Geometria Esférica:
Uma proposta de introdução no
Ensino Médio a partir da
geometria na esfera

Thales Graça Athanásio

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
NO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE MATEMÁTICA

Orientadora: Professora Doutora Bárbara Corominas Valério

São Paulo

Outubro de 2019

Geometria Esférica:
Uma proposta de introdução no
Ensino Médio a partir da
geometria na esfera

Thales Graça Athanásio

Versão final (corrigida)

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 13/12/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Orientadora: Prof^a Dr^a. Barbara Corominas Valério

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Barbara Corominas Valério (presidente) – IME – USP

Prof. Dr. Armando Traldi Junior – IFSP

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva – UFABC

“Não se trata de ensinar-lhes as ciências, mas de dar-lhe gosto para amá-las e métodos para aprendê-las quando tal gosto estiver mais desenvolvido. Este é, muito certamente, um princípio fundamental de toda boa educação.”

(Emílio ou Da educação de Jean-Jacques Rousseau)

*A meus pais e minha
irmã que me deram as
condições necessárias para
mais essa conquista.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer inicialmente a meus pais, Iracema e José, e a minha irmã, Thaiane. Pessoas que sempre estiveram do meu lado e nunca mediram esforços para que eu chegasse até aqui. Sei que vocês, meus pais, passaram por privações para que nós, seus filhos, tivéssemos condições de vencer na vida. Por terem me ensinado, das mais variadas formas, que a verdadeira mudança só pode ser alcançada por meio da educação. Eu, que levo esse aprendizado em meus ensinamentos como professor, fico realizado em demonstrar a minha mais sincera gratidão.

Agradeço também aos colegas que fiz neste curso de mestrado. Pessoas com as quais pude debater sobre o curso, sobre os percalços que todos passamos para chegar à sala de aula e também com quem pude ter francas conversas sobre a nossa profissão.

Agradeço a meus professores. Todos foram fundamentais na minha formação e me sinto no dever de agradecer nominalmente a todos eles. Então obrigado a Ana Paula Jahn, Antonio Carlos Brolezzi, Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, Cristina Cerri, Elvia Mureb Sallum, Francisco Cesar Polcino Milies e Ricardo Bianconi. Professores, gostaria de dizer que foi uma honra de conhecer a todos vocês.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer a Barbara Corominas Valério, que desde a época em que eu fazia graduação no IME já foi minha professora por diversas vezes e depois se tornou minha orientadora. Agradeço por todas as dicas, broncas e compreensões. Desde uma ideia ambiciosa, mas não prática, até a lapidação e consolidação desta tese. Obrigado por toda a força que me deu.

Resumo

Este trabalho teve como objetivo analisar possibilidades e desafios de inserir conceitos e procedimento de geometria na esfera, para que fosse introduzida a geometria esférica para alunos do ensino médio a partir da fala de um grupo de professores. Foi realizado um estudo qualitativo do tipo pesquisa-ação, pois o pesquisador exerceu o papel de elaborador de uma sequência de atividades e a desenvolveu com o grupo de professores. O estudo foi desenvolvido em dois diferentes momentos, sendo um caracterizado como estudo piloto com seis professores e outro com vinte. Ao final do estudo é possível afirmar que os problemas de geometria na esfera propostos possibilitaram desafiar os professores na busca de novos conhecimentos, uma vez que alguns não estavam familiarizados com aqueles conceitos. Ainda assim, após a apresentação, vários professores se mostraram receptivos em levar para sala de aula situações semelhantes e mostraram que há vantagens substanciais em introduzir isso aos alunos. Nenhum professor disse haver desvantagens em se falar disso em sala de aula, ainda que alguns consideraram que os problemas são difíceis para os alunos. Percebe-se, no entanto, que esses professores foram os que tiveram mais dificuldades em resolver as questões.

Com isso, acredito ter entendido alguns dos reveses que fazem esse tópico não ser abordado em sala de aula, mas mostro que é possível introduzir esse assunto em sala de aula.

Palavras-Chave:

Geometria não euclidiana, Geometria Esférica, Geometria da Terra

Abstract

This work aimed to analyze possibilities and challenges of inserting concepts and procedure of geometry in the sphere, so that spherical geometry was introduced for high school students from the speech of a group of teachers. A qualitative action research study was conducted, as the researcher played the role of elaborator of a sequence of activities and developed it with the group of teachers. The study was developed in two different moments, one characterized as a pilot study with six teachers and another with twenty. At the end of the study it is possible to state that the proposed geometry problems in the sphere made it possible to challenge teachers in the search for new knowledge, since some were not familiar with those concepts. Still, after the presentation, several teachers were receptive to bring similar situations into the classroom and showed that there are substantial advantages in introducing this to students. No teacher said there were disadvantages to talking about this in the classroom, although some thought the problems were difficult for students. However, it is noticed that these teachers had more difficulties in solving those questions.

With this, I believe I have understood some of the setbacks that make this topic not addressed in the classroom, but I show that it is possible to introduce this subject in the classroom.

Keywords

Non-Euclidian Geometry, Spherical Geometry, Globe's Geometry.

Ilustrações

Figura 1 - Plano não corta a superfície.....	25
Figura 2 - Plano tangente à superfície.....	26
Figura 3 - Plano secante à superfície	26
Figura 4 – Plano perpendicular ao raio OT	28
Figura 5 – Plano tangente a esfera, demonstração por absurdo	29
Figura 6 - Plano secante a esfera.....	30
Figura 7 - Globo terrestre: meridianos	32
Figura 8 - Globo terrestre: Linha do Equador e paralelos	32
Figura 9 – Retas _E	34
Figura 10 - Ilustração de que não existem retas _E paralelas	35
Figura 11 - Linha do Equador e Meridiano de Greenwich	36
Figura 12 - Planos que contém a Linha de Equador e o Meridiano de Greenwich	37
Figura 13 – Um triângulo _E	37
Figura 14 – Um triângulo triretângulo _E	38
Figura 15 - Definição de latitude e longitude	41
Figura 16 - Ilustração Brasília-Moscú.....	42
Figura 17 - Computadores de Bordo.....	44
Figura 18 - G1: Desaparecimento do voo AF 447.....	45
Figura 19 - Brasília-Lusaka	46
Figura 20 – Questão da FUVEST	52
Figura 21 - Questão da UFF	53
Figura 22 - Questão da UNICAMP.....	55
Figura 23 - Questão VUNESP.....	56
Figura 24 - Questão UFF	57
Figura 25 - Questão FUVEST	58
Figura 26 – Rascunho de um professor	59

Figura 27 - Resposta I dada por vestibulandos.....	60
Figura 28 - Resposta II dada por vestibulandos	60
Figura 29 - Globo utilizado nos encontros	68
Figura 30 - Distância entre P e A.....	75
Figura 31 - Distância entre P e A, com coordenadas.....	76
Figura 32 - Planisfério com pontos P, A e S - Visão I.....	79
Figura 33 - Planisfério com pontos P, A e S - Visão II	79
Figura 34 - Ilustração da distância de A até S	80
Figura 35 - Distância de A até S, com coordenadas	83
Figura 36 - Ilustração de A a S pela circunferência máxima	87
Figura 37 - Circunferência euclidiana e esférica	98
Figura 38 - Ângulo entre planos	128
Figura 39 - Ângulo entre retas	129
Figura 40 - Resolução questão VUNESP.....	137
Figura 41 - Resolução FUVEST 2018 Imagem I	139
Figura 42 - Resolução FUVEST 2018 Imagem II	140

Todas as imagens realizadas no Geogebra foram criadas para esta dissertação.

As figuras 7 e 8 foram obtidas em <http://www.globos.com.br/lib/site/utilizacao-de-globos/> (Visualizado 11/2017)

As figuras 9, 12 e 13 foram retiradas de LÉNÁRT, 1996

A Figura 17 - Computadores de Bordo foi extraída de <http://www.melhoresdestinos.com.br/como-e-voar-com-a-air-europa.html> (Visualizado 10/2017)

A Figura 18 - G1: Desaparecimento do voo AF 447 foi extraída de <http://g1.globo.com/Noticias/Mundo/0,,MUL1177998-5602,00->

<AVIAO+FRANCES+DEIXA+DACAR+PARA+PARTICIPAR+NAS+BUSCA+S+DIZ+AIR+FRANCE.html> (Visualizado 10/2017)

A Figura 30 - Distância entre P e A foi feita no *Google Maps*:
<https://www.google.com.br/maps/place/40%C2%B000'00.0%22N+116%C2%B030'00.0%22E/@5.73313,96.9180148,3.04z/data=!4m5!3m4!1s0x0:0x0!8m2!3d40!4d116.5>

A Figura 35 - Distância de A até S, com coordenadas foi produzida no site
<https://pt.distance.to/-23.4,+116.5/+40,+116.5>

As figuras: Figura 32 - Planisfério com pontos P, A e S - Visão I e Figura 33 - Planisfério com pontos P, A e S - Visão II foram feitas no *google maps*.

Sumário

1 Introdução	1
2 Justificativas	13
3 Fundamentação Metodológica	17
4 Um pouco da história.....	19
5 Introdução aos conceitos da geometria esférica	25
5.1 Alguns resultados envolvendo plano e esfera	25
5.2 Explorando um pouco mais a esfera	33
6 Sobre as implicações desse conteúdo.....	39
6.1 Sobre uma experiência pessoal.....	39
6.2 O que temos disso na sala de aula.....	47
7 Encontro com o primeiro grupo de professores.....	51
7.1 Algumas noções de geografia relativas ao tema	51
7.2 O menor caminho entre dois pontos	54
7.3 Cálculos	55
7.4 Análise do encontro com os professores.....	58
7.5 Avaliação da atividade pelos professores	61
7.6 Análise da atividade desenvolvida pelo grupo de professores.....	65
8 Encontro com o segundo grupo de professores	67
8.1 Sobre os entrevistados	67
8.2 Sobre os encontros realizados	70
8.2.1 Apresentando as coordenadas geográficas.....	70
8.2.2 Deslocando-se pelo meridiano	73
8.2.3 Deslocando-se pelo paralelo.....	78

8.2.4 Comparação entre deslocamento pelo meridiano e paralelo	82
8.2.5 O menor caminho de A até S.....	83
8.2.6 Calculando a distância pela circunferência máxima	86
8.2.7 O menor caminho entre dois pontos	92
8.2.8 Uma nova geometria	94
8.2.9 Os postulados de Euclides.....	95
8.2.10 O triângulo	101
8.3 Avaliando a atividade desenvolvida	103
9 Considerações finais.....	115
10 Anexos	121
11 Bibliografia	123
12 Apêndice I.....	127
13 Apêndice II.....	131
14 Apêndice III	133

1 Introdução

A geometria espacial, seus objetos e suas classificações, fazem parte da vida de todo e qualquer indivíduo, tanto no cotidiano quanto no âmbito escolar. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) o estudo do “Espaço e Forma” se inicia muito cedo devido à constituição de um sistema de coordenadas relativo ao próprio corpo da criança:

É a fase chamada egocêntrica, no sentido de que, para se orientar, a criança é incapaz de considerar qualquer outro elemento, que não o seu próprio corpo, como ponto de referência. Aos poucos, ela toma consciência de que os diferentes aspectos sob os quais os objetos se apresentam para ela são perfis de uma mesma coisa, ou seja, ela gradualmente toma consciência dos movimentos de seu próprio corpo, de seu deslocamento.

Essa capacidade de deslocar-se mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vista são condições necessárias à coordenação espacial e nesse processo está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulo e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 1998, p. 81).

Na própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC) consta que já no primeiro ano do ensino fundamental os alunos devem entrar em contato com a “Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado [...] Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico.” BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018. Desse momento em diante, segundo os documentos oficiais (vale observar que os livros didáticos nem sempre contemplam todos os conteúdos sugeridos nos documentos oficiais e tampouco a adoção de uma obra é garantia de que os conteúdos serão abordados em sala de aula), a utilização e formalização da geometria espacial, considerados os níveis de rigor, não deveria se exaurir, sendo contemplada, aprimorada e esmiuçada ao longo dos anos escolares.

Amparado por esses documentos, tem-se que é necessário que os educadores trabalhem a geometria espacial com os jovens. Este fato é garantido por documentos desde os PCN's até a BNCC. Se essa “necessidade à coordenação espacial” e o “reconhecimento com objetos familiares” supracitados são necessários a vida escolar, então temos que quanto mais o indivíduo compreende a geometria espacial, melhor ele faz uso do espaço em que vive. Sendo assim, o cotidiano está ligado à geometria e, por isso, o estudo de alguns conceitos básicos dessa geometria deva ser realizado e estimulado.

Durante o ensino fundamental e médio é comum que sejam apresentados aos alunos alguns tópicos da geometria espacial, tais quais posições relativas (de retas e planos) e o estudo de sólidos. Isso acontece na prática embasado em documentos oficiais. O próprio PCN+ alega que:

A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica. [...]

Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação, sólidos redondos, propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo, inscrição e circunscrição de sólidos.

Métrica: áreas e volumes, estimativa, valor exato e aproximado (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, BRASIL, 2001, p. 123).

Tendo atuado como professor pela última década, pude perceber nas minhas práticas docentes que, depois de trabalharmos com posições relativas na geometria espacial, de classificarmos prismas, cilindros, pirâmides, cones e

esferas e de calcularmos os volumes desses sólidos, o ensino de geometria espacial tende a ter seu fim. Seguindo o Currículo de Estado de São Paulo SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2012, p. 68-69, temos que essa parte dos sólidos é apresentada na segunda série do ensino médio e depois dá espaço à geometria analítica.

No entanto, a geometria espacial não se restringe a isso. Há uma série de problemas que não podem ser resolvidos apenas com o uso da geometria que chamamos de euclidiana. E foi a partir de uma dessas questões que surgiu certa motivação e estranhamento para mim. O meu primeiro contato com uma questão de geometria que não poderia ser resolvida com a geometria euclidiana foi quando eu estava cursando o terceiro ano do ensino médio. Na ocasião meu professor de matemática apresentou o seguinte problema, que hoje sei que se trata de uma questão clássica:

“Um homem sai da sua casa, anda 2 quilômetros para o Sul, anda 2 quilômetros para o Leste, atira num urso e então caminha mais 2 quilômetros para o Norte, voltando à sua casa. Qual é a cor do urso?”

Quando meu professor apresentou essa questão, deparei-me com uma situação até então inimaginável. A verdade é que eu, apesar de conhecer o pouco de matemática que havia sido apresentada para mim até então, não conseguia criar nenhum tipo de estratégia que me permitisse resolver esse problema. Essa questão tinha essa beleza, ser aparentemente simples, mas que a geometria que eu conhecia não era capaz de resolver.

Foi assim, entre as reflexões sobre o exercício, em que houve uma inquietação, “como podemos nos limitar à geometria euclidiana para representar algumas situações do dia a dia?” Pensando no planeta Terra (já que foi a situação com que me deparei), podemos observar que a geometria euclidiana não resolve o problema. O fato de a questão envolver um deslocamento pelo planeta (um

geoide que aqui será trabalhado como esfera) e não por uma figura plana exigia um tratamento diferente daquele com o qual eu estava acostumado. Eu jamais havia pensado que alguns problemas do mundo físico necessitavam de outros modelos de geometria. Posso dizer que me enquadrava na situação descrita por Poole:

“...conceitos da geometria euclidiana regem nossa forma de olhar o mundo. Em particular, suponha que parássemos pessoas na rua e pedíssemos para que completassem a lacuna da sentença a seguir ‘A menor distância entre dois pontos é _____’. Elas provavelmente responderiam ‘uma linha reta’. (POOLE, 2016, p. 529)”

Dessa maneira, temos uma utilização da geometria que transcende o que é proposto na escola, a utilização de uma geometria que resolve problemas não solucionados pela geometria euclidiana, geometria essa que é a única que a BNCC prioriza. O aluno deve saber que há momentos em que outros modelos de geometria são essenciais (modelo sendo um conjunto de conceitos e linguagens matemáticas e que permite satisfazer as proposições derivadas de um conjunto de axiomas), que para a interpretação de alguns fenômenos cotidianos, é necessário que ele consiga interpretar o espaço e ter a confiança do método adequado que ele deve aplicar. No próprio PCNEM consta:

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do

espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA, 1998, p. 40).

Vivemos em uma época em que há uma busca frequente pela aplicação da matemática e pela interdisciplinaridade. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA, 1998, p. 8 consta: “Vale a pena lembrar que, lado a lado com uma demarcação disciplinar, é preciso desenvolver uma articulação interdisciplinar, de forma a conduzir organicamente o aprendizado pretendido.” Assim, trabalhar com outras geometrias, como por exemplo a necessária para resolver a questão que me foi apresentada, uma geometria que envolva o globo terrestre é vantajosa, posto que está articulada com o planeta e a interdisciplinaridade é intrínseca a ela. Além disso, como faz menção a algo do cotidiano de todos, não há nada mais orgânico do que isso, sendo então ferramenta poderosa na condução almejada pelo documento oficial.

Pelo PCNEM temos que uma das finalidades da matemática é “compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral”. Ao trabalhar com uma geometria envolvendo o planeta pode-se concatenar este assunto a diversos outros que o aluno aprendeu ao longo dos anos escolares, permitindo assim uma revisão e comparação das geometrias, além de introduzir a existência de outros modelos.

Essa discussão de modelos, por si só, já carrega uma importância substancial para a sala de aula. Dos componentes curriculares da educação básica, vários lidam e debatem a importância do que é um modelo. Na química os modelos são amplamente discutidos e apresentados aos alunos (pelo menos os modelos atômicos de Dalton, Thomson, Rutherford-Bohr e Chadwick). O próprio

PNLD mostra quão importante é falar sobre os modelos e da necessidade dessa discussão aparecer num livro de Química:

*Outro aspecto a ser considerado na constituição desse componente curricular é a **articulação entre três níveis de conhecimento: o empírico, o teórico e a linguagem**, sendo que os dois últimos são mutuamente constituídos. Considerando as relações pedagógicas, há conjuntos de conteúdos que configuram conceitos e práticas, focando especificamente o estudo de materiais, a dimensão energética envolvida nas suas transformações, bem como os modelos explicativos voltados para a dimensão microscópica da constituição da matéria, que são importantes e devem estar presentes nos livros didáticos de Química (BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, QUÍMICA, 2017, p. 14, grifo do autor).*

O PNLD também se posiciona sobre a importância de a física escolar trabalhar com modelos:

A Física escolar deve contemplar, portanto, a escolha cuidadosa dos elementos mais importantes presentes na estrutura conceitual da Física como uma disciplina científica, uma área do conhecimento sistematizado em termos de conceitos e definições, princípios e leis, modelos e teorias, fenômenos e processos (BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, FÍSICA, 2017, p. 9).

Colocada essa pauta em discussão, a escola ensina geometria euclidiana, mas não fala nada sobre a existência de outros modelos de geometria. Dado que as diferentes componentes das ciências exatas trabalham com modelos, me parece no mínimo estranho que a matemática não faça o mesmo. Mais importante é o fato de que a geometria esférica pode servir para uma atividade interdisciplinar com a geografia ou com a física moderna (que já aparece em livros didáticos, como mostrado no capítulo 6 Sobre as implicações desse conteúdo), o que me leva a crer que ensinar os conteúdos básicos desse modelo geométrico do ponto de vista da matemática e não só das outras áreas seja essencial.

A discussão sobre modelos e a geometria esférica traz, dentre tantos aprendizados:

Com a história da geometria não euclidiana, os alunos aprendem o seguinte: encontrar a resposta certa não é a essência das atividades matemáticas. Por 2000 anos, as melhores mentes matemáticas da época tentaram encontrar uma prova do postulado paralelo, mas não conseguiram. Além disso, os modelos de geometria não euclidiana que foram construídos por Poincaré e outros forneceram evidências conclusivas de que nenhuma prova desse tipo jamais seria encontrada. No entanto, isso não inviabiliza os esforços de Wallis, Saccheri, Lambert e outros, porque eles conseguiram reformular o postulado e fornecer informações sobre a natureza das geometrias que resultariam se negadas. As fronteiras do conhecimento matemático foram assim ampliadas, e a descoberta real da geometria não-euclidiana tornou-se inevitável (FISH, 1996, p. 110).

Como educadores em matemática costumamos nos preocupar com a finalidade daquilo que ensinamos. Há quem acredite que, em primeiro plano, devemos tornar os alunos aptos a realizar uma série de cálculos e, em segundo plano, trabalhar um pensamento mais crítico. Entretanto, há quem julgue que os alunos devem primeiramente estar aptos a lidar com situações, no mínimo, verossímeis.

Com isso, não tenho a menor intenção de realizar qualquer juízo de valor sobre qual deles é mais necessário, se a parte concreta e de grande importância para o dia a dia de todos nós ou se a parte abstrata e de grande importância para a fundamentação da matemática. Sei que há prós e contras para ambas as finalidades. Por um lado, há quem argumente que a matemática se fundamentou na abstração e que, a partir dela, o cérebro estará apto a realizar raciocínios de alta complexidade, conseguindo assim ir para a parte concreta com maior perícia.

A matemática, como ciência, é um exemplo de abstração, uma vez que, como regra, não estuda o mundo real, e sim modelos, que são abstrações do mundo real. Logo, entendemos que, ao trabalhar com os conteúdos matemáticos, devemos ter em mente a criação de atividades que permitam o desenvolvimento do pensamento abstrato, possibilitando raciocínios de alto nível (GROENWALD e NUNES, 2007, p. 103).

Por outro lado, há quem defenda a ideia de que é necessário ir para a contextualização primeiro, iniciando o aprendizado todo com uma abordagem mais real, com uma situação problema. Isso faz com que o aluno não desista do conteúdo pois o aluno viu uma finalidade naquilo tudo. Por exemplo, caso o aluno enxergue o surgimento de alguns tópicos a partir da conjuntura histórica, então o aprendizado se dará de maneira diferente da convencional e terá ganhos inestimáveis.

Contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia antiga? Ou a aquisição da numeração indo-arábica com o florescimento do mercantilismo europeu nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado...(D'AMBROSIO, 2001, p. 27)

Há quem acredite que essas são ideias opostas, há quem alegue que são complementares. Há momentos para as duas abordagens. Há momentos que, em sala de aula, primeiro se ensina o operacional para depois discutir a aplicação e os contextos. Mas há outros momentos em que não explicar o contexto nem começar por uma investigação fará com que o aluno se questione sobre a real importância de dominar aquele conteúdo. E é exatamente por isso que tanto se debate esse assunto. O fato de não haver uma resposta universal gera um sentimento de incerteza que é bastante natural. Essa incerteza, que desde Søren Kierkegaard chamamos angústia, faz com que debates como este sejam cruciais e que perdurem por anos a fio. Assim, a geometria espacial pode ser abordada por ambos caminhos, mas, independentemente do que for escolhido, ela sempre possibilita uma contextualização real.

Sobre essas diferentes concepções a respeito da contextualização da geometria espacial, vale ressaltar um trabalho: “Equador, paralelos e meridianos: apenas linhas imaginárias?” PATAKI e ALMOULOU. Nele foram analisados dezesseis livros que abordam a geometria esférica. Nesse estudo chega-se à

conclusão de que a maioria das obras que versam sobre esse tópico (que já não são muitas), focam na parte teórica e deixam de lado a aplicabilidade no mundo real. De fato, das obras analisadas por eles, um total de dez livros apresentaram essa geometria “apenas sob o ponto de vista teórico, sem atividades de aplicação PATAKI e ALMOULOU, p. 7”. Em outras palavras, podemos concluir que algumas das produções a respeito das diferentes geometrias mostram escassez no que diz respeito a relacionar esse assunto com outros e que focam na parte teórica em detrimento da aplicabilidade.

E se D'Ambrosio menciona a contextualização entre os Elementos e a Grécia Antiga, atualmente podemos ir além disso. Estamos em um momento de inovações tecnológicas, num mundo onde se deslocar ficou mais fácil e rápido e viagens aéreas e marítimas são recorrentes. O panorama atual favorece o uso de uma geometria que vai além da euclidiana. Assim, a geometria na esfera é importante nos dias de hoje e traz uma série de benefícios para os que a estudam. Dentre essas potencialidades podemos citar que é importante que o aluno domine os conteúdos, mas é necessário mais que isso. Ao trabalhar com a geometria esférica é necessário rever a geometria euclidiana, ou seja, ao ensinar e estimular alguns conceitos da geometria esférica, consolida-se a geometria euclidiana. Segundo os PCN's

Ao relacionar idéias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como no trabalho com o espaço, forma e medidas.

O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos. (BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 1998, p. 37)

A geometria euclidiana não é o suficiente para resolver alguns problemas, como já mencionado acima, enquanto isso, ao utilizar outros modelos de geometria alguns deles passam a ter solução, disso extraímos outra potencialidade ao estudar a geometria na esfera. Lembro-me que aquele exercício havia me deixado perplexo porque, para que houvesse resolução, deveria ser possível que um indivíduo se deslocasse pelo planeta, ao longo de um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos não era de cento e oitenta graus, uma vez que indo para sul, para leste e depois para norte, teríamos duas mudanças de trajetória, ambas por ângulos retos, o que já totaliza cento e oitenta graus, mas ainda deixa um ângulo desconhecido. Até então, com os conhecimentos que tinha até o aquele momento, essa era uma situação impensável. Visto que sempre me ensinaram que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo era igual a cento e oitenta graus, a questão em si me parecia não fazer sentido nenhum.

