 1} \left(\sum_{a=2^{b+1}}^{\min(2^{b+1}, |V|)} d_a \right) \leq \sum_{b=0}^{\lceil \log |V| \rceil - 1} C;$$

$$\sum_{a=2}^{|V|} d_a \leq \lceil \log |V| \rceil C.$$

Mas $d_1 \leq C$, por (ii). Assim, temos:

$$\sum_{a=1}^{|V|} d_a \leq (\lceil \log |V| \rceil + 1) C,$$

como queríamos. □

Tome uma multitransmissão I . Sendo G o grafo com pesos nas arestas dessa instância, P o conjunto de pares da instância, tome V' o conjunto de vértices de G que pertence a algum par em P . Seja G' um grafo, cujo conjunto de vértices é V' , e que tem entre quaisquer dois vértices uma aresta. O custo de uma aresta $\{i, j\}$ de G' é definido como a distância entre i e j , em G .

A esse grafo G' denominamos *grafo das distâncias* de I .

O próximo passo da prova é relacionar circuitos hamiltonianos de custo mínimo em G' com árvores de Steiner em G .

Lema 2.20. *Tome I uma multitransmissão. Denote o custo de uma árvore de Steiner dessa instância por a .*

Seja G' o grafo das distâncias de I . Seja $2C$ o custo de um circuito hamiltoniano de custo mínimo de G' .

Então, temos $C \leq a$.

Demonstração. De início, note que G' é um grafo que respeita a desigualdade triangular.

Denomine o conjunto de vértices de G' por V' .

Tome A uma árvore de Steiner para I . Dobre todas as arestas de A , produzindo um multigrafo A_2 . Ou seja, tome A_2 um multigrafo, com mesmo conjunto de vértices de A e tal que, se havia uma aresta entre v_1 e v_2 em A , há duas tais arestas em A_2 . Observe que A_2 é euleriano (todo vértice tem grau par, e A_2 é conexo). Considere a sequência de vértices de um ciclo euleriano em A_2 . Considere a subsequência dessa sequência em que há apenas vértices de V' . Ela define um ciclo em G' que contém todos os vértices de V' . Provaremos que esse ciclo tem custo menor ou igual ao custo das arestas de A_2 . Para provar esse fato, seja v_i o vértice que ocorre na i -ésima posição dessa sequência de vértices de G' , e um vértice v_{i+1} o que ocorre logo depois dele. O vértice v_{i+1} ocorre logo depois de v_i porque há um caminho em A_2 entre v_i e v_{i+1} sem nenhum outro vértice de G' . Tome esse caminho. Ele tem o mesmo custo de um dos caminhos entre v_i e v_{i+1} em G . Mas, pela construção de G' , toda aresta de G' tem o custo de um caminho de menor custo entre v_i e v_j , em G . Usando esse argumento para cada v_i na sequência, temos que, de fato, o custo da sequência de arestas de G' é menor ou igual ao custo das arestas de A_2 .

Tomando a construção do parágrafo anterior e eliminando vértices repetidos (a menos do primeiro vértice, que é igual ao último) temos um circuito hamiltoniano em G' , novamente

com custo menor ou igual ao custo das arestas de A_2 (Como G' respeita a desigualdade triangular, podemos eliminar um vértice repetido sem aumentar o custo. Fazemos isso repetidas vezes).

Obtivemos, então, um circuito hamiltoniano de G' com custo menor ou igual ao custo das arestas de A_2 . O custo das arestas de A_2 é o dobro do custo das arestas de A , ou seja, é $2a$. Assim, temos um circuito hamiltoniano de G' com custo menor ou igual a $2a$. Portanto, temos que o custo de um circuito hamiltoniano de *menor custo* em G' é menor ou igual que $2a$.

Ou seja, obtivemos $2C \leq 2a$, $C \leq a$, como queríamos. \square

Estamos prontos para provar o teorema.

Teorema 2.21. *O protocolo ordenado tem preço da anarquia para multitransmissões $O(\log n)$, onde n é o número de jogadores.*

Demonstração. Seja $I = (G, P, w)$ uma multitransmissão. Tomando P , construímos um conjunto P_i . Para cada par que ocorre mais de uma vez em P , P_i terá apenas a primeira ocorrência. Denotemos P_i por $P_i = ((v_1, r), (v_2, r), \dots, (v_m, r))$. Seja a o custo de uma árvore de Steiner para essa instância. Seja G' o grafo das distâncias de I , V' o conjunto de vértices desse grafo. Recordemos, $V' = \{r, v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Seja $2C$ o custo do menor circuito hamiltoniano em G' .

Nossa intenção é associar a cada v_i de V' um d_i (e a r um d_{m+1}), por um lado respeitando as condições do lema 2.16 para G' , por outro de forma que soma dos d_i limite superiormente o custo de todo equilíbrio do jogo que o protocolo ordenado gera para I . Usando o lema 2.16, teremos um limitante superior para essa somatória, em termos de C . Usando o lema 2.20, poderemos obter um segundo limitante superior, esse em termos de a .

Seja d_1 a distância em G entre v_1 e r . Defina d_2 como a menor entre duas distâncias: a distância entre v_2 e v_1 e a distância entre v_2 e r . Da mesma forma, defina d_k para cada $k \in \{3, 4, \dots, m\}$ como a menor distância, de v_k para V'_{k-1} , o conjunto de vértices que pertencem a algum par de índice menor que k . Defina d_{m+1} como $\max_{k \in \{1, 2, \dots, m\}} \text{dist}_G(v_i, r)$.

Provemos que a soma dos d_k limita superiormente o custo de um equilíbrio qualquer. Em um equilíbrio, o custo do jogador de menor número associado a (v_1, r) é a distância entre v_1 e r (assim, é d_1). Em um equilíbrio, o custo do jogador de menor número associado a (v_k, r) é menor ou igual à menor distância de v_k para algum vértice associado a jogador de número menor (assim, é menor ou igual a d_k). Em um equilíbrio, um jogador associado a um par (v_k, r) , mas que não é o jogador de menor número associado a esse par tem custo 0. Assim, $\sum_{i=1}^m d_i$ limita superiormente o custo de um equilíbrio qualquer. Portanto, $\sum_{i=1}^{m+1} d_i$ também é limitante superior.

Por outro lado, para cada aresta $\{a, b\}$ de G' , de peso $w'(\{a, b\})$, temos que

$$w'(\{a, b\}) \geq \min(d_a, d_b), \quad (2.22)$$

onde d_a é d_i , se $a = v_i$ e d_a é d_{m+1} se $a = r$ (e d_b é definido da mesma forma).

Provemos esse fato.

A aresta que liga r a v_1 tem peso $\text{dist}_G(v_1, r)$ (onde $\text{dist}_G(v_a, v_b)$ é o custo do menor caminho entre os vértices v_a e v_b em G) e esse é exatamente o valor de d_1 .

Para uma aresta $\{v_k, a\}$, onde $a \in V'_{k-1}$, o valor de d_k é igual a $\min_{a \in V'_{k-1}} \text{dist}_G(v_k, a)$. Ou seja, d_k é menor ou igual ao custo de cada uma das arestas de G' que ligam v_k a um elemento de V'_{k-1} .

Tome a sequência de vértices de V' $(r, v_1, v_2, \dots, v_m)$. Pelo provado no parágrafo acima, para cada aresta $\{a, b\}$ de G' , se a vem depois de b na sequência, temos que d_a limita

superiormente o seu custo, resultando na afirmação 2.22 para todos os pares $\{a, b\}$ de vértices de V' .

Observemos que, em G' , nenhuma aresta tem custo maior que C . Provemos isso. Tomando um circuito hamiltoniano de custo mínimo de G' , se a aresta pertence ao circuito, pela desigualdade triangular, a aresta tem custo menor ou igual ao custo do resto do circuito, pois esse “resto do circuito” representa um caminho entre seus dois vértices. Seu custo é, portanto, não mais que metade do custo do circuito. Por outro lado, se a aresta não pertence ao circuito, ela liga dois vértices do circuito (digamos, v_i e v_j). O circuito, então, pode ser visto como um par de caminhos entre v_i e v_j . Pela desigualdade triangular, o custo da aresta é menor ou igual ao custo de cada um desses caminhos e, portanto, menor ou igual à metade do custo do circuito.

Mas todo d_i tem custo igual ao custo de uma determinada aresta de G' (d_i é o custo de um caminho entre dois vértices em G'). Assim, temos que todo $d_i \leq C$.

Assim, respeitamos as condições do lema 2.16 e sabemos que a soma dos d_i é menor ou igual a $(\lceil \log |V'| \rceil + 1)C$.

Por outro lado, o lema 2.20 afirma que $C \leq a$. Assim, a soma dos d_i é menor ou igual a $(\lceil \log |V'| \rceil + 1)a$, que é $O(a \log |V'|) = O(a \log n)$, como queríamos. \square

Esse limitante superior é justo. Imase e Waxman [IW91] provam que esse protocolo tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$ (na verdade, provam mais. Em seu contexto, provam que a existência de um algoritmo on-line de custo $O(\log n)$ e provam que todo algoritmo on-line tem custo $\Omega(\log n)$). Provaremos que o limitante é justo, de outra forma, no teorema 4.5.

2.1.3 Protocolo de Prim

O protocolo ordenado não utiliza a estrutura do grafo. Exibe o mesmo comportamento para cada aresta, independente do grafo em que ela se encontra. Nessa seção, descreveremos um protocolo que se adapta ao grafo, que leva em consideração o grafo em que uma aresta se encontra para decidir sua função de custo.

O protocolo que apresentamos é chamado protocolo de Prim, por ser semelhante ao algoritmo de Prim para encontrar árvores de custo mínimo.

Provaremos que o protocolo de Prim tem preço da anarquia menor ou igual a 2 para multitransmissões. O preço da anarquia para instâncias quaisquer será $O(\log^2 n)$ porque, no caso de uma instância que não é multitransmissão, o protocolo será idêntico ao protocolo ordenado.

Definamos o *protocolo de Prim*. Ele é uma variação do protocolo ordenado. Aplicado a uma instância que não é multitransmissão, ele atribui funções de distribuição de custo como o protocolo ordenado. Aplicado a uma instância que é multitransmissão, reordena os jogadores, e atribui custos como o protocolo ordenado, mas segundo a ordem dos *jogadores*, não segundo a ordem dos pares em P .

A ordenação que o protocolo faz é a seguinte. Tome uma multitransmissão $I = (G, P, w)$. O protocolo reordena P , obtendo $P_o = ((v_1, r), (v_2, r), \dots, (v_{|P|}, r))$, caracterizada como segue. A ordenação P_o é tal que $\text{dist}_G(v_1, r)$ é mínima dentre todas as distâncias $\text{dist}_G(v_i, r)$. Já (v_2, r) é o par que minimiza $\min_{i \in \{2, 3, \dots, |P|\}} (\text{dist}_G(r, v_i), \text{dist}_G(v_1, v_i))$. O k -ésimo par é escolhido de forma análoga: um par (v_k, r) que minimiza a distância de v_k ao conjunto dos vértices presentes em pares anteriores. A escolha dentre pares que tem a mesma distância é feita de forma arbitrária.

Observemos que os lemas 2.2 e 2.3, são válidos também para o protocolo de Prim.

Já temos, nos lemas 2.2, 2.3 e 2.20, todo o necessário para provar o que queremos.

Teorema 2.23. *O protocolo de Prim tem preço da anarquia para multitransmissões menor ou igual a 2.*

Demonstração. Seja $I = (G, P, w)$ uma multitransmissão. Suponha, sem perda de generalidade, P ordenado como P_o . Tome a o custo de uma floresta de Steiner para I . Seja G' o grafo das distâncias de I .

O plano da prova é provar que todo equilíbrio tem custo menor que uma árvore geradora de custo mínimo em G' , observar que uma tal árvore tem custo menor que o custo de um circuito hamiltoniano de custo mínimo de G' e usar o lema 2.20 para limitar esse custo superiormente por $2a$.

Uma árvore geradora de G' é uma árvore que contém todos os vértices de G' .

Construamos uma árvore geradora de custo mínimo para G' . Relembremos, os vértices de G' são os pertencentes a pares de P . Começamos de um grafo sem arestas. Adicionamos a aresta que vai de r para v_1 . Essa é uma aresta de custo mínimo, dentre as que contém r . Diremos que essa é a aresta associada a v_1 . Depois, adicionamos a aresta de menor custo, do conjunto $\{r, v_1\}$ para o conjunto $V(G') \setminus \{r, v_1\}$: pela ordenação do protocolo de Prim, essa aresta tem um vértice em $\{r, v_1\}$ e o outro é v_2 . Diremos que essa é a aresta associada a v_2 . Continuamos esse procedimento, adicionando, no k -ésimo passo, a aresta associada a v_k : aquela que que liga a componente conexa que contém r a um vértice fora da componente, de distância mínima para essa componente (pela ordenação do protocolo de Prim, esse vértice será v_k).

Nessa construção, construímos uma árvore geradora de custo mínimo de G' , segundo o algoritmo de Prim.

Na construção da árvore geradora, associamos cada v_k a uma aresta. Provaremos que, em um equilíbrio qualquer, todo jogador associado ao par (v_k, r) , ou paga 0 ou paga menos do que o custo da aresta de G' associada a v_k . Seja c_k esse custo, tome j um tal jogador.

Por definição, c_k é igual ao custo do caminho de menor custo entre o vértice v_k e o conjunto $V_{k-1} = \{r, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$. Seja f_k um tal caminho. Se j é o jogador de menor número associado a (v_k, r) , sabemos que, em qualquer equilíbrio, o conjunto V_{k-1} é conectado por jogadores de número menor que j . Assim, em qualquer equilíbrio, há caminho de custo c_k para j , entre v_k e r : o caminho que começa com f_k , e depois usa somente arestas usadas por jogadores de número menor. Portanto, c_k limita superiormente o custo de j em um equilíbrio. Se j é associado a (v_k, r) , mas não é o jogador de menor número associado a (v_k, r) , ele paga 0 em um equilíbrio.

Assim temos que cada c_k limita superiormente o custo de um jogador, e os demais jogadores pagam 0. A soma dos c_k limita superiormente o custo de um equilíbrio.

Por outro lado, a soma dos c_k é um custo de uma árvore geradora mínima de G' , o que é menor que o custo de um caminho hamiltoniano de custo mínimo em G' (pois um tal caminho é uma árvore geradora). Esse custo de caminho hamiltoniano é, por sua vez, limitado superiormente por $2C$, o custo de um circuito hamiltoniano. Mas $2C \leq 2a$, pelo lema 2.20. Assim temos que $2a$ limita superiormente o custo de um equilíbrio.

Todo equilíbrio tem custo menor ou igual a duas vezes o custo de uma floresta de Steiner, o preço da anarquia é no máximo 2, como queríamos. \square

A prova do teorema 2.23 foi feita como no trabalho de Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

É natural perguntar se o limitante superior enunciado no teorema anterior é ótimo. A resposta é: essencialmente sim. Provamos a seguir que o preço da anarquia do protocolo de

Prim é limitado inferiormente por uma função que converge para 2 quando o número n de jogadores vai ao infinito.

Teorema 2.24. *O protocolo de Prim tem preço da anarquia para multitransmissões pelo menos*

$$\frac{2n}{n+1}$$

Demonstração. Faremos uma prova que não usa nenhum fato sobre o protocolo de Prim, além do fato que, quando um jogador é o único a usar uma aresta, ele paga por ela integralmente.

A prova será baseada no exemplo da figura 2.1.

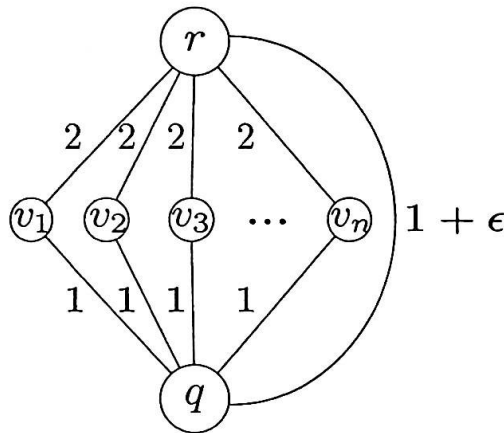


Figura 2.1: Grafo com preço da anarquia alto para o protocolo de Prim

Na figura 2.1, temos uma multitransmissão com n pares: $P = ((v_1, r), (v_2, r), \dots, (v_n, r))$. Denotemos j_i o jogador associado ao par (v_i, r) . Não estabelecemos qual será a ordenação que o protocolo de Prim dará aos jogadores pois isso não fará diferença, a prova vale independente dessa ordenação. Afirmamos que nesse exemplo, a configuração em que cada jogador j_i escolhe a aresta $\{v_i, r\}$ é um equilíbrio. Isso porque, nessa configuração, cada jogador paga exatamente 2, e todo caminho alternativo, para qualquer jogador, tem custo 2 ou maior.

Já a floresta de Steiner (desde que $n \geq 2$) é o conjunto das arestas que contém q (i.e.: $\{v_1, q\}, \{v_2, q\} \dots \{v_n, q\}$, e $\{q, r\}$).

Assim, o custo de um equilíbrio é $2n$, e o custo da floresta de Steiner é $n + (1 + \epsilon)$.

Assim, uma instância como a da ilustração tem preço da anarquia $2n / (n + 1 + \epsilon)$.

Recordando que o preço da anarquia de um protocolo T para multitransmissões com n jogadores é definido como o supremo para todas as instâncias com n jogadores, temos que esse valor é pelo menos $2n / (n + 1)$ e o preço da anarquia do protocolo de Prim é maior ou igual a $2n / (n + 1)$, como queríamos. \square

Esse exemplo foi adaptado do exemplo 3.4, presente no livro de Vazirani [Vaz01].

2.2 Protocolo de Shapley

O protocolo de Shapley é o protocolo mais estudado na literatura. Citaremos alguns trabalhos da literatura sobre esse protocolo em breve.

A uma aresta e , de custo $w(e)$, o protocolo associa a função de distribuição de custos

$$\xi_e(i, S) = \begin{cases} \frac{w(e)}{|S|} & \text{se } i \in S; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, o protocolo de Shapley distribui o custo de uma aresta igualmente entre todos os jogadores que a usam.

O protocolo é assim chamado porque o valor que atribui para os custos dos jogadores pode ser obtido por uma aplicação do valor de Shapley [Sha88], um conceito de solução para jogos com utilidade transferível (vide o livro de Nissan e colaboradores [NRTV07], cap 15).

Sobre o protocolo de Shapley, desejamos provar dois fatos. Sendo n o número de jogadores, vamos provar que seu preço da anarquia é n e que seu preço da estabilidade é H_n ou menos.

Mas primeiro, precisamos provar que esse protocolo de fato produz equilíbrios.

Teorema 2.25. *O protocolo de Shapley produz, para cada instância do problema de Steiner, um jogo que tem pelo menos um equilíbrio.*

Demonstração. Tome uma instância I do problema de Steiner, e construa um jogo de Steiner usando o protocolo de Shapley.

A prova desse teorema basicamente consiste em definir um outro “custo” para uma configuração, que chamaremos de potencial e argumentar que, em uma configuração em que há algum jogador cuja jogada não é uma melhor resposta, se esse jogador alterar sua jogada para uma melhor resposta, o potencial é reduzido.

Poderemos, então, partindo de uma configuração qualquer, alterar a estratégia de um jogador para uma melhor resposta, produzindo uma configuração com menor potencial. Como a quantidade de configurações, no jogo associado a I , é finita, fazendo esse processo repetidas vezes, construiremos uma configuração de potencial minimal, em que não há jogador cuja jogada não seja uma melhor resposta. Ou seja, construiremos um equilíbrio.

Definamos a função potencial.

Dada uma instância do problema de Steiner, seja G o grafo associado a essa instância, m uma configuração do jogo associado a I . Dada uma aresta e de G , denotaremos seu custo por $w(e)$. Denotemos por $S(e, m)$ o conjunto de jogadores que usam a aresta e na configuração m , e por $E(m)$ o conjunto de arestas que algum jogador usa na configuração. O potencial de uma configuração é

$$\Phi(m) = \sum_{e \in E(m)} w(e) \cdot H_{|S(e, m)|}, \quad (2.26)$$

onde H_i é o i -ésimo número harmônico.

Desejamos provar que, se m não é um equilíbrio, podemos tomar um jogador k cuja estratégia não é uma melhor resposta para m , alterar sua estratégia para uma melhor resposta, produzindo uma configuração m' tal que $\Phi(m') < \Phi(m)$.

Ao alterar sua estratégia, k deixou de usar algumas arestas. Tome e_1 uma tal aresta. Ao deixar de usar e_1 , k reduziu seu custo em $w(e_1)/S(e_1, m)$. Por k ter deixado de usar e_1 , o potencial foi reduzido exatamente de $w(e_1)/S(e_1, m)$: o termo correspondente a e_1 em (2.26) mudou de $H_{|S(e_1, m)|}$ para $H_{|S(e_1, m)|-1}$.

O mesmo ocorre para as arestas que k passou a usar, na configuração m' : o aumento de custo que k incorreu por usar uma tal aresta é igual ao aumento no termo correspondente a uma tal aresta, no cálculo de Φ .

Essencialmente, o que provamos nos dois parágrafos acima é que, ao k alterar sua jogada, a sua variação de custo foi exatamente a variação da função potencial. Como, por hipótese,

k reduz seu custo, de m para m' , temos que $\Phi(m') < \Phi(m)$, como queríamos. Pela finitude do conjunto de configurações, temos a existência de um equilíbrio, como queríamos. \square

O conceito de função potencial é um conceito geral, utilizado para provar a existência de equilíbrios de jogos diversos. O conceito foi introduzido por Rosenthal [Ros73], e generalizado por Monderer e Shapley [MS96].

O teorema 2.25 introduziu a função potencial. Usando essa ferramenta, podemos limitar o preço da estabilidade do protocolo de Shapley.

Teorema 2.27. *O protocolo de Shapley tem preço da estabilidade menor ou igual a H_n , onde n é o número de jogadores de uma instância.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que, em um jogo gerado pelo protocolo de Shapley, o potencial em uma configuração é sempre um limitante superior do custo dessa configuração.

Tomemos uma instância qualquer do problema de Steiner, e uma floresta de Steiner dessa instância. A partir dessa floresta de Steiner, criemos uma configuração do jogo gerado pelo protocolo de Shapley: a configuração em que cada jogador escolhe, como estratégia, o caminho entre seus dois vértices presente na floresta de Steiner.

Sendo n o número de jogadores da instância, C o custo da floresta de Steiner, essa configuração tem potencial no máximo $H_n \cdot C$.

Como na prova de 2.25, alteremos essa configuração: se houver jogador k cuja estratégia, na configuração, não é uma melhor resposta, produzimos uma nova configuração, onde a estratégia de k é uma melhor resposta. Com isso, reduzimos o potencial. Fazendo isso repetidas vezes, obtemos uma configuração de potencial menor ou igual a $H_n \cdot C$, que é um equilíbrio.

Uma configuração tem custo menor ou igual que o seu potencial. Assim, o preço da estabilidade, para essa instância, é menor ou igual a H_n .

Essa prova se aplica a qualquer instância do problema de Steiner, então, o preço da estabilidade do protocolo é de fato limitado superiormente pela função H_n . \square

A prova dos teoremas 2.25 e 2.27 é devida a Anshelevich e colaboradores [ADK⁺08].

O teorema 2.27 prova um limitante superior para o preço da estabilidade. Infelizmente, não se sabe quão justo é esse limitante superior. O maior limitante inferior conhecido é $348/155 \approx 2.245$, devido a Bilò e colaboradores [BCFM13].

O teorema 2.27 foi melhorado por Mamageishvili, Mihalák e Montemezzani [MMM14]. Eles provam que o preço da estabilidade do protocolo de Shapley é uma função limitada por $H_{n/2} + o(1)$.

O preço da estabilidade para multitransmissões do protocolo de Shapley é um pouco menor, $O(\log n / (\log \log n))$, como provado por Li [Li09]. O preço da estabilidade para multitransmissões é limitado inferiormente por 1.862, como provado por Bilò e colaboradores [BCFM13].

Ao invés de multitransmissões, podemos considerar uma classe de instâncias mais restrita: as *difusões*. Uma difusão é uma multitransmissão em que todo vértice da instância pertence a pelo menos um jogador. Definimos de forma natural o preço da estabilidade para difusões. Bilo, Flammini e Moscardelli [BFM14] provaram que o preço da estabilidade do protocolo de Shapley para difusões é constante.

Passamos agora a discutir o preço da anarquia do protocolo de Shapley. Provaremos que esse preço da anarquia é n , que o preço da anarquia para multitransmissões é n , e que o preço da anarquia para difusões é n .

Teorema 2.28. *O preço da anarquia do protocolo de Shapley é n , onde n é o número de jogadores.*

Demonstração. Tome uma instância do problema de Steiner, cujo ótimo tem custo C . Estudemos o jogo correspondente.

De início, argumentaremos que o preço da anarquia não pode ser maior do que n . Como a floresta de Steiner tem custo C e tem caminho entre os dois vértices de qualquer jogador, temos que, independente das estratégias dos demais, cada jogador tem estratégia de custo não maior do que C . Assim, não pode haver equilíbrio com custo maior que $C \cdot n$.

Construamos um exemplo de instância do problema de Steiner com preço da anarquia exatamente n .

