

Conjuntos dominantes em grafos

Wanderley Guimarães da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dra. Yoshiko Wakabayashi

— São Paulo, 6 de agosto de 2010 —

– Durante a realização desse trabalho, o aluno recebeu apoio financeiro do CNPq. –

Resumo

Num grafo G , dizemos que um conjunto de vértices S é *dominante* se todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a um vértice de S . Denotamos por $\gamma(G)$ a cardinalidade mínima de um conjunto dominante de G . Nesta dissertação, apresentamos uma resenha que abrange os aspectos estruturais e algorítmicos de problemas relacionados a este tópico.

Descrevemos vários resultados e demonstramos alguns sobre limites superiores para $\gamma(G)$, que levam em conta o grau mínimo de G . Caracterizamos também algumas subclasses de grafos G para os quais $\gamma(G)$ atinge precisamente o limite superior provado para a classe desses grafos. Mostramos que o problema de encontrar um conjunto dominante mínimo é NP-difícil, e apresentamos algoritmos lineares que resolvem esse problema quando o grafo é um disco triangulado ou uma árvore.

A maior parte dos resultados apresentados aqui apareceram na literatura. Para alguns resultados, apresentamos provas ou algoritmos diferentes, e alguns corolários novos. Para árvores, projetamos um algoritmo simples que é baseado na enumeração em pós-ordem de seus vértices.

Abstract

In a graph G , a subset S of vertices is called a *dominating set* if each vertex in $V(G) \setminus S$ is adjacent to vertex in S . The *domination number* of a graph G , denoted by $\gamma(G)$, is the minimum size of a dominating set of G . In this dissertation, we present a survey on the structural and algorithmic aspects of problems on the domination number.

We prove some upper bounds for $\gamma(G)$ that are based on the minimum degree of G . We also characterize some subclasses of graphs G for which $\gamma(G)$ attains precisely the upper bound proved for these classes of graphs. We show that the problem of finding a dominating set of minimum size is NP-hard, and present linear-time algorithms to solve this problem on triangulated disks and trees.

Most of the results presented here have appeared in the literature. For some results, we present different proofs or algorithms, and some corollaries which were not mentioned in the literature. For trees, we designed a simple algorithm based on the post-order enumeration of its vertices.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Conceitos básicos	5
2.2 Conjuntos dominantes	7
3 Alguns resultados estruturais sobre conjuntos dominantes	11
3.1 Resultados iniciais da teoria	11
3.2 Conjuntos dominantes, florestas e emparelhamentos	13
4 Limites e caracterizações de grafos relacionados ao número de dominação	17
4.1 Limitantes baseados no grau máximo	18
4.2 Limitantes baseados no grau mínimo	18
4.3 Caracterizações de grafos baseados em limites superiores	31

5	Complexidade computacional e algoritmos	49
5.1	Problema geral	49
5.2	Discos triangulados	52
5.3	Árvores	59
6	Aplicações	67
6.1	Conjunto de representantes	67
6.2	Rota de ônibus	69
6.3	Teoria de rede social	69
7	Considerações finais	71
	Referências bibliográficas	75

Introdução

O tema central desta dissertação é o estudo de conjuntos dominantes em grafos. Num grafo G , dizemos que um conjunto de vértices S é *dominante* se todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a um vértice de S . É evidente que o próprio conjunto de vértices de um grafo é um conjunto dominante. Já o problema de determinar a cardinalidade mínima de um conjunto dominante de um grafo é NP-difícil. Nesta dissertação abordamos os aspectos estruturais e algorítmicos deste problema.

Antes de mencionarmos os tópicos tratados nesta dissertação, faremos um breve histórico sobre os estudos envolvendo conjuntos dominantes.

Breve histórico

O estudo de conjuntos dominantes em grafos teve início na década de 50. Entretanto, o problema de encontrar conjuntos dominantes mínimos, surgiu no contexto de jogos de xadrez por volta de 1800. Nessa época, os entusiastas de xadrez queriam resolver problemas do seguinte tipo: *dado um tabuleiro de xadrez 8-por-8, qual o número mínimo de damas que podemos posicionar nesse tabuleiro de tal forma que todas as casas ou contenham uma dama ou sejam atacáveis por uma dama?*

Na Figura 1.1 (a) ilustramos o posicionamento de uma dama e as posições que são atacáveis por essa dama. A solução para o problema acima é 5, e por essa razão tal problema ficou conhecido como o *Problema das Cinco Damas*. Na Figura 1.1 (b) apresentamos uma configuração que mostra que 5 damas são suficientes para atacar todas

as demais posições do tabuleiro. Pode-se verificar que não é possível encontrar uma configuração com 4 damas que podem atacar todas as demais posições do tabuleiro.

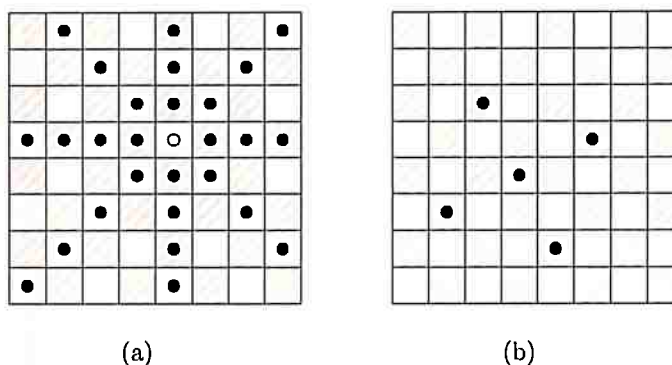


Figura 1.1: (a) Exemplo de um tabuleiro 8-por-8 com uma dama representada por um ponto branco; as casas que podem ser atacadas por essa dama estão representadas por pontos pretos. (b) Uma configuração que mostra uma solução para o *Problema das Cinco Damas*.

Pelo menos três variantes do Problema das Cinco Damas ficaram conhecidas. Há outras variantes que envolvem outras peças do jogo de xadrez, mas não as mencionaremos aqui.

O grafo dos movimentos da dama, ou *grafo da dama n -por- n* é definido assim: os vértices do grafo são as casas do tabuleiro, e dois vértices são adjacentes se compartilham ou a mesma diagonal, ou a mesma vertical, ou a mesma horizontal do tabuleiro.

No que segue, dizemos que uma dama d *domina* uma casa do tabuleiro se esta casa contém d ou é atacável por d .

Cobertura. Qual é o número mínimo de damas que é necessário para dominar todas as casas de um tabuleiro n -por- n ?

Modelando este problema na linguagem de grafos temos: *dado o grafo da dama n -por- n , determine a cardinalidade mínima de um conjunto dominante desse grafo.*

Cobertura independente. Qual é o número mínimo de damas que é necessário para dominar todas as casas de um tabuleiro n -por- n , obedecendo a condição de que duas damas quaisquer não podem se atacar?

Na linguagem de grafos temos o seguinte problema: *dado o grafo da dama n -por- n , determine a cardinalidade mínima de um conjunto dominante independente desse grafo.*

Independência. Qual é o número máximo de damas que é possível colocar em um tabuleiro n -por- n de tal forma que elas não se ataquem duas a duas?

Reescrevendo este problema na linguagem de grafos temos: *dado o grafo da dama n -por- n , determine um conjunto independente máximo do grafo.* Este problema é conhecido como o *Problema das N -Damas*, quando o tipo da peça é uma dama (poderia ser outra peça), e foi proposto em 1848 pelo jogador de xadrez Bezzel. A partir desta data, muitos matemáticos estudaram este problema, entre eles Gauss e Cantor. A primeira solução para este problema foi obtida por Nauck em 1850. KRAITCHIK [1942] mostrou que existem 92 formas diferentes de posicionar 8 damas em um tabuleiro 8-por-8 satisfazendo a condição de independência.

No caso dos problemas citados, podemos estar interessados em encontrar conjuntos dominantes mínimos, e não apenas a cardinalidade desses conjuntos.

Para alguns dos problemas, YAGLOM E YAGLOM [1964] propuseram diversas variantes e soluções elegantes. COCKAYNE E HEDETNIEMI [1986] e COCKAYNE, GAMBLE E SHEPHERD [1986] estudaram conjuntos dominantes em grafos formados a partir de tabuleiros n -por- n com bispos e damas. COCKAYNE [1990] publicou um artigo que reúne diversos resultados sobre grafos formados a partir de tabuleiros n -por- n e peças do jogo de xadrez.

O conceito de conjuntos dominantes em grafos foi introduzido por BERGE [1958], que os denominou de *conjuntos externamente estáveis*. Berge também tratou sucintamente da dificuldade do problema e elaborou um algoritmo que faz uso de lógica booleana para resolvê-lo. ORE [1962] cunhou o termo *conjunto dominante*, que mais tarde foi adotado como padrão, e além disso produziu os primeiros resultados. COCKAYNE E HEDETNIEMI [1977] publicaram a primeira resenha reunindo os resultados obtidos até então e acrescentando novos resultados. Foi neste artigo que surgiu a notação $\gamma(G)$ para *cardinalidade mínima de um conjunto dominante* de um grafo G , e que posteriormente foi adotada como padrão. O parâmetro $\gamma(G)$ é chamado de *número de dominação* de G .

Organização do texto

A seguir mencionaremos brevemente o conteúdo dos capítulos desta dissertação. No *Capítulo 2* apresentamos algumas noções básicas da teoria dos grafos, e estabelecemos a notação que será usada ao longo do texto. No *Capítulo 3* apresentamos alguns resultados estruturais que envolvem conjuntos dominantes minimais. No *Capítulo 4* exibimos alguns limites para o número de dominação, e para alguns destes, exibimos também a caracterização dos grafos que os atendem com igualdade. Algumas das provas apresentadas neste capítulo são diferentes daquelas encontradas na literatura. No *Capítulo 5* mostramos que o problema de encontrar um conjunto dominante mínimo é NP-difícil, e apresentamos algoritmos lineares para duas classes especiais de grafos: os discos triangulados e as árvores. O algoritmo que apresentamos para árvores é de nossa autoria. No *Capítulo 6* mencionamos algumas aplicações de conjuntos dominantes. Por fim, no *Capítulo 7* apresentamos umas considerações finais.

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos da teoria dos grafos e a notação que usaremos nesta dissertação.

A leitura deste capítulo não é essencial, caso o leitor tenha familiaridade com a teoria dos grafos. Todas as definições apresentadas neste capítulo constam no Índice Remissivo. Dessa forma, sempre que houver alguma dúvida, ou necessidade de revisão de algum conceito, o leitor poderá consultá-lo.

2.1 Conceitos básicos

Um *grafo* G é um par ordenado (V, E) , onde V e E são conjuntos disjuntos. Chamamos os elementos de V de *vértices* e os elementos de E de *arestas*. As arestas são pares não-ordenados de elementos distintos de V , isto é, $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Para simplificar a notação, um par não-ordenado u, v será denotado simplesmente por uv . Se G é um grafo, denotamos por $V(G)$ e $E(G)$ o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de G , respectivamente. Observamos que os grafos aqui considerados são referidos como grafos simples em outros textos.

A *ordem* de G é a cardinalidade do conjunto $V(G)$, e o *tamanho* é $|V(G)| + |E(G)|$. Em geral, se não for dito explicitamente, n denota a ordem do grafo em discussão. Se wz é uma aresta de G , então dizemos que a aresta wz incide nos vértices w e z ; ou também dizemos que w e z são os *extremos* ou *pontas* da aresta wz . Dizemos que dois vértices distintos u e v são *adjacentes*, ou *vizinhos*, se $uv \in E$. Denotamos o conjunto

dos vizinhos de um vértice u de um grafo G por $N(u)$. Usaremos $N[u]$ para denotar os vizinhos de u incluindo u , isto é, $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.

Seja u um vértice de G . Denotamos por $g(u)$ o grau de u em G , isto é, a cardinalidade de $N(u)$. Para evitar confusão, somente onde for necessário, usaremos um índice para a identificar o grafo ao qual nos referimos. Por exemplo, escrevemos $g_G(u)$ para dizer que estamos interessados no grau do vértice u no grafo G . O grau mínimo de G , definido como $\min\{g(u) : u \in V(G)\}$, é denotado por $\delta(G)$. O grau máximo de G , definido como $\max\{g(u) : u \in V(G)\}$, é denotado por $\Delta(G)$. Vértices de grau zero são chamados *isolados*.

Um *isomorfismo* entre dois grafos G e H é uma função bijetora de $V(G)$ em $V(H)$ que satisfaz a seguinte propriedade: dois vértices u e v são adjacentes em G se e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H , isto é, $uv \in E(G)$ se e somente se $f(u)f(v) \in E(H)$. Dizemos que G e H são *isomorfos* se existir um isomorfismo entre eles.

Um *grafo completo* é um grafo cujos vértices são dois a dois adjacentes. Denotamos por K_n um grafo completo com n vértices. O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} , é o grafo tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ e } uv \notin E(G)\}$.

Um *grafo bipartido* é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos, digamos X e Y , tais que vértices de um mesmo conjunto não são adjacentes. Neste caso, dizemos que G tem uma bipartição (X, Y) ou que G é (X, Y) -bipartido. Seja G um grafo (X, Y) -bipartido. Dizemos que G é um *grafo bipartido completo* se para todo $u \in X$ e $v \in Y$, temos que $uv \in E(G)$. Denotamos por $K_{n,m}$ um grafo bipartido completo com bipartição (X, Y) , onde $|X| = n$ e $|Y| = m$.

Um *subgrafo* H de G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se $V(H) = V(G)$, então dizemos que H é um *subgrafo gerador* de G . Considere X um conjunto de vértices de G . Denotamos por $G[X]$ o subgrafo de G induzido por X , isto é, o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X , e cujo o conjunto de arestas é formado pelas arestas de $E(G)$ que incidem nos vértices de X . Considere F um conjunto de arestas de G . Denotamos por $G[F]$ o subgrafo de G induzido pelas arestas de F , isto é, o subgrafo de G cujo conjunto de arestas é F , e cujo conjunto de vértices é formado pelos vértices de $V(G)$ nos quais incide pelo menos uma aresta de F .

Para facilitar a leitura do texto, usaremos a seguinte notação: se u é um vértice de G então $G - u$ é o mesmo que $G[V(G) \setminus \{u\}]$, e se uv é uma aresta de G então

$G - uv$ é o mesmo que $G[E(G) \setminus \{uv\}]$. Entretanto, para denotar o subgrafo de G obtido pela remoção de um conjunto de vértices de G , digamos Y , escreveremos $G \setminus Y$ ou $G - v_1 - v_2 - \dots - v_k$, se $Y = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. De forma análoga denotamos o subgrafo de G obtido pela remoção de um conjunto de arestas de G .

Um *caminho* P em um grafo G é uma seqüência $(v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, a_k, v_{k+1})$ de vértices e arestas, tal que $v_i \in V(G)$, para todo $1 \leq i \leq k+1$, e $a_i \in E(G)$, para todo $1 \leq i \leq k$, e os vértices são dois a dois distintos e $a_i = v_i v_{i+1}$. Para simplificar escrevemos $P = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$, pois dada a seqüência de vértices fica determinada quais são as arestas de P . Dizemos que v_1 e v_{k+1} são as *pontas* do caminho P . Dizemos, também, que P é um caminho que vai de u à v , ou que P é um caminho que liga os vértices u e v . O *comprimento de um caminho* é o número de arestas nesse caminho.

Um *circuito* C em um grafo G é uma seqüência $(v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, a_k, v_{k+1})$ de vértices e arestas, tal que $v_i \in V(G)$, para todo $1 \leq i \leq k+1$, e $a_i \in E(G)$, para todo $1 \leq i \leq k$, e os vértices são dois a dois distintos, com exceção de v_1 e v_{k+1} , e $a_i = v_i v_{i+1}$. Para simplificar, como no caso de caminhos, escrevemos $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$. O *comprimento de um circuito* é o número de arestas nesse circuito.

Seja G um grafo. Se para todo par u, v de vértices de G existe um caminho que vai de u à v , então dizemos que G é um *grafo conexo*. Uma *componente* de G é um subgrafo maximal conexo de G .

Uma *floresta* é um grafo que não possui circuitos. Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui circuitos. Um vértice de grau 1 numa floresta é chamado *folha*.

2.2 Conjuntos dominantes

Dado um grafo $G = (V, E)$, um conjunto $S \subseteq V$ é um *conjunto dominante* de G , se para todo vértice u de V , temos que u pertence a S , ou u possui pelo menos um de seus vizinhos em S . Sejam u e v dois vértices de G . Dizemos que u *domina* v (ou v é dominado por u) se $uv \in E$ e $u \in S$. Da mesma maneira, dizemos que u é dominado por S , se $u \in S$, ou existe um vizinho de u em S . Claramente, se G possui vértices isolados, então todos estes vértices pertencem a todos os conjuntos dominantes de G .

Seja $\mathcal{F}(G)$ a família dos conjuntos dominantes de um grafo $G = (V, E)$. É óbvio que

$V \in \mathcal{F}(G)$. Além disso, temos que

$$S \in \mathcal{F}(G) \text{ e } S \subseteq W \subseteq V \implies W \in \mathcal{F}(G).$$

Um conjunto dominante S de G é mínimo, se não existe em G um conjunto S' tal que $|S'| < |S|$. O número de dominação de um grafo G , denotado por $\gamma(G)$, é definido como a cardinalidade de um conjunto dominante mínimo de G . Um conjunto dominante S de G é *minimal* se para todo $v \in S$, o conjunto $S \setminus \{v\}$ não é um conjunto dominante de G . A cardinalidade máxima de um conjunto dominante minimal de G é denotado por $\Gamma(G)$. A Figura 2.1 exibe alguns exemplos de conjuntos dominantes. Para $0 \leq c \leq 1$, dizemos que G é *c-dominado* se $\gamma(G) \leq c|V(G)|$, e que um conjunto dominante S é *c-dominante* se $|S| \leq c|V(G)|$.

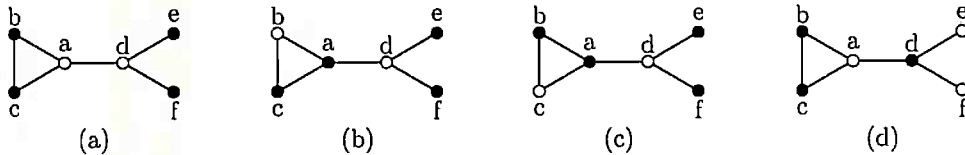


Figura 2.1: Neste exemplo, indicamos para um mesmo grafo G alguns possíveis conjuntos dominantes minimais, destacados com vértices na cor branca. Temos que $\gamma(G) = 2$ e $\Gamma(G) = 3$.

Dado um grafo G , encontrar um conjunto dominante qualquer é uma tarefa fácil, pois o próprio conjunto de vértices de G é um conjunto dominante. Já o problema de determinar $\gamma(G)$, ou encontrar um conjunto dominante mínimo de G , não é tão fácil (como veremos no Capítulo 5) quando G é um grafo arbitrário.

Há na literatura estudos sobre conjuntos dominantes mínimos que exibem algumas propriedades. Mencionamos a seguir algumas das propriedades que têm sido consideradas, mas não apresentaremos aqui resultados a respeito.

Conjunto dominante conexo. Um *conjunto dominante conexo* de um grafo G é um conjunto dominante S de G tal que $G[S]$ é conexo. A Figura 2.1 (a) exemplifica um tal conjunto.

Conjunto dominante independente. Um *conjunto dominante independente* é um conjunto dominante e independente. Os itens (b), (c) e (d) da Figura 2.1 exemplificam conjuntos dominantes independentes.

Conjunto dominante emparelhado. Um *conjunto dominante emparelhado* de um grafo G é um conjunto dominante S de G tal que $G[S]$ possui um emparelhamento perfeito. Um tal conjunto é ilustrado na Figura 2.1 (a).

Alguns resultados estruturais sobre conjuntos dominantes

Neste capítulo estudaremos os resultados iniciais da Teoria de Conjuntos Dominantes. Na seção 3.1 estudaremos os primeiros resultados obtidos por ORE. Na seção 3.2 veremos uma relação entre o número de dominação de um grafo G , e o número de arestas-pendentes em uma floresta-geradora de G com o maior número de arestas-pendentes. Deste resultado, conseguiremos verificar uma relação entre grafos, sem vértices isolados, cujo número de dominação é metade de sua ordem, e emparelhamentos perfeitos.

3.1 Resultados iniciais da teoria

Os resultados que apresentaremos nesta seção, foram os primeiros resultados da Teoria de conjuntos dominantes. No teorema a seguir, ORE, exhibe algumas propriedades necessárias e suficientes que os conjuntos dominantes minimais possuem. Nos outros dois teoremas, exploraremos mais propriedades dos conjuntos dominantes minimais.

Teorema 3.1 (ORE [1962])

Um conjunto dominante S de um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto dominante minimal se e somente se, para cada vértice $u \in S$, ocorre uma das condições:

- (a) u é um vértice isolado em $G[S]$,
- (b) existe um vértice $v \in (V \setminus S)$ para o qual $N(v) \cap S = \{u\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G = (V, E)$ um grafo e S um conjunto dominante de G .