Corroborando com tudo isso, CARVALHO e CARVALHO, 2011 alega que “Modelo mais simples da geometria elíptica, a geometria esférica permite ao professor conduzir suas aulas interdisciplinarmente e aos alunos proporciona o contato com tecnologias atuais, dentre as quais o GPS.” Enquanto Alves deixa ainda mais evidente a interdisciplinaridade

A utilização do globo terrestre, com suas conseqüentes questões envolvendo, por exemplo, cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera, ou ainda, a confecção de mapas por meio de diversas projeções, abre caminho para um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia. (ALVES, 2009, p. 1)

Eratóstenes, no século II a.C., já havia estimado o raio da Terra. Sendo assim, era de conhecimento de alguns, que a superfície em que se encontravam era a de uma esfera. No século II d.C. já há registro de um globo terrestre ter sido construído, ainda que nas concepções e conhecimentos da época (AZEVEDO, 1965, p. 129). Os globos terrestres sofreram alterações, quanto mais a

humanidade conhecia, mais precisos eles ficavam. Há um hiato no que diz respeito à confecção de globos, até “a Idade Média, quando começaram a ser construídos na Europa e no Mundo Árabe” (SCHÄFFER, KAERCHER, *et al.*, 2012, p. 34). Percebe-se então que o globo terrestre é um recurso difundido há muito tempo. Achava-se que estava desmistificando alguns discursos, como o de que a civilização acreditava por muito tempo que a Terra era plana. Ainda que hoje há quem questione esse fato, a geografia e a matemática não possuem dúvidas de que a única verdade sobre o planeta é de que ele possui um formato muito similar ao de uma esfera.

Ao pensar em globo terrestre é natural pensar numa esfera, ainda que não seja exatamente uma. Sendo assim, com o recurso de um globo, pode-se aproveitar para ensinar um pouco sobre a geometria na esfera. Isto é, a partir de um objeto como esse, que é conhecido pela civilização, tem-se uma ferramenta útil tanto para a geografia quanto para a aplicação de outro modelo geométrico que não se aborda em sala de aula na educação básica.

*O globo terrestre é um recurso indispensável para promover aprendizagens tanto da **Geografia** quanto de **outros componentes curriculares** [...]. No entanto, no que pese sua importância como recurso pedagógico, o globo terrestre parece ser pouco explorado nas situações de aprendizagens da escola....*

*Que cultura escolar é esta que ignora o **globo terrestre** como um representação quase fidedigna na forma do planeta e como **instigador de questões e raciocínios**, ampliando as possibilidades de aprender?*
(SCHÄFFER, KAERCHER, *et al.*, 2012, p. 16-22, grifo do autor).

Mas, se esse tópico aparentemente traz consigo tantas vantagens, por que é que ele não aparece ainda na sala de aula? Para entender um pouco melhor esta questão, acredito que vale a pena pensar numa forma de atrair as pessoas para esse tópico e conversar com professores a fim de averiguar quais as concepções que eles possuem acerca desse conteúdo em sala de aula.

Para isso, realizei dois momentos de entrevistas com professores de matemática da educação básica. O primeiro foi um piloto, com um grupo de seis professores, que teve por intuito apresentar uma proposta que eu tinha e verificar se a atividade despertaria o interesse que eu esperava por parte dos professores. Corrigindo eventuais problemas e melhorando aquilo que deu certo, realizei o segundo encontro, com vinte professores, com uma proposta aprimorada para analisar as possibilidades e desafios de inserir conceitos e procedimentos da geometria esférica, na sala de aula, a partir da fala de um grupo de professores.

2 Justificativas

O objetivo desse trabalho é tentar compreender quais são as concepções de um grupo de professores ao participarem de uma sequência didática a respeito de uma discussão sobre a geometria esférica. Com isso, elaborar um produto que visa incitar os alunos a lidarem com a geometria esférica para que, aos que mais se interessarem, esse conteúdo possa ser lapidado a posteriori.

Dentre as potencialidades deste ensino, temos o ganho de ser trabalhada uma relação entre matemática e cotidiano, o que já faz com que seu ensino seja não só interessante, mas também aconselhável.

Uma vez que para se trabalhar com a geometria esférica é necessária a exibição de definições, teoremas, cálculos e demonstrações da geometria euclidiana, outro benefício em se estudar esse outro modelo é a possibilidade de rever os conceitos que concernem à geometria euclidiana. Ou seja, o estudo da geometria esférica culminaria não só na revisão dos tópicos da euclidiana, como também ajudará na consolidação destes. Auxílio esse que não pode passar despercebido.

Assim, ao mostrar que a alteração de alguns dos postulados pode estabelecer uma geometria diferente, pode-se retomar os conceitos primitivos (pontos, retas e plano) na euclidiana, verificando sua compreensão por parte dos alunos e apresentar esses conceitos no novo modelo geométrico. Por exemplo, se tomarmos como plano uma esfera, se definirmos os grandes círculos como as novas retas e os pontos da superfície esférica como pontos, temos, nessa geometria, uma situação em que a soma dos ângulos de um triângulo é diferente de 180° . Esse foi o mote da inquietação a respeito desse assunto e me fez criar mais curiosidade a respeito das geometrias não euclidianas, conforme mencionado no capítulo 1.

O trabalho de reconhecer similaridades e diferenças é algo que auxilia na geometria atualmente lecionada e impulsiona novos saberes. A geometria que irei abordar carrega consigo essa vantagem.

Começo mostrando que estamos hoje vivendo um reflexo das mesmas inquietações que surgiram quando outras geometrias foram desenvolvidas e/ou mencionadas. Para isso, não há como não mencionar, ainda que de forma breve, um pouco da história por trás disso. Para sabermos para onde iremos é imprescindível que saibamos de onde viemos

Pretendo mostrar que a ausência de outros modelos de geometria (não necessariamente a esférica) faz com que vários problemas do mundo atual não tenham uma resposta. Logo, outra das potencialidades do ensino de outro modelo geométrico é lidar com situações que são reais hoje, ainda que não fossem na época de Euclides.

Para isso realizarei um breve relato histórico sobre o desenvolvimento dos da geometria, de forma a fortalecer o motivo da necessidade de ensinar outros modelos da geometria. Realizado isso, trabalharei com a geometria, amparada na matemática, com suas definições, teoremas e demonstrações, para introduzir a geometria esférica.

Embora essas dificuldades existam, com o estímulo adequado, o aluno pode se interessar e se aprofundar em qualquer conteúdo. Essa inspiração não é fácil, uma vez que as pessoas possuem suas idiossincrasias e o que entusiasma um, não entusiasma outro.

Para que as pessoas, de modo geral, sejam introduzidas a isso ainda em idade escolar e se interessem por essa temática, pensei numa forma de conduzir uma discussão com professores, a fim de verificar a opinião deles sobre essa prática.

Logo, por mais que eu acredite que essa temática seja interessante, que traz consigo uma possibilidade para atividades interdisciplinares e que terá resultados positivos no que diz respeito ao estímulo pela maioria e a vontade de aprofundamento por outros, na tentativa de entender um pouco melhor a eficácia do que proponho, verificando se o que sugiro é aplicável ou não, entrevistarei alguns professores a fim de descobrir o que a experiência deles diz sobre isso. Se já viram ou não esse conteúdo. E quais os prós e contras que eles enxergam para que esse assunto seja trabalhado e para quando esse assunto for trabalhado. Assim, penso que podemos pensar em métodos que farão com que os alunos se interessem pela geometria esférica, ainda que esse nome não seja abordado de maneira direta.

3 Fundamentação Metodológica

Este estudo apresenta, identifica e analisa informações subjetivas e, portanto, não mensuráveis numericamente, como, por exemplo, as percepções de um grupo de professores sobre esse assunto. Sendo assim, este estudo é realizado na perspectiva de um estudo qualitativo.

A metodologia utilizada neste estudo é a da pesquisa-ação.

Este estudo não apresenta de forma simples e técnica a geometria esférica, mas tem por intuito apresentar uma proposta para introduzir, na sala de aula do ensino médio, este assunto que atualmente não é abordado.

Um outro tema amplamente debatido diz respeito ao uso de métodos participativos e ao uso da pesquisa-ação em contexto educacional. Uma das mais difundidas justificativas consiste na constatação de uma desilusão para com a metodologia convencional, cujos resultados, apesar de sua aparente precisão, estão muito afastados dos problemas urgentes da situação atual da educação. Por necessárias que sejam, revelam-se insuficientes muitas das pesquisas que se limitam a uma simples descrição da situação ou a uma avaliação de rendimentos escolares. (THIOLLENT, 1986, p. 74)

Para este trabalho fora elaborado um material, que fora apresentados a um grupo de professores.

De acordo com a perspectiva esboçada, paralelamente à pesquisa haveria também produção de material didático, gerada pelos participantes e para ser distribuído em escala maior. (THIOLLENT, 1986, p. 76)

Entrevistas foram realizadas para que os professores manifestassem suas opiniões e assim, por meio de diálogos, apresentar uma maneira de, por meio da geometria da esfera, introduzir a geometria esférica, apesar das mazelas do ensino.

A pesquisa-ação promove a participação dos usuários do sistema escolar na busca de soluções aos seus problemas. Este processo supõe que os pesquisadores adotem uma linguagem apropriada. Os objetivos teóricos da pesquisa são constantemente reafirmados e afinados no contato com as

situações abertas ao diálogo com os interessados, na sua linguagem popular.
(THIOLLENT, 1986, p. 75)

Sob posse dos pareceres dos professores e da proposta exibida, tem-se a produção de um material que visa alterar uma parte do currículo de matemática no ensino básico.

Com a orientação metodológica da pesquisa-ação, os pesquisadores em educação estariam em condição de produzir informações e conhecimentos de uso mais efetivo, inclusive ao nível pedagógico. Tal orientação contribuiria para o esclarecimento das microssituações escolares e para a definição de objetivos de ação pedagógica e de transformações mais abrangentes. (THIOLLENT, 1986, p. 75)

4 Um pouco da história

Neste capítulo farei um breve resumo sobre a história das geometrias, como surgiu a geometria euclidiana e alguns impasses que vieram junto, levando ao surgimento de outras geometrias, apresentando inicialmente a Hiperbólica e posteriormente a Esférica.

Para apresentar esse resumo, segui principalmente o livro *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times* (KLINE, 1972). O objetivo não é realizar um estudo aprofundado, mas sim fazer uma exposição do que nos trouxe até o momento em que vivemos. Vale deixar claro também que, a tradução dos trechos que apresento, foi realizada por mim. Isso é importante porque, como se sabe, uma mesma palavra pode ser traduzida em uma série de verbetes que transmitem a mesma ideia, mas não apresentam, necessariamente o mesmo significado sociocultural. Dessa forma, a própria seleção lexical já carrega em si um pouco do meu olhar em relação a esse conteúdo.

Euclides foi uma das personalidades mais importantes da matemática. É quase certo que viveu em Alexandria por volta de 300 a.C., isto é, no período helenístico na Grécia. Uma de suas maiores contribuições é a organização de diversas descobertas do período clássico na Grécia. No seu livro *Os Elementos*, ele conta não só a história da matemática como também o desenvolvimento da matemática que era vigente até então. Nesse livro ele fornece alguns postulados, dos quais o quinto é o mais notório:

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que os dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Atualmente esse postulado é conhecido como postulado das paralelas e pode ser apresentado com uma formulação diferente equivalente atribuída a John

Playfair: “Dado um ponto P que não está numa reta r , existe uma só reta no plano que contém P e r que passa por P e não intersecta r ” (KLINE, 1972).

Por muito tempo, muitos matemáticos se negaram a crer que se tratava de um postulado (como se sabe atualmente). Sendo assim, vários tentaram demonstrá-lo usando os axiomas da geometria euclidiana. Esse movimento acabou desenvolvendo a geometria euclidiana e foi o responsável pelo estabelecimento de outros modelos de geometria. Com essas tentativas, surgiram definições equivalentes ao quinto postulado, como a definição de Playfair.

Essa geometria, que se baseava nos postulados de Euclides, é o que chamamos de geometria euclidiana. Porém, cientistas como Newton enfatizaram que “os matemáticos de antes de 1800 estavam convencidos que a geometria euclidiana era a idealização correta das propriedades do espaço físico e das figuras no espaço”. (KLINE, 1972)

Com esforços cada vez mais contundentes de aniquilar a dúvida que pairava sobre o postulado das paralelas, uma nova geometria germinava. Não foi um processo simples, tampouco foi um processo rápido. O próprio d’Alembert ao analisar a dificuldade de se refutar o postulado, com todas as tentativas em vão, chamou esse problema de “o escândalo dos elementos da geometria.”

Vale ressaltar que, segundo BOYER, 2018, Johann Lambert escreveu

Demonstrações do postulado de Euclides podem ser levadas até um ponto tal que aparentemente só falta uma bagatela. Mas uma análise cuidadosa mostra que nessa aparente bagatela está o cerne da questão, usualmente ela contém ou a proposição que se quer provar ou um postulado equivalente a ele (BOYER, 2018, p. 313).

Assim Lambert, Schweikart e Taurinus estavam convencidos que o postulado das paralelas de Euclides independia dos demais axiomas de Euclides, (KLINE, 1972):

Eles notaram que a geometria numa superfície esférica possui propriedades diferentes. Assim, eles reconheceram a existência de uma geometria não euclidiana, mas falharam em nomear e alegar que a geometria euclidiana não é a única geometria que descreve propriedades do espaço físico (KLINE, 1972, p. 869).

Essas geometrias foram tratadas com certa cautela, pois foi a partir delas que o quinto postulado de Euclides se mostrou ineficaz, e foi assim substituído por uma de suas negativas: dados um ponto e uma reta tal que o ponto não pertence a reta, ou não existe nenhuma ou existe mais de uma reta paralela àquela que passa por aquele ponto. Gauss foi aparentemente o primeiro a chegar à conclusão de que nenhuma contradição pode ser obtida desta forma e o fez trabalhando com o que vem hoje a ser denominado geometria hiperbólica. Em uma carta enviada em 8 de novembro de 1824, Gauss escreveu para Franz Adolph Taurinus falando desse modelo WOLFE, 1945

No que diz respeito à sua tentativa, não tenho nada (ou não muito) para dizer, exceto que está incompleto. É verdade que sua demonstração da prova de que a soma dos três ângulos de um triângulo plano não pode ser superior a dois ângulos retos carece de rigor geométrico. Mas isso em si pode ser facilmente corrigido, e não há dúvida de que a impossibilidade pode ser provada de forma mais rigorosa. Mas a situação é bastante diferente na segunda parte, que a soma dos ângulos não pode ser inferior a 180° , este é o ponto crítico, o recife em que ocorrem todos os destroços. Imagino que este problema não tenha envolvido você por muito tempo. Eu me debruço sobre ele há mais de trinta anos e não acredito que alguém possa ter pensado mais sobre esta segunda parte do que eu, embora eu nunca tenha publicado nada sobre isso. A suposição de que a soma dos três ângulos é inferior a 180 leva a uma curiosidade geométrica, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas completamente consistente, que eu venho desenvolvendo por satisfação pessoal, para que eu possa resolver todos os problemas nele com a exceção da determinação de uma constante, que não pode ser designada a priori. O maior toma essa constante, mais próxima da geometria euclidiana, e quando é escolhida infinitamente grande, as duas coincidem. Os teoremas desta geometria parecem ser paradoxais e, para os não iniciados, absurdos, mas

calma, reflexão constante revela que eles não contêm nada impossível
(WOLFE, 1945, p. 46-47).

Em outra carta, de 1829, Gauss se mostra relutante em divulgar suas descobertas. Isso em virtude de contrapor tudo o que se acreditava e que era proveniente do tão aclamado “Os Elementos” de Euclides e vários matemáticos não “conseguiriam aceitar isso da melhor maneira possível” (KLINE, 1972).

Aqui, é o ponto que mencionei no capítulo 2 dessa dissertação. Isso merece uma atenção especial. Naquela época Gauss dizer isso poderia soar absurdo, mas, na verdade, ao se debruçar um pouco sobre a questão, concluiria que ela não é impraticável, tampouco impossível. Entretanto, matemáticos da época não pareciam receptíveis a essa quebra de paradigma que é estabelecida pela geometria de Euclides.

Assim, conforme mencionado, Gauss de fato foi o inventor do termo “geometria não euclidiana” ainda que não tenha publicado nada a esse respeito. Mas esse começo de estudo foi necessário para o desenvolvimento de teorias revolucionárias, como a ideia de curvatura superficial que permitiu a Riemann desenvolver posteriormente a *geometria riemanniana* que, por sua vez, serviu de base para a Teoria Geral da Relatividade de Einstein.

Outros que tentaram provar o quinto postulado, sem êxito também foram Bolyai e Lobachevsky, em 1823 e 1826, respectivamente. O pai de János Bolyai, Farkas, que era amigo de Gauss e matemático, quando soube do interesse de seu filho nesse tópico tentou dissuadi-lo pois era um problema que tantos outros tentaram, mas não resolveram. No entanto, quando percebeu que o trabalho de Bolyai era proeminente, Farkas insistiu para que seu filho o publicasse.

Lobachevsky e Bolyai construíram suas geometrias na hipótese de que “através de um ponto não pertencente a uma reta, existe mais de uma paralela à

reta que passa pelo ponto”. Isso equivale à suposição de Gauss de que a soma de ângulos em um triângulo é inferior a 180° .

Gauss, em uma carta a Farkas, aprovou o trabalho de seu filho, mas afirmou ter desenvolvido as mesmas ideias há cerca de 30 anos. Ele até forneceu uma prova elegante para um dos teoremas de seu filho. János foi envolvido inclusive numa suspeita de plágio, uma vez que três anos antes Lobatchevsky tivera publicado um estudo semelhante. Há quem acredite que János foi esmagado pela carta de Gauss, mas é fato que, depois disso, ele nunca publicou nada sobre o assunto.

Atualmente não há dúvida de que Gauss, Bolyai e Lobatchevsky desconheciam o trabalho uns dos outros. No entanto, Lobatchevsky foi o primeiro a publicar um artigo sobre a geometria hiperbólica. Seu artigo apareceu no Kazan Messenger em russo em 1829. Tentando chegar a um público mais amplo, ele publicou em francês em 1837, depois em alemão em 1840, e depois novamente em francês em 1855. Mesmo com reconhecimento, obtenção de medalhas e ter se tornado reitor da Universidade de Kazan, só após anos de sua morte, seu nome foi associado ao desenvolvimento da geometria hiperbólica.

Não me debruçarei muito sobre a geometria de cada um, porque não é o foco desse relato, mas é necessário dizer que as contribuições deles, no desenvolvimento das geometrias não euclidianas é, fundamental para a quebra do paradigma vigente naquela época.

As inquietações de Gauss eram conhecidas por Georg Bernhard Riemann. Em 1854 Riemann realizou na faculdade de Göttingen, com Gauss presente, uma palestra, que fora publicada em 1868 cujo título era “Sobre As Hipóteses Que Se Encontram Na Fundação da Geometria”. Nela Riemann trabalhou com outro modelo geométrico.

É bom deixar claro que a geometria do espaço tratada por Riemann não era meramente uma extensão da geometria diferencial de Gauss. A verdade é que Riemann considerou toda a abordagem do estudo do espaço. Riemann abordou a questão sobre o que podemos ter certeza a respeito do espaço físico. Que condições ou fatos são pressupostos no espaço antes mesmo de determinar os axiomas que existem no espaço físico? De fato, Riemann é tido, até hoje, como o maior filósofo da geometria. Um dos objetivos de Riemann era mostrar que os axiomas de Euclides eram empíricos em vez de, como se acreditava, verdades evidentes.

E assim, questionando a geometria que fora desenvolvida até então e levando em conta a filosofia que lhe acometeu ao longo dos anos, reconheceu no espaço físico em que se encontrava uma outra geometria.

Assim, para encerrar esse breve relato, segundo RAVINDRAN, 2007, Riemann modificou os Postulados 1, 2 e 5 de Euclides, fundamentando assim o que chamamos de geometria esférica. Suas alterações foram:

Primeiro – Dois pontos distintos determinam pelo menos uma linha reta.

Segundo – Uma linha reta é ilimitada, mas não necessariamente de comprimento infinito

Quinto – Quaisquer duas linhas retas em um plano se cruzam.

Assim como na palestra de Etienne Ghys, realizada no IMPA O conceito de bifurcação, 2015, concluiu dizendo que estão normalmente associados ao desenvolvimento de geometrias não euclidianas esses quatro nomes: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Nikolai Lobachevsky (1792 – 1856), János Bolyai (1802 – 1860) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), sem desmerecer tantos outros nomes que foram fundamentais para o avanço desse campo.

5 Introdução aos conceitos da geometria esférica

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados sobre a geometria esférica que serão utilizados ao longo desse trabalho. Todas as ilustrações utilizadas foram feitas utilizando o *software* livre *Geogebra*.

Algumas observações são necessárias para a leitura do que se segue. Com o intuito de deixar o texto mais fluído, o termo esfera será sempre utilizado como referência à superfície esférica. Apesar de não ser uma esfera, o planeta Terra será considerado, para fins didáticos, como uma. Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos da esfera.

5.1 Alguns resultados envolvendo plano e esfera

Nesta subseção tenho o intuito de apresentar, a partir das posições relativas entre plano e esfera, as definições e, a partir disso, apresentar alguns teoremas e suas demonstrações.

Dito isso, considerando um plano π e uma esfera λ , determinando-se a posição relativa entre eles, podemos ter três situações:

Situação I: o plano e a esfera não se interceptam;

Figura 1 - Plano não corta a superfície – Fonte: Elaborada pelo autor

Situação II: o plano e a esfera se interceptam em um único ponto e neste caso dizemos que a esfera é tangente ao plano;

Figura 2 - Plano tangente à superfície – Fonte: Elaborada pelo autor

Situação III: ou o plano e a esfera se interceptam em mais de um ponto

Figura 3 - Plano secante à superfície – Fonte: Elaborada pelo autor

Inicialmente vamos citar algumas definições da geometria plana euclidiana, assunto que estamos assumindo já ter sido alvo do estudo dos alunos quando eles forem ter contato com a geometria na esfera:

- ▷ Retas paralelas: Duas retas distintas que são coplanares e que possuem a mesma direção.
- ▷ Retas coincidentes: São retas em que todos os pontos pertencentes a uma também pertencerão a outra;
- ▷ Retas concorrentes: São retas que são coplanares e que se interceptam em apenas um ponto. Caso elas se interceptem e formem um ângulo reto dizemos que elas são retas perpendiculares;

▷ Retas reversas: Retas que não têm a mesma direção e tampouco se interceptam em um único ponto. Dessa forma são retas tais que não existe um plano que as contém.

Se duas retas r e s são reversas e existe uma paralela a r que é perpendicular a s , então dizemos que as retas r e s são ortogonais. Isto é, se duas retas são reversas e formam um ângulo reto, então dizemos que elas são ortogonais

Lembrando também sobre a posição relativa entre reta e plano, temos:

▷ Reta contida no plano: Quando todos os pontos da reta pertencem ao plano.

▷ Reta paralela ao plano: Quando a interseção entre reta e plano é vazia;

▷ Reta secante ao plano: Quando a reta intersecta o plano em apenas um ponto. Diz-se que uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, eles tem um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.

Tem-se, por fim, a posição relativa entre planos:

▷ Planos paralelos: Dois planos, π_1 e π_2 , são ditos paralelos quando $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$;

▷ Planos iguais: Dois planos, π_1 e π_2 , são ditos coincidentes quando $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$;

▷ Planos secantes: Dois planos, π_1 e π_2 , são ditos secantes quando $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Neste caso, a interseção é sempre uma reta.

Assim podemos enumerar alguns teoremas.

Teorema 1: Se, traçado um raio da esfera, pela sua extremidade pertencente à esfera, traça-se um plano perpendicular a esse raio, então esse plano é tangente a esfera.

Demonstração

Consideremos uma esfera de centro O e raio r . Seja T um ponto da esfera e π o plano perpendicular ao raio $\overline{OT}$ em T , conforme a figura abaixo:

Figura 4 – Plano perpendicular ao raio $\overline{OT}$ – Fonte: Elaborada pelo autor

Temos que provar que nenhum outro ponto de π pertence à esfera.

Seja $A \in \pi$ um ponto qualquer, com A e T distintos. Como $\overleftrightarrow{AT} \subset \pi$, segue das hipóteses que $\overline{OT} \perp \overline{AT}$, logo o triângulo ATO é retângulo em T . Dessa maneira temos que $OA > OT \therefore OA > r$. Isto é, A não pertence à superfície esférica. Logo π é tangente à esfera.

■

Teorema 2: Todo plano tangente a uma esfera é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

Demonstração:

Seja o plano π tangente à esfera, de centro O e raio de medida r , no ponto T . Por absurdo vamos supor que π não é perpendicular a $\overline{OT}$.

Assim, seja B o pé da perpendicular de O sobre π , isto é, $\overline{OB} \perp \pi$. Note que B e T são distintos.

Seja T' o simétrico de T em relação a B . Dessa forma, T' pertence a reta $\overleftrightarrow{TB}$, que por sua vez pertence ao plano π , logo $T' \in \pi$.

Vamos mostrar que T' pertence à esfera, o que gera uma contradição.

Figura 5 – Plano tangente a esfera, demonstração por absurdo – Fonte: Elaborada pelo autor

Por construção, temos que $TB = T'B$. Além disso sabemos que $m(\angle OBT) = m(\angle OBT') = \pi/2$ (pela hipótese de que T, B e T' serem colineares e $\overline{OB} \perp \pi$). Assim, temos que $\triangle OTB \cong \triangle OT'B$, pelo caso LAL. Por conseguinte, temos que $OT = OT' = r$. Logo, T' pertence a esfera e é diferente de T , o que é um absurdo, dado que π é tangente à esfera. Portanto, se π é tangente à esfera então é perpendicular ao raio $\overline{OT}$, onde T é o ponto de tangência.

