# O ensino de números irracionais: um estudo sobre Conhecimentos Especializados utilizados pelo professor

Isabel Villas Bôas Bonacella

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**
**PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE**
**MESTRA EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática**

**Orientador: Prof. Dr. David Pires Dias**

Junho de 2024

**O ensino de números irracionais: um estudo sobre Conhecimentos Especializados utilizados pelo professor**

Isabel Villas Bôas Bonacella

Esta é a versão original da dissertação elaborada pela candidata Isabel Villas Bôas Bonacella, submetida para obtenção do título de mestre.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Regina Maria e Paulo Henrique, e às minhas irmãs, Marcella e Danielle, que foram o suporte necessário para que eu terminasse esta dissertação.

Ao meu orientador, David, que me convenceu a continuar quando eu quis desistir.

Ao meu padrinho, Sergio, que sempre se mostrou interessado na minha pesquisa.

Aos professores e escolas que abriram suas salas de aula para mim e aceitaram participar do meu estudo.

Aos alunos que participaram do questionário.

A todos os meus alunos.

Aos meus colegas, que dividiram a sala dos professores comigo durante esses anos.

Aos meus amigos.

À Laura, que revisou este trabalho.

E à matemática e à educação, que estiveram comigo todos os dias.

## Resumo

Isabel Villas Bôas Bonacella. **O ensino de números irracionais: um estudo sobre Conhecimentos Especializados utilizados pelo professor**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Esta pesquisa sobre os Conhecimentos Especializados de Conteúdo de Deborah Ball destaca sua complexidade, evidenciando sua presença nas aulas observadas em 2019 e 2021 sobre números irracionais. Embora seja desafiador listá-los, sua tangibilidade ressalta a profundidade no ato de ensinar. Em 2021, a professora observada exemplificou suas habilidades utilizando uma atividade de duplicação do quadrado, destacando a importância do Conhecimento Especializado de Conteúdo no envolvimento dos alunos. Reconhecendo a dificuldade de ensinar muitas das propriedades dos números irracionais, a pesquisa destaca a oportunidade de cultivar ambientes de aprendizagem colaborativos e incentivar o compartilhamento de experiências entre professores em formação. Em convergência com Adler e Huillet, propõe círculos de discussão entre professores atuantes e aqueles em instrução, enfatizando que é possível extrair conhecimento formal da análise das experiências dos professores em sala de aula, enriquecendo a sua formação.

**Palavras-chave:** conhecimento; especializado; Ball; Adler; Huillet; Tardif; irracionais; formação; aprendizagem.

**Abstract**

Isabel Villas Bôas Bonacella. **Teaching irrational numbers: a study about some Content Knowledge for Teaching utilized by teachers**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2024.

This research on Deborah Ball's Specialized Content Knowledge emphasizes its complexity, showcasing its presence in observed classes in 2019 and 2021 on irrational numbers. While challenging to list, comprehensively, their observability underscores the depth in the act of teaching. In 2021, one of the observed teachers exemplified skills through a square-duplication activity, emphasizing the importance of Specialized Content Knowledge in student engagement. Acknowledging the difficulty of teaching aspects of irrational numbers, the research highlights the opportunity to foster collaborative learning environments and encourage the sharing of experiences among teachers in training. Aligned with Adler and Huillet, it proposes discussion circles between practicing and prospective teachers, stressing the potential for extracting formal knowledge from analyzing teachers' classroom experiences to enhance education.

**Keywords:** content; knowledge; Ball; Adler; Huillet; Tardif; irrational; training; learning.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| **BNCC** | **Base Nacional Comum Curricular** |
| **CCC** | **Conhecimento Comum de Conteúdo** |
| **CCE** | **Conhecimento do Conteúdo e Estudantes** |
| **CEC** | **Conhecimento Especializado de Conteúdo** |
| **CME** | **Conhecimentos Matemáticos para o Ensino** |
| **CNE** | **Conselho Nacional de Educação** |
| **E1** | **Escola 1 (Na qual foram observadas aulas em 2019)** |
| **E2** | **Escola 2 (Na qual foram observadas aulas em 2021)** |
| **KCT** | **Knowledge of Content and Teaching (Conhecimento do Conteúdo e do Ensino)** |
| **LDB** | **Lei de Diretrizes e Bases** |
| **MEC** | **Ministério de Educação e Cultura** |
| **MKT** | **Mathematical Knowledge for Teaching (Conhecimento Matemático para o Ensino** |
| **P1** | **Professor 1 (Professor da Escola E1)** |
| **P2** | **Professor 2 (Professor da Escola E1)** |
| **P3** | **Professora 3 (Professora da Escola E2)** |

SUMÁRIO


**1. INTRODUÇÃO ........ 7**
**2. MOTIVAÇÃO ........ 9**
**3. JUSTIFICATIVA COM BASES NA LDB E NA BNCC ........ 17**
**4. O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO CONTEÚDO DE DEBORAH BALL E A MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE ADLER E HUILLET ........ 20**
**5. OS SABERES DOCENTES DE MAURICE TARDIF E O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE DEBORAH BALL ........ 35**
**6. CONHECIMENTOS SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS ........ 41**
6.1. Representações decimais com reticências ........ 42
6.2. Números Comensuráveis e Construtíveis ........ 45
6.3. Números Algébricos e Transcendentes ........ 49
6.4. Não-enumerabilidade dos Números Transcendentes ........ 51
6.5. Estes conhecimentos matemáticos no Ensino Básico ........ 54
6.6. Como estes conhecimentos se relacionam com Conhecimentos Especializados e esta pesquisa ........ 57
**7. COLETA DE DADOS DA PESQUISA ........ 61**
**8. ANÁLISE DAS AULAS ASSISTIDAS E DAS ENTREVISTAS COLETADAS ........ 70**
8.1 Professor P1 ........ 70
8.2 Professor P2 ........ 76
8.3 Professora P3 ........ 84
**9 CONCLUSÕES ........ 99**
**REFERÊNCIAS ........ 103**
**APÊNDICE A - ENTREVISTAS TRANSCRITAS ........ 106**
**ENTREVISTA COM O PROFESSOR 1 ........ 106**
**ENTREVISTA COM O PROFESSOR 2 ........ 109**
**ENTREVISTA COM A PROFESSORA 3, PARTE 01 ........ 121**
**ENTREVISTA COM A PROFESSORA 3, PARTE 02 ........ 134**
**APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS ........ 138**
**APÊNDICE C - TERMOS DE CONSENTIMENTO ........ 140**

# 1. INTRODUÇÃO

No primeiro semestre de 2018, iniciei meus estudos no programa de Mestrado Profissional do Instituto de Matemática e Estatística da USP. No final de 2017, eu havia me formado na graduação em Licenciatura no mesmo instituto e, desde 2016, já trabalhava como professora em uma escola particular da zona norte de São Paulo. Antes de obter meu diploma, eu ocupava o cargo de professora do plantão de dúvidas e só depois de graduada, iria assumir minha primeira turma. Portanto, no início de 2018, além de ter as minhas primeiras experiências acadêmicas com a pós-graduação, também passei a ter minhas primeiras experiências como professora regular, com a responsabilidade de ministrar os conteúdos do currículo e dar continuidade ao ensino do ano escolar para um grupo de alunos (responsabilidades que não eram minhas nem nos estágios, nem nos plantões de dúvidas).

Apesar de ter cumprido, e de maneira atenciosa, todas as horas de estágio exigidas durante a graduação, ainda senti de maneira forte a minha inexperiência como professora regular. O professor regular de matemática na escola básica é aquele que acompanha os alunos ao longo de (pelo menos) um ano, vendo-os várias vezes por semana, ministrando conteúdos novos e elaborando e corrigindo avaliações a respeito. Senti minha inexperiência e minha insegurança nas muitas dúvidas que eu tive sobre como conduzir minhas aulas a respeito dos conteúdos do currículo escolar e do material didático, e sobre qual seria a melhor forma de meus alunos aprenderem a matemática que eu deveria ensinar.

Dessa forma, decidi, no meu primeiro ano de mestrado, que a uma boa forma de aprender com a minha dissertação seria acompanhar e entrevistar outros professores. Compartilhar experiências de ensino entre professores é algo de muito valor, e eu estava certa de que aguçaria as análises que já fazia sobre as minhas práticas.

Ao ler artigos publicados por pesquisadores que trabalham com a formação de professores, deparei-me com o texto de Deborah Ball sobre Conhecimentos Especializados de Conteúdo. De maneira resumida, pois esse tópico será esmiuçado mais profundamente no Capítulo 4, os Conhecimentos Especializados de um conteúdo matemático são aqueles necessários ao professor de matemática; são conhecimentos matematicamente corretos e utilizados pelo professor especificamente com o propósito de ensinar, portanto, não sendo primordial a outro profissional, como por exemplo o próprio matemático.

Esta pesquisa consistiu em assistir a aulas de três professores e, depois, entrevistá-los, a fim de identificar e analisar alguns Conhecimentos Especializados, na definição de Deborah Ball, utilizados no ensino de números irracionais. O tópico dos números irracionais foi escolhido de acordo com minha afinidade pessoal com o assunto, e também de acordo com a importância que vejo no ensino desse conjunto para a utilização da reta real no plano cartesiano durante os anos de Ensino Médio.

Escolher um tópico matemático, números irracionais, para analisar foi fundamental para esta dissertação, pois orientou todo o processo da pesquisa, já que existem Conhecimentos Especializados de diversos assuntos matemáticos que são ensinados na escola. Além disso, a importância que mencionei acima sobre a utilização da reta real pode ser melhor explicada relembrando alguns dos conteúdos matemáticos do Ensino Médio: funções do primeiro grau, do segundo grau, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas. Os gráficos de todas essas funções são construídos no plano cartesiano, que é formado por dois eixos compostos por números reais, sendo eles um conjunto numérico que só está completo com os números irracionais.

## 2. MOTIVAÇÃO

Em 2016, enquanto concluía minha graduação e cerca de 300[1] horas de estágio, eu estava também trabalhando como professora de plantão de dúvidas na já mencionada escola particular da zona norte de São Paulo – a qual, a partir de agora, será chamada de E1. Essas aulas, nessa época, eram opcionais, o que limitava a minha possibilidade de acompanhar o desenvolvimento matemático dos alunos que eu ensinava, já que muitos compareciam esporadicamente e não era eu quem os avaliava. Além disso, geralmente, o aluno que frequentava o plantão de dúvidas estava assistindo, pelo menos, à segunda explicação daquele conteúdo, pois eu fornecia um apoio ao professor titular sobre o que ele já havia ensinado em sala.

Tive mais liberdade para ensinar conteúdos novos para os alunos durante as 120 horas de estágio que cumpri em uma escola pública também da zona norte de São Paulo. As outras 180 horas de estágio foram cumpridas ou de acordo com minhas atividades na própria escola E1, ou no acompanhamento de funções de gestão em ambas as escolas mencionadas nesse parágrafo, como proposta das próprias disciplinas da graduação que solicitaram os estágios.

Na escola estadual mencionada acima, tive a chance de ministrar uma sequência didática sobre funções trigonométricas para alunos da 2º ano do Ensino Médio, experiência que utilizo para confirmar a importância dos números irracionais na compreensão do conjunto dos números reais, da reta real, do plano cartesiano e dos gráficos de funções. Lá também tive a chance de trabalhar na sala de apoio especial para alunos cegos e de baixa visão. À época, a escola era referência na região no apoio a pessoas com essas especificidades, possuindo diversas máquinas de escrever em Braille e professora especializada, acolhendo alunos da própria escola e de escolas no entorno.