Suponha que S seja um conjunto dominante minimal. Demonstremos então que para cada vértice de S ocorre pelo menos uma das condições (a) ou (b). Seja $u \in S$. Seja $S' = S \setminus \{u\}$. Como S é um conjunto dominante minimal, então S' não é um conjunto dominante de G . Seja $v \in V \setminus S'$ um vértice não dominado por S' . Suponha que $v = u$. Então u não tem nenhum vizinho em S . Logo, temos que ocorre a condição (a) para o vértice u . Agora, suponha que $v \neq u$. Então u é o único vértice de S que domina v . Logo, temos que ocorre a condição (b) para o vértice v .

Reciprocamente, suponha que para cada vértice de S ocorra pelo menos uma das duas condições (a) ou (b). Demonstremos então que S é um conjunto dominante minimal de G . Suponha que S não seja um conjunto dominante minimal de G . Seja $u \in S$. Seja $S' = S \setminus \{u\}$. Suponha que S' é um conjunto dominante de G . Então u possui um vizinho em S' . Logo, temos que não ocorre a condição (a) para o vértice u . Conclui-se então que ocorre a condição (b). Com isso, existe um vértice v de G que também não é dominado por S' , o que é um absurdo, pois S' é um conjunto dominante de G . Portanto, temos que $S' = S \setminus \{u\}$ não é um conjunto dominante de G , para todo vértice u de S . Logo, temos que S é um conjunto dominante minimal de G , o que finaliza a nossa demonstração. \square

Teorema 3.2 (ORE [1962])

Seja $G = (V, E)$ um grafo sem vértices isolados. Então G tem um conjunto dominante S tal que o seu complemento $V \setminus S$ é também um conjunto dominante.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G = (V, E)$ um grafo sem vértices isolados. Considere T uma árvore geradora de G . Seja v um vértice de G . Considere dois conjuntos S e S' , onde S é o conjunto de vértices à distância par de v em T e $S' = V \setminus S$ (a Figura 3.1 ilustra um exemplo desta construção). Como T é um grafo bipartido e gerador de G ,

com bipartição (S, S') , é imediato que S e S' são conjuntos dominantes de T , e portanto de G . \square

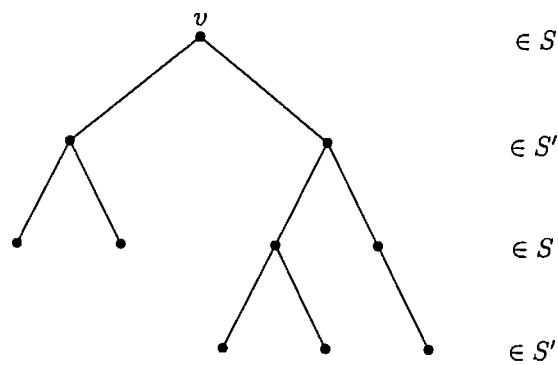


Figura 3.1: Exemplo da construção dos conjuntos S e S' .

Corolário 3.3 (ORE [1962])

Seja $G = (V, E)$ um grafo sem vértices isolados. Então para todo conjunto dominante minimal S de G , temos que $V \setminus S$ é um conjunto dominante.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G = (V, E)$ um grafo sem vértices isolados. Seja S um conjunto dominante minimal de G . Considere $S' = V \setminus S$. Suponha, por absurdo, que S' não seja um conjunto dominante. Seja v um vértice de G que não é dominado por S' . Então $v \in S$ e $N(v) \subseteq S$. Seja $S'' = S \setminus \{v\}$. Como $g(v) \geq 1$, então S'' domina v . Além disso, temos que S'' domina todos os vértices que S domina; porque todos os vizinhos de v pertencem ao conjunto S . Logo, S'' é um conjunto dominante. Mas isto é um absurdo, pois S é conjunto dominante minimal. Portanto, temos que $S' = V \setminus S$ é um conjunto dominante de G . \square

3.2 Conjuntos dominantes, florestas e emparelhamentos

Veremos a seguir um resultado sobre conjuntos dominantes, obtido por NIEMINEN [1974], que relaciona conjuntos dominantes mínimos e florestas geradoras com

número máximo de *arestas pendentes* (uma aresta é pendente se um de seus extremos é um vértice de grau um). Seja G um grafo e F uma floresta geradora de G . Denotamos por $\text{pend}(F)$ o número de arestas pendentes em F . Note que, nas componentes, de F com pelo menos 3 vértices, o número de arestas pendentes coincide com o seu número de folhas. O número de arestas pendentes em uma floresta geradora, de G , com número máximo de arestas pendentes é denotado por $\varepsilon(G)$.

Teorema 3.4 (NIEMINEN [1974])

Para todo grafo $G = (V, E)$, temos que $\gamma(G) + \varepsilon(G) = |V|$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ um conjunto dominante mínimo de G . Considere $S' = V \setminus S$. Construamos $H = (V, E')$, onde $E' = \cup_{v \in S'} \{vu_i : u_i \in S \text{ e } i \text{ é mínimo}\}$. É fácil ver que H é uma floresta geradora de G . Da construção de H temos que $\text{pend}(H) = n - |S|$, isto é, $\text{pend}(H) = n - \gamma(G)$. Seja F uma floresta geradora de G tal que $\text{pend}(F) = \varepsilon(G)$ e $|E(F)|$ é mínimo. Sejam C_1, C_2, \dots, C_p as componentes de F . É fácil ver que as componentes de F são vértices isolados ou estrelas, isto é, são grafos isomorfos aos grafos da Figura 3.2. Denotemos por $\text{centro}(C_i)$, para $1 \leq i \leq p$, um dos vértices da componente C_i de grau máximo em C_i . Seja $S_F = \{\text{centro}(C_1), \text{centro}(C_2), \dots, \text{centro}(C_p)\}$. Então $\varepsilon(G) = n - p$. Além disso,

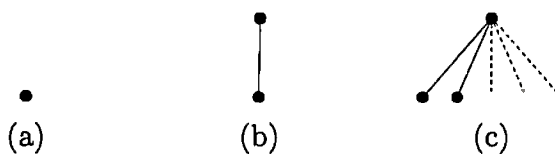


Figura 3.2: Como podem ser as componentes de F .

é fácil ver que S_F é um conjunto dominante de G . Logo, temos que $\gamma(G) \leq p$. Suponha que $\gamma(G) < p$. Então temos que $\text{pend}(H) = n - \gamma(G) > n - p = \varepsilon(G)$, o que é um absurdo, pois $\varepsilon(G) \geq \text{pend}(H)$. Portanto, temos que $\gamma(G) \geq p$. Logo, $\gamma(G) = p$, donde segue que $\gamma(G) + \varepsilon(G) = n$, como queríamos demonstrar. \square

Uma propriedade interessante dos grafos, sem vértices isolados, e que possuem o número de dominação sendo a metade de sua ordem, é que tais possuem emparelha-

mento perfeito. O seguinte corolário enuncia tal propriedade.

Corolário 3.5: *Seja G um grafo com n vértices. Se G não possui vértices isolados e $\gamma(G) = \frac{n}{2}$, então G tem um emparelhamento perfeito.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices e sem vértices isolados, tal que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. Seja F uma floresta geradora de G , tal que $\text{pend}(F) = \varepsilon(G)$ e $|E(F)|$ é máximo. Suponha que exista um vértice u de V , tal que $g_F(u) = 0$. Como G não possui vértices isolados, então existe um vértice $v \in V$ tal que $uv \in E$. Seja $F' = F + uv$. É fácil ver que F' é uma floresta geradora de G . Como $\text{pend}(F) = \varepsilon(G)$ então $\text{pend}(F') = \varepsilon(G)$ (caso contrário teríamos um absurdo). Da construção de F' temos que $|E(F')| > |E(F)|$. Mas isto é um absurdo, pois $|E(F)|$ é máximo. Portanto, para todo $u \in V$ temos que $g_F(u) \geq 1$. Seja M o conjunto das arestas pendentes de F . Como $\text{pend}(F) = \varepsilon(G) = n - \gamma(G) = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, então temos que M é um emparelhamento perfeito. \square

Limites e caracterizações de grafos relacionados ao número de dominação

Em vários problemas sobre grafos, como por exemplo, conjuntos dominantes ou conjuntos independentes, estamos interessados em conjuntos de cardinalidade mínima ou de cardinalidade máxima. Entretanto, determinar tais conjuntos nem sempre é uma tarefa fácil, pois muitos destes problemas são *NP*-difíceis. Daí surge a necessidade de encontrar limitantes inferiores e superiores que têm papel fundamental na elaboração de heurísticas, algoritmos de aproximação e algoritmos baseados em programação inteira.

Neste capítulo descreveremos alguns resultados sobre limites inferiores e superiores para a cardinalidade de conjuntos dominantes mínimos. Naturalmente, conforme a teoria de conjuntos dominantes foi evoluindo, resultados cada vez mais justos foram obtidos. ORE [1962] foi o primeiro a descobrir que se um grafo não tem vértices isolados, então um limitante para o número de dominação é no máximo a metade do número de vértices do grafo. Mais tarde, ao adicionar restrições sobre os grafos, foi possível obter limitantes mais justos. BLANK [1973] e independentemente MCCUIAG E SHEPHERD [1989], provaram um limite de $\frac{2}{5}n$, onde n é o número de vértices do grafo, para grafos conexos e com grau mínimo 2. Já quando o grafo é conexo e tem grau mínimo pelo menos 3, então o número de dominação é no máximo $\frac{3}{8}n$. Este resultado foi provado por REED [1996]. Outros resultados foram obtidos a partir de 1996. No entanto, daremos aqui mais atenção para os resultados que mencionamos; é claro que sem deixar de enunciar outros resultados.

4.1 Limitantes baseados no grau máximo

Seja G um grafo. Da observação simples de que um subconjunto de G formado por um vértice (de grau máximo) e todos os seus vizinhos pode ser dominado por um vértice, não é difícil provar o seguinte resultado.

Teorema 4.1 (BERGE [1958])

Seja G um grafo com n vértices. Então

$$\left\lceil \frac{n}{1 + \Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

Como corolário do teorema acima, ou simplesmente usando a definição é imediato que $\gamma(K_n) = 1$ e $\gamma(\overline{K_n}) = n$.

4.2 Limitantes baseados no grau mínimo

Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices. Como o próprio V é um conjunto dominante, segue que um limitante superior óbvio para $\gamma(G)$ é o número de vértices de G , ou seja, $\gamma(G) \leq n$. Este limite é justo para alguns grafos. Vimos que $G \cong \overline{K_n}$, então $\gamma(G) = n$. Entretanto, se considerarmos grafos sem vértices isolados, podemos obter como consequência direta do Teorema 3.3, um limite superior mais justo.

Teorema 4.2 (ORE [1962])

Seja G é um grafo com n vértices. Se G não possui vértices isolados então $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja G um grafo que satisfaz as hipóteses do enunciado. Suponha, por absurdo, que $\gamma(G) > \frac{n}{2}$. Seja S um conjunto dominante mínimo. Como S é um conjunto dominante minimal, segue pelo Teorema 3.3 que $V \setminus S$ é um conjunto dominante. Como $|S| > \frac{n}{2}$, temos que $|V \setminus S| < \frac{n}{2}$, o que é um absurdo. Logo, $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$. \square

O limite obtido por ORE no Teorema 4.2 considera grafos que não possuem vértices isolados, isto é, grafos com grau mínimo pelo menos 1. MCCUAIG E SHEPHERD [1989]

obtiveram um limitante superior um pouco mais justo usando a hipótese de que o grafo tem grau mínimo pelo menos 2. Eles provaram que se G é um grafo conexo com n vértices e $\delta(G) \geq 2$, e se G não é isomorfo a nenhum dos grafos da Família \mathcal{B} , ilustrada na Figura 4.1, então $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n$.

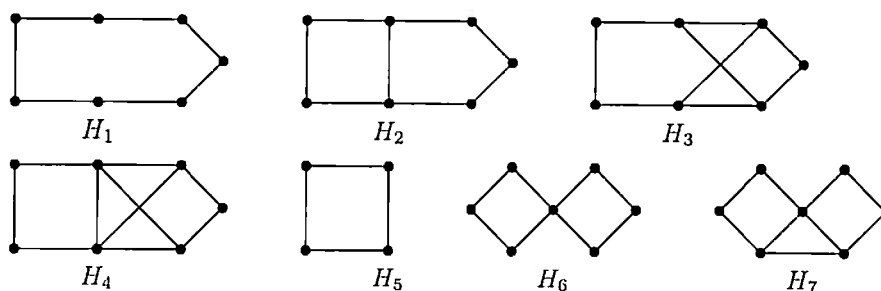


Figura 4.1: Família de grafos \mathcal{B} .

Antes de apresentarmos a prova deste resultado, vamos enunciar alguns resultados que nos serão úteis.

Proposição 4.3: *Seja G um grafo. Se G é um circuito de comprimento n , então $\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja G um grafo que é um circuito de comprimento n . Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices de G , tais que $v_i v_{i+1} \in E(G)$, para $1 \leq i \leq n$, e $v_n v_1 \in E(G)$. Considere $S = \{v_3, v_6, \dots, v_{3k}\}$, onde k é o maior inteiro tal que $3k \leq n$.

Suponha que $n = 3k$. A Figura 4.2 (a) ilustra o caso que estamos tratando. Então é fácil verificar que S é um conjunto dominante. Pois para todo vértices v_i , para $1 \leq i \leq n$, temos que ou v_i pertence ao conjunto S ou possui um vizinho em S . Portanto, temos que neste caso $\gamma(G) \leq \frac{n}{3} = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Agora, suponhamos que $n \neq 3k$. As Figuras 4.2 (b) e (c) ilustram o caso que estamos tratando. É fácil ver que $S' = S \cup \{v_n\}$ é um conjunto dominante de G . Portanto, temos que $\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. □

No que segue, dizemos que $G \in \mathcal{B}$, onde \mathcal{B} é a família ilustrada na Figura 4.1, se G é isomorfo a algum grafo de \mathcal{B} .

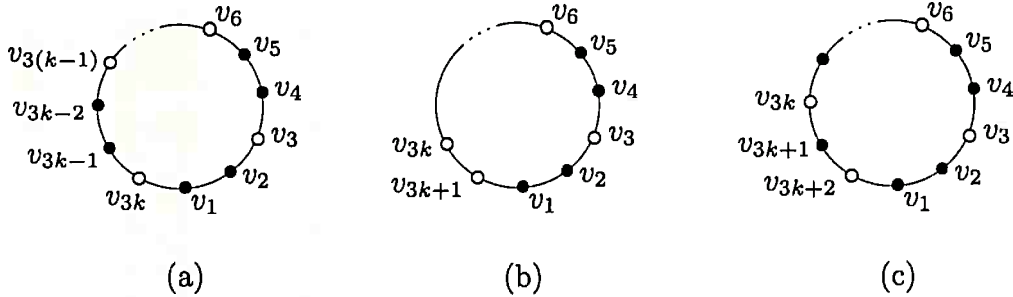


Figura 4.2: Ilustração dos casos da Proposição 4.3

Lema 4.4 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja G um grafo conexo com n vértices. Se $n \leq 7$, $\delta(G) \geq 2$ e $\gamma(G) > \frac{2}{5}n$, então $G \in \mathcal{B}$.

DEMONSTRAÇÃO: Para $n < 7$ é possível verificar que o grafo H_5 é o único grafo que satisfaz a hipótese. Para $n = 7$, temos que $\Delta(G) \leq 4$. Vamos analisar três casos possíveis quanto ao grau máximo de G .

Caso 1: $\Delta(G) = 2$. Então G é um circuito com 7 vértices. Portanto $G \cong H_1$.

Caso 2: $\Delta(G) = 3$. Seja v_1 um vértice de grau máximo de G . Denotemos $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ e $T = V \setminus N[v_1]$. (Veja a Figura 4.3 (a).) Como $\gamma(G) \geq 3$ temos que

$$|E[T]| \leq 1. \quad (4.1)$$

De (4.1) e $\delta(G) \geq 2$ segue que $|\{uv \in E : u \in N(v_1) \text{ e } v \in T\}| \geq 4$. Com isso, temos que algum vértice de $N(v_1)$ possui pelo menos dois vizinhos em T . Suponha que v_5 e v_6 são vizinhos de v_2 . (Veja a Figura 4.3 (b).) Se v_7 for vizinho de v_3 e v_4 temos que $\{v_2, v_7\}$ é um conjunto dominante. Portanto, temos que $|N(v_7) \cap N(v_1)| \leq 1$. Novamente, de (4.1) segue que v_7 tem no máximo um vizinho em T . Logo, $|N(v_7) \cap N(v_1)| = 1$. Suponha que, v_4 e v_6 são vizinhos de v_7 . (Veja a Figura 4.3 (c).) Se v_3 e v_4 forem vizinhos, então $\{v_2, v_4\}$ é um conjunto dominante. Dessa forma, temos que v_3 e v_4 não são vizinhos. Daí temos que

$$E[N(v_1)] = \emptyset \quad (4.2)$$

e, além disso, temos que v_3 é vizinho de v_5 ou v_6 . Se v_3 não for vizinho de v_5 , então v_4 é vizinho de v_5 e v_3 é vizinho de v_6 ; e $\{v_4, v_6\}$ é um conjunto dominante. Portanto, v_3

é necessariamente vizinho de v_5 . (Veja a Figura 4.3 (d).) De (4.1) e (4.2) segue que as únicas arestas possíveis de G são v_3v_6 ou v_4v_5 . Sabemos que apenas uma delas pode pertencer a G . Se G não é isomorfo ao grafo H_2 então v_3 é vizinho de v_6 ou v_4 é vizinho de v_5 . Portanto, $G \cong H_3$.

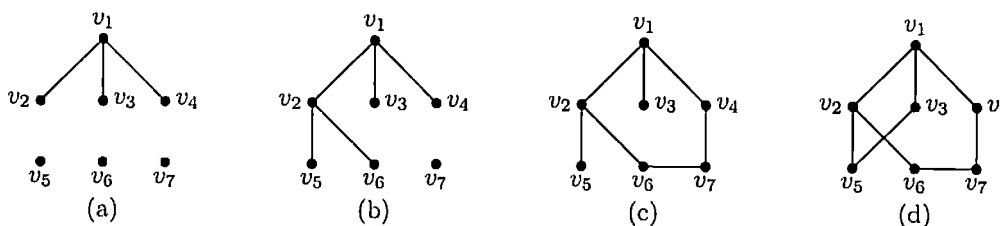


Figura 4.3: Grafos do caso 2 do Lema 4.4.

Caso 3: $\Delta(G) = 4$. Seja v_1 um vértice de grau máximo de G . Sejam $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $T = \{v_6, v_7\}$. (Veja a Figura 4.4 (a).) Como $\gamma(G) \geq 3$, segue que $|E[T]| = 0$. Portanto, os vizinhos de v_6 e v_7 pertencem a $N(v_1)$. Suponha que v_6 é vizinho de v_2 e v_3 , e v_7 é vizinho de v_3 . Então $\{v_1, v_3\}$ é um conjunto dominante. Daí temos que $N(v_6) \cap N(v_7) = \emptyset$. Suponhamos que v_6 é vizinho de v_2 e v_3 , e v_7 é vizinho de v_4 e v_5 . (Veja a Figura 4.4 (b).) Neste caso, G contém H_6 como subgrafo. Se v_2 é vizinho de v_3 , então $\{v_2, v_7\}$ é um conjunto dominante. Com isso, temos que v_2 não é vizinho de v_3 , e de forma análoga, v_4 não é vizinho de v_5 . Também temos que $G[N(v_1)]$ não tem duas arestas independentes. Deste fato e de $\Delta(G) \leq 4$, segue que $|E[N(v_1)]| \leq 2$. Se $|E[N(v_1)]| = 1$, então $G \cong H_7$; caso contrário, temos que $G \cong H_4$. \square

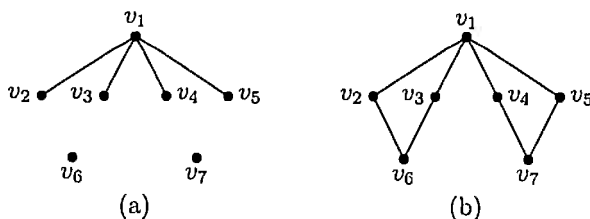


Figura 4.4: Grafos do caso 3 do Lema 4.4.

Os grafos da Família \mathcal{B} possuem propriedades interessantes e que serão úteis para a demonstração do resultado principal.

Proposição 4.5 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja $G \in \mathcal{B}$ com n vértices. Então $\frac{2}{5}n \leq \gamma(G) \leq \frac{2}{5}(n+1)$.

Proposição 4.6 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja $G \in \mathcal{B}$ e $u \in V(G)$. Então existe um conjunto dominante mínimo de G que contém u .

Proposição 4.7 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja $G \in \mathcal{B}$ e $u \in V(G)$. Então $\gamma(G - u) = \gamma(G) - 1$.

Proposição 4.8 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja $G \in \mathcal{B}$ um grafo com n vértices, e $u \in V(G), v \notin V(G)$. Então $\gamma(G + uv) \leq \frac{2}{5}(n+1)$.

Como já mencionamos, o resultado seguinte foi provado por MCCUAIG E SHEPHERD [1989]. A demonstração que faremos é diferente da apresentada no artigo citado. Algumas idéias que julgamos ser fundamentais para a demonstração aparecem tanto no artigo quanto nesta demonstração. Por outro lado, acreditamos que a versão que obtivemos é mais didática e de fácil entendimento. Por esta razão optamos por inserir essa versão nesta dissertação.

Teorema 4.9: *Seja G um grafo conexo com n vértices. Se $n \geq 3, \delta(G) \geq 2$ e $G \notin \mathcal{B}$, então $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que a afirmação do teorema seja falsa.