■

Teorema 3: Se um plano π contém um ponto do interior de uma superfície esférica, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.

Demonstração:

Figura 6 - Plano secante a esfera – Fonte: Elaborada pelo autor

Seja O o centro da esfera λ cujo raio tem medida r e seja π um plano que não passa por O e que contém um ponto X do interior de λ . Seja D o pé da perpendicular a π traçada a partir de O . Mostremos que a intersecção de λ com π é um circunferência de centro em D .

Como X está no interior de λ , tem-se $OX < r$. E como D é o pé da perpendicular sobre π traçada a partir de O , temos, do triângulo ODX , que $\overline{OX}$ é hipotenusa, enquanto $\overline{OD}$ é cateto. Logo $OD < OX < r$, ou seja, D também está no interior de λ .

Seja A um ponto qualquer na intersecção $\lambda \cap \pi$. Então, $\triangle ODA$ tem um ângulo reto em D e, pelo teorema de Pitágoras,

$$OD^2 + DA^2 = OA^2$$

$$\therefore DA = \sqrt{r^2 - OD^2}$$

Logo, A está na circunferência de centro D e raio $\sqrt{r^2 - OD^2}$. Dessa forma está provado que $\lambda \cap \pi$ está contido na circunferência de centro D e raio $\sqrt{r^2 - OD^2}$.

Resta provar que todo ponto da circunferência pertence à intersecção.

Seja A um ponto qualquer da circunferência, em π , com centro D e raio $\sqrt{r^2 - OD^2}$. Por Pitágoras,

$$OA^2 = OD^2 + DA^2$$

Substituindo DA^2 por $r^2 - OD^2$

$$OA^2 = OD^2 + r^2 - OD^2$$

$$\therefore OA^2 = r^2$$

Logo, $OA = r$ e $A \in \lambda$.

Como caso particular, se o plano contém o centro da superfície esférica, a intersecção desse plano com essa esfera seria uma circunferência cujo raio tem medida igual ao raio da esfera. A essa intersecção denominaremos *circunferência maior* ou *circunferência máxima*. Em outras palavras, essa é a circunferência de maior raio que pode ser obtida a partir da intersecção de um plano com a superfície esférica.

■

Para exemplificar isso, faremos uma interlocução com a geografia, na tentativa de facilitar a assimilação. Considerando a superfície do planeta Terra uma esfera, temos, por um lado, que todos os meridianos são exemplos de semicircunferências máximas (Figura 7), uma vez que todos eles possuem centro coincidentes com o centro da esfera. Por outro lado, como uma circunferência que não tenha seu centro no centro do globo não é uma circunferência máxima, temos que o trópico de Câncer, o de Capricórnio e todos os outros paralelos, não são circunferências máximas (nem semicircunferências máximas). A única exceção a esta regra para os paralelos é a linha do Equador (Figura 8).

Figura 7 - Globo terrestre: meridianos – Fonte: <http://www.globos.com.br/lib/site/utlizacao-de-globos/>

Figura 8 - Globo terrestre: Linha do Equador e paralelos – Fonte: <http://www.globos.com.br/lib/site/utlizacao-de-globos/>

A interlocução com a geografia é imediata e pode ser bastante explorada.

Existem partes da superfície da esfera que os alunos devem conhecer e associar aos termos usados na Geografia. Um plano que corta a esfera, divide sua superfície em duas regiões. Cada uma delas se chama uma calota. Se dois planos paralelos cortam a esfera, a parte da superfície da esfera compreendida entre eles é uma zona esférica. A geografia usa esses

termos quando se refere às calotas polares, zona equatorial e zona temperada. Essas regiões são limitadas por circunferências contidas em planos paralelos ao plano do equador da Terra, chamadas de Trópico de Câncer, Trópico de Capricórnio e Círculos polares e o professor poderá buscar nos livros de Geografia a localização dessas circunferências. (LIMA, WAGNER, et al., 1998, p. 225)

5.2 Explorando um pouco mais a esfera

Esta subseção apresenta os conceitos primitivos da geometria esférica e, a partir disso, as definições necessárias para eventuais discussões acerca desse modelo de geometria.

Com a finalidade de diminuir confusões sobre retas na geometria euclidiana e na esférica e de não sobrecarregar o texto, daqui em diante, em todos os momentos que aparecer a palavra *reta_E* escrita desta forma (em itálico e com o E subscrito) estarei me referindo a geometria esférica. Isso vale para *reta_E* ou qualquer outra nomenclatura que venha a surgir.

Na geometria esférica definimos *reta_E* como sendo uma circunferência obtida pela interseção de planos que passam pelo centro da esfera com a esfera. Com isso, podemos começar a comparar as geometrias. Observe que uma reta, na geometria euclidiana tem comprimento infinito, enquanto na esférica a *reta_E* terá comprimento finito e de medida $2\pi r$, em que r é a medida do raio dessa esfera.

Além disso, é importante constatar que na geometria euclidiana, dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém. Entretanto, na superfície esférica, se esses pontos forem antípodas, haverá infinitas *retas_E* que os contém, como pode ser visto na figura a seguir. Caso não sejam antípodas, existe uma única *reta_E*.

Figura 9 – Retas_E – Fonte: *Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere* – LÉNÁRT, 1996, p. 49

De fato, se tomarmos dois pontos_E distintos A e B e o centro O da esfera, temos duas situações possíveis. Caso exista uma reta s que passe por eles, então, pela geometria euclidiana, existem infinitos planos que os contém e, por conseguinte infinitas retas_E que contém A e B , caso não exista uma reta s que passe por esses três pontos, segue da geometria euclidiana, que existe um único plano que os contém. Neste caso, a interseção do plano com a superfície esférica é uma circunferência máxima, pelo teorema 3. Assim, é, na geometria esférica, uma reta_E.

Um resultado importante, que segue da definição de reta_E, é que não existem retas_E paralelas na geometria esférica. Para provar isso basta verificar que ao traçar duas retas_E distintas, reta_{E1} e reta_{E2}, tem-se, por construção, dois planos distintos, π_1 e π_2 respectivamente, que contém o centro da esfera, conforme mostra a figura a seguir. Dessa maneira, esses planos são planos secantes. Isto é, a interseção deles é uma reta que contém o centro da esfera e dois pontos antípodas. Dessa forma, esta reta intercepta as duas retas_E nesses pontos antípodas. Ou seja, reta_{E1} e reta_{E2} não são paralelas.

Figura 10 - Ilustração de que não existem retas paralelas – Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, começamos a definir os conceitos básicos da geometria esférica que diferem da euclidiana. Outra relação importante é a de que, ao marcar dois pontos sobre uma $\textit{reta}_E$, esta é dividida em duas partes de medidas diferentes, salvo o caso em que os pontos são antípodas. Definiremos a menor delas como o $\textit{arco}_E$ dos dois pontos. Isto é, $\textit{arco}_E$: é o menor arco da circunferência máxima determinado por dois pontos.

Ao calcular a medida do $\textit{arco}_E$ estamos calculando o que definiremos como $\textit{distância esférica}_E$.

O $\textit{arco}_E$ que liga dois pontos é também a curva de menor comprimento que liga dois pontos da superfície esférica. Falando novamente sobre a interdisciplinaridade, essa trajetória pode ser vista em livros de geografia recebendo o nome de ortodromia ou geodésica.

A partir do $ponto_E$, da $reta_E$ e do $arco_E$, o próximo conceito geométrico importante a ser definido é o de $ângulo_E$.

Ângulo entre retas_E: O ângulo entre $retas_E$ é o ângulo formado entre os planos que seccionaram a esfera gerando essas circunferências máximas, isto é, o ângulo formado pelos planos que contém essas $retas_E$. Este ângulo, na geometria euclidiana, é definido como ângulo diédrico.

A fim de elucidar melhor essa definição, vamos considerar alguns exemplos. Sejam tomadas as seguintes $retas_E$: Linha do Equador e a circunferência suporte do Meridiano de Greenwich (Figura 11 - Linha do Equador e Meridiano de Greenwich)

Figura 11 - Linha do Equador e Meridiano de Greenwich – Fonte: Elaborada pelo autor

Sejam π_1 e π_2 os planos que contém essas $retas_E$ (Figura 12 - Planos que contém a Linha de Equador e o Meridiano de Greenwich). Como esses planos são perpendiculares, temos que o ângulo formado por esses planos é reto. Dessa forma, temos duas $retas_E$ que formam um ângulo reto, isto é, são perpendiculares.

Figura 12 - Planos que contém a Linha de Equador e o Meridiano de Greenwich – Fonte: Elaborada pelo autor

Definido isso vamos ao próximo tópico: *Triângulo_E*. Dados três *pontos_E* não *colineares_E*, a união dos pontos de encontro das *retas_E*, tomadas duas a duas, e dos *arcos_E* que contém esses *pontos_E* é o que denominamos *triângulo_E*.

Ao traçar três circunferências máximas distintas e nos limitarmos aos *arcos_E* formados por elas, duas a duas, temos o esboço de um *triângulo_E*:

Figura 13 – Um *triângulo_E* – Fonte: *Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere* – LÉNÁRT, 1996, p. 36

A soma dos ângulos internos desse *triângulo_E* é calculada somando-se os ângulos formados pelas *retas_E* duas a duas.

Exemplo: Na esfera, tracemos três planos, tais que eles contenham o centro e são, dois a dois, perpendiculares. Dessa forma a esfera é dividida em oito partes

congruentes (Figura 14 – Um triângulo trirretângulo_E – Fonte: Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere -). Neste caso, o ângulo entre cada uma das *retas_E* é reto. Assim a soma dos *ângulos_E* é duzentos e setenta graus.

Figura 14 – Um triângulo trirretângulo_E – Fonte: Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere - LÉNÁRT, 1996, p. 37

Este é, na verdade, o caso que explica aquela inquietação inicial que foi o fio condutor até agora. Temos um *triângulo trirretângulo_E* uma vez que todos os *ângulos_E* são retos. E, apesar de não ter calculado o comprimento do *arco_E*, pode-se demonstrar que as *distâncias esféricas_E* são, neste caso, todas iguais, assim esse *triângulo_E* também é *equilátero_E*. Com isso, temos um *triângulo equiângulo_E* que difere daquele estudado na geometria euclidiana. Na euclidiana o triângulo equiângulo apresenta ângulos de medida sessenta graus, enquanto, neste exemplo, os *ângulos_E* do *triângulo equiângulo_E* são retos.

Exemplos menos triviais exigiriam ferramentas matemáticas mais avançadas, como geometria analítica e álgebra linear. Uma vez que este trabalho visa o aluno que teve geometria espacial, mas não geometria analítica, não é esperado fazer demonstrações que envolvem esses conhecimentos. Caso seja do interesse do leitor, no Apêndice I, temos alguns exemplos.

6 Sobre as implicações desse conteúdo

6.1 Sobre uma experiência pessoal

É uma teoria aceita, ainda que digam com dificuldades de se estabelecer em sala de aula, de que o aluno aprende melhor quando enxerga no objeto de ensino uma aplicação real. Isto é, quando o aluno vê aquele conteúdo e não se pergunta: “Entendi, mas pra que é que eu vou usar isso?”. Não quero com isso dizer que a contextualização é sempre necessária, mas eventualmente é produtiva e deve ser então estimulada. Deve-se trabalhar com questões do mundo real e não apenas com situações criadas com o intuito de justificar ministrar algum conteúdo.

Às vezes, na tentativa de mostrar uma aplicação real para um determinado tópico, o professor se vale de forçar sua aparição em uma determinada situação. Assim, a situação que ele menciona, apesar de ser possível, é por vezes improvável.

Uma situação real, que pode ser explorada por todos, é a referente ao trajeto de um ponto da Terra a outro, numa viagem aérea. Isso pode ser abordado por meio de algum exemplo pessoal da sala, por meio de alguma notícia sobre turismo, política ou até mesmo esportes.

Para exemplificar melhor, relato uma experiência pessoal que tive. Numa das instituições que trabalho, o foco das aulas é auxiliar os matriculados a ingressarem no ensino superior. Sendo assim, resolver exercícios de provas de vestibular é algo corriqueiro. No final de 2017 tive a possibilidade de discutir com os alunos um pouco sobre trajetórias pela superfície esférica em função de uma questão que apareceu no vestibular da Fuvest em 2016 (vide anexo 1). O enunciado é parcialmente reproduzido a seguir:

(FUVEST – 2016 – Segunda Fase – 2º Dia) Dois aviões vão de Brasília a Moscou. O primeiro voa diretamente para o norte, até atingir o paralelo de Moscou, quando então muda o rumo para o leste, seguindo para o seu destino

final. O segundo voa para o leste até atingir o meridiano de Moscou, tomando então o rumo norte até chegar a esta cidade.

Acho importante ressaltar esse fato pois, graças a ele consegui uma abertura maior de tempo para debater com os alunos a respeito da geometria na esfera sem fugir do conteúdo programático.

Dado que do dia 14 de junho ao dia 15 de julho do ano de 2018 aconteceria a Copa do Mundo de futebol masculino, começamos uma discussão sobre o trajeto que o avião da delegação brasileira deveria fazer saindo do Brasil e indo em direção ao país sede, Rússia. Como ambos os países são bastante grandes, focamos apenas nas capitais de cada um, isto é, Brasília e Moscou.

A questão mencionava as latitudes e longitudes de Brasília e Moscou, o primeiro a 16°S e 48°O , enquanto o segundo a 56°N e 37°L . Além disso, fornecia também a medida do raio r da Terra, de 6.400 km. O debate inicial era sobre qual dos dois trajetos era menor:

Trajetos 1 – Saindo de Brasília indo ao norte, pelo meridiano, até chegar ao paralelo de Moscou, e daí ir em direção ao Leste;

Trajetos 2 – Saindo de Brasília indo ao leste, pelo paralelo, até chegar ao meridiano de Moscou, e daí ir em direção ao Norte.

Antes de prosseguir, é importante definir, do ponto de vista matemático, o que é latitude e longitude:

*A **latitude** de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador [...] se mede de 0° a 90°N (norte) ou de 0° a 90°S (sul).*

*A **longitude** de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich [...] se mede de 0° a 180°E (leste) ou de 0° a 180°W (oeste).*

“Tá, mas é mais rápido dar a volta na Terra na linha do Equador ou no Círculo Polar?” – Retrucou a jovem.

Nisso as conversas entre os alunos da sala começaram e assim se chegou à conclusão, (em todas as salas, ainda que por caminhos diferentes), de que quanto mais distante da circunferência maior da esfera, menor era o deslocamento necessário para transitar entre meridianos. Perceberam que andar sobre o meridiano era indiferente.

Dessa forma, conseguiram concluir, sem maiores problemas, que era mais vantajoso o trajeto 1.

Feito isso, a questão perguntava sobre qual a diferença entre as distâncias percorridas. Para resolver isso, dado que os alunos já tinham concordado que variações sobre diferentes meridianos eram iguais, bastava calcular a distância percorrida ao viajar sobre o paralelo.

Figura 16 - Ilustração Brasília-Moscú – Fonte: Elaborada pelo autor

Sejam B e M os pontos representantes de Brasília e Moscou, B' e M' , respectivamente, os pontos nas mesmas longitudes de B e M e nas mesmas latitudes que M e B . Por fim, sejam os pontos C_1 e C_2 os centros das circunferências dos paralelos de Brasília e de Moscou, respectivamente.

Do enunciado, podemos concluir que o ângulo $O\hat{B}C_1 = 16^\circ$, como pode ser visto na figura 16. Assim calculamos o raio R do paralelo de Brasília por trigonometria:

$$\cos 16^\circ = \frac{BC_1}{R}$$

Daí foi só calcular o comprimento do arco $\widehat{BM'}$, posto que era um cálculo que os alunos estavam acostumados, devido a geometria plana. Uma regra de três resolveu os problemas que eles enfrentavam. Sabendo que o ângulo $B\hat{C}_1M = 85^\circ$

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2\pi \cdot BC_1$
85°	— — —	x

Ao fazer o mesmo com o paralelo de Moscou os alunos obtiveram o embasamento matemático sobre aquilo que eles já haviam concluído.

Feito tudo isso, uma aluna começou a questionar um pouco tudo isso:

“Professor, mas então é sempre melhor ir para Leste/Oeste quando se está no ponto mais próximo do polo do que quando mais próximo do *Equador*?”

No que eu concordei, um outro aluno fez a seguinte pergunta:

“Tá, mas então por que quando a gente viaja eles não fazem isso?”

Passados alguns instantes em que os demais começaram a indagar esse aluno, ele continuou a reflexão:

“Quando a gente viaja, tem uma tela de computador que mostra o trajeto. Essa tela não mostra isso que você mostrou.”

De fato, em vários aviões há uma tela (Figura 17) em que é possível realizar algum tipo de entretenimento, como assistir a um filme, ou jogar um jogo. Mas é possível também ver a trajetória que o voo está realizando.

Figura 17 - Computadores de Bordo – Fonte: <http://www.melhoresdestinos.com.br/como-e-voar-com-a-air-europa.html> (Visualizado em 10/2017)

Nele, de fato, aparece um outro trajeto. Independentemente do aluno ter presenciando isso, é o mesmo que sai na mídia quando acontece algum acidente. Como por exemplo a veiculada no G1 após uma tragédia.

Figura 18 - G1: Desaparecimento do voo AF 447 – Fonte: <http://g1.globo.com/Noticias/Mundo/0,,MUL1177998-5602,00-AVIAO+FRANCES+DEIXA+DACAR+PARA+PARTICIPAR+NAS+BUSCAS+DIZ+AIR+FRANCE.html> (Visualizado 10/2017)

Assim, esta é uma questão que pode ser explorada, sem nenhum tipo de pretexto forçado. Quando o aluno fez esse questionamento, comecei a dizer que isso acontecia porque provamos qual dos dois era menor entre si, mas nunca verificamos se não havia um trajeto menor que aqueles mencionados anteriormente.

Nesse momento afirmei (sem provar) que a menor distância entre dois pontos é o $arco_E$ formado por esses pontos. Aqui já utilizando a definição de $arco_E$ da geometria esférica. Para deixar isso claro fizemos o cálculo da distância entre Brasília ($16^\circ S$ e $48^\circ O$) e Lusaka, capital da Zâmbia ($16^\circ S$ e $29^\circ L$).

Seja L o ponto que representa Lusaka

Figura 19 - Brasília-Lusaka – Fonte: Elaborada pelo autor

O comprimento x do arco $\widehat{BL}$ referente ao paralelo de Brasília foi obtido de maneira análoga a questão da Fuvest. Ou seja

$$\cos 16^\circ = \frac{BC_1}{R} \therefore BC_1 = 6400 \cdot \cos 16^\circ$$

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2\pi \cdot BC_1$
77°	— — —	x

$$\therefore x = \frac{77}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6400 \cdot \cos 16^\circ = 8.267,80 \text{ km}$$

Entramos então na geometria esférica e depois de definirmos o que seria uma *reta* e o que seria um *arco*, fomos calcular a medida do comprimento da reta $\widehat{BL}$. Para isso utilizamos o triângulo isósceles BC_1L e o triângulo isósceles OBL . Assim pudemos obter a medida do ângulo $\alpha = \widehat{BOL}$. Isto é

$$\begin{cases} BL^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \alpha \\ BL^2 = BC_1^2 + LC_1^2 - 2 \cdot BC_1 \cdot LC_1 \cdot \cos 77^\circ \end{cases}$$

Igualando as expressões tem-se

$$2R^2(1 - \cos \alpha) = 2BC_1^2(1 - \cos 77^\circ)$$

Substituindo BC_1 por $R \cdot \cos 16$ tem-se

$$2R^2(1 - \cos \alpha) = 2 \cdot (R \cdot \cos 16)^2 (1 - \cos 77^\circ)$$

Isolando o $\cos \alpha$ tem-se

$$\cos \alpha \cong 0,283836135776067$$

$$\therefore \alpha \cong 73,51^\circ$$

Dessa forma, obtivemos a distância esférica entre Brasília e Lusaka. Calculamos assim o comprimento x do arco:

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2\pi R$
$73,51^\circ$	— — —	x

$$\therefore x = \frac{73,51}{360} \cdot 2\pi \cdot 6400 = 8.211,22 \text{ km}$$

Nisso, os alunos perceberam, apesar do desgaste trazido com esses cálculos, que é o caminho mais curto não é aquele que eles esperavam. Que é necessário ir pela circunferência maior ao invés de ir pelo paralelo. Com isso inferimos que o caminho mais curto é o que não faz apenas as direções Norte-Sul ou Leste-Oeste. Estabelecemos assim o significado de geodésica, que é a menor distância entre dois pontos na superfície esférica.

Assim, os conceitos e ideias básicas por trás da geometria esférica foram tomando significado e se estabelecendo para os alunos.

6.2 O que temos disso na sala de aula

Apesar do desgaste das contas que fiz em sala, seja porque a resposta não era aquilo que alguns imaginavam, seja porque eles não conseguiam visualizar tudo aquilo em um globo terrestre (objeto intrínseco à geografia) acredito que os alunos tenham aproveitado e tomado interesse pela discussão. Sendo assim, por

que este assunto não costuma aparecer nas aulas de matemática durante a educação básica?

Se um dos principais norteadores do que deve ser ensinado em sala de aula é o livro didático, é importante que se entenda o quanto de geometria não euclidiana está contida neles.

No capítulo 1 mencionei o trabalho de Pataki & Almouloud “Equador, paralelos e meridianos: Apenas linhas imaginárias?” que fez um estudo sobre algumas produções que tratam da geometria esférica. Antes de detalhar um pouco mais sobre essas obras, é necessário que se perceba que a maior parte dos livros didáticos sequer abordam o conteúdo.

A Secretaria de Educação Básica, apresentou, na portaria nº 62, de 1º de agosto de 2017 as obras aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Olhando e analisando essa seleção de livros que são os vigentes, no mínimo, pelos anos de 2018, 2019 e 2020, pude realizar algumas constatações. Há um total de 8 coleções didáticas de matemática para o ensino médio. Para a maior parte dessas obras a geometria espacial aparece no segundo ano [em cinco dessas obras a geometria espacial está presente no material destinado ao segundo ano, em duas delas o conteúdo de geometria espacial aparece apenas no terceiro ano e na oitava obra o conteúdo de geometria espacial aparece em dois momentos, para o segundo ano são trabalhados os poliedros e, para o terceiro ano, os sólidos redondos], e a maioria se limita a estudar a Esfera como sólido espacial e seu estudo sempre recaia na parte métrica de cálculos de áreas e volumes. Explica-se sobre o fuso esférico, sobre a cunha esférica, mas seu ensino se dá até este ponto. Uma das obras chega a falar sobre trilateração e GPS, mas tem seu estudo feito no terceiro ano, utilizando geometria analítica para exemplificar e explicar esses assuntos.

Quero com isso deixar explícito que das 8 obras do PNLD que analisei, nenhuma faz menção à geometria esférica e que apenas uma delas dá importância significativa para trilatação e GPS, que podem ser usados para fomentar a curiosidade dos alunos e, a partir dessa geometria na esfera, servir de base para a geometria esférica. Isto tudo me faz levantar alguns questionamentos que elenco a partir agora:

Primeiro, se os livros do PNLD abordam apenas a geometria euclidiana e eles são provavelmente os livros que atingem a maior parte dos alunos, é de concluir que os alunos sequer sejam apresentados a uma geometria que não a euclidiana;

Segundo, se uma das aplicações cotidianas já está sendo debatida, como o GPS, por que não aproveitar esse espaço para uma apresentação de um assunto que pode instigar alguns jovens a ver outros tipos de geometria? De acordo com o artigo trinta e cinco da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), uma das finalidades do Ensino Médio é “possibilitar ao estudante a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.” Uma forma de atingir isso, dado o patamar tecnológico que a sociedade atual se encontra, é falar sobre localização no espaço, as distâncias entre pontos no planeta, e assim, a geometria esférica acaba surgindo;

Terceiro, o próprio Guia do PNLD evidencia uma mazela no que diz respeito às geometrias plana e espacial. De fato, podemos ler o seguinte:

Ainda com respeito à geometria espacial, nota-se tendência análoga à encontrada na apresentação da geometria plana, que é a ênfase nas classificações e a carência de problemas instigantes. Em especial, recai-se em monótonas aplicações da álgebra nos exercícios sobre áreas e volumes. Somente em algumas obras, mas ainda de modo incipiente e não de todo livre de imprecisões, observa-se maior exploração da capacidade de visualização

do estudante, tão necessária em estudos posteriores e em muitas profissões, como as ligadas à mecânica, à arquitetura e às artes (BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, MATEMÁTICA, 2017, p. 31).

Diante do exposto, fica claro que o ensino poderia ser mais contextualizado do que é. Percebe-se também que a geometria esférica, bem como as demais geometrias não euclidianas, não costuma aparecer em livros didáticos.

Tem-se assim uma conjuntura que vale a pena ser esmiuçada. Os livros do PNLD não abordam outras geometrias. As obras que tratam da geometria esférica, como em PATAKI e ALMOULOU, fazem pouco o estudo de forma teórica e por atividades contextualizadas. Segundo eles, apenas uma das obras analisadas juntam esses dois tópicos.

Curioso é o fato de que, na física, segundo o PNLD de física

... a maioria das coleções optou por introduzir os conceitos da Física Moderna e Contemporânea a partir de uma sequência histórica, destacando alguns temas e fazendo correlações com o cotidiano. A tecnologia envolvida nos dispositivos GPS (Global Positioning System, ou Sistema de Posicionamento Global), por exemplo, é apresentada como uma das aplicações da relatividade geral (BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, FÍSICA, 2017, p. 27-28).

