Pares Ramsey infinitos

Paulo Victor Teixeira Eufrásio

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Janeiro de 2014

Pares Ramsey infinitos

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato Paulo Victor Teixeira Eufrásio, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Agradeço a todos.

Resumo

Eufrasio, P. V. T. **Pares Ramsey infinitos**. Dissertação – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Dados grafos F, G e H, dizemos que F *flecha* (G, H) e denotamos por $F \to (G, H)$ a propriedade de F de possuir, em toda coloração de suas arestas com duas cores, digamos vermelha e azul, uma cópia vermelha de G ou uma cópia azul de H.

Um par de grafos (G, H) é dito Ramsey infinito (finito) se existe uma quantidade infinita (finita) de grafos F que são minimais com respeito a propriedade $F \to (G, H)$, ou seja, grafos que flecham (G, H) cujos subgrafos próprios não flecham.

Nesta dissertação, mostramos que se G é um grafo com grau mínimo 2 e cintura g satisfazendo $m_2(G) = (g-1)/(g-2)$ e H um grafo 2-conexo que não contém circuito induzido de comprimento maior do que ou igual a g, então o par (G, H) é Ramsey infinito.

Palavras-chave: Pares ramsey minimais, Lema de regularidade de Szemerédi, Lema de contagem.

Abstract

Eufrasio, P. V. T. **Ramsey minimal pairs of graphs**. Dissertação – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Given graphs F, G and H, we write $F \to (G, H)$ to mean that any colouring of the edges of F with two colors, say red and blue, contains a red copy of G or a blue copy of H.

A pair of graphs (G, H) is said to be Ramsey-infnite (finite) if there are infinitely many minimal graphs F for which we have $F \to (G, H)$, i.e. graphs that are Ramsey for (G, H) whose proper subgraphs are not.

We show that if G is a graph with minimum degree 2 and girth g satisfying $m_2(G) = (g-1)/(g-2)$ and H is 2-connected graph that contains no induced cycles of length at least g, then the pair (G, H) is Ramsey-infinite.

Keywords: Ramsey minimal graphs, Szemerédi's regularity lemma, Counting lemma.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Preliminares **5**

2.1 Grafos 5

2.1.1 Grafos aleatórios 6

2.2 Hipergrafos 6

2.3 Notação assintótica 7

3 Resultados auxiliares **9**

3.1 Desigualdade de Markov 9

3.2 Desigualdade de Chernoff 10

3.3 Lema da regularidade 10

3.4 Lema de contagem 11

3.5 Teorema de Ramsey 12

4 Teorema principal **13**

4.1 Visão geral 13

4.2 Lemas importantes 14

4.3 Prova do Teorema Principal 17

4.3.1 Prova que $\Gamma \to (G, H)$ 18

4.3.2 Prova que $\Gamma \not\to_t (G, H)$ 19

5 Considerações finais **21**

Referências Bibliográficas **23**

Capítulo 1

Introdução

Um problema clássico em teoria dos grafos consiste em encontrar subgrafos monocromáticos quando as arestas de um dado grafo são coloridas com duas ou mais cores. Essa área da combinatória, hoje bastante estudada, iniciou com a demonstração, em 1930, de um teorema fundamental feita por F. P. Ramsey. O *Teorema de Ramsey* [18] afirma que em qualquer coloração das arestas de um grafo completo suficientemente grande é possível encontrar subgrafos completos monocromáticos. De forma um pouco mais formal, para todo par de inteiros {r, s}, o Teorema de Ramsey garante a existência de um inteiro n tal que toda coloração das arestas de um grafo completo com pelo menos n vértices com duas cores, digamos azul e vermelha, possui uma cópia do grafo completo com r vértices onde todas as arestas são azuis ou uma cópia do grafo completo com s vértices onde todas as arestas são vermelhas. Podemos dizer, portanto, que a Teoria de Ramsey objetiva encontrar condições que garantam a existência de subestruturas regulares em estruturas desordenadas, em outras palavras, a existência de padrões em meio ao caos.

Para simplificar a compreensão dos leitores não habituados ao tema, apresentamos a seguinte instância. Observe, por exemplo, que em um grupo de seis pessoas quaisquer, certamente existem três delas que se conhecem mutuamente ou três delas que são estranhas tomadas duas a duas. Nesses termos, o Teorema de Ramsey garante que, para quaisquer tamanhos de subgrupos de pessoas que desejarmos - conhecidas ou estranhas entre si, existe uma quantidade mínima de pessoas que será suficiente para qualquer grupo de pessoas com essa quantidade apresentar esta propriedade.

Generalizando o problema, dados grafos G, H_1, H_2, $\ldots$, H_r, podemos perguntar se em qualquer coloração das arestas de G com r cores, nomeadas aqui $1, 2, \ldots, r$, é possível encontrar uma cópia monocromática de H_i com a cor i. No caso de a resposta ser afirmativa, dizemos que G *flecha* $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$, G é *Ramsey* para $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$ ou ainda que G possui a propriedade Ramsey para $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$ e escrevemos $G \to (H_1, H_2, \ldots, H_r)$. Caso contrário, dizemos que G *não flecha* $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$ e escrevemos $G \not\to (H_1, H_2, \ldots, H_r)$. Por fim, dado um inteiro $t > 0$, escrevemos $F \not\to_t (G, H)$ se, para cada conjunto $U \subseteq V(F)$ com $|U| \leq t$, temos $F[U] \not\to (G, H)$, ou seja, o subgrafo de F induzido por U não é Ramsey para

(G, H).

Outra pergunta igualmente relevante diz respeito à quantidade de grafos que flecham uma determinada tupla de grafos. Mas, claramente, se um grafo G flecha uma tupla, qualquer grafo que contenha G também flechará e, portanto, essa quantidade será sempre infinita. Dessa forma, a pergunta que faz mais sentido diz respeito à quantidade de grafos que são minimais com respeito a propriedade Ramsey, ou seja, grafos que flecham uma tupla, mas qualquer subgrafo próprio não flecha.

Se existe uma quantidade infinita de grafos F que são minimais com respeito a propriedade $F \to (G, H)$, tal par é dito *Ramsey infinito*. Caso contrário, *Ramsey finito*.