Seja G um contra-exemplo com o menor número n de vértices e que é aresta-minimal. Suponha que $n \leq 7$. Então do Lema 4.4 segue que $G \in \mathcal{B}$, o que é um absurdo pois sabemos que $G \notin \mathcal{B}$. Portanto, temos que $n \geq 8$.

Suponha que exista uma aresta uv de G , tal que $g(u) \geq 3$ e $g(v) \geq 3$. Suponha que uv não seja uma aresta-de-corte em G . Seja $G' = G - uv$. Como uv não é uma aresta-de-corte, então temos que G' é conexo. Como $g(u) \geq 3$ e $g(v) \geq 3$, segue que $\delta(G') \geq 2$. É evidente que $\gamma(G') \geq \gamma(G)$. Logo, temos que $\gamma(G') > \frac{2}{5}n$. Mas isto é um absurdo, pois G' contraria a escolha de G que é aresta-minimal. Portanto, temos que uv é uma aresta-de-corte de G .

Seja G_1 a componente de $G - uv$ que contém u , e G_2 a componente de $G - uv$ que contém v (veja a Figura 4.5).

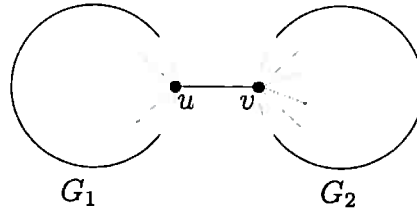


Figura 4.5: Ilustração de G com a aresta-de-corte uv e os grafos G_1 e G_2 .

Fato 1: Seja $i \in \{1, 2\}$. Se $\gamma(G_i) > \frac{2}{5}n_i$ então $G_i \in \mathcal{B}$.

Prova do Fato 1: Claramente $\delta(G_i) \geq 2$, pois u e v possuem grau pelo menos 3 em G . Se $n_i \geq 8$ então G_i é um contra-exemplo menor que G , pois $n_i < n$; o que seria um absurdo. Logo, temos que $n_i \leq 7$. Pelo Lema 4.4, segue que $G_i \in \mathcal{B}$.

Suponha que $\gamma(G_1) \leq \frac{2}{5}n_1$ e $\gamma(G_2) \leq \frac{2}{5}n_2$. Seja D_1 um conjunto dominante mínimo de G_1 , e D_2 um conjunto dominante mínimo de G_2 . É imediato que $D_1 \cup D_2$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos que $\gamma(G) \leq |D_1| + |D_2| \leq \frac{2}{5}n_1 + \frac{2}{5}n_2 = \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo, pois $\gamma(G) > \frac{2}{5}n$. Portanto, não ocorre este caso.

Suponha que $\gamma(G_1) > \frac{2}{5}n_1$ e $\gamma(G_2) > \frac{2}{5}n_2$. Do Fato 1, temos que $G_1 \in \mathcal{B}$ e $G_2 \in \mathcal{B}$. Seja D_1 um conjunto dominante mínimo de $G_1 - u$. Pela Proposição 4.6, temos que existe um conjunto dominante mínimo de G_2 que contém v . Seja D_2 tal conjunto. É fácil ver que $D_1 \cup D_2$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos que $\gamma(G) \leq |D_1| + |D_2|$. Da Proposição 4.7, temos que $|D_1| = \gamma(G_1) - 1$. Da Proposição 4.5,

segue que $\gamma(G_i) \leq \frac{2}{5}(n_i + 1)$, para $1 \leq i \leq 2$. Daí segue que $|D_1| \leq \frac{2}{5}(n_1 + 1) - 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \gamma(G) &\leq \left(\frac{2}{5}(n_1 + 1) - 1 \right) + \frac{2}{5}(n_2 + 1) \\ &= \frac{2}{5}(n + 2) - 1 \\ &= \frac{2}{5}n - \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\gamma(G) > \frac{2}{5}n$. Portanto, não ocorre este caso.

Suponha que $\gamma(G_1) > \frac{2}{5}n_1$ e $\gamma(G_2) \leq \frac{2}{5}n_2$. Do Fato 1, temos que $G_1 \in \mathcal{B}$. Seja w um vizinho de v em G_2 . Denotemos por V_2 o conjunto de vértices do grafo G_2 e por E_2 o conjunto de arestas do grafo G_2 . Considere $H = (V_H, E_H)$ um grafo, onde $V_H = V_2 \setminus \{v\}$ e $E_H = E_2[V_H] \cup \{wz : z \in N_{G_2}(v) \text{ e } z \notin N(w) \text{ e } z \neq w\}$. A Figura 4.6 ilustra a construção do grafo H . Não é difícil ver que H é conexo e $\delta(H) \geq 2$.

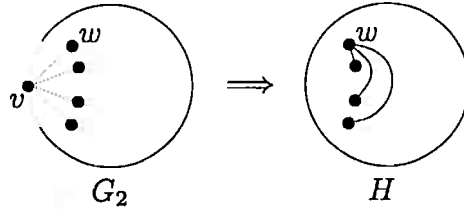


Figura 4.6: Construção do grafo H .

Suponha que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}(n_2 - 1)$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de H , e D_1 um conjunto dominante mínimo de $G_1 - u$. É evidente que $D_1 \cup D_H \cup \{v\}$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos que $\gamma(G) \leq |D_1| + |D_H| + 1$. Da Proposição 4.7, temos que $|D_1| = \gamma(G_1) - 1$. Da Proposição 4.5, temos que $\gamma(G_1) \leq \frac{2}{5}(n_1 + 1)$. Logo, temos que

$$\gamma(G) \leq \left(\frac{2}{5}(n_1 + 1) - 1 \right) + \frac{2}{5}(n_2 - 1) + 1 = \frac{2}{5}n,$$

o que é um absurdo. Portanto, temos que $\gamma(H) > \frac{2}{5}(n_2 - 1)$. Da construção de H , temos que $n_H = n_2 - 1$. Daí segue que $\gamma(H) > \frac{2}{5}n_H$. Se $n_H \geq 8$, então H é um contra-exemplo menor que G , pois $n_H < n$. Logo, $n_H \leq 7$; e do Lema 4.4 segue que $H \in \mathcal{B}$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de $H - w$, e D_1 um conjunto dominante mínimo de $G_1 - u$. É fácil verificar que $D_1 \cup D_H \cup \{v\}$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos

que $\gamma(G) \leq |D_1| + |D_H| + 1$. Como $|D_1| \leq \frac{2}{5}(n_1 + 1) - 1$ e $|D_H| \leq \frac{2}{5}(n_H + 1) - 1$, então

$$\begin{aligned} \gamma(G) &\leq \frac{2}{5}(n_1 + n_H + 2) - 2 + 1 \\ &= \frac{2}{5}(n_1 + n_2 - 1 + 2) - 1 \\ &= \frac{2}{5}(n + 1) - 1 \\ &= \frac{2}{5}n - \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

De novo, temos um absurdo, pois $\gamma(G) > \frac{2}{5}n$. Portanto, o caso onde $\gamma(G_1) > \frac{2}{5}n_1$ e $\gamma(G_2) \leq \frac{2}{5}n_2$ não ocorre. Como o caso onde $\gamma(G_i) > \frac{2}{5}n_i$ e o caso onde $\gamma(G_i) \leq \frac{2}{5}n_i$, para $1 \leq i \leq 2$, também não ocorrem, então podemos concluir que não existe uma aresta uv de G , tal que $g(u) \geq 3$ e $g(v) \geq 3$. Portanto, como $\delta(G) \geq 2$, então temos que toda aresta incide em pelo menos um vértice de grau 2.

Suponha que exista um caminho $P = (u_1, u_2, u_3)$ em G tal que $g(u_i) = 2$, para $i = 1, 2, 3$. Seja v o vizinho de u_1 diferente de u_2 , e seja w o vizinho de u_3 diferente de u_2 . Vamos analisar os casos onde $v = w$ e $v \neq w$.

Suponha que $v = w$. Suponha que $g(v) \geq 4$. Seja $H = G - u_1 - u_2 - u_3$. Temos que H é conexo, H tem pelo menos 3 vértices, e $\delta(H) \geq 2$. Suponha que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}n_H$.

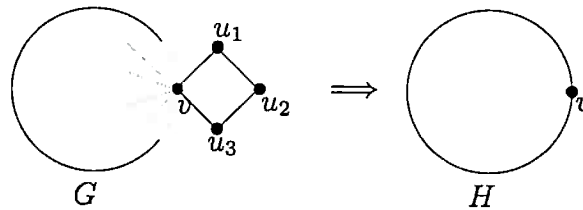


Figura 4.7: Construção do grafo H .

Seja D_H um conjunto dominante mínimo de H . É fácil verificar que $D_H \cup \{u_2\}$ é um conjunto dominante de G . Logo,

$$\gamma(G) \leq \gamma(H) + 1 = \frac{2}{5}(n - 3) + 1 = \frac{2}{5}n - \frac{1}{5},$$

o que é um absurdo, pois $\gamma(G) > \frac{2}{5}n$. Portanto, temos que $\gamma(H) > \frac{2}{5}n_H$. Se $n_H \geq 8$, então H é um contra-exemplo menor que G . Logo, $n_H \leq 7$, e pela Proposição 4.6 segue

que $H \in \mathcal{B}$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de H . É fácil ver que $D_H \cup \{u_2\}$ é um conjunto dominante de G . Como $n \geq 8$ e $H \in \mathcal{B}$, então $n_H = 7$ e $\gamma(H) = 3$. Com isso, temos que $n = 10$. Logo, podemos afirmar que $\gamma(G) = \gamma(H) + 1 = 4 = \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo. Portanto, segue que $g(v) = 3$.

Recapitulando, estamos supondo que $v = w$ e concluimos até então que $g(v) = 3$. Seja z o vizinho de v que não pertence ao caminho P . Note que vz é uma aresta-de-corte em G . Logo, $g(z) = 2$; pois $g(v) = 3$ e já demonstramos que não existe aresta-de-corte em G que incide em dois vértices de grau pelo menos 3. Portanto, temos que G é isomorfo a um dos casos ilustrados na Figura 4.8.

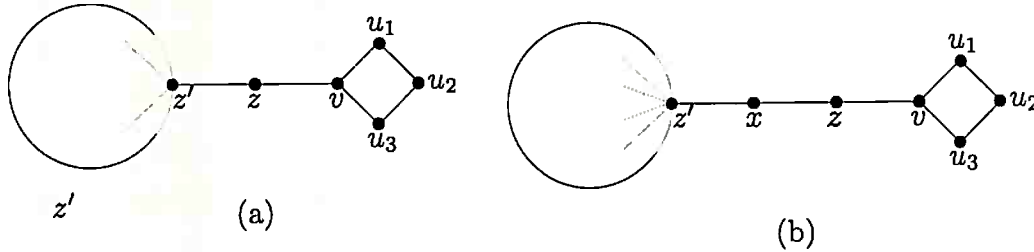


Figura 4.8: Em ambos os casos temos que $g(z') \geq 3$.

Suponha que G seja isomorfo ao grafo da Figura 4.8 (a). Seja $H = G - z - v - u_1 - u_2 - u_3$. Denotemos por n_H o número de vértices de H . Note que H é um grafo conexo. Como $g(z') \geq 3$, então $\delta(H) \geq 2$. Suponha que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}n_H$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de H . É fácil ver que $D_H \cup \{v, u_2\}$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos que

$$\gamma(G) \leq \gamma(H) + 2 \leq \frac{2}{5}n_H + 2 = \frac{2}{5}(n - 5) + 2 = \frac{2}{5}n,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\gamma(H) > \frac{2}{5}n_H$. Se $n_H \geq 8$, então contraria a escolha de G . Logo, $n_H \leq 7$. Do Lema 4.4 segue que $H \in \mathcal{B}$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de $H - z'$. Da Proposição 4.7, temos que $|D_H| \leq \gamma(H) - 1$. Da Proposição 4.5, temos que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}(n_H + 1)$; então temos que $|D_H| \leq \frac{2}{5}(n_H + 1) - 1 = \frac{2}{5}(n - 4) - 1$. É fácil verificar que $D_H \cup \{z, u_2\}$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos que $\gamma(G) \leq |D_H| + 2 \leq \frac{2}{5}(n - 4) + 1 \leq \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo. Portanto, temos que G é isomorfo ao grafo da Figura 4.8 (b).

Seja $H = G - x - z - v - u_1 - u_2 - u_3$. Denotemos por n_H o número de vértices de H . Temos que H é um grafo conexo e $\delta(H) \geq 2$. Suponha que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}n_H$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de H . É fácil verificar que $D_H \cup \{z, u_2\}$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos que $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n_H + 2 \leq \frac{2}{5}(n - 6) + 2 \leq \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo. Portanto, temos que $\gamma(H) > \frac{2}{5}n_H$. Então $H \in \mathcal{B}$. Da Proposição 4.8 segue que $\gamma(H + z'x) \leq \frac{2}{5}(n_H + 1)$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de $H + z'x$. É fácil ver que $D_H \cup \{v, u_2\}$ é um conjunto dominante de G . Logo,

$$\gamma(G) \leq |D_H| + 2 \leq \frac{2}{5}(n_H + 1) + 2 = \frac{2}{5}(n - 5) + 2 = \frac{2}{5}n,$$

o que é um absurdo. Portanto, temos que $v \neq w$.

Suponha que $vw \notin E(G)$. Seja $H = G - u_1 - u_2 - u_3 + vw$. Denotemos por n_H o número de vértices de H . Note que H é conexo, $\delta(H) \geq 2$ e $n_H < n$. A Figura 4.9 ilustra a construção de H . Suponha que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}n_H$. Seja D_H um conjunto dominante

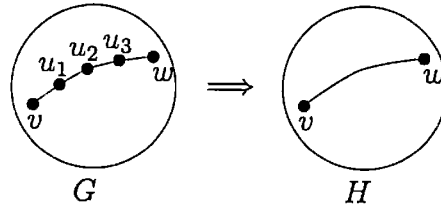


Figura 4.9: Construção do grafo H .

mínimo de H . Suponha que $v \in D_H$. É fácil verificar que $D_H \cup \{u_3\}$ é um conjunto dominante de G . Logo, temos que $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n_H + 1 = \frac{2}{5}(n - 3) + 1 = \frac{2}{5}n - \frac{1}{5}$, o que é absurdo. Suponha que $w \in D_H$. Usando o mesmo raciocínio do caso anterior é possível chegar em um absurdo. Portanto, temos que nem v e nem w pertencem ao conjunto D_H . É fácil ver que $D_H \cup \{u_2\}$ é um conjunto dominante de G . Neste caso,

$$\gamma(G) \leq \gamma(H) + 1 \leq \frac{2}{5}n - \frac{1}{5},$$

o que é um absurdo. Portanto, temos que $\gamma(H) > \frac{2}{5}n_H$. Se $n_H \geq 8$, então H é um contra-exemplo menor que G . Então temos que $n_H \leq 7$, e pela Proposição 4.6 segue que $H \in \mathcal{B}$. Da Proposição 4.6 temos que existe um conjunto dominante mínimo de H , digamos D_H , que contém v . Claramente, $D_H \cup \{u_3\}$ é um conjunto dominante de G . Como $n \geq 8$, então $n_H = 7$ e $\gamma(H) = 3$. Com isso, temos que $n = 10$. Logo, podemos

afirmar que $\gamma(G) = \gamma(H) + 1 = 4 = \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo. Portanto, temos que $vw \in E(G)$.

Suponha que $g(v) = 2$. Como G é conexo, segue que é um circuito de comprimento n . Então $\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Como $n \geq 8$, então $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo. Portanto, temos que $g(v) \geq 3$. Seja $H = G - vw + u_1w$. Denotemos por n_H o número de vértices de H . Note que H é conexo, $\delta(H) \geq 2$ e $n = n_H$. A Figura 4.10 ilustra a construção de H . Já demonstramos, até este momento, que não existe um contra-exemplo, para o teo-

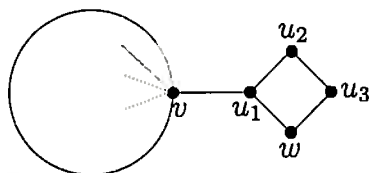


Figura 4.10: Construção do grafo H .

rema, que possui um C_4 como subgrafo, conectado por uma aresta-de-corte. Portanto, temos que H não é um contra-exemplo para o teorema. Logo, temos que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}n$. Seja D_H um conjunto dominante de H . É fácil verificar que D_H também é um conjunto dominante de G . Daí conclui-se que $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo. Portanto, concluímos que não existe nenhum caminho em G de comprimento pelo menos 3, tal que seus vértices tenham grau exatamente 2.

Sejam $A = \{u : u \in V(G) \text{ e } g(u) \geq 3\}$, $B = \{u : u \in V(G) \text{ e } g(u) = 2 \text{ e } N(u) \subset A\}$ e $C = (V(G) \setminus A) \setminus B$ subconjuntos dos vértices de G . A Figura 4.11 ilustra essa partição dos vértices de G . É fácil verificar que A é um conjunto dominante de G . Como $\gamma(G) >$

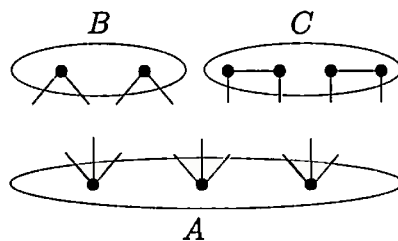


Figura 4.11: Essa figura ilustra uma partição dos vértices de G

$\frac{2}{5}n$, então temos que $|A| > \frac{2}{5}n$. Como $g(u) \geq 3$, para $u \in A$, então temos que o número

de arestas que possuem uma das pontas em A é pelo menos $3|A|$. Por outro lado, temos também que este número é no máximo $2|B| + |C|$. Portanto, temos que $2|B| + |C| \geq 3|A|$. Como $|A| > \frac{2}{5}n$, então $2|B| + |C| \geq 3\frac{2}{5}n$. Dividindo ambos os lados da inequação por 2, temos que $|B| + \frac{1}{2}|C| \geq \frac{3}{5}n$. Como $|B| + |C| \geq |B| + \frac{1}{2}|C|$, então $|B| + |C| \geq \frac{3}{5}n$. Isto implica que $|A| \leq \frac{2}{5}n$. O que é um absurdo, pois A é um conjunto dominante de G e $\gamma(G) > \frac{2}{5}n$.

Concluimos assim que a suposição da existência de um contra-exemplo para o teorema fornece sempre um absurdo. Dessa forma, fica completa a prova do teorema. \square

Do Teorema 4.9 podemos tirar os seguintes corolários.

Corolário 4.10: *Seja G um grafo conexo com n vértices e $\delta(G) \geq 2$. Se $n = 5k$, onde $k \geq 1$, então para todo $v \in V(G)$ temos que existe um conjunto $\frac{2}{5}$ -dominante que contém v .*

Corolário 4.11: *Seja G um grafo conexo com n vértices e $\delta(G) \geq 2$. Se $n = 5k + 3$, onde $k \geq 0$, então para todo $v \in V(G)$ temos que existe um conjunto $\frac{2}{5}$ -dominante que contém v .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja G um grafo conexo com n vértices, tal que $n = 5k + 3$, onde $k \geq 0$, $\delta(G) \geq 2$ e $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n$. Seja v um vértice de G . Considere H um grafo construído da seguinte forma: $V(H) = V(G) \setminus \{v\}$ e $E(H) = E(G - v) \cup \{wz : wz \notin E(G) \text{ e } vz \in E(G)\}$, onde w é um vizinho de v em G . Denotemos por n_H o número de vértices de H . Como $n = 5k + 3$, então $n_H = n - 1 = 5k + 2$. Suponha que $\gamma(H) > \frac{2}{5}n_H$. Do Lema 4.4, temos que $H \in \mathcal{B}$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de $H - w$. Seja $D = D_H \cup \{v\}$. Temos que D é um conjunto dominante de G , pois os vértices de D_H dominam os vértices de $V(G) \setminus \{v, w\}$ e v domina w . Da Proposição 4.7 temos que $|D_H| = \gamma(H) - 1$. Da Proposição 4.5 temos que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}(n_H + 1)$. Logo, temos que $|D_H| \leq \frac{2}{5}(n_H + 1) - 1$. Daí concluímos que $|D| \leq \frac{2}{5}(n_H + 1) = \frac{2}{5}n$. Portanto, temos que existe um conjunto $\frac{2}{5}$ -dominante de G que contém v .

Agora, suponha que $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}n_H$. Como $\gamma(H) \in \mathbb{N}$, então $\gamma(H) \leq \frac{2}{5}(n_H - 2)$. Seja D_H um conjunto dominante mínimo de H . Considere $D = D_H \cup \{v\}$. Como $|D| \leq \frac{2}{5}(n_H - 2) + 1 = \frac{2}{5}(n - 3) + 1 = \frac{2}{5}n - \frac{1}{5}$, então temos que existe um conjunto $\frac{2}{5}$ -dominante de G que contém v . O que finaliza nossa demonstração. \square

Os resultados dos Corolários 4.10 e 4.11 não podem ser estendidos para grafos com n vértices onde $n = 5k + r$, onde $k \geq 1$ e $r \in \{1, 2, 4\}$.