Ou seja, a física já aborda relatividade geral, fala de GPS, todos assuntos intrínsecos a geometria esférica, mas a matemática não está nem próxima de discutir esse fato e os currículos devem ser corrigidos neste sentido.

Acredito que exista uma maneira de apresentar, ainda que de forma incipiente, a geometria Esférica e que assim, poderíamos ter um ensino de geometria diferente da euclidiana, nas salas de aula.

7 Encontro com o primeiro grupo de professores

Até aqui fiz um breve relato histórico para mostrar as dificuldades que já surgiram sobre o tema. Falei sobre algumas das potencialidades de se ensinar uma geometria como a esférica, o que me motivou a estudar este tema e como foi um debate realizado em sala de aula com os alunos de um curso preparatório para o vestibular. Na tentativa de encontrar uma abordagem que permita que isso seja feito em sala, estabeleci uma estratégia a qual destino a alunos que já tenham tido geometria espacial (usualmente no final do segundo ano do ensino médio ou no terceiro) e desenvolvi com alguns professores para ver qual a opinião deles sobre isso. Era um grupo de seis professores que lecionam atualmente em escolas da rede particular. Cinco deles no ensino médio e um nos anos finais do ensino fundamental II. Todos reunidos em um mesmo espaço, participaram da atividade que durou pouco mais de uma hora, no mês de junho. Ao final de cada problema proposto ao grupo eu tomava nota sobre como a discussão se deu e quais as opiniões que eles manifestaram para cada um deles.

A ideia era realizar essa avaliação inicial para verificar se a proposta estava adequada, se as estratégias imaginadas seriam exitosas e para aprimorar eventuais abordagens. Foram abordados os seguintes temas:

7.1 Algumas noções de geografia relativas ao tema

A fim de deixar evidente a potencialidade interdisciplinar desse projeto, decidi iniciar o debate lembrando a Rosa dos Ventos, os pontos cardeais e a necessidade de se localizar e se orientar no espaço. Além disso, achei necessário falar sobre o conceito de altitude, que é fundamental para a compreensão do sistema de posicionamento global (GPS). Para explicar tal conceito, foi importante falar um pouco sobre o espaço cartesiano.

Feito isso, com o auxílio de um globo terrestre, discuti, brevemente, sobre os conceitos de latitude e longitude, uma vez que são conceitos importantíssimos para a localização de um ponto na geometria esférica, ou seja, fundamentais para as atividades seguintes. Com isso, aproveitei para definir o conceito de pontos antípodas. A definição foi trabalhada apontando no globo terrestre o que são pontos diametralmente opostos.

Entreguei a cada um dos professores uma resma que continha seis problemas (todos resolvidos no Apêndice III). Na página 1 havia a questão a seguir:

(FUVEST – 2015 – Primeira Fase) Problema 1 *Diz-se que dois pontos da superfície terrestre são antípodas quando o segmento de reta que os une passa pelo centro da Terra.*

Podem ser encontradas, em sites da internet, representações, como a reproduzida abaixo, em que as áreas escuras identificam os pontos da superfície terrestre que ficam, assim como os seus antípodas, sobre terra firme. Por exemplo, os pontos antípodas de parte do sul da América do Sul estão no leste da Ásia.

Figura 20 – Questão da FUVEST – Fonte: FUVEST - 2015

Se um ponto tem latitude x graus norte e longitude y graus leste, então seu antípoda tem latitude e longitude, respectivamente,

a) x graus sul e y graus oeste.

- b) x graus sul e $(180 - y)$ graus oeste.
- c) $(90 - x)$ graus sul e y graus oeste.
- d) $(90 - x)$ graus sul e $(180 - y)$ graus oeste.
- e) $(90 - x)$ graus sul e $(90 - y)$ graus oeste.

Depois de resolver a questão anterior, com o intuito de falar sobre altitude, pedi a eles que dessem uma olhada na segunda página das folhas que eu havia entregue:

(UFF – 2012 – Primeira Fase) Problema 2 O sistema de posicionamento global (GPS) funciona, utilizando-se uma rede de satélites distribuídos em torno da Terra. Ao receber os sinais dos satélites, o aparelho receptor GPS calcula sua posição $P = (a, b, c)$ com relação a um certo sistema ortogonal de coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^3$ e, depois, converte essas coordenadas cartesianas para coordenadas geográficas: latitude ϕ , longitude λ e elevação ρ . Se $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então ϕ é o ângulo entre os vetores (a, b, c) e $(a, b, 0)$, λ é o ângulo entre os vetores $(a, b, 0)$ e $(1, 0, 0)$ e ρ é a distância da origem do sistema de coordenadas ao ponto P , conforme a figura abaixo.

Figura 21 - Questão da UFF - Fonte: UFF 2012

Para $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, assinale a alternativa correta.

a) $a = \rho \cos(\phi) \cos(\lambda)$, $b = \rho \sin(\phi) \cos(\lambda)$, $c = \rho \sin(\lambda)$

b) $a = \rho \sin(\phi) \cos(\lambda)$, $b = \rho \sin(\phi) \sin(\lambda)$, $c = \rho \cos(\phi)$

c) $a = \rho \cos(\phi) \sin(\lambda)$, $b = \rho \cos(\phi) \cos(\lambda)$, $c = \rho \sin(\phi)$

d) $a = \rho \sin(\phi) \sin(\lambda)$, $b = \rho \sin(\phi) \cos(\lambda)$, $c = \rho \cos(\phi)$

e) $a = \rho \cos(\phi) \cos(\lambda)$, $b = \rho \cos(\phi) \sin(\lambda)$, $c = \rho \sin(\phi)$

7.2 O menor caminho entre dois pontos

Feito isso, introduzi o conceito de $reta_E$. Depois de muito debate e de entendido o que é $reta_E$ exibi o conceito de $arco_E$ e de $distância esférica_E$. Passamos para a próxima página do material entregue onde continha o problema a seguir.

(COMVEST – 2005 – Segunda Fase) Problema 3 *O sistema de projeção do mapa abaixo foi criado por Mercator em 1569 com o objetivo de facilitar as navegações marítimas. Observe o mapa e faça o que se pede:*

Adaptado de Igor Moreira, *O Espaço Geográfico: Geografia Geral e do Brasil*.

Figura 22 - Questão da UNICAMP - Fonte: Comvest 2005

O mapa indica três possibilidades de rotas marítimas entre as cidades de Montevidéu (Uruguai) e Cidade do Cabo (África do Sul). Identifique qual das três rotas é a menor. Justifique sua resposta.

Essa questão é interessante pois apresenta, ainda que não precise ser mencionado, o conceito de ortodromia, que é “a menor distância entre dois pontos, sobre uma superfície esférica ou elipsoidal”(AGUIRRE e MELLO FILHO, 2009).

7.3 Cálculos

Depois dessa explanação toda foi necessário obter a *distância esférica*_E. Falei que eles poderiam utilizar qualquer assunto da matemática apresentado numa sala de aula. Pedi então para eles tentarem fazer as questões das últimas três páginas, contendo as três situações a seguir para que calculássemos algumas *distâncias*_E.

Situação I: Quando o trajeto se faz por um dos paralelos

(VUNESP – 2018/2 – Primeira Fase) Problema 4 Observe a figura da representação dos pontos *M* e *N* sobre a superfície da Terra.

Figura 23 - Questão VUNESP - Fonte: UNESP 2018/2

Considerando a Terra uma esfera de raio 6 400 km e adotando $\pi = 3$, para ir do ponto *M* ao ponto *N*, pela superfície da Terra e no sentido indicado pelas setas vermelhas, a distância percorrida sobre o paralelo 60° Norte será igual a

- a) 2100 km. b) 1600 km. c) 2700 km. d) 1800 km. e) 1200 km.

Situação II: Quando o trajeto se faz por um dos meridianos (que é a distância esférica):

(UFF – 2004 – Primeira Fase) Problema 5 A localização de um ponto qualquer na superfície da Terra (considerada como uma esfera) é feita, em geral, a partir de duas coordenadas, sendo uma delas a latitude – que é o ângulo (em grau) entre o plano que contém a linha do equador e o segmento que une o centro da esfera ao ponto em questão.

Sabe-se que as cidades de Porto Alegre e de Macapá se situam, praticamente, no mesmo meridiano.

Considere que a cidade de Macapá (ponto *M*) localiza-se bem próximo da linha do equador (latitude = 0°02'20" ao norte); que a latitude de Porto Alegre

(ponto P) é de $30^{\circ}01'59''$ ao sul e que o valor do diâmetro da Terra é de 12.750 quilômetros. Veja figura a seguir:

Figura 24 - Questão UFF - Fonte: UFF 2004

Tendo em vista tais considerações, pode-se afirmar que a distância, em quilômetro, entre as duas cidades é de aproximadamente:

- a) 2300 b) 3300 c) 4600 d) 6600 e) 9000

Por fim mostraria a situação mais trabalhosa:

Situação III: A *distância esférica* $_E$ quando o *arco* $_E$ não coincide com o meridiano.

(FUVEST – 2018 – Segunda Fase – 3ºDia) Problema 6 Um navio parte do ponto de latitude 0° e longitude 0° e navega até chegar a um ponto de latitude 45° sul e longitude 45° oeste, seguindo a trajetória que minimiza a distância percorrida. Admita que a Terra seja esférica de raio $R = 6000$ km. Qual foi a distância percorrida pelo navio?

Figura 25 - Questão FUVEST - Fonte: FUVEST 2018

7.4 Análise do encontro com os professores

O problema 1 foi mais difícil do que eu esperava. Em virtude de utilizarmos conceitos da geografia vistos sob um olhar matemático, até a consolidação desse conceito, a discussão não foi tão fluida quanto eu esperava. Assim que não restavam dúvidas sobre o conteúdo, a questão foi resolvida de forma simples. A estratégia que eles preferiram foi a de desenhar um sistema de eixos coordenados. Provavelmente por estarem mais familiarizados com a Geometria Analítica do que com a geografia.

Já o problema 2 foi mais rápido, provavelmente porque os professores ali presentes trabalham com este tipo de questão com maior frequência.

No problema 3, como eu já havia definido o que é reta, esperava que a resposta para o problema fosse rápida. Mas, para a minha surpresa, ainda que eles tenham ficado maravilhados com aquilo e tenham dado a resposta oficial de forma bastante rápida, um deles levantou uma discussão que eu mesmo não havia parado para pensar.

“A questão em si foi, como fazer para ter a certeza de que a Rota C é a menor delas? Só porque foi pra baixo podemos tirar essa conclusão?” No que outro professor já pegou a sua folha e disse, “pois é, isso estava me incomodando” enquanto rabiscava na folha (Figura 26) dizia “qual das trajetórias é menor, a 1, a

C, a 2 ou 3? E se nós não sabemos nem isso, não é possível que uma delas, sei lá, a 3 seja inclusive maior que A? Como saber que nenhuma dessas vai ser maior que B e a C?”

Figura 26 – Rascunho de um professor – Fonte: Elaborada pelo autor

De fato, é possível que alguma das três seja maior inclusive que ambas as rotas A e B apresentadas no problema. As informações do exercício não permitem saber, com maior precisão, qual delas é a menor. Assim, apesar da questão requerer uma análise superficial do conhecimento de ortodromia (que é a resposta oficial), com os dados que foram apresentados a questão é inconclusiva.

Ainda que possua imprecisões, é uma questão interessante que nos permite verificar o conhecimento dos alunos. No vestibular da Unicamp, este era o item c de uma questão. E, no site da COMVEST, eles exibiram algumas respostas como:

c) A Reta ~~OC~~ pela projeção de Mercator a distância é mais real na região do equador, e maior conforme se aproxima dos polos. Portanto, apesar de a reta ~~OC~~ não ser uma linha reta, é a que possui menor distância, uma vez que ~~os~~ mais perto do polo, menor a distância.

Figura 27 - Resposta I dada por vestibulandos – Fonte: COMVEST 2005

c, a rota menor é a rota A pois nela há cidades antes.

Figura 28 - Resposta II dada por vestibulandos – Fonte: COMVEST 2005

Além disso, nos comentários sobre a questão, mostram que “o item c apresentou um grande número de erros, demonstrando que faltam aos candidatos, no Ensino Fundamental e Médio, exemplificações práticas por parte do professor sobre o uso e consequências das projeções cartográficas” (<http://www.comvest.unicamp.br/vestibulares-antiores/1a-fase-2a-fase-comentadas/>). Isso é mais um indício dessa carência dos alunos em lidar com esse tipo de situação e que podemos de fato juntar geografia e matemática a fim de que esse tipo de assunto não seja tão estranho.

Percebi também, ao realizar essa atividade com esses professores, que eu deveria ter começado pelo problema 5 ao invés do 4. O 5 foi muito mais rápido e o 4 levou um tempo maior para que obtivéssemos o menor ângulo central da circunferência do paralelo 60° Norte que enxerga os pontos M e N. Na verdade, o problema 5 foi quase que imediato, todos enxergaram a fração do comprimento da circunferência. Já no 4, depois que a figura foi feita em um tamanho razoável, maior do que a questão que eles tinham na sua frente, um dos professores começou a fazer as contas e todos os demais acompanharam e indagaram quando tiveram suas dúvidas. No final, todos entenderam.

A questão 6, por sua vez, foi o que pode ser chamada de problemática. Uma questão muito difícil e que, no final, só levantou a discussão sobre qual aluno, na hora de uma prova de vestibular, faria aquilo que estávamos fazendo. Depois de ficarem se perguntando sobre aquela questão, fui resolver a questão para eles e a cada passagem de contas que fazia, eles mostravam certo descontentamento sobre aquilo tudo: “Se nós já estamos sofrendo com isso, que dirá um aluno quando apresentarmos isso numa sala de aula.” foram as palavras de um dos professores. Palavras essas que todos concordaram. Desse momento em diante a conversa se encaminhou para um debate envolvendo os conteúdos cobrados nos vestibulares e o quanto somos conteudistas e qual a relevância disso dentro do contexto em que vivemos.

7.5 Avaliação da atividade pelos professores

Note que, até aqui eu não falei das potencialidades do ensino desse conteúdo. Acreditando que os professores chegariam a esse tipo de conclusão por conta própria. Para avaliar como foi o encontro fiz as seguintes perguntas aos professores, anotando suas respostas à medida que eles iam respondendo e conversando:

1. Na sua opinião, quais as vantagens que você percebe no ensino desse tipo de conteúdo no ensino médio?

Obtive como respostas: “é bom porque assim os alunos estarão aptos a resolver esses tipo de exercício”, “vale a pena para que os alunos possam entender como se faz o deslocamento no planeta”, “é da hora [sic] pra juntar com outra matéria”, “é vantagem porque vai ajudar a passar no vestibular” e até mesmo um “é bom porque junta com a geografia e exalta o fato da terra não ser plana.”

2. Na sua opinião, quais as desvantagens de aplicar esse tipo de conteúdo no ensino médio?

Aqui a resposta foi mais uníssona. De maneiras diferentes foi apontado que “o problema final desestimula os envolvidos”, que “vários alunos, vão reclamar que não entendem as coisas nem de forma isolada, que dirá juntamente” e “falta tempo pra abordar isso”

3. Você acredita que isso deva estar na grade curricular da educação básica?

Neste momento admito que fiz a pergunta de maneira equivocada, uma vez que ela é respondida apenas com uma palavra e, para matemáticos, isso é o suficiente. As respostas foram, em sua maioria, lacônicas e, na sua totalidade, negativas. A única resposta mais extensa alegou que para isso entrar, algo teria de sair e não sabia ao certo o que sairia.

4. A que você atribui a escassez desse estudo em salas de aula?

As únicas respostas foram estas que escrevo em ordem decrescente de quantidades: falta de tempo, receio da aceitação dos alunos, preparo do professor.

5. Com essa atividade o aluno está apto a responder corretamente a tabela seguir?

	<i>No plano</i>	<i>Na esfera</i>
<i>1. O comprimento da reta é finito ou infinito?</i>		

2. Descreva qual o menor caminho entre dois pontos.		
3. Em quantas partes dois pontos dividem uma linha? (Essas partes são finitas ou infinitas)?		
4. Quantas retas passam por dois pontos distintos?		
5. Quantas paralelas a uma determinada reta passam por um ponto não contido nessa reta?		
6. Se três pontos são colineares, é correto afirmar que um deles está entre os outros?		

Tabela 1 - Comparação entre as geometrias

Como nos outros momentos, ao receberem essa tabela, os professores começaram a preenche-la então, pedi para que só discutissem entre si depois que tivessem entregue. No que diz respeito a geometria esférica, as respostas dadas foram:

	<i>Na esfera</i>
<i>1. O comprimento da reta é finito ou infinito?</i>	Finito (6)
<i>2. Descreva qual o menor caminho entre dois pontos.</i>	Reta (6)

3. Em quantas partes dois pontos dividem uma linha? (Essas partes são finitas ou infinitas)?	Duas partes finitas (6)
4. Quantas retas passam por dois pontos distintos?	Uma (3) Infinitas (2) Depende (1)
5. Quantas paralelas a uma determinada reta passam por um ponto não contido nessa reta?	Nenhuma (5) Uma (1)
6. Se três pontos são colineares, é correto afirmar que um deles está entre os outros?	Não (1) Sim (5)

Tabela 2 - Tabela 1 - Comparação entre as geometrias - Respostas

A discussão deles foi onde as respostas não coincidiram. Na questão 4 o que houve foi que duas pessoas pegaram os polos e perceberam que tinham infinitas retas, três pegaram dois pontos quaisquer, mas não antípodas, e viram que só tinha uma e apenas um disse que é impossível responder sem saber qual o ponto.

Na questão 5 a pessoa que respondeu erroneamente esqueceu de prolongar o *segmento_E*, criando assim uma *reta_E*. Mostrando como tinha pensado e esboçado, os desenhos de fato não se cruzavam, entretanto, ao mostrar que quando a *reta* fosse prolongada, as duas *retas* se cruzariam, o professor concordou com os demais.

Na questão 6, todos trabalharam com a linha do Equador. A resposta foi diferente porque um deles desconfiou da frase “um deles estar entre os outros”, quando para ele, todos estavam entre todos. Mas fora isso, nesta questão, nenhum problema surgiu.

Assim, eles ficaram falando sobre a tabela e esqueceram de responder à questão, que fiz novamente “***Com essa atividade o aluno está apto a responder corretamente a tabela seguir?***”

A resposta foi sempre a mesma e da mesma maneira: não. Pedindo para eles elaborarem um pouco mais, eles me disseram que “os alunos terão as ferramentas, mas, por se tratar de um primeiro contato, responder aquilo para eles não será fácil” e “não sei nem se eles fazem de forma tranquila a parte da euclidiana, que dirá essa que eles não tão acostumados.”

7.6 Análise da atividade desenvolvida pelo grupo de professores

Tendo aplicado esta sequência de questões para esses professores, percebi que essa estratégia tenha sido falha em diversos pontos.

Uma das práticas que realizei, mas se mostrou ineficaz, foi a de entregar, de uma única vez as questões que seriam abordadas. Isso foi um problema, pois, ao receberem o material, as atenções deles se voltaram para tentar resolver os exercícios. Sendo assim, ao longo de minha própria fala, fui mudando o caminho, encurtando algumas passagens e explicações, a fim de não fazer o público, que era pequeno, dispersar.

Assim, para os envolvidos, o encontro foi mais para nos reunirmos e resolvermos exercícios do que propriamente avaliar a abordagem de um tópico pouco explorado em sala de aula. As únicas parte em que a discussão aconteceu de verdade foram: no **problema 3**, uma vez que era necessário falar sobre o caminho mais curto numa superfície esférica, algo que eles não sabiam, e ficaram fascinados, e por conta do debate levantado pelo questionamento mencionado acima e no **problema 6**, talvez pelo cansaço, uma vez que era a última questão, mas certamente por ser um questão cujo nível de dificuldade era elevado, fez com que o “trabalho em equipe” tenha tomado mais forma.

De acordo com o (Congresso Nacional de Educação 2016) ao realizar pesquisas, questionário e formulários apresentam desvantagens que não são palatáveis neste momento, tais quais: impossibilidade de ajudar o informante em

questões mal compreendidas, dificuldade de compreensão, por parte dos informantes, leva a uma uniformidade aparente, leitura de todas as perguntas, antes de respondê-las, pode fazer com que uma questão influencie outra (como ocorreu), menos prazo para responder às perguntas, não havendo tempo para pensar, elas podem ser invalidadas.

Sob posse de tudo isso, reformulei a dinâmica do segundo encontro. Além do questionário em si, creio que a questão 2 deva realmente ser trocada e que não é necessário falar de elevação/altitude para atrair a atenção dos alunos para o tema. Acredito também que faltou um exemplo de cálculos reais e por diferentes trajetórias, similar ao que fiz naquela sala de aula, falando sobre a distância entre Lusaka e Brasília (vide capítulo 5). Penso que é necessário mostrar, através de exemplos e cálculos que a menor distância é a distância esférica e não caminhar por paralelos. Isso inclusive deve ajudar a entender melhor o problema 3. Questão essa que, me deu a impressão, que alguns aceitaram mais do que concordaram.

Dito isso, levo a crer que a ordem dos problemas poderia ser diferente, que um dos problemas precisa ser radicalmente repensado e o problema 6 poderia ser aquele desafio para um ou outro indivíduo que são da área e se sentem atraídos pelo conteúdo.

Fiz uma nova proposta de atividades levando tudo isso em consideração. O ponto nevrálgico dessa mudança era fazer com que o tempo destinado ao encontro fosse mais utilizado para instigar o professor na geometria na esfera e ponderar sobre os prós e contras que os professores imaginam que existirão em uma sala de aula, ao invés do tempo ser majoritariamente utilizado para realizar as operações matemáticas por trás das questões.

8 Encontro com o segundo grupo de professores

Neste capítulo falo sobre os entrevistados, exibindo o que apresentei a eles e os seus comentários e respostas a cerca de minhas indagações.

8.1 Sobre os entrevistados

Conversei com um total de vinte e um professores. Como todos os envolvidos trabalham em mais de uma instituição e alguns trabalham em mais de uma cidade, considero que o grupo seja heterogêneo e a quantidade de alunos que poderiam se beneficiar de uma eventual mudança de olhar dos professores participantes é considerável.

Dado a impossibilidade de juntar um grupo grande como esse, devido a rotina de todos os envolvidos, acabei optando por realizar encontros menores, durante a semana, no sábado e até mesmo no feriado, no final do mês de agosto e começo do mês de setembro. Chamarei a partir daqui os professores por uma sigla que designa em qual encontro falei com ele(a) e uma numeração, posto que houve momentos em que mais de um(a) professor(a) foi entrevistado. Os encontros todos duraram de uma hora a uma hora e meia e se sucederam da seguinte maneira:

Encontro primeiro: Conversei com um professor (E1P1) que leciona em três municípios de São Paulo (Osasco, Granja Viana e São Paulo), um deles local em que nós já dividimos uma turma (cada um responsável por ensinar uma parte da matemática). Ele dá aula para o ensino médio e para cursinhos pré-vestibulares, todos no ensino particular. Esse professor deu muito mais aulas de álgebra do que de geometria. Neste ano só tem ensinado geometria, para todos os seus alunos, independente do segmento. No encontro tínhamos como material: folhas, canetas, fotos/ilustrações e o globo terrestre (Figura 29).

Figura 29 - Globo utilizado nos encontros – Fonte: Elaborada pelo autor

Encontro segundo: Conversei com um professor (E2P1) que leciona no Ensino Médio de uma escola em São Paulo. Apesar de não ser a sua área predileta, atualmente leciona apenas geometria. Nesse encontro dispunha de quase todos os materiais, a exceção do globo.

Encontro terceiro: Encontrei quatro professores (E3P1, E3P2, E3P3 e E3P4). O professor E3P1 trabalha em São Paulo e no ABC, ensinando alunos do ensino médio e voltados para o vestibular, o professor E3P2, atualmente está mais voltado para a parte editorial e dando aulas particulares, o professor E3P3 trabalha numa escola de aulas particulares em São Paulo e o professor E3P4 atua em uma escola dando aula para o nono ano e para o ensino médio e para quem quer entrar na faculdade, em um cursinho popular. Nesse encontro tinha posse do material completo.

Encontro quarto: Conversei com o professor (E4P1). Apesar de já ter dado aula no Ensino Básico, atualmente ele leciona em cursinhos pré-vestibulares, além

da faculdade. É, de todos os professores que conversei, o primeiro que possui mestrado. Neste encontro eu tinha todo o material necessário.

Encontro quinto: Conversei com a professora (E5P1) e um professor (E5P2). Os dois lecionam numa escola particular, enquanto E5P1 ensina o ensino fundamental II (oitavo e nono ano, para ser mais específico), o segundo ensina o ensino médio (primeiro e segundo ano, para ser mais específico). Nesta reunião eu também dispunha de todos os materiais que precisava.

Encontro sexto: Encontrei duas professoras (E6P1 e E6P2) e dois professores (E6P3 e E6P4). Todos eles estão se formando, mas já atuam como professores tirando dúvidas de alunos no plantão de dúvidas que existe em suas respectivas escolas. Neste encontro pude mostrar as imagens e fazer as figuras, mas não dispunha de um globo terrestre.

Encontro sétimo: Conversei com um professor (E7P1), que trabalha num curso pré-vestibular. Este professor que já trabalhou em vários lugares, carrega uma experiência de mais de trinta anos na mesma empresa onde ensina e escreve materiais didáticos. Neste encontro dispunha de todo o aparato utilizado nos outros encontros.