Em 1978, Burr, Erdős, Faudree e Schelp [3] mostraram que (G, H) é Ramsey finito se G é um emparelhamento. Já em 1982, os mesmo autores [6] mostraram que (G, H) é Ramsey finito se G e H são ambos estrelas ímpares. Esses parecem ser os únicos pares Ramsey finitos.

Diversos artigos (veja [2, 4, 5, 7, 16]) confirmaram isso, exceto para o caso em que G e H são ambos não florestas. Ou seja, se pelo menos um grafo dentre G e H é uma floresta, e não é um dos casos finitos mencionados, então (G, H) é Ramsey infinito. Rödl e Ruciński concluíram também o caso simétrico que faltava em [20].

Dessa forma, o problema permanece aberto para o caso em que G e H são ambos não florestas distintos, embora alguns casos particulares tenham sido demonstrados.

Em [17], foi mostrado que (G, H) é Ramsey infinito se G e H contém circuitos ímpares ou são ambos 3-conexos. Em 2002, Bollobás, Donadelli, Kohayakawa e Schelp [1] mostraram que se G é um circuito de comprimento l e H um grafo que não contém circuito induzido de comprimento maior do que ou igual a l, então (G, H) é Ramsey infinito.

Nesta dissertação, apresentamos o seguinte resultado que generaliza o resultado de [1].

Teorema 1.1. *Dados inteiros $g \geq 4$ e $t \geq 1$ e grafos $H \in \mathcal{C}(g)$ e G com grau mínimo 2 e cintura g satisfazendo $m_2(G) = (g-1)/(g-2)$, então existe um grafo Γ tal que $\Gamma \to (G, H)$, mas $\Gamma \not\to_t (G, H)$.*

De onde concluímos o seguinte corolário.

Corolário 1.2. *O par (G, H) é Ramsey infinito para G e H tais que*

- *G é um grafo com grau mínimo 2 e cintura g satisfazendo $m_2(G) = \frac{g-1}{g-2}$ e*
- *H é um grafo 2-conexo que não contém circuito induzido de comprimento maior do que ou igual a g.*

Ao longo da nossa demonstração, combinamos alguns resultados importantes em combinatória, como o *Lema da Regularidade de Szemerédi* e *Lemas de Contagem*, os quais discutimos brevemente agora.

O Lema da Regularidade de Szemerédi afirma que qualquer grafo suficientemente grande pode ser aproximado por um grafo que é formado pela união de uma quantidade constante de grafos bipartidos aleatórios. Szemerédi mostrou que é possível particionar o conjunto de vértices de qualquer grafo suficientemente grande em uma quantidade limitada de conjuntos menores, com praticamente o mesmo tamanho, de modo que na maioria dos grafos bipartidos induzidos por pares desses subconjuntos as arestas são uniformemente distribuídas. Dessa forma, é possível estender resultados conhecidos de grafos aleatórios a grafos quaisquer.

Lemas de Contagem, por sua vez, são usados para estimar a quantidade de cópias de um grafo fixo dado que podem ser encontradas em partições regulares.

Capítulo 2

Preliminares

Sem perder o formalismo matemático que nos ajudará a manter a clareza das demonstrações, utilizaremos, nas explicações, uma linguagem acessível para incentivar o estudo e ajudar a leitura por aqueles que não são da área. Tentaremos manter o texto totalmente auto contido, definindo até os termos mais básicos, a fim de evitar que o leitor precise fazer recorrentes consultas a outros materiais.

2.1 Grafos

Um grafo G é um par de conjuntos finitos (V_G, E_G), onde V_G é chamado de conjunto de *vértices* de G e E_G, chamado conjunto de *arestas* de G, é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V_G. Se $e = \{u, v\} \in E_G$ é uma aresta de G, dizemos que u e v são adjacentes, que e *conecta* os vértices u e v, ou ainda que u e v são *extremidades* de e. Escrevemos v_G e e_G, respectivamente, para representar a cardinalidade de V_G e E_G. Se U, $W \subseteq V_G$ são subconjuntos disjuntos de vértices de G, denotamos por $e_G(U, W)$ a quantidade de arestas com uma extremidade em U e outra em W. Um grafo com n vértices é dito *completo* se ele possui todas as $\binom{n}{2}$ possíveis arestas e o denotamos por K_n.

Dado um grafo G e um vértice $u \in V_G$, denotamos por *grau de* u a quantidade de vértices de G que são adjacentes a u.

Um *subgrafo* $S = (V_S, E_S)$ de um grafo $G = (V_G, E_G)$ é um grafo tal que $V_S \subseteq V_G$ e $E_S \subseteq E_G$. Se S é diferente de G, então S é dito um *subgrafo próprio* de G. Se $V_S = V_G$, então S é dito *subgrafo gerador* de G. Um subgrafo S de G é um *subgrafo induzido* de G se, para qualquer par de vértices u e v de S, {u,v} é uma aresta de S se, e somente se, {u, v} é uma aresta de G. Se o conjunto de vértices de S é um subconjunto V_S de V_G, então S pode ser escrito como $G[V_S]$ e dizemos que S é um *subgrafo de G induzido por V_S*.

Um grafo é dito *k-partido* se seu conjunto de vértices pode ser dividido em k conjuntos disjuntos de forma que não haja arestas conectando vértices de um mesmo conjunto. Por exemplo, um grafo 2-partido, também chamado *bipartido*, é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos U e W de forma que todas suas arestas conectam vértices de U a vértices de W.

Dados grafos H e H' com a mesma quantidade de vértices, dizemos que eles são *isomorfos* se existe uma bijeção entre seus conjuntos de vértices

$$f : V_H \to V_{H'}$$

de tal forma que quaisquer dois vértices u e v de H são adjacentes em H se, e somente se, $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H'. Uma *cópia (induzida)* H' de um grafo H em G é um subgrafo (induzido) de G isomorfo a H.

Um *circuito* em um grafo G é uma sequência finita não vazia de vértices distintos $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, com $v_0 = v_k$, tal que para cada dois vértices consecutivos, v_i e v_{i+1}, para $0 \leq i < k$, temos $(v_i, v_{i+1}) \in E_G$. Denotamos por *cintura* de G o tamanho do menor circuito induzido de G.