REED [1996], restringindo o estudo aos grafos com grau mínimo pelo menos 3, cunhou o limitante, Teorema 4.12, de três oitavos do número de vértices do grafo. A idéia principal da demonstração de REED é a seguinte. Seja G um grafo conexo, onde $\gamma(G) \geq 3$. Denotamos por uma *cdv*-cobertura de G , uma cobertura dos vértices de G por caminhos disjuntos nos vértices. Seja P um caminho em G . Denotamos por $\|P\|$ o número de vértices de P . Sejam S uma *cdv*-cobertura de G , e $S_i = \{P \in S : \|P\| = 3k + i \text{ e } k \geq 0\}$, para $i = 1, 2, 3$. Escolhamos S tal que

- (1) $2|S_1| + |S_2|$ é minimizado.
- (2) Sujeito a restrição (1), $|S_2|$ é minimizado.
- (3) Sujeito a restrição (2), $\sum_{P \in S_0} \|P\|$ é minimizado.
- (4) Sujeito a restrição (3), $\sum_{P \in S_1} \|P\|$ é minimizado.

Chamemos de i -caminho, um caminho P de G tal que $\|P\| = 3k + i$, onde $k \geq 0$ e $0 \leq i \leq 2$. O conjunto $\frac{3}{8}$ -dominante de G é construindo escolhendo todo terceiro vértice dos caminhos de S . Entretanto, alguns vértices das pontas de 1-caminhos e 2-caminhos serão dominados por vértices de outros caminhos de S . Com isso, será possível dominar estes caminhos com menos vértices do que colocá-los no conjunto dominante.

Teorema 4.12 (REED [1996])

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com $\delta(G) \geq 3$, então $\gamma(G) \leq \frac{3}{8}n$.

HAYNES [1998] tendo observado os resultados dos Teoremas 4.9 e 4.12, conjecturou que se G é um grafo, onde $\delta(G) \geq k$, então $\gamma(G) \leq \frac{k}{3k-1}n$. CARO, RODITTY [1985, 1990], Teorema 4.15, demonstraram que a conjectura é verdadeira para $k \geq 7$. Faltavam então investigar a conjectura para $k \in \{4, 5, 6\}$. Para tanto, a demonstração feita por REED para o Teorema 4.12 trouxe para o âmbito das demonstrações de limitantes superiores, do número de dominação de grafos, a técnica de cobertura do grafo por caminhos disjuntos nos vértices. A importância da mesma ficou evidente nos resultados que apareceram anos após sua publicação. SOHN, XUDONG [2009] e XING, SUN, CHEN [2006],

fizeram uso desta técnica para demonstrar que grafo com grau mínimo pelo menos 4 e 5, respectivamente, possuem um limitante para o número de dominação de $4/11$ e $5/14$ do número de vértices do grafo, respectivamente. A conjectura continua em aberto para $k = 6$.

Teorema 4.13 (SOHN, XUDONG [2009])

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com $\delta(G) \geq 4$, então $\gamma(G) \leq \frac{4}{11}n$.

Teorema 4.14 (XING, SUN, CHEN [2006])

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com $\delta(G) \geq 5$, então $\gamma(G) \leq \frac{5}{14}n$.

Teorema 4.15 (CARO, RODITTY [1985, 1990])

Seja G um grafo. Denotemos por δ o grau mínimo de G . Então

$$\gamma(G) \leq n \left[1 - \delta \left(\frac{1}{\delta + 1} \right)^{1 + \frac{1}{\delta}} \right].$$

4.3 Caracterizações de grafos baseados em limites superiores

O próximo teorema caracteriza a classe de grafos para os quais a desigualdade no Teorema 4.2 é satisfeita com igualdade. O resultado, que segue abaixo, foi obtido independentemente por PAYAN E XUONG [1982] e FINK, JACOBSON, KINCH E ROBERTS [1985]. Tal resultado faz uso do conceito de corona de dois grafos.

A *corona* de dois grafos G_1 e G_2 , que foi definido por FRUCHT E HARARY [1970], é um grafo $G = G_1 \circ G_2$, que consiste de uma cópia do grafo G_1 e $|V(G_1)|$ cópias do grafo G_2 , sendo que cada vértice da cópia do grafo G_1 é adjacente a todos os vértices de uma cópia do grafo G_2 (veja um exemplo dessa construção na Figura 4.12).

Teorema 4.16 (PAYAN E XUONG [1982] – FINK, JACOBSON, KINCH E ROBERTS [1985])

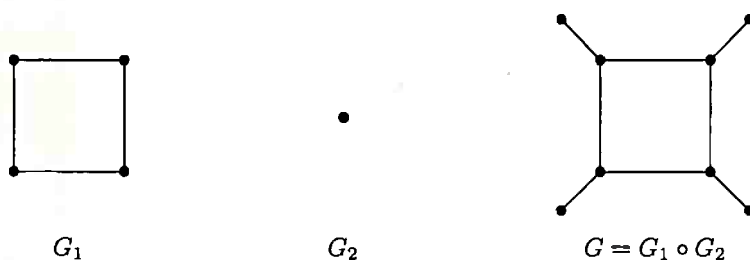


Figura 4.12: Corona de dois grafos G_1 e G_2 .

Seja G um grafo com n vértices, n par, e sem vértices isolados. Denotemos por n o número de vértices de G . Então $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ se e somente se as componentes de G são circuitos C_4 ou a corona $H \circ K_1$ para algum grafo H .

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices, n par, e sem vértices isolados. Suponha, sem perda de generalidade, que G é conexo. Note que se G não for conexo, então poderemos aplicar a mesma linha de raciocínio para cada componente e assim obter uma demonstração para esse caso.

Suponha que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. Demonstraremos então que $G = C_4$ ou $G = H \circ K_1$ para algum grafo H . Se G é um C_4 então não temos o que provar. Portanto, suponhamos que G não seja um C_4 . Do Corolário 3.5, segue que G possui um emparelhamento perfeito, digamos M . Construíamos um conjunto S formado por um vértice de cada aresta de M . É fácil verificar que S é um conjunto dominante de G . Como $|M| = \frac{n}{2}$, então $|S| = \frac{n}{2} = \gamma(G)$. Logo, temos que S é um conjunto dominante mínimo de G .

Seja uv uma aresta de M . Suponha que $g(u) \geq 2$ e $g(v) \geq 2$. Sejam $w \in N(u) \setminus \{v\}$ e $z \in N(v) \setminus \{u\}$. Suponha que $w = z$. Seja x um vértice de G tal que $wx \in M$. A Figura 4.13 (a) ilustra o caso que estamos analisando. Seja $S' = (S \setminus \{u, v, w, x\}) \cup \{w\}$. Temos que $|S'| = |S| - 1$, e w é adjacente a u, v e x . Cada uma das outras arestas de M possuem uma de suas pontas em S' . Logo, temos que S' é um conjunto dominante de G . Mas isto é um absurdo, pois S é um conjunto dominante mínimo e $|S'| < |S|$. Portanto, temos que $w \neq z$.

Suponha que $wz \in M$. Como G não é um circuito C_4 então existe pelo menos outra aresta em M . Seja $xy \in M$ tal que $xy \neq uv \neq wz$. Suponha, sem perda de generalidade, que $wx \in E$. A Figura 4.13 (b) ilustra este caso. Seja $S' = (S \setminus \{u, v, w, z, x, y\}) \cup \{x, v\}$.

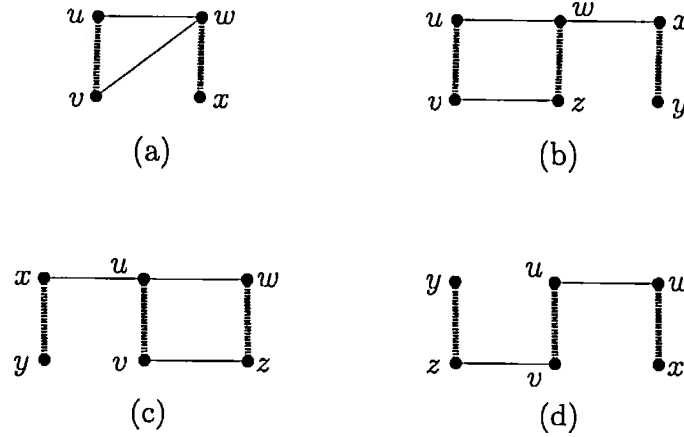


Figura 4.13: Ilustrações dos casos da demonstração do Teorema 4.16

Temos que $|S'| = |S| - 1$, e x domina y e w , e v domina u e z . Cada uma das outras arestas de M possuem uma de suas pontas em S' . Logo, temos que S' é um conjunto dominante de G , o que é um absurdo. Com um raciocínio idêntico podemos chegar num absurdo no caso em que $ux \in E$ (ilustrado na Figura 4.13 (c)). Das análises feitas destes casos concluímos que $wz \notin M$.

Seja $S' = (S \setminus \{u, v, w, x, y, z\}) \cup \{z, w\}$. A Figura 4.13 (d) ilustra o caso que estamos tratando. É fácil ver que $|S'| = |S| - 1$, e que além disso temos que S' é um conjunto dominante de G . Como isso é um absurdo, podemos concluir que para toda aresta uv de M , temos que $g(u) = 1$ ou $g(v) = 1$. Seja $U = \{v \in V : g(v) = 1\}$. Considere $H = G[V \setminus U]$. Então o grafo $H \circ K_1$ é isomorfo ao grafo G . Isto finaliza a nossa demonstração de que se $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ e $G \neq C_4$, então temos que G é isomorfo ao grafo $H \circ K_1$, para algum grafo H .

Reciprocamente, suponha que G é isomorfo ao grafo $H \circ K_1$, para algum grafo H . Da construção de $H \circ K_1$ temos que $n = 2|V(H)|$. Um conjunto dominante mínimo de G precisa necessariamente dominar todos os vértices de grau 1 em G , então segue que precisamos de pelo menos $\frac{n}{2}$ vértices para dominar G . O conjunto dos vértices de H formam um conjunto dominante de G . Com exatamente $\frac{n}{2}$ vértices. Portanto, este é um conjunto dominante mínimo de G , donde segue que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. \square

A caracterização dos grafos G com n vértices no qual $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ foi feita por BAOGEN, COKAYNE, HAYNES E HEDETNIEMI [2000], e independentemente por RANDE-RATH E VOLKMANN [1998]. Não apresentaremos esta caracterização nesta dissertação.

O próximo lema caracteriza os grafos que atendem o limitante com igualdade e não possuem aresta-de-corte. Demonstraremos que apenas os grafos da Família \mathcal{A} , ilustrada na Figura 4.14, atende com igualdade o resultado anterior quando o grafo em questão não tem aresta-de-corte.

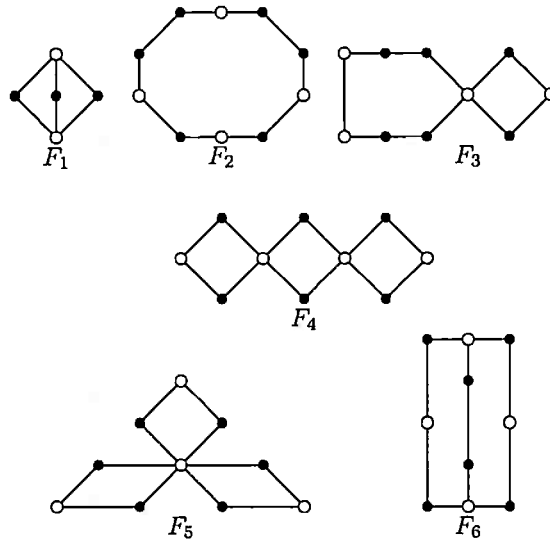


Figura 4.14: Família de grafos \mathcal{A} . Os vértice destacados em branco formam conjuntos dominantes mínimos nos respectivos grafos.

Proposição 4.17: *Seja G um grafo com n vértices. Se $G \in \mathcal{A}$ então $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos dividir esta demonstração em seis casos.

Caso 1: $G \cong F_1$. Neste caso, ilustrado pela Figura 4.15 (a), é fácil verificar que não existe em G um conjunto dominante de cardinalidade 1, já que não existe nenhum vértice de grau 4. No entanto, os dois vértices de grau 3 formam um conjunto dominante e portanto $\gamma(G) = 2 = \frac{2}{5}n$.

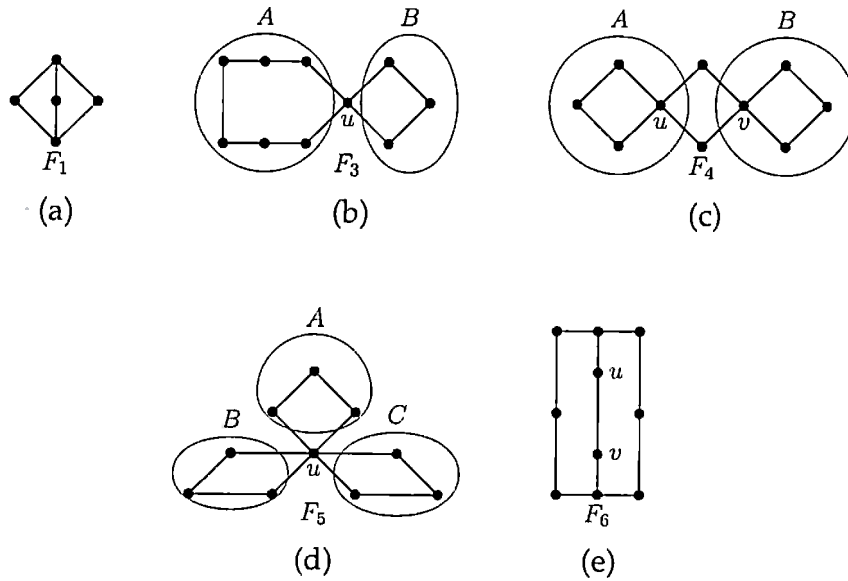


Figura 4.15: Ilustração das construções feitas nos casos da demonstração da Proposição 4.17.

Caso 2: $G \cong F_2$. Pela Proposição 4.3, temos que $\gamma(F_2) = \lceil \frac{10}{3} \rceil = 4 = \frac{2}{5}n$.

Caso 3: $G \cong F_3$. Seja S um conjunto dominante de G . Suponha, por absurdo, que $|S| < \frac{2}{5}n = 4$. Seja u um vértice de G , e sejam A e B subconjuntos de V como ilustrados na Figura 4.15 (b). Se $u \in S$ então temos que pelo menos um vértice de B pertence a S ; e dos seis vértices do conjunto A pelo menos dois estão em S . Portanto, temos que $|S| \geq 4$, o que contraria a hipótese. Agora, se $u \notin S$, então u é dominado por um dos vértices de B , ou por algum vértice de A . A primeira opção contraria a hipótese, pois teríamos $|A \cap S| \geq 2$ e $|B \cap S| \geq 2$ e com isso $|S| \geq 4$. Então u é dominado por um vértice de A . Neste caso, temos que $|B \cap S| = 1$ e $|A \cap S| \geq 3$, o que contraria a hipótese. Logo, temos que $|S| \geq 4$. Como a Figura 4.14 exibe um conjunto dominante em F_3 com 4 vértices (em branco) e $|S| \geq 4$, segue que $\gamma(G) = 4 = \frac{2}{5}n$.

Caso 3: $G \cong F_4$. Sejam u e v vértices de G , e A e B subconjuntos de V como ilustrados na Figura 4.15 (c). Seja S um conjunto dominante mínimo de G .

Vamos analisar alguns casos sobre os vértices de S :

1. Se $u, v \in S$, então temos que os vértices que não estão em A e nem em B não estão em S , pois eles já são dominados por u e v ; com isso temos que S

- possui dois vértices de A e dois vértices de B ; portanto, segue que $|S| = 4$.
2. Se $u \in S$ e $v \notin S$, então temos que S possui dois vértices de A . Se v é dominado por um vértice que não pertence a B , então apenas um vértice de B pertence a S ; com isso, temos que $|S| = 4$. Agora, se v é dominado por um vértice de B , então temos que dois vértices de B pertencem a S ; portanto, $|S| = 4$. Logo, neste caso, temos que $|S| = 4$.
 3. Se $u, v \notin S$, então os dois vértices de $V \setminus \{A \cup B\}$ pertencem a S . Logo, temos que um vértice de A e um vértice de B , também, pertencem a S . Portanto, temos que $|S| = 4$.

Dessa forma, se $G \cong F_4$ então $\gamma(G) = 4 = \frac{2}{5}n$.

Caso 5: $G \cong F_5$. Seja u um vértice de G , e sejam A, B e C subconjuntos de V como ilustrados na Figura 4.15 (d). Seja S um conjunto dominante mínimo de G . Então temos que $|S \cap A| \geq 1$, $|S \cap B| \geq 1$ e $|S \cap C| \geq 1$. Se estas inequações são satisfeitas com igualdade, então $u \in S$. Caso contrário, apenas um dos três conjuntos possui dois de seus vértices em S . Portanto, $|S| = \gamma(G) = 4 = \frac{2}{5}n$.

Caso 6: $G \cong F_6$. Sejam u e v vértices de G como ilustrados na Figura 4.15 (e). Seja S um conjunto dominante mínimo de G . Vamos analisar alguns casos sobre os vértices de S . Se $u, v \in S$, então $G \setminus \{N[u] \cup N[v]\}$ é uma união de dois caminhos de comprimento 3. Claramente cada caminho pode ser dominado por apenas um vértice. Portanto, neste caso, temos que $|S| = 4$. Se $u \in S$ e $v \notin S$, então temos que $G \setminus N[u]$ é um caminho de comprimento 7; e pelo Corolário ??, segue que 3 vértices dominam este caminho. Portanto, neste caso, temos que $|S| = 4$. Agora, se $u, v \notin S$, então o vizinho de u , digamos de u' , e o vizinho de v , digamos de v' , ambos de grau 3 em G pertencem a S . Além disso, os dois vértices que não são dominados por u' e v' também pertencem a S . Portanto, neste caso, $|S| = 4$. Logo, temos que $\gamma(G) = \frac{2}{5}n = 4$. \square

Proposição 4.18: *Seja $G \in \mathcal{A}$ e $u \in V(G)$.*

- (a) *Se $G \cong F_1$ e $g(u) = 3$, então $\gamma(G - u) = \gamma(G) - 1$.*
- (b) *Se $G \in (\mathcal{A} \setminus F_1)$, então $\gamma(G - u) = \gamma(G) - 1$.*

A demonstração da Proposição 4.18 é exaustiva em análises de casos e não possui nenhuma técnica interessante. Por este motivo não faremos-a nessa dissertação.

Entretanto, usaremos este resultado adiante.

Lema 4.19: *Seja G um grafo conexo com n vértices, onde $\delta(G) \geq 2$, $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$ e G é aresta-minimal respeitando a conexidade, grau mínimo e cardinalidade do conjunto dominante mínimo. Se G não possui aresta-de-corte então $G \in (\mathcal{A} \cup C_5)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que o lema é falso. Seja $G = (V, E)$ um contra-exemplo com o menor número de vértices. Denotemos por n o número de vértices de G . Seja uv uma aresta de G . Suponha que $g(u) \geq 3$ e $g(v) \geq 3$. Como G não tem aresta-de-corte, então $G - uv$ é conexo e tem grau mínimo pelo menos 2. É evidente que $\gamma(G - uv) \geq \gamma(G)$. Do Teorema 4.9, segue que $\gamma(G - uv) \leq \frac{2}{5}n$. Logo, é possível concluir que $\gamma(G - uv) = \frac{2}{5}n$. O que é um absurdo, pois G é um contra-exemplo aresta-minimal respeitando conexidade, grau mínimo e número de dominação. Portanto, temos que para toda aresta uv de G segue que $g(u) = 2$ ou $g(v) = 2$.

Se G é isomorfo ao grafo F_2 ou ao C_5 então não temos o que provar. Dessa forma, consideremos que G não é isomorfo ao grafo F_2 e nem ao C_5 . Suponha que G é um circuito de comprimento n . Fazendo uma verificação exaustiva podemos constatar que $n \geq 10$. Como G não é isomorfo ao grafo F_2 , então temos que $n \geq 11$. Da Proposição 4.3, segue que $\gamma(G) \leq \lceil \frac{1}{3}n \rceil$. O que é um absurdo, pois $\lceil \frac{1}{3}n \rceil < \frac{2}{5}n$ para todo $n \geq 11$ e sabemos que $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Portanto, podemos considerar que G não é um circuito. Isto é, existe pelo menos um vértice de G que possui grau pelo menos 3.

Suponha que existe um tal caminho $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, formado apenas por vértices de grau 2 em G , onde $k \geq 3$. Denotemos por u o vizinho de v_1 diferente de v_2 , e por w o vizinho de v_k diferente de v_{k-1} . Analisaremos os seguintes casos quanto ao comprimento do caminho P : (a) $k \geq 5$; (b) $k = 4$ e (c) $k = 3$. Em todos os casos conseguiremos implicações que levam a contradições. Daí concluiremos que $k \leq 2$.

Caso 1: $k \leq 5$. Suponha que $u = w$. A Figura 4.16 ilustra o caso que estamos estudando. Como G não possui aresta-de-corte, então temos que $g(u) \geq 4$. Considere o grafo $G' = G - P$. Do grau de u em G , temos que $\delta(G') \geq 2$. Além disso, é fácil ver que G é conexo e é aresta-minimal em consideração a conexidade, grau mínimo e número de dominação; caso contrário teríamos uma contradição na escolha de G . Se $\gamma(G') < \frac{2}{5}n$ implicaria que $\gamma(G) < \frac{2}{5}n$, o que é um absurdo. Logo, temos que $\gamma(G') \geq \frac{2}{5}n$. Do

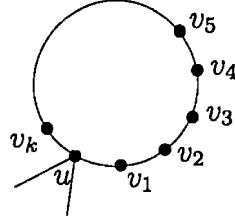


Figura 4.16: Ilustração do caso (1) quando $u = w$.