Encontro oitavo: Reuni-me com quatro professores (E8P1, E8P2, E8P3 e E8P4). Conhecia previamente o E8P1 e, ao falar com ele sobre a entrevista, ele disse que conhecia outros professores que talvez pudessem auxiliar nesse trabalho. O E8P1 possui mestrado e atua no ensino superior enquanto E8P2, E8P3 e E8P4 trabalham em escolas particulares, lecionando para o ensino médio. Os últimos três são recém-formados e tem menos experiência em sala de aula. Para essa reunião levei todo o material, incluindo o globo.

Encontro nono: Juntei-me com dois professores (E9P1 e E9P2) com todo material que precisava. O E9P1 trabalha há quinze anos como professor e é responsável por escrever material didático também. A professora E9P2 trabalha

há cinco anos na sala de aula e dá aula para o nono ano do fundamental e primeiro ano do ensino médio. Os dois atuam dentro e fora da cidade de São Paulo.

Encontro Décimo: Conversei com um professor (E10P1) que é, de todos, o que tem mais tempo lecionando. São mais de quarenta anos de sala de aula. Já tendo lecionado o final do ensino fundamental II, mas nos últimos tempos tem ficado com o Ensino Médio. Neste o globo, bem como os demais materiais, estavam presentes e foram utilizados.

Comuniquei a eles que a conversa seria gravada, alertando para o fato de que as informações pessoais serão confidenciais. Entregando a eles um documento que assegure o caráter sigiloso de seus dados pessoais, deixei claro que a identidade de cada um deles será omitida. Foram instruídos a assinar esse documento em duas vias, ficando uma com o entrevistado e outra com o entrevistador. Esse documento pode ser visto no anexo 2.

Essa estratégia de realizar a entrevista conversando, ao invés de entregar todas as folhas, colher informações e evitar conversas com os entrevistados, apresenta seus prejuízos, como, por exemplo, a possibilidade de o entrevistado se sentir influenciado, consciente ou inconscientemente, pelo mediador. Ainda assim, acredito que são perdas aceitáveis porque, mesmo com esses contras, a conversa aconteceu de maneira mais livre, ou seja, sem o preenchimento de fichas para que o debate não ficasse enrijecido e na tentativa de evitar que qualquer agente exógeno influenciasse nas respostas.

8.2 Sobre os encontros realizados

8.2.1 Apresentando as coordenadas geográficas

Colocado ou desenhado o globo terrestre para cada grupo de professores, verifiquei se eles se sentiam seguros para que eu utilizasse verbetes específicos da geografia, tais quais latitude e longitude, que formam o que se define como coordenadas geográficas. Defini conforme apresentado no capítulo 6, isto é:

*A **latitude** de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul).*

*A **longitude** de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste). (ALVES, 2009, p. 10)*

Assim que isso estava estabelecido, sobre o globo terrestre desenhado, marquei três pontos a partir de suas coordenadas. Eles foram:

- ▷ S: São Paulo (23°26' S e 46°30' O)
- ▷ A: Austrália Ocidental (23°26' S e 116°30' L)
- ▷ P: Pequim (40° N e 116°30' L)

Ao marcar esses pontos no desenho, avisei que os pontos tinham sido escolhidos por permitir uma série de contextos e interdisciplinaridades. Contextos dos mais diversos que permitiam interlocução com outras áreas. Assim, avisei que o ponto S fora escolhido porque é o estado em que vivemos e isso, por si só, já serve de alicerce para uma série de interlocuções com a geografia e com a história. Com isso, alego que se poderia falar do fato de ser uma das metrópoles mais populosas do planeta, que representa o maior Produto Interno Bruto (PIB) do território nacional. Que, além disso, poderia ser utilizado em diálogos com português, artes e educação física, em virtude de ter sediado uma série de eventos artísticos/desportivos importantes como a Semana da Arte Moderna de 1922, Copa do Mundo de Futebol Masculino de 2014, Jogos Pan-Americanos de 1963, Campeonato Mundial de Basquetebol Feminino em 1983 e 2006, Grande Prêmio do Brasil de Fórmula 1 ou por abrigar referências como o Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (MASP), o Museu do Ipiranga. Dizendo também que,

caso fosse do interesse, outra possibilidade seria trabalhar com as questões de meio ambiente da cidade, o que nos leva a escolha do segundo ponto;

Austrália Ocidental é um estado da Austrália que apresenta a mesma latitude que o estado de São Paulo. De fato, o Trópico de Capricórnio passa pelos dois estados o que já permite verificar semelhanças e diferenças entre as situações climáticas de duas regiões que possuem a mesma latitude, levando a explorar que outros fatores podem influenciar isso. Dito isso, pode-se falar da região que esse estado ocupa, que é uma área equivalente a um terço do território australiano. Isso faz com que ele seja o segundo maior estado do mundo. Ou seja, é um território de grande área, o que não o faz populoso como São Paulo ou como Pequim, que é o terceiro ponto;

Pequim é a capital da China e uma das maiores metrópoles do mundo. E, se o assunto é China, a história e a geografia podem explorar isso de diversas formas que impactam tanto o cenário brasileiro quanto a conjuntura internacional.

A interdisciplinaridade é possibilitada devido ao fato de que, enquanto é necessário construir conhecimentos matemáticos também é necessário construir conhecimentos geográficos, tais quais localização, verbetes específicos da geografia e de cartografia.

Enquanto falava sobre a escolha dos pontos e exibia suas localizações na folha ou no globo, alguns entrevistados fizeram observações, tais quais:

Encontro primeiro: “*Essas são as coordenadas reais!?*” (E1P1) me questionou o professor, enquanto ele pegava o globo, que ainda não estava sendo usado, para verificar a veracidade do que eu havia mencionado.

Encontro segundo: “*A Austrália Ocidental está na Austrália e é o segundo maior estado do planeta!? Qual é o primeiro?*” (E2P1)

Encontro quarto: “*Na verdade o trópico passa por Guararema, não!?*” (E4P1)

Encontro quinto: Ao ver o globo, o professor disse: “*Uma coisa, antes de começar. Eu não entendi o porquê de ter o monstro do Lago Ness. Isso eu acho demais, tem até seres mitológicos nesse globo.*” (E5P2)

Encontro sexto: Ao falar de Pequim E6P3 indagou se ele estava em algum ponto estratégico a partir dos pontos S e A. De fato, as reais palavras dele foram “*Pequim está na mediatriz de São Paulo e desse estado da Austrália ou algo do gênero?*” (E6P3) Algo que garanti não ser verdade. No que um de seus amigos disse: “*Nossa, agora você fez uma viagem a parte hein.*” (E6P4)

8.2.2 Deslocando-se pelo meridiano

Neste momento indaguei o grupo de professores sobre como calcular a distância percorrida por um avião que saiu de Pequim e foi até a Austrália Oriental pelo meridiano. A ideia era mostrar que o cálculo poderia ser feito através de um arco de circunferência cujo raio é igual ao raio da Terra.

Assim, adotando a Terra como uma esfera cujo raio mede 6 400 km e já cientes de que o meridiano é uma semicircunferência de raio igual ao do planeta, calculei a distância utilizando uma regra de três simples. Dado que os pontos apresentam uma diferença de $63^{\circ}26'$ no sentido norte-sul, e nenhuma oscilação no sentido leste-oeste, a distância x , em quilômetros, pode ser obtida por:

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2 \cdot \pi \cdot 6400$
$63^{\circ}26'$	— — —	x

Assim, com o uso de uma calculadora, fiz o cálculo juntamente com eles e concluímos que a distância é aproximadamente igual a 7.085,6 km.

Deixei claro para todos que o intuito não era verificar se eles sabiam realizar a conta, assim, fui apenas apresentando as passagens. E enquanto fui mostrando os valores, contas e resultado, tivemos as seguintes falas dos professores:

Encontro primeiro: *“Nessa atividade que você tá propondo, vai ser liberado o uso de calculadora? Porque se for liberar, pode deixar esses números mesmo. Mas se não puder, é bom trocar pra algo menos intimidador”* (E1P1)

Encontro terceiro: *“Mas não é dezesseis e uns quebrados [sobre a angulação entre as cidades]”* (E3P3) e *“Não. Se liga que tá um pra cima e outro pra baixo [sic]”* (E3P1)

Encontro sétimo: *“Ah, esse é fácil, pelo meridiano, porque você tem esse ângulo central então é uma fração da circunferência.”* (E7P1). Na verdade, a maior parte dos professores que se manifestaram, disseram isso.

Encontro nono: *“Nossa, não me lembro da última vez que falei de (grau) minuto e segundo numa sala de aula”* (E9P1), na medida que a outra professora disse *“Então, a gente ensina isso pra eles lá no fundamental, mas fica um assunto meio perdido com o passar do tempo”* (E9P2)

Mostrei, logo depois do resultado teórico ter sido obtido, que com o uso da tecnologia podemos até calcular a distância entre esses dois pontos diretamente, a fim de verificar quão boa é essa aproximação. Assim, exibi para eles a imagem a seguir, que havia construído previamente no <https://www.google.com.br/maps:>

Figura 30 - Distância entre P e A – Fonte: Elaborada pelo autor

Deixando claro para eles que isso apresenta um problema, posto que a imagem é feita marcando os pontos de forma um tanto quanto imprecisa. Na verdade, não coloquei as coordenadas, mas marquei os pontos de acordo com uma aproximação visual. Assim, localizei o ponto A e, por estimativa, marquei o ponto P.

Depois mostrei a planificação do deslocamento apresentado por um site (<https://pt.distance.to/>) em que as coordenadas foram devidamente marcadas. Mostrei ao grupo a imagem que levei pronta em alguns encontros e construí na

hora em outros. Conforme podemos observar na ilustração a seguir, ao colocar as coordenadas o site gera uma imagem com a distância e o trajeto mais curto entre os pontos:

Figura 31 - Distância entre P e A, com coordenadas – Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, pudemos concluir que a distância real (acreditando que o site fornece a distância almejada) é igual a 7.051,94 km. Ou seja, a estimativa apresenta um erro menor do que um por cento.

Com isso, ouvi coisas como:

Encontro primeiro: *“Poxa, tá ótimo então o cálculo que fizemos. Mesmo porque temos um globo que não é uma esfera exatamente. E, que da hora, a gente ainda ficou mais próximo que o valor que você estimou no google maps.”* (E1P1)

Encontro segundo: *“Ah, tá bem perto. Trinta quilômetros não é nada em sete mil.”* (E2P1)

Encontro terceiro: *“Cinquenta quilômetros em sete mil é um erro irrisório.”* (E3P2)

Encontro quarto: *“Tá, mas a gente fez a conta com 6 400 km. Quem foi que disse que a Terra tem isso de raio e quem disse que a Terra é esférica? Na verdade, ela é achatada. Na verdade, o número real, ele tem que ser menor do que o número ideal. Então é esperado. Acho até que seria legal discutir essa ideia do erro. Tipo, ‘por que esse erro acontece?’, ‘Por que a medição teórica não funciona com a observada?’ Ou seja, em que momento o modelo ele deixa de refletir a realidade. O modelo não reflete o que está acontecendo no mundo. Todo modelo é idealizado, senão não seria modelo. Aí mostrar, que existe diferença mesmo, mas qual o problema disso!?”* (E4P1)

Encontro quinto: Assim que eu mostrei o resultado real disse: *“Mas ela não é uma esfera, por isso que dá essa margem de erro. Mas pra que idade você tá pensando em aplicar isso?”* (E5P1)

Encontro sétimo: *“Olha que bacana. Excelente. Pra ordem de grandeza, achei muito bom.”* (E7P1)

Feito isso, perguntei a todos se faria diferença realizar esse cálculo com outros dois pontos que possuam a mesma longitude entre si (não necessariamente iguais a longitude dos pontos P e A), mas latitudes que também diferem de $63^{\circ}26'$. Para alguns fiz a indagação exatamente assim, para outros, apontei no globo, com os dedos, os pontos A e P e mexendo a mão por volta do globo, evitando alterar a

distância entre os dedos, perguntei se faria diferença calcular nesses outros pontos. A intenção era mostrar que o trajeto pelos meridianos não altera a distância percorrida. Aqui ouvi as seguintes respostas:

Encontro primeiro: O professor disse “*Não faria diferença, faria!?*” Quando confirmei que não, ele disse, “*É, então, porque você está pegando retas paralelas, e o ângulo é o mesmo, não faz sentido mudar.*” Apontando percebi que ele estava imaginando que os pontos seriam marcados ainda sobre os mesmos paralelos. Ao questionar se faria diferença mudar os paralelos, mas manter a diferença entre eles, ele então disse “*Não, também não deve fazer diferença nenhuma.*” (E1P1)

Daí em diante, as respostas foram todas similares a: “*Em teoria tem que dar a mesma coisa.*” (E7P1), “*Supondo a Terra perfeitamente redonda, sim.*” (E10P1), “*Como todas as linhas de longitude tem o mesmo raio, não faz diferença.*” (E9P2) e até mesmo um “*Se tiverem o mesmo x, mas o y for diferente, sim. Mesma coisa.*” (E5P1)

Discutido sobre isso, levei a discussão para o cálculo da distância, se fosse feito o deslocamento entre dois pontos por um paralelo.

8.2.3 Deslocando-se pelo paralelo

Com o auxílio do globo ou sob posse apenas das coordenadas em uma folha (casos em que não pude trabalhar com o globo), verifiquei com eles qual é a menor distância, deslocando-se apenas pelo trópico de Capricórnio, do ponto A ao ponto S. Mostrei que é importante tomar cuidado com isso pois, utilizando a projeção de Mercator, é possível trabalhar com duas situações:

Situação I – Indo de A até S deslocando-se no sentido Leste-Oeste:

Figura 32 - Planisfério com pontos P, A e S - Visão I – Fonte: Elaborada pelo autor

Situação II – Indo de A até S deslocando-se no sentido Oeste-Leste:

Figura 33 - Planisfério com pontos P, A e S - Visão II – Fonte: Elaborada pelo autor

Eles concluíram, de forma bastante rápida na verdade, que o menor caminho é o da situação I. Assim, começamos a discutir sobre o cálculo dessa distância. Aqui, do que eles falaram na hora, vale apontar o que se sucedeu no encontro oitavo:

O professor disse: “Mas o cálculo é feito da mesma maneira, ainda que as distâncias não sejam iguais, certo?” (E8P3) no que seu colega disse “É, mas

calcular essa distância é o problema de verdade.” (E8P2) Já manifestado sua opinião sobre o que estava por vir.

O cálculo fora feito da seguinte maneira: sendo C o centro da esfera, R o raio da esfera, C_1 o centro da circunferência do trópico de Capricórnio e r o raio desta circunferência. Desenhei, junto com eles a imagem e, para os que estavam com mais dificuldade de visualizar isso no meu desenho, apresentei a ilustração a seguir, que havia levado comigo:

Figura 34 - Ilustração da distância de A até S – Fonte: Elaborada pelo autor

Mencionei que, dado um ponto B na linha do Equador, de mesma longitude que o ponto S , os ângulos BCS e CSC_1 são congruentes de medida $23^\circ 26'$, pela definição do que é latitude. Já tínhamos calculado, mas enfatizei que que $\widehat{SC_1A}$ possui medida de 163° (proveniente da soma dos $46^\circ 30'$ e $116^\circ 30'$).

Assim, com o uso de uma calculadora, adotando 6 400 km como a medida do raio da Terra, realizei as seguintes operações juntamente com os entrevistados (a exceção dos três casos que fizeram questão de tentar chegar ao resultado sozinhos) e chegamos as seguintes conclusões:

Do ΔCSC_1 , temos que

$$\cos 23^\circ 26' = \frac{r}{R}$$

$$\therefore r \cong 5872,15 \text{ km}$$

Do trópico de Capricórnio, temos que a distância d será

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2 \cdot \pi \cdot r$
163°	— — —	d

$$\therefore d \cong 16705,6 \text{ km}$$

Enquanto fomos construindo isso alguns colegas se manifestaram dizendo:

Encontro primeiro: *“Eu preciso descobrir o tamanho desse segmento (o comprimento da circunferência do trópico). Porque é como se eu tivesse seccionado a esfera. Aí eu, tendo o raio da circunferência, faria regra de três que nem no anterior. A parte chata problema é calcular o raio dessa circunferência.”* (E1P1)

Encontro décimo: *“Os alunos vão poder usar calculadora ou você pretende dar uma tabela trigonométrica”* (E10P1)

Encontro quinto: Ao serem questionados se estavam de acordo, a professora disse *“É, mais ou menos tudo bem. Mais ou menos porque eu não consigo imaginar qualquer pessoa fazendo esse negócio aqui.”* (E5P1)

Mas, no geral as respostas foram para três direções, ou similar a *“Tá bom. Tranquilo.”* (E7P1), ou mais próximo de: *“É só fazer o corte da laranja e calcular o arco na laranja”* (E3P4) ou como *“Nossa, calcular esse raio já dá uma certa preguiça.”* (E6P1)

Feito isso, perguntei se faria diferença realizar esse cálculo com outros dois pontos que possuam a mesma latitude entre si (não necessariamente iguais a

latitude dos pontos A e S), mas longitudes que também diferem de 163° . Na expectativa de que, assim que como na experiência feita com meus alunos (conforme mencionado no capítulo 5), a conclusão de que se deslocar por diferentes paralelos apresenta diferença seja facilmente percebida. Todos responderam corretamente, ainda que argumentando de maneira diferente. Nisso destaco os seguintes dizeres:

Encontro primeiro: *“Isso não dá na mesma. Ai não dá. Óbvio que não. Você tá pegando uma circunferência de raio menor”* E enquanto ria, disse *“no plano não mudaria, mas nessa bagaça [sic] muda sim. Legal... Tá ficando difícil”* (E5P1)

Encontro quarto: *“Certamente não, porque muda o raio da circunferência.”* (E4P1)

Encontro quinto: *“Se eu cortar o fuso, a distância não é igual”* (E5P1) e o outro professor disse *“É. Não sei nem se o nome é fuso, mas não me parece igual mesmo.”* (E5P2)

Encontro sétimo: *“Aqui não. A distância muda. Com certeza, porque muda o raio da secção.”* (E7P1)

8.2.4 Comparação entre deslocamento pelo meridiano e paralelo

Com essas discussões efetuadas, perguntei aos professores o seguinte:

“Por que, se as longitudes forem iguais e a variação de latitude for a mesma, a distância permanece igual, mas se as latitudes forem iguais e a variação de longitude for a mesma a distância sofre alterações?” ou **“Por que que no primeiro caso não muda e no segundo tem diferença?”**

Com isso, esperava que eles reconhecessem que isso acontece pois, pelo meridiano acaba-se utilizando uma circunferência máxima enquanto pelo paralelo

isso não acontece. As respostas foram bastante similares, então coloco apenas uma para ilustrar as demais:

Encontro segundo: *“Porque essa bagaça [sic] (pelo meridiano) passa no centro. Todas as linhas passam. Então todas as circunferências têm o raio da Terra, enquanto essas assim (paralelos) não.”* (E2P1)

8.2.5 O menor caminho de A até S

Posto isso, disse que fui colocar os pontos no sistema, assim como mencionado no item 7.2.2, para que a tecnologia pudesse mostrar quão precisa fora a aproximação. Entretanto, quando fui utilizar o recurso digital para responder o item 7.2.3 obtive a seguinte imagem:

Figura 35 - Distância de A até S, com coordenadas – Fonte: Elaborada pelo autor

Ou seja, com uma distância de 14 501,22 km, as nossas estimativas apresentavam um erro de 15%. O que para alguns até poderia ser tolerável, mas

ainda assim, apresenta um desenho no mínimo peculiar. Ao serem confrontados com isso, tivemos as seguintes falas:

Encontro primeiro: O professor se surpreendeu com a imagem em si, mais do que com o resultado, e perguntou *“Nossa, mas porque ele deu uma parábola?”* e ainda arrematou dizendo *“Eu não concordo com esse desenho.”* (E1P1)

Encontro segundo: Também surpreso com o que mostrei, ele disse *“Então talvez tenha um caminho menor que aquele. É isso!?”* e ainda completou com uma piadinha: *“Euclides, você matou a gente. Só pra ver se entendi, pela não euclidiana não é uma linha reta, certo? Tem um caminho que é menor curvando!”* (E2P1)

Encontro quarto: Foi o único que percebeu o que estava acontecendo. Logo que eu apresentei os valores, antes mesmo de mostrar a imagem, ele já perguntou *“Você já revisou essas contas?”* Quando disse que sim ele demonstrou certo espanto e disse *“é muita diferença.”* Mas logo em seguida ele emendou: *“Pera aí. Será que ele pegou... Não, sabe por que? Ele não fez o caminho aqui, fez o caminho do círculo máximo. Então, quando ele põe no sistema ele dá o caminho do círculo máximo.”* Nisso eu mostrei a imagem pra ele, no que ele continuou *“É. Ele fez o caminho pelo círculo máximo. No começo pra mim não estava fazendo sentido porque essa diferença não é pelo modelo é porque ele está calculando por outro trajeto.”* (E4P1)

Encontro quinto: Um professor disse: *“Bom, pro software não é uma esfera. Agora, mesmo assim, a diferença é grande. Será que ele está pensando que é uma elipse (elipsoide)!?”* (E5P2) enquanto a professora disse: *“A gente tá usando só a parte matemática, mas não deveríamos levar em conta a climática, porque quando a gente viaja de avião isso faz diferença. Porque tem voo que você vai pra Fortaleza em três horas, com escala e volta em cinco horas sem escala. Eu perguntei pra eles (companhia) e eles me disseram que tem a ver com o vento*

e outros fatores do tipo.” (E5P1) Afirmando que a medida mostrada não leva em conta esse tipo de coisa, apenas a distância e não a velocidade ou algo similar eles só ficaram se perguntando qual o motivo daquilo.

Todos os demais responderam algo como: *“Nossa, deu uma diferença grande agora. Que estranho.” (E6P3) ou “Não faz sentido pra mim. Desenho estranho com uma diferença maior que dez por cento.” (E3P1). De diferente apenas o que ouvi no encontro nono que: “Onde foi que erramos então!? Mas com esse desenho ele tá indicando que é pra utilizar o raio da Terra?” (E9P1) e “Caramba, agora eu fiquei realmente surpresa. Imagino que o computador tenha razão. Desculpe não confiar nos seus cálculos, Thales.” (E9P2)*

Disso, encaminhei para uma das perguntas a seguir, dependendo do grupo com o qual estava lidando:

Aos grupos dois, cinco, seis, sete, novo e dez **“É possível que exista alguma outra maneira de se deslocar do ponto A ao ponto S que seja mais curta do que aquela que calculamos?”** cujas reações foram

Encontro quinto: Não foi fácil visualizar esse outro caminho. Parecia impossível a eles que existisse esse outro trajeto. Quando expliquei o que representava a linha exibida, a reação deles foi: *“A menor distância é uma parabolazinha” (E5P1) e “Entendi, tem que fazer uma secção aqui.” (E5P2)* Mas depois ambos perguntaram, *“Mas por que que esse é o menor caminho?”*

Encontro sétimo: Já com a pergunta feita, ele começou a se perguntar, em voz alta *“A menor distância não é pelo paralelo!?” (E7P1)* E aí começou a tentar puxar da memória o termo técnico que designa essas rotas áreas, que, segundo ele, se usa em navegação também. Ele chegou à conclusão de que havia um

caminho menor, mas não se conformou muito quando disse que o menor era pela circunferência.

Encontro décimo: *“Tá eu entendi que tem um caminho mais curto, mas como a gente descobre?”* (E10P1)

Aos grupos um, três e oito perguntei **“Por que, ao realizar o cálculo no computador, este faz um esboço em que aparentemente o trajeto passar pela Antártida?”**. Ouvi o seguinte

Encontro terceiro: *“Parece que ele está passando pela Antártida, mas não tá. Ou tá?”* (E3P3)

Encontro oitavo: *“Eu acredito que o menor caminho é esse passando pela Antártica. A gente provavelmente não calculou a menor distância”* (E8P1), no que perguntou outro professor perguntou, *“Mas então, por onde a distância seria menos!?”* (E8P4)

O professor do encontro E4 já tinha falado sobre isso, então encaminhei diretamente para o item a seguir.

Com isso, acabei garantindo àqueles que não concluíram dessa forma, que a menor distância do ponto A ao ponto S é pela circunferência que contém esses dois pontos e tem centro coincidente com centro da Terra e isso explicaria, simultaneamente, ambas as questões levantadas.

8.2.6 Calculando a distância pela circunferência máxima

Para efetuar esse cálculo desenhei a imagem a seguir:

Figura 36 - Ilustração de A e S pela circunferência máxima – Fonte: Elaborada pelo autor

Àqueles que ainda não estavam compreendendo o meu desenho, apresentei essa imagem que havia levado comigo. Apenas em um dos encontros (encontro sexto) realizei essa imagem no computador, juntamente com eles, utilizando o Geogebra.

Mostrei que para que o cálculo seja bem feito seria necessário que obtivéssemos o ângulo $\widehat{SCA}$ de medida θ . Essa medida seria obtida utilizando o teorema dos cossenos em dois diferentes triângulos.