Dados grafos G e H, definimos

$$d_2(G) := \begin{cases} \frac{e_G - 1}{v_G - 2} & \text{se } v_G \geq 3 \\ 1/2 & \text{se } G \cong K_2 \\ 0 & \text{se } e_G = 0, \end{cases}$$

e

$$m_2(G) := \max_{J \subseteq G} d_2(J).$$

Grafos são comumente usados para modelar problemas em que entidades relacionam-se entre si.

2.1.1 Grafos aleatórios

Dado $0 \leq p \leq 1$, chamamos de $\mathbb{G}(n, p)$ o espaço de probabilidades sobre todos os grafos de n vértices e com função de probabilidade $\mathbb{P}$ definida por

$$\mathbb{P}(G) = p^{e_G} (1 - p)^{\binom{n}{2} - e_G}.$$

Por $G(n, p)$, ou $G_{n,p}$, nos referimos a um grafo escolhido aleatoriamente de $\mathbb{G}(n, p)$. Desta forma, $G(n, p)$ pode ser visto como um grafo de n vértices em que cada uma das $\binom{n}{2}$ possíveis arestas está presente com probabilidade p, independentemente das outras.

2.2 Hipergrafos

Podemos generalizar a ideia de grafos, permitindo que cada aresta seja composta por qualquer quantidade de vértices. Formalmente, um *hipergrafo* H é um par de conjuntos finitos (V_H, E_H), onde V_H é o conjunto dos vértices de H e E_H é o conjunto de *hiperarestas* de H, sendo E_H uma coleção de subconjuntos de vértices.

Dizemos que um hipergrafo é *h-uniforme* se cada uma de suas hiperarestas tem cardinalidade h. Perceba, então, que grafo é um hipergrafo 2-uniforme. Um hipergrafo é dito *linear* se quaisquer duas hiperarestas de E_H se interceptam em no máximo um vértice.

2.3 Notação assintótica

Alguns resultados sobre grafos e/ou hipergrafos citados nesta dissertação são probabilistícos, ou seja, são verdadeiros com alguma probabilidade positiva e dependem da quantidade de seus vértices, aqui denotada por n. Se essa probabilidade tende a um quando n tende a infinito, dizemos que o resultado em questão vale *quase certamente*.

Quando dissermos que uma propriedade vale para grafos *suficientemente grandes*, queremos dizer que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a propriedade vale para todos os grafos com pelo menos n_0 vértices.

Capítulo 3

Resultados auxiliares

O resultado principal desta dissertação segue da combinação de três outros importantes resultados em combinatória, Lemas 3.8, 3.10 e 3.11, os quais discutiremos nesta sessão. Algumas vezes, será necessário calcular a probabilidade com que uma variável aleatória pode estar a uma certa distância do seu valor esperado. Nesses casos, as desigualdades de concentração enunciadas a seguir, *Desigualdade de Markov* e *Desigualdade de Chernoff*, nos serão muito úteis.

3.1 Desigualdade de Markov

Quando a distribuição de uma variável aleatória é conhecida, a probabilidade com que uma função não negativa dessa variável é maior do que uma certa constante positiva pode ser calculada. Entretanto, em casos onde essa distribuição não é conhecida, ou em casos onde um limitante é suficiente, a desigualdade de Markov é bastante útil. Ela nos dá um limite superior para a probabilidade com que uma função não negativa de uma variável aleatória é maior do que uma certa constante positiva.

Proposição 3.1. *Se X é uma variável aleatória, g uma função não negativa de X cujo domínio é $\mathbb{R}$ e $a > 0$, então*
$$\mathbb{P}\left[g(X) \geq a\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[g(X)\right]}{a}.$$

Observe que, se tomarmos a função g como sendo a identidade, então temos a seguinte versão simplificada.

Proposição 3.2. *Se X é uma variável aleatória e $a > 0$, então*

$$\mathbb{P}\left[X \geq a\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{a}.$$

3.2 Desigualdade de Chernoff

Proposição 3.3. *Se X é uma variável aleatória não negativa que pode ser escrita como a soma de outra variáveis binomiais, então, para todo $\varepsilon \geq 0$, temos*

$$\mathbb{P}\left[X \leq (1-\varepsilon)\mathbb{E}[X]\right] \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\mathbb{E}[X]\right).$$

3.3 Lema da regularidade

O tradicional *Lema da Regularidade de Szemerédi* [21] afirma que todo grafo suficientemente grande pode ter seus vértices particionados em um número constante de partes, cada uma com aproximadamente a mesma quantidade de vértices, de forma que as arestas entre (quase) quaisquer duas partes diferentes comportam-se quase aleatoriamente, ou seja, são bem distribuídas. Uma partição assim é dita *regular* e os pares de partes que possuem arestas bem distribuídas são ditos *pares regulares*.

Comumente, o Lema da Regularidade é usado para particionar grafos dos quais pouco se conhece a estrutura para, em seguida, obter um subgrafo induzido somente pelos pares regulares, do qual se conhece a distribuição das arestas.

Como ficará mais claro adiante, uma partição de um grafo $G = (V, E)$ com n vértices obtida pelo Lema da Regularidade contém uma fração positiva de pares não regulares, de forma que se a quantidade de arestas de G é $o(n^2)$, então elas podem estar contidas apenas nos pares não regulares. Nesse caso, o subgrafo de G induzido somente pelos pares regulares é vazio e, portanto, pouco útil para qualquer aplicação. Portanto, essa forma de aplicar o Lema só faz sentido quando o grafo a ser particionado é *denso*, ou seja, possui $\Omega(n^2)$ arestas.

A versão do Lema que utilizamos neste trabalho, desenvolvida de forma independente por Kohayakawa e Rödl [11, 14], é uma generalização natural do lema original que funciona também para grafos *esparsos*. Para simplificar o entendimento do seu enunciado, faz-se necessárias as seguintes definições.