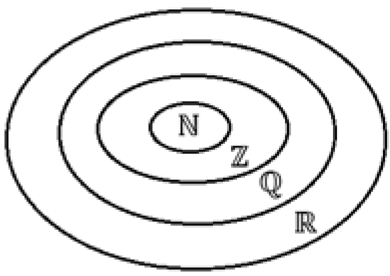
Nesta sala de apoio, aprendi a ler e escrever em Braille e forneci auxílio na explicação de alguns assuntos matemáticos para os alunos que lá iam traduzir seus

[1] De maneira ideal, as horas de estágio no curso de Licenciatura do IME-USP são distribuídas na graduação ao longo de pelo menos 2 anos de meio. Devido a particularidades da minha formação, acumulei mais horas do que o exigido em um único ano.

materiais, fazer as lições de casa e, dependendo da idade, também aprender a ler e escrever em Braille. Presenciei falas semelhantes a *"não pude entender nada do que o professor explicou a respeito deste assunto"*, pois, para esses alunos, a única forma de compreensão das aulas regulares eram as palavras, já que o professor titular provavelmente dispunha de pouco tempo para se dedicar aos alunos, e terceirizava os materiais específicos para alunos cegos e de baixa visão à professora especializada da sala de apoio. Por conta disso, pode-se considerar que algumas das explicações que forneci naquele estágio foram, de certa forma, inéditas, contrapondo-se à realidade do plantão de dúvidas da escola E1.

Nesse contexto, em 2016, procurando ilustrar os conjuntos numéricos para um aluno cego do 9º ano, passei a compreender de uma nova forma esse conteúdo que já cativava meu interesse desde o início da graduação. Fiz uma ilustração com barbante (para que o aluno sentisse o relevo) da seguinte maneira: colei um pedaço de barbante em formato oval (fechado) representando o conjunto dos números naturais; um segundo pedaço, em volta do primeiro, para o conjunto dos números inteiros; outro pedaço ainda maior, envolvendo os dois primeiros e representando o conjunto dos números racionais; e, ao colar mais um pedaço de barbante para ilustrar um 4º conjunto que envolvesse os três anteriores, percebi que já estava representando o conjunto dos números reais. Então, me fiz, mentalmente, a seguinte pergunta: onde está, nessa representação, o conjunto dos números irracionais?

Figura 1: Esquema da primeira ilustração feita para o aluno cego durante o estágio.



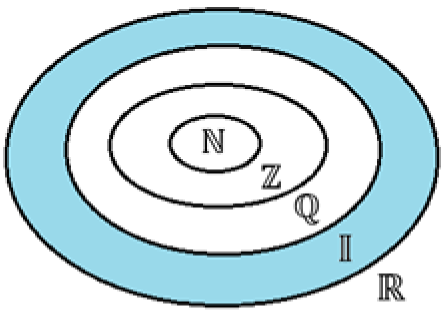

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Era a primeira vez que eu podia "controlar" a situação de ensino e aprendizagem e determinar qual ilustração usar para representar os conjuntos numéricos e, mesmo já tendo sido exposta a questionamentos pertinentes a respeito dessa ilustração durante a minha graduação, naquele momento, foi a melhor ilustração que consegui imaginar. Porém, percebi que, fazendo a construção de forma automática, com um conjunto contido dentro do outro, não havia maneira de usar mais um barbante para definir o conjunto dos números irracionais, pois não contém o conjunto dos racionais.

Depois de alguma reflexão, entendi que, na minha ilustração, como fiz questão de representar o conjunto dos números reais envolvendo todos os outros conjuntos, os números irracionais já estavam ali, no espaço entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais, isto é, exterior à região delimitada como racionais e interior à dos reais. Assim, tive que pensar: como destacar essa região para aquele aluno cego?

Essas perguntas que me fiz não foram propostas para o aluno como ferramenta de aprendizagem, eram um monólogo interno que eu tive para poder fornecer o material e as explicações naquele momento. No tempo que me restava, decidi colar glitter na região entre os barbantes, criando uma textura diferente que ressaltasse os números irracionais.

Figura 2: Esquema da ilustração finalizada feita para o aluno cego durante o estágio. O azul representa o glitter.




Fonte: Elaborada pela autora (2024).

É claro que essa representação tem falhas. Por exemplo: pode-se entender, numa análise mais descuidada, que o conjunto dos números irracionais contém o conjunto dos números racionais; os conjuntos são representados por regiões ovais finitas, mesmo sendo infinitos; que todos os conjuntos têm "tamanhos" diferentes, o que, pensando na cardinalidade dos conjuntos numéricos, não é verdade; e ainda outras problemáticas que poderiam ser apontadas. Porém, naquele momento, essa ilustração somada às minhas explicações foram suficientes para que o aluno compreendesse que o conjunto dos números reais era formado pela união do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais; que os números irracionais eram diferentes dos números racionais que ele conhecia; e que o $\pi$, número irracional do qual ele já havia ouvido falar, estava localizado naquela região sinalizada com glitter – ou seja, não é racional, mas é real. Esse episódio foi marcante para mim e fez com que o meu interesse pelos conjuntos numéricos se perpetuasse.

Em 2018, após a conclusão da minha graduação, foi-me atribuída, na escola E1, uma das 8 turmas do 9º ano da unidade em que eu trabalhava. Foi a primeira vez que eu pude acompanhar o desenvolvimento de tantos alunos tão de perto e como docente regular da turma, apresentando os conteúdos aos estudantes – incluindo o conjunto dos números reais, que faz parte do currículo do 9º ano. Contei ainda com o privilégio de poder dar atenção quase individualizada a eles, que eram os únicos 28 alunos para quem eu lecionava.

Porém, a maioria dos assuntos ainda foi apresentada de acordo com o material didático utilizado pela escola. Na escola E1, é comum que dois ou mais professores lecionem no mesmo ano, ou seja, as outras 7 turmas do 9º ano estavam divididas entre outros 2 professores e ainda havia mais professores do 9º ano na outra unidade da escola. Assim, além da boa comunicação e boa relação entre os profissionais ser muito encorajada na instituição para que o andamento do conteúdo fosse o mesmo entre todos nós, uma forma de garantir isso em matemática, era que todos os professores do 9º ano atribuíssem e corrigissem um mínimo comum de exercícios do livro enquanto estivessem no mesmo capítulo. Isso era necessário e tomava a maioria do tempo de aula. Então, nesse ano, a minha visão sobre os conjuntos numéricos, que eu desejava passar para os alunos e que, por vezes, não aparecia no livro, foi exposta em algumas aulas, conversas e exemplos, mas não de maneira tão livre quanto eu gostaria. Contudo, isso não me impediu de perceber problemáticas muito interessantes, relatadas a seguir.

Houve muita dificuldade entre os alunos na compreensão de um número como $\sqrt{2}$. No currículo de matemática do 9º ano, as operações com raízes de índice

$n$ são trabalhadas com intensidade. Percebi então que, para os alunos, a radiciação era somente uma operação, e um número como $\sqrt{2}$ representava uma operação que ainda não foi realizada, e não um número em si. Teve que ser gasto um tempo construindo a habilidade de interpretar aquela representação como um número - em particular, uma forma de escrever um número real, decimal e não periódico.

Outra dificuldade era entender que este número existe, porque é desafiador entendê-lo como quantidade, dívida financeira ou distância concreta, por exemplo. Ainda que uma parte do ensino dos números irracionais possa se apoiar no Teorema de Pitágoras - inclusive o próprio $\sqrt{2}$ que é a diagonal de um quadrado de lado 1 especificamente, ao desenhar este quadrado e medir a diagonal com a régua, o resultado observado na régua e apresentado pelos estudantes é, quase sempre, uma aproximação racional, que portanto pode parecer exata. Além disso, o trabalho com o conjunto dos números irracionais é muito mais amplo e inclui todos os números de representação decimal infinita e não periódica. Números, estes, que apresentavam-se muito abstratos. Foi desafiador instigar a necessidade de representar e localizar na reta real um número irracional, para que só assim fosse compreendido que estes números existem.

Como não pude realizar uma pesquisa aprofundada a respeito da minha experiência com essa turma, é difícil saber exatamente o que causou essas dificuldades, mas apresento aqui algumas possibilidades oriundas somente da minha sensibilidade como professora deles: falta de tempo durante o ano letivo para abordar esses assuntos através de diferentes estratégias ou até projetos; ou falta de alguns subsídios meus como professora, que depois eu entenderia como possível falta de Conhecimentos Especializados de Conteúdo, na definição de Deborah Ball, que será apresentada posteriormente com mais detalhes. E essa última possibilidade, em especial, tornou a influenciar fortemente minha decisão por esse tema de dissertação.

Em 2019, quando realizei a primeira parte dessa pesquisa, antes ainda de passar pelo exame de qualificação, fui professora das 3 turmas de 7º ano do período da tarde e das 4 turmas de 8º ano da manhã na mesma unidade da escola E1. Para os mais velhos, lecionei somente uma das frentes de matemática da escola, chamada Matemática 1, com uma aula por semana e o intuito de revisar o conteúdo do ano anterior. Para os alunos do 7º ano, que ainda não tinham diferentes frentes de matemática, fui a professora regular com 5 aulas semanais. Então, eu ensinava o conteúdo do 7º ano para o próprio 7º ano e também revisava esse mesmo conteúdo com os 8ºs anos.

Na BNCC, Base Nacional Comum Curricular, no 7º ano está a apresentação do conjunto dos números inteiros e do conjunto dos números racionais. Em 2019, a escola E1 já estava se adequando à BNCC, que entraria em vigor no ano seguinte. Os meus alunos de 7º ano já tinham como base as frações positivas e os números decimais positivos que haviam estudado no 6º ano, e também sabiam como realizar as quatro operações básicas com eles. Eu também sabia que ao final do 8º ano, os estudantes já começavam a estudar aproximações de raízes quadradas não exatas (na frente de Matemática 2) para somente no 9º ano serem apresentados oficialmente ao conjunto dos números reais.

Apresentar a existência dos números inteiros negativos no 7º ano conta com uma motivação inicial muito palpável e concreta: a representação de dívidas monetárias. Apesar de essa visualização ser insuficiente, por exemplo, para explicar o que acontece ao multiplicar dois números negativos, ela é suficiente para a motivação inicial de existirem “novos números” a serem conhecidos e a necessidade deles. O sinal de “menos” agora também assinalava um número pertencente a um novo conjunto, o conjunto dos inteiros, ou o conceito de “oposto”, e não somente a operação de subtração. Essa habilidade de agregar significado a um sinal já conhecido era algo também desejado por mim para meus antigos alunos de 9º ano com relação ao sinal $\sqrt{\phantom{x}}$, para que um número como $\sqrt{3}$ fosse compreensível e não causasse a sensação de uma operação não realizada.

Depois de já conhecido o conjunto dos números inteiros e utilizando um conhecimento que eles já traziam de anos anteriores – as frações e os números decimais positivos, pudemos evoluir na “construção” dos conjuntos numéricos para que os alunos representassem, conhecessem, manipulassem, e realizassem as quatro operações básicas com os números racionais positivos e negativos.

Durante essas aulas, fez-se necessária a definição do que é um número racional. E em todas as 3 turmas de 7º ano para as quais lecionei, quando eu disse que “um número racional é aquele que pode ser escrito através de uma fração composta por dois números inteiros quaisquer, sendo o segundo diferente de zero”, pelo menos um aluno comentou espontaneamente: “Então… são *todos*”. Essa frase, na minha percepção, demonstra mais do que não conhecer números irracionais, mas também, não ser capaz de conceber um número que não fosse racional, e nem a necessidade de tal. Essa mesma situação se repetiu nas minhas turmas de 8º ano, quando revisei o conjunto dos números racionais com os alunos.