Teorema 4.9, segue que $\gamma(G') \leq \frac{2}{5}n$. Daí concluímos que $\gamma(G') = \frac{2}{5}n$. O que contraria a escolha de G . Portanto, temos que $u \neq w$.

Suponha que $uw \in E$. Como G não possui aresta-de-corte, então temos que $g(u) \geq 4$. Seja $G' = G - v_3 - v_4 - v_5 + v_2w$. Denotemos por n' o número de vértices de G' . É fácil verificar que $\delta(G') \geq 2$ e G' é conexo e aresta-minimal. Suponha que $\gamma(G') < \frac{2}{5}n - 1$. Seja D' um conjunto dominante mínimo de G' . Como $D' \cup \{v_4\}$ é um conjunto dominante de G , então temos que $\gamma(G) < \frac{2}{5}n$. O que é um absurdo, pois $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Portanto, temos que $\gamma(G') \geq \frac{2}{5}n - 1 = \frac{2}{5}n' + \frac{1}{5}$. Do Teorema 4.9 segue que $G' \in \mathcal{B}$. Com G é aresta-minimal e n é um número divisível por 5, então G' só pode ser isomorfo ao H_1 , ou H_6 . Se G' for isomorfo ao H_1 , então G é isomorfo ao F_2 . Se G' for isomorfo ao H_6 , então G é isomorfo ao F_3 . Com isso finalizamos as análises para este caso.

Agora, consideremos que $uw \notin E$. Seja $G' = G - P + uw$. Novamente, temos que G' é conexo, $\delta(G') \geq 2$ e G' é aresta-minimal em consideração a conexidade, grau mínimo e número de dominação. Suponha que $\gamma(G') < \frac{2}{5}(n - 5)$. Seja D' um conjunto dominante mínimo de G' . Suponha, sem perda de generalidade, que $u \in D'$. Então $D' \cup \{v_3, v_5\}$ é um conjunto dominante de G , e possui cardinalidade $|D'| + 2$. Daí temos que $\gamma(G) < \frac{2}{5}(n - 5) + 2 = \frac{2}{5}n$. O que é um absurdo, pois $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Portanto, consideremos que $u \notin D'$. Então $D' \cup \{v_2, v_4\}$ é um conjunto dominante de G . O que é um absurdo, pois $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Portanto, temos que $\gamma(G') = \frac{2}{5}n$. O que é um absurdo, pois contraria a escolha de G como contra-exemplo com menor número de vértices. Portanto, este caso não é possível.

Caso 2: $k = 4$. Considere $G' = G - P$. Denotemos por n' o número de vértices de G' . Se $u \neq w$, então das análises feitas no caso (1) podemos supor que $g(u) \geq 3$ e $g(v) \geq 3$. Sabemos que não existem arestas entre vértices de grau pelo menos 3. Logo, temos

que $uv \notin E$. Daí podemos concluir que $g(u) \geq 4$ e $g(v) \geq 4$. Como G não tem aresta-de-corte então temos que G' é conexo. Do grau de u e v em G , temos que $\delta(G') \geq 2$. Agora, se $u = w$, então como G não tem aresta-de-corte, segue que $g(u) \geq 4$ e $\delta(G') \geq 2$. Portanto, temos que G' é conexo e $\delta(G') \geq 2$ em ambos os casos. Se $\gamma(G') < \frac{2}{5}n - 2$, então $\gamma(G) < \frac{2}{5}n$ o que é um absurdo. Logo, temos que $\gamma(G') \geq \frac{2}{5}n - 1 = \frac{2}{5}n' + \frac{3}{5}$. Pelo Teorema 4.9, segue que $G' \in \mathcal{B}$. Se $n' = 4$ ou $n' = 7$, então temos que n não é um múltiplo de 5. O que é um absurdo pois $\gamma(G)$ é um número inteiro e o $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Portanto, segue que o caso (2) não ocorre.

Caso 3: $k = 3$. Suponha que $u \neq w$. Seja $G' = G - P$. Denotemos por n' o número de vértices de G' . Temos que G' é conexo, $\delta(G') \geq 2$ e é aresta-minimal em consideração ao grau mínimo, conexidade e número de dominação. É evidente que

$$\gamma(G') = \gamma(G) - 1 = \frac{2}{5}(n' + 3) - 1 = \frac{2}{5}n' + \frac{1}{5}.$$

Do Teorema 4.9 segue que $G' \in \mathcal{B}$. Se $n' = 4$, então $n = 7$ o que é um absurdo. Logo, temos que $n' = 7$. Se G' é isomorfo ao H_1 , então G é um dos grafos ilustrados na

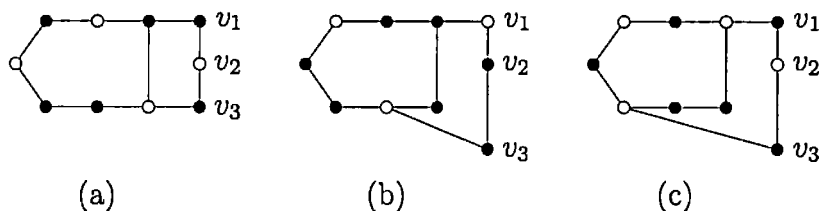


Figura 4.17: Ilustração do caso (3). Os vértices em branco formam um conjunto dominante mínimo nos respectivos grafos.

Figura 4.17. Se G é o grafo da Figura 4.17 (a), então G não é aresta-minimal, o que é um absurdo. Se G é o grafo da Figura 4.17 (b), então $\gamma(G) < \frac{2}{5}n$. Então G é o grafo da Figura 4.17 (c) que é isomorfo ao grafo F_6 . Agora, se G' é isomorfo ao H_6 , então G é um dos grafos ilustrados na Figura 4.18. Se G é um dos grafos das Figuras 4.18 (a)–(c), então G não é aresta-minimal, o que é um absurdo; e se G é um dos grafos das Figuras 4.18 (d)–(g), então $\gamma(G) < \frac{2}{5}n$.

Dessa forma, consideremos que $u = w$. Seja $G' = G - P$. Denotemos por n' o

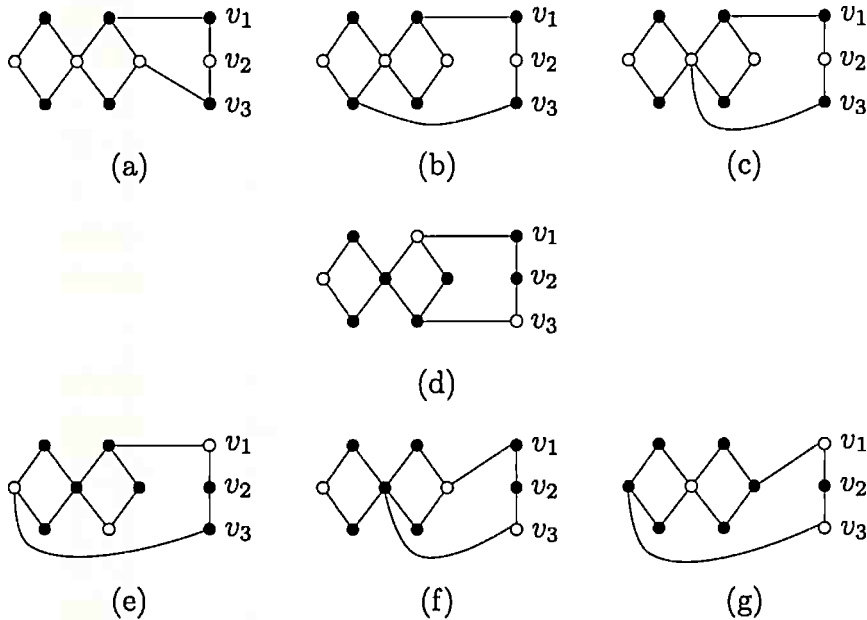


Figura 4.18: Ilustração do caso (3) quando $u \neq w$. Os vértices em branco formam um conjunto dominante mínimo nos respectivos grafos.

número de vértices de G' . É fácil ver que G' é conexo, $\delta(G') \geq 2$ (pois $g(u) \geq 4$) e G' é aresta-minimal em consideração ao grau mínimo, conexidade e número de dominação de G' . Além disso, temos que $\gamma(G') = \gamma(G) - 1 = \frac{2}{5}n' + \frac{1}{5}$. Logo, do Teorema 4.9 segue que $G' \in \mathcal{B}$. Se $n' = 4$ então chegamos em uma contradição, pois n é um múltiplo de 5. Se G' for isomorfo ao grafo H_1 , então temos que G é isomorfo ao grafo F_3 . Se G' for isomorfo ao grafo H_6 , então temos que G é um dos grafos da Figura 4.19. Se G é o grafo da Figura 4.19 (a), então G é isomorfo ao grafo F_4 . Se G é o grafo da Figura 4.19 (b), então G não é aresta-minimal, o que é um absurdo; e se G é o grafo da Figura 4.19 (c), então G é isomorfo ao grafo F_5 .

Caso (4): $k \leq 2$. A Figura 4.20 ilustra como é o grafo G neste caso. Sejam $A = \{v \in V : g(v) \geq 3\}$, e $B = V \setminus A$. Denotemos por $a = |A|$ e $b = |B|$. Note que A é um conjunto

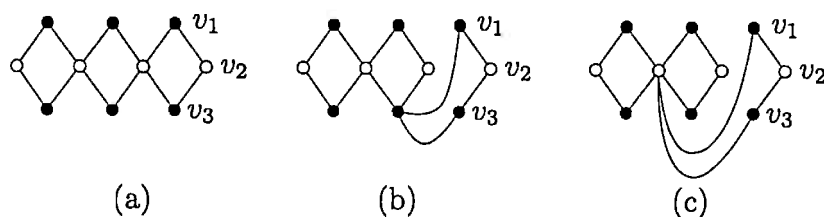


Figura 4.19: Ilustração do caso (c) quando $u = w$. Os vértices em branco formam um conjunto dominante mínimo nos respectivos grafos.

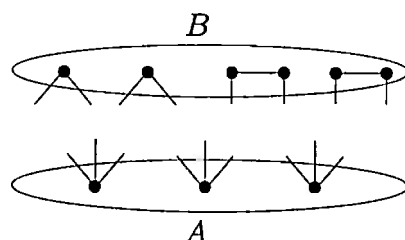


Figura 4.20: Ilustração do caso (4).

dominante de G . Suponha que $3a < 2b$. Como $b = n - a$, então temos que

$$\begin{aligned}
 a &< \frac{2}{3}(n - a) \\
 a + \frac{2}{3}a &< \frac{2}{3}n \\
 \frac{5}{3}a &< \frac{2}{3}n \\
 5a &< 2n \\
 a &< \frac{2}{5}n.
 \end{aligned}$$

O que é um absurdo pois $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Portanto, temos que $a = \frac{2}{5}n$. Daí segue que toda aresta de G incide em um vértice de grau 3 e outro de grau 2. Suponha que existem vértices, digamos u e v , em G tais que $|N(u) \cap N(v)| \geq 2$. Se $n = 5$, então $|N(u) \cap N(v)| = 3$ e G é isomorfo ao grafo F_1 . Se $n = 10$, então temos que G é um $K_{4,6}$; e com isso temos que $\gamma(G) = 3$, o que é um absurdo pois $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Logo, consideremos que $n \geq 15$ e $|N(u) \cap N(v)| = 2$. Sejam w e z vizinhos de u e v , respectivamente, tais que $w \neq z$. Sejam x o vizinho de w diferente de u , e y o vizinho de z diferente

de v . Um dos grafos ilustrados na Figura 4.21 como subgrafo em G . Em ambos os

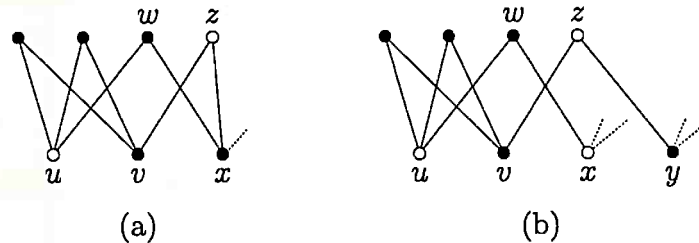


Figura 4.21: Ilustração do caso (4) quando $|N(u) \cap N(v)| = 2$.

casos é evidente que podemos construir um conjunto dominante menor do que $\frac{2}{5}n$. Os vértices destacados em branco exibem uma escolha que podemos fazer para que isto seja possível. O que é um absurdo, pois $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Portanto, segue que para todo par u e v de vértices em A , $|N(u) \cap N(v)| \leq 1$. Como G é conexo, então existe pelo menos um par de vértices de A que possuem um vizinho em B . Chamemos de u e v tais vértices. Seja w o vizinho em comum de u e v . Seja $D = (A \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$. Temos que $|D| = |A| - 1$. Além disso, temos que D é um conjunto dominante de G , pois todos os vértices de B , exceto w , são dominados pelos vértices de $A \setminus \{u, v\}$, e os vértices u e v são dominados por w . Com isso podemos concluir que $\gamma(G) \leq |D|$; o que é um absurdo pois $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. Das análises feitas, chegamos a conclusão de que este caso não ocorre.

Das análises feitas levando em consideração o tamanho da caminho P , concluímos que não existem caminhos em G compostos por vértices de grau 2. O que é um absurdo, pois também não existem arestas entre vértices de grau pelo menos 3. Portanto, não existe um contra-exemplo para o teorema. O que finaliza nossa demonstração. \square

Caracterizamos, até aqui, os grafos que não possuem aresta-de-corte e atendem com igualdade o Teorema 4.9. O próximo teorema tem como objetivo caracterizar uma família de grafos que possuam aresta-de-corte e atendem com igualdade ao limitante. Para tanto, faremos da seguinte forma: definiremos uma família de grafos conexos \mathcal{F}_* , onde cada grafo possui grau mínimo pelo menos 2, número de dominação no máximo $2/5$ da ordem do grafo, e é aresta-minimal em consideração a conexidade, grau mínimo e número de dominação; em seguida, demonstraremos que se um grafo atende todas

estas restrições e possui aresta-de-corte então o mesmo pertence a esta família. Com isso concluiremos que se G é um grafo com n vértices, e $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$, e G é aresta-minimal respeitando conexidade, grau mínimo e número de dominação, então $G \in \mathcal{F}_* \cup \mathcal{A}$.

Denotemos por *unidade* os grafos exibidos na Figura 4.22. Os grafos isomorfos aos grafos exibidos nas Figuras 4.22 (a) e (b) serão chamados de *unidades do tipo 1* e *unidades do tipo 2*, respectivamente. Uma constatação inicial quanto aos tipos de unidades é que ambos necessitam de exatamente dois vértices para serem dominadas. A demonstração dessa constatação é trivial, pois basta verificar que não é possível dominar nenhuma das unidades com somente um vértice.

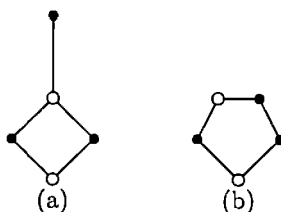


Figura 4.22: (a) Unidade do tipo 1 e (b) unidade do tipo 2. Os vértices em branco constituem um conjunto dominante mínimo de suas respectivas unidades.

Considere uma coleção, denotada por \mathcal{F} , de todos os grafos G construídos com p cópias do grafo T_1 , q cópias do grafo T_2 , onde $p, q \in \mathbb{N}$, chamadas de unidades de G , e um conjunto de arestas J com as seguintes propriedades (a Figura 4.23 ilustra um grafo construído dessa forma):

- (1) cada aresta de J é uma ponte em G , e
- (2) se $uv \in J$ então u e v satisfazem uma das duas restrições:
 - (a) é um vértice pendente em uma unidade do tipo 1, ou
 - (b) é um vértice de uma unidade do tipo 2, tal que, nenhum de seus vizinhos na mesma unidade é extremo de uma aresta de J .

Os extremos de uma aresta de J são chamados de *vértices de contato*. Um vértice de G é chamado de *externo* se satisfaz as restrições 2a ou 2b. Os vértices que não são vértices de contato e nem vértices externos são chamados de *vértices internos*.

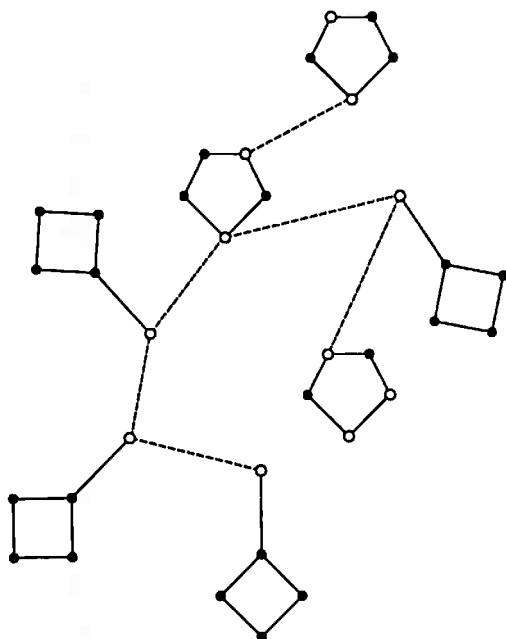


Figura 4.23: Um grafo da Família \mathcal{F} . As arestas pontilhadas são arestas de J e os vértices brancos são vértices externos.

Considere a família de grafos $\mathcal{F}_* = \{G \in \mathcal{F} : G \text{ é conexo e } \delta(G) \geq 2\}$. Antes de demonstrarmos que todo grafo (que possui aresta-de-corte) que atende o limítante, com igualdade, estabelecido pelo Teorema 4.9 pertence à essa família de grafos, estudaremos algumas propriedades dos grafos de \mathcal{F}_* que serão de grande valia mais a diante.

Lema 4.20 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja $G \in \mathcal{F}_*$ um grafo com n vértices. Então $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G \in \mathcal{F}_*$ um grafo com n vértices. Primeiramente, vamos demonstrar que $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n$. Temos que G é união de unidades do tipo 1 e unidades

de tipo 2. É fácil verificar que cada unidade de G pode ser dominada com pelo menos 2 vértices. Dessa forma, segue que existe um conjunto dominante com no máximo $\frac{2}{5}n$ vértices. Agora, vamos demonstrar que $\gamma(G) \geq \frac{2}{5}n$. Seja S um conjunto dominante mínimo de G . Seja C_1 uma unidade do tipo 1 de G . É imediato que pelo menos dois vértices de C_1 pertencem a S . Seja C_2 uma unidade do tipo 2 de G . Pela construção de G , temos que no máximo dois vértices de C_2 pode ter vizinhos em outras componentes; e tais vértices não podem ser vizinhos em C_2 . Independentemente, se estes vértices são dominados por vértices de outras unidades de G , precisamos de pelo menos dois vértices para dominar a unidade C_2 . Portanto, temos que as unidades do tipo 2 de G são dominadas por pelo menos dois vértices de S . Logo, temos que $\gamma(G) \geq \frac{2}{5}n$. Das duas inequações, segue que $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$. \square

Lema 4.21 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja $G \in \mathcal{F}_$ e u um vértice de G , então G tem um conjunto dominante mínimo que contém u .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $G \in \mathcal{F}_*$ e u um vértice de G . Considere S um conjunto dominante mínimo de G e u um vértice de G . Vamos mostrar que se $u \notin S$, então podemos construir um conjunto dominante mínimo que contém u . Seja U a unidade que contém u . Vamos analisar dois casos.

O primeiro caso que vamos analisar é quando U é uma unidade do tipo 1. Seja v um vértice de U tal que se u é o vértice de grau 1 em U então v é o vértice de U que está à distância 3 de u em U ; se u tem grau 3 em U então v é um vértice de grau 2 em U ; se u tem grau 2 em U então v é o vértice de grau 3 em U . Pela escolha de v temos que u e v dominam U . Logo, $(S \setminus V(U)) \cup \{u, v\}$ é um conjunto dominante mínimo de G que contém u .

Agora, vamos analisar o caso em que U é uma unidade do tipo 2. Seja v um vértice que não é vizinho de u em U . Então todo vértice de U diferente de u e v é vizinho de u ou de v . Portanto, temos que u e v dominam U . Logo, $(S \setminus V(U)) \cup \{u, v\}$ é um conjunto dominante mínimo de G que contém u . \square

Da demonstração do Lema 4.21 podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 4.22: *Seja G uma unidade do tipo 1 ou uma unidade do tipo 2 e u um vértice de G , então existe um vértice v de G tal que $\{u, v\}$ é um conjunto dominante mínimo de G .*

Fazendo uso do Corolário 4.22 é possível estender o resultado do Lema 4.21, no sentido que dado um conjunto de vértices de unidades distintas é possível determinar um conjunto dominante mínimo que os contém.