Definição 3.4. *Em um grafo $G = (V, E)$, a p-densidade de um par (U, W) de subconjuntos disjuntos de V é*

$$d_{G,p}(U, W) = \frac{e_G(U, W)}{p|U||W|}.$$

Definição 3.5. *Para todo $0 < \varepsilon \leq 1$, o par de conjuntos disjuntos (U, W), com U, $W \subset V$, é dito (ε, G, p)-regular se, para todo $U' \subset U$ e todo $W' \subset W$, com $|U'| \geq \varepsilon|U|$ e $|W'| \geq \varepsilon|W|$, temos*

$$|d_{G,p}(U, W) - d_{G,p}(U', W')| < \varepsilon.$$

Definição 3.6. *Para números reais $0 < \eta \leq 1$, $D \geq 1$ e $0 < p \leq 1$, dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é (η, D, p)-esparso se, para quaisquer conjuntos disjuntos $U, W \subset V$, com $|U|, |W| \geq \eta|V|$, vale:*

$$d_{G,p}(U, W) \leq D.$$

Definição 3.7. *Uma partição* $\Pi = (V_0, V_1, \ldots, V_k)$ *de* V *é dita* (ε, k, G, p)*-regular se* $|V_0| \leq \varepsilon|V|$ *e* $|V_i| = |V_j|$ *para todos* $i, j \in [k] = \{1, \ldots, k\}$*, e pelo menos* $(1-\varepsilon)\binom{k}{2}$ *pares* $\{i, j\} \subset [k]$ *são tais que* (V_i, V_j) *é* (ε, G, p)*-regular.*

Podemos agora enunciar o Lema da Regularidade para grafos esparsos.

Lema 3.8. *(Regularidade) Para todos números reais* $\varepsilon > 0$*,* $D \geq 1$ *e inteiro* $k_0 \geq 1$*, existem constantes* $\eta = \eta(\varepsilon, k_0, D) > 0$ *e* $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0, D) \geq k_0$ *tais que, para todo* $0 < p = p(n) \leq 1$*, qualquer grafo* $G = G^n$ (η, D, p)*-esparso admite uma partição* (ε, k, G, p)*-regular para algum* $k_0 \leq k \leq K_0$*, para* n *suficientemente grande.*

3.4 Lema de contagem

Lemas de contagem são úteis quando se deseja calcular a quantidade de cópias de um grafo fixo H que existem em uma partição regular. Dessa forma, se precisamos calcular quantas cópias de H existem em um grafo maior, primeiro utilizamos um lema da regularidade adequado, obtendo uma partição regular, e em seguida utilizamos o lema da contagem.

Durante muito tempo, entretanto, não se conhecia lemas de contagem que funcionassem no contexto esparso, ou seja, quando o grafo onde se procura as cópias de H é esparso. Em 1997, Kohayakawa, Łuczak e Rödl [13] conjecturaram um resultado conhecido como *Conjectura KŁR* que, apesar de ter sido provado para alguns casos particulares [8, 9, 10, 12, 15], somente foi provado em sua totalidade em 2012. Essa prova pode ser encontrada em [19] e é exatamente o que nos permitiu generalizar o resultado de [1].

Definição 3.9. *Seja* $\varepsilon > 0$*,* $p \in (0, 1]$*,* $d > 0$ *e sejam* n*,* m *e* M *inteiros. Seja* G *um grafo com conjunto de vértices* $V(G) = [n]$*. Denotamos por* $\mathcal{G}(G, m, M, \varepsilon, p, d)$ *o conjunto de todos os grafos* n*-partidos* $R = (V_1 \cup \cdots \cup V_n, E_R)$ *com*

- $|V_1| = \cdots = |V_n| = m$
- $e_R(V_i, V_j) = M \geq dpm^2$ *para todo* $\{i, j\} \in E(G)$ *e*
- (V_i, V_j) *é* (ε, p)*-regular para todo* $\{i, j\} \in E(G)$.

Denotamos por $\mathcal{G}^*(G, m, M, \varepsilon, p, d)$ *a coleção de grafos em* $\mathcal{G}(G, m, M, \varepsilon, p, d)$ *que não possuem uma cópia canônica de* G*.*

Lema 3.10. *(Contagem) Para todas constantes* $\beta > 0$*,* $d > 0$ *e todo grafo* G*, existem constantes positivas* C*,* m_0 *e* ε *tais que para todo* $m \geq m_0$*,* $p \geq Cm^{-1/m_2(G)}$ *e* $M \geq dpm^2$*, temos*

$$|\mathcal{G}^*(G, m, M, \varepsilon, p, d)| \leq \beta^M \binom{m^2}{M}^{e(G)}.$$

3.5 Teorema de Ramsey

O Teorema de Ramsey garante a existência de grafos completos monocromáticos quando as arestas de grafos maiores são coloridas. Enunciamos agora uma consequência desse teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [12].

Lema 3.11. *(Ramsey) Sejam grafos H_1, ..., H_r ($r \geq 1$) dados. Então, existem constantes positivas $c = c(H_1, \ldots, H_r)$ e $k_0 = k_0(H_1, \ldots, H_r)$ para as quais vale o seguinte. Se $k \geq k_0$ e K^k é colorido arbitrariamente com r cores, então necessariamente existem, para algum $1 \leq i \leq r$, pelo menos $ck^{|V(H_i)|}$ cópias monocromáticas de H_i na cor i.*

Perceba que agora temos garantido não apenas a existência de grafos monocromáticos, mas uma garantia de que uma fração positiva de todas as cópias dos grafos dados são monocromáticas.

Capítulo 4

Teorema principal

Dividimos este capítulo da seguinte forma. Na sessão 4.1 apresentamos uma visão geral da prova do Teorema Principal, omitindo alguns detalhes técnicos para facilitar a compreensão. Na sessão 4.2 apresentamos e demonstramos alguns resultados que utilizaremos na prova. Finalmente, na sessão 4.3, demonstramos formalmente nosso resultado.

4.1 Visão geral

Primeiramente, relembremos o que vamos provar. Dados inteiros $g \geq 4$ e $t \geq 1$ e grafos G e H tais que G possui grau mínimo igual a 2 e cintura g e H é 2-conexo e não contém circuito induzido de comprimento maior do que ou igual a g, queremos mostrar que existe um grafo Γ tal que $\Gamma \to (G, H)$ e $\Gamma \not\to_t (G, H)$.