É claro que pode ser muito difícil imaginar um conteúdo desconhecido de maneira autônoma. Mas essa expressão me fez pensar em como incutir nos alunos a percepção de que os números racionais não são todos os números que existem, uma dificuldade que já havia notado em minhas aulas com o 9º ano e que apareceu novamente durante as aulas com os alunos mais novos. Comecei a me questionar como poderia explicar que há muitos outros números (irracionais) já na reta numérica que é comumente desenhada em lousa desde o ensino dos números inteiros, já que sempre desenhamos uma reta sem “buracos”. Perguntei-me também quais seriam as melhores maneiras de ensinar o conjunto numérico dos racionais (dentro da minha disponibilidade de tempo e das obrigações com a escola e o currículo), para que o aluno não ficasse confuso ou despreparado durante o aprendizado dos números irracionais nos anos seguintes.

Como mencionado, meu trabalho com o 8º ano era o de revisar os conteúdos já explorados do ano anterior, o 7º, e era notável que a noção de que os números racionais eram “todos” ainda persistia. Essa percepção só começa a mudar no momento em que o conteúdo do 8º ano aborda raízes quadradas **não exatas**, o que acontece no 4º bimestre, em outubro. Por esse motivo, escolhi que minhas primeiras observações de aulas e entrevistas aconteceriam nesse momento, em 2019.

Escolhi observar e entrevistar dois professores de 8º ano da escola E1, sabendo que apresentariam uma introdução ao conjunto dos números irracionais sem o compromisso de detalhá-lo naquele momento, mas já apresentando aos alunos números distintos de “todos” os (racionais) que eles já conheciam. É claro que essa apresentação, ainda que rápida, é de suma importância, por ser um alicerce das subsequentes etapas de ensino dos conjuntos numéricos e abrir as portas para a compreensão do conjunto dos números irracionais. Mais uma razão para que essas aulas fossem observadas e relatadas nesta pesquisa, e analisadas junto a entrevistas com os dois professores, que aceitaram participar deste projeto.

Já no ano de 2020, depois de ser aprovada no exame de qualificação, mudei de emprego e de cidade e passei a lecionar em uma escola particular de Santo André, que a partir deste ponto chamarei de E2. A escola E2 é tão grande quanto a escola E1, com mais de 1200 alunos matriculados, mas apenas uma unidade de funcionamento. Lá, o conteúdo de números irracionais também se inicia no 8º ano, porém com mais profundidade, apresentando que o conjunto dos números reais é a união dos números racionais e dos números irracionais. É uma escola também tradicional da região do ABC do estado de São Paulo.

Os detalhes sobre a coleta de dados deste trabalho estão esmiuçados no Capítulo 7, em que também é mencionada a realidade da pandemia do novo Coronavírus, especialmente nos anos de 2020 e 2021, a qual afetou completamente o trabalho de todos os professores do Brasil e do mundo. Essas mudanças não são focos desta pesquisa, mas alteraram o curso desta pesquisa e portanto, merecem ser explicadas e esclarecidas.

Com este trabalho, tenho o intuito também de dar luz a algumas características do ensino dos números irracionais feito no 8º ano da escola E2, identificando alguns Conhecimentos Especializados de Conteúdo utilizados pela professora que aceitou participar desta pesquisa e fazendo alusões a possíveis soluções para dificuldades que são encontradas não só por ela, mas possivelmente por diversos outros professores.

## 3. JUSTIFICATIVA COM BASES NA LDB E NA BNCC

Desde 1996, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) regulamenta as escolas brasileiras, determinando normas e parâmetros para o currículo e para a organização das instituições de educação básica. Alguns desses parâmetros são bem abrangentes, como:

> Art. 3º O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios:
> I - igualdade de condições para o acesso e permanência na escola;
> II - liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber;
> III - pluralismo de idéias e de concepções pedagógicas; (...) (BRASIL, lei 9394, 1996)

e portanto, não é difícil imaginar que muitos artigos e emendas foram incluídos ao longo dos anos a fim de detalhar o corpo dessa lei.

Para que as escolas pudessem organizar suas matrículas, seus calendários e currículos, a LDB foi incluindo cada vez mais artigos e parágrafos que estruturam a formação básica dos alunos. Um exemplo é o parágrafo 9º do artigo 26:

> Conteúdos relativos aos direitos humanos e à prevenção de todas as formas de violência contra a criança, o adolescente e a mulher serão incluídos, como temas transversais, nos currículos de que trata o caput deste artigo, observadas as diretrizes da legislação correspondente e a produção e distribuição de material didático adequado a cada nível de ensino. (Redação dada pela Lei nº 14.164, de 2021) (BRASIL, lei 9394, 1996)

Entre os anos de 2009 e 2014, houve intensa discussão no país a respeito de um projeto visando a unificação do currículo nacional, já que a LDB apenas orientava parâmetros gerais. Tal discussão resultou no surgimento da Base Nacional Comum Curricular, que visa atender a uma prerrogativa da própria LDB:

> Art. 9º A União incumbir-se-á de: (...)
> IV - estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum; (BRASIL, lei 9394, 1996)

A Base, como o próprio nome e a citação acima sugerem, é constituída dos conteúdos curriculares mínimos a serem ministrados de maneira unificada em todo o território nacional. Supostamente, ainda haveria espaço nos currículos escolares para conteúdos complementares, que seriam motivados, por exemplo, por uma relevância regional.

Em 2015[2], segundo o Guia Especial Instituto Ayrton Senna, a Base começou a ser construída a partir de análises de documentos curriculares brasileiros (realizadas por 116 especialistas) e em 2016, também a partir de consultas públicas à população. As pessoas puderam sugerir tópicos, assuntos e novos vieses educacionais, e opinar sobre os conteúdos curriculares do ensino básico. Em 2017, o MEC concluiu a sistematização das contribuições e enviou o que na época era uma terceira versão da Base para o CNE (Conselho Nacional de Educação), que ainda promoveu audiências públicas naquele mesmo ano, de caráter consultivo. No fim de 2017, o texto final para a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental foi aprovado pelo MEC, com previsão de implementação a partir de 2020.

A BNCC é o documento de caráter normativo que regula a educação brasileira do 1º ano até a 3ª série do Ensino Médio. Para esta pesquisa, o foco será na BNCC do 1º ao 9º ano. A respeito de matemática, nela encontra-se a seguinte afirmação: "O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o **letramento matemático** (...)". Tal conceito, grifado no texto original, está definido na nota de rodapé da própria BNCC: "Segundo a Matriz do Pisa 2012, *letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos*" (BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018, p. 266, grifos originais).

---

[2] Entre 2012 e 2015, o Ministério da Educação estabeleceu um grupo de especialistas em educação para escrever um documento em complemento à LDB e que dizia respeito aos direitos à aprendizagem dos estudantes brasileiros. Esse projeto foi totalmente descartado em 2016. Ainda assim, uma parte desse grupo decidiu publicar este documento através da UFPR: BONINI, A. *et al.* Direitos à aprendizagem e ao desenvolvimento na educação básica: subsídios ao currículo nacional. Acervo Digital UFPR. Curitiba, 2018. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/bitstream/handle/1884/55911/direitos_a_aprendizagem_e_ao_desenvolvimento_na_educacao_basica_subsidios_ao_curriculo_nacional-preprint.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 12 de jan. de 2024.

Na Base, também está apresentada, após essa introdução, uma segmentação da Matemática em “unidades temáticas” e é explicitada a seguinte noção referente aos Números, especificamente para os Anos Finais do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º ano):

> Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los [os alunos] diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. [...] No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. (BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018, p. 269)

Entende-se, assim, que o aluno deve, até o 9º ano escolar, aprender a utilizar a matemática em diferentes contextos, dominando inclusive propriedades do conjunto dos números reais e entendendo especificamente a natureza e a necessidade dos números irracionais, sabendo ordená-los e manipulá-los algebricamente.

Na parte da BNCC em que os tópicos matemáticos aparecem organizados de acordo com os anos letivos em que devem ser lecionados, e com suas respectivas habilidades, o conteúdo dos números irracionais está reservado ao 9º ano do Ensino Fundamental, atrelado a:

> (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
> (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
> (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações. (BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018, p. 317)

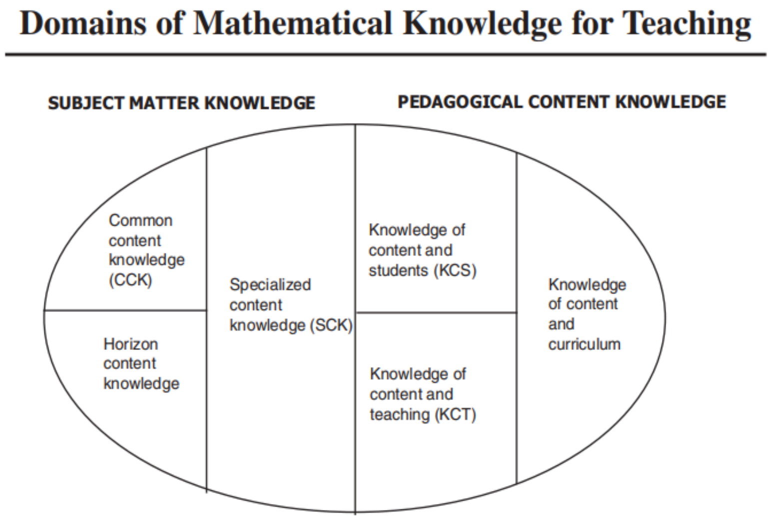
Estando dessa maneira presente e especificado no documento oficial que rege o currículo da Educação Básica brasileira, nota-se a importância de compreender quais estratégias são utilizadas por professores que ensinam esse conteúdo. Um dos objetivos deste trabalho é entender um pouco mais quais ferramentas matemáticas e pedagógicas auxiliam os professores em suas escolhas didáticas e possivelmente quais dificuldades estão associadas ao ensino dos números irracionais.

## 4. O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO CONTEÚDO DE DEBORAH BALL E A MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE ADLER E HUILLET

Deborah Ball é uma pesquisadora educacional estadunidense notada por trabalhos na área de Educação Matemática, mais especificamente na formação de professores. No artigo *Content Knowledge for Teaching: What makes it special?*, de 2008, com Mark Thames e Geoffrey Phelps, ela apresenta a fundamentação teórica do *Conhecimento Especializado de Conteúdo* para o ensino de Matemática, baseando-se na análise detalhada de práticas educacionais em aulas de terceiro ano em uma escola pública dos Estados Unidos. Ball é autora de uma vasta quantidade de artigos e estudos a respeito de Educação Matemática, mas, para esta dissertação, será mantido o foco no artigo já citado.

No início do artigo, há uma contextualização sobre o cenário de teorias relacionadas ao *Conhecimento Matemático* para o Ensino até aquele momento. Os autores apresentam que o professor deve possuir um conhecimento matemático mais elaborado do que simplesmente “saber o que é” ou “saber operar”. Fundamentados na teoria de Shulman (1986), Ball; Thames; Phelps (2008) elaboram a noção de Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) - Conhecimentos Matemáticos para o Ensino, que é subdividido em outros conhecimentos identificados no artigo e apresentados no diagrama a seguir:

Figura 3: Diagrama dos Domínios de Conhecimentos Matemáticos para o Ensino




Fonte: Ball; Thames; Phelps (2008).