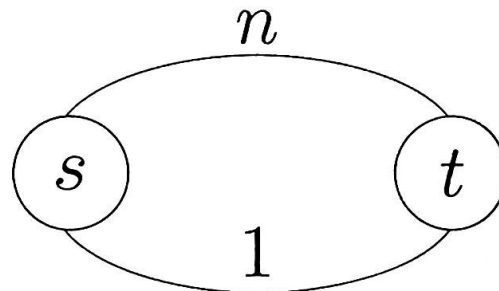


Figura 2.2: Grafo com preço da anarquia alto para o protocolo de Shapley

A figura 2.2 representa uma instância com n jogadores, todos associados ao par de vértices (s, t) . Claramente, a árvore de Steiner é a aresta entre s e t de custo 1. Porém, a configuração em que todo jogador utiliza a aresta de custo n é um equilíbrio. Isso porque todo jogador paga exatamente 1 nesse estado, e, para todo jogador, a única outra estratégia tem o mesmo custo (1).

Exibimos, para todo n , uma instância do problema de Steiner com preço da anarquia n . Também provamos que não há instância com preço da anarquia maior que n . O preço da anarquia do protocolo de Shapley é, portanto, exatamente n . \square

O preço da anarquia do protocolo de Shapley para multitransmissões e difusões também é n . A prova é a mesma. Note que o exemplo dado é uma difusão (e, portanto, uma multitransmissão).

2.3 O caso orientado

Nessa seção, discutimos o problema de Steiner orientado.

Antes de mais nada, observemos que as provas dos resultados 2.2 e 2.25 permanecem válidas para o caso orientado. Usando o argumento de 2.2, é fácil ver que o protocolo ordenado e o protocolo de Prim ambos geram equilíbrios para toda instância do problema de Steiner orientado. Usando o argumento de 2.25, temos o mesmo para o protocolo de Shapley.

Nessa seção provamos que, infelizmente, a “qualidade” do protocolo ordenado e do protocolo de Prim não são preservadas, para o caso orientado. Para o protocolo de Prim o preço da anarquia para multitransmissões orientadas é n (teorema 2.29). Generalizamos esse resultado o protocolo ordenado, para para o protocolo de Shapley, e para uma classe grande de protocolos no teorema 2.30.

Também provamos que o protocolo de Shapley tem preço da estabilidade menor ou igual a H_n , no teorema 2.31 (que é essencialmente um comentário dizendo que a prova de 2.27 também é válida para digrafos).

Começamos com o preço da anarquia. A prova é relativamente direta. É bastante independente dos protocolos. Nesse sentido, tem o mesmo “espírito” de provas posteriores desse trabalho.

Teorema 2.29. *O protocolo de Prim tem preço da anarquia para grafos orientados e preço da anarquia para multitransmissões orientadas iguais a n .*

Demonstração. Como no teorema 2.28, podemos afirmar que o preço da anarquia do protocolo de Prim não é maior que n : se fosse, necessariamente haveria jogador cuja estratégia não é uma melhor resposta.

Para afirmar que o preço da anarquia é no mínimo n , construímos a instância da figura 2.3. Nessa instância, cada jogador j quer ligar v_j a r .

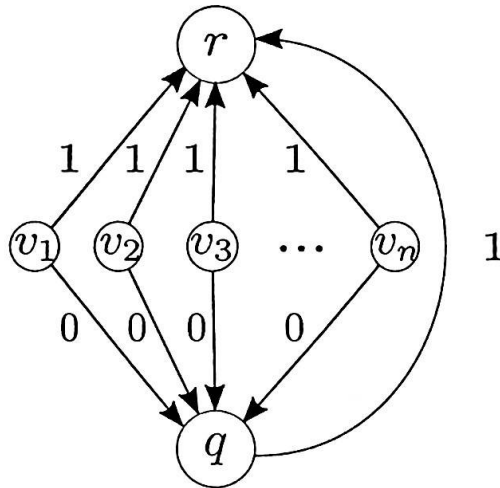


Figura 2.3: Exemplo com preço da anarquia alto para grafos orientados

O ótimo é o conjunto de todas as arestas envolvendo q , e tem custo 1. A configuração em que cada jogador j usa a aresta direta entre v_j e r é um equilíbrio. Essa configuração tem custo n , provando que o preço da anarquia é, de fato, no mínimo n .

Como o exemplo é uma multitransmissão, o preço da anarquia para multitransmissões orientadas é limitado inferiormente por n .

Provamos que o preço da anarquia para multitransmissões orientadas é maior ou igual a n , e menor ou igual a n . Portanto, é exatamente n . \square

Apesar de o enunciado do teorema 2.29 se referir ao protocolo de Prim, a mesma prova vale para o protocolo ordenado e para o protocolo de Shapley. De fato essa prova vale para todos os protocolos em que, quando um jogador é o único a usar uma aresta, paga seu custo integralmente. Registremos esse fato no teorema seguinte.

Teorema 2.30. *Seja T um protocolo em que, se um jogador é o único a usar uma aresta, paga integralmente o custo dessa aresta. O preço da anarquia de T para grafos orientados e preço da anarquia de T para multitransmissões orientadas são iguais a n .*

Demonstração. A prova do teorema 2.29 não usa nenhuma particularidade do protocolo de Prim.

Para o exemplo construído, ela exhibe um equilíbrio de custo n , usando apenas o fato que, quando um jogador é o único a usar uma aresta, paga integralmente seu custo. Exhibe também um ótimo de custo 1, cuja existência obviamente não depende do protocolo.

Assim, a prova de 2.29 prova o resultado mais forte que enunciamos no teorema presente. \square

Nossa apresentação dos dois teoremas anteriores é baseada no trabalho de Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

Por fim, registremos o fato de que o preço da estabilidade do protocolo de Shapley para grafos orientados é menor ou igual a H_n .

Teorema 2.31. *O protocolo de Shapley tem preço da estabilidade para grafos orientados menor ou igual a H_n , onde n é o número de jogadores.*

Demonstração. A prova do teorema 2.27 não depende de o grafo ser não-orientado. Podemos definir o mesmo potencial para grafos orientados. O potencial é uma quantidade que decresce sempre que um jogador muda de estratégia de forma a reduzir seu custo; partindo de um ótimo para a instância com custo a , podemos reduzir o potencial e obter um equilíbrio com custo global menor ou igual a $H_n \cdot a$. \square

Provaremos posteriormente (no teorema 4.18) que o protocolo de Shapley (e mais outros protocolos) tem preço da estabilidade para multitransmissões orientadas maior ou igual a H_n . Por isso, o preço da estabilidade para multitransmissões orientadas (e o preço da estabilidade para grafos orientados) desse protocolo será exatamente H_n .

2.4 Dinâmica de melhor resposta

Um jogo pode ter equilíbrios, mas, ao ser apresentado para jogadores, não “atingir” um equilíbrio: pode ocorrer que os jogadores “escolham” configurações que não são equilíbrios “para sempre”. Nessa seção, estudamos essa possibilidade, e provamos que os jogos gerados pelo protocolo ordenado, pelo protocolo de Prim e pelo protocolo de Shapley não têm essa característica indesejável.

Em um jogo, uma sequência de configurações (m_1, m_2, \dots) é chamada uma *sequência de melhores respostas* se, para todo $i > 1$, temos que m_i e m_{i-1} diferem exatamente na estratégia de um jogador, a estratégia desse jogador em m_{i-1} não era uma melhor resposta para m_{i-1} , mas a estratégia dele em m_i é uma melhor resposta para m_i .

Dizemos que um jogo respeita a *dinâmica de melhor resposta* se toda sequência de melhores respostas desse jogo é finita. Isso só ocorre se toda tal sequência termina em uma configuração tal que todo jogador está usando uma melhor resposta, se toda tal sequência termina em um equilíbrio.

Provamos, em seguida, que o protocolo de Shapley, o protocolo de Prim e o protocolo ordenado sempre geram jogos que respeitam a dinâmicas de melhor resposta.

Teorema 2.32. *Jogos gerados pelo protocolo de Shapley sempre respeitam a dinâmica de melhor resposta.*

Demonstração. Tomemos um tal jogo.

Como vimos no teorema 2.25, toda vez que um jogador muda sua jogada de uma não-melhor resposta para uma melhor resposta, isso reduz o valor da função potencial associada.

O conjunto de configurações do jogo é finito, assim há um número finito de valores de potencial possíveis para o jogo. Mas toda sequência de melhores respostas corresponde a uma sequência estritamente decrescente de potenciais. Isso implica que toda sequência de melhores respostas é finita. \square

O teorema anterior é devido a Anshelevich e colaboradores [ADK⁺08].

No próximo teorema, provamos que tanto o protocolo de Prim quanto o protocolo ordenado respeitam a dinâmica de melhor resposta.

Teorema 2.33. *Togo jogo gerado pelo protocolo de Prim ou pelo protocolo ordenado respeita a dinâmica de melhor resposta.*

Demonstração. Faremos a prova para o protocolo ordenado. A prova para o protocolo de Prim é essencialmente a mesma.

Fazemos uma prova por indução no número de jogadores do jogo gerado.

Se o jogo tem 1 jogador, toda sequência de melhores respostas tem tamanho 1 (se inicia com equilíbrio) ou 2 (se não inicia com equilíbrio).

Suponha que, para todo jogo com n jogadores, toda sequência de melhores respostas é finita. Tomemos um jogo com $n + 1$ jogadores e uma sequência de melhores respostas qualquer desse jogo, e provemos que essa sequência é finita.

Seja m_i a primeira configuração em que a estratégia do jogador 1 difere da sua estratégia em m_{i-1} . Provaremos que, se não há tal configuração, a sequência é finita. Se há, que o restante da sequência de melhores respostas é necessariamente finito.

Tome a configuração inicial m_1 . Defina H_1 o grafo onde toda aresta usada pelo jogador 1 tem custo 0. Enquanto 1 não alterar sua estratégia, a sequência de melhores respostas equivale a uma sequência de melhores respostas para um jogo com n jogadores em H_1 . Portanto, uma sequência em que 1 não altera sua estratégia é necessariamente finita.

Uma vez que a jogada do jogador de menor número passe a ser uma melhor resposta, jamais deixa de ser (pois a melhor resposta desse jogador independe das jogadas dos demais). Depois disso, o restante da sequência de melhores respostas equivale a uma sequência de melhores respostas, com n jogadores, em um outro grafo H_1' . Ou seja, a sequência de configurações depois de m_i é finita.

Provamos que toda sequência de melhores respostas para $n + 1$ jogadores é finita, o resultado desejado segue por indução. \square

Nossa apresentação do teorema anterior é baseada no trabalho de Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

Capítulo 3

O Espaço dos Protocolos

Nesse capítulo, estudamos os possíveis protocolos para um jogo de Steiner. Em vez de nos ocuparmos de protocolos específicos (como no capítulo anterior), definiremos duas classes de interesse: os protocolos admissíveis e os protocolos uniformes.

Provaremos uma caracterização dos protocolos uniformes, que nos permitirá, no capítulo seguinte, achar limitantes inferiores para o preço da anarquia e da estabilidade para a classe inteira. Dessa forma, poderemos dizer que alguns protocolos específicos são “ótimos”, ou que estão “próximos do ótimo”.

Para os protocolos admissíveis, não apresentaremos caracterização. Mesmo assim, conseguiremos, no capítulo seguinte, exibir limitante inferior para o preço da anarquia.

A seção seguinte apresenta os protocolos admissíveis e uniformes, que são os tipos de protocolos que queremos estudar. A seção 3.2 apresenta os protocolos baseados em potencial, os protocolos lineares e os protocolos positivos, que são definições instrumentais que fazemos para auxiliar no estudo dos protocolos uniformes. Na seção 3.3, provamos a caracterização dos protocolos lineares uniformes.

O conteúdo desse capítulo é baseado no trabalho de Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

3.1 Protocolos admissíveis e uniformes

Um protocolo *admissível* é um protocolo tal que, para toda instância (não orientada) do problema de Steiner (G, P, w) , o protocolo induz um jogo que respeita as seguintes propriedades:

Balanceamento de orçamento: Um protocolo respeita o balanceamento de orçamento quando tem as duas seguintes propriedades.

- Um jogador só paga por arestas que utiliza. Essa hipótese está implícita na nossa definição do custo c_i de um jogador i como $\sum_{e \in m_i} \xi_e(i, S(e, m))$. A somatória poderia, em princípio, ser sobre todas as arestas do grafo.
- $w(e) = \sum_{i \in S(e, m)} \xi_e(i, S(e, m))$, se $S(e, m)$ contém algum jogador.

Ou seja, cada jogador só paga pelas arestas que usa e, dada uma aresta em uso, a soma do que os jogadores pagam por ela é igual ao custo da aresta.

Estabilidade: O jogo tem pelo menos um equilíbrio.

Separabilidade: Um protocolo associa cada aresta de um jogo de Steiner com uma função de distribuição de custo. A separabilidade é uma propriedade sobre essas funções de distribuição de custo: em um protocolo que respeita a separabilidade, a função ξ_e associada a uma aresta e tem como argumentos apenas o jogador i e o conjunto $S(e, m)$ de jogadores que usam e .

Somente trabalharemos com protocolos que respeitam a separabilidade, nesse texto. Se quiséssemos trabalhar com classes mais amplas de protocolos, poderíamos ter definido ξ_e como uma função que tem todas as escolhas de todos os jogadores - m - como argumento.

Um protocolo *uniforme* é um protocolo admissível que respeita uma propriedade a mais.

Uniformidade: Um protocolo admissível respeita a uniformidade quando a função ξ_e que ele associa a uma aresta e depende apenas do peso dessa aresta e do número de jogadores da instância do problema de Steiner.

Ou seja, dadas duas instâncias do problema de Steiner $I_0 = (G_0, P_0, w_0)$ e $I_1 = (G_1, P_1, w_1)$, com $|P_0| = |P_1|$, dadas uma aresta $e_0 \in G_0$ e uma aresta $e_1 \in G_1$ com $w_0(e_0) = w_1(e_1)$, temos que ξ_{e_0} a função de distribuição de custos que o protocolo gera para e_0 é igual a ξ_{e_1} , a função gerada para e_1 .

3.1.1 Exemplos

O protocolo ordenado e o protocolo de Shapley são exemplos de protocolos uniformes.

Tome por exemplo o protocolo ordenado. Em um jogo gerado por ele, de fato os jogadores que usam uma aresta pagam seu custo integral, e nenhum jogador paga por aresta que não usa (balanceamento de orçamento). Em um tal jogo, de fato sempre há equilíbrio (lema 2.2). Em um tal jogo, o custo que um jogador paga por uma aresta depende apenas do seu número e do conjunto de jogadores que usam a aresta, não do restante da configuração (separabilidade). Em dois jogos distintos em que o mesmo conjunto de jogadores usa uma aresta de mesmo custo, de fato os custos de cada jogador são iguais: apenas o jogador de menor número paga. Assim, o protocolo respeita a uniformidade.

Já o protocolo de Prim é admissível, mas não uniforme. Sua admissibilidade é provada como provamos para o protocolo ordenado, mas, quanto a uniformidade, há duas instâncias com uma aresta de mesmo custo, tais que, com o mesmo conjunto de jogadores usando a aresta da primeira instância ou a da segunda, o jogador que paga por essa aresta muda. Isso porque a ordenação que o protocolo usa não é fixa.

3.2 Protocolos lineares, positivos e baseados em potenciais

Vamos usar três classes adicionais, no estudo dos protocolos uniformes: os protocolos lineares, os protocolos positivos e os protocolos baseados em potenciais.

Definimos essas classes de protocolo nas três seções seguintes, apresentando exemplos logo em seguida (no fim da seção, ou, no caso dos protocolos baseados em potenciais, em seção separada).

3.2.1 Protocolos lineares

Um protocolo uniforme é dito *linear* se, dada aresta e_w com custo w , e uma aresta e_1 com custo 1, vindas da mesma instância do problema de Steiner, temos

$$\xi_{e_w} = w \cdot \xi_{e_1}. \quad (3.1)$$

Assim, um protocolo uniforme linear é totalmente caracterizado pelas funções que associa às arestas de custo unitário: fixo n o número de jogadores da instância, tome uma instância com uma aresta de custo 1. Da função que esse protocolo associa a esta aresta, podemos calcular as funções que ele associa a qualquer outra aresta, tanto naquela instância (pela equação (3.1)) quanto em qualquer outra instância do problema de Steiner de n jogadores (usando algumas vezes a equação (3.1) e propriedade da uniformidade).

Diremos que um protocolo uniforme que respeita (3.1) tem a propriedade de *linearidade*.

É nossa intenção provar uma caracterização dos protocolos uniformes lineares. Para podermos usar essa caracterização para limitar os preços da anarquia e estabilidade de todos os protocolos uniformes, cumpre notar que há uma relação forte entre os preços da anarquia e estabilidade de protocolos uniformes e os dos protocolos uniformes lineares.

Dado um protocolo uniforme T , podemos definir um protocolo *linearizado* T' da seguinte forma. Fixo n , tome ξ_1 a função que T associa às arestas de custo 1. O protocolo T' associará a uma aresta e de custo w a função $\xi_e = w \cdot \xi_1$. Diremos que T' é o *protocolo linearizado* de T , ou ainda que é a *linearização* de T .

Provamos, em seguida, uma relação entre os preços da anarquia e estabilidade de T e T' . Essencialmente diremos que T' é um protocolo “não pior” que T .

Teorema 3.2. *Dado um protocolo T com preço da estabilidade $h(n)$ a sua linearização T' tem preço da estabilidade igual ou inferior a $h(n)$.*

Demonstração. Fixado um determinado número n de jogadores, tome uma instância I qualquer do problema de Steiner. Pretendemos provar que há uma outra instância I_2 , com mesmo número de jogadores, tal que $E(T', I) = E(T, I_2)$.

Com isso, teremos que, para toda instância I com n jogadores, $E(T', I)$ é um dos custos da estabilidade utilizados no cálculo de $E(T, n)$. Ou seja, $E(T', n)$ é o supremo de um conjunto B_1 de racionais, e $E(T, n)$ é o supremo de um conjunto B_2 que contém B_1 . Assim, $E(T, n) \geq E(T', n)$. Como a prova se aplica para qualquer n que fixemos, teremos provado o que queríamos.

A construção é a seguinte: a partir de I , construiremos I_1 , com todas as arestas de custo inteiro, e I_2 , com todas as arestas de custo unitário, de forma que $E(T', I) = E(T', I_1) = E(T', I_2)$.

Para construir I_1 , tomamos o mínimo múltiplo comum dos denominadores de todos os custos de arestas, e multiplicamos o custo de cada aresta por esse número. O ótimo global (o custo das florestas de Steiner) foi multiplicado por um inteiro, e, como o protocolo T' é linear, o custo de cada equilíbrio foi multiplicado por esse mesmo inteiro, de forma que não alteramos o preço da estabilidade.

Para construir I_2 , basta tomar cada aresta e de I_1 e substituí-la por $w(e)$ arestas de custo 1, onde $w(e)$ é o custo de e em I_1 . Essa operação não altera o custo das florestas de Steiner, e também mantém o custo de cada equilíbrio (pois T' é linear).

Como mantivemos o custo das florestas de Steiner, e o custo de cada um dos equilíbrios, temos $E(T', I_2) = E(T', I)$. Por outro lado, como I_2 tem apenas arestas de custo unitário, temos que o jogo que T' induz sobre I_2 é idêntico ao jogo que T induz (isso porque, por defi-

nição, a função de distribuição de custos de ambos coincide para arestas de custo unitário). Assim, temos $E(T, I_2) = E(T', I_2) = E(T', I)$, como queríamos. \square

Esse resultado é bastante geral, valendo para o preço da anarquia, para o preço da anarquia (e estabilidade) para multitransmissões e para o preço da anarquia (e estabilidade) para grafos orientados.

Teorema 3.3. *Tome um protocolo T e sua linearização T' .*

- (i) T' tem preço da anarquia (e preço da estabilidade) igual ou inferior a T .
- (ii) T' tem preço da anarquia (e preço da estabilidade) para multitransmissões igual ou inferior a T .
- (iii) T' tem preço da anarquia (e preço da estabilidade) para grafos orientados igual ou inferior a T .
- (iv) T' tem preço da anarquia (e preço da estabilidade) para multitransmissões orientadas igual ou inferior a T .

Demonstração. Para provar o item i: Já temos o fato para o preço da estabilidade. Notemos que a prova do teorema 3.2 também funciona para o preço da anarquia, pois as transformações aplicadas preservam todos os equilíbrios.

Para provar o item ii: as transformações preservam multitransmissões. Se houver uma multitransmissão com preço da anarquia c para T' , as transformações da prova do teorema 3.2 produzem uma multitransmissão com preço da anarquia c , para T .

Para provar o item iii: a prova do teorema 3.2 não é afetada por a instância ser orientada. O item iv é provado usando os dois argumentos dos itens anteriores. \square

Notemos, por fim, que T' é um protocolo uniforme: respeita a separabilidade por causa da definição de função de distribuição de custo; a uniformidade, por usar, para cada n uma única $w \cdot \xi_1$ para distribuir custo w entre n jogadores; o balanceamento de orçamento, pelo balanceamento de orçamento de T (em particular, pelo fato de que T respeita o balanceamento de orçamento nas funções que distribuem custo 1); o equilíbrio, pelo equilíbrio de T (fazendo construção similar à do teorema 3.2, e usando a estabilidade de T para grafos com arestas de custo 1).

Essencialmente, o que estabelecemos é que podemos provar limitantes inferiores para o preço da anarquia (e estabilidade) da classe de protocolos uniformes lineares, e esses limitantes se aplicam à classe dos protocolos uniformes.

Dos protocolos que já apresentamos, tanto o protocolo de Shapley quando o protocolo ordenado são lineares. O protocolo de Prim não é um protocolo uniforme, mas seria natural estender a definição de linear para protocolos não uniformes, de forma a considerá-lo linear. Os teoremas 3.2 e 3.3 levam a crer que não há muito interesse em protocolos não lineares, porque suas linearizações não tem desempenho pior.

3.2.2 Protocolos positivos

Em seguida, definimos os protocolos em que *nenhum jogador jamais paga zero por uma aresta que usa*, os *protocolos positivos*.

Definição 3.4. *Uma função de distribuição de custos ξ , que distribui custo r entre n jogadores é dita positiva se para todo $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $i \in S$ temos $\xi(i, S) > 0$.*

Definição 3.5. *Um protocolo é dito positivo se para toda aresta e com custo não nulo o protocolo associa ξ_e positiva.*

O protocolo de Shapley é um exemplo de protocolo positivo. O protocolo ordenado e o protocolo de Prim, não, porque há situações em que um jogador não paga por uma aresta que está utilizando.

3.2.3 Protocolos baseados em potenciais

Nessa seção, definimos um tipo de protocolo uniforme linear: o protocolo baseado em potenciais.

Estamos interessados em protocolos baseados em potenciais como uma caracterização dos protocolos uniformes lineares. O principal teorema apresentado nesse trabalho (teorema 3.45) é o fato de que todo protocolo uniforme linear é um protocolo baseado em potenciais.

Tome o conjunto $J = \{1, 2, \dots, n\}$ de jogadores de um jogo. Um *potencial* é uma função f , de partes de J aos racionais não negativos, estritamente crescente (se $C_1 \subset C_2$, então $f(C_1) < f(C_2)$) que vale 0 para o conjunto vazio e para $S \neq \emptyset$, é tal que

$$\sum_{i \in S} \frac{f(S) - f(S \setminus \{i\})}{f(\{i\})} = 1. \quad (3.6)$$

Usando um potencial f para n jogadores, podemos definir uma função ξ_1 que distribui um custo 1 entre n jogadores: definiremos $\xi_1(i, S) = \left(f(S) - f(S \setminus \{i\}) \right) / f(\{i\})$. Chamamos uma tal função de *função de distribuição de custos baseada em potencial único*.

Observe que, pela definição de potencial, essa função é uma função de distribuição de custos válida (dá custo sempre não negativo, e custo zero para jogadores fora de S) e necessariamente respeita o balanceamento de orçamento.

Fixando um potencial f_n para cada inteiro n , sendo ξ_1^n a função de distribuição de custos baseada em potencial único associada a f_n , um protocolo que atribui $w(e) \xi_1^n$ para cada aresta e de custo $w(e)$ em um jogo com n jogadores é chamado de *protocolo simples baseado em potenciais*.

Teorema 3.7. *Cada protocolo simples baseado em potenciais é protocolo uniforme linear positivo. Além disso, todos os jogos gerados por um tal protocolo respeitam a dinâmica de melhor resposta.*

Demonstração. Para provar que um protocolo simples baseado em potenciais é uniforme linear positivo, temos que verificar seis propriedades: que o protocolo respeita o balanceamento de orçamento, a estabilidade, a separabilidade, a uniformidade, a linearidade e a positividade.

Seja ξ_1 uma função que distribui custo 1, gerada a partir de um potencial. Essa função respeita o balanceamento de orçamento. Por definição, cada jogador só paga por arestas que usa. Pela equação 3.6, as arestas utilizadas são integralmente pagas, sem pagamento em excesso. A equação garante que a soma dos custos que cada jogador paga seja 1, quando um protocolo simples baseado em potenciais é aplicado a uma aresta de custo 1. Garante também que, em arestas de custo w , que os jogadores paguem exatamente w , pois, nesse caso, a função de distribuição de custos é $w \cdot \xi_1$.

Provaremos a estabilidade usando um argumento de função potencial, como no teorema 2.25. Desejamos exibir uma função que receba uma configuração e retorne um número, de

forma que, se um jogador cuja estratégia não era uma melhor resposta no equilíbrio mudar sua estratégia para uma melhor resposta, temos uma redução nessa função.