Lema 4.23 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja $G \in \mathcal{F}_$ e D um conjunto de vértices de unidades distintas de G . Então existe um conjunto dominante mínimo que contém D .*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam u_1, u_2, \dots, u_k os vértices de D . Pelo Corolário 4.22 temos que para cada vértice u_i , onde $1 \leq i \leq k$, existe um vértice v_i da mesma unidade de u_i , digamos U_i , tal que $\{u_i, v_i\}$ dominam U_i . Portanto, $D \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é um conjunto dominante mínimo. \square

Proposição 4.24: *Seja G um grafo e u, v vértices distintos de G . Temos que*

- (a) *se G é uma unidade do tipo 1, então $\gamma(G \setminus \{u, v\}) = 1$;*
- (b) *se G é uma unidade do tipo 2 e $uv \in E(G)$, então $\gamma(G \setminus \{u, v\}) = 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $G \setminus \{u, v\}$ é um P_3 , temos que $\gamma(G \setminus \{u, v\}) = 1$. \square

Lema 4.25 (MCCUAIG E SHEPHERD [1989])

Seja G e G' dois grafos disjuntos de $\mathcal{F}_ \cup \mathcal{A}$, com n e m vértices respectivamente. Seja u um vértice de G e v um vértice de G' . Se $G^+ = (G \cup G') + uv$ é aresta-minimal respeitando conexidade, grau mínimo e número de dominação de $2/5$ da ordem do grafo então $G, G' \in \mathcal{F}_*$ e u e v são vértices externos em G e G' , respectivamente.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que G e G' são grafos de \mathcal{F}_* e suponha, sem perda de generalidade, que u é um vértice interno. Seja U_u a unidade de G que contém u ,

e seja u' o vértice de contato desta unidade; se U_u é uma unidade do tipo 2, então escolhamos u' sendo um vértice de contato vizinho de u . Seja u'' o vértice vizinho de u' em outra unidade diferente de U_u . Pelo Lema 4.21 sabemos que existe um conjunto dominante mínimo, digamos S_v , de G' que contém v e existe um conjunto dominante mínimo, digamos S_u , de $G \setminus U_u$ que contém u'' . Da Proposição 4.24 temos que existe um vértice, digamos w , que domina $U_u \setminus \{u, u'\}$. Então temos que $S_v \cup S_u \cup \{w\}$ é um conjunto dominante mínimo de G^+ e $|S_v \cup S_u \cup \{w\}| < \frac{2}{5}(n + m)$. Portanto, G^+ não é aresta-minimal. Daí concluímos que se G e G' são grafos de \mathcal{F}_* , então u e v são vértices externos.

Suponha que $G' \in \{F_2, \dots, F_6\}$. É fácil ver que existe um conjunto dominante mínimo, digamos S_v , de ordem 3 que domina $G' \setminus \{v\}$. Como G possui um conjunto dominante mínimo que contém u , digamos S_u , segue que $S_u \cup S_v$ é um conjunto dominante de G^+ e $|S_u \cup S_v| < \frac{2}{5}(n + m)$. Portanto, G^+ não é aresta-minimal. Logo, temos que $G \notin \{F_2, \dots, F_6\}$.

Agora, suponha que $G' \cong F_1$ e $g_{G^+}(v) = 4$. Seja v' um vizinho de v . Seja S_u um conjunto dominante mínimo de G que contém u . Logo, $S_u \cup \{v'\}$ é um conjunto dominante de G^+ e $|S_u \cup \{v'\}| < \frac{2}{5}(n + m)$. Portanto, G^+ não é aresta-minimal.

Para finalizarmos, suponha que $G' \cong F_1$ e $g_{G^+}(v) = 3$. Então, como pode ser visto na Figura 4.24, temos que G^+ não é aresta-minimal.

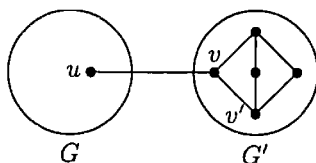


Figura 4.24: $G^+ - vv'$ é conexo e possui grau mínimo 2.

Logo, G e G' são grafos de \mathcal{F}_* e u e v são vértices externos. □

Lema 4.26: *Seja G um grafo conexo com n vértices, onde $\delta(G) \geq 2$, $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$ e G é aresta-minimal respeitando a conectividade, grau mínimo e cardinalidade do conjunto dominante mínimo. Se G possui aresta-de-corte então $G \in \mathcal{F}_*$.*

A demonstração do Lema 4.26 pode ser obtida com uma análise exaustiva de casos. Por este motivo, preferimos não adicionar tal demonstração.

Fazendo uso dos Lemas 4.19 e 4.26 podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.27: *Seja G um grafo conexo com n vértices. Se $\delta(G) \geq 2$, $\gamma(G) = \frac{2}{5}n$ e G é aresta-minimal respeitando a conexidade, grau mínimo e número de dominação, então $G \in \mathcal{A} \cup \mathcal{F}_*$.*

DEMONSTRAÇÃO: A prova é direta se fizermos o uso dos Lema 4.19 e 4.26. \square

Complexidade computacional e algoritmos

Nos capítulos anteriores, procuramos analisar o problema de conjuntos dominantes sob o ponto de vista estrutural, ou com objetivo de determinar limites para o número de dominação, com base em alguma propriedade do grafo. Neste capítulo, pretendemos mudar o foco ligeiramente. Na Seção 5.1 vamos verificar a complexidade computacional do seguinte problema de decisão: existe um conjunto dominante de um dado grafo G cuja cardinalidade é k ? Verificaremos que este é um problema NP-completo, o que nos remete a seguinte pergunta: existem casos especiais do problema que podemos resolver mais facilmente? A resposta é sim, e exibiremos dois casos especiais nas Seções 5.2 e 5.3 que possuem algoritmos lineares (na soma do número de vértices e arestas do grafo) para resolvê-los. Na Seção 5.2 exibiremos o caso quando o grafo é um disco triangulado, isto é, um grafo planar onde todas as faces são triângulos. Na Seção 5.3 trataremos o caso quando o grafo em questão é uma árvore.

5.1 Problema geral

Considere a seguinte versão de decisão do problema do conjunto dominante mínimo (veja GAREY E JOHNSON [1990])

Problema CONJUNTODOMINANTE (G, k) : *Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k , determinar se existe um conjunto dominante S de G tal que $|S| \leq k$.*

David Johnson foi o primeiro a provar o seguinte teorema conforme HAYNES, HEDETNIEMI E SLATER [1998]. No entanto, a prova que apresentaremos é baseada na prova feita por HAYNES, HEDETNIEMI E SLATER [1998].

Teorema 5.1 (JOHNSON, não publicado)

O problema CONJUNTODOMINANTE é NP-completo.

DEMONSTRAÇÃO: Para provarmos este teorema, vamos (i) demonstrar que o problema CONJUNTODOMINANTE $\in NP$, e em seguida (ii) construir uma redução do 3-SAT para este problema.

Para demonstrarmos (i), considere uma instância do problema CONJUNTODOMINANTE cuja resposta é *sim*. Então temos um grafo $G = (V, E)$, um inteiro k e um certificado que é um conjunto $S \subset V$. Claramente, dá para testar em tempo polinomial se $|S| \leq k$ e se para cada vértice u de $V \setminus S$ existe pelo menos um vizinho de u em S .

Vamos demonstrar (ii) considerando a seguinte instância do problema 3-SAT: Seja $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um conjunto de variáveis e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ um conjunto de cláusulas, onde cada cláusula $C_i = (w_1^i, w_2^i, w_3^i)$ é composta por três variáveis distintas e $w_j^i = u_l$ ou $w_j^i = \bar{u}_l$ para algum l . O objetivo é decidir se existe uma atribuição de valor *verdadeiro* ou *falso* para as variáveis de U tal que cada cláusula de \mathcal{C} seja verdadeira.

Dada essa instância do 3-SAT vamos construir uma instância (G, k) do problema CONJUNTODOMINANTE, onde G é um grafo e k é um inteiro. Considere $G = (V, E)$, onde

$$V = \{u_i, \bar{u}_i : u_i \in U\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{C_j : C_j \in \mathcal{C}\}$$

e

$$E = \bigcup_{i=1}^n \{u_i \bar{u}_i, u_i v_i, \bar{u}_i v_i\} \cup \bigcup_{C_j \in \mathcal{C}} \{w_1^j C_j, w_2^j C_j, w_3^j C_j\}.$$

Ou seja, para cada variável u_i existe em G um triângulo formado pelos vértices u_i, \bar{u}_i e v_i , e para cada cláusula C_i existem arestas do vértice correspondente C_i para os vértices correspondentes aos termos de C_i . Na Figura 5.1 apresentamos um exemplo dessa construção.

Tome $k = n$. Afirmamos que existe uma atribuição que satisfaz todas as cláusulas de \mathcal{C} se e somente se o grafo G tem um conjunto dominante S tal que $|S| \leq k$.

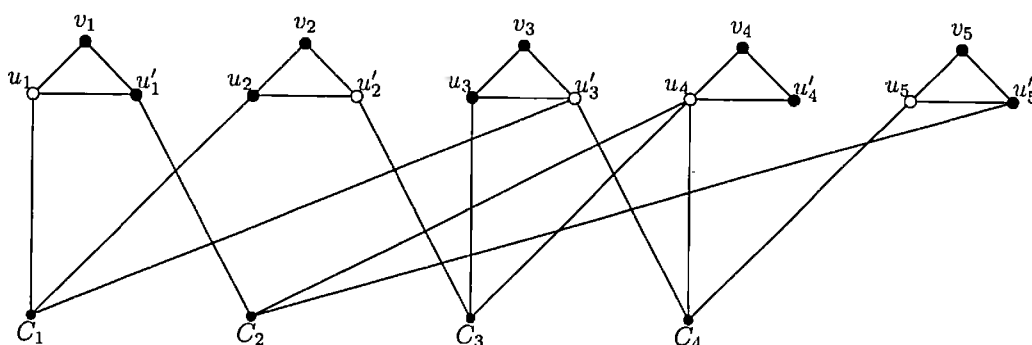


Figura 5.1: Neste exemplo exibimos um grafo G construído a partir do conjunto de variáveis $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ e do conjunto de cláusulas composto por $C_1 = (u_1, u_2, \bar{u}_3)$, $C_2 = (\bar{u}_1, u_4, \bar{u}_5)$, $C_3 = (\bar{u}_2, u_3, u_4)$ e $C_4 = (\bar{u}_3, u_4, u_5)$. Os vértices em branco correspondem às variáveis (positivas ou negadas) que receberam o valor *verdadeiro*. Essa atribuição satisfaz todas as cláusulas.

Suponha que exista uma atribuição que satisfaça todas as cláusulas de \mathcal{C} . Seja S um subconjunto de V tal que $u \in S$ se a variável correspondente a u recebem o valor *verdadeiro*. Vamos mostrar que S é um conjunto dominante. Para toda variável u_i temos que ou $u_i \in S$, ou $\bar{u}_i \in S$. Então claramente, o triângulo formado pelos vértices u_i, \bar{u}_i e v_i é dominado por S . Como todas as cláusulas são satisfeitas, segue que todo vértice C_i é adjacente a pelo menos um vértice que corresponde à alguma variável cujo valor é *verdadeiro*, e portanto tal vértice pertence a S . Logo, todo vértice C_i tem pelo menos um vizinho em S . Portanto, S é um conjunto dominante. Além disso, $|S| \leq k$.

Reciprocamente, seja S um conjunto dominante de G tal que $|S| \leq k$. Vamos mostrar que existe uma atribuição que satisfaz todas as cláusulas de \mathcal{C} . Como S é um conjunto dominante, então todo vértice v_i de G ou está em S ou possui um vizinho em S . Logo, todo triângulo de G precisa ter pelo menos um vértice em S , e como há k triângulos disjuntos, segue que, $|S| \geq k$. Como $|S| \leq k$, concluímos que $|S| = k$ e S consiste de exatamente um vértice de cada triângulo. Como S é um conjunto dominante, segue que todos os vértices correspondentes às cláusulas possuem pelo menos um vizinho em S .

Vamos construir uma atribuição para as variáveis de U , que satisfaz todas as cláusulas de \mathcal{C} , da seguinte maneira: para cada variável cujo vértice correspondente pertence a S atribua o valor *verdadeiro*, e para o restante das variáveis atribua o valor *falso*.

Como todo vértice correspondente a uma cláusula possui pelo menos um vizinho em S , por construção temos que toda cláusula de \mathcal{C} possui uma variável com valor *verdadeiro*.

Para finalizar a prova é preciso demonstrar que a construção do grafo G a partir da instância do 3-SAT pode ser feita em tempo polinomial. O tamanho da instância do 3-SAT é $O(m + n)$, e o grafo G tem $3n + m$ vértices e $3m + 3n$ arestas, e sua construção é simples. Logo, a construção de G pode ser feita em tempo polinomial no tamanho da instância do 3-SAT. \square

Sabe-se que o problema CONJUNTODOMINANTE continua NP-completo para grafos planares com grau máximo 3, e grafos planares 4-regulares (veja HAYNES, HEDET-NIEMI E SLATER [1998]).

5.2 Discos triangulados

Nesta seção estudaremos um caso especial de grafos planares para o qual exibiremos um algoritmo linear obtido por MATHESON E TARJAN [1996]. Nosso objetivo é estudar o problema de determinar um conjunto dominante de um disco triangulado. Iniciaremos com uma breve introdução de conceitos que vamos utilizar ao longo da seção. Um grafo planar é um grafo $G = (V, E)$ que pode ser desenhado no plano (\mathbb{R}^2) e possui as seguintes propriedades:

- (a) $V \subseteq \mathbb{R}^2$;
- (b) toda aresta é um arco entre dois vértices;
- (c) uma aresta não contém nenhum vértice ou outra aresta em seu interior, com exceção de seus extremos.

O conjunto $\mathbb{R} \setminus G$ é um conjunto aberto e suas regiões são chamadas de *faces* de G . É fácil ver que $\mathbb{R} \setminus G$ possui apenas uma região ilimitada; essa chamaremos de *face externa* e as outras chamaremos de *faces internas*. A *fronteira* de uma face f é o conjunto X de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^2$, tal que toda vizinhança de x encontra ambos f e $\mathbb{R}^2 \setminus f$. Denotamos por *borda* de G a fronteira, isto é, as arestas de G e vértices que unidos

separam a face externa das faces internas. Dizemos que uma face é um *triângulo* se sua fronteira corresponde a um circuito de G com 3 vértices.

Seja G um grafo com n vértices. Dizemos que G é um *disco triangulado* se G é um grafo planar onde todas as faces de G são triângulos exceto a face externa. A Figura 5.2 (a) ilustra um disco triangulado. Uma *numeração externa* dos vértices de G é uma numeração dos vértices de 1 a n , tal que para todo i , onde $3 \leq i \leq n$, o subgrafo de G induzido pelos vértices de 1 a i é um disco triangulado e todo vértice numerado com valor maior do que i está fora do disco. MATHESON E TARJAN [1996] provaram que todo disco triangulado G possui uma numeração externa dos vértices. A Figura 5.2 (b) ilustra uma numeração externa dos vértices de um disco triangulado. Os autores apresentaram uma prova construtiva deste fato, da qual é possível extrair um algoritmo linear que, dado um disco triangulado e uma face do mesmo, determina uma numeração externa dos vértices.

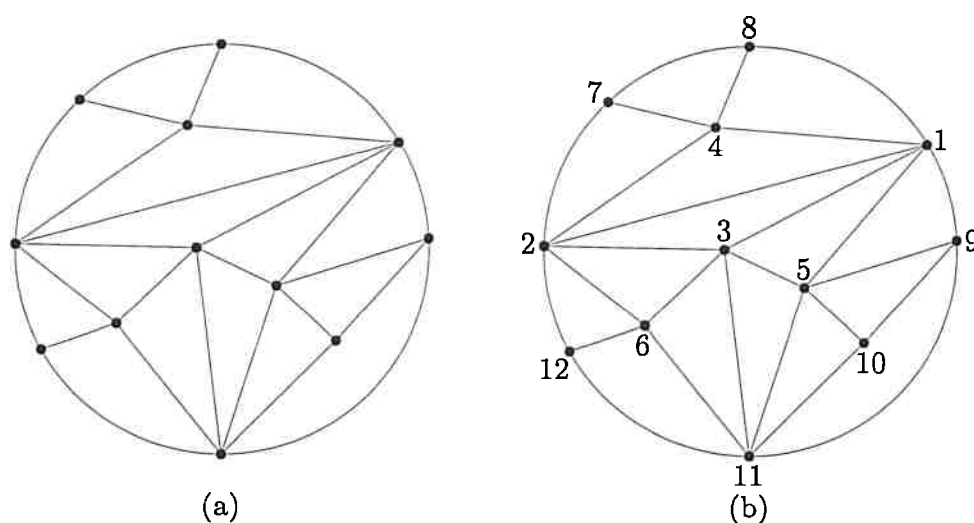


Figura 5.2: (a) Exemplo de disco triangulado; (b) Uma numeração externa dos vértices do disco triangulado (a).

Proposição 5.2: *Sejam G um disco triangulado imerso no plano e u um vértice da borda de G . Se apenas dois dos vizinhos de u pertencem à borda de G , então $G - u$ é um disco triangulado.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja G um disco triangulado imerso no plano. Seja u um vértice da borda de G tal que apenas dois dos vizinhos de u pertencem à borda de G .

Sejam x_1, x_2, \dots, x_k , os vizinhos de u ordenados em sentido horário. Como G é um disco triangulado, segue que o circuito (u, x_i, x_{i+1}, u) , onde $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, é uma face de G . Daí temos que pelo menos duas faces de G incidem em cada um dos vértices x_2, x_3, \dots, x_{k-1} . É fácil ver que se somente duas faces incidem em x_i , onde $i \in \{2, 3, \dots, k-1\}$, então x_i pertence à borda de G .

Seja $G' = G - u$. Suponha, por absurdo, que G' não é um disco triangulado. Seja f uma face de G' que não é um triângulo. Temos que f é uma face interna de G , pois ao construirmos G' não alteramos nenhuma face interna de G exceto aquelas faces que incidiam em u e que foram retiradas. Portanto, se f não é um triângulo em G' , então f não é um triângulo em G . O que é um absurdo pois G é um disco triangulado.

Portanto, segue que se G é um disco triangulado imerso no plano e u é um vértice da borda de G , onde apenas dois de seus vizinhos pertencem a borda de G , então $G - u$ é um disco triangulado. \square

Proposição 5.3: *Seja G um disco triangulado imerso no plano, com pelo menos quatro vértices. Então existe um vértice u na borda de G tal que $G - u$ é um disco triangulado.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 5.2, segue que se existe um vértice, digamos u , na borda de G , tal que apenas dois vizinhos de u pertencem à borda de G , então $G - u$ é um disco triangulado. E dessa forma, não teríamos mais nada a provar.

Suponha, por absurdo, que para todo vértice u da borda de G , temos que u possui pelo menos três vizinhos na borda de G . Denotemos por $y_u^1, y_u^2, \dots, y_u^{k(u)}$, os vizinhos de u que pertencem à borda de G . Denotemos por L_u^i e R_u^i , para todo $i \in \{1, 2, \dots, k(u)\}$, onde L_u^i é o subgrafo de G que contém os vértices u e y_u^i e todos os demais vértices que estão a esquerda da aresta uy_u^i ; e R_u^i é o subgrafo de G que contém os vértices u e y_u^i e todos vértices que estão a direita da aresta uy_u^i . A Figura 5.3 ilustra essa construção.

Seja u^* um vértice da borda de G tal que $|V(L_{u^*}^i)|$ ou $|V(R_{u^*}^j)|$ é mínimo, onde $1 \leq i, j \leq k(u^*)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $|V(L_{u^*}^l)|$ é mínimo, onde $l \in \{1, 2, \dots, k(u^*)\}$. É evidente que $L_{u^*}^l$ é um disco triangulado, caso contrário G não

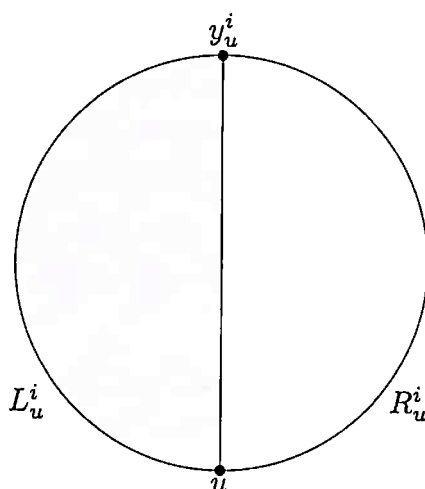


Figura 5.3: Ilustração da construção de L_u^i e R_u^i .

seria. Dessa forma, temos que $|L_u^i| \geq 3$ e que todo vértice, com exceção de u^* e $y_{u^*}^i$, da borda de L_u^i possui exatamente dois vizinhos na borda de G . Portanto, temos que existe pelo menos um vértice da borda de L_u^i que possui somente dois vizinhos na borda de L_u^i . Entretanto, tal vértice também pertence à borda de G , o que contraria a hipótese de que todo vértice da borda de G tem pelo menos três vizinhos na borda.

Portanto, se G é um disco triangulado com pelo menos quatro vértices, então existe um vértice u da borda de G tal que $G - u$ é um disco triangulado. \square

Lema 5.4: *Seja G um disco triangulado imerso no plano com n vértices. Então existe uma numeração externa dos vértices de G .*

DEMONSTRAÇÃO: Faremos uma prova por indução em n .

Se $n = 3$ é imediato que qualquer numeração dos vértices de G é uma numeração externa.