Nessa parte são necessárias mais operações matemáticas do que antes. Entretanto, o intuito era mostrar como calcular e quão próximo o resultado estimado está do resultado real. Sendo assim, ou os resultados foram fornecidos de forma direta, ou as contas foram realizadas diretamente numa folha de papel, como se fosse uma aula expositiva. Com isso, deixei claro que para realizar esse tipo de conta é necessário lembrar do teorema dos cossenos (o que não será problema, uma vez que esse assunto deve ser feito pós geometria espacial, ou seja, certamente depois da consolidação que se espera da geometria plana, segundo os

livros didáticos.) Para os poucos que pediram, realizei as contas, com o uso de uma calculadora, da seguinte maneira:

Do triângulo SC_1A

$$AS^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 163^\circ$$

Do triângulo SCA

$$AS^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \theta$$

Igualando as expressões:

$$2R^2(1 - \cos \theta) = 2r^2(1 - \cos 163^\circ)$$

Substituindo os valores

$$2 \cdot 6400^2 \cdot (1 - \cos \theta) \cong 2 \cdot 5872,15 \cdot (1 - \cos 163^\circ)$$

Isolando o $\cos \theta$ tem-se

$$\cos \theta \cong -0,646913707937175$$

$$\therefore \theta \cong 130,31^\circ$$

Sob posse da medida do ângulo, com todos calculei a distância entre A e S pela circunferência máxima. Para concluir as contas, por uma regra de três simples verificamos que a distância x é:

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2\pi R$
$130,31^\circ$	— — —	x

$$\therefore x = \frac{130,31^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6400 = 14.555,77 \text{ km}$$

Assim, calculei com os professores a distância mínima entre os pontos A e S. E, ao compararmos o resultado obtido com o resultado fornecido pelo computador, mostrei que essa resposta contém um erro menor que 1%. Isto é,

obtivemos uma distância menor por um caminho diferente do deslocamento pelo paralelo e a planificação desse trajeto explica a imagem dada pelo computador que gerou inquietação por parte de todos (figura 28).

Sobre a proximidade do valor, mostrando que o valor obtido era menor do que o esperado, vários reagiram apenas com interjeições como “Orra!”, “Que legal!”, “Caramba” e “Que da hora!”. Mas neste caso, acho necessário escrever todas as respostas que surgiram:

Encontro primeiro: *“É isso que causa essa diferença de dois mil quilômetros? Poxa, gostei disso daqui. Não sabia dessa parte.”* (E1P1)

Encontro segundo: Como não dispúnhamos do globo, nem tudo foi simples de enxergar. Logo ao afirmar sobre a circunferência que fornece a menor distância ele disse, num tom de desconcerto: *“Ah!? Tudo bem. Eu entendo que tem essa circunferência, mas eu não consigo ver onde que ela tá.”* Depois de certa reflexão ele disse, *“Tá. Entendi. Você pegou essa linha (do Equador) e foi inclinando ela até ela pegar esses pontos e ela foi deitando atrás. Entendi.”* Por fim, ele viu a dificuldade disso e já falou da seguinte maneira: *“Thales, posso falar?! Não vai dar pra dar isso na sala.”* Isso antes mesmo de começar a realizar as contas. Sobre as contas, eu expliquei o método em si e apresentei as contas. Nessa parte ele não ficou tão afoito quanto nos outros momentos e ainda disse *“É um erro até menor que o do outro. Porque o outro tinha dado, o que, meio por cento esse deve dar o que? 0,33?. Legal! Contas desagradáveis, mas não usamos nada que eles não saibam. Tudo bem, é difícil deles enxergarem, mas não tem matemática que eles não conheçam.”* Por fim, como ele era, dos entrevistados, o único que tinha mais detalhes sobre o meu trabalho de pesquisa, perguntou: *“Mas isso é geometria não euclidiana!? Porque até agora a gente falou de teorema dos cossenos, alternos internos, comprimento de circunferência e eu me pergunto, pode!?”* (E2P1)

Encontro terceiro: *“Poxa, gostei. Mas tem duas passagens complicadas: A primeira perceber que o ângulo $23^{\circ}26'$ pode ser transportado para baixo usando ângulos alternos internos. Eu não sei se sozinho ele perceberia. Você vai mostrar e ele provavelmente vai dizer ‘Ah, tá bom.’ e se puder replicar isso sempre, talvez não seja um problema. Mas se em cada um ele tiver de pensar numa forma, a coisa complica. E a outra parte complicada é na utilização da lei dos cossenos. Uma com o cosseno pra achar o lado, pra desvolar [sic] e descobrir o ângulo lá de cima. Com uma calculadora científica, ok, mas esse bi lei dos cossenos [sic] vai ser dureza.”* (E3P1)

Encontro quarto: O professor já iniciou dizendo que era chato fazer essa conta e deu um sinal de que eu poderia já efetuá-las. Foi acompanhando as passagens e disse *“Então, é a diferença do raio da Terra. Essa (conta) pra mim, tá dessa natureza. É a diferença da idealização da Terra. Isso é legal pra discutir com os alunos, não!?”* (E4P1)

Encontro quinto: A professora disse *“Que bacana. Só que nunca que eu ia pensar nesse outro caminho.”* (E5P1) Chegou até a me perguntar se eu pensaria nisso antes de estudar isso. Ao dizer que não, o outro professor disse *“Ninguém ia. Ninguém. Tudo bem que alguém pensou. Mas eu acho que pensou não olhando pro globo. Pensou fora, olhando para uma esfera e tal e conseguiu traduzir pra cá. Talvez foi um experimento que ele fez também. Fez as contas, percebeu a diferença e se questionou de havia algo de errado. Sabe o que eu acho, nós, quando vemos isso, já vemos viciados com mapa e linha e sei lá. Talvez, quem pensou nisso a primeira vez, não tinha essa linha toda. E foi só rodando. Aí fica mais fácil depois de ver que o outro é menor. Sei lá. Suponho.”* (E5P2)

Encontro sexto: A professora, vendo a cara de surpresa de seus pares, disse algo que ajudou a todos a compreenderem e aceitaram: *“É. Faz sentido. Quando eu viajei pro Chile, no computador do avião mostrou uma trajetória desse tipo. E*

eu achava que era por questões climáticas.” (E6P2) Outro professor disse, em determinado momento, “Então às vezes vale a pena viajar pelo Polo Norte?” (E6P3)

Encontro sétimo: Concordou com as contas e disse: *“Bem melhor (resultado) mas ainda não estou convencido de que esse é o menor caminho, no círculo.”* Discutindo sobre isso ele me perguntou se tinha certeza de que o menor caminho era aquele e *“O que eu tô pensando é porque que é exatamente na circunferência. Legal isso hein, mas não pensaria nisso. Não pensaria nisso sem tentar demonstrar.” (E7P1)*

Encontro oitavo: Um professor disse *“Nossa, que viagem, eu não ia pensar nisso tudo pra fazer essa conta até este momento.” (E8P2)* Enquanto outro professor disse *“Tá, concordo, mas e se os pontos não estivessem na mesma latitude? Essa conta ia ser surreal, né?” (E8P1)*

Encontro nono: A professora perguntou *“Achei muito legal isso e acho que não teria essa sacada, mas já que esse caminho tem distância menor do que a que calculamos antes, como é que eu tenho certeza que essa de agora é a menor distância? Tipo, quem falou que não tem um menor que esse?” (E9P2)*

Encontro décimo: Numa mistura de descrença e fascinação, ele disse *“Então é pela circunferência máxima que a distância é mínima!?! Sério isso???” (E10P1)*

É fato que vários indagaram sobre como fazer para ter a convicção de que esse deslocamento é o menor possível. Ou seja, como garantir que não existe nenhuma outra forma de se deslocar que apresente uma distância menor do que aquela que eu mostrei. Disse apenas que, com isso mostramos que há um caminho mais rápido do que aquele pelo paralelo, mas não provamos que é o mais curto de todos. Levando a discussão para uma comparação sobre como demonstraríamos que a menor distância entre dois pontos no plano é a medida do segmento de reta

que os une, conduzi a discussão sobre a menor distância na esférica para um consenso de que isso não seria provado ali. Que isso levaria tempo e que, mesmo sendo uma preocupação legítima, solicitei, aqueles que estavam inquietos sobre esse fato, que acreditassem e que depois, numa outra oportunidade, poderíamos realizar essa demonstração.

E como toda aula que é realizada várias vezes é aprimorada, com o decorrer dos encontros, fui encontrando alternativas mais exitosas sobre como explicar isso aos professores: traçando uma circunferência máxima, marcando *dois pontos_E* sobre essa *reta_E* e deixar numa posição para parecer a linha do Equador. Quando perguntei como deveríamos calcular a menor distância entre eles, a resposta foi a esperada: pela própria *linha_E*. Nisso eu coloquei a laranja em outra posição e tracei o que seria a nova linha do Equador. Perguntei, para aqueles mesmos dois pontos, qual seria a menor distância, o que os fez perceber que não é porque a esfera está em outra posição que muda a distância mínima. Que não podemos nos apegar as linhas do Equador e seus paralelos.

8.2.7 O menor caminho entre dois pontos

Feito isso tudo, disse que esse trajeto é de fato o que apresenta a menor distância entre dois pontos. Assim, para calcular a menor distância entre dois pontos quaisquer de uma esfera é necessário visualizar a circunferência que passa pelos dois pontos e cujo centro coincide com o centro da esfera.

Com isso pedi para que eles avaliassem a seguinte frase:

“Dado que a reta é o menor caminho entre dois pontos, é justo dizer que aquele trajeto (que se faz pela circunferência máxima) é uma reta?”

As respostas aqui também oscilaram bastante. Houve três encontros em que a resposta foi muito similar à do encontro seis, que foi mais eloquente:

“O que. Vai dizer que isso é uma reta? Tá bom.” (E6P2) Esse ato de concordar não pareceu dos mais satisfeitos. Deu a impressão de que ele aceita, mas não concorda muito.

Nos demais ouvi:

Encontro primeiro: *“Não. Não mesmo. É um comprimento de circunferência”* (E1P1)

Encontro segundo: O professor, dando risada, disse de forma simples: *“Não”*. Depois ele continuou: *“Então, dá pra forçar a barra, mas se é forçar a barra a minha resposta seria não.”* (E2P1)

Encontro quarto: Assim que eu disse *“Na geometria euclidiana a gente diz que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta”* ele já me interpolou e disse *“Quando eu tenho um espaço de curvatura nula.”* Posto isso, eu conclui a pergunta e ele falou: *“Na geometria esférica, sim. Isso é um segmento de reta, mas isso é um problema porque não vale o quinto postulado de Euclides.”* (E4P1) Com essa resposta, já encerrei as questões sobre essa parte e fui para a próxima.

Encontro quinto: *“Não. Mas isso não é uma reta.”*. Ambos disseram não, até com certa convicção. Ao dizer que era, me perguntaram *“Aonde que leio sobre essa geometria, não é possível. Não lembro de ter ouvido falar sobre isso.”* (E5P1)

Encontro sétimo: *“Não. Mas tem várias geometrias. Tipo, na de Lobatchevsky eu sei que mudam algumas coisas. Como é que fica isso nesta geometria? Posso, de fato, chamar isso de reta?”* (E7P1)

Encontro oitavo: Ocorreu um diálogo bastante interessante. Um professor disse *“Não. É uma curva”* (E8P4). No que outro respondeu *“Só que uma reta é uma curva”* (E8P1). Na réplica, *“Mas essa curva não é uma reta. É um arco de circunferência.”* (E8P2) no que E8P1 fez a tréplica, *“Mas tem o menor*

comprimento de circunferência possível”. A conversa ficou nessa toada, em que todos pareciam entender a colocação do outro, mas sem dar a certeza se era possível definir aquilo como reta.

8.2.8 Uma nova geometria

Com essa discussão, afirmei que, há outros modelos geométricos além do euclidiano. Que esses modelos já aparecem para os alunos, mas não pela matemática (pela geografia e pela física moderna, conforme mencionado nos capítulos 1 e 5). Que, se a menor distância entre dois pontos deixa de ter a representação a que se está acostumado, é necessário um outro modelo que se adeque a essa nova condição. Assim, a partir da geometria na esfera que estávamos fazendo, conseguimos entrar na geometria esférica e levar em consideração que nesta, a menor distância entre dois pontos é o arco da circunferência que passa por esses dois pontos e cujo centro coincide com o centro da esfera em questão. Sendo assim, a essa circunferência máxima podemos denominar *reta_E*.

Chegando nesse ponto, levantei a seguinte questão:

“Mas, quais os impactos esse novo tipo de reta causa na geometria!?”

Houve quem respondesse já fazendo outros apontamentos como:

Encontro primeiro: *“Nessa geometria se classifica assim o que é reta? Caramba. Então muda mais um monte de coisa, tipo dá pra formar um triângulo com mais de 180°”* (E1P1)

Encontro segundo: O professor disse *“Muda tudo. Mas calma, o setor circular vira um triângulo? A circunferência é uma reta então?”* (E2P1) Vendo para onde a conversa estava se encaminhando, conduzi o debate para o item seguinte.

Nos demais encontros todos disseram algo como *“Poxa não sei. Agora não tenho mais certeza de nada.”* (E6P2) ou *“Deve mudar todo o resto, não!?”* (E10P1)

8.2.9 Os postulados de Euclides

Com isso, levei a conversa para que eles averiguassem a validade dos cinco postulados de Euclides nessa nova geometria. Analisando quais deles permanecem inalterados quando se trabalha com esse novo conceito de *reta* e quais não valiam mais, propondo as adaptações necessárias.

Postulado 1 de Euclides: Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;

O postulado 1 falha nessa nova geometria em virtude do caso em que os pontos são antípodas. Para que esteja correto neste novo modelo, seria necessário escrever algo como *Dados dois pontos distintos, há pelo menos um segmento de reta que os une* e o debate se sucedeu da seguinte maneira. A grande maioria cometeu o erro de começar a responder pensando em *reta* como qualquer circunferência e não como a circunferência máxima. Depois que isso foi enfatizado novamente a grande maioria concluiu que o primeiro postulado de Euclides falha, quinze professores, para ser mais preciso, disseram:

Encontro quarto: O professor disse: *“Não. Na esférica não. Porque pode ir pelo outro lado.”* E aí, com as mãos, gesticulou, que ele pode ir pelo círculo máximo nos dois sentidos, horário e anti-horário. Ainda disse: *“Se por esse lado é um segmento de reta_E, pelo outro também será.”* (E4P1)

Encontro sétimo: *“Já não é verdade. Porque eu posso pegar pelo outro lado.”* (E7P1)

Apenas cinco disseram que ainda era verdade,

Encontro primeiro: “*uma única reta_E não. A menor reta_E possível, uma única sim.*” (E1P1)

Encontro quinto: “*Se só tem um que é o menor, só tem um segmento_E.*” (E5P1)

Apenas um deles fez menção aos pontos antípodas. Assim, depois que eles responderam, falei sobre os pontos antípodas aos demais e que, para esse par de pontos, há infinitas retas.

Postulado 2 de Euclides: Um segmento de reta_E pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;

O postulado 2 parece correto, mas, como mencionado no capítulo 4, Riemann fez uma alteração nele, ficando da seguinte maneira: *Uma linha reta é ilimitada, mas não necessariamente de comprimento infinito.*

Essa foi a questão que mais gerou desconforto para eles. Segue algumas das respostas mais interessantes:

Encontro segundo: “*Não se você considerar que quando uma encontra a outra, para. Sim, se você puder ficar andando em cima.*” (E2P1)

Encontro quarto: O professore perguntou “*Então, qual é o conceito de reta_E na geometria esférica?*” no que enfatizei que é o círculo máximo e debatermos um pouco mais sobre isso, no que ele disse “*Então, a gente tem que tomar cuidado com a definição de segmento_E. Teoricamente sim, mas na verdade não infinitamente porque você tem um prolongamento finito. Na verdade, infinitamente eu não crio uma reta_E, eu crio uma superposição.*” (E4P1)

Encontro quinto: “*Não. Mas calma, acontece que é uma esfera. Não sei. Acho que não*” (E5P1), com um tom de voz que deixava claro que a incerteza pairava no ar. Continuou dizendo, “*Mas ela se sobrepõe, pode?*” no que o outro professor respondeu “*Então, pode? Para de contar? Continua contando? O que vale?*” (E5P2) E eles acabaram levando para uma discussão se o ciclo trigonométrico para no dois pi e se ele é infinito.

Encontro sétimo: “*Não. Em primeiro lugar isso não é uma reta_E, é um segmento de reta_E. Se eu prolongar infinitamente eu não vou obter uma reta_E, eu vou obter um outro segmento de reta_E. A menos que eu fique dando voltas. Se eu ficar dando volta, vale.*” (E7P1)

Postulado 3 de Euclides: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;

Sobre este postulado eu já imaginava que daria muita discussão, porque até aqui nada foi dito sobre o que é uma circunferência nessa geometria. Assim, defini que a *circunferência_E* de centro O e raio de medida r ainda é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam r unidades do ponto O .

Com a finalidade de explicar um pouco mais sobre isso de forma intuitiva, sem utilizar cálculos, podemos partir da definição e perceber que há duas situações: se o *raio_E* da *circunferência_E* tiver medida igual à metade do comprimento do círculo máximo, teremos metade da volta da esfera, obtendo assim o ponto antípoda, ou seja, uma *circunferência degenerada_E* num *ponto_E* (acabará sendo o ponto antípoda), se o *raio_E* da circunferência for menor que a metade do comprimento da circunferência máxima, a *circunferência_E* apresenta desenho igual ao que costumamos chamar circunferência, mas com centro diferente. Para elucidar o último caso, veja a figura 30 que apresenta essa

circunferência do ponto de vista da geometria euclidiana (centro C_1 e raio $\overline{C_1A}$) e a *circunferência_E* (centro P e raio $\overline{PA}$).

Assim, temos que a *circunferência_E* equivale a circunferência da geometria euclidiana, mas o *raio_E* está relacionado com o arco da geometria euclidiana.

Para eventualidades de debates sobre essa parte, construí, na hora, uma figura que visava explicar isso para quem quisesse debater sobre e também levei a ilustração abaixo:

Figura 37 - Circunferência euclidiana e esférica – Fonte: Elaborada pelo autor

Dada a esfera de centro C e raio $\overline{CP}$, a circunferência λ pode ser vista, na geometria euclidiana, como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de C_1 cujo raio $\overline{C_1A}$ ou, sob a ótica da geometria esférica, como sendo o lugar geométrico dos pontos que equidistam de P cujo *raio_E* é $\overline{PA}$. Assim, na geometria esférica, $PA = PB = PD = PE$. Enfim, o postulado vale, mas essa discussão não foi aprofundada na maior parte dos grupos.

Na verdade, nos grupos o que houve foi:

Encontro primeiro: “*Sim. Isso sim*”. (E1P1) Respondeu de forma bastante rápida e convicta. Fiz questão de falar que, para mim, não foi tão óbvio assim, porque a distância era calculada de outra forma a fim de verificar se ele elaborava mais a resposta, mas ele apenas afirmou novamente sua convicção.

Encontro segundo: O professor disse “*Pensando em marcar um ponto aqui (ponto qualquer) e andar um quilômetro. Deixa eu ver.*” E imaginando e gesticulando ele chegou à conclusão de que “*fica uma florzinha. É verdade*”. Quando mostrei para ele como ficava, ele disse: “*Isso. Foi isso que eu quis dizer. Pontinho-florzinha para todos os lados – aí faz um círculo embaixo.*” (E2P1). E com isso respondi uma das questões que ele tinha levantado anteriormente, sobre a *circunferência_E* ser uma reta. Ele entendeu que existe uma circunferência dizendo “*que o raio é curvo.*”

Encontro quarto: O professor disse “*Então, qual é a definição de circunferência na esfera?*” E dada a definição ele pensou e disse: “*Me parece que sim, vai dar tipo um solidéu. Meio abaloado.*” Quando falei e mostrei a imagem ele disse: “*Então, eu já estudei isso na vida, não lembro de tudo, mas ainda tenho a intuição. Vai dar um quipá, mas não é uma figura plana. Tipo, atende a definição de circunferência, mas não pertence a um plano.*” Eu disse que era sim, ele disse “*Faz sentido, mas eu precisaria provar isso e isso levaria uns bons dias.*” (E4P1)

Encontro quinto: Acreditando que sim, mas também sem muita convicção, eles ficaram sobre o globo tentando enxergar na prática o que suas intuições lhes diziam.

Encontro décimo: Perguntando primeiro qual a definição de circunferência pensou e manipulou bastante o globo e disse: “*É única. Se o raio é a distância do ponto até a linha, pela superfície, então é única.*” (E10P1)

Postulado 4 de Euclides: Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes);

Este postulado também vale nessa geometria. Mas, ao falar sobre ele para os professores, pude perceber, em todas as entrevistas, um certo estranhamento. Uns afirmaram rapidamente. Outros pegaram o globo para analisar. Houve até quem perguntou se isso era de fato um postulado. Independentemente, todos concordaram.

Postulado 5 de Euclides: Dado um ponto P e uma reta r , tal que $P \notin r$, existe uma única paralela à r que passa pelo ponto P .

O postulado 5 de Euclides por sua vez carece de uma cautela maior do que o postulado anterior. Dada a definição de $reta_E$, acreditava que não teríamos problemas em concluir que quaisquer duas linhas $retas_E$ em um plano se cruzam. Isto é, não existem $retas_E$ paralelas.

Das respostas obtidas gostaria de mencionar

Encontro segundo: O professor disse: “*Pra ser $reta_E$... circunferência globo [sic]. Tem alguma!? Não me parece ter nenhuma.*” Quando concordei ele disse. “*Não há paralelas. Que demais. É por isso que eles falam que as paralelas se encontram no infinito.*” (E2P1)

Encontro terceiro: O professor disse “*Essa $reta_E$ que não é reta tá me atrapalhando, mas acho que não. Certo?*” (E3P2) Depois que estavam todos pensando e concordando, eles disseram. “*Caramba, então não existe $reta_E$ paralela!? Interessante*”

Encontro quarto: Apesar de já ter respondido anteriormente, perguntei novamente e ele disse “*Pega a linha do Equador e pega um ponto qualquer fora dela. Qualquer círculo máximo vai ter pontos acima e abaixo da linha. Então sempre vai cortar. Ou seja, não existem paralelas.*” (E4P1) falou sobre as implicações de ter um espaço de curvatura não nula e das consequências disso em modelos exemplificando isso no modelo de Lobatchevsky.

Encontro quinto: Dando risada dos seus posicionamentos de mãos sobre o globo, concluíram que de fato não existem $retas_E$ paralelas.

Encontro sétimo: “*Não tem nem paralela, pelo jeito, certo? Já ferra a soma dos ângulos de triângulo_E então.*” (E7P1)

Com a negação do quinto postulo de Euclides uma nova gama de possibilidades se faz presente. Ainda que, por conta disso, algumas relações, propriedade e teoremas percam suas demonstrações e deixem de existir. Outras relações, propriedades e teoremas surgem. Novos desenhos emergem e novas classificações são necessárias.

O que nos levou ao penúltimo item.

8.2.10 O triângulo

Pedi para alguns deles mostrarem o que é um $triângulo_E$, seja na folha, seja apontado no globo, nesse novo modelo e com isso eles perceberam, de forma bastante rápida, diga-se de passagem, que, a partir desse momento, a soma dos ângulos internos de um $triângulo_E$ é diferente de cento e oitenta graus. E que, com isso, vários resultados da geometria euclidiana deixam de valer.

Essa parte foi, como mencionei, bastante simples. Dos relatos que ouvi, destaco

Encontro primeiro: *“Legal, mas não deveria chamar triângulo, mas enfim...”* (E1P1) Destaco essa fala porque mostra o quão enraizados estamos a forma e não a definição.

Encontro segundo: *“Eu tenho que pegar a circunferência global que passa por aqui, com essa reta da circunferência global, com essa reta da circunferência global [sic]. Pera, que agora eu gostei. A soma vai valer 180° ? Aliás como eu calculo esse ângulo?”* (E2P1) Mostrando, no desenho, um ângulo qualquer. No que disse a ele que, para isso, teríamos de usar uma matemática um pouco mais avançada do que aquela que estávamos trabalhando. Aqui podemos perceber um encantamento do conteúdo que ele estava tendo. Querendo ir além da discussão que estava sendo feita.

Encontro terceiro: *“Acho estranho chamar isso daqui de triângulo_E, mas ok.” “Uma dúvida que me surgiu agora. Se não tem paralela, a gente perde a soma dos ângulos internos de um triângulo_E. Mas existe retângulo_E nisso!?”* (E3P2) Destaco essas falas não só porque mostram, novamente, a associação entre nomenclatura e forma e não entre nomenclatura e definição, mas também para mostrar que as inquietações passaram a surgir e que o professor se mostrava bastante empolgado com tudo aquilo.

Encontro quarto: O professor disse: *“Consigo visualizar um triângulo trirretângulo_E, por exemplo.”* (E4P1) Aqui podemos perceber que o professor já tinha entendido a abordagem e já tinha falado sobre a soma dos ângulos.

Encontro quinto: *“Os vértices não vão estar no mesmo plano” “Você não vai me dizer que isso é equilátero, né!?”* foram frases que ouvi e mostram o estranhamento desse novo conteúdo. Enquanto o professor E5P2 concordou mais rapidamente, a professora E5P1 conseguiu visualizar isso melhor quando pensou em cortar uma laranja na metade e depois cortar uma das metades da laranja em quatro gomos “congruentes”. E disse depois que o problema é que aquilo não era

um *triângulo_E*. Alegando até que sentia dificuldade em aceitar isso. Nesse momento penso que seria necessário levar um objeto a fim de tornar essa assimilação mais simples.

Encontro sexto: “*Pelo que você diz, deve ter algo muito simples que eu não estou enxergando. Calma aí. Esse triângulo_E aqui pode ser equilátero sem ter ângulos de 60°!?*” (E6P3). Mostrando inquietação sobre isso o professor chegou à conclusão de que a soma dos ângulos sofre alteração.

Encontro oitavo. O professor disse “*Um triângulo_E aqui é complicado. Mas a soma dos valores não é mais 180°.*” (E8P4) Deixando claro que não achava fácil visualizar, mas que o resultado conhecido da geometria euclidiana não valia mais.

Encontro décimo: “*A propósito, quanto dá a soma dos ângulos internos nisso aqui?*” (E10P1) disse o professor mostrando sua curiosidade sobre o assunto.