Dada uma instância $I = (G, P, w)$ do problema de Steiner, seja m uma configuração do jogo associado a I . Dada uma aresta e do grafo G associado à instância, denotaremos seu custo por $w(e)$. Definiremos o potencial de uma configuração m como

$$\Phi(m) = \sum_{e \in E(G)} w(e) \cdot f(S(e, m)).$$

Esse potencial tem a propriedade que queremos: dada uma configuração m , com um jogador k cuja estratégia não é uma melhor resposta e uma configuração m' , em que k muda de estratégia, para uma melhor resposta, temos que $\Phi(m) > \Phi(m')$. Provemos esse fato.

Seja e_1 uma aresta que k não usa em m , mas usa em m' . O aumento do potencial, por k passar a usar e_1 , é $w(e_1) \left(f(S(e_1, m')) - f(S(e_1, m)) \right)$, que também podemos expressar como $w(e_1) \left(f(S(e_1, m')) - f(S(e_1, m) \setminus \{k\}) \right)$. O aumento do custo de k , por ele estar usando e_1 foi exatamente essa variação de potencial, dividida por $f(\{k\})$.

Seja e_2 uma aresta que k usa em m , mas não usa em m' . A diminuição do potencial, por k deixar de usar e_2 , foi $w(e_2) \left(f(S(e_2, m)) - f(S(e_2, m')) \right)$, que também podemos expressar como $w(e_2) \left(f(S(e_2, m)) - f(S(e_2, m) \setminus \{k\}) \right)$. A diminuição do custo de k , por ele ter deixado de usar e_2 foi exatamente essa quantidade, dividida por $f(\{k\})$.

Ou seja, sendo Δ_k a variação do custo de k e Δ_Φ a variação do potencial, temos $\Delta_k = \Delta_\Phi / f(\{k\})$. Assim, temos que, se k reduziu seu custo, houve uma redução do potencial (desde que $f(\{k\})$ seja positivo, o que é sempre verdade, pois f é estritamente crescente, e $f(\emptyset) = 0$).

Com uma tal função potencial, provamos a estabilidade: dadas uma instância e uma configuração qualquer do jogo associado, se há jogador cuja jogada não é melhor resposta, mudamos a resposta dele para uma melhor resposta, reduzindo o potencial. Como o conjunto de configurações é finito, há um mínimo do potencial, que é, necessariamente, um equilíbrio do jogo associado à instância. Assim, para toda instância, o jogo associado tem equilíbrio.

Usando funções potencial também podemos provar que todo jogo gerado por um protocolo baseado em potencial único respeita a dinâmica de melhor resposta, de maneira completamente análoga à prova de 2.32.

A separabilidade, uniformidade e linearidade vêm trivialmente da definição do protocolo.

Resta a positividade (todo jogador que usa uma aresta de custo não nulo paga mais do que 0 por ela). Já afirmamos que $f(\{k\})$ é maior que 0, para todo jogador k . Temos, também, que $f(S) - f(S \setminus \{k\})$ é mais do que 0 para qualquer conjunto S de jogadores e qualquer k , porque, por definição, f é estritamente crescente. Tomando uma aresta e com $w(e) > 0$ que k use, o custo que k paga por ela é (para S adequado) $w(e) \cdot \left(f(S) - f(S \setminus \{k\}) / f(\{k\}) \right)$, que é um número positivo. Provamos a positividade do protocolo.

Assim, provamos todas as propriedades desejadas. \square

As funções de distribuição de custos baseadas em potencial único são um conjunto grande de funções (como provaremos em breve). Mas temos necessidade de um conjunto um pouco maior. A seguir, definimos as *funções de distribuição de custos baseadas em potenciais*, funções de distribuição de custos cuja definição usa um ou mais potenciais.

Tome S_1, S_2, \dots, S_m uma partição do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Para cada S_k , tome uma função f_k , que vai de S_k para $\{1, 2, \dots, |S_k|\}$ e uma função de distribuição de custos ξ^k que distribui custo 1 entre $|S_k|$ jogadores.

Vamos definir $\xi(i, S)$ a *concatenação* das funções ξ^k . A concatenação é uma função que distribui custo 1 entre n jogadores. Sendo S_p o conjunto de menor índice dentre os que intersectam S , temos:

- $\xi(i, S) = \xi^p(f_p(i), f_p(S_p \cap S))$, se $i \in S_p$;
- $\xi(i, S) = 0$, caso contrário.

Ou seja, uma concatenação é uma função que distribui custo 1 entre n jogadores, que examina o conjunto dos jogadores usando a aresta, seleciona apenas aqueles pertencentes ao conjunto de menor índice S_p e cobra a aresta desses jogadores, usando a função de distribuição de custos ξ^k .

Uma *função de distribuição de custos baseada em potenciais* é uma concatenação de $m \geq 1$ funções de distribuição de custos baseadas em potencial único (com um número de jogadores n , sequência de f_s e uma partição S_1, S_2, \dots, S_m adequadas).

Um *protocolo baseado em potenciais* é baseado em uma sequência infinita (ξ_1, ξ_2, \dots) de funções de distribuição de custos baseadas em potenciais. Para cada n , em jogos com n jogadores, esse protocolo associa, às arestas de custo r , a função de distribuição de custos $r \cdot \xi_n$.

Teorema 3.8. *Um protocolo baseado em potenciais é um protocolo uniforme linear. Além disso, todos os jogos gerados por um tal protocolo respeitam a dinâmica de melhor resposta.*

Demonstração. Desejamos provar que um tal protocolo respeita o balanceamento de orçamento, estabilidade, separabilidade, uniformidade e é linear. Provamos as duas primeiras propriedades, e as demais são triviais.

Tome um protocolo baseado em potenciais e ξ_n , a função de distribuição de custos que o protocolo usa para distribuir custo 1 entre n jogadores. Tome o jogo que esse protocolo gera para uma instância do problema de Steiner com n jogadores: aquele em que a função de distribuição de custos de cada aresta e é $w(e) \cdot \xi_n$. Tome S_1, S_2, \dots, S_m a partição de $\{1, 2, \dots, n\}$ da definição dessa função ξ_n .

Para provar que o protocolo respeita o balanceamento de orçamento, tome uma aresta e e um conjunto S de jogadores, S_k o conjunto de menor índice dentre os S_i que intersectam S , ξ^k a função de distribuição de custos associada a S_k . Quando todos os jogadores de S usam e , os jogadores de $S_k \cap S$ pagam seus custos como prescrito por ξ^k . Como ξ^k é função de distribuição de custos baseada em potencial único, respeita o balanceamento de orçamento, o que implica que a soma dos custos que os jogadores de $S_k \cap S$ pagam por e é $w(e)$. Ou seja: o custo exato da aresta é pago por (um subconjunto de) jogadores que a usam, como queríamos.

Para provar que o protocolo respeita a estabilidade, provamos que todo jogo que ele gera respeita a dinâmica de melhor resposta. Para isso podemos fazer uma prova por indução (como no teorema 2.33) em m . Façamos isso.

Supondo que $m = 1$, temos um jogo gerado por um protocolo baseado em potencial único, que respeita a dinâmica de melhor resposta, pelo teorema 3.7.

Supondo que, para toda função de custos que é concatenação de i funções baseadas em potencial único, temos jogos que respeitam a dinâmica de melhor resposta, provemos que nossa ξ_n com $m = i + 1$ também respeita a dinâmica de melhor resposta. O que desejamos provar, lembremos, é que toda sequência de melhores respostas é finita, nos jogos em que cada aresta de custo $w(e)$ tem função de distribuição de custos $w(e) \cdot \xi_n$.

Primeiro, fixemos as jogadas dos jogadores pertencentes a S_1 . Podemos encarar essa situação como um jogo, com $n - |S_1|$ jogadores, em um grafo igual ao grafo do jogo original,

mas com o custo de algumas arestas reduzido para 0, cuja função de distribuição de custo é uma concatenação de i funções de custo baseadas em potencial único. Pela hipótese de indução, esse jogo auxiliar respeita a dinâmica de melhor resposta. Assim, partindo de uma configuração qualquer desse jogo auxiliar, toda sequência de melhores respostas é finita.

Tomemos, agora, uma sequência MR de melhores respostas do jogo original.

Digamos que uma configuração dessa sequência tem uma *mudança para jogador de S_1* se há um jogador de S_1 nessa configuração cuja estratégia difere, entre essa configuração e a configuração anterior.

Há alguns parágrafos, quando fixamos as jogadas dos jogadores de S_1 , provamos que do início de MR até uma configuração dessa sequência com mudança para um jogador de S_1 (ou o fim de MR), há um número finito de passos. A partir dessa configuração, até uma próxima configuração em que há mudança para um jogador de S_1 (ou o fim de MR), há um número finito de passos. Isso se verifica para cada mudança para um jogador de S_1 subsequente.

Mas também sabemos que os custos dos jogadores de S_1 não são afetados pelas estratégias dos demais. Ou seja, tomando MR_1 a sequência de configurações que tem apenas a configuração inicial e cada configuração com mudança para um jogador de S_1 , descrevemos uma sequência de configurações para um jogo com $m = 1$, $|S_1|$ jogadores, no grafo original, que usa $w(e) \cdot \xi^1$ como função de distribuição de custos para cada aresta e . Esse jogo respeita a dinâmica de melhor resposta. Portanto, o número de configurações em MR_1 é finito.

Em suma, MR_1 é uma subsequência finita de MR , entre duas configurações de MR_1 há um número finito de configurações, depois da última configuração em MR_1 há um número finito de configurações. MR tem que ser uma sequência finita. O jogo respeita a dinâmica de melhor resposta e, portanto, a estabilidade.

A separabilidade, uniformidade e linearidade são triviais.

Provamos o que queríamos. □

3.2.4 Exemplos de protocolos baseados em potenciais

O protocolo de Shapley é um exemplo de protocolo simples baseado em potenciais. Para cada n , a função potencial f que define a sua função de distribuição de custos é $f(S) = H_{|S|}$, onde $H_{|S|}$ é o $|S|$ -ésimo número harmônico.

O protocolo ordenado é um exemplo de protocolo baseado em potenciais. A sua função de distribuição de custos, para n jogadores, consiste na concatenação de n funções de distribuição de custo de um único jogador. Ele não é um protocolo simples, porque não é positivo.

O protocolo de Prim não é um protocolo baseado em potenciais. Suas funções de distribuição de custos são concatenações de funções de distribuição de custos de um único jogador, mas o protocolo define mais de uma função de distribuição de custos para o mesmo n .

Além desses exemplos já conhecidos, podemos usar a noção de função potencial para definir uma família grande de funções de distribuição de custos baseadas em potencial único. Isso porque há muitas funções potenciais possíveis para escolhermos, como provamos nos dois lemas seguintes.

Lema 3.9. *Seja $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Tome $f(\{1\}), f(\{2\}), f(\{3\}), \dots, f(\{n\})$ quaisquer racionais positivos. É possível construir uma função f , de partes de J aos racionais positivos, que tem os valores definidos para os conjuntos unitários, e respeita 3.6. Há uma única tal f .*

Demonstração. Tomamos $f(\emptyset) = 0$. De resto, fazemos essa construção iterativamente.

Observemos que é possível calcular o valor de $f(S)$, para qualquer S com $|S| \geq 2$, usando apenas valores de f para subconjuntos de S . De fato, $f(S)$ pode ser expressa de acordo com

a seguinte equação:

$$f(S) = \left(1 + \sum_{i \in S} \frac{f(S \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \right) \cdot \left(\sum_{i \in S} \frac{1}{f(\{i\})} \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

Essa equação tem solução racional para cada S , assumindo que os valores de f para subconjuntos de S são racionais.

Assim, podemos, usando os valores dados, construir f para todos os conjuntos de 2 elementos, e depois para todos os de 3, e assim sucessivamente, construindo uma função f , que respeita 3.6, e mostrando que ela é única. \square

Mas ainda devemos, para respeitar a definição de potencial, provar que essa f única é estritamente crescente.

Lema 3.11. *A função f construída no lema anterior é estritamente crescente.*

Demonstração. A função f construída no lema anterior, é tal que

$$\sum_{i \in H} \frac{f(H) - f(H \setminus \{i\})}{f(\{i\})} = 1$$

para cada $H \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Por contradição assumamos que f não é estritamente crescente. Ou seja, há conjuntos S e T tais que $T \subset S$, $f(T) \geq f(S)$. Tome um S de cardinalidade mínima e um T de cardinalidade máxima para os quais se verifica essa desigualdade.

Podemos afirmar que $|T| + 1 = |S|$. Caso contrário, haveria L tal que $T \subset L \subset S$, mas, se $f(L) \geq f(S)$, haveria contradição com a maximalidade de T e, se $f(L) < f(S)$, haveria contradição com a minimalidade de S .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $S = \{1, \dots, k\}$, $T = \{1, \dots, k-1\}$. Então,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i \in S} \frac{f(S) - f(S \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \\ &= \frac{f(S) - f(\{1, \dots, k-1\})}{f(\{k\})} + \sum_{i \in \{1, \dots, k-1\}} \frac{f(S) - f(S \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \\ &\leq \frac{f(T) - f(\{1, \dots, k-1\})}{f(\{k\})} + \sum_{i \in \{1, \dots, k-1\}} \frac{f(T) - f(S \setminus \{i\})}{f(\{i\})} && \text{pois } f(S) \leq f(T) \\ &= \sum_{i \in \{1, \dots, k-1\}} \frac{f(T) - f(S \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \\ &< \sum_{i \in \{1, \dots, k-1\}} \frac{f(T) - f(T \setminus \{i\})}{f(\{i\})} && f(S \setminus i) > f(T \setminus i), \text{ pois } S \text{ min.} \\ &= 1 && \text{pela definição de } f(T). \end{aligned}$$

Assim, temos uma contradição. \square

Os dois lemas anteriores nos permitem construir todas as funções potencial que existem: podemos escolher livremente os valores de $f(\{i\})$ para cada jogador i , e o resto de f já está definido.

Equivalentemente, podemos dizer que os dois lemas anteriores nos permitem construir todas as funções de distribuição de custos baseadas em potencial único.

No que segue, aproveitamos os dois lemas anteriores para caracterizar completamente as funções de distribuição de custos baseadas em potencial único; para descrever como são todas as funções de distribuição baseadas em potencial único que existem.

De início, notemos que, se $f(S)$ é uma função potencial para n jogadores, $g(S) = f(S)/c$, onde c é um racional positivo, também é. Mais do que isso, as funções f e g definem exatamente a mesma função de distribuição de custos baseada em potencial único.

Fixe $f(\{1\}) = 1$ — isso em nada altera o conjunto das funções de distribuição de custos baseadas em potencial único que podemos definir. Suponha que $f(\{i\}) = a$. Aplicando 3.6, temos

$$f(\{1, i\}) = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$$

Aplicando a definição da função de distribuição de custos baseada em potencial único, temos $\xi(i, \{1, i\}) = a/(a + 1)$ e $\xi(1, \{1, i\}) = 1/(a + 1)$. Examinando essas duas expressões, constatamos que a escolha de a nos permite escolher $\xi(1, \{1, i\})$ e $\xi(i, \{1, i\})$, desde que eles respeitem o balanceamento de orçamento e a positividade.

Por outro lado, se ξ é uma função de distribuição de custos baseada em potencial único, os valores de $\xi(1, \{1, i\})$ e $\xi(i, \{1, i\})$ determinam o valor de a . Portanto, se determinarmos os valores de $\xi(1, \{1, i\})$ e $\xi(i, \{1, i\})$ para todo i , determinamos todos os valores de f para conjuntos unitários (a menos de um fator multiplicativo), determinamos, pelos lemas 3.9 e 3.11, todos os valores de f para conjuntos quaisquer (a menos de um fator multiplicativo) e, portanto, determinamos todos os valores de ξ .

Em suma, provamos o seguinte lema.

Lema 3.12. *Fixe um número de jogadores n .*

Para cada $i \neq 1$, fixe valores positivos para $\xi(1, \{1, i\})$ e $\xi(i, \{1, i\})$ tais que $\xi(1, \{1, i\}) + \xi(i, \{1, i\}) = 1$. É possível definir uma função de distribuição de custos baseada em potencial único com esses valores de ξ fixados, e essa função é única. \square

3.3 Caracterização dos protocolos uniformes lineares

A caracterização que desejamos provar é a seguinte: Todo protocolo uniforme linear é um protocolo baseado em potenciais.

Lembramos que um protocolo uniforme linear é unicamente definido, para cada quantidade possível de jogadores, pela função ξ_1 que associa às arestas de custo 1. Nossa caracterização dos protocolos uniformes lineares pode ser vista como uma caracterização das funções ξ_1 que tais protocolos podem produzir: se ξ_1 é uma função de distribuição de custos que um protocolo uniforme linear associa a uma aresta de custo 1, ξ_1 é uma concatenação de funções de distribuição de custos baseadas em potenciais únicos.

A prova que faremos tem três grandes passos.

Primeiro, provaremos um teorema que diz que, em um protocolo uniforme linear, se um conjunto S de jogadores está usando uma aresta, e $i \in S$, adicionar um jogador a essa aresta não aumenta o custo de i . Chamaremos um protocolo com essa propriedade de monótono. (o teorema em questão é o de número 3.19, e a definição formal de protocolo monótono é feita logo antes do teorema 3.19).

Segundo, provaremos que protocolos uniformes lineares positivos sempre são protocolos simples baseados em potenciais (no teorema 3.40)

Terceiro, provaremos que protocolos uniformes lineares geram funções de distribuição de custo que são concatenações de funções de distribuição de custo positivas (no lema 3.44 e nos comentários seguintes a ele).

Dos três teoremas, virá o fato que desejamos: o teorema 3.45.

Fora isso, é importante ressaltar o lema 3.13, e duas variações sobre ele, o lema 3.24 e o lema 3.27. Esses lemas, de aparência técnica, contém boa parte da prova, por permitirem relacionar o comportamento das funções de distribuição de custos em conjuntos de jogadores pequenos (e mais fáceis de estudar) com o comportamento dessas funções em conjuntos de jogadores maiores.

Começamos a prova com esse lema técnico.

Lema 3.13. *Tome um protocolo uniforme linear; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $S \subseteq J$; $i, j \in J \setminus S$. Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.*

Suponha que $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > 0$.

Então, para α e β racionais positivos, se

$$\left(\xi_1(i, S \cup \{i\}) - \xi_1(i, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \alpha < \left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) \right) \cdot \beta, \quad (3.14)$$

então,

$$\left(\xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \alpha \leq \left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right) \cdot \beta. \quad (3.15)$$

Demonstração. Faremos uma prova por contradição. Assuma que a afirmação é falsa. Ou seja, que, tomando ξ_1 como nas condições do teorema, há α e β positivos tais que:

$$\left(\xi_1(i, S \cup \{i\}) - \xi_1(i, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \alpha < \left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) \right) \cdot \beta \quad (3.16)$$

$$\left(\xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \alpha > \left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right) \cdot \beta. \quad (3.17)$$

Provaremos que um protocolo tal que ξ_1 respeite essas duas afirmações não pode ser uniforme linear. Se assumirmos que um tal protocolo é uniforme linear, podemos construir uma instância do problema de Steiner e mostrar que, para essa instância, o protocolo não respeita a estabilidade. Essa é a contradição que vamos provar.

A instância do problema de Steiner é a da figura 3.1.

Nessa instância, os jogadores do conjunto S desejam ligar o vértice s ao vértice t . O jogador i deseja ligar s_i a t_i . O jogador j deseja ligar s_j a t_j . Se houver mais jogadores além de $\{i, j\} \cup S$, eles querem ligar dois vértices pertencentes a outra componente conexa do grafo e, portanto, não influenciarão o restante da prova.

Note que, no grafo, há três valores por definir: M , ϵ e A . Durante o correr da prova, imporemos apenas limitantes inferiores a M , tomando M “grande o bastante”, e apenas limitantes superiores a ϵ , tomando-o “pequeno o bastante”. Dessa forma, a existência de M e ϵ adequados será óbvia. O valor de A será fixado posteriormente, mas já afirmamos que $A > 2 \cdot M^2$. Os valores α e β já estão definidos: são os valores para os quais o protocolo supostamente respeita as desigualdades 3.16 e 3.17.

O primeiro passo da prova é estabelecer alguns caminhos que não podem ocorrer em um equilíbrio. Provaremos que, em um equilíbrio, todos os jogadores de S tem que usar o caminho (s, u, w, x, v, t) ; j tem que usar $q_1 = (s_j, v, x, w, y, t_j)$ ou $q_2 = (s_j, t_j)$; i tem que usar $p_1 = (s_i, u, w, y, t_i)$ ou $p_2 = (s_i, v, x, z, t_i)$.

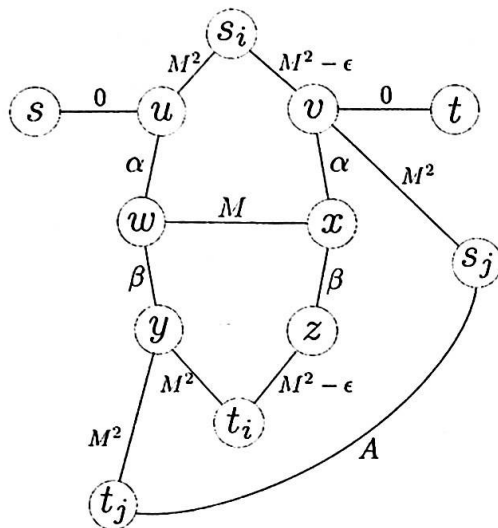


Figura 3.1: Construção para o lema 3.13

Em um equilíbrio, nenhum jogador usa ambas as arestas $e_1 = \{s_i, u\}$ e $e_2 = \{s_i, v\}$. Provemos esse fato. De início, i não pode usar ambas, pois suas jogadas são caminhos entre s_i e t_i . Chamemos e a aresta, dentre e_1 e e_2 , que i não utiliza. Suponha que há jogador usando e . Há no máximo $|S| + 1$ jogadores usando e . Isso implica, pelo balanceamento de orçamento, que há um jogador l pagando pelo menos $(M^2 - \epsilon) / (|S| + 1)$ por ela. Esse jogador está utilizando um caminho que inclui e_1 e e_2 . Se M for grande o bastante, ϵ pequeno o bastante, l poderia reduzir o custo de seu caminho: bastaria deixar de usar e_1 e e_2 , e ligar u a v passando por w e x , eliminando algumas arestas se isso for necessário para garantir que sua jogada é um caminho. Mesmo que ele pague sozinho o custo dessas novas arestas, ainda terá reduzido seu custo. Ou seja, se há jogador usando e , temos uma configuração que não é um equilíbrio.

Do fato do parágrafo anterior, podemos afirmar que nenhum jogador de $S \cup \{j\}$ usa e_1 ou e_2 : para todos esses jogadores, só há caminhos que envolvem ou ambas e_1 e e_2 , ou nenhuma delas, mas sabemos que nenhum deles usa e .

Da mesma forma, em um equilíbrio, nenhum jogador de $S \cup \{j\}$ usa $\{y, t_i\}$ ou $\{z, t_i\}$ (assumindo M grande o bastante e ϵ pequeno o bastante).

Nenhum jogador além de j pode utilizar $\{y, t_j\}$ em um equilíbrio. Para provar esse fato, suponhamos o contrário. Sabemos que j não pode utilizar ambas $e_1 = \{y, t_j\}$ e $e_2 = \{s_j, t_j\}$, pois suas jogadas são caminhos. Qualquer outro jogador que utilize e_1 em seu caminho a utiliza para ligar y a v e, portanto, também utiliza e_2 . Seja e a aresta, dentre e_1 e e_2 , que é usada por algum jogador de $\{i\} \cup S$, mas não por j . Lembrando que $A > 2 \cdot M^2$, podemos dizer que o custo de e é no mínimo M^2 , e que, pelo balanceamento de orçamento, há um jogador $l \in \{i\} \cup S$ que paga ao menos $M^2 / (|S| + 1)$ por e . Se M é grande o bastante, esse jogador pode reduzir o custo do seu caminho: em vez de ligar v e y usando e , poderia ligá-los passando por x e w , eventualmente tirando arestas de sua escolha, para garantir que ela é um caminho. Mesmo que pague sozinho o custo dessas novas arestas, ainda terá reduzido seu custo. A configuração não era equilíbrio.

Estamos prontos para fazer o “primeiro passo” da prova.

Para jogadores de S , considerando as arestas que já provamos que eles não podem usar em um equilíbrio, temos apenas um caminho: o caminho (s, u, w, x, v, t) .

Para j , temos, em um equilíbrio, dois caminhos possíveis: $q_1 = (s_j, v, x, w, y, t_j)$ e $q_2 = (s_j, t_j)$.

Para i , temos, como caminhos possíveis $p_1 = (s_i, u, w, y, t_i)$ e $p_2 = (s_i, v, x, z, t_i)$. Em princípio, haveria quatro: $p_1 = (s_i, u, w, y, t_i)$, $p_2 = (s_i, v, x, z, t_i)$, $p_3 = (s_i, v, x, w, y, t_i)$ e $p_4 = (s_i, u, w, x, z, t_i)$. Porém, podemos afirmar que:

- se j escolhe q_1 , como $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > 0$, se M for grande o bastante, i escolhe p_1 ou p_2 em um equilíbrio (para evitar pagar $M \cdot \xi_1(S \cup \{i, j\})$),
- se j escolhe q_2 , i escolhe p_2 . Isso porque, como sabemos as jogadas de todos os demais jogadores, sabemos os custos de cada aresta para i . A aresta $\{s_i, v\}$ tem custo menor que $\{s_i, u\}$; $\{u, w\}$ tem exatamente o mesmo custo que $\{v, x\}$; $\{w, y\}$ tem o custo de $\{x, z\}$; $\{z, t_i\}$ tem custo menor que $\{y, t_i\}$. O custo de $\{w, x\}$ é não-negativo. Assim, uma análise dos quatro caminhos indica trivialmente p_2 como o único de menor custo.