Alessandro Jacques Ribeiro, autor de *Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática*, publicado em 2012 no "Bolema", Boletim de Educação Matemática, diz:

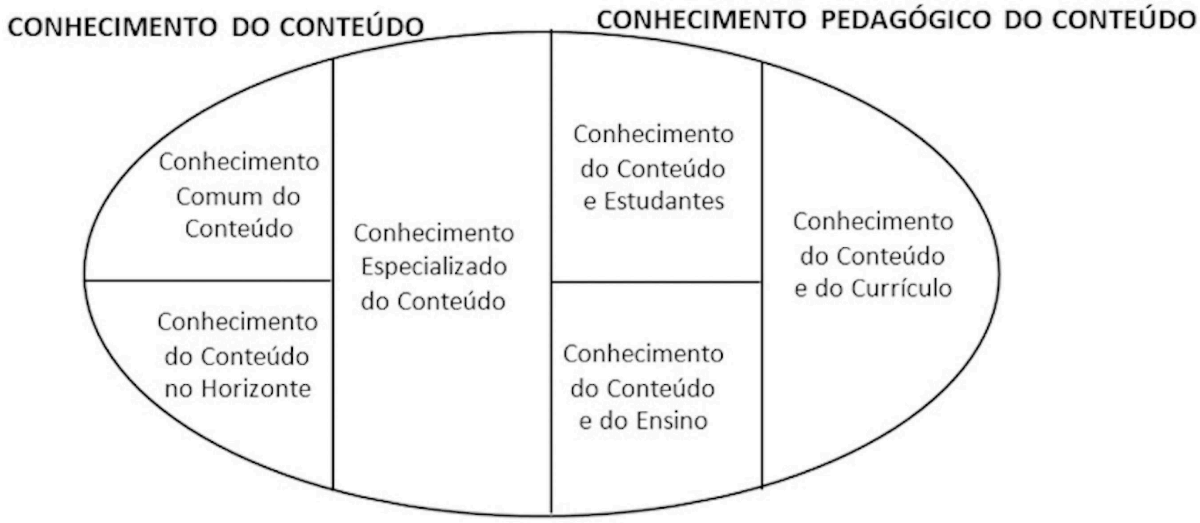
> Segundo Ball; Thames; Phelps (2008), a introdução do termo *conhecimento pedagógico do conteúdo* (SHULMAN, 1986) sugere a necessidade de um *conhecimento do conteúdo que é exclusivo para o ensino*. Em continuidade aos seus estudos, ao apresentar a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, Shulman (1986) discute a ligação entre o conhecimento do conteúdo e a prática de ensino. (RIBEIRO, 2012, p. 539).

Sendo assim, o estudo de Shulman (1986) foi de suma importância para a análise específica do conjunto de saberes matemáticos e pedagógicos do professor e o aprofundamento de Ball; Thames; Phelps (2008) tornou possível identificar subdivisões que permitissem compreender de maneira detalhada a complexidade desses saberes.

Da maneira como ilustraram em seu artigo, podemos ver os Conhecimentos Matemáticos para o Ensino (CME) com seis subdivisões. Na parte esquerda do diagrama apresentado anteriormente, Subject Matter Knowledge, ou Conhecimentos do Conteúdo: *Conhecimento Comum do Conteúdo* (CCC), *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte* e *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (CEC), o foco inicial desta dissertação. Já o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, ilustrado na parte da direita, está dividido em: *Conhecimento do Conteúdo e Estudantes* (CCE), *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino* (KCT) e *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo*.

A tradução utilizada aqui é de Jaqueline de Souza Pereira Grilo, Jonei Cerqueira Barbosa e Marlécio Maknamara no artigo Discurso da Matemática Específica para Ensinar e a Produção do Sujeito 'Professor(a)-de-Matemática':

Figura 4: Diagrama dos Domínios de Conhecimentos Matemáticos para o Ensino.




Fonte: BARBOSA; GRILO; MAKNAMARA, M.(2020)

Explicando brevemente do que se trata cada um deles: os Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo contemplam conhecimentos sobre como a matemática se relaciona com os estudantes (CCE), como se relaciona com o ensino (KCT) e possíveis práticas pedagógicas, e como se relaciona com o currículo. Abarcados nesses conhecimentos estão incluídas, possivelmente: habilidades do professor de organizar o ensino dos conteúdos do currículo ao longo de um ano letivo específico; conhecimentos sobre possíveis Obstáculos Epistemológicos (na definição de Bachelard, como analisados por Sonia Igliori, 2008) de conteúdos matemáticos que devem ser aprendidos pelos alunos, e/ou conhecimentos sobre Interações em sala de aula (Sueli Fanizzi, 2008), que podem afetar as práticas docentes. As teorias mencionadas nesse parágrafo não serão analisadas nesta dissertação, mas ficam como referências para o leitor ou leitora interessado/a em aprofundar seus estudos.

Já os Conhecimentos do Conteúdo estão divididos em: conhecimentos que são comuns sobre o conteúdo (CCC) como, por exemplo, realizar cálculos com as quatro operações básicas, e mais outros conhecimentos matemáticos utilizados também em outras profissões; conhecimento do conteúdo no horizonte, que significa, ao professor, saber quais os próximos conteúdos matemáticos que serão estudados por seus alunos (inclusive em outros anos letivos) e ter esse panorama em mente ao elaborar e ministrar suas aulas; e por fim, o *Conhecimento*

*Especializado de Conteúdo*, denotado por *SCK* no diagrama ou *CEC* a partir de agora. É importante, desde já, ressaltar que em análises mais específicas, esses Conhecimentos usualmente se misturam, portanto, ressaltar um não necessariamente implica dizer que o outro não aparece em determinada situação.

*Conhecimentos Especializados de Conteúdo* são uma gama de conhecimentos matemáticos utilizados especificamente pelo professor de matemática em sala de aula. São conhecimentos que vão além dos procedimentos corretos de cálculo e da matemática formal, abarcando exemplos numéricos ou contextualizações específicas, maneiras como responder a perguntas feitas pelos alunos, quais indagações fazer no decorrer das aulas, como analisar e interpretar os erros dos alunos etc. Os *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* ajudam a caracterizar a carreira de professor de matemática como uma profissão com um conjunto específico de habilidades matemáticas, que não são necessariamente usadas e nem requeridas em outra profissão.

Segue um exemplo do próprio artigo de Ball; Thames; Phelps (2008), no qual o professor é impelido a acessar os diferentes conhecimentos citados acima ao se deparar com um erros comum dos alunos:

> Muitos alunos do terceiro ano [do Ensino Fundamental] sofrem com o algoritmo da subtração, frequentemente cometendo erros. Um erro comum é:
>
> $$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-\ 168} \\ 261 \end{array}$$
>
> Um professor precisa ser capaz de ver que 261 é um resultado errado. Isso não requer nenhum conhecimento especial: qualquer um que consegue resolver o problema acima pode perceber isso prontamente. Contudo, ensinar requer mais do que identificar uma resposta incorreta. O ensino habilidoso requer um professor que seja capaz de medir a origem do erro matemático. Além disso, esse trabalho deve ser realizado rapidamente [...] (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 396-397, tradução livre)[3].

---

[3] Many third graders struggle with the subtraction algorithm, often making errors. One common error is the following:

$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-\ \ 168} \\ 261 \end{array}$$

A teacher must be able to spot that 261 is incorrect. This does not require any special knowledge to do: Anyone who can solve the problem above can readily see this. However, teaching involves more than identifying an incorrect answer. Skillful teaching requires being able to size up the source of a mathematical error. Moreover, this is work that teachers must do rapidly (...) (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 396-397).

O *Conhecimento Comum do Conteúdo* (CCK) é o que permite ao professor (e a qualquer pessoa que saiba fazer corretamente a operação de subtração) identificar que o resultado 261 não está correto. Porém, é usando o *Conhecimento Especializado de Conteúdo* (*CEC*) que o professor poderá “medir a origem do erro matemático”, como citado, e será capaz de sanar a dúvida desse aluno de maneira satisfatória, auxiliando o entendimento e evitando que o erro se repita.

No exemplo acima, pode não ser de difícil investigação que o erro cometido foi, em cada uma das ordens numéricas, subtrair o maior algarismo pelo menor, independentemente de qual número era o subtraendo e qual era o minuendo. Porém, por detrás dessa identificação, há conhecimentos sobre a base decimal do nosso sistema numérico, a organização do nosso sistema em ordens e classes, a correta execução de subtrações isoladas e ainda, o fato de que, ao utilizar tal algoritmo de subtração, sempre é colocado o maior número na posição de minuendo, e todos esses conhecimentos deverão ser unidos e utilizados para explicar de maneira coerente ao aluno o processo correto, em que sempre é subtraída cada ordem do número de cima (minuendo) pela ordem correspondente do número embaixo (subtraendo).

Sabe-se que no algoritmo da subtração há o recurso de "emprestar" para realizar corretamente a diminuição do minuendo pelo subtraendo. A compreensão desse processo aprofunda o entendimento das ordens numéricas pelos alunos e também da base decimal, já que, ao "emprestar" $1$, este valor se torna $10$ na ordem à direita. Para poder subtrair as unidades, deve-se, no caso de $307 - 168$, transformar uma centena do $307$ em $10$ dezenas e uma dessas dezenas em $10$ unidades, reescrevendo-o como $29^{1}7$, em que, temporariamente, dois algarismos ocupam a posição das unidades. Então, ao realizar a subtração, o aluno obterá a resposta $139$:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 9\ 1\ } \\ \cancel{3}\cancel{0}7 \\ -\ 168 \\ \hline 139 \end{array}$$

Estas explicações procuram demonstrar um pouco da complexidade do algoritmo da subtração, especialmente para os estudantes do 3º ano, e elucidam alguns *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* que o professor deve ter – e ser capaz de acessar rapidamente, como citado, para que os momentos de aprendizagem em aula não sejam perdidos.

Ainda no âmbito dos Conhecimentos de Conteúdo, há o *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte*, que permite ao professor saber que em muitos outros momentos da aprendizagem escolar, e até na vida pós-escolar, aquele estudante irá aplicar esse saber. Tomando, novamente, o exemplo da subtração, ainda que o aluno esteja no 7º ano do Ensino Fundamental, já aprendendo sobre números negativos, o algoritmo da subtração sempre será utilizado com o minuendo de maior valor absoluto, independentemente dos valores respectivos de cada ordem numérica. Só depois de utilizar o algoritmo corretamente, o sinal do resultado (positivo ou negativo) será atribuído. Compreender o recurso aqui chamado de "emprestar" no momento em que o algoritmo da subtração é ensinado, no 3º ano, também possibilita que no futuro, no 7º ano, aquela criança não tenha problemas com este algoritmo ao aprender sobre a subtração que pode ter resultados negativos. Portanto, para os autores do artigo, o *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte* também deve influenciar em como a explicação da dúvida é realizada.

Além disso, existe uma outra forma de pensar a subtração que os estudantes do terceiro ano podem utilizar para resolver $307 - 168$. Uma criança pode subtrair $8$ de cada um dos números e realizar $299 - 160$. Esta linha de pensamento gerará o mesmo resultado, contornando por completo o uso da habilidade "emprestar". A respeito disso, diz RIBEIRO (2012):

> Outro ponto importante, destacado pelos autores [Ball; Thames; Phelps], refere-se à necessidade dos professores de reconhecer estratégias diferentes, não padronizadas, produzidas, muitas vezes, pelos alunos. Com frequência, estes se utilizam de estratégias pouco usuais e, nesse caso, o professor deve ser capaz de levantar questionamentos, como: *É legítimo fazer isto?; Por quê?; Isto funciona, em geral?;* (...) o professor precisa estar engajado com essa espécie de discurso interno da matemática, o qual é crucial para determinar o que fazer ao ensinar essa matemática. (RIBEIRO, 2012, p. 540-541).

Para conseguir continuar as explicações nessa situação hipotética, o professor deveria saber explicar o motivo de essa adaptação funcionar, mas não ser suficiente. O resultado que seria obtido estaria correto não apenas por acaso, e sim porque é matematicamente equivalente subtrair dois números que mantêm a diferença entre si.