Seja G um disco triangulado imerso no plano com n vértices, onde $n \geq 3$. Pela Proposição 5.3, segue que existe um vértice u na borda de G tal que $G - u$ é um disco triangulado. Pela hipótese de indução temos que $G - u$ possui uma numeração externa de seus vértices. Considere uma numeração externa dos vértices de $G - u$. Resta numerarmos o vértice u . Como os outros vértices foram numerados de 1 a $n - 1$, podemos numerar, sem receio de criar algum conflito, o vértice u com n . Do fato de

que G é um disco triangulado imerso no plano, e que $G - u$ é um disco triangulado, segue que todos os vizinhos de u pertencem à borda de $G - u$. Logo, temos que para todo i , onde $i = 1, 2, \dots, n - 1$, o subgrafo de G induzido pelos vértices numerados de 1 a i é um disco triangulado e u está fora dele.

Portanto, a numeração exibida é uma numeração externa dos vértices de G . \square

MATHESON E TARJAN [1996] provaram que se G é um disco triangulado com n vértices, então os vértices de G podem ser particionados em três conjuntos, cada um dos quais é um conjunto dominante de G . Deste resultado, segue que $\gamma(G) \leq \frac{1}{3}n$. A Figura 5.4 ilustra um disco triangulado e uma 3-partição de seus vértices, onde cada conjunto da partição é formado pelos vértices com um mesmo rótulo.

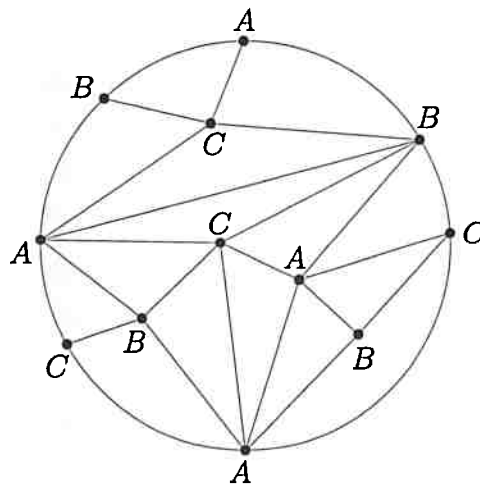


Figura 5.4: Um disco triangulado com os vértices particionados em três conjuntos dominantes; cada um deles é formado pelos vértices com um mesmo rótulo.

A prova exibida no artigo é construtiva e dela podemos extrair um algoritmo que, dado um disco triangulado G com n vértices, rotula os vértices de G com rótulos A , B e C de tal forma que os vértices com um mesmo rótulo formam um conjunto dominante de G . Descreveremos a seguir um tal algoritmo.

Algoritmo CDD(G)

Entrada: Um disco triangulado G imerso no plano com n vértices, onde $n \geq 4$.

Saída: Uma rotulação dos vértices de G , onde os vértices com um mesmo rótulo formam um conjunto dominante de G .

- 1 Considere uma numeração externa de G . Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices de G , onde v_i é o vértice cuja numeração externa é i .
- 2 rótulo(v_1) \leftarrow A , rótulo(v_2) \leftarrow B , rótulo(v_3) \leftarrow C .
- 3 para $i \leftarrow 4$ até n faça
- 4 Sejam x_1, x_2, \dots, x_k os vértices da borda de $G[\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}]$, indexados no sentido horário, que são vizinhos do vértice v_i .
- 5 se rótulo(x_1) \neq rótulo(x_k)
- 6 então rótulo(v_i) $\leftarrow r \in \{A, B, C : r \neq \text{rótulo}(x_1) \text{ e } r \neq \text{rótulo}(x_k)\}$
- 7 senão rótulo(v_i) $\leftarrow r \in \{A, B, C : r \neq \text{rótulo}(x_1) \text{ e } r \neq \text{rótulo}(x_2)\}$

PROVA DA CORREÇÃO DO ALGORITMO: Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, denotemos por G_i o subgrafo de G induzido pelos vértices v_1, v_2, \dots, v_i . A cada passagem pela linha 3, imediatamente antes da comparação de i com n , temos os seguintes invariantes:

- (a) os vértices já rotulados definem três conjuntos dominantes de G_{i-1} ;
- (b) não existem dois vértices consecutivos na borda do disco triangulado G_{i-1} com um mesmo rótulo.

Da definição de numeração externa, temos que G_3 é um disco triangulado; conseqüentemente, temos que G_3 é uma face interna de G . Portanto, antes da primeira iteração temos que os vértices rotulados definem um conjunto dominante em G_3 . Os vértices de G_3 foram rotulados com rótulos diferentes, dessa forma todo par de vértices adjacentes na borda de G_3 possuem rótulos diferentes. Portanto, temos que vale (a) e (b).

Suponha que os invariantes valem até a iteração $i - 1$. Antes da execução da linha 5 podemos afirmar que

- $k \geq 2$,
- x_1, x_2, \dots, x_k são vértices consecutivos na borda de G_{i-1} .

As afirmações (a) e (b) são verdadeiras. Isto segue da numeração externa dos vértices e do fato de que G_{i-1} é um disco triangulado.

Denotemos por $r_{i-1}(A)$, $r_{i-1}(B)$ e $r_{i-1}(C)$ os conjuntos de vértices de G_{i-1} rotulados por A , B e C , respectivamente.

Suponha que na iteração i acontece a condição da linha 5. Suponha, sem perda de generalidade, que o rótulo de x_1 é A e o rótulo de x_k é B . Então na linha 6 é atribuído a v_i o rótulo C . Considere $r_i(A) = r_{i-1}(A)$, $r_i(B) = r_{i-1}(B)$ e $r_i(C) = r_{i-1}(C) \cup \{v_i\}$. É fácil ver que $r_i(A)$ é um conjunto dominante de G_i , da mesma forma temos que $r_i(B)$ também é um conjunto dominante de G_i . Se nenhum vizinho de v_i da borda de G_{i-1} foi rotulado com C então $r_{i-1}(C)$ não é um conjunto dominante de G_i . No entanto, como v_i é o único vértice de G_i não dominado pelos vértices de $r_{i-1}(C)$, então $r_i(C)$ é um conjunto dominante em G_i . Agora, se v_i possui pelo menos um vizinho na borda de G_{i-1} cujo rótulo é C , segue que $r_{i-1}(C)$ é um conjunto dominante de G_i e é evidente que $r_i(C)$ é um conjunto dominante em G_i . Como o rótulo de v_i é diferente dos rótulos de x_1 e x_k , então segue que não existem dois vértices consecutivos na borda de G_i com um mesmo rótulo. Logo, se ocorre a condição da linha 5, então os invariantes (a) e (b) continuam valendo antes do início da próxima iteração.

Suponha que não acontece a condição da linha 5. Neste caso, os rótulos de x_1 e x_k são iguais. O invariante (b) nos garante que não existem vértices adjacentes na borda de G_{i-1} com um mesmo rótulo. Dessa forma, temos que $k \geq 3$ e o rótulo de x_1 é diferente do rótulo de x_2 . Suponha, sem perda de generalidade, que o rótulo de x_1 é A , e que o rótulo de x_2 é B . Considere $r_i(A) = r_{i-1}(A)$, $r_i(B) = r_{i-1}(B)$ e $r_i(C) = r_{i-1}(C) \cup \{v_i\}$. É fácil ver que $r_i(A)$ e $r_i(B)$ são conjuntos dominantes de G_i . Além disso, é fácil de verificar que $r_i(C)$ é um conjunto dominante de G_i . Após a atribuição do rótulo de v_i , na linha 7, temos que não existem dois vértices consecutivos na borda de G_i com um mesmo rótulo, e os vértices rotulados definem conjuntos dominantes de G_i . Portanto, no início da próxima iteração os invariantes (a) e (b) valem.

Logo, ao final do algoritmo temos que os invariantes (a) e (b) valem para $i = n + 1$. Portanto, temos que os vértices com um mesmo rótulo constituem conjuntos dominantes de G (e nenhum vértice da borda de G possui um vizinho na borda com o mesmo

rótulo). □

O consumo de tempo do algoritmo é linear no tamanho do grafo. Seja G um disco triangulado com n vértices e m arestas. Como dito anteriormente, Matheson e Tarjan construíram um algoritmo linear, no número de vértices e arestas do grafo, para determinar a numeração externa de um disco triangulado. Então o consumo da linha 1 é $O(n + m)$. A cada iteração do laço da linha 5 é possível determinar os vizinhos de v_i na borda de G_{i-1} em tempo linear no número de vizinhos de v_i . Isto é possível, pois dado uma imersão de G no plano é possível criar listas de adjacências ordenadas no sentido horário. CHIBA, NISHIZEKI, ABE E OZAWA [1985] construíram um algoritmo para resolver o problema da imersão de um grafo planar que gera tais listas. As arestas de v_i são verificadas duas vezes, ao longo de todas as iterações do laço 5. Uma delas ocorre quando o vértice está fora do disco triangulado G_{i-1} , e outra quando ele pertence ao disco triangulado. Portanto, o consumo de tempo deste laço é $O(n + m)$. Logo, o consumo de tempo do algoritmo CDD é $O(n + m)$.

Fazendo uso do algoritmo CDD podemos demonstrar o seguinte resultado.

Lema 5.5 (MATHESON E TARJAN [1996])

Seja G um disco triangulado com n vértices. Então $\gamma(G) \leq \frac{1}{3}n$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere uma rotulação dos vértices de G obtida pelo algoritmo CDD. Sejam $r(A)$, $r(B)$ e $r(C)$ conjuntos de vértices de G , cujos rótulos são A , B e C respectivamente. É fácil ver que $\min(|r(A)|, |r(B)|, |r(C)|) \leq \frac{1}{3}n$. Como cada um destes conjuntos é um conjunto dominante de G , segue que $\gamma(G) \leq \frac{1}{3}n$. □

Matheson e Tarjan conjecturaram que se G é um disco triangulado cuja a face externa de G também é um triangulo então o limite superior do número de dominação pode ser baixado para $1/4$ da ordem de G . Mas precisamente, a conjectura é a seguinte: se G é um grafo plano maximal com n vértices, então $\gamma(G) \leq \frac{n}{4}$.

5.3 Árvores

O problema de determinar um conjunto dominante mínimo em uma árvore pode ser resolvido em tempo linear no tamanho da árvore. COCKAYNE, GOODMAN E HE-

DETNIEMI [1975]. desenvolveram um algoritmo linear para este problema. Esses autores resolveram um problema, definido a seguir, que é um pouco mais geral do que determinar um conjunto dominante mínimo em uma árvore.

Dada uma árvore T , considere uma partição do conjunto de seus vértices em V_1 , V_2 e V_3 , onde V_1 são os vértices *livres*, V_2 são os vértices da *borda* e V_3 são os vértices *necessários*. Um *conjunto dominante misto* é um subconjunto W de $V(G)$ que contém todos os vértices de V_3 , domina todos os vértices de V_2 , e para todo vértice $v \in V_1$ temos que, ou v pertence ao conjunto W , ou v tem um de seus vizinhos no conjunto W . O algoritmo desenvolvido, por Cockayne e outros, determina uma partição (V_1, V_2, V_3) , dos vértices de uma árvore dada T , e um conjunto dominante misto mínimo, relativamente a (V_1, V_2, V_3) , com base na partição encontrada.

Nesta dissertação não faremos a demonstração apresentada no artigo; faremos uma demonstração que obtivemos que é mais direta, isto é, não iremos construir tal partição dos vértices para depois obter um conjunto dominante misto mínimo.

Seja T uma árvore. Seja u um vértice de T e considere T enraizada em u . Seja v um vértice de T . Chamamos de *pai*(v) o vizinho de v que pertence ao caminho que vai de v até u ; e chamamos de *filhos*(v) todos os vizinhos de v diferentes de *pai*(v).

Considere uma rotulação dos vértices de T . Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices de T tomados considerando tal rotulação. Dizemos que $V_i = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ é o subconjunto dos i primeiros vértices rotulados. Por conveniência, considere que $V_0 = \emptyset$.

Antes de descrevermos o algoritmo que determina um conjunto dominante mínimo de uma dada árvore, façamos uma descrição informal das idéias por trás de seu desenvolvimento.

Uma observação imediata é que dado um conjunto dominante mínimo, digamos D , de uma árvore enraizada T (com pelo menos três vértices), podemos substituir as folhas que estão em D , por seus respectivos pais em T . Ou seja, se u é uma folha em T e $u \in D$, então $(D \setminus \{u\}) \cup \{\text{pai}(u)\}$ também é um conjunto dominante mínimo de T . Portanto, numa etapa inicial, começamos com um conjunto vazio de vértices, digamos D' , e colocamos em D' todos os vértices que são vizinhos de folhas em T . A segunda etapa pode ser descrita da seguinte forma. Seja u um vértice de T . Denotemos por T_u a sub-árvore de T enraizada em u . Suponha que u é tal que $|V(T_u)|$ é menor possível, e T_u não é dominada por D' . Então apenas u não é dominado por D' , dessa forma

colocamos $pai(u)$ em D' ; isto é suficiente para dominar T_u . Essa é a idéia chave do algoritmo. A cada iteração garantimos que uma sub-árvore foi dominada. No término, teremos que a árvore inteira é dominada pelo conjunto que construímos ao longo das iterações. A seguir descrevemos esse processo em pseudo-código.

Algoritmo CDA (T)

Entrada: Uma árvore T com n vértices, onde $n \geq 3$.

Saída: Um conjunto dominante de T .

- 1 Seja u um vértice de T . Considere T enraizada em u ; e tome uma enumeração em pós-ordem dos vértices de T . Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices de T , onde v_i é o i -ésimo vértice da enumeração. Considere que $pai(u) = u$. A Figura 5.5
- 2 $D_0 = \emptyset$
- 3 para $i \leftarrow 1$ até n faça
- 4 se $v_i \in D_{i-1}$
- 5 então $D_i = D_{i-1}$
- 6 senão se v_i é uma folha de T
- 7 então $D_i = D_{i-1} \cup \{pai(v_i)\}$
- 8 senão se D_{i-1} é conjunto dominante de $T[V_i \cup D_{i-1}]$
- 9 então $D_i = D_{i-1}$
- 10 senão $D_i = D_{i-1} \cup \{pai(v_i)\}$
- 11 devolve D_n

Vale notar que o conjunto D_n devolvido pelo algoritmo *CDA* não contém nenhuma folha (quando $n \geq 3$) e contém todos os vértices que são pais de folhas.

A demonstração de que nosso algoritmo, encontra um conjunto dominante mínimo de uma dada árvore, será dividida em duas etapas. Primeiramente, demonstraremos, no Lema 5.6, que o algoritmo devolve um conjunto dominante. Em seguida, demonstraremos, no Teorema 5.7, que o algoritmo devolve um conjunto dominante mínimo.

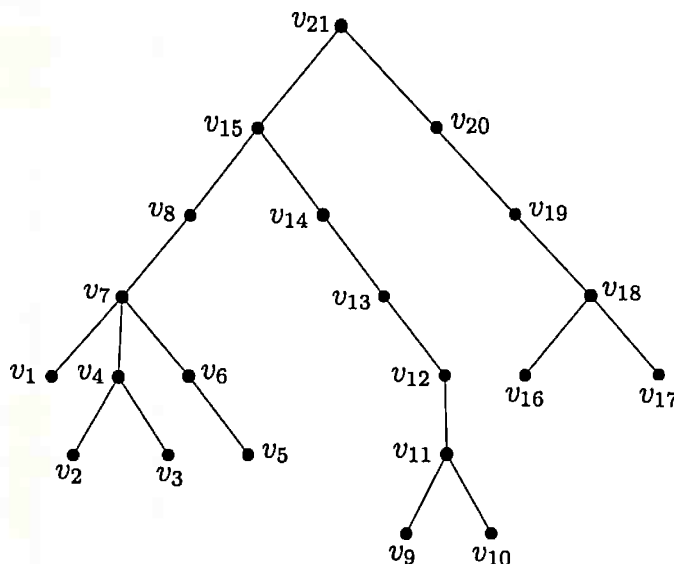


Figura 5.5: Ilustração de uma rotulação em pós-ordem.

Lema 5.6: *O algoritmo CDA devolve um conjunto dominante de uma árvore.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja T uma árvore com n vértices, $n \geq 3$, e seja D_n o conjunto devolvido pelo algoritmo CDA aplicado a T .

Vamos provar o seguinte invariante $\text{INV}(i)$: ao terminar a i -ésima iteração (linha 3), temos que D_i é um conjunto dominante de $T[V_i \cup D_i]$.

É evidente que o invariante $\text{INV}(1)$ é verdadeiro. Suponhamos que o invariante $\text{INV}(i-1)$ é verdadeiro, e provemos que $\text{INV}(i)$ é verdadeiro.

Suponha que $v_i \in D_{i-1}$. Então, na linha 5, o conjunto D_{i-1} é atribuído a D_i . Neste caso, é fácil ver que D_i é um conjunto dominante de $T[V_i \cup D_i]$.

Agora, se $v_i \notin D_{i-1}$, então sabemos apenas que D_{i-1} é um conjunto dominante de $T[V_{i-1} \cup D_{i-1}]$. Se v_i é uma folha de T , temos dois casos para analisar: (a) se $\text{pai}(v_i) \in D_{i-1}$, então v_i é dominado por D_{i-1} , e também é dominado por D_i após a atribuição da linha 7; (b) se $\text{pai}(v_i) \notin D_{i-1}$, então é fácil verificar que $D_i = D_{i-1} \cup \{\text{pai}(v_i)\}$ é um conjunto dominante de $T[V_i \cup D_i]$. Portanto, o invariante $\text{INV}(i)$ é verdadeiro..

Se v_i não é uma folha, temos dois casos para analisar. Suponha que D_{i-1} domina

$T[V_i \cup D_{i-1}]$, então após a atribuição definida na linha 9, temos que o invariante $\text{INV}(i)$ é verdadeiro. Agora, suponha que D_{i-1} não domina $T[V_i \cup D_{i-1}]$. Então só v_i não é dominado por D_{i-1} . Logo, a atribuição, definida na linha 10, garante que o invariante $\text{INV}(i)$ é verdadeiro.

Ao final da execução do laço da linha 3, temos que o invariante $\text{INV}(n)$ é verdadeiro. Portanto, temos que D_n é um conjunto dominante de $T[V_n \cup D_n]$. Ou seja, D_n é um conjunto dominante de T . \square

Teorema 5.7: *Seja T uma árvore com n vértices, onde $n \geq 3$. Então o conjunto dominante devolvido pelo algoritmo CDA é um conjunto dominante mínimo de T .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja D o conjunto dominante devolvido pelo algoritmo CDA quando a entrada é T . Escolha um conjunto dominante mínimo D^* de T tal que $|D \cap D^*|$ é máximo.

Se $|D^*| = |D|$ então não temos nada a provar, pois neste caso o conjunto D é um conjunto dominante mínimo de T . Portanto, suponha que $|D^*| < |D|$.

Considere a enumeração em pós-ordem dos vértices de T feita na linha 1 do algoritmo CDA. Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices de T , onde v_i é o i -ésimo vértice da enumeração. Sejam d_1, d_2, \dots, d_k os vértices de D , onde se $d_i = v_\ell$ e $d_j = v_m$ e $i < j$ então $\ell < m$. Sejam $d_1^*, d_2^*, \dots, d_p^*$ os vértices de D^* ordenados da mesma forma que os vértices de D . Sem perda de generalidade, podemos supor que D^* não contém nenhuma folha. Neste caso, é fácil ver que $d_1^* = d_1$. A Figura 5.6 ilustra uma árvore e possíveis conjuntos dominantes mínimos para D e D^* .