Assim terminamos o primeiro passo da prova.

Resta provar que nenhum dentre os quatro estados (p_1, q_1) , (p_2, q_1) , (p_1, q_2) e (p_2, q_2) ocorre um equilíbrio.

Seja $c_j(p_1, q_2)$ o custo que o jogador j paga quando i escolhe p_1 , j escolhe q_2 e os demais jogadores fazem a única escolha possível em um equilíbrio. Sejam $c_i(p_1, q_1)$, $c_j(p_1, q_2)$, \dots similarmente definidos.

De início, note que de (p_2, q_1) para (p_1, q_1) , o custo de j só muda nas arestas $\{v, x\}$ e $\{w, y\}$: lhe é somado $(\xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\})) \cdot \alpha$ (por i não usar mais $\{v, x\}$) e subtraído $(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\})) \cdot \beta$ (por i passar a usar $\{w, y\}$). Assim, por (3.17), $c_j(p_1, q_1) > c_j(p_2, q_1)$. Dessa forma, podemos tomar A tal que $c_j(p_1, q_1) > A > c_j(p_2, q_1)$. Com isso, estamos respeitando a condição $A > 2 \cdot M^2$, pois $c_j(p_2, q_1)$ inclui o custo integral das arestas $\{s_j, v\}$ e $\{y, t_j\}$. Tomar A dessa forma nos permite garantir que $c_j(p_1, q_1) > c_j(p_1, q_2) = A = c_j(p_2, q_2) > c_j(p_2, q_1)$.

Note também que, por (3.16), $c_i(p_1, q_1) < c_i(p_2, q_1)$, se ϵ for pequeno o bastante.

Provemos que nenhum dos quatro estados ocorrem em um equilíbrio:

- já provamos, no fim do “primeiro passo”, que (p_1, q_2) não ocorre em um equilíbrio;
- (p_2, q_2) não ocorre, pois $c_j(p_2, q_2) > c_j(p_2, q_1)$;
- (p_2, q_1) não ocorre, pois $c_i(p_2, q_1) > c_i(p_1, q_1)$;
- (p_1, q_1) não ocorre, pois $c_j(p_1, q_1) > c_j(p_1, q_2)$.

Assim, não há caminho possível para i ou j em um equilíbrio. O protocolo, que assumimos uniforme linear, na verdade não respeita a estabilidade. \square

Nosso próximo passo é usar o lema 3.13 para provar uma versão fraca da monotonicidade: se o jogador j aumenta o custo de i , então o jogador i não reduz o custo de j .

Lema 3.18. *Tome um protocolo uniforme linear; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $S \subseteq J$; $i, j \in J \setminus S$. Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.*

Se $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > \xi_1(i, S \cup \{i\})$, então, $\xi_1(j, S \cup \{i, j\}) \geq \xi_1(j, S \cup \{j\})$.

Demonstração. Aplicamos o lema 3.13. A condição $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > 0$ se verifica, pois $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > \xi_1(i, S \cup \{i\}) \geq 0$.

Nas condições do enunciado, a desigualdade 3.14 se verifica para todo α e todo β positivos. Provemos esse fato. Fixe um tal par α e β . $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > \xi_1(i, S \cup \{i\})$ implica que o

lado esquerdo da desigualdade 3.14 é negativo, mas o lado direito é sempre não negativo, pois $\xi_1(i, \{i\}) = 1$ e $\xi_1(i, \{i, j\}) \leq 1$.

Pelo lema 3.13, a desigualdade 3.15 também deve se verificar, para todo α e β positivos. Assim, a expressão $(\xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\}))$ deve ser negativa ou nula: se fosse positiva, fixando $\beta = 1$ e tomando α suficientemente grande, teríamos uma violação de 3.15.

Assim,

$$0 \geq \xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\}),$$

e, portanto,

$$\xi_1(j, S \cup \{i, j\}) \geq \xi_1(j, S \cup \{j\}),$$

como queríamos. \square

Estamos prontos para realizar o primeiro “grande passo” da prova.

Dizemos que um protocolo é *monótono* se não é possível aumentar o custo que um jogador paga por uma aresta adicionando jogadores a essa aresta. Ou seja, toda ξ_1 que ele gera é tal que $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) \leq \xi_1(i, S \cup \{i\})$ para todos i, j jogadores e S conjunto de jogadores.

Teorema 3.19. *Todo protocolo uniforme linear é monótono.*

Demonstração. Tome um protocolo uniforme linear; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $S \subseteq J$; $i, j \in J$. Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.

O que desejamos provar é que $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) \leq \xi_1(i, S \cup \{i\})$.

Faremos uma prova por contradição. Se nosso protocolo uniforme linear não for monótono, há $S \subseteq J, i, j \in J$, tais que

$$\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > \xi_1(i, S \cup \{i\}). \quad (3.20)$$

Tome um tal S mínimo, i e j como em 3.20. Construiremos, para esses (S, i, j) , um exemplo em que o protocolo não respeita a estabilidade.

De início, notemos que o caso $j \in S$ é trivial, pois, nesse caso, $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) = \xi_1(i, S \cup \{i\})$. Assim, vamos assumir $j \notin S$ daqui em diante. Podemos também assumir que $i \notin S$, pela minimalidade de S .

O primeiro passo da prova é achar um jogador k cujos custos respeitam uma desigualdade conveniente.

Como assumimos $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > \xi_1(i, S \cup \{i\})$, por 3.18, podemos afirmar que $\xi_1(j, S \cup \{i, j\}) \geq \xi_1(j, S \cup \{j\})$. Somando as duas inequações:

$$\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) + \xi_1(j, S \cup \{i, j\}) > \xi_1(i, S \cup \{i\}) + \xi_1(j, S \cup \{j\}). \quad (3.21)$$

Pelo balanceamento de orçamento, se $L \subseteq J$, temos que $\sum_{k \in L} \xi_1(k, L) = 1$. Aplicando essa igualdade para diferentes conjuntos L , temos:

$$\sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{i, j\}) + \xi_1(i, S \cup \{i, j\}) + \xi_1(j, S \cup \{i, j\}) = 1;$$

$$\sum_{k \in S} \xi_1(k, S) = 1;$$

$$\sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{j\}) + \xi_1(j, S \cup \{j\}) = 1;$$

$$\sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{i\}) + \xi_1(i, S \cup \{i\}) = 1.$$

Somando as primeiras duas expressões, e as últimas duas,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{i, j\}) + \xi_1(i, S \cup \{i, j\}) + \xi_1(j, S \cup \{i, j\}) + \sum_{k \in S} \xi_1(k, S) = \\ \sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{j\}) + \xi_1(j, S \cup \{j\}) + \sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{i\}) + \xi_1(i, S \cup \{i\}). \end{aligned}$$

Subtraindo 3.21, temos

$$\sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{i, j\}) + \sum_{k \in S} \xi_1(k, S) < \sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{j\}) + \sum_{k \in S} \xi_1(k, S \cup \{i\})$$

Assim, podemos afirmar que existe um $k \in S$ tal que

$$\xi_1(k, S \cup \{i, j\}) + \xi_1(k, S) < \xi_1(k, S \cup \{j\}) + \xi_1(k, S \cup \{i\}). \quad (3.22)$$

De posse desse jogador k , construímos o exemplo da figura 3.2.

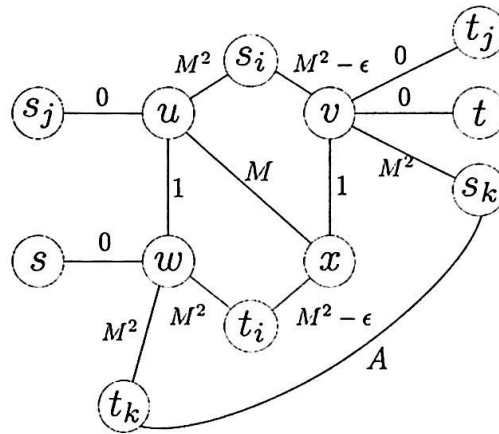


Figura 3.2: Construção para o lema 3.19

Nesse exemplo, o jogador k deseja ligar s_k a t_k ; o jogador i , s_i a t_i ; o jogador j , s_j a t_j ; os jogadores de $S \setminus \{i, j, k\}$, s a t ; os demais jogadores de J , dois vértices externos à construção. M é um número positivo “grande o bastante” para que não haja equilíbrio, ϵ é um número positivo “pequeno o bastante” para que não haja equilíbrio – iremos detalhando o que é “grande o bastante” e “pequeno o bastante” do decorrer da prova. O valor de A será fixado posteriormente, mas já afirmamos que $A > M^2$

Inicialmente, provaremos que:

1. j usa, em um equilíbrio, o caminho (s_j, u, x, v, t_j) ,
2. elementos de $S \setminus \{k\}$ usam, em um equilíbrio, o caminho (s, w, u, x, v, t) ,
3. i usa, em um equilíbrio, ou $L_1 = (s_i, u, w, t_i)$ ou $L_2 = (s_i, v, x, t_i)$,
4. k usa, em um equilíbrio, ou $Q_1 = (s_k, v, x, u, w, t_k)$ ou $Q_2 = (s_k, t_k)$.

Nenhum jogador utiliza ambas as arestas $e_1 = \{u, s_i\}$ e $e_2 = \{s_i, v\}$ em um equilíbrio. O jogador i não utiliza e_1 e e_2 porque não há caminho entre seus vértices que contenha ambas. Seja e a aresta dentre e_1 e e_2 que i não utiliza. Os demais jogadores não podem usar e_1 e e_2 em um equilíbrio porque, se houver jogadores usando e , podemos selecionar o jogador l que

mais paga por ela, e afirmar que ele paga pelo menos $(M^2 - \epsilon) / (|S| + 1)$ por ela. Para M grande o bastante, l poderia reduzir seu custo usando o caminho (u, x, v) em vez das arestas e_1 e e_2 , eliminando eventuais arestas para garantir que sua jogada é um caminho. Mesmo se l pagar o custo integral do caminho (u, x, v) , isso ainda é menos que $(M^2 - \epsilon) / (|S| + 1)$.

Da mesma forma, nenhum jogador utiliza ambas as arestas $\{w, t_i\}$ e $\{t_i, x\}$ em um equilíbrio, se M é grande o bastante. Note que, com essa afirmação e a anterior, já eliminamos suficientes caminhos para provar 4.

Afirmamos, também, que não há equilíbrio em que um jogador utilize, ao mesmo tempo, $\{w, t_k\}$ e $\{t_k, s_k\}$. O jogador k , porque (s_k, t_k) já é um caminho entre seus vértices; os demais porque, se houver jogadores de $(S \cup \{i, j\}) \setminus \{k\}$ as utilizando, podemos selecionar dentre eles um jogador l que paga pelo menos $M^2 / (|S| + 1)$. Note que, pela estrutura do grafo, tal l estaria usando o subcaminho (w, t_k, s_k, v) . Com M grande o bastante, l pode reduzir seu custo – se usar (w, u, x, v) em vez de (w, t_k, s_k, v) e eliminar arestas para garantir que sua jogada é um caminho.

De posse dessa terceira afirmação, já eliminamos caminhos suficientes para provar 1 e 2.

Ainda precisamos provar 3, a restrição de caminhos para o jogador i . Os únicos caminhos restantes para i são $L_1 = (s_i, u, w, t_i)$, $L_2 = (s_i, v, x, t_i)$, $L_3 = (s_i, v, x, u, w, t_i)$ e $L_4 = (s_i, u, x, t_i)$. Mas L_3 e L_4 não ocorrem em um equilíbrio, como provamos nos dois parágrafos seguintes.

Independente da escolha de k , se $M > 1$, i não usa L_4 em um equilíbrio, pois pagaria menos por L_2 . Isso porque pagaria menos por $\{s_i, v\}$ do que pagaria por $\{s_i, u\}$, e não mais por $\{v, x\}$ do que pagaria por $\{u, x\}$ – note que ambas $\{s_i, v\}$ e $\{s_i, u\}$, i não dividiria com nenhum outro jogador, e ambas $\{v, x\}$ e $\{u, x\}$, dividiria com o mesmo conjunto de jogadores.

Independente da escolha de k , i não usa L_3 em um equilíbrio, pois pagaria menos por L_2 : i pagaria mais por $\{w, t_i\}$ do que por $\{x, t_i\}$. Fora isso, L_3 tem todas as arestas presentes em L_2 .

Assim, podemos afirmar que i usa L_1 ou L_2 em um equilíbrio – provamos 3.

Tendo restringido os caminhos de i a L_1 e L_2 , e k a Q_1 e Q_2 , estamos prontos para provar que, com M grande o bastante, ϵ pequeno o bastante, e A apropriado, nossa construção não tem equilíbrio.

Seja $c_k(L_1, Q_1)$ o custo que o jogador k paga quando i escolhe L_1 , k escolhe Q_2 e os demais jogadores fazem a única escolha possível, de acordo com 2 e 1. Sejam $c_i(L_1, Q_1)$, $c_k(L_1, Q_2)$, ... similarmente definidos.

Afirmamos que $c_k(L_2, Q_1) < c_k(L_1, Q_1)$. A única diferença, para k , entre essas duas configurações, é o custo que k paga por $\{v, x\}$ e $\{u, w\}$. O custo que k paga por essas duas arestas, na configuração (L_2, Q_1) é $\xi_1(k, S \cup \{i, j\}) + \xi_1(k, S)$; na configuração (L_1, Q_1) , k paga $\xi_1(k, S \cup \{i\}) + \xi_1(k, S \cup \{j\})$. De 3.22, temos $c_k(L_2, Q_1) < c_k(L_1, Q_1)$.

Dessa forma, podemos escolher A tal que $c_k(L_2, Q_1) < A < c_k(L_1, Q_1)$. Note que um tal A respeita a condição $A > M^2$ que havíamos imposto anteriormente.

Já estabelecemos todas as desigualdades necessárias para M e A . Podemos provar que, no grafo proposto, com ϵ pequeno o bastante, nenhuma das situações (L_1, Q_1) , (L_2, Q_1) , (L_1, Q_2) , (L_2, Q_2) é estável.

- (L_2, Q_2) não é estável, pois $c_k(L_2, Q_1) < A = c_k(L_2, Q_2)$: o jogador k pode alterar sua estratégia e reduzir seu custo.
- (L_1, Q_1) não é estável, pois $c_k(L_1, Q_1) > A = c_k(L_1, Q_2)$: o jogador k pode alterar sua estratégia e reduzir seu custo.
- (L_1, Q_2) não é estável, pois $c_i(L_1, Q_2) > c_i(L_2, Q_2)$. Para verificar essa desigualdade, podemos parrear as arestas de L_1 às de L_2 , de forma que o custo de cada uma das

arestas em L_2 seja menor ou igual, para i , que o custo da aresta correspondente em L_1 : Em L_1 , i paga integralmente por $\{s_i, u\}$, em L_2 , paga integralmente por $\{s_i, v\}$, que tem custo menor; em L_1 , i paga integralmente por $\{t_i, w\}$, em L_2 , paga integralmente por $\{t_i, x\}$, que tem custo menor; em L_1 , i paga $\xi_1(i, S \setminus \{k\})$ por $\{u, w\}$, em L_2 , paga $\xi_1(i, \{j\} \cup S \setminus \{k\})$ por $\{x, v\}$, mas temos $\xi_1(i, S \setminus \{k\}) \geq \xi_1(i, \{j\} \cup S \setminus \{k\})$, pela minimalidade de S .

- para ϵ suficientemente pequeno, (L_2, Q_1) não é estável, pois $c_i(L_2, Q_1) > c_i(L_1, Q_1)$. Para provar essa desigualdade, usamos o mesmo pareamento de arestas do item anterior. Sem considerar $\{u, w\}$ e $\{v, x\}$, teríamos um custo de L_1 que seria $2 \cdot \epsilon$ maior que o de L_2 . Mas, em L_2 , i paga $c_2 = \xi_1(i, S \cup \{i, j\})$ por $\{v, x\}$, em L_1 , i paga $c_1 = \xi_1(i, S \cup \{i\})$ por $\{u, w\}$. Como assumimos que $c_2 > c_1$, tomando ϵ suficientemente pequeno, temos $c_i(L_2, Q_1) > c_i(L_1, Q_1)$.

Assim, provamos que um protocolo uniforme linear que não respeita a monotonicidade gera jogos sem nenhum equilíbrio. Não é, portanto, uniforme. \square

A monotonicidade é um fato interessante em si mesmo, que nos auxiliará no estudo dos protocolos uniformes lineares. Além disso, também será útil no restante da prova, tanto na forma já apresentada, quanto na forma do corolário seguinte.

Corolário 3.23. *Tome um protocolo uniforme linear; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $S \subseteq J$; $i \in J \setminus S$; $j \in S$. Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.*

Se $\xi_1(i, S \cup \{i\}) = 0$, então $\xi_1(j, S \cup \{i\}) = \xi_1(j, S)$

Demonstração. A monotonicidade afirma que o custo de j não aumenta com a inserção de i : $\xi_1(j, S \cup \{i\}) \leq \xi_1(j, S)$. Na verdade, afirma que a inserção de i não aumenta o custo de nenhum jogador k em S : $\xi_1(k, S \cup \{i\}) \leq \xi_1(k, S)$ para todo k em S . Como, quando i passa a usar a aresta, nenhum jogador está pagando mais (e i está pagando 0), o balanceamento de orçamento implica que nenhum jogador está pagando menos. \square

O próximo lema é uma versão levemente alterada do lema 3.13.

Lema 3.24. *Tome um protocolo uniforme linear; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $S \subseteq J$; $i, j \in J \setminus S$. Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.*

Suponha que $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > 0$.

Para α e β racionais positivos, se

$$\left(\xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \alpha < \left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right) \cdot \beta, \quad (3.25)$$

então

$$\left(\xi_1(i, S \cup \{i\}) - \xi_1(i, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \alpha \leq \left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) \right) \cdot \beta. \quad (3.26)$$

Demonstração. A prova é essencialmente a mesma que a do lema 3.13: assumimos por contradição que há protocolo uniforme linear que verifica 3.25 e a negação de 3.26, e provamos que, para esse protocolo, há jogo sem nenhum equilíbrio.

Usamos o grafo da prova de 3.13, apenas trocando o custo de $\{s_i, v\}$ pelo de $\{s_i, u\}$ e o custo de $\{t_i, y\}$ pelo de $\{t_i, z\}$.

Usando M grande o bastante, ϵ pequeno o bastante, e algum A tal que $A > 2 \cdot M^2$, podemos provar que, em um equilíbrio, há poucos caminhos que os jogadores podem usar. Teremos que todos os jogadores de S usam o caminho (s, u, w, x, v, t) , i usa p_1 ou p_2 , e j usa q_1 ou q_2 .

De 3.25, temos $c_j(p_1, q_1) < c_j(p_2, q_1)$ – basta calcular a variação do custo de j entre $\{u, w\}$ e $\{v, x\}$, e entre $\{w, y\}$ e $\{x, z\}$. Podemos tomar A tal que $c_j(p_1, q_1) < A < c_j(p_2, q_1)$. Ou seja, $c_j(p_1, q_1) < c_j(p_1, q_2) = c_j(p_2, q_2) < c_j(p_2, q_1)$.

Similarmente, da negação de 3.26, temos $c_i(p_1, q_1) > c_i(p_2, q_1)$ para ϵ suficientemente pequeno.

Pela construção do grafo e pelo caminho já fixo dos jogadores de S , os custos $c_i(p_1, q_2)$ e $c_i(p_2, q_2)$ diferem de 2ϵ : ϵ pelas arestas que tocam s_i e ϵ pelas que tocam t_i

Isto é, $c_i(p_1, q_2) < c_i(p_2, q_2)$.

Verifiquemos que não há equilíbrio possível: (p_1, q_1) não ocorre em um equilíbrio, pois $c_i(p_1, q_1) > c_i(p_2, q_1)$; (p_2, q_1) não ocorre em um equilíbrio, pois $c_j(p_2, q_1) > c_j(p_2, q_2)$; (p_2, q_2) não ocorre em um equilíbrio, pois $c_i(p_2, q_2) > c_i(p_1, q_2)$; (p_1, q_2) não ocorre em um equilíbrio, pois $c_j(p_1, q_2) > c_j(p_1, q_1)$.

Como queríamos, um protocolo uniforme linear que, para certos α e β , respeita 3.25 mas não 3.26 gera jogos sem equilíbrio algum, e não é de fato um protocolo uniforme. \square

Tanto o lema 3.13 quanto o lema 3.24 estabelecem uma ligação entre custos de dois jogadores, quando sozinhos, e custos desses mesmos dois jogadores, quando dividindo uma aresta com um conjunto S qualquer. Isso é interessante porque nos permite estudar o objeto mais complexo (jogadores compartilhando aresta com um conjunto grande de outros jogadores) usando um objeto mais simples (um ou dois jogadores usando uma aresta).

Podemos consolidar esses dois lemas em um resultado mais fácil de lidar.

Lema 3.27. *Tome um protocolo uniforme linear; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $S \subseteq J$; $i, j \in J \setminus S$. Seja ξ_1 a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.*

Suponha que ξ_1 é tal que $\xi_1(i, S \cup \{i, j\}) > 0$.

Então,

$$\begin{aligned} & \left(\xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) \right) = \\ & \left(\xi_1(i, S \cup \{i\}) - \xi_1(i, S \cup \{i, j\}) \right) \cdot \left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Demonstração. Primeiro, notemos que a condição de 3.13 e 3.24 foi assumida nas hipóteses desse lema. Dito isso, faremos a prova analisando quatro casos:

- Se $\left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) \right) \neq 0$ e $\left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right) \neq 0$, tome

$$f_i = \frac{\xi_1(i, S \cup \{i\}) - \xi_1(i, S \cup \{i, j\})}{\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\})}, \quad f_j = \frac{\xi_1(j, S \cup \{j\}) - \xi_1(j, S \cup \{i, j\})}{\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\})}.$$

O lema 3.13 implica que f_i não pode ser menor que f_j . O lema 3.24 implica que f_j não pode ser menor que f_i .

- Se $\left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) \right) = 0$ e $\left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right) = 0$, os dois lados da expressão 3.28 são zero.

- Se $\left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\})\right) \neq 0$ e $\left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\})\right) = 0$, fazemos uso do lema 3.13. Existem α e β positivos que verificam 3.14. Para tais α e β , temos que verificar 3.15. Por hipótese, o lado direito de 3.15 é nulo. Pela monotonicidade, o lado esquerdo de 3.15 não pode ser negativo. Assim, o lado esquerdo de 3.15 também é nulo. Portanto, os dois lados da expressão 3.28 são iguais – ambos iguais a zero.
- O caso $\left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\})\right) = 0$ e $\left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\})\right) \neq 0$ é similar ao anterior, mas usando o lema 3.24.

□

O lema 3.27 contém uma caracterização forte dos protocolos uniformes lineares positivos: ele permite calcular, com alguns poucos valores de ξ_1 , todos os demais. Com isso, será possível provar que todo protocolo uniforme linear positivo é um protocolo simples baseado em potenciais. Esse é o segundo “grande passo” da prova, que iniciamos agora.

O próximo lema prova que, se sabemos $\xi(j, S)$ para todos os S com tamanho 2, sabemos $\xi(j, S)$, para $|S| = 3$. Na verdade, ele prova a generalização desse fato para conjuntos maiores: Se sabemos $\xi(j, S)$ para todos os S menores que a , sabemos também para todos os S com a jogadores.

Lema 3.29. *Tome $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $j \in J$. Seja ξ^T , a função de distribuição de custos que um protocolo uniforme linear positivo T associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.*

Não há inteiro a , com $n \geq a \geq 3$, protocolos uniformes lineares positivos T_1 e T_2 tais que:

- $\xi^{T_1}(j, S) = \xi^{T_2}(j, S)$, para todo conjunto S com menos de a jogadores.
- $\xi^{T_1}(j, S) \neq \xi^{T_2}(j, S)$, para algum conjunto com a jogadores.

Demonstração. Sendo H um conjunto de a jogadores, $j \in H$, pretendemos mostrar que é possível expressar $\xi^{T_1}(j, H)$ usando apenas os custos $\xi^{T_1}(j, H \setminus \{l\})$, e $\xi^{T_1}(j, \{j, l\})$, para todo jogador $l \in H$ distinto de j .

A mesma expressão será válida para T_2 . Como temos $\xi^{T_1}(j, S) = \xi^{T_2}(j, S)$, para todo conjunto S com menos de a jogadores, o resultado estará demonstrado.

Como o protocolo é positivo, podemos aplicar o lema 3.27 com quaisquer jogadores i e j . Aplicando o lema 3.27, com o conjunto $S = H \setminus \{j, l\}$ e os jogadores l e j , temos

$$\frac{\xi^{T_1}(j, S \cup \{j\}) - \xi^{T_1}(j, S \cup \{j, l\})}{\xi^{T_1}(j, \{j\}) - \xi^{T_1}(j, \{j, l\})} = \frac{\xi^{T_1}(l, S \cup \{l\}) - \xi^{T_1}(l, S \cup \{j, l\})}{\xi^{T_1}(l, \{l\}) - \xi^{T_1}(l, \{j, l\})}.$$

Os denominadores não são zero. Verifiquemos isso para a fração da direita:

$$\xi^{T_1}(l, \{l\}) - \xi^{T_1}(l, \{j, l\}) = 1 - \xi^{T_1}(l, \{j, l\}) = \xi^{T_1}(j, \{j, l\}) > 0$$

(onde a desigualdade vem do fato de o protocolo ser positivo)

Pelo balanceamento de orçamento, temos que o denominador da fração esquerda é $1 - \xi^{T_1}(j, \{j, l\})$, e o da direita, $\xi^{T_1}(j, \{j, l\})$. Assim,

$$\frac{\xi^{T_1}(j, \{j, l\})}{1 - \xi^{T_1}(j, \{j, l\})} \cdot \left(\xi^{T_1}(j, S \cup \{j\}) - \xi^{T_1}(j, S \cup \{j, l\})\right) = \xi^{T_1}(l, S \cup \{l\}) - \xi^{T_1}(l, S \cup \{j, l\}).$$

Ou, usando H ao invés de S

$$\frac{\xi^{T_1}(j, \{j, l\})}{1 - \xi^{T_1}(j, \{j, l\})} \cdot (\xi^{T_1}(j, H \setminus \{l\}) - \xi^{T_1}(j, H)) = \xi^{T_1}(l, H \setminus \{j\}) - \xi^{T_1}(l, H). \quad (3.30)$$

Essa equação 3.30 se verifica para cada $l \in H \setminus \{j\}$.