Porém, este não é o único interesse. Obter um resultado equivalente não apaga o fato de que a subtração de $307 - 168$ não foi realizada, e sim $299 - 160$. Aprender o recurso chamado aqui de "emprestar", dentro do algoritmo da subtração, é essencial para caracterizar a operação como inversa da adição, sendo inclusive exatamente esse recurso o inverso do popularmente conhecido "vai $1$" do algoritmo da adição:

$$\begin{array}{r} {}^{1\;1\;\;} \\ 139 \\ +\;168 \\ \hline 307 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {}^{2\;9\;1} \\ \cancel{3}\cancel{0}7 \\ -\;1\,6\,8 \\ \hline 1\,3\,9 \end{array}$$

Na adição de $139$ com $168$, podemos notar que, ao somar as unidades $9 + 8$, obtém-se $17$, em que o $7$ ocupa a ordem das unidades no resultado e o $10$ é transformado em $1$ dezena, representada pelo $1$ pequeno acima do $3$. Esta dezena se soma aos algarismos $3$ e $6$ que já estavam escritos e se tornam $10$ dezenas, que por sua vez, é igual a $1$ centena. Portanto, o $0$ ocupa a ordem das dezenas no resultado e novamente, $1$ é colocado na parte superior do cálculo. Por fim, ao somar as centenas, obtemos o algarismo $3$ no resultado $307$. Esta adição representa também o Teorema Fundamental da Subtração[4], em comparação à conta ao lado, que representa o cálculo correto que o aluno deveria ter realizado no exemplo do artigo.

Observe que, no caso da subtração correta retratada, uma das centenas se transforma em $10$ dezenas e $1$ dessas dezenas se transforma em $10$ unidades, revertendo exatamente o processo mostrado na adição e ainda, fazendo aparecer o mesmo $17$ do início da adição. Todas essas colocações podem, ou não, ser feitas para os alunos, dependendo da maturidade que o professor avalia ter o estudante, mas é vital que o professor se aproprie desses conhecimentos.

---

[4] Minuendo = diferença + subtraendo.

*O Conhecimento Especializado de Conteúdo* é caracterizado, também, como uma gama de conhecimentos matemáticos que o professor utiliza muitas vezes em um discurso interno durante suas aulas, para auxiliá-lo a identificar raízes de erros e equívocos dos alunos. Também é fundamental para poder escolher quais explicações, analogias e exemplos devem compor os próximos passos das aulas, com o objetivo de alcançar o nível de compreensão adequado àquele momento de aprendizagem. É por isso, também, que a coleta de dados desta pesquisa contou não somente com a observação de aulas, mas com entrevistas aos professores que aceitaram participar, a fim de tentar vislumbrar e entender justamente esse discurso interno mencionado por Ribeiro. Maiores explicações sobre essa coleta estão no Capítulo 7.

Pode-se notar, então, a impossibilidade de listar todos os *Conhecimentos Especializados de Conteúdo*, visto o dinamismo que está incluso na constituição natural de uma aula e a agilidade com que o professor deve acessar diversos de seus conhecimentos e escolher qual ou quais abordar naquele momento de dúvida ou explicação. Faz-se necessário, então, algum parâmetro para analisá-los mais a fundo, como visto nos exemplos deste capítulo, em que boa parte da análise feita no artigo é proveniente da prática. Nesta pesquisa, a base também é prática e o parâmetro utilizado foi o conteúdo de números irracionais, apresentado para o 8º ano do Ensino Fundamental, em duas escolas diferentes, com três professores participantes.

A respeito dos conhecimentos definidos por Ball; Thames; Phelps, é preciso ainda fazer algumas considerações. A importância e a valorização da experiência em sala de aula aparecem no texto de Deborah Ball; Thames; Phelps (2008) conectadas ao que está definido como *Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo*. De forma mais direta, a experiência dos professores se relacionaria aos *Conhecimentos do Conteúdo e Estudantes* (CCE) e aos *Conhecimentos do Conteúdo e do Ensino* que, portanto, se constituiriam a partir das relações de aprendizagem e ensino dentro da sala de aula.

Ainda assim, as experiências do professor parecem orientar, como observado nesta pesquisa e também em pesquisas de Maurice Tardif (2005), os professores ao utilizarem seus ditos *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* (CEC), porque direcionam a escolha de exemplos mais eficazes para transmitir o conceito desejado, partindo de suas vivências e da "familiaridade" que já têm com os erros que os alunos costumam cometer.

Os autores estadunidenses argumentam que este não é o único momento de uso do CEC, que também aparece frequentemente durante a execução das aulas. Mas, a respeito dessa "familiaridade" aqui citada, observa-se a seguinte citação do artigo:

> (...) reconhecer uma resposta errada é um Conhecimento Comum do Conteúdo (CCC), enquanto medir a natureza de um erro, especialmente um erro que não é familiar, tipicamente requer agilidade no pensamento numérico, atenção a padrões e pensamento flexível a respeito de significados, de uma forma típica do Conhecimento Especializado do Conteúdo (CEC). Em contrapartida, familiaridade com erros comuns e decidir quais dos vários erros os alunos têm mais chance de cometer estão mais provavelmente relacionados a exemplos de Conhecimento do Conteúdo e Estudantes (CCE).
> (...) Conhecimento do Conteúdo e Estudantes é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática particular, ou um procedimento matemático particular, e a familiaridade com o que os estudantes frequentemente pensam ou fazem (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 401, tradução livre)[5].

Ao conectar o CCE com "uma ideia matemática particular", principalmente baseando as ideias citadas acima em erros frequentes dos alunos – artifício que os autores utilizam consistentemente no artigo para basear sua teoria, tem-se indiretamente uma nova menção a *Conhecimentos Especializados de Conteúdo*. A "ideia matemática particular" citada é um conhecimento matemático que, sendo também algo que o professor deseja ensinar, está intrinsecamente conectada ao ensino, formando um conhecimento matemático exclusivo ao professor. E é justamente esta a definição de CEC.

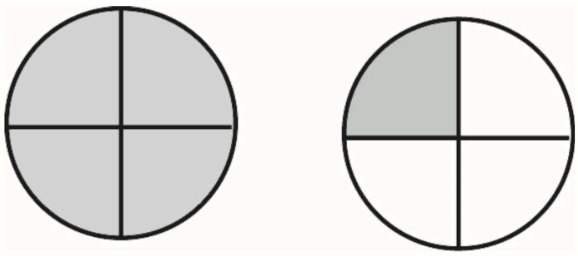
Ainda neste trecho, há uma tentativa de separar completamente o CEC do CCC e do CCE, porém, essa separação não é tão clara na prática. Os próprios autores mencionam essa dificuldade: "Nem sempre é fácil discernir onde uma

[5] (...) recognizing a wrong answer is common content knowledge (CCK), whereas sizing up the nature of an error, especially an unfamiliar error, typically requires nimbleness in thinking about numbers, attention to patterns, and flexible thinking about meaning in ways that are distinctive of specialized content knowledge (SCK). In contrast, familiarity with common errors and deciding which of several errors students are most likely to make are examples of knowledge of content and students (KCS).
(...) knowledge of students and content is an amalgam, involving a particular mathematical idea or procedure and familiarity with what students often think or do. (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 401).

categoria se diferencia da outra, e isso afeta a precisão (ou falta de) das nossas definições" (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403 – Tradução livre)[6].

Portanto, é preciso mencionar que aquilo que é chamado de *Conhecimento Comum de Conteúdo*, apesar das tentativas de definição, encontra dificuldades de se constituir como um domínio claro, já que não é possível mapear todos os conhecimentos matemáticos utilizados por todas as profissões, ou em profissões diferentes do ensino de matemática. A respeito disso, os autores ponderam:

**Figure 6**
**Representations of $^5/_8$ of 2**



> O conhecimento de que isto é $\frac{5}{8}$ de 2 é comum? Ou especializado? Tendemos a pensar que este tipo de conhecimento detalhado de frações e sua correspondência com uma representação particular é conhecimento especializado; é difícil pensar em outras pessoas que usem este conhecimento em seu trabalho diário. Porém, talvez existam outros que também dependam de conhecimentos de frações assim detalhados em seu trabalho. De forma semelhante, pode ser difícil às vezes discriminar conhecimento especializado de conteúdo de conhecimento de conteúdo e estudantes – por exemplo, considere o que envolve a escolha de um exemplo numérico para investigar o entendimento dos estudantes sobre números decimais. (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403-404, tradução livre)[7].

Pensando nestas últimas limitações (a falta de definições claras dos domínios dos CME, particularmente entre CCC e CEC, e da falta de contextualização cultural

[6] It is not always easy to discern where one of our categories divides from the next, and this affects the precision (or lack thereof) of our definitions. (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403).
[7] Is the knowledge that this is 5/8 of 2 common? Or is it specialized? We tend to think that this kind of detailed knowledge of fractions and their correspondence to a particular representation is specialized knowledge; it is hard to think of others who use this knowledge in their day-to-day work. But perhaps there are others who rely on such detailed and unpacked knowledge of fractions in their work as well. Similarly, it can be difficult at times to discriminate specialized content knowledge from knowledge of content and students—for example, consider what is involved in selecting a numerical example to investigate students' understanding of decimal numbers. (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403-404).

das práticas docentes), fez-se necessária a busca de outras fundamentações teóricas complementares para esta pesquisa. Jill Adler e Danielle Huillet, também em 2008, publicaram o artigo The Social Production of Mathematics for Teaching (ou A Produção Social da Matemática para o Ensino). Em sua pesquisa, relatada com detalhes a seguir, elas concluem que não é possível fazer a distinção entre CCC e CEC, argumentando que o objeto de estudo deve ser a *Matemática para o Ensino*.

O artigo de Adler e Huillet se baseia em pesquisas realizadas em Moçambique e na África do Sul, fundamentadas nas teorias de Chevallard (1992, 1997) e Bernstein (1996, 2000) respectivamente. Tais teorias não serão esmiuçadas aqui, mas, para melhor compreensão do que será ponderado, é preciso saber algumas informações sobre os estudos conduzidos pelas pesquisadoras, que se deram em instâncias de formação de professores nos dois países mencionados.

A premissa já incluía que não é possível separar os conhecimentos do professor de um contexto social em que está acontecendo tanto a formação desse professor, quanto o ensino que ele exercerá. Isso se dá pelo fato de que a linguagem, seja a língua falada e utilizada ao ensinar, ou mais especificamente o conjunto de termos que constituem a ciência que é ensinada ("A estrutura sintática de uma disciplina é o conjunto de formas em que a falsidade ou veracidade, validade ou invalidade, são estabelecidas" (SHULMAN, 1986, p.9)), é parte constituinte do ensinar.

Em Moçambique, as autoras acompanharam[8] dois professores que estavam participando de um grupo de estudos a respeito do ensino de limite no Ensino Médio do país. Um dos professores era mais experiente e, no grupo de estudos, na categoria de pesquisador, ao se deparar com problemas em sua forma de ensinar limite utilizado a definição por $\epsilon - \delta$ (como geralmente é chamada), experienciou esses problemas como uma falha em sua atuação, argumentando depois que essa definição de limites não deveria estar presente no currículo escolar. Outro professor, menos experiente, apresentou uma crescente confiança em participar das discussões do grupo conforme os encontros aconteceram, e esteve mais focado no aspecto de pesquisa, buscando uma compreensão de como os alunos do último ano

[8] Para mais detalhes da evolução da relação destes professores com o conteúdo e com sua função de ensiná-lo, embasadas na Organização Matemática de Chevallard, sugiro a leitura completa do estudo, especialmente páginas 7 e 8.

do ensino médio de Moçambique não compreendiam a definição de limite por $\epsilon - \delta$. Esse segundo professor não apresentou os mesmos questionamentos que o primeiro, mas teve uma postura de quem iria acrescentar tópicos ao já estabelecido pelo currículo escolar de Moçambique, em vez de questioná-lo.