Para isso, construímos um hipergrafo h-uniforme $\mathcal{H}_{n,p_H}$ sobre $[n] = \{1, \ldots, n\}$ em que cada elemento de

$$\binom{[n]}{h} = \{E \subset [n] \colon |E| = h\}$$

é um hiperaresta de $\mathcal{H}_{n,p_H}$ com probabilidade $p_H = An^{-(h-1)+1/(g-1)}$, para alguma constante A.

Devido à escolha de p_H, o número de hipercircuitos de $\mathcal{H}_{n,p_H}$ de comprimento menor do que g é, quase certamente, $o(|E(\mathcal{H}_{n,p_H})|)$. Portanto, podemos obter um hipergrafo linear $\mathcal{G}$ de cintura g a partir de $\mathcal{H}_{n,p_H}$ removendo uma aresta de cada hipercircuito de comprimento menor do que g.

Por fim, definimos um grafo $\Gamma = \Gamma^n$ criado a partir de $\mathcal{G}$ fazendo uma imersão de uma cópia de H em cada hiperaresta de $\mathcal{G}$ arbitrariamente.

Para mostrar que Γ é suficiente para demonstrar o Teorema 1.1, precisamos mostrar que em toda coloração de suas arestas com 2 cores, digamos *vermelho* e *azul*, existe uma cópia vermelha de G ou uma cópia azul de H. Descrevemos como provamos isso a seguir.

Observe que, por $\mathcal{G}$ ser um hipergrafo linear de cintura g e H pertencer a $\mathcal{C}(g)$, as únicas cópias de H em Γ são as que imergimos em $\mathcal{G}$ e tais cópias, quando tomadas duas a duas, compartilham no máximo 1 vértice entre si. Ou seja, o número de cópias de H em Γ é exatamente o número de hiperarestas de $\mathcal{G}$. Para que não haja cópia azul de H em Γ, precisamos colorir de vermelho pelo menos 1 aresta em cada uma dessas cópias. Chamamos o grafo induzido por essas arestas vermelhas de $\Gamma^{(e)}$ e mostramos que ele possui uma cópia de G, concluindo a demonstração.

Para mostrar que $\Gamma^{(e)}$ possui uma cópia de G, primeiro mostramos que ele é esparso e utilizamos o lema da regularidade para obter uma partição regular. Em seguida, com ajuda do lema da contagem, mostramos que existe tal cópia de G.

4.2 Lemas importantes

Demonstramos agora alguns resultados sobre Γ e $\Gamma^{(e)}$ que serão utilizados na demonstração do Teorema 1.1. O primeiro, Proposição 4.1, define um limite superior para a probabilidade de existir em Γ um subgrafo $\Gamma^{(e)}$ que contenha um grafo fixo J sobre $[n]$ com M arestas. O segundo, Proposição 4.2, mostra que Γ é esparso o suficiente para aplicação do lema da regularidade. Por fim, a Proposição 4.3 define as condições suficientes para $\Gamma^{(e)}$ possuir a cópia de G que procuramos.

Proposição 4.1. *Dado um grafo J com M arestas sobre $[n]$, temos:*

$$\mathbb{P}\{\exists \Gamma^{(e)} \subset \Gamma : J \subset \Gamma^{(e)}\} < {p_e}^M$$

onde

$$p_e = An^{-1/m_2(G)}.$$

Demonstração. Seja J um grafo como no enunciado e $\{e_1, \ldots, e_M\}$ o seu conjunto de arestas. Para existir em Γ um subgrafo $\Gamma^{(e)}$ que contém J, deve haver uma M-tupla $(H_1, \ldots, H_M)$ de cópias distintas de H em Γ com $e_i \in E(H_i)$ para todo $1 \leq i \leq M$. Pela forma como construímos Γ, deve então haver uma M-tupla de hipearestas distintas $(E_1, \ldots, E_M)$ em $\mathcal{H}_{n,p_H}$ com $e_i \in E_i$ para todo $1 \leq i \leq M$. Denotemos por $X = X(\mathcal{H}_{n,p_H})$ a quantidade de tais M-tuplas. Então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &\leq \binom{n}{v_H - 2}^M {p_H}^M \\ &< \left(n^{v_H-2}\right)^M \left(An^{-(v_H-1)+1/(g-1)}\right)^M \\ &= \left(An^{-1+1/(g-1)}\right)^M \\ &= \left(An^{-1/m_2(G)}\right)^M.\end{aligned}$$

Portanto, utilizando a desigualdade de Markov, temos

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}X < {p_e}^M,$$

donde segue o resultado. □

Proposição 4.2. *Para todo $\eta > 0$, o grafo Γ é, quase certamente, $(\eta, e2e_H, p_e)$-esparso, para $p_e = An^{-1/m_2(G)}$.*

Demonstração. Temos que mostrar que para todos U, $W \subset V(\Gamma)$ com $|U|$, $|W| \geq \eta|V(\Gamma)|$, quase certamente vale o seguinte:

$$e_\Gamma(U,W) \leq e2e_H p_e|U||W|.$$

Mostraremos isso provando que o número de pares U, W com $|U|$, $|W| \geq \eta n$ e $e_\Gamma(U,W) > e2e_H p_e|U||W|$ é $o(1)$, ou seja, tende a 0 quando n tende a ∞.

Observe que, se existem subconjuntos disjuntos U e W de $V(\Gamma) = [n]$ com $|U| = |W| = \lceil \eta n \rceil$ tais que $e_\Gamma(U,W) > e2e_H p_e|U||W|$, então deve haver um $\Gamma^{(e)} \subset \Gamma$ tal que $e_{\Gamma^{(e)}}(U,W) \geq \lceil e2p_e|U||W| \rceil$.

Pela Proposição 4.1, a probabilidade de haver um $\Gamma^{(e)}$ assim é, tomando $M = \lceil e2p_e|U||W| \rceil$, no máximo

$$\binom{|U||W|}{M} {p_e}^M \leq \left(e\frac{|U||W|p_e}{M}\right)^M \leq \left(\frac{1}{2}\right)^M.$$

□

Na proposição seguinte, considere ρ e β constantes positivas com

$$\beta \leq \left(\frac{\rho}{e^2}\right)^{e_G}.$$

Assuma

$$D = e2e_H$$

e fixe $k_0 \in \mathbb{N}$. Sejam C, m_0 e ε as constantes cujas existências são garantidas pelo Lema 3.10 e η e K_0 as constantes dadas pelo Lema 3.8 para esses valores de ε, D e k_0. Relembre que $p_e = An^{-1/m_2(G)}$.