Tomemos as equações 3.30, com cada um desses l . Ao somá-las, o lado direito fica

$$\begin{aligned} \sum_{l \in H \setminus \{j\}} (\xi^{T_1}(l, H \setminus \{j\}) - \xi^{T_1}(l, H)) &= \\ \sum_{l \in H \setminus \{j\}} \xi^{T_1}(l, H \setminus \{j\}) - \sum_{l \in H \setminus \{j\}} \xi^{T_1}(l, H) &= \\ 1 - \sum_{l \in H \setminus \{j\}} \xi^{T_1}(l, H) &= \xi^{T_1}(j, H) \end{aligned}$$

(note que usamos o balanceamento de orçamento nessa dedução, na segunda e terceira igualdades).

O lado esquerdo dessa soma contém apenas $\xi^{T_1}(j, H)$ e custos da forma $\xi^{T_1}(j, H \setminus \{l\})$ ou $\xi^{T_1}(j, \{j, l\})$.

Assim, tomando 3.30 para cada $l \in H \setminus \{j\}$ e somando, temos uma expressão da forma desejada. Essa expressão é trivialmente válida também substituindo T_1 por T_2 , e o resultado está demonstrado. \square

É natural usar o lema anterior para fazer uma indução. Afirmar que, se sabemos, para cada par de jogadores (i, l) o valor de $\xi(l, \{i, l\})$, sabemos todos os valores de ξ .

Mas podemos fazer mais do que isso. Fixando um jogador j , podemos afirmar que, se para cada jogador l , sabemos o valor de $\xi(j, \{j, l\})$, então, sabemos todos os valores de ξ .

Isso ocorre porque, se sabemos $\xi(j, \{i, j\})$ e $\xi(j, \{j, l\})$, podemos deduzir os valores $\xi(i, \{i, l\})$ e $\xi(l, \{i, l\})$.

Provamos esse fato no próximo lema e em seu corolário.

Lema 3.31. *Tome um protocolo uniforme linear positivo; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $i, j, l \in J$. Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores. Então, temos*

$$\xi_1(i, \{i, j\}) \cdot \xi_1(j, \{j, l\}) \cdot \xi_1(l, \{l, i\}) = \xi_1(j, \{i, j\}) \cdot \xi_1(l, \{j, l\}) \cdot \xi_1(i, \{l, i\}). \quad (3.32)$$

Demonstração. Denotaremos os termos da equação 3.32, em ordem, por $x, y, z, (1-x), (1-y), (1-z)$. Podemos denotá-los dessa forma pelo balanceamento de orçamento.

Desejamos, então, provar a identidade $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$.

Denotemos $\xi_1(i, \{i, j, l\})$, $\xi_1(j, \{i, j, l\})$, $\xi_1(l, \{i, j, l\})$, respectivamente, por a, b e c .

Note que, por termos um protocolo positivo, x, y, z, a, b e c são todos números estritamente maiores que 0, e estritamente menores que 1.

Aplicaremos repetidas vezes o lema 3.27. Sua condição sempre estará respeitada, por ξ_1 ser positivo.

Ao aplicar o lema 3.27, com $S = \{l\}$, para os jogadores i e j , temos:

$$\begin{aligned} & \left(\xi_1(i, \{i, l\}) - \xi_1(i, \{i, j, l\}) \right) \cdot \left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right) = \\ & \left(\xi_1(j, \{j, l\}) - \xi_1(j, \{i, j, l\}) \right) \cdot \left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Podemos reescrever essa expressão usando $\left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\}) \right) = \xi_1(i, \{i, j\}) = x$ e $\xi_1(i, \{i\}) = 1$ — ambas consequências diretas do balanceamento de orçamento.

Teremos, então

$$\left((1 - z) - a \right) x = (y - b) (1 - x). \quad (3.34)$$

Trocando o jogador j por i , i por l e l por j , obtemos outra versão dessa expressão, com x substituído por z , z por y , y por x , b por a e a por c :

$$\left((1 - y) - c \right) z = (x - a) (1 - z).$$

Isolando b na primeira equação temos:

$$b = \frac{xa - x(1 - z)}{1 - x} + y.$$

Isolando c na segunda equação temos:

$$c = \frac{(a - x)(1 - z)}{z} + (1 - y).$$

Pelo balanceamento de orçamento, temos $a + b + c = 1$. Assim, temos:

$$a = \frac{(1 - z)(x - x^2 + xz)}{1 - x + xz}. \quad (3.35)$$

(detalhes dessa dedução podem ser vistos na seção A.1).

Podemos refazer todo esse raciocínio, substituindo o jogador i por j , j por l e l por i . Isso causará a substituição de x por y , z por x e a por b , resultando na equação:

$$b = \frac{(1 - x)(y - y^2 + yx)}{1 - y + yx}.$$

Substituindo a e b em 3.34, temos:

$$(1 - z)(1 - x)(1 - y) = yxz. \quad (3.36)$$

(a prova dessa igualdade pode ser vista na seção A.2).

□

Esse lema tem o seguinte corolário:

Corolário 3.37. Tome $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $i, j, l \in J$. Seja ξ^T , a função de distribuição de custos que um protocolo uniforme linear positivo T associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.

Não há protocolos uniformes lineares positivos T_1 e T_2 tais que:

- $\xi^{T_1}(j, \{i, j\}) = \xi^{T_2}(j, \{i, j\})$,

- $\xi^{T_1}(j, \{j, l\}) = \xi^{T_2}(j, \{j, l\})$,
- $\xi^{T_1}(i, \{i, l\}) \neq \xi^{T_2}(i, \{i, l\})$,

Demonstração. Se houver uma expressão para $\xi^{T_1}(i, \{i, l\})$ em termos de $\xi^{T_1}(j, \{i, j\})$ e $\xi^{T_1}(j, \{j, l\})$, que valha, inalterada, substituindo T_1 por T_2 , o fato está demonstrado.

Para obter uma tal expressão, basta aplicar o lema 3.31 e notar que os termos da esquerda da equação 3.32 podem, pelo balanceamento de orçamento, ser expressos em função dos termos da direita (como fizemos no começo da prova de 3.31). \square

Juntando os resultados 3.29 e 3.37, temos o resultado que queríamos.

Lema 3.38. *Tome $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $j \in J$. Seja ξ^T , a função de distribuição de custos que um protocolo uniforme linear positivo T associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.*

Não há protocolos uniformes lineares positivos T_1 e T_2 tais que:

- $\xi^{T_1}(j, \{l, j\}) = \xi^{T_2}(j, \{l, j\})$ para todo $l \in J$;
- $\xi^{T_1}(i, S) \neq \xi^{T_2}(i, S)$, para algum $S \subseteq J$, $i \in S$.

Temos agora, uma descrição bastante precisa dos protocolos uniformes lineares positivos. Essa descrição é suficiente para afirmar que eles são, de fato, protocolos simples baseados em potenciais.

Fazemos isso no lema e teorema seguintes.

Lema 3.39. *Tome uma função de distribuição de custos ξ tal que há um protocolo uniforme linear positivo que use ξ para distribuir custo 1 entre n jogadores. Essa função de distribuição de custos é uma função de distribuição de custos baseada em potencial único.*

Demonstração. Tome $c_i = \xi(1, \{1, i\})$ para $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

O lema 3.38 prova que não há outra função ξ' que distribui custo 1 entre n jogadores, gerada por protocolo uniforme linear positivo, tal que $\xi'(1, \{1, i\}) = c_i$.

Por outro lado, o lema 3.12 afirma que há uma função de distribuição de custos baseada em potencial único ξ^p tal que $\xi^p(1, \{1, i\}) = c_i$, e o teorema 3.7, que uma tal função pode ser gerada por um protocolo uniforme linear positivo.

Assim, inevitavelmente, $\xi = \xi^p$, ξ é uma função de custos baseada em potencial único. \square

Reescrevendo o lema anterior em termos de protocolos, ao invés de funções de distribuição de custos, temos o seguinte.

Teorema 3.40. *Todo protocolo uniforme linear positivo é um protocolo simples baseado em potenciais.*

Terminamos o segundo “grande passo” da prova: temos uma caracterização completa das funções de distribuição de custos em que nenhum jogador paga zero.

Agora, voltamos a estudar os momentos em que há jogadores pagando zero, visando realizar o terceiro “grande passo”: provar que toda função de distribuição de custos produzida por protocolo linear uniforme é uma concatenação de funções de custo baseadas em potenciais únicos.

Fazemos isso nos resultados seguintes, estabelecendo em quais circunstâncias um jogador pode pagar zero por uma aresta.

Lema 3.41. *Tome um protocolo uniforme linear; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $S \subseteq J$; $i, j, l \in J \setminus S$. Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores. Se $\xi(j, \{i, j\}) > 0$ e $\xi_1(l, \{i, l\}) = 0$, então $\xi(l, \{l, j\}) = 0$.*

Demonstração. Como temos $\xi_1(l, \{i, l\}) = 0$, pela monotonicidade, $\xi_1(l, \{i, j, l\}) = 0$. O corolário 3.23 afirma que a inserção de um jogador que pague 0 não afeta os custos de nenhum outro jogador. Assim, temos que $\xi_1(j, \{i, j, l\}) = \xi_1(j, \{i, j\}) > 0$. Respeitamos as condições do lema 3.27, com $S = \{l\}$ e j no papel de i . Usando o lema 3.27, temos:

$$\begin{aligned} (\xi_1(i, \{i, l\}) - \xi_1(i, \{i, j, l\})) \cdot (\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\})) = \\ (\xi_1(j, \{j, l\}) - \xi_1(j, \{i, j, l\})) \cdot (\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\})). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Usando $\xi_1(l, \{i, j, l\}) = 0$ e o corolário 3.23, temos $\xi_1(i, \{i, j, l\}) = \xi_1(i, \{i, j\})$ e também $\xi_1(j, \{i, j, l\}) = \xi_1(j, \{i, j\})$. Usando $\xi_1(l, \{i, l\}) = 0$ e o balanceamento de orçamento, temos $\xi_1(i, \{i, l\}) = \xi_1(i, \{i\})$.

Substituindo em 3.42, temos

$$\begin{aligned} (\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\})) \cdot (\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\})) = \\ (\xi_1(j, \{j, l\}) - \xi_1(j, \{i, j\})) \cdot (\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\})). \end{aligned}$$

Como $\xi_1(j, \{i, j\}) > 0$, e, pelo balanceamento de orçamento, $\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{i, j\}) = 1 - \xi_1(i, \{i, j\}) = \xi_1(j, \{i, j\})$, temos

$$(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{i, j\})) = (\xi_1(j, \{j, l\}) - \xi_1(j, \{i, j\})).$$

Assim, $\xi_1(j, \{j, l\}) = \xi_1(j, \{j\})$. Mas $\xi_1(j, \{j\}) = 1$. Assim, pelo balanceamento de orçamento, $\xi_1(l, \{j, l\}) = 0$. \square

O lema anterior tem um corolário bastante interessante. Antes de enunciá-lo, estabeleçamos um pouco de notação. Diremos que $i \rightarrow j$ quando $\xi_1(i, \{i, j\}) > 0$ e que $i \not\rightarrow j$ quando $\xi_1(i, \{i, j\}) = 0$. Essa relação é definida para cada protocolo uniforme linear e cada n número de jogadores.

Corolário 3.43. *Em um protocolo uniforme linear, fixado um número n de jogadores, se $l \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$ então $l \rightarrow i$.*

Demonstração. O lema anterior estabeleceu que, se $j \rightarrow i$ e $l \not\rightarrow i$, então $l \not\rightarrow j$.

Ou seja, se assumirmos $l \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$, não podemos ter $l \not\rightarrow i$, e, portanto, temos que ter $l \rightarrow i$. \square

Estamos prontos para realizar o terceiro “grande passo” da prova.

Lema 3.44. *Tome um protocolo uniforme linear e $J = \{1, 2, \dots, n\}$.*

Seja ξ_1 , a função de distribuição de custos que esse protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.

É possível particionar J em conjuntos C_1, C_2, \dots, C_m , de forma que, para todo $S \subseteq J$, $i \in S$, tenhamos $\xi_1(i, S) > 0$ se e somente se i pertence ao conjunto de menor índice que intersecta S .

Demonstração. Criemos um digrafo $D = (V, E)$ cujo conjunto de vértices V é J , e o conjunto E de arcos contém um arco de i para j , (i, j) , se e somente se $i \rightarrow j$.

Pelo balanceamento de orçamento, esse grafo sempre contém o arco (i, j) ou o arco (j, i) (ou os dois) para cada par de jogadores $\{i, j\}$.

Tome as F_1, F_2, \dots, F_m as componentes fortemente conexas desse grafo (uma componente fortemente conexa é um conjunto F de vértices tais que, se $i, j \in F$, o grafo tem caminho de i a j e de j a i). O número de componentes conexas de fato será o número de conjuntos C da partição de J .

Tomando duas componentes fortemente conexas F_a e F_b , sabemos que há arcos entre elas. Como já dissemos, para cada jogador $i \in F_a$ e $j \in F_b$, há o arco (i, j) ou o arco (j, i) . Diremos que um arco (i, j) é um arco *orientado de F_a para F_b* , e um arco (j, i) é orientado de F_b para F_a . Observe que não pode haver, ao mesmo tempo, arcos orientados de F_b para F_a e arcos orientados de F_a para F_b : Isso implicaria que $F_a \cup F_b$ é uma única componente fortemente conexa. Diremos, então, que se todos os arcos entre F_a e F_b forem orientados de F_a para F_b , $F_a > F_b$. Caso contrário, todos os tais arcos são orientados de F_b para F_a , e diremos que $F_b > F_a$.

A relação $>$ entre componentes conexas é transitiva: se $F_a > F_b$ e $F_b > F_c$, então $F_a > F_c$ (se $F_c > F_a$ as três componentes fortemente conexas envolvidas seriam, na verdade, uma componente fortemente conexa só).

Assim, $>$ descreve uma ordenação completa dos F_i .

Tomemos C_1 o conjunto de vértices da “maior” das componentes fortemente conexas (a única F_a para a qual $F_a > F_b$, para todo $b \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{a\}$). Tomemos C_2 como o conjunto de vértices da “segunda maior” componente fortemente conexa, e assim sucessivamente.

Desejamos provar que $\xi_1(l, S) > 0$ se e somente se l pertence ao conjunto C de menor índice que intersecta S .

Seja C_a o conjunto de menor índice que intersecta S , C_b outro conjunto que intersecta S . Tome $i \in S \cap C_a$ e $j \in S \cap C_b$. Sabemos que $j \not\rightarrow i$, ou seja, que $\xi_1(j, \{i, j\}) = 0$. Pela monotonicidade, $\xi_1(j, S) = 0$. Isso prova que, dentre os elementos de S , somente elementos de $S \cap C_a$ pagam custos não nulos. Resta provar que todos esses elementos pagam custos não nulos.

De início, notemos que, tomando $i \in S \cap C_a$, temos $\xi_1(i, S) = \xi_1(i, S \cap C_a)$, pois todos os $j \in S \setminus C_a$ estão pagando 0, e não afetam o custo dos demais (corolário 3.23).

Suponhamos, então, que haja $k \in C_a \cap S$ tal que $\xi_1(k, C_a \cap S) = 0$. Tome um $P \subseteq C_a \cap S$ minimal tal que haja $i \in P$ com $\xi_1(i, P) = 0$. Tome $j \in P \setminus \{i\}$. Pela definição de P , temos $\xi_1(j, P) > 0$ (caso contrário, poderíamos remover j de P e, pelo corolário 3.23, violar a minimalidade de P) e $\xi_1(i, P \setminus \{j\}) > 0$ (pela minimalidade de P). Temos, então,

- $q_1 = \left(\xi_1(j, \{j\}) - \xi_1(j, \{j, i\}) \right) > 0$ e $q_2 = \left(\xi_1(i, \{i\}) - \xi_1(i, \{j, i\}) \right) > 0$, pois $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$ (dado que i e j pertencem à mesma componente fortemente conexa e \rightarrow é transitiva);
- $q_3 = \left(\xi_1(i, P \setminus \{j\}) - \xi_1(i, P) \right) > 0$, pois $\xi_1(i, P \setminus \{j\}) > 0$ e $\xi_1(i, P) = 0$;
- $q_4 = \left(\xi_1(j, P \setminus \{i\}) - \xi_1(j, P) \right) = 0$ por 3.23, que implica $\xi_1(j, P \setminus \{i\}) = \xi_1(j, P)$.

Mas, como $\xi_1(j, P) > 0$, podemos aplicar o lema 3.27 para relacionar q_1, q_2, q_3 e q_4 , obtendo zero em um lado da equação 3.28, e um número não nulo no outro. Chegamos em uma contradição. Para evitar essa contradição, temos que admitir que não há $i \in C_a \cap S$ tal que $\xi_1(i, C_a \cap S) = 0$ e a prova está completa. \square

Seja ξ_1 uma função produzida por um protocolo uniforme linear e que distribui custo 1. O lema anterior basicamente afirma que é possível expressar ξ_1 por uma concatenação de diversas funções positivas $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m$ que distribuem custo 1.

Resta afirmar que essas funções ξ^i são funções de distribuição de custo baseadas em potencial único. Para isso, diremos que elas poderiam ser geradas por protocolos uniformes lineares positivos, e usaremos o lema 3.39, que diz que tais funções são baseadas em potencial único.

Como a função ξ_1 foi produzida por um protocolo uniforme linear, as ξ^i poderiam ser produzidas por protocolos uniformes lineares. Como sabemos que as funções ξ^i são positivas, elas poderiam ser geradas por protocolos uniformes lineares positivos.

Realmente temos que as funções ξ^i são funções de distribuição de custos que poderiam ser geradas por protocolos lineares positivos, portanto funções de distribuição de custos baseadas em potencial único.

Ou seja, ξ_1 é uma concatenação de funções de distribuição de custos baseadas em potencial único. É uma função de distribuição de custos baseada em potenciais.

Provamos o que queríamos.

Teorema 3.45. *Todo protocolo uniforme linear é um protocolo baseado em potenciais.*

3.3.1 O caso orientado

A definição de protocolo uniforme linear foi feita com base em instâncias não-orientadas do problema de Steiner. Mas poderia facilmente ser feita com base em instâncias orientadas. Chamemos um protocolo que respeita as propriedades do balanceamento de orçamento, estabilidade, separabilidade, uniformidade e linearidade para todas as instâncias orientadas do problema de Steiner de *protocolo uniforme linear para o caso orientado*.

O teorema 3.45 também vale, para os protocolos uniformes lineares para o caso orientado: um protocolo que apenas garanta a uniformidade e a linearidade quando aplicado a grafos orientados, ainda tem que ser um protocolo baseado em potenciais.

Boa parte da prova de 3.45 é manipulação algébrica da função ξ , e se aplica, sem alteração, para esse caso orientado. Os lemas 3.13, 3.24 e o teorema 3.19, porém, dependem de construções. Podemos adaptar as construções que fizemos, para torná-las grafos orientados, provando os mesmos lemas e teorema.

Dada uma aresta $\{x, w\}$, de custo M , em uma das construções para grafos não orientados, vamos substituí-la, no caso orientado, pelo objeto da figura 3.3.

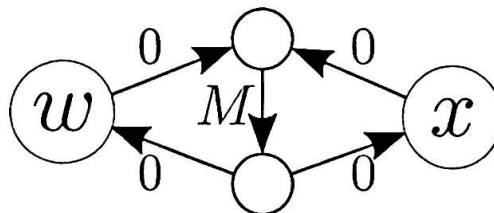


Figura 3.3: *Substituindo arestas por arcos*

Por exemplo, podemos adaptar a construção do lema 3.13 e obter o grafo orientado da figura 3.4.

Isso nos permite “mapear” configurações no jogo que um protocolo T cria, no caso não orientado, para configurações do jogo do caso orientado, de maneira bastante natural: um jogador que usava a aresta $\{x, w\}$, de custo m , usará dois arcos de custo 0 desse objeto, e o arco de custo m .

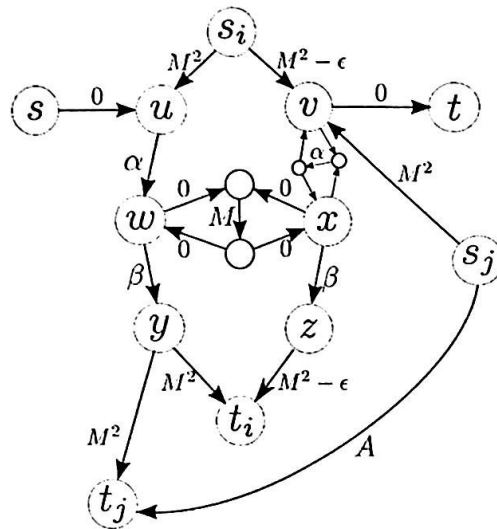


Figura 3.4: Construção do lema 3.13 para grafos orientados

Um mesmo protocolo gerará jogos essencialmente idênticos para a construção orientada e a construção não-orientada: o preço que cada jogador paga em uma configuração do jogo baseado na construção orientada será igual ao que esse jogador paga na configuração correspondente do jogo baseado na construção não orientada. Assim, as provas de 3.13, 3.24 e 3.19 serão válidas para os protocolos uniformes lineares para o caso orientado.

Portanto, a classe dos protocolos uniformes lineares para o caso orientado é exatamente a classe dos protocolos uniformes lineares: ambas as classes equivalem à classe dos protocolos baseados em potenciais.

No restante desse trabalho, nos referiremos apenas a protocolos uniformes lineares, mesmo quando analisando situações envolvendo grafos orientados.

3.3.2 Valor de Shapley ponderado

Pode ser tentador imaginar que funções potencial são uma maneira complicada de expressar divisões proporcionais. Que podemos imaginar os valores de f como pesos, e o custo que cada jogador paga por uma aresta é proporcional a seu peso.

Tomando, por exemplo $f(\{1\}) = 1$, $f(\{2\}) = 10$, temos, pela equação 3.10, $f(\{1, 2\}) = 111/11$, $\xi(1, \{1, 2\}) = 1/11$, $\xi(2, \{1, 2\}) = 10/11$.

Não só esse exemplo é uma divisão proporcional, mas temos que para dois jogadores a divisão de um protocolo baseado em potencial único é sempre uma divisão proporcional.

Para três ou mais jogadores, isso já não se verifica. Tomemos, por exemplo, $f(\{1\}) = 1$, $f(\{2\}) = 10$, $f(\{3\}) = 100$, temos, pela equação 3.10, $f(\{1, 2\}) = 111/11$, $f(\{2, 3\}) = 1110/11$, $f(\{1, 3\}) = 10101/101$, $f(\{1, 2, 3\}) = 1131311/11211$, obtendo

- $\xi(1, \{1, 2, 3\}) = 211/123321$ (e não o $1/111$ que esperaríamos ingenuamente),
- $\xi(2, \{1, 2, 3\}) = 10/111$,
- $\xi(3, \{1, 2, 3\}) = 112000/123321$ (e não o $100/111$ que esperaríamos ingenuamente).

De fato, Chen e Roughgarden [CR09] provam que tais divisões proporcionais geram jogos de Steiner sem equilíbrio.

As funções de distribuição de custos baseadas em potencial único podem ser entendidas como aplicações do valor de Shapley ponderado (como definido por Kalai e Samet [KS87]), onde o jogador i tem peso $1/f(\{i\})$.

Capítulo 4

Limitantes inferiores

Nesse capítulo, estabelecemos limitantes inferiores para o preço da anarquia (e outros preços de interesse definidos nesse trabalho — preço da anarquia para multitransmissões, preço da anarquia orientado) de *todo* protocolo uniforme. Por exemplo, provaremos no teorema 4.18 que todo protocolo uniforme tem preço da anarquia para grafos orientados H_n ou maior.

Também exibiremos limitantes inferiores para o preço da anarquia (e outros preços de interesse) de *todos* os protocolos admissíveis.

Juntando os resultados que exibiremos nesse capítulo com os resultados do capítulo 2 e alguns outros resultados da literatura, construímos o seguinte “mapa” que indica o melhor protocolo conhecido em termos de preço da anarquia (ou estabilidade, ou outro preço de interesse) e um limitante que nos permite avaliar a qualidade desse protocolo.

Para instâncias (não orientadas) do problema de Steiner, temos os seguintes resultados.