Nesse grupo de estudos, o domínio do conhecimento matemático de limites por $\epsilon - \delta$ não estava dado para todos os participantes, possibilitando uma discussão que fosse tanto sobre as técnicas de ensino, quanto sobre o conteúdo matemático em si. Dizem as autoras:

> No movimento de 'professores como pesquisadores', os professores geralmente estudam algum aspecto pedagógico do ensino, tomando como certo o conteúdo matemático; isso não os permite questionar o conteúdo que estão ensinando. (...) Essa dicotomia é reproduzida na distinção de Shulman entre Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, como se o Conhecimento do Conteúdo fosse um 'conteúdo universal de matemática' e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo , o conhecimento matemático específico para o ensino. (ADLER e HUILLET, 2008, p.11, tradução livre)[9].

Assim, as autoras argumentam que é melhor pensar em uma *Matemática para o Ensino*, que abarca os conhecimentos matemáticos que o professor utiliza em sua profissão e alguns dos conhecimentos já identificados por Shulman (1986). Elas afirmam:

> (...) a fronteira entre Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, nas definições de Shulman, é embaçada. Na verdade (...) cada um desses aspectos tem dois componentes: o matemático e o pedagógico. Alguns aspectos são mais matemáticos, alguns são mais pedagógicos, mas eles estão necessariamente fundidos na atividade humana que é ensinar matemática. (ADLER e HUILLET, 2008, p. 6, tradução livre)[10].

---

[9] In the “teachers as researchers” movement, teachers usually studied some pedagogical aspect of their teaching, taking the mathematical content for granted; this did not allow them to challenge the content of their teaching. (...) This dichotomy is reproduced in Shulman’s distinction between SMK and PCK, as if SMK were some kind of ‘universal mathematical knowledge’ and PCK mathematical knowledge specific for teaching. (ADLER e HUILLET, 2008, p.11).

[10] (...) the boundary between SMK and PCK as developed by Shulman is blurred. Rather, and this is elaborated further below, each aspect has two components, a mathematical and a pedagogical component. Some aspects are more mathematical, some others more pedagogical, but they are necessarily merged in the human activity of mathematics teaching. (ADLER e HUILLET, 2008, p. 6).

E depois, colocam: "[...] na formação de professores, a matemática deve viver de forma que permita reflexões ao mesmo tempo dos aspectos matemáticos e pedagógicos do ensinar." (ADLER e HUILLET, 2008, p. 12, tradução livre)[11].

As autoras também conduziram pesquisas em outro projeto de formação de professores, na África do Sul, o projeto QUANTUM[12], considerando as teorias de Bernstein (1996, 2000). A conexão entre os dois estudos está também fundamentada na linguagem, pois Bernstein, na Teoria do Aparelho Pedagógico, discute a construção do discurso pedagógico. A respeito disso, escreveu Lucíola Licínio de C. P. Santos, em seu artigo "Bernstein e o campo educacional: relevância, influências e incompreensões":

> Para o autor, o aspecto dominante do discurso pedagógico é o regulativo [...]. Bernstein afirma que é o discurso regulativo que produz a ordem do discurso instrucional, pois não há discurso instrucional que não seja dominado pelo discurso regulativo. Qualquer disciplina escolar é recontextualizada ao ser deslocada de seu campo de produção. Há uma seleção de conteúdos, da sequência e do ritmo em que serão trabalhados na escola. O processo não é derivado da lógica existente no campo da produção desses conhecimentos. O processo de ensino-aprendizagem é um fato social e nele o discurso regulativo fornece as regras da ordem interna do discurso instrucional. Logo as teorias da instrução fazem parte do discurso regulativo, uma vez que em seu interior existe um modelo de aluno, de professor e de suas relações (1996a, p.47) (SANTOS, 2003, p. 32)

Em sequência a essa construção, Bernstein elabora outras descrições, como a noção de conhecimento horizontal ou vertical, com gramática forte ou fraca[13]. O objetivo de mencionar essas ideias nesta pesquisa é apenas explicar e contextualizar melhor o trabalho de Adler e Huillet. Não é do escopo deste trabalho apresentar discussões mais elaboradas sobre esses aspectos, mas sim, explicar em partes como as autoras fundamentaram sua teoria de que a melhor forma de observar o conteúdo matemático para o ensino é denominá-lo mais abrangentemente *Matemática para o Ensino*.

---

[11] (...) in teacher education, mathematics should live in a way that enables reflection at the same time on the mathematical and pedagogical aspects of the content to be taught. (ADLER e HUILLET, 2008, p. 12).

[12] **QUA**lification for **T**eachers **U**nderqualified in **M**athematics (ou seja, qualificação para professores com pouca qualificação em matemática).

[13] Para mais detalhes sobre essas definições em contato com a pesquisa realizada no projeto QUANTUM, sugiro a leitura das páginas 16 e 17 do artigo de Adler e Huillet.

Apesar das explicações aqui se darem de forma parcial, o objetivo não é perdido, e nem a intenção enfraquecida. Bernstein, novamente, coloca o foco das pesquisas sobre o ensino dentro das instituições, mais precisamente em como as ideias de ensino se manifestam nessas instituições, algo que Chevallard já havia notado como importante. As autoras, por sua vez, perceberam a influência dessas teorias na realidade observada nos relatos e discussões dos professores participantes da pesquisa, dentro dos diferentes cursos de formação. A primeira parte do estudo de Adler e Huillet foca em "qual" matemática é oferecida nesses cursos. A segunda parte, foca em "como".

Ao concluir a pesquisa publicada, Adler e Huillet reconhecem a importância da definição de Shulman sobre o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, pois fortalece a ideia de que o raciocínio pedagógico no ensino de matemática é constituído de conteúdo matemático em si. Porém, as autoras mencionam o artigo de Ball; Thames; Phelps. como uma tentativa de aprimorar as definições de Shulman que acaba separando o conhecimento matemático para o ensino nos domínios de CCC e CEC, algo que, segundo elas, possuem fragilidades inerentes:

> Em termos simples, professores precisam saber aspectos da matemática que não são requeridos por 'outros' (i.e., no uso comum). Mas o que é uso comum? De uma perspectiva social-epistemológica, toda atividade matemática está direcionada a algum propósito e ocorre em alguma instituição (social). A noção de conhecimento "comum" do conteúdo é, portanto, problemática e, também por isso, a noção de conteúdo especializado. (ADLER e HUILLET, 2008, p. 22, tradução livre)[14].

Ainda assim, isso não está longe do que os próprios autores admitem no trecho já citado nesta pesquisa, no qual admitem que "Nem sempre é fácil discernir onde uma categoria se diferencia da outra (...)" (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403 – Tradução livre)[15]. Para além disso, estes mesmos autores tentam ser claros sobre o que Adler e Huillet estão chamando de "uso comum": o uso no cotidiano e também

---

[14] In simple terms, teachers need to know aspects of mathematics that is not required by ‘others’ (i.e., in common use). But what is common use? From a social epistemological perspective, all mathematical activity is towards some purpose, and occurs within some or other (social) institution. The notion of ‘common’ content knowledge is thus problematic, and so too then, the marking out of specialised content knowledge. (ADLER e HUILLET, 2008, p. 22)

[15] It is not always easy to discern where one of our categories divides from the next (...). (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403).

o uso comum a outras profissões. Essa terminologia é pertinente levando-se em consideração que o foco do estudo de Ball; Thames; Phelps. são o uso dos conhecimentos matemáticos pelos professores, deixando outras facetas desse uso em segundo plano.

Não há, portanto, aqui, a intenção de definir o que é CCC, e nem a intenção de, ao caracterizar um conteúdo como Especializado, impossibilitar que futuramente ele seja visto de outra forma. Como colocado por Adler e Huillet, todo o ensino está conectado a uma linguagem, uma instituição e um discurso. Assim, em determinada instituição, subjugado a um determinado discurso e sendo ensinado a partir de uma determinada linguagem, é sim, possível, que um conteúdo matemático seja caracterizado como Especializado, diferenciando-se do Comum naquele contexto. Existem, é claro, muitas nuances nessa classificação, mas isso acontece sempre nos estudos sobre educação, e não diminui o valor da pesquisa.

Há, sim, a intenção de contribuir para o debate sobre os Conteúdos utilizados pelo professor de matemática no ensino, e de fortalecer a compreensão de que a atuação do professor de matemática é composta por conhecimentos matemáticos que, sendo utilizados somente por professores, não podem ser caracterizados como "comuns". E, de acordo com Deborah Ball, Mark Thames e Geoffrey Phelps, serão referenciados a partir de agora como Conhecimentos Especializados de Conteúdo.

## 5. OS SABERES DOCENTES DE MAURICE TARDIF E O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE DEBORAH BALL

O pesquisador Maurice Tardif é professor do departamento de Administração e Fundamentos da Educação da Universidade de Montreal, no Canadá, e é referência nas pesquisas sobre os saberes do professor e sua formação profissional. Há décadas, Tardif tem se dedicado ao estudo dos saberes docentes, como prefere chamar, e das influências do aprendizado universitário e das experiências dos professores em suas práticas em sala de aula.

Como já abordado no Capítulo 2, o início dessa pesquisa também foi o início da minha prática docente, período em que senti com frequência que as poucas experiências que havia construído em escolas, mais o conhecimento teórico que havia acumulado na universidade, eram ainda insuficientes para me dar segurança das decisões que tomava enquanto professora regular. Desde o meu primeiro ano de atuação, intuí que a experiência em sala de aula é fonte inestimável de conhecimentos que guiam o professor durante seu trabalho.

Por mais que houvesse cumprido todas as horas de estágio obrigatórias durante a graduação e, além disso, já estivesse trabalhando em uma escola antes de me formar e assumir minha primeira turma, a verdadeira responsabilidade que é atribuída ao professor que deve preparar sequências didáticas e avaliações para os seus alunos regularmente, enquanto constrói com eles uma relação baseada em respeito e, também, em uma certa autoridade dentro da sala de aula, só é dimensionada quando se está nesta posição.

Não é meu interesse neste momento, e nem objetivo desta pesquisa, olhar mais atentamente para essas responsabilidades e nem para a rotina de trabalho do professor. Porém, ao me sentir insegura nessa posição, apesar de toda a formação que eu já havia construído, foquei minha pesquisa e minha dissertação em analisar o trabalho de colegas professores com o intuito de vivenciar algumas experiências de meus pares e me tornar uma professora mais bem preparada. Assim, minha formação continuou a se construir no âmbito teórico (com a pesquisa) ao mesmo tempo em que eu começava as minhas experiências concretas relativas à prática docente.

Tardif, em seu livro Saberes Docentes e Formação Profissional, de 2005, debruça-se sobre a realidade de professores que entrevistara a respeito dos conhecimentos que utilizam em sala de aula e traz deles relatos semelhantes aos meus, especialmente na Parte I, Capítulo 2 do livro intitulado *Saberes, tempo e aprendizagem no magistério*.

Nesse capítulo, o autor inicia suas reflexões afirmando que "(...) trabalhar não é somente fazer alguma coisa, mas fazer alguma coisa de si mesmo, consigo mesmo." (TARDIF, 2005, p. 56). Diz ainda que: "Ora, se o trabalho modifica o trabalhador e sua identidade, modifica também, <u>sempre com o passar do tempo</u>, o seu "saber trabalhar." (TARDIF, 2005, p. 57, grifos originais). Isso, segundo ele, é verdade para todos os ofícios e profissões, inclusive para a docência; o que quer dizer que, conforme o professor executa sua profissão, ele também se modifica e modifica o seu "saber trabalhar" – no caso, o seu *saber ensinar*.