8.3 Avaliando a atividade desenvolvida

Perguntei aos professores sobre os benefícios e prejuízos de se falar sobre este tema numa sala de aula. Aqui, separando apenas por grupos, ouvi as seguintes ponderações:

Encontro I: “A vantagem é a diversão para alguns alunos. ... Acrescenta muita coisa de conhecimento, mas o principal é o cara ter noção de latitude e longitude. Ter noção de latitude e longitude é muito mais importante do que o cara saber usar o teorema dos cossenos.” Ele alega que há “Dificuldade em mostrar aos alunos que pela circunferência máxima é a menor distância”, mas que “Não vejo nada como desvantagem. A menos que tivesse de tirar algum assunto importante para colocar esse no lugar. Agora, se não comprometer a programação

do professor, não vejo problema.”. Concluiu dizendo “Acho que cabe, que é um baita assunto legal pra se discutir em aula, mas as perguntas são difíceis.”

“Eu tô num momento da minha vida que tá complicado. Às vezes eu até perco a paixão de dar aula por conta disso. A gente está ensinando um monte de coisa que não serve pra nada que não seja o ingresso na faculdade. Aí o cara sai do colégio, no terceiro ano, e não sabe o que é IPCA, não sabe o que é SELIC, não sabe o que um COE, não sabe o que é um CDB, não sabe quanto ele tem que ganhar pra financiar um apartamento de 300 mil. Ele não sabe. E isso deveria ser ensinado. Eu dei uma aula de determinante recentemente, qual é a utilidade disso numa escola? Num cursinho, ok, por conta das provas de vestibular, mas ainda assim.... Sei lá.”

“É relevante para o ensino da geometria espacial. Dá pra falar de fuso e cunha.”

Encontro II: Começando pelas vantagens, ele disse “Tem as fáceis. Você consegue atingir os alunos ‘gênios’. Eles vão gostar por natureza. Mais um ou outro que vão adorar pela curiosidade. Mas curiosidade. Nada de didático e pedagógico. As pessoas que viajam de avião vão achar isso legal/útil, mesmo que não seja útil pra eles naquele momento. Acho muito legal usar esse tema, mas, de novo, pela parte da euclidiana. Você trabalha comprimento do arco, lei dos cossenos e etc. O complicado é combater os cinco postulados. Porque até a gente tem dificuldade de Por exemplo, você me perguntou sobre a paralela. Eu achava que não e você concordou. Tipo, eu preciso que você vire pra mim que não tem, pra eu dizer, ah, não tem mesmo. Se você virasse e falasse, ‘não sei’ e eu tivesse que pensar mais, entende, eu não ficaria tão seguro de responder. Porque eu acho muito complexo pra eles. O que eu acho que seria legal e que daria muito certo, se os cinco postulados fossem coisas que eles usassem. Por

exemplo, teorema de Pitágoras, um negócio que aparece toda hora e eu vou lá e falo, ‘olha isso aqui’ e mostro que o teorema de Pitágoras aqui é outro. Mas, por exemplo, por uma reta passa uma paralela, tipo, você entende? Talvez eu ainda ouça coisas como, ‘o que é paralela mesmo?’ e aí eu chegaria e diria, ‘olha, não tem mais a paralela’ e eles vão responder de forma bem sarcástica ‘ah, tá bom.’ Eu achei muito legal ficar fazendo essa comparação. Nós que temos essa profundidade de conhecimento de uma área que a gente gosta. Acho que pra uma parte ia ficar uma coisa tipo, ‘O que? Não tô entendendo nada’ pra outros ia ficar ‘Ah tá, legal’ enquanto a gente estaria achando o máximo. Então, até a parte que a gente achou os caminhos e as distância e que menor distância é a curva lá debaixo e não a direta, acho que ele acompanha, mesmo que ele não entenda muito as contas, se ele ver o negócio ele ‘não acredita!’ Ficar comparando os postulados pra ver se confere ou não, acho difícil. Porque ele trabalhar com a ideia de que isso é reta, principalmente a da circunferência. Não sei se faz muito sentido pra ele. E acho que viria a pergunta de sempre ‘Por que? Só pra saber que é legal?’. Mas ó, pros meus alunos mais apaixonados pela matemática, se eu mostrar pra eles, eles iam pirar. Daria pra, pós explicação de tudo isso e mostrar que essa linha é uma reta e isso é o chocante, você, ao invés de provar ou desprovar os postulados, fazer algo diferente. Sei lá. Perguntar cadê a paralela, cadê o quadrado dessa figura. Aonde você desenharia isso? Até poderia direcionar pra algo mais concreto ao invés de jogar pra um postulado inteiro. Sei lá. Só a minha opinião”

Encontro III: “Eu acho que é um benefício pensando nessa nova discussão da BNCC e dos itinerários formativos. Acho que isso pode auxiliar bem aquelas competências que eles estão esperando num curso no contraturno ou coisa parecida. Não sei. Posso estar viajando por não ter entendido na sua totalidade o que é que vai acontecer daqui pra frente nas escolas. Mas penso que seria uma ideia interessante. O problema é que aí vem os prejuízos, numa sala heterogênea

fazer isso vai ser complicado. Acho que eles vão se interessar pelas teses e não pelas hipóteses e demonstrações. Não sei até que ponto isso é viável numa sala de aula. Mas também sei que, se ninguém tentar, nada vai mudar. Por isso que, fazer num grupo controlado, como deve ser esse itinerário pode ajudar a dar uma boa noção de como proceder.”

“Eu penso que, se algum de vocês discordar pode me interromper, conhecendo os nossos alunos, os mais esforçados vão pirar nisso tudo, mas não sei sobre aqueles que sempre levam as coisas de qualquer jeito, se...”, quando outro professor disse “..., mas calma. Esses que não querem nada não podem ser o parâmetro. Eles já não querem nada mesmo. Se a nossa decisão for pautada nisso ferrou. A minha inquietação é pra saber se os que se esforçam, mas não são geniais não se sentiriam desmotivados por isso.”. Essa fala fez outro professor dizer: “Pois é. Tenho certeza que eles ficariam fascinados, que nem nós ficamos, mas na parte das contas tenho minhas ressalvas. Agora, se pensarmos na estratégia que ele mencionou [sobre os itinerários] poderíamos até fazer um curso em que ele aprenda primeiro a mexer na calculadora. Depois pra ele que retome conceitos fundamentais de geometria plana e então chegar nisso. Acho que entregar assim, cru, pra eles será uma tarefa muito complexa.”

Encontro IV: “Eu acho que como uma atividade de Iniciação é legal. Mas no cotidiano, na média, não sei. Tenho minhas dúvidas.” Ao perguntar sobre porque na Iniciação é legal, ele replicou “Na Iniciação é legal porque, em primeiro lugar, o cara entende a diferença entre mundo real e mundo idealizado. Essa é a primeira coisa. Na minha opinião é a mais importante de todas. E nesse processo o cara tem a oportunidade de estudar tópicos de geometria e ver aquilo como é no mundo de verdade. Isso eu acho sensacional. O cara ver na prática o conceito teórico como por exemplo o cálculo sobre a circunferência. E não aqueles

probleminhas *fakes*. Você, de fato, ter uma contextualização de um problema real e o cara entende que o problema real nunca é de fato o problema idealizado. Eu acho que você pode fazer um paralelo com a física. É um momento que o cara entende que a física e a matemática elas em alguns momentos trabalham com modelos e não só com problemas reais. Quando você vai estudar geometria, geometria um modelo ideal do mundo, mas no mundo real, às vezes, a gente precisa fazer adaptações do modelo idealizado. Essa é a principal. A segunda é ele ter a oportunidade de trabalhar com os elementos geométricos que estão ali e a terceira é ele ter a oportunidade de questionar um.... até que ponto os fatos que são verdadeiros dentro de uma teoria são verdadeiros na outra? Acho que a ideia de construção lógica de teorias matemáticas e a ideia de poder fazer esse tipo de discussão de maneira mais aprofundada, como quando questionamos os postulados. O que continua sendo verdade nesse novo mundo? E aí você pode fazer até uma viagem que é, qual o conceito de certo e errado? Tipo, na parte de sociologia é uma questão muito mais temporal e de valores. E na matemática, também é uma construção de mundo. Então tipo, neste mundo isso é verdade. Neste mundo não. Ou seja, verdade e mentira depende de como você constrói e enxerga o mundo. Viajei né!? No fundo, no fundo, tudo é uma construção. Quando você discute ‘ó, isso aqui tá errado’, ‘– pô, eu sempre achei que a menor distância entre dois pontos é uma reta – então, não é mais.’ ‘por um ponto tem uma única paralela, – então, não é.’ ‘A soma dos ângulos internos de um triângulo é cento e oitenta – Então, mentira.’ Tudo depende de como eu acredito que o mundo é. Nesse sentido, discutir com o grupo em sala de aula, conduzir uma atividade, mas aí é conduzida, não deixar ele fazer, dar pedaços, eles fazem, manda pesquisar no *Google* e faz, pesquisa no *Google*, calcula. E a parte que é matematizada a gente faz. Aí você vai trazer pra eles a discussão não matemática. É mostrar que mesmo dentro da matemática essas certezas não são tão certas assim. Depende de um conjunto de axiomas e construção teórica que você faz. E dá pra você fazer

inclusive um gancho com discussão de sociologia, o que é verdade/mentira, que é uma questão de conjunto das regras de como aquela sociedade está organizada naquele momento. Tudo isso que é verdade então não é, se o mundo é diferente. Eu puxaria pra isso.” Quando indagado sobre os prejuízos, a resposta obtida foi: “Então, o prejuízo principal é que, como, eu vejo isso como prejuízo de tempo.... então, ele entendeu isso, mas o tempo que a gente gasta pro cara ter entendido isso, ele podia ter entendido isso com uma outra teoria, com um conjunto de teorias mais simples, mas... e ele podia alocar outros modelos, estudar outras teorias de forma mais rápida. Eu vejo que o maior prejuízo é o do cobertor curto. Eu não vejo nenhum prejuízo didático. Eu vejo prejuízo de tempo. E aí a discussão, de quanto o tempo deve ser norteador das escolhas didáticas!? Eu não falaria nada de matrizes, determinante e gastaria muito mais falando de combinação, porcentagem, introdução ao uso de calculadora em sala de aula”

Encontro V:

- Bom, primeiro que aparentemente tem que mudar o currículo inteiro da geometria - disse de forma jocosa um deles.

- Não. Porque ela não tá errada – disse o outro.

- Eu acho que, como faz parte da rota de aviões e tudo, eu acho que é um prejuízo não falar. Porque você usa isso, certo? É aplicado. Em que momento você vai...? Tipo, alguém desenvolve alguma coisa relacionada a essa geometria.

- Mas essa pessoa, essas pessoas, sempre desenvolveram e vão continuar desenvolvendo sem aprender isso na escola.

- Tudo bem. Mas alguma coisa que a gente viu aqui a gente aprendeu na escola básica. No Médio. Mas a pergunta é se o que gente viu aqui tem alguma vantagem. E eu acho que, pro público que nós temos, vai ser difícil ele entender

os cálculos, acho que o jovem hoje não tem repertório, ou, não vou nem dizer repertório, talvez tenha, mas teria que ter mais tempo pra olhar. Mas eu acho que, apesar das contas, o pessoal ia pirar nisso daqui. Muito legal. Qualquer aluno. Não numa aula dada. Eu acho muito legal, pra Ensino Médio. Mas não acho que isso deveria estar no currículo. Poderia ser na forma de um projeto, numa coisa um pouco mais demorada, pra que o moleque parasse e pensasse, não como a gente fez.

- Eu achei sensacional.

- Eu também, mas preciso digerir isso. Muito legal. Mas é aquilo, a gente foi doutrinado na geometria euclidiana, que eu adoro.

- De novo. Não é porque a gente foi doutrinado. É exatamente o mesmo motivo que vocês estavam discutindo, antes de começar, sobre o infinito dos conjuntos. Por que que ninguém entende? Porque nada é infinito. Por que você não entende essas curvas? Porque nada no seu dia a dia é assim. Nada é assim. Nem isso é isso. Porque a gente tá falando em distâncias gigantescas e que no final você não vê isso no seu dia a dia. Pode até ter, mas você não vê. Então não é que você é doutrinado. Não tem onde pegar, onde visualizar isso no dia a dia. O infinito, o que é infinito? Me fala uma coisa aqui, na sua vida, que é infinito?

- Mas o infinito também é relativo.

- Tá, mas por que? Porque não existe. Se existisse... eu sou contra verdades absolutas..., mas se existisse, existiria um senso comum do que é a ideia do infinito. Seria muito mais fácil trabalhar. Agora, como nada é infinito, você não consegue visualizar e compreender. É a mesma coisa que isso daqui. É tipo, não que você foi doutrinado de uma maneira que se você fosse doutrinado de outra você entenderia. Não aparece no seu dia a dia. A outra aparece em todo o lugar no dia a dia. Então você consegue... E essa, é muito mais palpável que o infinito, óbvio, mas também é distante, é longe, você não vê, então, fica difícil da pessoa

visualizar porque não tem. Eu não acho que é uma questão de doutrina e que tava ali, na sua cara.

- Mas esse trabalho é legal hein... Só haverá malefícios, depende de como você colocar. Eu acho que não há, se você tiver tempo de trabalhar e não pode ser como aula de lousa e giz. Tem que ser como projeto. O cara vai manuseando, vai mexendo, vai pegar a laranja e vai cortar. Eu acho que tem que ser palpável. Gostei. Eu tava com um pouco de medo disso. Mas achei bem legal. E assim, eu acho que o aluno nunca vai te perguntar uma coisa dessas. Mas eu acho que poderia fazer parte de um projeto, juntar com geografia por exemplo seria bem legal”

Encontro VI:

- Olha, pelo que vejo no plantão de dúvidas, quando ele perceber qual o nível da conta que terá de fazer, ele já entrará em parafuso. Eles travam com fatoração simples. Aquele teorema dos cossenos é impraticável. – Disse uma das professoras

- Bom, eu concordo contigo, mas tem uma coisa que a gente tem que levar em conta, me diz uma coisa, qualquer coisa, que algum deles tenha chegado pra ti e dito ‘nossa, isso é bem legal’? Não sei. Pra mim tudo que vira matéria escolar, por ser uma obrigação, acaba fazendo com que eles se desinteressem. Quantos livros bons a gente teve que ler na época da escola a gente achava ruim só por ser obrigado a fazer a prova do livro? Será que, colocar um assunto que nem esse, mostrando as contas, não consegue fazer os alunos se interessarem por um assunto? – Disse outra professora

Um professor então disse – Tá aí uma coisa louca de se pensar. Se eles pensarem que é uma coisa que ninguém viu, que não serão cobrados por isso talvez, e só talvez, eles criem gosto e pelo menos assistam à aula.

A segunda professora voltou a dizer – Eu não disse que não podemos cobrar isso, mas podemos passar a imagem de que é um conteúdo diferente, que não está na grade. Não sei se me fiz entender. A gente sempre lembra dos comentários dos professores quando eles não estavam dando o conteúdo propriamente. Por parecer uma coisa fora do roteiro, seja uma piada, uma bronca, ou só uma história. Até que ponto que isso tudo não consegue ter essa abordagem?

O outro professor, que estava ouvindo isso tudo disse:

- É, pode ser. A verdade é que teríamos de tentar e, vamos ser sinceros, com a grade que temos, com o número de tarefas e avaliatórios, quem aqui abriria mão de três aulas, no mínimo, pra fazer isso daqui? Sendo pragmático, acho legal, mas acho que, na grade, do jeito que está, sem chance.

Encontro VII: “Ensinar quando? Tá falando do Ensino Médio?” e depois de eu dizer que a intenção seria depois que os alunos tivessem tido contato com a geometria espacial, ele continuou “No Ensino Médio, eu acho que é mais pro efeito de curiosidade de rota aérea do que pra uma aplicação prática real. Porque eu não acredito numa aplicação real disso pra eles. Pela curiosidade. Por saber que o menor caminho é por ali, saber que a trajetória sobre a superfície esférica pode ser chamada de reta. Não é a reta óbvia. A primeira desvantagem que vejo é o aluno ter ferramenta algébrica pra calcular boa parte disso. Segundo, como o aluno vai enxergar isso. Hoje, essa segunda parte fica bem mais facilitada pelo recurso da informática. Você pode criar um globo aí na projeção e mostrar isso na

projeção. De todo o jeito, o prejuízo que eu vejo, não é prejuízo, é dificuldade. Agora, eu fico imaginando, que hoje, com a internet, dê pra mostrar isso de forma muito legal. Na verdade, vou ser honesto, eu acho que é mais fácil eu ver aqui (no globo) do que ali (na projeção). Não sei se é geracional. De qualquer forma, acho isso, é interessante, mas terá dificuldades algébricas pros alunos.”

Encontro VIII

- Olha, posso falar com conhecimento de causa. Uma vez e apenas uma eu falei um pouco sobre isso com meus alunos do colégio. Mas falei de forma completamente livre, sem conta nenhuma. Devo dizer que eles acharam bem legal e se perguntaram porque nunca ouviram falar daquilo. Sabe a reação que um aluno de exatas tem logo depois de ter aprendido um pouco de Cálculo!? Algo como, nossa como e porque ninguém me contou disso antes. Então, segundo minha experiência, que estatisticamente falando é nula, acho que o interesse deles por isso é quase que garantido. Sobre as contas em si, acredito que tenha o mesmo pensamento dos demais. De que isso é um dos maiores intimidadores do problema.

Nisso outros dois professores disseram:

- É, eu mesmo, vendo essas contas, confesso que me deu uma preguiça de realizar. Ainda bem que você já fez.

- É, mas daria pra fazer desse jeito numa sala também, não!? – Indagou o outro – Tipo, a gente iria tateando a sala e vendo, de acordo com as primeiras contas, até onde dá pra levar. Quando não der mais a gente mesmo faz. Ou nem faz e só menciona. É um risco, mas acho que resolveria.

- Bom – voltou o primeiro – pode ser. Mas ainda não sei nesse momento a galera da sala não pegaria o celular pra ficar em dia com as redes sociais.

- É. Se não for assim, não tem muito o que dizer.

O último professor se limitou a dizer após isso:

- Bom, acho que não há muito o que falar depois de tudo isso. Concorro com a visão deles.

Encontro IX

O professor disse:

- Olha, mexendo com livros didáticos acho que isso é quase inviável por questões de quantidade de páginas que o livro pode ter, em função do custo. Outra treta [sic] é que o livro tem que vender e, aí vem uma desvantagem, eu não sei o professor vai querer trabalhar com isso. Aí, imagina, você faz um trabalho legal, achei bastante interessante, mas o professor, na hora de aplicar, talvez faça um serviço meia boca ou então nem vai comprar o livro porque ele dá aula do mesmo jeito a vinte anos e não pretende mudar agora. Aí você talvez me pergunte. ‘Poxa, mas isso é o que define o que vai pro livro?’ e eu vou ter que te dizer que não é o que define, mas na hora de ver o que tiramos do livro esse pensamento passa pela cabeça editorial. Sobre os alunos em si, acho que eles iam se amarrar nisso tudo. De verdade. A única coisa que dificulta são as contas do último trajeto.

A professora então disse

- Pegando o gancho do que você disse, me parece uma questão que fará acender a lâmpada na cabeça de todos eles, mas ao fazer essas contas a lâmpada começa a piscar e a gente precisaria ter cuidado pra que aumentar a intensidade não faça com que ela queime de uma vez. Acho que brincar na laranja ao invés do globo pode ser uma maneira interessante de começar. Mesmo que a gente perca um pouco da parte de geografia inicial. Acho que vale a pena. Assim, pra mim os prejuízos são, falar disso e forçar muito uma coisa que eles não estão preparados

e acabem criando ranço para a posteridade, mas os benefícios consistem numa mudança do status quo do que falamos hoje. Tipo, a gente continua falando de uma coisa de 2000 anos ou sei lá quanto e não focamos nas necessidades do mundo atual. É interessante falar disso, mas é também bastante desafiador. Só posso lhe dizer, boa sorte!

Encontro X: “Olha, dando aula o tanto que já dei, acho que isso é legal porque os alunos tem a tendência de adorar essas coisas. Isso que eles chamam de curiosidade. E, qualquer coisa que faça com que os alunos tomem interesse pelo conteúdo é sempre bem-vinda. Assim, eles, estou seguro, aprenderiam o conceito, entenderiam porque, pra aqueles que já pegaram voos e viram essa trajetória no computador de bordo, ou sei lá como chama aquilo. É sempre bom que a escola aja dessa forma, ensinado com coisas do mundo real. Coisas as quais eles tenham sido apresentados, exemplos sem forçar nada. Enfim, é isso. Acho que qualquer coisa que a gente puder tentar pra cativar a atenção dessa juventude que dispersa cada vez mais rápido, em função do fluxo de informações, é uma tentativa válida. Sobre os prejuízos fico pensando nos valores numéricos que você mostrou. Não sei até que ponto isso não é um bloqueador de conteúdo. Mas nada de absurdo também. Agora, a real preocupação é em que tempo faríamos isso. A escola já está saturada de conteúdo. Pra um entrar, outro tem que sair e não sei ao certo qual seria. Eu tiraria vários, mas sempre tem aquela prova de vestibular que faz a gente dar alguns conteúdos que não tem muito propósito pra grande massa a não ser o de entrar em alguma instituição de nível superior.”

9 Considerações finais

Inicialmente, com o trabalho desenvolvido pelos professores, as respostas e os diálogos que aconteceram durante os encontros colaboram com a minha hipótese inicial de que o assunto é interessante e pode sim despertar a curiosidade, o entusiasmo e até mesmo o envolvimento dos alunos. Isso porque aborda questões que não são tratadas em sala de aula e que fogem ao pensamento corriqueiro da maioria.

Os professores, como pode ser visto nas transcrições das entrevistas, não costumam falar de prejuízo e sim de obstáculo. Reconhecem, na grande maioria, que nada que venha nesse sentido pode ser prejudicial num âmbito mais pedagógico. Assim, pude perceber que, vários deles não veem danos em trabalhar com isso em sala de aula, todos os professores pareceram gostar bastante, mas mesmo assim ainda que não parecem tão dispostos a fazê-lo.

Dos motivos que levariam os professores a ter ressalvas sobre trabalhar com a geometria na esfera, pude perceber que eles enxergaram em suma os mesmos obstáculos: a necessidade de, para falar sobre ela, ser necessário **tirar algum outro conteúdo**, o que é difícil em função do gargalo que os alunos enfrentam para entrar numa faculdade, dessa maneira vem também a discussão do **tempo** que levaria sua abordagem em uma sala de aula e que com **grupos heterogêneos** (incluindo pessoas não muito interessadas na matemática) a dispersão provavelmente acontecerá em função do assunto que eles enxergam como maior obstáculo: **as contas**. As contas foram a intersecção de todas as entrevistas.

Destrinchando um pouco esses ditos reveses, graças as entrevistas pude concluir que a preocupação sobre tirar algum conteúdo para colocar este pode ser contestada pelos dizeres da BNCC:

*Essa nova estrutura do Ensino Médio, além de ratificar a organização por áreas do conhecimento – sem desconsiderar, mas também sem fazer referência direta a todos os componentes que compunham o currículo dessa etapa –, prevê a oferta de variados itinerários formativos, seja para o aprofundamento acadêmico em uma ou mais áreas do conhecimento, seja para a formação técnica e profissional. Essa estrutura adota a **flexibilidade** como princípio de **organização curricular**, o que permite a construção de currículos e propostas pedagógicas que atendam mais adequadamente às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes, estimulando o exercício do **protagonismo juvenil** e fortalecendo o desenvolvimento de seus projetos de vida. (BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018, p. 468, grifo nosso)*

E sobre a matemática em si, ele diz

... aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino. (BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018, p. 477)

Assim, há uma certa flexibilização que a BNCC valoriza. A fala específica sobre geometria e topologia mostra que já é dado um grau de importância para essa área. E, se há flexibilização, então o fator tempo não é de fato um impeditivo.

Para as escolas que se norteiam pelos vestibulares e as aprovações dos alunos por meio dessas provas e, exatamente por isso, alegam que estudar esse assunto não é necessário porque não é de alta incidência ficam os questionamentos. Sabendo que algumas provas já começaram a falar disso, como

pode ser visto no capítulo 6, até que momento ficaremos esperando para ensinar isso? Até que ponto que o vestibular deve ser o fio condutor do que é aprendido em sala? Se as provas de vestibular todas deixassem de existir amanhã, o que permaneceria na grade e o que sairia? Essas são apenas inquietações sobre as consequências de deixar o ingresso a faculdade nortear o conteúdo programático das escolas.

Também desse excerto da BNCC temos uma consonância do que foi dito por alguns professores. Sobre separar as turmas e realizar atividades complementares, como uma iniciação científica, por exemplo. Com isso, é consenso dos professores que, para os naturalmente interessados nessa temática, num grupo mais enxuto essa atividade é bastante pertinente. Entendo que as pessoas possuem demandas diferentes e que em alguns momentos devemos tratar desigualmente os desiguais, mas devemos ter cuidado para que essa separação não prive ninguém do que é essencial.

Sobre as contas, acredito que elas sejam necessárias, apesar de serem mais difíceis. Subestimar o aluno nisso é um erro que cometemos às vezes. É importante que os alunos sejam desafiados e isso costuma ter um retorno muito positivo no que diz respeito ao aprendizado, assim como aconteceu com os professores entrevistados.

As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 1998, p. 37).

Por isso é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao

lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo.