- Há protocolo uniforme com preço da anarquia $O(\log^2 n)$ (o protocolo ordenado, vide teorema 2.7) e todo protocolo uniforme tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$ (vide teorema 4.5, lembrando que todo protocolo uniforme é admissível).
- Há protocolo admissível com preço da anarquia $O(\log^2 n)$ e todo protocolo admissível tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$: usando os mesmos dois resultados acima.
- Há protocolo uniforme (o protocolo ordenado) com preço da anarquia para multitransmissões $O(\log n)$ (teorema 2.21) e todo protocolo uniforme tem preço da anarquia para multitransmissões $\Omega(\log n)$ (teorema 4.16).
- Há protocolo admissível (o protocolo de Prim) com preço da anarquia exatamente 2 (seção 2.1.3, em particular o teorema 2.23) e todo protocolo admissível tem preço da anarquia pelo menos $2n/(n+1)$ (o teorema 2.24 se generaliza imediatamente para todo protocolo admissível).
- Há protocolo admissível com preço da estabilidade para multitransmissões 1 (teorema 5.2).

Para instâncias do problema de Steiner orientado, temos os seguintes resultados.

- O preço da anarquia para grafos orientados e o preço da anarquia para multitransmissões orientadas é n , para todo protocolo admissível (e, portanto, para todo protocolo uniforme). O teorema 2.30 prova isso e, na verdade, se aplica para uma classe de protocolos maior do que os admissíveis.

- O preço da estabilidade para multitransmissões orientadas (e, portanto, o para grafos orientados) de todo protocolo uniforme é no mínimo H_n (teorema 4.18) e há protocolo uniforme com tais preços da estabilidade iguais a H_n (o protocolo de Shapley, vide teorema 2.31. O teorema diz que o preço da estabilidade é “menor ou igual”, mas 4.18 prova que é exatamente igual).
- Há protocolo admissível com preço da estabilidade para multitransmissões orientadas 1 (teorema 5.3).
- Todo protocolo admissível tem preço da estabilidade para grafos orientados pelo menos $3/2$ (como provado por Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10]), e temos um protocolo com tal preço H_n (o protocolo de Shapley, vide teorema 2.31).

Nas próximas seções, provamos os resultados citados. Em 4.1, temos uma prova de que todo protocolo admissível tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$. Em 4.2 provamos que todo protocolo uniforme tem preço da anarquia para multitransmissões $\Omega(\log n)$. Em 4.3 provamos que todo protocolo uniforme tem preço da estabilidade para multitransmissões orientadas H_n ou maior.

Os resultados que apresentaremos são devidos a Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

4.1 Preço da anarquia para protocolos admissíveis

Pretendemos provar, nessa seção, que todo protocolo admissível (uniforme ou não) tem, para grafos não orientados, preço da anarquia $\Omega(\log n)$, onde n é o número de jogadores.

Para isso, enunciaremos um resultado sobre grafos regulares de cintura grande (o teorema 4.2) e um resultado clássico de teoria dos grafos (4.1, o teorema de Hall). Usaremos esses dois resultados para construir uma família de grafos (no corolário 4.3 e no lema 4.4) e, com essa família, construiremos uma família de instâncias do problema de Steiner que prova o resultado desejado (no teorema 4.5).

De início, enunciaremos sem prova o teorema de Hall.

Teorema 4.1. *Seja $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ uma n -upla, onde cada c_i é um conjunto.*

Um sistema de representantes distintos R é uma n -upla (r_1, r_2, \dots, r_n) , com cada coordenada diferente das demais, tal que $r_i \in c_i$.

Para um subconjunto $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, seja $A_I = \cup_{i \in I} c_i$.

Um sistema de representantes distintos existe para C se e somente se, para todo $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, temos A_I tal que

$$|I| \leq |A_I|.$$

□

Uma prova do teorema de Hall, com enunciado similar, pode ser encontrada no livro de Schrijver [Sch02], teorema 22.1.

Agora, enunciaremos, sem prova, o resultado sobre grafos de cintura grande.

Um grafo é dito *regular* quando todos os seus vértices tem a mesma quantidade de vizinhos. Um grafo é dito *δ -regular* quando é um grafo regular em que cada vértice tem δ vizinhos.

A *cintura* de um grafo é o comprimento de seu menor circuito.

Temos o seguinte resultado, sobre a existência de grafos δ -regulares, de cintura grande, com poucos vértices.

Teorema 4.2. *Para $\delta \geq 3$, $l \geq 3$, existe um grafo, δ -regular, com cintura l e no máximo $1 + \delta \cdot \sum_{a=0}^l (\delta - 1)^a$ vértices. \square*

O resultado é devido a P. Erdős e H. Sachs. Um esboço de prova pode ser visto no livro de Matousek [Mat02], no exercício 15.3.1.

Em particular, o teorema implica que há, para todo $l \geq 3$ inteiro, grafo 4-regular com cintura l e número de vértices

$$n \leq 1 + 4 \cdot \sum_{a=0}^l 3^a = 1 + 2 \cdot 3^{l+1} - 2 < 2 \cdot 3^{l+1}$$

Pretendemos usar o seguinte corolário do teorema 4.2 em nossa construção.

Corolário 4.3. *Existe uma sequência infinita não-decrescente de inteiros (n_3, n_4, \dots) tal que, para cada n_k , existe grafo 4-regular, com cintura k e com $n_k < 2 \cdot 3^{k+1}$ vértices.*

Demonstração. Para uma cintura $l \geq 3$, sabemos, pelo teorema 4.2, que há um grafo 4-regular com menos do que $2 \cdot 3^{l+1}$ vértices.

Seja (m_3, m_4, \dots) a sequência dos números de vértices de tais grafos, com cinturas $(3, 4, \dots)$.

Essa sequência obedece todas as condições desse corolário, exceto por não sabermos se essa sequência é não-decrescente. Se não for, podemos construir uma sequência não-decrescente com base nela.

Seja i o menor inteiro tal que $m_{i+1} < m_i$. Tome o grafo associado a m_{i+1} . Podemos duplicar esse grafo algumas vezes, de forma a obter um grafo com número de vértices $n_{i+1} > m_i$ 4-regular, com cintura $i + 1$. Fazendo o menor número possível de tais duplicações, obtemos um número de vértices menor que $2 \cdot m_i < 2 \cdot (2 \cdot 3^{i+1})$, que por sua vez é menor que $2 \cdot 3^{(i+1)+1}$.

Através dessa construção, obtemos a sequência desejada. \square

O nosso próximo passo é definir uma transformação que leva um grafo 4-regular em um grafo 3-regular com características interessantes.

Essa transformação, aplicada aos grafos produzidos no corolário 4.3 nos permitirá construir instâncias do problema de Steiner adequadas para provar o resultado desejado.

No lema seguinte, usamos a noção de emparelhamento. Um *emparelhamento* é um conjunto de arestas de um grafo tal que nenhum vértice pertence a duas arestas distintas.

Lema 4.4. *Seja G um grafo 4-regular de cintura l , com n vértices.*

Então, existe um grafo H , 3-regular, com $2n$ vértices e um emparelhamento A de seus vértices tal que:

- *excluir todas as arestas de A produz um grafo 2-regular;*
- *contrair todas as arestas de A produz um grafo com cintura l .*

Demonstração. De início, construímos um subgrafo de G , 2-regular, que contém todos os seus vértices. Faremos isso com o teorema de Hall, usando para cada vértice v_i um par de vértices c_i , dentre os 4 vértices adjacentes a v_i . Esses pares serão tais que, se $v_j \in c_i$, então $v_i \notin c_j$.

Construamos tais pares c_i .

Tomamos um ciclo euleriano de G – ou, se G for desconexo, um ciclo euleriano para cada componente conexa. Isso é possível, pois todo vértice de G tem grau par.

Percorremos os vértices de uma componente conexa de G , partindo de um vértice qualquer, na ordem do ciclo euleriano. Fazemos isso para toda componente conexa de G .

No procedimento do paragrafo anterior, um vértice v_i ocorreu “depois de um vértice” duas vezes, e “antes de um vértice” duas vezes. Definiremos c_i como o par de vértices que ocorreu depois de v_i . Assim, temos conjuntos c_i que tem dois vértices adjacentes a v_i . Além disso, temos que se $v_j \in c_i$, $v_i \notin c_j$, pois G não tem arestas múltiplas. Os c_i são como queríamos.

Aplicamos o teorema de Hall. Para cada v_i , temos o conjunto c_i associado. Tomamos C a $|V(G)|$ -upla desses conjuntos. Para cada conjunto $I \subseteq \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$, tomemos $A_I = \cup_{i \in I} c_i$.

Provemos que $|I| \leq |A_I|$. A_I é um conjunto de vértices. Tomemos $V_I = \{v_i | i \in I\}$. Tomemos E_I o conjunto de arestas $\{v_i, v_j\}$, com $i \in I$ e $v_j \in c_i$. Por um lado, sabemos que $|E_I| = 2 \cdot |V_I|$. Por outro, que um vértice de A_I é atingido por no máximo duas arestas de E_I – ou seja, $|E_I| \leq 2 \cdot |A_I|$. Assim, temos $2 \cdot |I| = 2 \cdot |V_I| = |E_I| \leq 2 \cdot |A_I|$ e, portanto, $|I| \leq |A_I|$.

Assim, o teorema de Hall afirma que há um R , sistema de representantes distintos para C . Como C tem exatamente $|V(G)|$ coordenadas, e cada coordenada é um vértice de G , temos que cada vértice aparece exatamente uma vez em R .

Desse sistema de representantes distintos, obtemos o subgrafo 2-regular. Para cada vértice v_i , tomamos a aresta entre ele e o i -ésimo vértice de R (que, lembramos, é um vértice de c_i). Com esse conjunto de arestas, e todos os vértices de G , temos um subgrafo 2-regular, pois cada v_i tem um vértice v_j associado por R , e é o vértice associado por R de algum v_l (e, pela construção dos c_i , temos $v_l \neq v_j$).

Chamemos um subgrafo 2-regular de G de G^1 . Notemos que, se excluirmos as arestas de G^1 de G , obtemos um segundo grafo 2-regular. Chamaremos esse segundo grafo de G^2 .

Produzimos H “separando” G^1 e G^2 e ligando os vértices correspondentes. Ou seja, H tem conjunto de vértices $\{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n}\}$; uma aresta entre v_{1i} e v_{1j} se há aresta entre v_i e v_j em G^1 ; aresta entre v_{2i} e v_{2j} se há aresta entre i e j em G^2 ; uma aresta entre v_{1i} e v_{2i} , para todo i .

Afirmamos que H é como queremos, com A sendo o conjunto de arestas da forma $\{v_{1i}, v_{2i}\}$. Verificamos isso nos parágrafos seguintes.

H é um grafo 3-regular, com $2n$ vértices, A é um emparelhamento das arestas de H .

Excluindo as arestas de A , temos um grafo 2-regular.

Contraindo as arestas de A , obtemos G , que é um grafo de cintura l .

Assim, H é um grafo como pedido, e podemos construir a família de grafos do enunciado. \square

Já podemos provar o resultado desejado.

Teorema 4.5. *Cada protocolo admissível tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$, onde n é o número de jogadores.*

Demonstração. Começamos a prova considerando a sequência (G_3, G_4, \dots) de grafos associada aos inteiros (n_3, n_4, \dots) do lema 4.3. Dessa sequência, obtemos uma sequência (H_3, H_4, \dots) . Cada H_k é um grafo 3-regular de $2n_k$ vértices, obtido a partir de G_k como no lema 4.4.

Faremos uma construção que envolve n_k jogadores, mas posteriormente argumentaremos que a construção pode ser estendida para um número qualquer de jogadores.

Tome H_k e o A correspondente. Construamos uma instância do problema de Steiner.

Sabemos que, ao contrair as arestas de A , temos um grafo com cintura k .

Sabemos que, ao excluir as arestas de A , temos um grafo 2-regular, de cintura maior ou igual a k . Ou seja, em que toda componente conexa tem um circuito com k ou mais vértices. Denotemos o número de componentes conexas ao excluir as arestas de A por cc_k . Temos que $cc_k = O(n_k/k)$.

Adicionemos a H_k um vértice v , que tem uma aresta ligando-o a cada tal componente conexa.

Os custos das arestas serão: $2 \cdot k$, para arestas que contém v ; k , para arestas de A ; 1 para demais (as arestas de H_k , excluindo A).

Haverá um jogador para cada aresta de A , e ele quer ligar os dois vértices dessa aresta. Chamaremos a aresta associada ao jogador j de a_j .

Tome T um protocolo admissível qualquer. Seja ξ_e a função de distribuição de custos que T associa a uma aresta e de custo $w(e)$. Sabemos que, para todo jogador i , $\xi_e(i, \{i\}) = w(e)$, e usaremos só esse fato sobre o protocolo.

Afirmamos que a configuração em que cada jogador usa a aresta que liga os dois vértices associados a ele é um equilíbrio. Esse equilíbrio tem custo $n_k \cdot k$. Afirmamos que o conjunto das arestas fora de A (incluindo as arestas que contém v) conecta cada um dos pares associados a um jogador, e tem custo relevantemente menor, provando que o preço da anarquia para essa construção é $\Omega(\log n_k)$. Provemos esses fatos.

Provemos que a configuração em que cada jogador usa uma única aresta de fato é equilíbrio. Ou seja, que para todo jogador j , a jogada em que j apenas usa uma aresta a_j de A é uma melhor resposta para a configuração. Para isso, provaremos que, para j , caminhos que envolvem v são mais caros do que o custo k dessa única aresta, e que caminhos que envolvem apenas arestas do grafo original H_k não são mais baratos do que o custo k dessa única aresta.

Caminhos envolvendo v têm custo pelo menos $2 \cdot k$.

Restam caminhos em H_k que não envolvem a_j . Suponha que todas as arestas de A (menos a_j) serão integralmente pagas pelos jogadores associados: para j , têm custo 0. Mesmo assim, caminhos em H_k menos a_j não podem ter custo menor que k : um tal caminho envolve pelo menos k arestas não usadas por nenhum jogador, cada uma de custo 1. Isso porque as arestas desse caminho, se contrairmos todas as arestas de A (a_j inclusive) definem um circuito – e k é um limitante inferior para o tamanho de tais circuitos.

Provamos, portanto, que a configuração proposta é um equilíbrio de custo $n_k \cdot k$.

Estudemos agora o conjunto das arestas fora de A , incluindo arestas que contém v . Esse conjunto conecta o grafo e, portanto, conecta cada um dos pares associados a algum jogador. Verifiquemos que esse conjunto tem custo não maior do que $2n_k + (2k \cdot cc_k)$: excluindo as arestas que contém v , temos custo exatamente $2n_k$. Já as arestas que tocam v tem custo $2k$, e há exatamente cc_k tais arestas.

Temos, porém, que $2n_k + (2k \cdot cc_k) = O(n_k)$. Isso porque temos $cc_k = O(n_k/k)$.

Assim, o preço da anarquia, para a construção, é $\Omega(k)$.

Por construção, o número de jogadores dessa instância é $n_k < 2 \cdot 3^{k+1}$. Portanto, o preço da anarquia é $\Omega(\log n_k)$.

Resta estender essa construção para n um número qualquer de jogadores. Tome k tal que $n_k < n < n_{k+1}$. Desejamos usar a instância do problema de Steiner baseada em H_k para construir uma instância do problema de Steiner H'_k com preço da anarquia $\Omega(\log n)$ e com n jogadores.

Fazemos isso tomando H_k , e adicionando jogadores em outra componente conexa, que desejam ligar dois vértices conectados por uma aresta de custo 0: estamos mudando o n , mas mantendo o custo da floresta de Steiner e o custo de cada equilíbrio.

Com isso, estamos introduzindo um problema: o preço da anarquia está fixo, mas estamos

interessados no preço da anarquia como função de n . Lembrando que $n_{k+1} < 2 \cdot 3^{k+2}$, provemos que essa construção, que já sabemos ter preço da anarquia $\Omega(k)$ tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$.

Temos que $n < n_{k+1} \leq 2 \cdot 3^{k+2}$. Então, $k = \Omega(\log n)$, e o preço da anarquia é $\Omega(\log n)$, como queríamos. \square

4.2 Multitransmissões e protocolos uniformes

Queremos provar que para cada protocolo uniforme o preço da anarquia para multitransmissões é $\Omega(\log n)$, onde n é o número de jogadores.

Para isso, usaremos a caracterização dos protocolos uniformes lineares como protocolos baseados em potenciais (teorema 3.45).

Iremos estabelecer dois lemas (o lema 4.9 e o lema 4.13) que descrevem a relação entre funções potencial e custos em um jogo de Steiner. Esses lemas estabelecerão que valores “próximos” de $f(\{i\})$ e $f(\{j\})$ implicam em custos “próximos”, enquanto valores “distantes” nas f implicam em custos “distantes”.

De posse desses lemas, construiremos duas famílias de grafos para mostrar que, se o protocolo é tal que há quantidade suficiente de jogadores com potenciais “próximos”, uma das construções é uma família de grafos com preço da anarquia $\Omega(\log n)$ e, se não houver, há quantidade suficiente de jogadores com potenciais “distantes”, e a outra construção tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$.

Mas, antes de tudo isso, precisamos provar dois lemas mais técnicos sobre funções potenciais. Para tal, fazemos uso da seguinte expressão para o potencial $f(S)$ de um conjunto S em função de f de conjuntos menores:

$$f(S) = \left(1 + \sum_{i \in S} \frac{f(S \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \right) \cdot \left(\sum_{i \in S} \frac{1}{f(\{i\})} \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Essa expressão, que já havíamos usado no lema 3.9, é uma manipulação da definição de potencial (a equação 3.6).

No que segue, H_i é o i -ésimo número harmônico.

Lema 4.7. *Seja f uma função potencial para n jogadores.*

Sejam $\alpha \geq 1$ uma constante e $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tais que, se i e j estão em S , temos $f(\{i\}) \leq \alpha f(\{j\})$.

Então, para cada $T \subseteq S$ e $j \in S$, temos $f(T) \leq \alpha H_{|T|} f(\{j\})$.

Demonstração. Faremos a prova por indução no tamanho de T .

Para $|T| = 1$, o fato é hipótese do teorema.

Se $|T| > 1$, suponha o fato verdade para todo $C \subset T$. Da equação 4.6, temos que

$$f(T) = \overbrace{\left(\sum_{i \in T} \frac{1}{f(\{i\})} \right)^{-1}}^A + \overbrace{\left(\sum_{i \in T} \frac{f(T \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \right) \cdot \left(\sum_{i \in T} \frac{1}{f(\{i\})} \right)^{-1}}^B.$$

O segundo termo dessa soma (B) é uma média ponderada de valores de $f(T \setminus \{i\})$: cada um desses valores é multiplicado pelo $1/f(\{i\})$ correspondente, e a soma é dividida pela somatória dos $1/f(\{i\})$.

Essa média ponderada é menor ou igual ao maior $f(T \setminus \{i\})$. Esse valor de f , por sua vez, é menor ou igual a $\alpha H_{|T|-1} f(\{j\})$, para todo $j \in S$, pela hipótese de indução.

O primeiro termo dessa soma (A) é limitado superiormente por

$$\left(\sum_{i \in T} \frac{1}{\alpha f(\{j\})} \right)^{-1} = \left(\frac{|T|}{\alpha f(\{j\})} \right)^{-1} = \frac{\alpha f(\{j\})}{|T|}.$$

Somando A e B , temos um valor limitado superiormente por $\alpha H_{|T|} f(\{j\})$, como queríamos. \square

Lema 4.8. *Seja f uma função potencial para n jogadores.*

Sejam $\alpha \geq 1$ uma constante e $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tais que, se i e j estão em S , temos $f(\{i\}) \leq \alpha f(\{j\})$.

Tome dois conjuntos $T_1, T_2 \subseteq S$, não necessariamente disjuntos, um de tamanho l , e outro de tamanho l ou menor.

Então, $f(T_1) \leq \alpha^{2l-1} f(T_2)$.

Demonstração. Faremos a prova por indução em l .

Para o caso $l = 1$, T_1 e T_2 são unitários, o fato é hipótese do teorema.

Para o caso $l > 1$, assumimos que o fato é verdade para conjuntos menores que l . Temos

$$\begin{aligned} f(T_1) &= \left(1 + \sum_{i \in T_1} \frac{f(T_1 \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \right) \cdot \left(\sum_{i \in T_1} \frac{1}{f(\{i\})} \right)^{-1} \\ &\leq \left(1 + \sum_{i \in T_2} \frac{\alpha^{2l-3} \cdot f(T_2 \setminus \{i\})}{f(\{i\})/\alpha} \right) \cdot \left(\sum_{i \in T_2} \frac{1}{\alpha f(\{i\})} \right)^{-1} \\ &\leq \alpha^{2l-2} \left(1 + \sum_{i \in T_2} \frac{f(T_2 \setminus \{i\})}{f(\{i\})} \right) \cdot \alpha \left(\sum_{i \in T_2} \frac{1}{f(\{i\})} \right)^{-1} \\ &= \alpha^{2l-1} f(T_2), \end{aligned}$$

como queríamos. \square

Com base nos dois lemas anteriores, podemos provar que jogadores i e j com $f(\{i\})$ e $f(\{j\})$ “próximos” pagam custos “próximos”.

Lema 4.9. *Seja f uma função potencial para n jogadores.*

Sejam $\alpha \geq 1$ uma constante e $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tais que, se i e j estão em S , temos $f(\{i\}) \leq \alpha f(\{j\})$.

Suponha que $|S| \leq \log n$, $n > 20$ e α é tal que

$$\alpha^{2 \log n} = 1 + \log^{-3} n. \quad (4.10)$$

Seja ξ_1 a função de distribuição de custos baseada em potencial único associada a f , $i, j \in S$. Então,

$$\xi_1(i, S) \leq \alpha \left(\xi_1(j, S) + 2 \log^{-2} n \right).$$

Demonstração. Note que a equação 4.10 implica que $\alpha > 1$ para $n > 2$ (e, portanto, a exigência $\alpha \geq 1$ não é incoerente com a equação 4.10).

Pela limitação de $|S|$, temos $\alpha^{2^{|S|-1}} \leq \alpha^{2^{\log n}} = 1 + \log^{-3} n$. Mas, para dois conjuntos quaisquer $T_1, T_2 \subseteq S$, sendo l o tamanho do maior, temos $\alpha^{2^{l-1}} \leq \alpha^{2^{|S|-1}}$. Assim, aplicando o lema 4.8 para dois conjuntos $T_1, T_2 \subseteq S$ quaisquer, temos que

$$f(T_1) \leq f(T_2) \cdot \left(1 + \log^{-3} n\right). \quad (4.11)$$

Pelo lema 4.7, para $T_2 \subseteq S$ e $j \in S$, temos

$$f(T_2) \leq \alpha H_{|T_2|} f(\{j\}) \leq \alpha H_{|S|} f(\{j\}) \leq \alpha \cdot |S| \cdot f(\{j\}) \leq 2 \log n \cdot f(\{j\}) \quad (4.12)$$

(usando $n > 20$ para limitar α , na última desigualdade).

Usando 4.12 em 4.11, temos

$$f(T_1) \leq f(T_2) + 2 \log^{-2} n \cdot f(\{j\}).$$

Assim, para dois jogadores $i, j \in S$, temos

$$\begin{aligned} \xi_1(j, S) &= \frac{f(S) - f(S \setminus \{j\})}{f(\{j\})} \\ &\geq \frac{f(S) - f(S \setminus \{i\}) - 2 \log^{-2} n \cdot f(\{i\})}{\alpha f(\{i\})} \\ &= \frac{\xi_1(i, S)}{\alpha} - \frac{2 \log^{-2} n}{\alpha} \geq \frac{\xi_1(i, S)}{\alpha} - 2 \log^{-2} n \end{aligned}$$

e temos $\alpha (\xi_1(j, S) + 2 \log^{-2} n) \geq \xi_1(i, S)$, como queríamos. \square

Lema 4.13. *Seja f uma função potencial para n jogadores, ξ a função de distribuição de custo baseada em potencial único associada. Sejam i e j dois jogadores em $\{1, 2, \dots, n\}$. Seja β um número maior que 1. Suponha $f(i) \geq \beta \cdot f(j)$.*

Então, temos

$$\xi(i, \{i, j\}) \geq \frac{\beta}{\beta + 1}; \quad (4.14)$$

$$\xi(j, S) \leq \frac{1}{\beta + 1}, \text{ para todo } S \supseteq \{i, j\}. \quad (4.15)$$

Demonstração. Se a primeira equação vale, temos, pelo balanceamento de orçamento, $\xi(j, \{i, j\}) \leq 1/(\beta + 1)$ e, pela monotonicidade, $\xi(j, S) \leq 1/(\beta + 1)$. Então, temos apenas que provar a primeira equação.

Sem perda de generalidade, suponhamos $f(\{j\}) = 1$. Se $f(\{i\}) = a$, temos (como já havíamos feito, logo antes do lema 3.12) $f(\{i, j\}) = (a^2 + a + 1)/(a + 1)$ e, pela definição de função de distribuição de custos baseada em potencial único, $\xi(i, \{i, j\}) = a/(a + 1)$. Como essa função é crescente em a , temos que, se $a \geq \beta$, $\xi(i, \{i, j\}) \geq \beta/(\beta + 1)$. \square

Estamos prontos para provar o teorema.

Teorema 4.16. *Todo protocolo uniforme tem preço da anarquia para multitransmissões $\Omega(\log n)$, onde n é o número de jogadores.*

Demonstração. De início, pelo teorema 3.3, basta provar uma afirmação mais simples. Provaremos somente que todo protocolo uniforme *linear* tem preço da anarquia para multitransmissões $\Omega(\log n)$.

Podemos fazer isso porque sabemos, por 3.3 que todo protocolo uniforme T tem seu preço da anarquia para multitransmissões limitado inferiormente pelo preço da anarquia para multitransmissões de um protocolo uniforme linear: T' , o protocolo linearizado de T .