É importante, aqui, fazer a diferenciação dos termos "ofício" e "profissão" para Tardif. Em entrevista concedida em 2017 a Samuel de Souza Neto e a Eliana Ayoub, o pesquisador canadense explica um pouco as diferenças que vê entre ofício e profissão, deixando claro também que sua visão está relacionada às realidades canadense e norte-americana, mas que, por já ter viajado pelo Brasil e conhecido diferentes realidades da educação no nosso país, há pertinência nessa discussão também para professores brasileiros.

Diz Tardif a respeito da profissão docente:

> (...) é preciso dizer que a profissionalização sempre foi um fenômeno estreitamente vinculado à sindicalização, porque os professores, na América do Norte, sempre tiveram de lutar em duas frentes: por um lado, para proteger e melhorar suas condições de trabalho, o que é um objetivo sindical; por outro, para aumentar sua autonomia profissional e garantir uma formação de boa qualidade, que também são objetivos profissionais. (...) vemos desde os anos 1980 um aumento das reivindicações pela criação de uma profissão docente (...) tão reconhecida quanto a medicina, o direito ou a engenharia, com uma ordem profissional. (...) não há uma tendência histórica à profissionalização. Não se passou da vocação para o ofício e do ofício para a profissão. É possível perceber que há dimensões da vocação e do ofício que ainda perduram. (TARDIF, 2017, Entrevista concedida a Samuel de Souza Neto e Eliana Ayoub, p. 8 e 9)

Diz Tardif a respeito do ofício:

> Visitei escolas, escolas do sertão, escolas do Ceará, escolas de Pelotas, escolas do Rio de Janeiro, escolas de Brasília. Portanto, não tenho uma visão de conjunto do Brasil, porque o Brasil é um país extremamente complexo. (...) Um ofício pressupõe uma relativa unidade de um campo de trabalho. Todas as pessoas que exercem esse ofício, de um modo geral, exercem-no em condições similares. (...) Um ofício não é qualquer coisa: pressupõe certa unidade de um campo de trabalho, condições de emprego relativamente estáveis, uma cultura comum, controles à entrada. (TARDIF, 2007, Entrevista concedida a Samuel de Souza Neto e Eliana Ayoub, p. 10)

Tardif, então, discorre na entrevista sobre como a realidade que testemunhou no Brasil difere destas condições básicas de um ofício. Ele cita o fato de que frequentemente os professores precisam ensinar em mais de uma escola, cumprindo diferentes contratos de trabalho; que frequentemente há professores com formações diversas e/ou insuficientes; que é um trabalho de baixa remuneração e que, apesar de possuir sindicato, sua força varia muito em diferentes cidades e estados. Assim, Tardif conclui que:

> (...) para mim, a maior parte dos professores brasileiros não devem de início lutar pela profissionalização: eles devem lutar principalmente pela estabilização de suas condições de trabalho. (...) porque, no fundo, o próprio ofício ainda não é algo estabelecido. (TARDIF, 2007, Entrevista concedida a Samuel de Souza Neto e Eliana Ayoub, p. 11)

Esta reflexão aqui proposta se conecta com o tema dessa pesquisa no que diz respeito à formação de professores. Algo que impede que a docência seja caracterizada como um ofício no Brasil é a formação irregular de quem pratica essa atividade. Neste ponto, tanto o texto de 2005 de Tardif, quanto o texto de 2008 de Deborah Ball; Thames; Phelps, convergem para uma mesma ideia: a profissão do professor tem sua própria gama de conhecimentos específicos, utilizados somente por professores e que devem ser estudados e valorizados como constituintes dessa atividade.

Deborah Ball, Mark Thames e Geoffrey Phelps dividem os conhecimentos do professor, especificamente de matemática, no formato do diagrama já apresentado e devidamente explicado no capítulo anterior. Já Maurice Tardif faz outra divisão destes conhecimentos em seu livro Saberes Docentes e Formação Profissional, colocando o tempo de atuação do professor, as condições profissionais e suas experiências como protagonistas.

Ao longo da prática profissional, diferentes situações são apresentadas ao professor, exigindo “(...) conhecimentos, competências, aptidões e atitudes específicas que só podem ser adquiridas e dominadas em contato com essas mesmas situações” (TARDIF, 2002, p. 58), algo que Tardif cita em seu texto como conclusão de diferentes autores. Porém, isso não significa que os conteúdos adquiridos na universidade sejam inúteis ou de pouco uso na prática e, de acordo com Deborah Ball; Thames; Phelps (2008), também não significa que a universidade e a formação de professores não devam se ocupar daqueles conhecimentos apontados por Tardif.

A conclusão de que tais competências exigidas pela docência só podem ser adquiridas e dominadas em contato com determinadas situações busca valorizar o peso da experiência na solidificação das técnicas que o professor utiliza em suas aulas e de sua formação. Porém, o próprio Tardif confere importância a uma formação inicial que possa caracterizar a docência como um ofício e unificar a categoria dos professores, mostrando que, de alguma maneira, a formação deve incluir contato com essas competências. Por mais que haja preparo, estudo e formação, qualquer trabalhador (não apenas os docentes) se deparará na prática com situações que possibilitarão novos aprendizados para os quais a teoria não deu conta.

Tardif diz também que os saberes docentes são definidos pelo que chama de *sincretismo*: um professor não utiliza apenas uma concepção, mas várias concepções em sua prática, de fontes diversas de sua formação pessoal e profissional. Ainda, ele aponta que os saberes dos professores são frequentemente baseados em valores morais, tradições escolares e normas sociais: "Os professores são trabalhadores que ficaram imersos em seu lugar de trabalho durante aproximadamente 16 anos (...), antes mesmo de começarem a trabalhar" (TARDIF, 2005, p. 68).

O quadro a seguir demonstra a divisão que Tardif faz dos saberes docentes:

| *Saberes dos professores* | *Fontes sociais de aquisição* | *Modos de integração no trabalho docente* |
|---|---|---|
| Saberes pessoais dos professores | A família, o ambiente de vida, a educação no sentido lato etc. | Pela história de vida e pela socialização primária |
| Saberes provenientes da formação escolar | A escola primária e secundária, os estudos pós-secundários não especializados etc. | Pela formação e pela socialização pré-profissionais |
| Saberes provenientes da formação profissional para o magistério | Os estabelecimentos de formação de professores, os estágios, os cursos de reciclagem etc. | Pela formação e pela socialização profissionais nas instituições de formação de professores |
| Saberes provenientes dos programas e livros didáticos usados no trabalho | A utilização das "ferramentas" dos professores: programas, livros didáticos, cadernos de exercícios, fichas etc. | Pela utilização das "ferramentas" de trabalho, sua adaptação às tarefas |
| Saberes provenientes de sua própria experiência na profissão, na sala de aula e na escola | A prática do ofício na escola e na sala de aula, a experiência dos pares etc. | Pela prática do trabalho e pela socialização profissional |

Quadro 1: Os saberes dos professores (TARDIF, 2005, p. 63)

Pelo exposto anteriormente, podemos ver que Tardif discorre sobre uma formação mais holística dos saberes do professor, considerando saberes pessoais e conhecimentos anteriores à formação como constituintes também do conjunto de *saberes docentes*.

O autor não se preocupa em especificar uma categoria de professores como Deborah Ball; Thames; Phelps (2008), que procuram focar nos professores de matemática, porém afirma que para todos os professores, a história de vida, a socialização primária e a formação pré-profissional irão compor também seu conjunto de saberes na prática docente.

Mais aprofundamentos sobre esse assunto podem ser encontrados com a leitura completa do capítulo. A respeito dos saberes "provenientes da formação profissional", é neste tópico que se enquadra a parte do diagrama de Ball; Thames; Phelps (2008) denominada Conhecimentos do Conteúdo. Dentro dos Conhecimentos do Conteúdo, os autores norte-americanos o subdividem em três categorias e uma delas é a dos *Conhecimentos Especializados do Conteúdo*. Estes *Conhecimentos Especializados* são de suma importância na definição da atuação do professor de matemática como um *ofício* (na visão de Tardif) com seu próprio conjunto de habilidades, tecendo uma gama de habilidades matemáticas únicas ao professor e desejáveis para sua atuação.

Além disso, no quadro estão ainda mencionados os saberes provenientes dos programas e livros didáticos, denominados como "ferramentas", e por fim, os saberes provenientes de suas próprias experiências, ambos também observados nitidamente nas entrevistas realizadas nesta pesquisa.

Apesar da inegável importância que a experiência tem nas escolhas e atuações do professor em sala de aula, isso não quer dizer que o professor prescinda de uma formação teórica específica para sua prática docente. O conjunto de saberes de um professor também consiste de importantes fundamentações matemáticas que se estendem para além da simples aplicação dos conteúdos ensinados. Isto é um fato a respeito do qual o grupo de pesquisa de José Carrillo publicou suas conclusões em 2013[16].

Nessa pesquisa, os professores foram observados em sala e posteriormente, entrevistados na intenção de identificar Conhecimentos Especializados de Conteúdo em suas aulas. Além disso, houve a intenção de identificar como estes Conhecimentos se manifestam já na preparação das aulas, e se são oriundos de experiências prévias como professores, se experiências como alunos (como destacado por Tardif) ou mesmo de sua própria formação. Mais detalhes sobre a observação de aulas, realização das entrevistas e as análises que foram conduzidas sobre elas se encontram nos Capítulos 7 e 8.

[16] CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. Determining specialized knowledge for mathematics teaching. *In*: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8., 2013, Antalya. *Proceedings* […]. Antalya: M.E.T. University, 2013. p. 1-10.

## 6. CONHECIMENTOS SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS

Este capítulo tem o objetivo de versar sobre características do conjunto dos números irracionais que devem ser de conhecimento do professor, mas não necessariamente ensinadas para o aluno. Caso sejam mencionadas em sala de aula, é provável que não devam ser mencionadas com o mesmo detalhamento que será utilizado aqui, pois a compreensão da exposição fornecida a seguir depende de requisitos que não estão no escopo dos conteúdos do Ensino Fundamental, por exemplo. Além disso, alguns dos conhecimentos aqui apresentados não necessariamente precisam ser vistos por um Matemático em sua formação, mas, como será pontuado na conclusão do capítulo, pode-se argumentar que fazem diferença quando compreendidos pelo professor de matemática do Ensino Fundamental.

Ainda assim, é importante ressaltar que o professor deve entender com certa profundidade os conteúdos que irá ensinar, em particular o conjunto dos números irracionais, interesse desta pesquisa, compreendendo suas particularidades e inclusive analogias e diferenças entre alguns de seus subconjuntos. Isso possibilita uma melhor concepção a respeito dos tópicos que realmente deve ensinar, e também pode viabilizar um melhor discernimento a respeito das dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

Sabe-se que até o 7º ano da Educação Básica, os alunos aprendem, em matemática, essencialmente sobre o conjunto dos números *racionais*. Sabe-se, também, que, no Ensino Médio, muitos dos conteúdos matemáticos baseiam-se em funções, a maioria com domínios e imagens que são subconjuntos dos números *reais*. Entre esses dois períodos escolares, no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, os alunos aprendem sobre os números irracionais.

Nos livros didáticos, de uma forma geral, um conjunto numérico é usualmente apresentado exemplificando alguns de seus elementos e depois há alguma definição, menos ou mais precisa, de alguma propriedade comum desses elementos.

Figura 5: Trecho de livro didático do 7º ano que introduz o conjunto dos números naturais.