Proposição 4.3. *Suponha $A \geq C$. Então, quase certamente Γ tem a seguinte propriedade. Se $V^{(m)} = (V_i)_{i=1}^{v_G}$ e $\Gamma^{(e)} \subset \Gamma$ são tais que*

$$m \geq \frac{n}{2K_0}$$

e os pares (V_i, V_j) são $(\varepsilon, \Gamma^{(e)}, p_e)$-regulares de p_e-densidade pelo menos ρ, então $\Gamma^{(e)}[V^{(m)}]$ induz uma cópia de G.

Demonstração. Observe que $\Gamma^{(e)}[V^{(m)}]$ contém um subgrafo que pertence a $\mathcal{G}(G, m, M, \varepsilon, p_e, \rho)$ para algum $M \geq \rho p_e m^2$.

Observe que, para n suficientemente grande, temos $m \geq m_0$ e, como $A \geq C$, temos $p_e \geq Cm^{-1/m_2(G)}$. Sendo assim, as condições necessárias para a Proposição 4.3 são atendidas e podemos calcular que o número esperado de $(G, m, M, \varepsilon, p_e, \rho)$-subgrafos de $\Gamma^{(e)}$ que não contém G, fixado um $V(m)$ é, de acordo com o Lema 3.10 e Proposição 4.1, no máximo

$$\beta^M \binom{m^2}{M}^{e(G)} p_e^{Me(G)} \leq \beta^M \left(\frac{em^2}{M}\right)^{Me(G)} p_e^{Me(G)}$$

$$\leq \left(\frac{\rho}{e^2}\right)^{Me_G} \left(\frac{em^2}{M}\right)^{Me(G)} p_e^{Me(G)}$$

$$= \left(\frac{\rho e m^2 p_e}{e^2 M}\right)^{Me(G)} \leq \left(\frac{\rho e}{e^2 \rho}\right)^{Me_G} = \left(\frac{1}{e}\right)^{Me_G} \leq \exp\{Me_G\}$$
$$= \exp\{-\rho p_e m^2 e(G)\}.$$

Somando sobre todas as possibilidades de $V^{(m)}$, temos que o número esperado é

$$\leq n^{v_G m} \exp\{-\rho p_e m^2 e(G)\}$$

$$\leq \exp\{(logn) v_G m - \rho p_e m^2 e(G)\} = o(n^{-3}).$$

□

Proposição 4.4. *Suponha $A \geq (v_H + 1)/e^{v_H}$. Para todo $W^{(m)} = (W_j)_{j=1}^{v_H}$ com $n/\log n \leq m \leq n/v_H$, o subgrafo v_H-partido de Γ induzido por $W^{(m)}$ quase certamente induz pelo menos*

$$\frac{1}{4} e_H m^{v_H} p_H$$

arestas que podem ser estendidas a cópias não espontâneas de H em Γ com todos seus vértices em

$$U = \bigcup_{i \leq j \leq v_H} W_j.$$

Demonstração. Fixamos uma tupla $W = W^{(m)} = (W_j)_{j=1}^{v_H}$ de subconjuntos disjuntos de vértices de Γ, cada um com cardinalidade m, e seja $U = \bigcup_{j=1}^{v_H} W_j$ como no enunciado. Definimos uma variável aleatória X_W como o número de hipearestas em $\mathcal{H}_{n,p_H}$ com exatamente 1 vértice em cada W_i.

Como a esperança de X_W é $\mathbb{E}(X_W) = m^{v_H} p_H$, temos, utilizando a desigualdade de

Chernoff,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_W \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_W)\right) & \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{8}\mathbb{E}(X_W)\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{A}{8}m^{v_H}n^{-v_H+1+1/(g-1)}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{A}{8}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{v_H}n^{-v_H+1+1/(g-1)}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{An^{1+1/(g-1)}}{8(\log n)^{v_H}}\right\},\end{aligned}$$

e, como o número de escolhas para $W = W^{(m)} = (W_j)_{j=1}^{v_H}$ é, no máximo, $2^{v_H n}$, a probabilidade de existir um W tal que $X_W \leq (1/2)\mathbb{E}(X_W)$ é menor que

$$\exp\left\{\left(v_H - \frac{An^{1/(g-1)}}{8(\log n)^{v_H}}\right)n\right\} = o(1).$$

Ou seja, quase certamente $X_W > (1/2)\mathbb{E}(X_W)$.

Observemos agora que o número de hiperarestas excluídas de $\mathcal{H}_{n,p_H}$ foi $O(nw)$, para alguma função $w = w(n)$ que tende a ∞ quando n tende a ∞. Portanto, o número de hiperarestas induzidas por W em $\mathcal{G}$ é, quase certamente, maior do que ou igual a $(1/2)\mathbb{E}(X_W) - O(nw)$, que é maior do que ou igual a $(1/4)\mathbb{E}(X_W)$. Observemos, finalmente, que cada uma dessas hiperarestas nos dão e_H arestas de Γ, donde concluímos a prova. $\square$

4.3 Prova do Teorema Principal

Suponha dados inteiros $g \geq 4$ e $t \geq 1$ e grafos $H \in \mathcal{C}(g)$ e G de cintura g satisfazendo $m_2(G) = \frac{g-1}{g-2}$. Sejam

$$k_0 = k_0(K^2, G, K^h) \text{ e } c = c(K^2, G, K^h)$$

as constantes dadas pelo Lema 3.11. Fixamos

$$d = \rho = \frac{c}{2^{v_H+2}},\ \beta = \left(\frac{\rho}{e^2}\right)^{e_G} \text{ e } D = e2e_H$$

Sejam

$$C = C(\beta, d),\ m_0 = m_0(\beta, d) \text{ e } \varepsilon = \varepsilon(\beta, d)$$

as constantes cujas existências são garantidas pelo Lema 3.10. Por fim, sejam

$$\eta = \eta(\varepsilon, k_0, D) \text{ e } K_0 = K_0(\varepsilon, k_0, D)$$

as constantes dadas pelo Lema 3.8. Podemos assumir que $\varepsilon < \min\{1/2, 2c\}$. Finalmente, seja

$$A = \max\{C, (v_H + 1)e^{-v_H}\}$$

Definimos uma família $\mathcal{F} = \mathcal{F}(H)$ de grafos Γ sobre $V = [n]$ que podem ser escritos como a união de X cópias de H, com $X \asymp \binom{n}{h} p_H$, tais que duas cópias distintas possuem no máximo 1 vértice em comum. Além disso, os grafos Γ satisfazem as seguintes propriedades.