Seja α tal que

$$\alpha^{2 \log n} = 1 + \log^{-3} n. \quad (4.17)$$

Notemos que, para n grande o bastante, temos

- (i) $\left(1 + \log^{-3} n\right)^{\log^3 n} \geq e/2$, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \log^{-3} n\right)^{\log^3 n} = e$;
- (ii) $\log n \geq 2$;
- (iii) $\left((n-1)/n\right)^n > 1/2e$, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-1)/n\right)^n = 1/e$.

Fixo um número de jogadores n , o protocolo tem uma única ξ_1 , função que distribui custo 1 entre n jogadores, associada. Essa função, pelo teorema 3.45, é uma concatenação de funções baseadas em potencial único.

Dividimos os jogadores em grupos, da seguinte forma. Dois jogadores associados pela concatenação a protocolos diferentes estão em grupos diferentes. Jogadores i e j associados a um mesmo protocolo, pertencem a um mesmo grupo se $\alpha^l \leq f(i)$, $f(j) < \alpha^{l+1}$ para algum inteiro l , onde f é a função potencial associada a esse protocolo.

Ordenamos esses grupos, do grupo que “paga mais” ao que “paga menos”. Ou seja, respeitando a ordem da concatenação e, dentre grupos cujos jogadores estão associados a um mesmo protocolo, ordenando dos grupos de cujos jogadores têm f maior para os grupos de jogadores com f menor (no lema 4.13 vemos uma relação entre f e o custo). Denominamos os grupos G_1, G_2, \dots, G_m , na ordem do grupo que “paga mais” para o que “paga menos”.

Notemos que dois jogadores no mesmo G_l pagam custos “similares”, nos termos do lema 4.9.

Dividimos, agora, a prova em dois casos. Se houver grupo com pelo menos $\log n$ jogadores, uma construção provará que o preço da anarquia é $\Omega(\log n)$ e, se não houver, há pelo menos $n/\log n$ grupos distintos com algum jogador, e outra construção provará que o preço da anarquia é $\Omega(\log n)$.

Se houver grupo G_l com pelo menos $\log n$ jogadores, tome $H \subseteq G_l$ com exatamente $\log n$ jogadores. Existe $j \in H$ tal que $\xi_1(j, H) \leq 1/\log n$.

Com n grande o bastante, H respeita as hipóteses do lema 4.9. Usando 4.9, podemos afirmar que, para todo i em H

$$\xi(i, H) \leq \alpha \left(\xi(j, H) + 2 \log^{-2} n \right) \leq \left(1 + \log^{-3} n \right) \left(\xi(j, H) + 2 \log^{-2} n \right) \leq 2 \frac{1}{\log n}$$

(usando n grande o bastante para que os termos $(\log n)^a$ com $a \leq -2$ possam ser, todos juntos, limitados por $(\log n)^{-1}$).

Usando esse conjunto H , podemos construir o grafo da figura 4.1.

Nesse grafo, os jogadores de H desejam ligar s a t . Os demais desejam ligar s_2 a t , através de uma aresta de custo 0. Na configuração em que todo jogador de H usa a aresta de custo $(\log n)/3$ cada jogador de $i \in H$ tem custo $\xi_1(i, H) \cdot ((\log n)/3) \leq 2/3$. Isso implica que essa configuração é um equilíbrio. Assim, temos um equilíbrio de custo $(\log n)/3$, e um ótimo de custo 1. O preço da anarquia é $(\log n)/3 = \Omega(\log n)$.

Se não houver grupo com pelo menos $\log n$ jogadores, temos pelo menos $n/\log n$ grupos distintos e não-vazios.

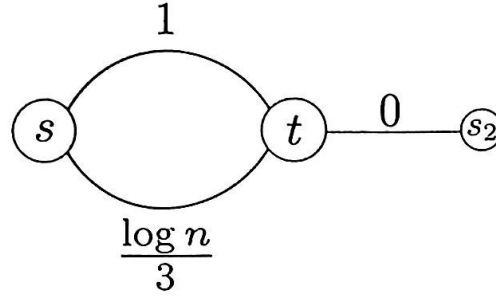


Figura 4.1: Construção para custos próximos

De (i) e da definição de α (eq. 4.17), podemos dizer que $\alpha^{2 \log^4 n} \geq e/2$ e, portanto, que existe a , independente de n , tal que $\alpha^{a \log^4 n} \geq e + 1$, e $\alpha^{a \log^5 n} \geq n + 1$ (usando ii).

Tomaremos um único jogador de cada $(a + 1) \log^5 n$ grupos, e excluiremos alguns, arbitrariamente, produzindo um conjunto S de jogadores tal que:

- $|S| = 2^p - 1$, para algum inteiro p ;
- $n/2 \cdot (a + 1) \log^6 n \leq |S| \leq n / (a + 1) \log^6 n$.

Vamos ordenar os jogadores de S pela ordem dos conjuntos a que pertenciam, e denotá-los $s_1, s_2, \dots, s_{(2^p-1)}$. Por nossa escolha de S , sabemos que s_i e s_{i+l} pagam por uma aresta de forma desigual. Ou eles estão associados a protocolos distintos, e s_{i+l} não paga quando os dois usam uma aresta, ou, se associados a protocolos iguais, seus custos estão sujeitos ao lema 4.13: temos $f(s_i) > (n + 1)^l f(s_{i+l})$, e o jogador s_{i+l} paga no máximo uma fração $1 / \left((n + 1)^l + 1 \right)$ do custo de uma aresta, se divide essa aresta com s_i .

Note que pegamos um único jogador de cada $(a + 1) \log^5 n$ conjuntos, o que é maior que $1 + a \log^5 n$. Se pegássemos um a cada $a \log^5 n$, teríamos que os extremos inferiores que definem dois conjuntos consecutivos difeririam de um fator multiplicativo $n + 1$. Como pegamos um dentre $1 + a \log^5 n$, podemos dizer que os potenciais de jogadores consecutivos de fato diferem desse fator multiplicativo.

Estamos prontos para construir um grafo com preço da anarquia alto. Os primeiros três passos dessa construção podem ser vistos na figura 4.2. Nessa construção, cada jogador s_i quer ligar o vértice s_i ao vértice t . Todo jogador fora de S quer ligar h a t .

Seja $\gamma = (n - 1) / n$. A construção é feita iterativamente. No início, temos h e t , ligados por uma aresta de custo 0, e v e t , ligados por uma aresta de custo 1. A cada passo da construção, vamos particionar o caminho de v a t , adicionando vértices associados a jogadores e também arestas “atalho” adicionais. No primeiro passo, substituímos a aresta (v, t) , de custo 1, por duas arestas de custo $1/2$, com o vértice s_1 entre elas. Além disso, adicionamos uma aresta “atalho” de custo $(1/2) \cdot \gamma^{p+1}$ entre s_1 e t . O segundo passo substitui a aresta $\{v, s_1\}$ (que tinha custo $1/2$) por duas, de custo $1/4$, com o vértice s_2 entre elas, e a aresta $\{s_1, t\}$ (que tinha custo $1/2$) por duas, de custo $1/4$, com o vértice s_3 entre elas. Além disso, adicionamos duas arestas “atalho”, de custo $(1/4) \cdot \gamma^p$, uma entre s_2 e s_1 e a outra entre s_3 e t . Continuamos a construção dessa forma, particionando arestas “não atalho”, tornando uma aresta de custo $1/2^q$ em duas de custo $1/2^{q+1}$, adicionando arestas “atalho” de custo $1/2^{q+1}$ vezes uma potência de γ , sempre para o vértice mais próximo, no caminho até t , e sempre usando potências menores de γ , até termos todos os s_i no grafo.

Note que, a cada passo, adicionamos arestas “atalho” que, não fosse pelas potências de γ , somariam $1/2$. Mas as potências de γ são da forma $\left((n - 1) / n \right)^h$ onde $h < n$. Por isso, considerando a desigualdade (iii), temos que as arestas de “atalho” adicionadas a cada passo

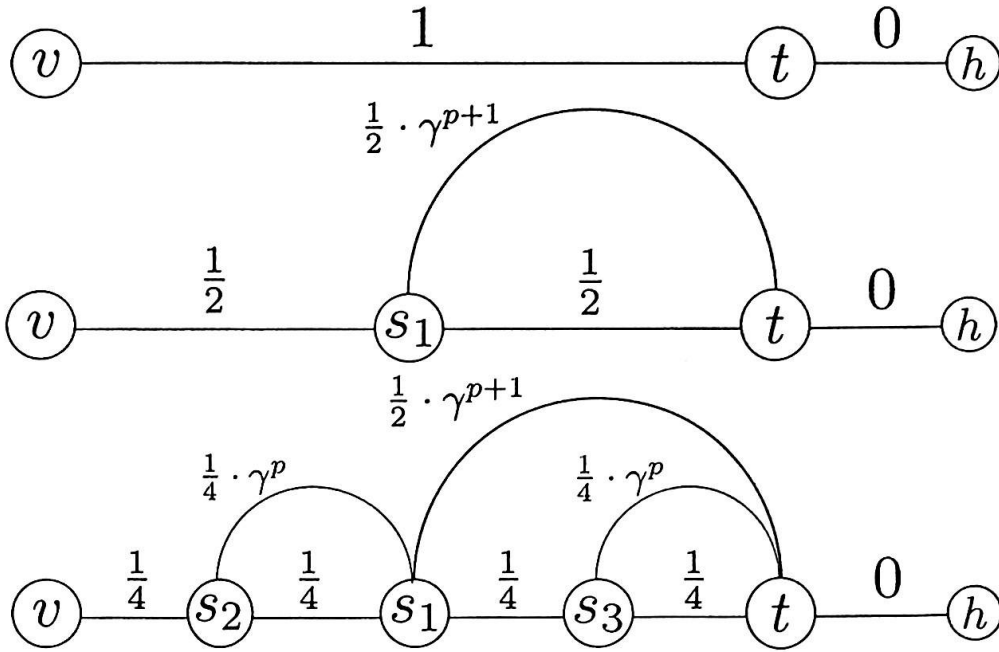


Figura 4.2: Construção para custos distantes

somam pelo menos $1/4e$ de custo. No total, o custo das arestas de “atalho” é pelo menos $p/4e$.

Nesse grafo, há uma floresta de Steiner de custo 1 ou menor. Para verificar esse fato, considere o conjunto de arestas “não atalho”. Ele não é uma floresta de Steiner, mas prova que o custo de uma é no máximo 1. Porém, como demonstraremos, a configuração em que todos os jogador s_j usa o único caminho de s_j a t composto apenas de arestas “atalho” é um equilíbrio. Assim, há um equilíbrio com custo $p/4e = \Omega(\log |S|) = \Omega\left(\log\left(n/\log^6(n)\right)\right) = \Omega(\log n)$.

Portanto, o Preço da anarquia desse grafo é $\Omega(\log n)$.

Na configuração em que todos os jogadores utilizam apenas arestas “atalho”, tome o jogador s_j . Queremos provar que sua jogada é uma melhor resposta: que, na situação, não há caminho que s_j possa escolher, de forma a reduzir seu custo.

Tome $\{s_j, s_h\}$ a primeira aresta do caminho de s_j a t . O primeiro passo é provar que não há caminho de s_j a t , passando por s_h , em que s_j pague menos. Depois, veremos que não há caminho de s_j a t , sem passar por s_h , em que s_j pague menos.

Para estabelecer o primeiro passo, argumentaremos que $\{s_j, s_h\}$ não pode ser substituída por um caminho de menor custo, entre s_j e s_h e que o caminho que s_j faz entre s_h e t não pode ser substituído por outro caminho entre s_h e t , de custo menor.

Denotemos o custo de $\{s_j, s_h\}$ como $c \cdot \gamma$. Provemos que $\{s_j, s_h\}$ não pode ser substituída por um caminho de menor custo. Um tal caminho envolveria, necessariamente, uma aresta “não atalho” que não é usada por nenhum jogador. Denotamos o custo dessa aresta por d , e observamos que $d \geq 1/n$. Além disso, envolveria arestas “atalho”, compartilhadas apenas com jogadores de número maior que j . O custo total dessas arestas “atalho” é, no mínimo, $c - d$, pela construção do grafo. Afirmamos que, pelas arestas “atalho” do novo caminho, s_j pagaria pelo menos $(c - d) \cdot \gamma$. Como já dissemos, s_j estaria compartilhando essas arestas apenas com jogadores de número maior. Por isso, aplicando o lema 4.13, sabemos que o jogador de menor número, entre eles, pagaria no máximo $1/((n+1)+1)$ do custo das arestas que dividisse com s_j . O próximo jogador, na ordem dos números, pagaria apenas $1/((n+1)^2+1)$. De fato, as frações que os jogadores de menor custo pagam são limitadas

pela progressão geométrica de razão $1/(n+1)$ e, portanto eles juntos pagam, no máximo, $1/n$ de $(c-d)$. Pelo balanceamento de orçamento, s_j paga no mínimo $(c-d) \cdot \gamma$. No total, pelo novo caminho, s_j pagaria

$$(c-d) \cdot \gamma + d = c \cdot \gamma + d(1-\gamma) \geq c \cdot \gamma + (1/n)(1-\gamma) = c \cdot \gamma + (1/n)^2.$$

Está provado que não há caminho melhor entre s_j e s_h que a aresta “atalho” (s_j, s_h) .

A prova de que não há caminho melhor para s_j entre s_h e t é mais simples. Um tal caminho incluiria uma aresta “não atalho”, de custo pelo menos $1/n$. Mas, como s_j é anterior a s_h na ordenação, sabemos que ele paga, por todos os atalhos que usa de s_h a t , apenas $1/((n+1)+1)$ do custo desses atalhos, o que é estritamente menor que $1/n$.

Resta fazer o “segundo passo”: provar que não há, para s_j , caminho que não envolve s_h mas tem custo menor. Quando da inserção de s_j , s_j “quebrou” uma aresta, com um ponta em s_h e outra ponta em um vértice que denotaremos s_k . Para s_j fazer um caminho a t que não incluía s_h , precisa “voltar” para s_k . Mas há uma simetria entre o caminho de s_j a s_h e o caminho de s_j a s_k , de forma que podemos afirmar que, quando s_j abandona a aresta $\{s_j, s_h\}$ e faz um caminho de s_j a s_k , incorreu em um aumento de custo de, no mínimo, $1/n^2$.

Notemos que $j \geq h+2$. Obviamente, temos $j \geq h+1$, mas, pela construção do grafo, podemos afirmar que houve algum jogador s_r que foi adicionado no mesmo passo que s_j , mas antes, no caminho de v para t , que s_k .

Assim, o aumento de custo em $1/n^2$ é suficiente para provar que esse caminho “voltando” não é uma melhor resposta, pois s_j pagava, no caminho original, menos do que $1/n^2$ pelo caminho de s_h a t . Para verificar que, de fato, s_j pagava menos do que $1/n^2$ por esse caminho, basta notar que, pela construção $j \geq h+2$. Assim, s_j não paga mais do que uma fração $1/((n+1)^2+1)$ do custo de s_h a t e, portanto, não paga mais do que $1/((n+1)^2+1)$, o que é menor que $1/n^2$.

Provamos, portanto, que a única melhor resposta de s_j é se manter usando as arestas “atalho”. A situação em que todas as arestas “atalho” são usadas é de fato um equilíbrio, e o preço da anarquia é de fato $\Omega(\log n)$.

Assim, em ambos as construções, temos preço da anarquia $\Omega(\log n)$. Notando que ambas as construções são de instâncias do problema de Steiner que são multitransmissões, provamos o que queríamos. \square

4.3 Protocolos uniformes para digrafos

Nessa seção, limitamos inferiormente o preço da estabilidade para multitransmissões orientadas de protocolos uniformes, da seguinte forma.

Teorema 4.18. *Todo protocolo uniforme tem preço da estabilidade para multitransmissões orientadas no mínimo H_n , onde n é o número de jogadores da instância do problema de Steiner.*

Demonstração. De início, afirmamos que tudo que precisamos provar é que se T é um protocolo uniforme *linear*, seu preço da estabilidade para multitransmissões orientadas é no mínimo H_n . Isso porque, pelo teorema 3.3 sabemos que para todo protocolo uniforme T , o protocolo linearizado T' é um protocolo com preço da anarquia para multitransmissões orientadas menor ou igual ao de T .

Tomando T um protocolo uniforme linear qualquer. A prova consiste em exibir um exemplo de multitransmissão e, usando a caracterização dos protocolos uniformes lineares (em

particular a monotonicidade, provada no teorema 3.19) provar que T tem preço da estabilidade H_n para essa multitransmissão.

O exemplo que usaremos é a instância da figura 4.3.

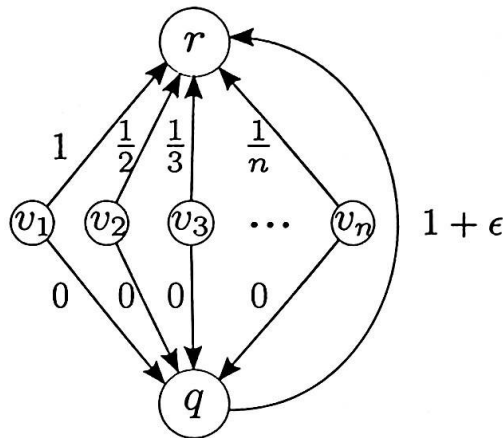


Figura 4.3: Exemplo com preço da estabilidade para multitransmissões orientadas alto

Esse exemplo é uma multitransmissão para n jogadores. No exemplo, ϵ é um número racional tal que $0 < \epsilon < H_n - 1$. Nesse exemplo, tomamos P uma n -upla que contém cada par de $(v_1, r), (v_2, r), \dots, (v_n, r)$. Construiremos a ordem dos elementos de P (e, portanto, a associação entre pares e jogadores) nos baseando em ξ_1 , a função de distribuição de custos que o protocolo associa às arestas de custo 1, em jogos com n jogadores.

Tome j_n um jogador tal que $\xi_1(j_n, \{1, 2, \dots, n\})$ é máximo (decidindo arbitrariamente entre tais jogadores, caso haja mais de um). Tome j_{n-1} o jogador tal que $\xi(j_{n-1}, \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_n\})$ é máximo, decidindo arbitrariamente caso haja mais de um. Tome cada $j_{n-2}, j_{n-3}, \dots, j_1$ da mesma forma (i.e.: um jogador cujo custo é máximo, segundo ξ_1 , excluindo todos os jogadores já designados).

Ordenamos os pares de P de forma que j_i seja associado a (v_i, r) .

Pela escolha de ϵ , temos que o custo de um ótimo do problema de Steiner proposto é $1 + \epsilon$.

Usando T , construímos um jogo de Steiner para essa instância.

Desejamos provar que a configuração em que cada jogador j_i usa a sua aresta “direta” (i.e.: j_i usa a aresta $\{v_i, r\}$) é o único equilíbrio desse jogo. Essa configuração tem custo H_n , assim, se o fato se verificar, teremos preço da estabilidade H_n para essa instância.

Provemos esse fato.

Primeiro, provaremos que a configuração em que cada jogador j_i escolhe o caminho (v_i, q, r) não é um equilíbrio, pois j_n não está escolhendo uma melhor resposta. Depois, que qualquer configuração em que j_n usa o caminho (v_n, q, r) não é um equilíbrio. Por fim, que nenhuma configuração em que algum jogador j_i use o caminho (v_i, q, r) é equilíbrio.

Tome a configuração em que cada jogador j_i escolhe o caminho (v_i, q, r) . Por nossa escolha de j_n , temos que j_n está pagando no mínimo $(1 + \epsilon)/n$ na configuração. Sua jogada não é uma melhor resposta para a configuração, pois a jogada (v_n, r) tem custo apenas $1/n$. A configuração não é um equilíbrio.

Tome uma configuração qualquer em que j_n usa o caminho (v_n, q, r) . Pela monotonicidade de T (teorema 3.19, que se aplica por T ser protocolo uniforme linear) temos que o custo para j_n nessa configuração não pode ser menor do que o custo para j_n na configuração do parágrafo anterior. Novamente, a jogada de j_n não é uma melhor resposta. Temos, então, que j_n usa necessariamente o caminho (v_n, r) , em toda configuração que é um equilíbrio.

Podemos aplicar o raciocínio dos dois parágrafos anteriores para todas as configurações: nenhuma configuração em que haja j_i usando o caminho (v_i, q, r) é equilíbrio. Tome o jogador j_i com i máximo que usa um tal caminho, sua jogada não é uma melhor resposta para a configuração.

Assim, temos de fato que a configuração em que cada jogador usa sua aresta “direta” é o único equilíbrio do jogo (e, portanto, o equilíbrio de menor custo). Temos que o equilíbrio de menor custo custa H_n , e a árvore de Steiner custa $1 + \epsilon$. Construimos um exemplo de preço da estabilidade para multitransmissões orientadas $H_n / (1 + \epsilon)$. Pela definição de preço da estabilidade para multitransmissões orientadas (uma função que, para cada n , é o supremo dos custos de instâncias com tamanho n) temos que esse preço é, no mínimo, H_n .

Provamos o que queríamos: um preço da estabilidade para multitransmissões orientadas de no mínimo H_n , independente da escolha de protocolo uniforme linear T . \square

O teorema acima afirma que protocolos uniformes têm preço da anarquia para multitransmissões no mínimo H_n . Pela definição de preço da anarquia para grafos orientados (envolvendo o supremo de um conjunto de racionais maiores do que os conjuntos correspondentes na definição de preço da anarquia para multitransmissões orientadas) temos que o teorema prova também um limitante inferior H_n para o preço da anarquia para grafos orientados.

Capítulo 5

Abordagens alternativas

Nessa seção, enunciaremos três abordagens alternativas. Três maneiras de obter equilíbrios de custo pequeno que não se encaixam no paradigma de protocolos.

Na seção 5.1 mostramos uma maneira de construir equilíbrios baratos para o protocolo de Shapley, controlando a ordem em que os jogadores “entram” em um equilíbrio. Essa maneira infelizmente só se aplica a multitransmissões.

Na seção 5.2 mostramos uma maneira de construir equilíbrios baratos para o protocolo de Shapley, se contarmos com a cooperação (temporária) de uma fração dos jogadores.

Na seção 5.3, discutimos o jogo com ofertas. Se trata de uma abordagem bastante distinta das anteriores, que tem resultado bastante interessante no caso de multitransmissões. Também definimos um protocolo adicional, o protocolo baseado em ofertas.

5.1 Preço da anarquia atingível

Um trabalho de Charikar e colaboradores [CKM⁺08] define uma maneira interessante de “reduzir” o preço da anarquia do protocolo de Shapley. Nessa seção, descrevemos esse resultado.

Partindo de uma multitransmissão, se estuda uma classe restrita de equilíbrios, dentre os gerados pelo protocolo de Shapley.

Dada uma multitransmissão, definamos os equilíbrios dessa classe.

Começamos de uma pseudo-configuração em que nenhum jogador está associado a nenhum caminho. Vamos adicionando jogadores a essa pseudo-configuração. Quando um jogador é adicionado, escolhe um caminho de menor custo entre seus dois vértices, considerando as escolhas dos jogadores anteriores e dividindo o custo das arestas como no protocolo de Shapley. Fazemos isso até incluirmos todos os jogadores. Com isso, construímos uma configuração do jogo que o protocolo de Shapley associa à instância.

Uma tal configuração não necessariamente é um equilíbrio pois um jogador, depois de adicionado, não pôde alterar seu caminho. Se prova que a razão entre o custo de uma tal configuração e o custo de uma árvore de Steiner da multitransmissão é $O(\log^2 n)$ e $\Omega(\log n)$, onde n é o número de jogadores.

A partir de uma tal configuração, tomamos uma sequência qualquer de melhores respostas, produzindo um equilíbrio. A razão entre o custo de um tal equilíbrio e o custo de uma árvore de Steiner será $O(\log^3 n)$. Para provar esse fato, assumimos o resultado do parágrafo anterior, e empregamos o mesmo raciocínio envolvido na prova do teorema 2.27. Se prova que essa razão também é $\Omega(\log n)$.

Esses são os equilíbrios que Charikar e colaboradores definem. Charikar e colaboradores chamam a razão entre o custo de um tal equilíbrio e o custo da árvore de Steiner da multitransmissão correspondente de *preço da anarquia atingível*.

5.2 Jogo de Steiner com propaganda

Balcan, Blum e Mansour [BBM09] propõe outra maneira de mitigar o custo da anarquia do protocolo de Shapley. Propõe uma maneira de construir equilíbrios aleatoriamente, de forma que a razão esperada entre o custo do equilíbrio e o custo da floresta de Steiner seja baixa. Nessa seção, enunciaremos esse resultado.

Dada uma instância do problema de Steiner, selecionemos um conjunto de jogadores *sugestionáveis*, com cada jogador tendo uma probabilidade α de ser sugestionável, independentemente dos demais.

Com base no conjunto de jogadores sugestionáveis selecionado, construímos uma configuração. Fixa uma floresta de Steiner da instância, cada jogador sugestionável escolhe um dos caminhos entre seus dois vértices que ocorre na floresta de Steiner fixada. Os demais escolhem uma jogada qualquer.

A partir dessa configuração, consideremos as sequências de melhores respostas em que apenas os jogadores não sugestionáveis mudam suas jogadas. Tais sequências são necessariamente finitas. Tomemos uma tal sequência maximal. A partir da última configuração dessa sequência, tomamos uma segunda sequência de melhores respostas, dessa vez com todos os jogadores “livres” para mudar suas jogadas. Novamente, tomemos a última configuração de uma sequência maximal. Essa configuração é um equilíbrio. Balcan, Blum e Mansour provam que esse equilíbrio tem custo esperado $(1/\alpha) a \log n$, onde a é o custo de uma floresta de Steiner da instância.