Seja k o menor inteiro tal que $d_k \neq d_k^*$. Então $k \geq 2$. Suponha que $d_k \notin D^*$. Suponha que o algoritmo selecionou d_k na linha 7. Então d_k é pai de uma folha de T . Seja w esta folha. Como $w \notin D^*$, então $d_k \in D^*$. Portanto, temos que d_k foi adicionado ao conjunto D na linha 10. Seja i a iteração na qual d_k foi adicionado ao conjunto D . Sejam v_i o i -ésimo vértice da enumeração e D_{i-1} o conjunto construído pelo algoritmo, antes de começar a iteração i . Então temos que D_{i-1} não é um conjunto dominante de $T[V_i \cup D_{i-1}]$. Isto quer dizer que nenhum dos filhos de v_i pertence ao conjunto D_{i-1} . Como todos eles precedem d_k na enumeração, então nenhum deles pertence ao

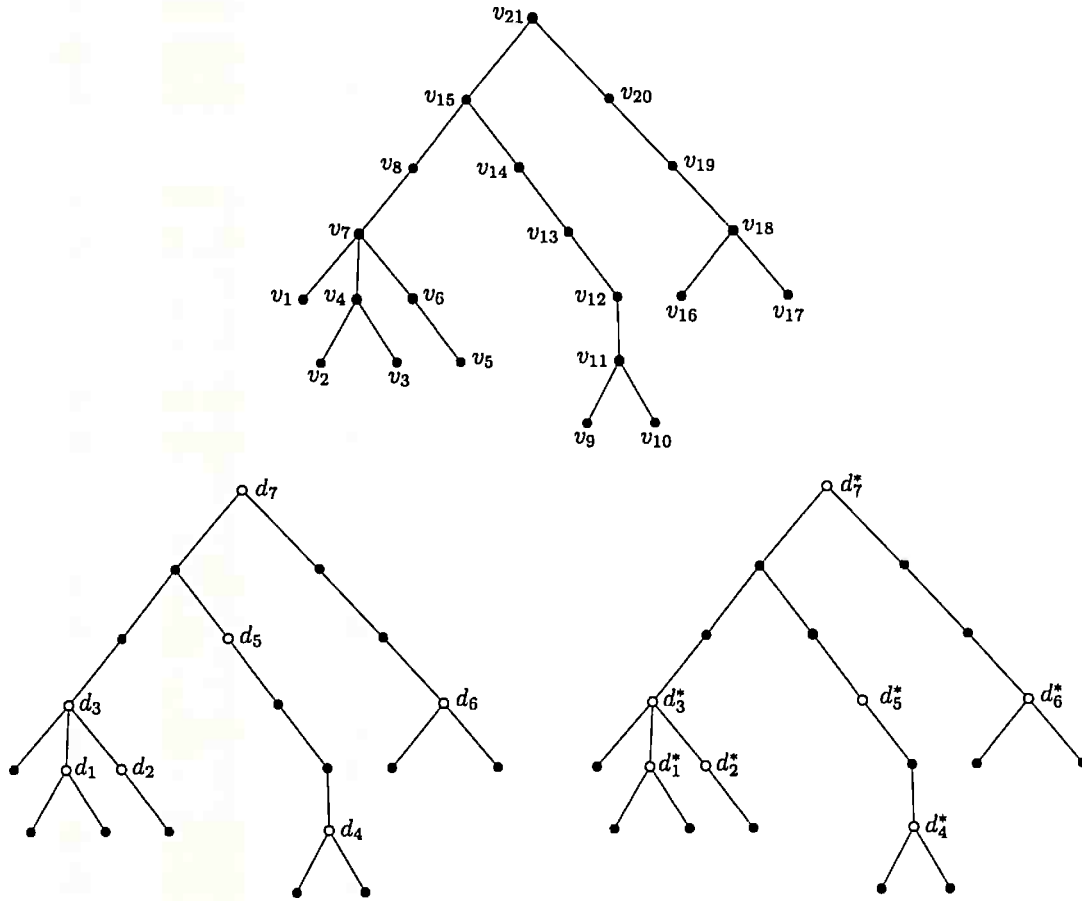


Figura 5.6: Ilustração de possíveis conjuntos D e D^* . Os vértices destacados na cor branca formam os conjuntos dominantes.

conjunto D^* . Dessa forma, temos que v_i não é dominado por D^* (já que o $\text{pai}(v_i) \notin D^*$). Mas, isto é um absurdo pois D^* é um conjunto dominante de T . Logo, temos que $d_k \in D^*$.

Seja $\tilde{D} := \{d_1^*, \dots, d_{k-1}^*\} = \{d_1, \dots, d_{k-1}\}$. Suponha que $d_k^* = v_j$ e $\text{pai}(d_k^*) = v_p$. Claramente, temos que $j < p$. Temos dois casos para analisar:

Caso 1: Suponha que \tilde{D} não seja um conjunto dominante de $T[V_j \cup \tilde{D}]$. Neste caso, na iteração j o algoritmo CDA adiciona $\text{pai}(d_k^*)$ em D . Ou seja, sabemos que no fim da iteração j , $D_j = \tilde{D} \cup \{\text{pai}(d_k^*)\}$, e D_j é um conjunto dominante de $T[V_j \cup D_j]$. Se $\text{pai}(d_k^*) \in D^*$, então $D^* \setminus \{d_k^*\}$ é um conjunto dominante de T , o que é um absurdo

(já que D^* é um conjunto dominante mínimo de T). Se $\text{pai}(d_k^*) \notin D^*$, então considere $D' := (D^* \setminus \{d_k^*\}) \cup \{\text{pai}(d_k^*)\}$. Neste caso, D' contraria a escolha de D^* , pois $|D' \cap D| > |D^* \cap D|$. Para facilitar a visualização deste último caso, o leitor pode recorrer a Figura 5.6 e imaginar que estamos na iteração onde $k = 5$ e $v_j = v_13$.

Caso 2: Suponha que \tilde{D} é um conjunto dominante de $T[V_j \cup \tilde{D}]$. Separemos este caso em dois.

Caso 2.1: Suponha que \tilde{D} seja um conjunto dominante de $T[V_j \cup \tilde{D} \cup \{\text{pai}(d_k^*)\}]$. Neste caso, como $d_k^* \notin D$, existe um vértice em \tilde{D} que domine $\text{pai}(d_k^*)$. Neste caso, $D^* \setminus \{d_k^*\}$ é um conjunto dominante de T , o que é um absurdo.

Caso 2.2: Suponha que \tilde{D} não é um conjunto dominante de $T[V_j \cup \tilde{D} \cup \{\text{pai}(d_k^*)\}]$. Para facilitar a visualização deste caso, o leitor pode usar a Figura 5.6 e imaginar que estamos na iteração onde $j = 12$. Neste caso, claramente $\text{pai}(d_k^*) \notin \tilde{D}$. Senão, teríamos que $D^* \setminus \{d_k^*\}$ seria um conjunto dominante de T . Como \tilde{D} é um conjunto dominante de $T[V_j \cup \tilde{D}]$, então $D' := (D^* \setminus \{d_k^*\}) \cup \{\text{pai}(d_k^*)\}$ é um conjunto dominante de T . Se $\text{pai}(d_k^*) \in D$, então D' contraria a escolha de D^* , pois $|D' \cap D| > |D^* \cap D|$. Se $\text{pai}(d_k^*) \notin D$, então existe um vizinho de $\text{pai}(d_k^*)$, digamos x , onde $x = v_r$, $r > j$, tal que $x \in D$. Se $x \in D^*$, então $D^* \setminus \{d_k^*\}$ é um conjunto dominante de T , o que é um absurdo. Se $x \notin D^*$, então $D' := (D^* \setminus \{d_k^*\}) \cup \{x\}$ é um conjunto dominante que contraria a escolha de D^* .

Com estas análises de caso finalizamos a nossa demonstração. Portanto, temos que D é um conjunto dominante mínimo de T . \square

Aplicações

Neste capítulo examinaremos algumas aplicações de conjuntos dominantes em problemas reais. Na seção 6.1 o problema do conjunto de representantes. Na seção 6.2 apresentaremos um problema de determinar a rota de ônibus em um quadriculado. Na seção 6.3 apresentaremos um problema de Teoria de rede social.

6.1 Conjunto de representantes

Seja $G = (V, E)$ um grafo onde os vértices representam pessoas e dois vértices são adjacentes se as duas pessoas correspondentes possuem "algo em comum". Estamos interessados em encontrar um subconjunto S de V de cardinalidade mínima, tal que para toda pessoa que não pertence a S existe uma pessoa de S que possui "algo em comum" com ela. Ou seja, queremos encontrar um conjunto dominante mínimo de G . Veja um exemplo na Figura 6.1.

Ao adicionarmos a restrição de que cada representante precisa ter "algo em comum" com pelo menos um dos outros representantes, isto é, $G[S]$ não possui vértices isolados, o problema se reduz ao problema do conjunto dominante total. Dizemos que um conjunto S é um *conjunto dominante total* se S é um conjunto dominante e $G[S]$ não tem vértices isolados. O *número de dominação total* de um grafo G é denotado por $\gamma_t(G)$. Para o grafo G indicado na Figura 6.1 temos que $\gamma(G) = 2$ e $\gamma_t(G) = 3$.

Podemos considerar uma outra versão do problema de conjunto de representan-

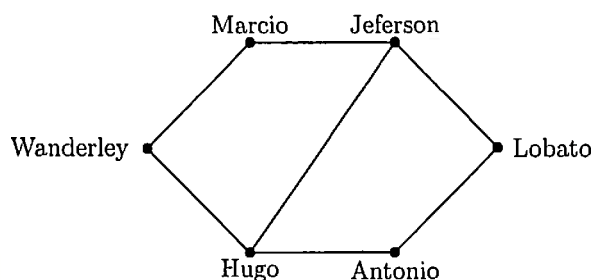


Figura 6.1: O conjunto {Wanderley, Lobato} é um conjunto dominante mínimo e o conjunto {Wanderley, Hugo, Antonio} é um conjunto dominante total mínimo.

tes. Seja $G = (V, E)$ um grafo (X, Y) -bipartido, tal que os vértices de X representam pessoas, os vértices de Y representam habilidades e um vértice u de X é adjacente a um vértice v de Y se a pessoa representada por u possui a habilidade representada por v . O problema de interesse é determinar um conjunto $S \subseteq X$ tal que todo vértice de Y é dominado por pelo menos um vértice de S . Este problema é chamado de *problema do conjunto dominante bipartido*. Na Figura 6.2 apresentamos um exemplo deste problema.

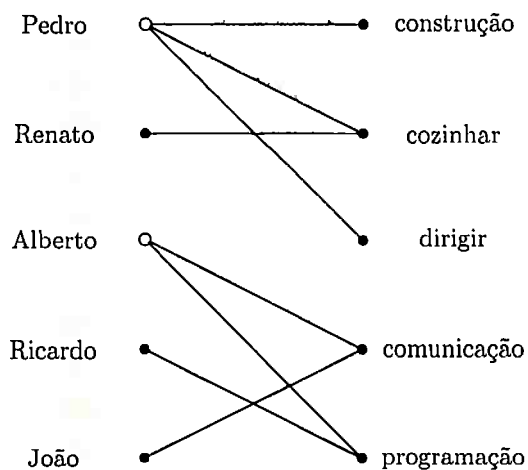


Figura 6.2: Os vértices na cor branca formam um *conjunto dominante bipartido de cardinalidade mínima*.

6.2 Rota de ônibus

Muitas empresas fornecem um sistema de transporte para seus funcionários, para transportá-los de suas casas para o trabalho e do trabalho para suas casas. Tal sistema respeita algumas regras, como por exemplo: o usuário não pode caminhar mais do que uma quadra; ou o usuário não pode se deslocar mais que 1km. Para facilitar entendimento, vamos considerar que um funcionário pode andar no máximo r quadras. Considere o grafo da Figura 6.3. O conjunto de vértices desse grafo é formado pelos pontos e as arestas um dos lados de uma quadra. Reescrevendo o problema em linguagem de grafos temos que dado um grafo, queremos encontrar uma *trilha fechada r -dominante de comprimento mínimo* tal que os vértices que não pertencem a trilha estão a no máximo r quadras da trilha (ou seja, os empregados estão a no máximo r quadras da rota do ônibus). A Figura 6.3 também destaca uma possível solução quando $r = 2$. Este problema pode ser chamado de *problema do conjunto dominante conexo*, onde queremos determinar o *número de dominação conexa*, denotado por $\gamma_c(G)$.

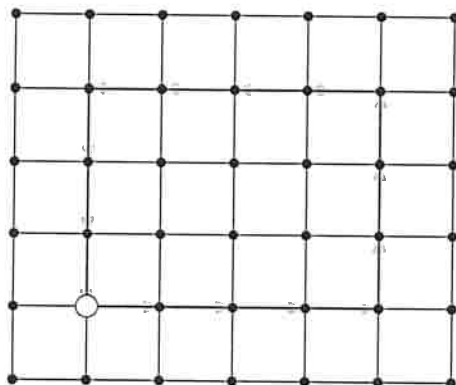


Figura 6.3: O vértice na cor branca representa a empresa e as arestas destacadas formam a rota de ônibus. A rota destacada forma uma *trilha fechada 2-dominante*.

6.3 Teoria de rede social

KELLEHER E COZZENS [1988] apresentaram um estudo sobre conjuntos dominantes em grafos de redes sociais. Uma *rede social* consiste de um conjunto de *atores* e uma

propriedade que pode ou não ocorrer entre cada par de atores. Um *grafo de rede social* consiste em um conjunto de vértices que representam os atores, e existe uma aresta entre dois se vértices e somente se a propriedade ocorre nos dois vértices.

Um *status* é um conjunto de dois ou mais vértices que dois a dois possuem a mesma vizinhança fora do status. Isto é, no grafo da rede social $G = (V, E)$, um conjunto S é um status se $|S| \geq 2$, e para todo par de vértice u, v de S temos que $N(u) \cap (V \setminus S) = N(v) \cap (V \setminus S)$, ou seja, todo par u, v de S possui os mesmos vizinhos em $V \setminus S$. Uma *clique social* é um conjunto de vértices que dois a dois possuem, ou não possuem, a mesma propriedade. Em um grafo de rede social, uma clique social é um conjunto de vértices que induz ou um grafo completo ou um conjunto independente.

Dizemos que dois vértices u, v de um grafo de uma rede social $G = (V, E)$, são *estruturalmente equivalentes* se ou $N(u) = N(v)$ ou $N[u] = N[v]$. Um conjunto $S \subseteq V$ é chamado de *conjunto estruturalmente equivalente* se todo par de vértice de S são estruturalmente equivalentes.

No grafo da Figura 6.4 temos que os conjuntos $\{a, b, d\}$ e $\{d, e\}$ são status. Os conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{a, d, e\}$ são cliques sociais do grafo. Os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{d, e\}$ são conjuntos estruturalmente equivalentes maximais.

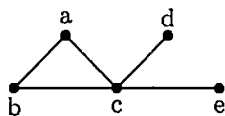


Figura 6.4: Grafo de uma rede social (KELLEHER E COZZENS [1988]).

Os teóricos de redes sociais estão interessados em encontrar todos os *conjuntos estruturalmente equivalentes maximais* e todos os *status* de uma rede social. KELLEHER E COZZENS [1988] mostraram que estes conjuntos podem ser encontrados usando propriedades de conjuntos dominantes em grafos, segue o resultado:

Teorema 6.1 (KELLEHER E COZZENS [1988])

Se S é um conjunto dominante mínimo de um grafo $G = (V, E)$ e S é um status de G , então S é um conjunto dominante independente mínimo.

Considerações finais

Nesta dissertação estudamos alguns resultados sobre conjuntos dominantes, que consideramos relevantes para um primeiro estudo sobre este assunto.

Vimos alguns resultados estruturais relativos a conjuntos dominantes minimais, exibimos alguns limites para o número de dominação baseados no grau mínimo do grafo, e caracterizamos algumas classes de grafos onde o número de dominação atinge um certo limite. Em particular, estudamos em profundidade o resultado provado por MCCUIAG E SHEPHERD [1989], segundo o qual, *se G é um grafo com n vértices e $\delta(G) \geq 2$, então $\gamma(G) \leq \frac{2}{5}n$* . Apresentamos uma prova um pouco diferente daquela apresentada por esses autores, e provamos alguns corolários que respondem à seguinte questão: *dado um grafo G com n vértices e $\delta(G) \geq 2$, é verdade que para qualquer vértice v de G existe um conjunto dominante de cardinalidade no máximo $\frac{2}{5}n$ que contém v ?*

Mostramos que o problema de encontrar um conjunto dominante mínimo é NP-difícil e exibimos algoritmos lineares para resolver esse problema para duas classes especiais de grafos: os discos triangulados e as árvores. O algoritmo que apresentamos para árvores é diferente do algoritmo encontrado na literatura. Apesar de o problema ser fácil para árvores, achamos que o algoritmo ficou interessante, particularmente pela prova de sua correção.

Estudamos outros resultados, mas alguns deles foram apenas enunciados aqui. Um destes, foi o limite de $\frac{3}{8}n$ para grafos com $\delta(G) \geq 3$, que foi provado por REED [1996]. Este resultado, em especial, se mostrou importante para estudos de limites do número de dominação, pois a técnica (cobertura do grafo por caminhos disjuntos nos vértices) usada na prova por Reed foi utilizada também por SOHN E XU-

DONG [2009] e XING, SUN E CHEN [2006], para obter limites para $\gamma(G)$ quando o grau mínimo de G é 4 ou 5.

Uma continuação natural deste trabalho seria estudar esta técnica com a mesma profundidade que estudamos o limite obtido por McCuiag e Shepherd. Possivelmente um estudo aprofundado desses resultados permitirá encontrar uma prova ou um contra-exemplo para a conjectura de HAYNES [1998]: se G é um grafo com n vértices e $\delta(G) \geq 6$, então $\gamma(G) \leq \frac{6}{17}n$.

Índice Remissivo

Árvores

filhos(v), 60

pai(v), 60

aresta pendente, 14

conjunto dominante

misto, 60

Conjunto dominante

$\gamma(G)$, 8

minimal, 8

número de dominação, 8

conjunto dominante, 7

$\Gamma(G)$, 8

$\mathcal{F}(G)$, 7

corona, 31

domina, 7

grafo da dama, 2

Grafos, 5

$G[Z]$ onde Z é um conjunto de vértices ou arestas, 6

K_n , 6

$N(u)$, 6

árvore, 7

adjacentes, 5

caminho, 7

circuito, 7

complemento, 6

componente, 7

comprimento de caminhos, 7

comprimento de circuitos, 7

conexo, 7

extremos, 5

floresta, 7

folha, 7

grafo bipartido, 6

grafo bipartido completo, 6

grafo completo, 6

grau, 6

grau mínimo, 6

incide, 5

isomorfismo, 6

isomorfos, 6

ordem, 5

pontas, 5

subgrafo, 6

subgrafo gerador, 6

subgrafo induzido, 6

tamanho, 5
vértice isolado, 6
vizinhos, 5

Grafos planares

borda, 52
face externa, 52
faces, 52
faces internas, 52
fronteira, 52
triângulo, 53

Referências Bibliográficas

- [2000] X. BAOGEN, E. J. COCKAYNE, T. W. HAYNES, S. T. HEDETNIEMI E Z. SHANG-CHAO: Extremal graphs for inequalities involving domination parameters, *Discrete Mathematics* **216** (2000), pag. 1–10.
- [1958] C. BERGE: *Theory of Graphs and its Applications*, Methuen, London, 1958.
- [1973] M. BLANK: An estimate of the external stability number of a graph without suspended vertices, *Prikl. Math. i Programirovanie Vyp* **10** (1973), pag. 3–11.
- [1985] Y. CARO E Y. RODITTY: On the vertex-independence number and star decomposition of graphs, *Ars Combin.* **20** (1985), pag. 167–180.
- [1990] Y. CARO E Y. RODITTY: A note on the k -domination number of a graph, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **13** (1990), pag. 205–206.
- [1985] N. CHIBA, T. NISHIZEKI, S. ABE E T. OZAWA: A linear algorithm for embedding planar graphs using PQ -trees, *J. Comput. System Sci.* **30** (1985), pag. 54–76.
- [1990] E. J. COCKAYNE: Chessboard domination problems, *Discrete Mathematics* **86** (1990), pag. 13–20.
- [1986] E. J. COCKAYNE, B. GAMBLE E B. SHEPHERD: Domination parameters for bishops graph, *Discrete Mathematics* **58** (1986), pag. 221–227.
- [1975] E. COCKAYNE, S. GOODMAN E S. HEDETNIEMI: A linear algorithm for the domination number of a tree, *Information Processing Letters* **24** (1975), pag. 41–44.

- [1977] E. J. COCKAYNE E S. T. HEDETNIEMI: Towards a theory of domination in graphs, *Networks* 7 (1977), pag. 247–261.
- [1986] E. J. COCKAYNE E S. T. HEDETNIEMI: On the diagonal queens domination problem, *Journal of Combinatorial Theory* 42 (1986), pag. 137–139.
- [1985] J. F. FINK, M. S. JACOBSON, L. F. KINCH E J. ROBERTS: On graphs having domination number half their order, *Periodica Mathematica Hungarica* 16 (1985), pag. 287–293.
- [1970] R. FRUCHT E F. HARARY: On the corona of two graphs, *Aequationes Mathematicae* 4 (1970), pag. 322–325.
- [1990] M. R. GAREY E D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., 1990.
- [1998] T. W. HAYNES, S. T. HEDETNIEMI E P. J. SLATER: *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker Inc, 1998.
- [1988] L. L. KELLEHER E M. B. COZZENS: Dominating sets in social networks graphs, *Mathematical Social Sciences* 16 (1988), pag. 267–279.
- [1942] M. KRAITCHIK: *Mathematical Reactions*, New York, 1942.
- [1996] L. R. MATHESON E R. E. TARJAN: Dominating sets in planar graphs, *European J. Combin.* 17 (1996), pag. 565–568.
- [1989] W. MCCUAIG E B. SHEPHERD: Domination in graphs with minimum degree two, *Graph Theory* 13 (1989), pag. 749–762.
- [1974] J. NIEMINEN: Two bounds for the domination number of a graph, *J. Inst. Math. Applics* 14 (1974), pag. 183–187.
- [1962] O. ORE: *Theory of Graphs*, American Mathematical Society Providence, 1962.
- [1982] C. PAYAN E N. H. XUONG: Domination-balanced graphs, *Journal of Graph Theory* 6 (1982), pag. 23–32.
- [1998] B. RANERATH E L. VOLKMANN: Characterization of graphs with equal domination and covering number, *Discrete Mathematics* 191 (1998), pag. 159–169.

-
- [1996] B. A. REED: Paths, stars, and the number three, *Combinatorics, Probability and Computing* 5 (1996), pag. 277–295.
- [2006] H. XING, L. SUNG E X. CHEN: Domination in graphs of minimum degree five, *Graphs Combin.* 22 (2006), pag. 127–143.
- [1964] A. M. YAGLOM E I. M. YAGLOM: *Challenging Mathematical Problems with Elementary solutions - Volume 1: Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Dover, 1964.
- [2009] M. YOUNG E Y. XUDONG: Domination in graphs of minimum degree four, *J. Korean Math. Soc.* 46 (2009), pag. 759–773.