Com os professores que trabalhei, ainda que não tenha perguntado sobre o conhecimento prévio deles sobre o assunto, pude perceber que a maioria não estava familiarizado com o tema. Ou não tinha estudado o assunto durante os cursos realizados ou não se lembrava. Este é outro fator que ajuda a explicar o porquê de nada disso aparecer em sala de aula. Os professores entrevistados possuem as mais variadas idades e carreiras, se formaram em lugares diferentes e em épocas diferentes. À exceção de dois deles, todos os demais pareciam estar tendo contato com outro modelo de geometria naquele momento. Isso dificulta que esse tópico seja abordado mais profundamente, mesmo que aparecesse no livro didático. Não aparecendo no livro didático a situação fica ainda mais inviabilizada para que o professor traga atividades diferenciadas que caminhem nessa direção.

É importante retomar o fato de que aquilo que é de difícil aquiescência para o professor, ele costuma a dizer que é difícil para o aluno. Numa fala que visa validar o porquê de não se explicar determinado conteúdo. Quando o professor tem domínio pleno do conteúdo, o professor sente que é fácil apresentar isso ao aluno. A Zona de Desenvolvimento Proximal, ZDP, de Vygotsky trata bastante disso.

Seria interessante pesquisar como isso se daria do ponto de vista dos alunos, uma vez que todos os professores não viram prejuízos em trabalhar com o tema com os alunos. Ao realizar essa tarefa, os alunos perceberão que existem outros modelos de geometria além do usual que eles estão acostumados. Notarão que ir para leste e depois para norte pode ser diferente de ir para norte e depois para leste, situação até então impensável por parte de muitos. Para não sofrer as mazelas que presenciei com a ausência de globos terrestres em alguns encontros,

seja fundamental levar a figura, juntamente com uma bola de isopor para que os recortes sejam mais palpáveis.

O globo é recurso apropriado para mostrar fluxos espaciais a grande distância. Sem um globo terrestre, teremos dificuldades para trabalhar temas que necessitam de uma exposição clara de distâncias e posições no planeta, como transportes marítimos e aéreo, comércio internacional ou migrações intercontinentais, bem como questões geopolíticas. (SCHÄFFER, KAERCHER, et al., 2012, p. 16-22, grifo do autor)

Penso que os alunos entenderiam bem o funcionamento dessa geometria, ainda que as contas sejam feitas de forma quase que expositiva (como foi sugerido por um professor) e que além disso a geometria euclidiana seria revista.

Imaginamos que essas atividades sejam feitas na forma de exercícios para não tornar a teoria ainda mais extensa. Isso se justifica porque, na verdade, não há nenhum teorema novo envolvido. Tudo o que se precisa utilizar são os teoremas iniciais da Geometria Espacial e as propriedades e relações métricas da geometria plana. (LIMA, WAGNER, et al., 1998, p. 226)

Percebo também que a dificuldade de tudo está na forma como a matemática é ensinada atualmente. O ensino de geometria se prende muito a imagens. Ficando preso a imagem do que é reta, do que é triângulo e afins, é difícil enxergar a $reta_E$ e o $triângulo_E$ na geometria esférica. É importante dar valor a imagem, principalmente nos anos iniciais, mas no ensino médio é necessário que seja valorizado as definições e que a abstração ganhe espaço.

Com isso, percebemos que existem dificuldades, como as apontadas pelos professores. Seja a falta de tempo, seja as contas envolvidas no processo, seja o conteúdo ser bastante apertado. E é por isso que, aparentemente, a geometria esférica não é sequer mencionada na sala de aula. Ainda que tudo isso seja verdade, acredito que os alunos, tendo visto isso uma vez consigam responder de forma mais simples as mais diversas questões. Seja da trajetória de um avião, seja da cor do urso. E isso já é uma vitória. Acredito que o fascínio demonstrado pelos

professores, enquanto eu mostrava isso tudo para eles, será igual ou até mesmo superado pelo fascínio dos alunos quando tiverem contato com esta geometria. E fazer com que o aluno se interesse é o primeiro passo para fundamentar o conteúdo. O que não podemos é cair na mesmice e continuar fazendo o que sempre se fez. Temos demandas diferentes hoje em dia então é necessário alterar um pouco as estruturas. A necessidade é a mãe da criação. Nós como professores precisamos sair da nossa zona de conforto de ensinar o mesmo conteúdo e ajudar os nossos alunos, preparando-os para eventualidades que podem surgir.

Digo isso porque, apesar de todas as potencialidades que já foram descritas no trabalho sobre o uso da geometria na esfera para introduzir a geometria esférica percebe-se com o trabalho desenvolvido pelos professores que ainda existe um longo caminho a ser percorrido para que esse conteúdo realmente faça parte dos conteúdos abordados na educação básica. Esse tema apresenta desafios, mas é possível levar para a educação básica.

10 Anexos

Anexo 1 – Prova da FUVEST de 2016

Dois aviões vão de Brasília a Moscou. O primeiro voa diretamente para o norte, até atingir o paralelo de Moscou, quando então muda o rumo para o leste, seguindo para o seu destino final. O segundo voa para o leste até atingir o meridiano de Moscou, tomando então o rumo norte até chegar a esta cidade.

- a) Desprezando as variações de altitude, qual avião terá percorrido a maior distância em relação ao solo? Justifique sua resposta.
- b) Calcule a diferença entre as distâncias percorridas, supondo que a Terra seja esférica.

Note e adote:
$\cos 56^\circ = 0,56$; $\sin 56^\circ = 0,83$; $\cos 16^\circ = 0,96$; $\sin 16^\circ = 0,28$
Latitude e longitude de Brasília: 16°S e 48°W
Latitude e longitude de Moscou: 56°N e 37°E
Raio da Terra: 6.400 km

Desprezando as variações de altitude, qual avião ter percorrido a maior distância em relação ao solo? Justifique sua resposta.

- a) Calcule a diferença entre as distâncias percorridas, supondo que a Terra seja esférica.

Note e adote:

$$\cos 56^\circ = 0,56; \sin 56^\circ = 0,83; \cos 16^\circ = 0,96; \sin 16^\circ = 0,28$$

Latitude e longitude de Brasília: 16°S e 48°W

Latitude e longitude de Moscou: 56°N e 37°E

Raio da Terra: 6.400 km

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário, do estudo que tem como pesquisador responsável o aluno de pós-graduação Thales Graça Athanásio, do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, que pode ser contatado pelo e-mail thales.athanasio@gmail.com.

Tenho ciência de que o estudo tem em vista realizar entrevistas com professores, visando, por parte do referido aluno a realização do trabalho de conclusão.

Minha participação consistirá em conceder uma entrevista que será gravada e trechos serão transcritos. Entendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa acadêmica, que os dados obtidos não serão divulgados, a não ser com prévia autorização, e que nesse caso será preservado o anonimato dos participantes, assegurando assim minha privacidade. O aluno providenciará uma cópia da transcrição da entrevista para meu conhecimento. Além disso, sei que posso abandonar minha participação na pesquisa quando quiser e que não receberei nenhum pagamento por esta participação.

Assinatura

São Paulo, _____ de _____ de 2019

11 Bibliografia

AGUIRRE, A. J.; MELLO FILHO, J. A. D. **INTRODUÇÃO À CARTOGRAFIA**. Santa Maria: UFSM, 2009.

ALVES, S. A Geometria do Globo Terrestre, 2009.

AZEVEDO, A. D. **O Mundo Antigo**. São Paulo: EDUSP, 1965.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Helena Castro. 3ª. ed. [S.l.]: EDGARD BLUCHER, 2018. 313 p.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Base Nacional Comum Curricular. **Base Nacional Comum Curricular**, p. 265 - 319 ; 461 - 479; 527 - 548, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_14dez2018_site.pdf>. Acesso em: 17 Dezembro 2018.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, FÍSICA. Guia de Livros Didáticos - Ensino Médio - Física. **PNLD 2018: física – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**, 2017.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, MATEMÁTICA. Guia de Livros Didáticos - Ensino Médio - Matemática. **PNLD 2018: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**, Brasília, DF, 2017.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, QUÍMICA. Guia de Livros Didáticos - Ensino Médio - Química. **PNLD 2018: química – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**, 2017.

BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática, 1998.

CARVALHO, M. A. D. S. D.; CARVALHO, A. M. F. T. D. **O ensino de geometria não euclidiana na educação básica**. Recife: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011.

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. O QUESTIONÁRIO, O FORMULÁRIO E A ENTREVISTA COMO INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS: VANTAGENS E DESVANTAGENS DO SEU USO NA PESQUISA DE CAMPO EM CIÊNCIAS HUMANAS. **III CONEDU**, 2016.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. [S.l.]: Papirus Editora, 2001.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. 86e. ed. [S.l.]: Editora da UNESP, 2009. 98 p.

FISH, W. NON-EUCLIDEAN GEOMETRY AND ITS POSSIBLE ROLE IN THE SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS SYLLABUS, Janeiro 1996.

GROENWALD, C. L. O.; NUNES, G. D. S. **Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível**. [S.l.]: Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, v. 10, 2007.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1972.

LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere**. Berkley: Key Curriculum Press, 1996. ISBN 1-55953-103-7.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - volume 2**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: Junho 2017.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, BRASIL. **PCN+:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. [S.l.]: [s.n.], 2001.

O conceito de bifurcação. Direção: IMPA. [S.l.]: [s.n.]. 2015.

PATAKI, I.; ALMOULOU, S. Equador, Paralelos e Meridianos: Apenas Linhas Imaginárias? **Educação Matemática**, 19.

POOLE, D. **Linear Algebra - A Modern Introduction**. Stamford: Cengage Learning, 2016.

RAVINDRAN, R. Euclid's Fifth Postulate. **Resonance**, 12, 18 Maio 2007. 26-36. Disponível em: <<http://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/012/04/0026-0036>>.

SCHÄFFER, N. O. et al. **Um globo em suas mãos - Práticas para a sala de aula**. Porto Alegre: Penso, 2012.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. [S.l.]: [s.n.], 1998.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. Matemática e Suas Tecnologias. **Currículo do Estado de São Paulo**, 2012. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf>>. Acesso em: Junho 2017.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. 2ª Edição. ed. São Paulo: Cortez Editora, 1986.

TODHUNTER, I. Spherical Trigonometry - For the Use of Colleges and Schools. Londres: THE UNIVERSITY PRESS, 1886. ISBN EBook #19770.

WOLFE, H. E. Introduction To Non-Euclidean Geometry. New York: The Dryden Press, 1945. 45-49 p.

12 Apêndice I

Sejam $O(0,0,0)$ a origem do sistema e $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$. Definimos como superfície esférica o conjunto cartesiano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Assim, dizemos que essa superfície esférica tem centro na origem do sistema e possui raio de medida r . Além disso, temos que o diâmetro mede $2r$.

Note que se um ponto $(a, b, c) \in S$ então o seu antípoda é o ponto $(-a, -b, -c) \in S$.

1. Como obter o ângulo entre duas *retas*_E:

Uma forma de obter o ângulo entre duas *retas*_E é utilizar o teorema a seguir:

Teorema 4: O ângulo θ entre duas *retas*_E pode ser obtido por

$$\theta = \arccos \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{\|n_1\| \|n_2\|},$$

onde n_1 e n_2 são os vetores normais aos planos que contém essas *retas*.

Demonstração:

Sejam:

- os planos π_1 e π_2 os que contém as *retas*_E.
- O um ponto em comum entre esses planos.
- o vetor $\overrightarrow{OB}$ o vetor normal ao plano π_1 e $\overrightarrow{OA}$ o vetor normal ao plano π_2 .
- $X \in \pi_1$ e $Y \in \pi_2$ tal que $B\hat{O}X$ e $A\hat{O}Y$ são ângulos retos e a medida de $B\hat{O}X$ é maior que a medida de $B\hat{O}Y$

A partir disso temos a imagem a seguir:

Figura 38 - Ângulo entre planos – Fonte: Elaborada pelo autor

O ângulo $X\hat{O}Y$ e o ângulo $Y\hat{O}B$ são complementares, posto que $\overrightarrow{OB}$ é vetor normal. Os ângulos $Y\hat{O}B$ e $B\hat{O}A$ também são complementares, posto que $\overrightarrow{OA}$ é vetor normal. Dessa forma,

$$m(X\hat{O}Y) + m(Y\hat{O}B) = m(Y\hat{O}B) + m(B\hat{O}A)$$

$$\therefore m(X\hat{O}Y) = m(B\hat{O}A)$$

Ou seja, a medida do ângulo entre dois planos é a medida entre os vetores normais a esses planos.

■

2. Um exemplo numérico para obter o ângulo entre duas $retas_E$

Tomemos duas $retas_E$, uma contida no plano π_1 e outra contida no plano π_2 , tal que: $\pi_1: 3x + y - 5z = 0$ e $\pi_2: 4x - y + z = 0$.

Figura 39 - Ângulo entre retas – Fonte: Elaborada pelo autor

É fácil verificar que o ponto $(0,0,0)$ pertence a ambos os planos. Logo, o centro da esfera pertence aos dois planos. Assim podemos garantir que existe uma circunferência contida em cada um desses planos cujo centro coincide com o centro da esfera, ou seja, existe uma $reta_E$ contida em cada um desses planos.

Aplicando o teorema temos que, do plano π_1 , $n_1 = (3,1,-5)$ e do plano π_2 que $n_2 = (4,-1,1)$. Assim, o ângulo α formado por essas retas é

$$\alpha = \arccos \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{\|n_1\| \|n_2\|} = \arccos \frac{\langle (3,1,-5), (4,-1,1) \rangle}{\|(3,1,-5)\| \|(4,-1,1)\|} = \arccos \frac{6}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{18}}$$

Com o auxílio de uma calculadora, temos que

$$\alpha = \arccos \frac{6}{3\sqrt{70}} \cong 76,16^\circ$$

Assim, independente do raio da esfera e de qual a equação dessas $retas_E$, o ângulo entre esses planos e, por conseguinte entre as $retas_E$, é igual a $76,16^\circ$.

3. Um exemplo numérico para obter a soma dos ângulos internos de um $triângulo_E$

Sejam os planos $\pi_1: 3x + y - 5z = 0$, $\pi_2: 4x - y + z = 0$ e $\pi_3: -x + 2y + 3z = 0$.

O ângulo α formado pelos planos π_1 e π_2 já foi calculado. De fato, $\alpha = 76,16^\circ$.

O ângulo β formado pelos planos π_1 e π_3 é da forma:

$$\beta = \arccos \frac{\langle n_1, n_3 \rangle}{\|n_1\| \|n_3\|} = \arccos \frac{\langle (3, 1, -5), (-1, 2, 3) \rangle}{\|(3, 1, -5)\| \|(-1, 2, 3)\|} = \arccos \frac{-16}{7\sqrt{10}}$$

$$\therefore \beta \cong 136,29^\circ$$

O ângulo γ formado pelos planos π_2 e π_3 é da forma:

$$\gamma = \arccos \frac{\langle n_2, n_3 \rangle}{\|n_2\| \|n_3\|} = \arccos \frac{\langle (4, -1, 1), (-1, 2, 3) \rangle}{\|(4, -1, 1)\| \|(-1, 2, 3)\|} = \arccos \frac{-3}{2\sqrt{63}}$$

$$\therefore \gamma \cong 100,89^\circ$$

Assim, a soma dos ângulos internos desse triângulo é $\alpha + \beta + \gamma \cong 313,34^\circ$.

13 Apêndice II

Para não dependermos de parametrizações da curva e cálculo diferencial e integral, façamos uma demonstração intuitiva, por geometria.

Sejam os *pontos_E* P e Q na superfície esférica.

Condição 1 – Simetria I: Seja π o plano que é mediatriz desse segmento (isto é, o plano que passa pelo ponto médio de $\overline{PQ}$ de maneira tal que $\pi \perp \overline{PQ}$). Assim, a esfera e todos os seus *pontos_E* são simétricos em relação a esse plano, portanto, se a menor trajetória for única, então, ao refleti-la pelo plano, a trajetória deverá permanecer inalterada. Caso contrário não seria única

Condição 2 – Simetria II: Considere o plano que contém a circunferência máxima que passa por P e Q . Neste caso a esfera e todos os seus *pontos_E* são simétricos em relação a este plano. Dessa forma, sendo o único caminho, ele deverá permanecer o mesmo após ser refletido.

Condição 3 – Restrição Esférica: Como só podemos nos deslocar pela esfera, o caminho de P a Q deve estar na esfera.

Condição 4 – Exclusividade: O caminho deve ser único.

O único caminho que satisfaz essas três condições é o do grande círculo, porque a interseção da esfera com os dois planos de simetria satisfaz claramente as condições 1, 2 e 3.

Além disso, a condição 4 implica que nenhum outro caminho pode ser o caminho mais curto. Portanto, a interseção dessas formas deve ser o caminho mais curto.

14 Apêndice III

(FUVEST – 2015 – Primeira Fase) Diz-se que dois pontos da superfície terrestre são antípodas quando o segmento de reta que os une passa pelo centro da Terra.

Podem ser encontradas, em sites da internet, representações, como a reproduzida abaixo, em que as áreas escuras identificam os pontos da superfície terrestre que ficam, assim como os seus antípodas, sobre terra firme. Por exemplo, os pontos antípodas de parte do sul da América do Sul estão no leste da Ásia.

Se um ponto tem latitude x graus norte e longitude y graus leste, então seu antípoda tem latitude e longitude, respectivamente,

- a) x graus sul e y graus oeste.
- b) x graus sul e $(180 - y)$ graus oeste.
- c) $(90 - x)$ graus sul e y graus oeste.
- d) $(90 - x)$ graus sul e $(180 - y)$ graus oeste.
- e) $(90 - x)$ graus sul e $(90 - y)$ graus oeste.

Resposta: b

Justificativa: Da definição do que são pontos antípodas, tem-se que se um ponto P tem latitude x graus norte, então seu antípoda tem de ter x graus sul. E se P tem longitude y graus leste, então seu antípoda tem $(180 - y)$ graus oeste.

(UFF – 2012 – Primeira Fase) O sistema de posicionamento global (GPS) funciona, utilizando-se uma rede de satélites distribuídos em torno da Terra. Ao receber os sinais dos satélites, o aparelho receptor GPS calcula sua posição $P = (a, b, c)$ com relação a um certo sistema ortogonal de coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^3$ e, depois, converte essas coordenadas cartesianas para coordenadas geográficas: latitude ϕ , longitude λ e elevação ρ . Se $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então ϕ é o ângulo entre os vetores (a, b, c) e $(a, b, 0)$, λ é o ângulo entre os vetores $(a, b, 0)$ e $(1, 0, 0)$ e ρ é a distância da origem do sistema de coordenadas ao ponto P , conforme a figura abaixo.

Para $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, assinale a alternativa correta.

- a) $a = \rho \cos(\phi) \cos(\lambda)$, $b = \rho \sin(\phi) \cos(\lambda)$, $c = \rho \sin(\lambda)$
- b) $a = \rho \sin(\phi) \cos(\lambda)$, $b = \rho \sin(\phi) \sin(\lambda)$, $c = \rho \cos(\phi)$
- c) $a = \rho \cos(\phi) \sin(\lambda)$, $b = \rho \cos(\phi) \cos(\lambda)$, $c = \rho \sin(\phi)$
- d) $a = \rho \sin(\phi) \sin(\lambda)$, $b = \rho \sin(\phi) \cos(\lambda)$, $c = \rho \cos(\phi)$
- e) $a = \rho \cos(\phi) \cos(\lambda)$, $b = \rho \cos(\phi) \sin(\lambda)$, $c = \rho \sin(\phi)$

Resposta: e

Justificativa: Sejam os pontos $A = (a, 0, 0)$ e $B = (a, b, 0)$.

Do triângulo OPB tem-se

$$\text{sen}(\phi) = \frac{c}{\rho} \therefore c = \rho \text{sen}(\phi)$$

$$\text{cos}(\phi) = \frac{OB}{\rho} \therefore OB = \rho \text{cos}(\phi)$$

Do triângulo OPA tem-se

$$\text{sen}(\lambda) = \frac{a}{OB} \therefore a = OB \text{cos}(\lambda) \therefore a = \rho \text{cos}(\phi) \text{cos}(\lambda)$$

$$\text{cos}(\lambda) = \frac{b}{OB} \therefore b = OB \text{sen}(\lambda) \therefore b = \rho \text{cos}(\phi) \text{sen}(\lambda)$$

(COMVEST – 2005 – Segunda Fase) *O sistema de projeção do mapa abaixo foi criado por Mercator em 1569 com o objetivo de facilitar as navegações marítimas. Observe o mapa e faça o que se pede:*

Adaptado de Igor Moreira, *O Espaço Geográfico: Geografia Geral e do Brasil*.

O mapa indica três possibilidades de rotas marítimas entre as cidades de Montevidéu (Uruguai) e Cidade do Cabo (África do Sul). Identifique qual das três rotas é a menor. Justifique sua resposta.

Resposta: C

Justificativa: Apesar do que já fora discutido no trabalho, a resposta oficial é “Rota C pelo princípio da ortodromia”
<http://www.comvest.unicamp.br/vestibulares-antiores/vestibular-2005/respostas-esperadas-2005/>.

(VUNESP – 2018/2 – Primeira Fase) Observe a figura da representação dos pontos *M* e *N* sobre a superfície da Terra.

Considerando a Terra uma esfera de raio 6 400 km e adotando $\pi = 3$, para ir do ponto *M* ao ponto *N*, pela superfície da Terra e no sentido indicado pelas setas vermelhas, a distância percorrida sobre o paralelo 60° Norte será igual a

- a) 2100 km. b) 1600 km. c) 2700 km. d) 1800 km. e) 1200 km.

Resposta: b

Justificativa: Sejam *O* o centro da esfera, *C* o centro da circunferência do paralelo 60° Norte e *r* a medida do raio dessa circunferência, em quilômetros, conforme a figura a seguir.

Figura 40 - Resolução questão VUNESP - Fonte: Feita pelo autor

Note que OCM é um triângulo retângulo. Como M está no paralelo 60° Norte, então $m(\widehat{CMO}) = 60^\circ$. Logo

$$\cos 60^\circ = \frac{CM}{MO} \therefore \frac{1}{2} = \frac{r}{6400} \therefore r = 3200$$

Como M está na longitude 15° Oeste e N na 15° Leste, tem-se uma variação de 30° . Logo, a medida x , em quilômetros, do arco $\widehat{MN}$ é obtida por

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2 \cdot \pi \cdot 3200$
30°	— — —	x

$\therefore x = 1600$

(UFF – 2004 – Primeira Fase) A localização de um ponto qualquer na superfície da Terra (considerada como uma esfera) é feita, em geral, a partir de duas coordenadas, sendo uma delas a latitude – que é o ângulo (em grau) entre o plano que contém a linha do equador e o segmento que une o centro da esfera ao ponto em questão.

Sabe-se que as cidades de Porto Alegre e de Macapá se situam, praticamente, no mesmo meridiano.

Considere que a cidade de Macapá (ponto M) localiza-se bem próximo da linha do equador (latitude = $0^{\circ}02'20''$ ao norte); que a latitude de Porto Alegre (ponto P) é de $30^{\circ}01'59''$ ao sul e que o valor do diâmetro da Terra é de 12.750 quilômetros. Veja figura a seguir:

Tendo em vista tais considerações, pode-se afirmar que a distância, em quilômetro, entre as duas cidades é de aproximadamente:

- a) 2300 b) 3300 c) 4600 d) 6600 e) 9000

Resposta: B

Justificativa: Como um ponto está acima da linha do Equador e outro abaixo, a variação entre as latitudes é a soma dos valores absolutos, isto é,

$$30^{\circ}01'59'' + 0^{\circ}02'20'' = 30^{\circ}04'19'' \cong 30^{\circ}$$

Sendo assim, como o raio da Terra é 6.375, a medida x , em quilômetros, do arco $\widehat{MP}$ pode ser obtida da seguinte maneira

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2 \cdot \pi \cdot 6375$
30°	— — —	x
$\therefore x \cong 3338$		

(FUVEST – 2018 – Segunda Fase – 3ºDia) Um navio parte do ponto de latitude 0° e longitude 0° e navega até chegar a um ponto de latitude 45° sul e longitude 45° oeste, seguindo a trajetória que minimiza a distância percorrida. Admita que a Terra seja esférica de raio $R = 6000$ km. Qual foi a distância percorrida pelo navio?

Resposta: 2000π km

Justificativa: Sejam O o centro da esfera, A o ponto de partida do navio, B o ponto de chegada, C o ponto sobre a linha do Equador e de longitude 45° oeste e D um ponto pertencente ao segmento $\overline{OC}$ tal que $\overline{AD} \perp \overline{OC}$, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 41 - Resolução FUVEST 2018 Imagem I - Fonte: Feita pelo autor

Note que $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{BOE}) = 45^\circ$. Logo, os triângulos retângulos AOD e BOE são isósceles. Como a hipotenusa de ambos é o raio da esfera, tem-se que AOD e BOE são também congruentes. O que implica que $DO = EO$, ou seja, E e D são, na verdade, o mesmo ponto. Temos então a seguinte ilustração.

Figura 42 - Resolução FUVEST 2018 Imagem II - Fonte: Feita pelo autor

Isto é, o triângulo ADB é retângulo e isósceles, de tal modo que $DB = DO = DA$. Logo, como $\triangle ABD \equiv \triangle AOD$, tem-se que a hipotenusa do triângulo ABD também é o raio da esfera. Ou seja $AB = OA = OB$. Portanto o triângulo OAB é equilátero e $m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$.

Sendo assim, como o raio da Terra é 6.000 km, a medida x , em quilômetros, do arco $\widehat{AB}$ pode ser obtida da seguinte maneira

Ângulo		Comprimento
360°	— — —	$2 \cdot \pi \cdot 6000$
60°	— — —	x

$$\therefore x \cong 2000\pi$$