O resultado de Balcan, Blum e Mansour também se aplica a instâncias do problema de Steiner orientado, com mesmo custo esperado do equilíbrio.

5.3 Jogo com ofertas

Nessa seção, apresentamos brevemente um resultado de Anshelevich, Dasgupta, Tardos e Wexler [ADTW08], e descrevemos como esse resultado implica a existência de um protocolo admissível de preço da estabilidade 1 para multitransmissões e para multitransmissões orientadas. A adaptação do resultado ao contexto de protocolos é devida a Chen, Roughgarden e Valiant [CRV10].

No trabalho de [ADTW08], estuda-se um jogo, também baseado em instâncias do problema de Steiner, que chamaremos *jogo com ofertas*. Descrevamos o jogo com ofertas correspondente a uma instância do problema de Steiner (G, P, w) .

Os jogadores são, como nos jogos de Steiner, cada um correspondente a um par de vértices em P .

O conjunto de estratégias de cada jogador é definido não como um conjunto de caminhos, mas de forma diferente. Fixe uma ordem das arestas $E(G)$ de G . O conjunto de $|E(G)|$ -uplas de racionais não-negativos é o conjunto de estratégias de cada um dos jogadores. Diremos que um jogador paga c pela aresta e se, em sua estratégia, o valor da posição correspondente a e é c .

Em uma configuração, uma aresta é dita *comprada* se a soma dos valores que todos os jogadores pagam por ela é maior ou igual a seu custo. Em particular, toda aresta de custo zero é comprada em todas as configurações.

Em uma configuração, um jogador é *atendido* se há caminho entre seus dois vértices, usando apenas arestas compradas.

O custo de um jogador atendido, em uma dada configuração, é a soma dos valores presentes em sua estratégia. O custo de um jogador não atendido é ∞ .

Há exemplos de instâncias do problema de Steiner tais que o jogo com ofertas correspondente não tem nenhum equilíbrio. Porém, para multitransmissões, [ADTW08] provam que há sempre equilíbrio cujo custo é exatamente o custo de uma floresta de Steiner.

Esse resultado é muito interessante: temos um jogo cujo equilíbrio tem exatamente o mesmo custo que a floresta de Steiner, em que os jogadores podem otimizar seus próprios custos e não há nenhum aumento de custo global. Infelizmente, esse jogo tem um porém importante: ele não respeita a dinâmica de melhor resposta (o que é provado em [ADTW08]).

Nosso interesse nesse jogo, porém, é que ele pode ser adaptado para produzir um protocolo admissível que tem preço da estabilidade 1 para multitransmissões.

Para isso, vamos descrever algumas propriedades dos equilíbrios de um jogo com ofertas. Tome um tal equilíbrio. Seja A o conjunto de arestas compradas nesse equilíbrio.

- (i) A conecta o par de vértices associado a cada um dos jogadores;
- (ii) o conjunto de arestas pelas quais um jogador paga mais que 0 está contido em cada caminho em A entre seus dois vértices associados;
- (iii) para uma aresta de A , a soma do que os jogadores pagam por ela é exatamente o custo da aresta.

(Note que A pode conter circuitos, se houver arestas de custo 0 na instância.)

Provemos (i). Se houvesse jogador cujos vértices não são conectados por A , ele poderia reduzir seu custo pagando integralmente o custo de todas as arestas presentes em um caminho entre seus dois vértices. Um tal caminho sempre existe, pela nossa definição de instância do problema de Steiner.

Provemos (ii). Suponhamos o contrário: que há jogador j e aresta e tais que j paga mais que 0 por e e existe um caminho em A entre os dois vértices de j que não contém e . Nesse caso, j pode deixar de pagar por e , sem desconectar seus dois vértices. Uma tal configuração não é um equilíbrio.

Provemos (iii). Examinemos a soma dos pagamentos que os jogadores fazem por uma aresta e em A . Por e estar em A , essa soma tem que ser igual ou maior ao custo de e . Se fosse um valor maior que o custo de e , qualquer jogador que paga mais que 0 por ela poderia reduzir o valor que paga por e , mantendo seu par de vértices conectado. Assim, reduziria seu custo e a configuração não seria um equilíbrio.

Estabelecidos esses fatos sobre equilíbrios de jogos com ofertas, podemos definir um protocolo baseado em ofertas.

Dada uma multitransmissão, o protocolo fixa um equilíbrio de custo mínimo do jogo com ofertas associado. Para cada aresta e , seja S_e o conjunto dos jogadores que pagam mais que 0 por e . Para um jogador j e uma aresta e , denote a quantidade que j paga por e no equilíbrio por $o_{j,e}$. Seja Z o conjunto das arestas pelas quais algum jogador paga mais que 0.

O *protocolo baseado em ofertas* é um protocolo que, para multitransmissões, para toda aresta e em Z , para todo conjunto S com $S_e \subseteq S$ e todo jogador j , define $\xi_e(j, S) = o_{j,e}$. Todos os outros valores das ξ são definidos como no protocolo de Shapley.

Para instâncias do problema de Steiner que não sejam multitransmissões, o protocolo define toda ξ da mesma forma que o protocolo de Shapley.

Afirmamos que um tal protocolo é admissível.

Teorema 5.1. *O protocolo baseado em ofertas é admissível.*

Demonstração. Verifiquemos o balanceamento de orçamento e a estabilidade para multitransmissões. A separabilidade é trivial, e o caso de instâncias que não são multitransmissões também é trivial.

Afirmamos que o protocolo respeita o balanceamento de orçamento. Seja A o conjunto de arestas compradas no equilíbrio fixado pelo protocolo do jogo com ofertas.

Tome uma aresta e de A . A função ξ_e foi definida de forma que, se o conjunto de jogadores que a usa é um S com $S_e \subseteq S$, a soma dos custos que cada jogador paga por e dá exatamente $w(e)$ (vide (iii)). Os demais valores de ξ_e foram tomados como no protocolo de Shapley, e respeitam o balanceamento de orçamento. Isso também é verdade para os valores de ξ para arestas que não pertencem a A .

Tome um jogo criado pelo protocolo baseado em ofertas a partir de uma multitransmissão.

Afirmamos que esse jogo tem (um ou mais) equilíbrios. Provaremos que cada configuração em que todo jogador escolhe um caminho em A que conecta seus dois vértices é equilíbrio. Tome m uma tal configuração.

Para provar que m é de fato um equilíbrio, devemos provar que não há jogador j cuja estratégia não é uma melhor resposta. Isso será consequência do fato que a estratégia de j , no jogo com ofertas, era uma melhor resposta para j .

Em m , cada jogador j usa todas as arestas pelas quais paga no equilíbrio do jogo com ofertas (pois, por (ii), temos que todas as arestas pelas quais esse jogador pagava estão em cada um dos caminhos em A entre seus dois vértices associados). Pela definição dos ξ , cada jogador j paga o mesmo valor que paga no equilíbrio do jogo com ofertas.

Suponha que a estratégia de j , no jogo de Steiner, não é uma melhor resposta. Isso implica que há caminho alternativo para o qual j paga menos. Denotemos um tal caminho por ca_j . Tomemos um limitante inferior do custo dessa estratégia de j . Tomemos a intersecção do conjunto de arestas do caminho velho com o conjunto de arestas do caminho novo, e somemos os pagamentos que j faz por tais arestas. Acrescentemos a isso todos os custos de arestas que ninguém usava na configuração antiga, e j passou a usar. Denotemos esse limitante por l_j .

No jogo com ofertas, mantidas as jogadas dos demais jogadores, j tinha uma estratégia de custo l_j : bastaria usar ca_j (ou seja, manter seus pagamentos por arestas que pertencem ao novo caminho e ao velho; pagar o custo integral das arestas do novo caminho que nenhum outro jogador usava; não pagar por quaisquer outras arestas).

O custo dessa estratégia para o jogo com ofertas seria l_j , que assumimos menor que o custo de j no equilíbrio do jogo de Steiner, que por construção seria igual ao custo de j no equilíbrio no jogo com ofertas. Assim, a configuração original do jogo com ofertas não poderia ser um equilíbrio, o que é uma contradição.

Ou seja: a maneira como o protocolo define as funções ξ com base em um equilíbrio do jogo com ofertas faz com que ele respeite a estabilidade. \square

O teorema 5.1 não só prova que o protocolo baseado em ofertas é admissível, mas também que tem preço da estabilidade 1 para multitransmissões: O teorema 5.1 prova que cada jogo construído sobre uma multitransmissão pelo protocolo baseado em ofertas tem um equilíbrio de custo igual ao custo de um equilíbrio de custo mínimo do jogo com ofertas correspondente, mas como dissemos, Anshelevich, Dasgupta, Tardos e Wexler [ADTW08] provam que todo jogo com ofertas construído sobre uma multitransmissão tem equilíbrio de custo igual ao custo da floresta de Steiner.

Registramos esse fato no teorema seguinte.

Teorema 5.2. *O protocolo baseado em ofertas tem preço da estabilidade para multitransmissões igual a 1.* \square

Por fim, registramos o fato que Anshelevich, Dasgupta, Tardos e Wexler [ADTW08] também definem jogo com ofertas para o caso orientado e provam que esse jogo tem equilíbrio com custo igual ao da floresta de Steiner, caso a instância em questão seja uma multitransmissão. Isso nos permite usar a mesma prova já apresentada para o resultado seguinte.

Teorema 5.3. *O protocolo baseado em ofertas tem preço da estabilidade para multitransmissões orientadas igual a 1.* \square

Capítulo 6

Considerações finais

Nesse trabalho, estudamos como a escolha de protocolos nos permite construir jogos de Steiner de forma a minimizar os preços da anarquia e estabilidade.

Estudamos quatro protocolos específicos: o protocolo ordenado, o protocolo de Prim, o protocolo baseado em ofertas (descritos como no trabalho de Chen e colaboradores [CRV10]) e o protocolo de Shapley (como no trabalho de Anshelevich e colaboradores [ADK⁺08]).

Estudamos também duas classes gerais de protocolos, a classe dos protocolos admissíveis e a classe dos protocolos ordenados (como em [CRV10]). Construimos instâncias do problema de Steiner que nos permitiram limitar inferiormente o preço da anarquia (e estabilidade) de todos os protocolos de uma mesma classe.

Para os protocolos uniformes, especificamente, isso foi feito por meio de uma caracterização. Apresentamos, no teorema 3.45, uma maneira de descrever todos os protocolos uniformes lineares (e provamos que, para todo protocolo uniforme, há protocolo uniforme linear “melhor”).

Podemos resumir os resultados apresentados na tabela 6.1.

Nessa tabela, indicamos, para cada classe de protocolo e tipo de instância do problema de Steiner, o menor preço da anarquia (ou estabilidade) possível, usando protocolos da classe. Tais preços são expressos em função do número de jogadores n .

Quando isso não foi possível (i.e.: quando não conseguimos descobrir esse menor preço), indicamos, na tabela, o intervalo em que pode se encontrar esse menor preço. Ou seja, o intervalo entre um limitante inferior (um preço que provamos que nenhum protocolo daquela classe consegue superar) e o preço do protocolo de menor preço que apresentamos para aquela classe.

	Preço da anarquia		Preço da estabilidade	
	Protocolo uniforme	Protocolo admissível	Prot. uniforme	Prot. admissível
Grafos	$\Omega(\log n), O(\log^2 n)$	$\Omega(\log n), O(\log^2 n)$	Entre 1 e H_n	Entre 1 e H_n
Multitransmissões	$\Omega(\log n), O(\log n)$	entre $2n/(n+1)$ e 2	Entre 1 e H_n	1
Grafos orientados	n	n	H_n	Entre 1 e H_n
Mult. orientadas	n	n	H_n	1

Tabela 6.1: Resultados expostos nesse trabalho

Alguns desses intervalos são pequenos, e podemos considerar o problema de achar o melhor protocolo (para aquele preço, tipo de instância e classe de protocolos) essencialmente resolvido. Discutiremos brevemente as pendências mais relevantes na seção 6.1.

Há uma lista detalhada de quais são os teoremas que provam esses resultados no início do capítulo 4 (e lembramos ao leitor que, por definição, preços da anarquia e estabilidade

são sempre maiores ou iguais a 1).

Alguns resultados relevantes sobre o preço da estabilidade não foram provados nesse trabalho. Em seguida, há uma segunda versão da nossa tabela de resultados, incluindo esses resultados da literatura.

	Preço da estabilidade	
	Protocolo uniforme	Protocolo admissível
Grafos	Entre 1 e $H_{n/2} + o(1)$	Entre 1 e $H_{n/2} + o(1)$
Multitransmissões	Entre 1 e $O(\log n / (\log \log n))$	1
Grafos orientados	H_n	Entre $3/2$ e H_n
Mult. orientadas	H_n	1

Tabela 6.2: Resultados na literatura

Esses resultados foram citados logo após o teorema 2.27 e (no caso do limitante inferior $3/2$) na introdução do capítulo 4.

Após o estudo dos protocolos, apresentamos brevemente resultados da literatura que propõe outras soluções para o problema de gerar jogos com preços baixos sobre instâncias do problema de Steiner.

O preço da anarquia atingível (devido a Charikar e colaboradores [CKM⁺08]) e o jogo de Steiner com propaganda (devido a Balcan e colaboradores [BBM09]) são abordagens que permitem minimizar o custo de um equilíbrio sem abrir mão da “justiça” do protocolo de Shapley. Como vimos no teorema 2.28, o protocolo de Shapley tem preço da anarquia n , o pior possível. Essas abordagens permitem mitigar esse problema.

O jogo com ofertas (devido a Anshelevich e colaboradores [ADTW08]) é uma abordagem bastante diferente das outras apresentadas nesse trabalho. Apresenta, para multitransmissões, os equilíbrios menores descritos nesse trabalho (com custo igual ao do ótimo da instância relevante). Mas, infelizmente, não respeita a dinâmica de melhor resposta, o que limita a sua aplicabilidade em algumas situações reais.

O jogo com ofertas e (possivelmente, vide sessão 6.1) os jogos gerados pelo protocolo baseado em ofertas são os únicos jogos que apresentamos que não respeitam a dinâmica de melhor resposta. Provamos que o protocolo de Prim, o protocolo ordenado, o protocolo de Shapley e todos os protocolos uniformes lineares respeitam a dinâmica de melhor resposta.

6.1 Pesquisas futuras

O trabalho realizado aponta quatro importantes pendências, no cálculo de preços da anarquia e estabilidade.

Primeiramente, há a distância entre o preço da anarquia $O(\log^2 n)$ do protocolo ordenado (teorema 2.7) e os limitantes relevantes: todo protocolo admissível tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$, como visto no teorema 4.5, e todo protocolo uniforme tem preço da anarquia $\Omega(\log n)$, como visto no teorema 4.16. Essa distância pode ser resolvida provando que o protocolo ordenado tem preço da anarquia menor (não se sabe se o teorema 2.7 é justo), provando limitantes inferiores mais fortes para o caso de protocolos admissíveis ou para o caso de protocolos uniformes, ou ainda exibindo outro protocolo com preço da anarquia menor que $O(\log^2 n)$.

Da mesma forma, há a distância entre o preço da estabilidade para grafos orientados do protocolo de Shapley (que é H_n) e o menor limitante inferior conhecido para protocolos admissíveis (que é $3/2$).

Também há a distância entre o melhor preço da estabilidade conhecido para o protocolo de Shapley (que é $H_{n/2} + o(1)$) e o melhor limitante inferior conhecido para protocolos admissíveis (que é 1).

Por último, há a distância entre o melhor preço da estabilidade para multitransmissões conhecido para o protocolo de Shapley (que é $O(\log n / (\log \log n))$) e o melhor limitante inferior conhecido para protocolos uniformes (que é 1).

Além dessas pendências, outra questão que merece mais estudo é a possibilidade de estender o conceito de preço da anarquia atingível para outros protocolos. Em particular, seria possível apresentar uma versão do teorema 4.16 para o preço da anarquia atingível de qualquer protocolo uniforme?

Não provamos nesse trabalho que o protocolo baseado em ofertas não respeita a dinâmica de melhor resposta, mas achamos isso bastante provável.

Apêndice A

Detalhes da demonstração do lema 3.31

A.1 Demonstração da igualdade 3.35

Partindo de $a + b + c = 1$, temos:

$$\begin{aligned} a + \frac{xa - x(1-z)}{1-x} + y + \frac{(a-x)(1-z)}{z} + (1-y) &= 1 \\ a + \frac{xa - x(1-z)}{1-x} + \frac{(a-x)(1-z)}{z} &= 0 \\ \frac{a(1-x)z + xaz - x(1-z)z + (1-x)(a-x)(1-z)}{(1-x)z} &= 0 \\ a(1-x)z + xaz - x(1-z)z + (1-x)(a-x)(1-z) &= 0 \\ az - x(1-z)z + (1-x)(a-x)(1-z) &= 0 \\ az + a - az - ax + axz - x(1-z)z + (1-x)(-x)(1-z) &= 0 \\ a - ax + axz - x(1-z)z + (1-x)(-x)(1-z) &= 0 \\ a - ax + axz - x(1-z)(1-x+z) &= 0 \\ a(1-x+xz) - x(1-z)(1-x+z) &= 0 \\ a(1-x+xz) &= x(1-z)(1-x+z) \\ a &= \frac{x(1-z)(1-x+z)}{1-x+xz} \\ a &= \frac{(1-z)(x-x^2+xz)}{1-x+xz}. \end{aligned}$$

A.2 Demonstração da igualdade 3.36

Temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1-z)(x-x^2+xz)}{1-x+xz}, \\ b &= \frac{(1-x)(y-y^2+yx)}{1-y+yx}. \end{aligned}$$

Substituindo a e b em

$$\left((1-z) - a \right) x = (y-b)(1-x),$$

temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \left((1-z) - \frac{(1-z)(x-x^2+xz)}{1-x+xz} \right) x &= \left(y - \frac{(1-x)(y-y^2+yx)}{1-y+yx} \right) (1-x) \\ \left(\frac{(1-z)(1-x+xz-x+x^2-xz)}{1-x+xz} \right) x &= \left(\frac{y-y^2+y^2x+(x-1)(y-y^2+yx)}{1-y+yx} \right) (1-x) \\ \left(\frac{(1-z)(1-x-x+x^2)}{1-x+xz} \right) x &= \left(\frac{y-y^2+y^2x+yx-y^2x+yx^2-y+y^2-yx}{1-y+yx} \right) (1-x) \\ \left(\frac{(1-z)(1-x)^2}{1-x+xz} \right) x &= \left(\frac{yx^2}{1-y+yx} \right) (1-x) \\ \left(\frac{(1-z)(1-x)}{1-x+xz} \right) &= \left(\frac{yx}{1-y+yx} \right) \\ (1-z)(1-x)(1-y+yx) &= yx(1-x+xz) \\ (1-z)(1-x)(1-y) &= yxz. \end{aligned}$$

(no ultimo passo, subtraímos $yx(1-x)(1-z)$ de ambos os lados e simplificamos).

Referências Bibliográficas

- [AAB04] Baruch Awerbuch, Yossi Azar e Yair Bartal. On-line generalized steiner problem. *Theoretical Computer Science*, 324(2):313 – 324, 2004. 8
- [ADK⁺08] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Jon Kleinberg, Eva Tardos, Tom Wexler e Tim Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing*, 38(4):1602–1623, 2008. 4, 5, 22, 25, 73
- [ADTW08] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Éva Tardos e Tom Wexler. Near-optimal network design with selfish agents. *Theory of Computing*, 4(4):77–109, 2008. 68, 69, 70, 71, 74
- [AHL02] Noga Alon, Shlomo Hoory e Nathan Linial. The moore bound for irregular graphs. *Graphs and Combinatorics*, 18(1):53–57, 2002. 11
- [BBM09] Maria-Florina Balcan, Avrim Blum e Yishay Mansour. Improved equilibria via public service advertising. Em *In: Proc. of SODA 2009*, páginas 728–737, 2009. 68, 74
- [BCFM13] Vittorio Bilò, Ioannis Caragiannis, Angelo Fanelli e Gianpiero Monaco. Improved lower bounds on the price of stability of undirected network design games. *Theory of Computing Systems*, 52(4):668–686, 2013. 22
- [BFM14] Vittorio Bilò, Michele Flammini e Luca Moscardelli. The price of stability for undirected broadcast network design with fair cost allocation is constant. *Games and Economic Behavior*, páginas –, 2014. 22
- [CKM⁺08] Moses Charikar, Howard Karloff, Claire Mathieu, Joseph (Seffi) Naor e Michael Saks. Online multicast with egalitarian cost sharing. Em *Proceedings of the twentieth annual symposium on Parallelism in algorithms and architectures*, SPAA '08, páginas 70–76, New York, NY, USA, 2008. ACM. 67, 74
- [CR09] Ho-Lin Chen e Tim Roughgarden. Network design with weighted players. *Theor. Comp. Sys.*, 45(2):302–324, Junho 2009. 52
- [CRV10] Ho-Lin Chen, Tim Roughgarden e Gregory Valiant. Designing network protocols for good equilibria. *SIAM Journal on Computing*, 39(5):1799–1832, 2010. 1, 8, 14, 19, 25, 26, 27, 54, 68, 73
- [Die05] Reinhard Diestel. Graph theory. 2005. *Grad. Texts in Math*, 101, 2005. 6
- [FS13] Zoltán Füredi e Miklós Simonovits. *The History of Degenerate (Bipartite) Extremal Graph Problems*, páginas 169–264. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. 11

- [IW91] Makoto Imase e Bernard M. Waxman. Dynamic steiner tree problem. *SIAM J. Discrete Math.*, 4(3):369–384, 1991. 14, 18
- [KP09] Elias Koutsoupias e Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. *Computer science review*, 3(2):65–69, 2009. 5
- [KS87] Ehud Kalai e Dov Samet. On weighted shapley values. *International Journal of Game Theory*, 16(3):205–222, 1987. 52
- [Li09] Jian Li. An $O(\log n / \log \log n)$ upper bound on the price of stability for undirected Shapley network design games. *Information Processing Letters*, 109(15):876 – 878, 2009. 22
- [Mac12] César Gamboa Machado. Jogos de Steiner. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. 4
- [Mat02] Jiri Matousek. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2002. 55
- [MMM14] Akaki Mamageishvili, Matúš Mihalák e Simone Montemezzani. *An $H_{n/2}$ Upper Bound on the Price of Stability of Undirected Network Design Games*, páginas 541–552. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014. 22
- [MS96] Dov Monderer e Lloyd S. Shapley. Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14(1):124 – 143, 1996. 22
- [NRTV07] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos e Vijay V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007. 1, 21
- [Ros73] Robert W. Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2(1):65–67, 1973. 22
- [RSL77] Daniel J. Rosenkrantz, Richard E. Stearns e Philip M. Lewis, II. An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem. *SIAM journal on computing*, 6(3):563–581, 1977. 14
- [Sch02] Alexander Schrijver. *Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency*, volume 24. Springer Science & Business Media, 2002. 54
- [Sha88] Lloyd S Shapley. A value for n-person games. *The Shapley value*, páginas 31–40, 1988. 21
- [Vaz01] Vijay V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer-Verlag, 2001. 20

Índice Remissivo

- δ -regular (grafo), 54
- árvore de Steiner, 14
- balanceamento de orçamento, 27
- arestas múltiplas, 9
- atendido (jogador), 69
- caminho hamiltoniano, 14
- ciclo, 6
- cintura, 9
- circuito, 6
- circuito hamiltoniano, 14
- comprada (aresta), 68
- concatenação, 33
- configuração, 3
- conjunto de jogadores, 4
- custo
 - de um equilíbrio, 5
 - de uma configuração, 5
 - que o jogador i paga por usar uma aresta e na configuração m , 5
- desigualdade triangular, 14
- difusão, 22
- dinâmica de melhor resposta, 25
- emparelhamento, 55
- equilíbrio, 4
- equilíbrio de estratégias puras, 3
- estabilidade, 27
- estratégia, 2
- euleriano (ciclo), 6
- euleriano (grafo), 6
- floresta de Steiner, 4
- função de distribuição de custos, 5
 - associada à aresta e , 5
 - baseada em potenciais, 32
 - baseada em potencial único, 31
- função que distribui custo r entre n jogadores, 5
- funções de custo, 2
- grafo das distâncias, 16
- jogador, 2
- jogo, 2
- jogo com ofertas, 68
- jogo de Steiner, 4
- Jogo dos escritórios, 3
- laço, 9
- linear (protocolo), 29
- linearidade, 29
- linearização, 29
- linearizado (protocolo), 29
- melhor resposta, 3
- monótono (protocolo), 40
- multigrafo, 9
- multitransmissão, 14
- número de jogadores, 4
- positivo (protocolo), 30
- potencial, 21
- preço da anarquia, 5, 6
 - atingível, 68
 - para grafos orientados, 6
 - para multitransmissões, 14
 - para multitransmissões orientadas, 14
 - para um número de jogadores, 5
 - para uma instância, 5
- preço da estabilidade, 5, 6
 - de um protocolo para uma instância, 5
 - para grafos orientados, 6
 - para multitransmissões, 14
 - para multitransmissões orientadas, 14
 - para um número de jogadores, 5
- problema da árvore de Steiner, 14
- problema de Steiner, 4
- problema de Steiner orientado, 6
- protocolo, 4
 - simples baseado em potenciais, 31
- protocolo baseado em ofertas, 69

protocolo baseado em potenciais, 33
protocolo de Prim, 18

regular (grafo), 54

separabilidade, 28

sequência de melhores respostas, 25

uniforme (protocolo), 28

uniformidade, 28

usa o caminho (um jogador), 4

usa uma aresta (um jogador), 4

vizinhança, 10