- (P1) O hipergrafo sobre $V = [n]$ dado por

  $$\mathcal{G} = \{V(H_i) : 1 \leq i \leq X\}$$

  tem cintura g.

- (P2) Γ é (η, D, p_e)-esparso.

- (P3) Para todo $V^{(m)} = (V_1, \ldots, V_{v_G})$, se $\Gamma^{(e)} \subset \Gamma^{(e)}[V^{(m)}]$ é tal que os pares (V_i, V_j) são $(\varepsilon, \Gamma^{(e)}, p_e)$-regulares de p_e densidade pelo menos ρ, então $\Gamma^{(e)}$ contém G.

- (P4) Todo $W^{(m)} = (W_1, \ldots, W_{v_H})$ com $m \geq n/\log n$ induz pelo menos

  $$\frac{1}{4} e_H m^{v_H} p_H$$

  arestas de Γ que podem ser estendidas a cópias não espontâneas H_i de H em

  $$U = \bigcup_{i \leq j \leq v_H} W_j$$

- (P5) Todo $U \subset V = [n]$ com t vértices contém um vértice v_U que pertence a no máximo uma cópia não espontânea H_i de H tal que $V(H_i) \subset U$.

- (P6) Γ não contém cópias espontâneas de H.

4.3.1 Prova que $\Gamma \to (G, H)$

Seja $\Gamma^{(e)}$ um subgrafo de Γ definido colorindo de vermelho exatamente 1 aresta de cada cópia H_i $(1 \leq i \leq X)$ de H em Γ. Mostraremos que $\Gamma^{(e)}$ contém uma cópia de G.

Por $(P2)$, sabemos que $\Gamma^{(e)}$ é (η, D, p_e)-esparso. Aplicando o Lema 3.8, obtemos uma partição $(\varepsilon, k, \Gamma^{(e)}, p_e)$-regular $\Pi = (V_0, V_1, \ldots, V_k)$ com $k_0 \leq k \leq K_0$. Seja m a cardinalidade comum dos conjuntos V_i, $(1 \leq i \leq k)$.

Seja K^k o grafo completo sobre $V(K^k) = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ e considere a seguinte 3-coloração de suas arestas:

(a) pinte $\{V_i, V_j\}$ com a cor 1 se (V_i, V_j) não é ε-regular,

(b) pinte $\{V_i, V_j\}$ com a cor 2 se (V_i, V_j) é ε-regular de p_e-densidade $\geq \rho$,

(c) pinte $\{V_i, V_j\}$ com a cor 3 se (V_i, V_j) é ε-regular de p_e-densidade $< \rho$.

Já que $k \geq k_0$, temos, pelo Lema 3.11, que essa coloração do K^k contém:

(i) pelo menos ck^2 cópias de K^2 com todas suas arestas na cor 1 ou

(ii) pelo menos ck^{v_G} cópias de G com todas suas arestas na cor 2 ou

(iii) pelo menos ck^{v_H} cópias de K^{v_H} com todas suas arestas na cor 3.

Observe que (i) não pode acontecer, pois o número de pares não regulares é $\leq \varepsilon\binom{k}{2} \leq 2c\binom{k}{2} < ck^2$. Se (ii) valer, qualquer cópia de $G \subset K^k$ na cor 2 determinará um vetor $V^{(m)} = (V_i)_{i=1}^{v_G}$ de subconjuntos disjuntos de $V(\Gamma)$ que, de acordo com $(P3)$, nos dará $G \subset \Gamma^{(e)}$. Suponhamos então que (iii) vale e derivemos uma contradição.

O número de arestas em $\Gamma^{(e)}$ que pertencem a $E_{\Gamma^{(e)}}(V_i, V_j)$ que correspondem a arestas de cor 3 de K^k é

$$\begin{aligned}
&\sum\{e_{\Gamma^{(e)}}(V_i, V_j) : \{V_i, V_j\} \in E(K^k) \text{ de cor } 3\} \\
&< \binom{k}{2}\rho p_e m^2 \leq \binom{k}{2}\rho p_e \left(\frac{n}{k}\right)^2 \\
&< \frac{k^2}{2}\rho p_e \left(\frac{n}{k}\right)^2 < \frac{1}{2}\rho A n^{1+1/(g-1)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, por (iii), temos pelo menos ck^{v_H} cópias de K^{v_H} que são monocromáticas de cor 3 em K^k. Se cada cópia contribui com pelo menos $(1/4)m^{v_H}p_H$ arestas, então temos

$$ck^{v_H}\frac{1}{4}m^{v_H}p_H \geq ck^{v_H}\frac{1}{4}\left(\frac{n}{2k}\right)^{v_H} A n^{-v_H+1-1/(g-1)}.$$

$$\geq \frac{1}{4}\frac{ck^{v_H}}{2^{v_H}k^{v_H}} A n^{v_H - v_H + 1 + 1/(g-1)} = \frac{c}{2^{v_H+2}} A n^{1+1/(g-1)}.$$

4.3.2 Prova que $\Gamma \not\to_t (G, H)$

Provamos aqui, por indução em |U|, que qualquer subgrafo induzido $\Gamma[U]$ com no máximo t vértices não é Ramsey para (G, H). Seja $|U| \subseteq V = [n]$. Se $|U| < \max\{v_G, v_H\}$, então, claramente $\Gamma[U] \not\to (G, H)$.

Suponha agora que $\max\{v_G, v_H\} \leq |U| \leq t$ e que os grafos induzidos por quaisquer subconjuntos $U' \subseteq V$ de cardinalidade menor que $|U|$ não são Ramsey para o par (G, H). Pela propriedade $(P5)$, existe um vértice v_U que pertence a no máximo uma cópia não espontânea H_i de H em Γ tal que $V(H_i) \subseteq U$; por conveniência, seja H_{i_0} essa cópia, se ela existir. Suponha que estamos evitando cópias vermelhas de G e cópias azuis de H e fixe uma 2-coloração de $\Gamma[U \backslash \{v_U\}]$ sem cópias vermelhas de G nem cópias azuis de H. Tal 2-coloração existe pela hipótese indutiva.

Colorir vermelha somente uma aresta e incidente a v_U não cria cópias vermelhas de G em $\Gamma[U]$. As outras arestas incidentes a v_U nós colorimos azuis. Observe que podemos escolher a aresta e de forma a não criar uma cópia azul de H, basta escolher e de H_{i_0}. Com essa escolha, se nós criássemos uma cópia azul de H em $\Gamma[U]$, então nós teríamos uma cópia espontânea de H em $\Gamma[U] \subseteq \Gamma$. Entretanto, cópias espontâneas de H não existem, pela propriedade $(P6)$, e, portanto, temos uma coloração de $\Gamma[U]$ sem cópias vermelhas de G nem cópias azuis de H, completando nosso passo indutivo.

Capítulo 5

Considerações finais

Estudamos, nesta dissertação, o problema de classificar os pares de grafos (G, H) segundo o critério da quantidade de grafos que são minimais com respeito a propriedade Ramsey para (G, H), ou seja, grafos que possuem a propriedade de sempre que coloridos com duas cores, digamos vermelha e azul, apresentam uma cópia vermelha de G ou uma cópia azul de H.

Apresentamos um breve histórico dos resultados que são conhecidos até o momento e destacamos que, se G e H são grafos distintos e não são florestas, então apenas alguns subcasos estão resolvidos. Esses subcasos são: G e H ambos circuitos ímpares, G e H ambos 3-conexos ou G é um circuito de comprimento l e H um grafo que não contém circuito induzido de comprimento maior do que ou igual a l, os quais são todos Ramsey infinitos.

Generalizamos o resultado de Bollobás, Donadelli, Kohayakawa e Schelp [1], demonstrando que o par (G, H) é Ramsey infinito também para o caso em que G é um grafo com grau mínimo 2 e cintura g, satisfazendo $m_2(G) = (g-1)/(g-2)$, e H é um grafo 2-conexo que não contém circuito induzido de comprimento maior do que ou igual a g. Para conseguirmos generalizar esse resultado, fizemos uso do Lema de Contagem apresentado em [19], que prova a famosa *Conjectura KŁR*, a qual permaneceu aberta por quase 15 anos.

Referências Bibliográficas

[1] B. Bollobás, J. Donadelli, Y. Kohayakawa, and R. H. Schelp, *Ramsey minimal graphs*, J. of the Brazilian Computer Society **7** (2002), no. 3, 27–37.

[2] S. A. Burr, P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp, *Ramsey-minimal graphs for the pair star, connected graph*, Studia Sci. Math. Hungar. **15** (1980), no. 1-3, 265–273.

[3] S. A. Burr, P. Erdős, R. J. Faudree, and R. H. Schelp, *A class of Ramsey-finite graphs*, Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1978) (Winnipeg, Man.), Congress. Numer., XXI, Utilitas Math., 1978, pp. 171–180.

[4] S. A. Burr, R. J. Faudree, R. H. Schelp, P. Erdős, and C. C. Rousseau, *Ramsey-minimal graphs for matchings*, The theory and applications of graphs (Kalamazoo, Mich., 1980), Wiley, New York, 1981, pp. 159–168.

[5] S. A. Burr, P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp, *Ramsey-minimal graphs for star-forests*, Discrete Math. **33** (1981), no. 3, 227–237.

[6] ———, *Ramsey-minimal graphs for forests*, Discrete Math. **38** (1982), no. 1, 23–32.

[7] R. Faudree, *Ramsey minimal graphs for forests*, Ars Combin. **31** (1991), 117–124.

[8] Z. Füredi, *Random Ramsey graphs for the four-cycle*, Discrete Math. **126** (1994), no. 1-3, 407–410.

[9] S. Gerke, H. J. Prömel, T. Schickinger, A. Steger, and A. Taraz, *K_4-free subgraphs of random graphs revisited*, Combinatorica **27** (2007), no. 3, 329–365.

[10] S. Gerke, T. Schickinger, and A. Steger, *K_5-free subgraphs of random graphs*, Random Structures Algorithms **24** (2004), no. 2, 194–232.

[11] Y. Kohayakawa, *Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs*, Foundations of computational mathematics (Rio de Janeiro, 1997), Springer, Berlin, 1997, pp. 216–230.

[12] Y. Kohayakawa and B. Kreuter, *Threshold functions for asymmetric Ramsey properties involving cycles*, Random Structures Algorithms **11** (1997), no. 3, 245–276.

[13] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl, *On K^4-free subgraphs of random graphs*, Combinatorica **17** (1997), no. 2, 173–213.

[14] Y. Kohayakawa and V. Rödl, *Szemerédi's regularity lemma and quasi-randomness*, Recent advances in algorithms and combinatorics, CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC, vol. 11, Springer, New York, 2003, pp. 289–351.

[15] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl, *Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set*, Acta Arith. **75** (1996), no. 2, 133–163.

[16] T. Łuczak, *On Ramsey minimal graphs*, Electron. J. Combin. **1** (1994), Research Paper 4, approx. 4 pp. (electronic).

[17] J. Nešetřil and V. Rödl, *Partitions of vertices*, Comment. Math. Univ. Carolinae **17** (1976), no. 1, 85–95.

[18] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **30** (1930), 264–286.

[19] V. Rödl and M. Schacht, *Extremal results in random graphs*, ArXiv e-prints (2013).

[20] V. Rödl and A. Ruciński, *Threshold functions for Ramsey properties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 917–942.

[21] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), Colloq. Internat. CNRS, vol. 260, CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401.