No nosso dia a dia e na Natureza os números são muito úteis, em especial para expressar registros de contagem. Por exemplo, um rebanho pode ter 20, 100 ou 3000 animais, uma árvore pode ter 4 ou 8 galhos ou, ainda, em uma multidão pode haver mais de 500 pessoas. Os números ligados a uma contagem são os **números naturais**.

Fonte: A Conquista da Matemática - 7º ano (2019).

Em contrapartida, o conjunto dos números irracionais surge como o conjunto dos números reais que *não são racionais*, tornando um pouco mais delicada a tarefa de definir qual a propriedade que o determina (para além da negação de outra propriedade).

Todos os números irracionais têm representação decimal infinita e não periódica, como inclusive ressalta a habilidade EF09MA02 da BNCC, a saber:

> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. (BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018, p. 317)

Contudo, essa característica apresenta uma dificuldade em si, as infinitas casas decimais. É impossível escrever todas as casas decimais de um número irracional, o que pode tornar difícil a missão de mostrar aos estudantes que são, de fato, infinitas e não periódicas.

### 6.1. Representações decimais com reticências

Uma maneira de representar as infinitas casas decimais de um número é utilizar reticências. Porém, por serem um símbolo que traz uma ideia bastante abrangente, pode ser difícil descobrir quais algarismos elas representam. Vamos tomar como exemplo a $\sqrt{2}$. Com o auxílio de uma calculadora, ou mesmo com alguns (extensos) cálculos manuais, um aluno do 9º ano poderia escrever que $\sqrt{2} = 1,41421...$, o que não está errado.

Mas, agora, observe a seguinte lista $L$ de números:

- $1,41421111111...$

- $1,4142121212121...$
- $1,41421234567891011...$
- $1,4142101001000...$

Todos os números da lista $L$ começam com $1,41421$ e nenhum deles é igual a $\sqrt{2}$.

Para cada um dos números dessa lista, o símbolo de reticências pode indicar uma sequência diferente de algarismos. Por mais que a representação decimal de $\sqrt{2}$ seja não-periódica, ela é uma sequência numérica específica e bem definida. É por isso que podemos afirmar que nenhum número da lista $L$ é igual a $\sqrt{2}$. Cada dígito que deve aparecer no lugar das reticências na igualdade $\sqrt{2} = 1,41421...$ segue o padrão de formar um número de representação decimal que, quando elevado ao quadrado, é igual a $2$.

Em cada número da lista $L$, a sequência de algarismos imediatamente anterior ao símbolo de reticências fornece informações para que se possa supor quais algarismos elas representam. Por exemplo, seguindo a ideia que as reticências sugerem para cada item da lista, os dois primeiros números seriam dízimas periódicas de período 1 e 21 respectivamente, e os dois últimos, números irracionais.

Para o conjunto dos números racionais, existe uma convenção sobre como representar o período das dízimas periódicas[17], desobrigando o uso de reticências. A saber: os números racionais $1,41421111111...$ com período 1 e $1,4142121212121...$ com período 21 podem ser escritos respectivamente como $1,4142\overline{1}$ e $1,414\overline{21}$. Vamos chamar esse traço superior de *overline*.

Porém, no caso dos dois últimos números da lista $L$, supondo que as reticências de fato representem algarismos que sigam o padrão indicado em cada número, podemos assumir que suas representações decimais não possuem repetições periódicas, assim como a de $\sqrt{2}$, sendo todos números irracionais. Mas, nesse caso, é difícil que a representação decimal de números irracionais escape das reticências; e ainda, a percepção de algum padrão, se este existir, pode não ser única. Novamente, essa discussão é interessante para o professor tomar

[17] Números inteiros podem ser representados por dízimas periódicas de período 9, como: 1 = 0,999…

consciência a respeito de um símbolo que pode gerar confusões em sala de aula, o que não quer dizer que seja necessário abordá-la neste nível de detalhamento na escola; contudo, o professor ciente desses aspectos, pode transmitir essas ideias em aula, valendo-se de seus CECs ao escolher a melhor forma de fazê-lo.

Uma maneira de representar o número $\sqrt{2}$ de forma precisa e sem reticências é justamente representá-lo assim: $\sqrt{2}$, com o símbolo da radiciação. Com tudo isso em mente, é possível ver que a compreensão de $\sqrt{2}$ como um número em si representa também o aprofundamento do conceito de número (como desejado na BNCC, p. 269)[18].

Outra maneira de representar a $\sqrt{2}$ sem utilizar reticências é utilizar um expoente fracionário. Uma das habilidades da BNCC do Ensino Fundamental é: "(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários" (BRASIL, 2017, p. 317). Portanto, até o 9º ano do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos reconheçam que expoente racional $\frac{m}{n}$ é equivalente ao símbolo $\sqrt[n]{\ m}$.

Tal equivalência aproxima a representação dos radicais das representações das potências de expoente inteiro que os alunos já conhecem, podendo contribuir também para o dito aprofundamento do conceito de número. Porém, é importante ressaltar que essa equivalência é válida apenas para radicandos (ou bases) *positivas*. Isso porque uma potência de base negativa e expoente par torna-se positiva e a raiz quadrada de um número negativo não é um números real.

Então, vale aqui um adendo importante. Radicandos que sejam número racionais negativos, com expoente $m$ ímpar e em raiz de índice $n$ par, são números imaginários. Mais um exemplo de conhecimento que deve ser de domínio do professor, mas que não será exposto ao aluno em sala de aula no Ensino Fundamental.

[18] "Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los [os alunos] diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. [...] No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica." (BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018, p. 269)

Antes de continuar e destrinchar as representações dos números $1,41421234567891011...$ e $1,4142101001000...$ da lista $L$, vamos continuar analisando um pouco mais a $\sqrt{2}$, número tão importante na história Ocidental da matemática.

## 6.2. Números Comensuráveis e Construtíveis

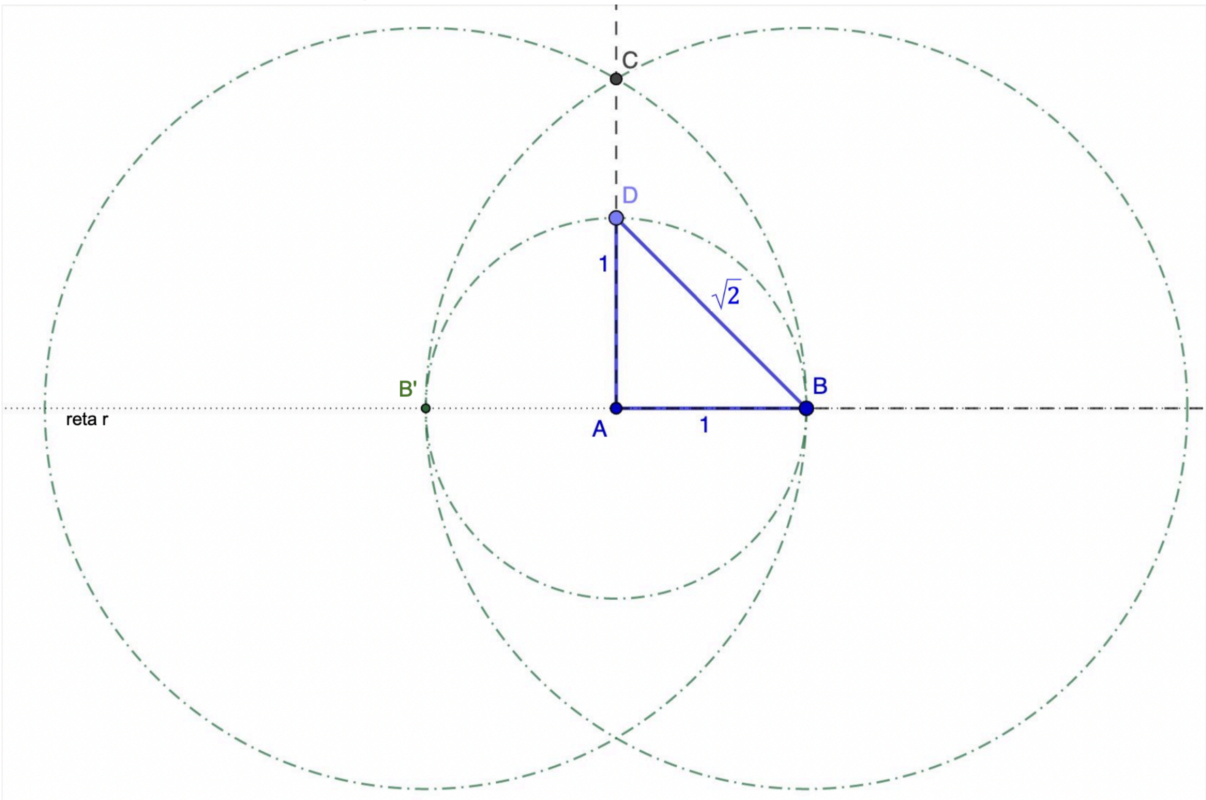
- Definição 1: Um número $n$ pode ser chamado de construtível se for possível, dado um segmento de reta de comprimento $1\,u.c.$, construir outro segmento de tamanho $|n|$, utilizando somente régua não-graduada, compasso e um número finito de passos. Ainda, se um quadrado está construído, a diagonal desse quadrado é sempre um número construtível.
- Definição 2: Dois segmentos $a$ e $b$ são *comensuráveis* se é possível dividir $a$ e definir um segmento de reta de comprimento $1\,u.c.$ que construa $b$. Dois segmentos são *incomensuráveis* se não forem comensuráveis.

Cinco séculos antes de Cristo, na Grécia, Pitágoras e seus discípulos descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado de lado 1 são segmentos incomensuráveis. Séculos depois, foi provada a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de qualquer quadrado; mas, já naquela época, a percepção de dois segmentos incomensuráveis foi um grande dissabor na Escola Pitagórica. Além de acreditarem que a matemática era "a única verdade aceitável" (Conceitos básicos da matemática - Breve história dos números II. GCF Global. Disponível em: <https://edu.gcfglobal.org/pt/conceitos-basicos-da-matematica/breve-historia-dos-numeros-ii/1/>. Acesso em: 7 de abr. de 2023), os pitagóricos também acreditavam que os números inteiros eram a fonte de todas as coisas. Mas, ao se depararem com segmentos incomensuráveis, os números inteiros, e os racionais, deixaram de ser suficientes para representar o comprimento construtível que é a diagonal do quadrado. Estavam diante de uma construção simples, visto que já sabiam como construir um quadrado, mas que colocava à prova tudo que acreditavam.

Passo-a-passo de uma possível construção do número $\sqrt{2}$:

1. Trace, com uma régua não-graduada, uma reta $r$.
2. Trace, com uma régua não-graduada e sobre a reta $r$, um segmento $\overline{AB}$ de $1\, u.c.$
3. Centre um compasso em $A$, abra até o ponto $B$ e trace a circunferência $\alpha$; as intersecções de $\alpha$ com a reta $r$ são os pontos $B'$ e $B$.
4. Centre um compasso em $B'$, abra até o ponto $B$ e trace a circunferência $\beta$.
5. Centre um compasso em $B$, abra até o ponto $B'$ e trace a circunferência $\gamma$; as intersecções de $\beta$ e $\gamma$ são os pontos $C$ e $C'$.
6. Trace, com uma régua não-graduada, a reta $AC$.
7. Seja D um dos pontos de intersecção de $\alpha$ com a reta $AC$.
8. Conecte os pontos $B$ e $D$ com uma régua não-graduada. O segmento $\overline{BD}$ tem comprimento $\sqrt{2}\, u.c.$
9. 

Figura 6: Ilustração do passo-a-passo acima.

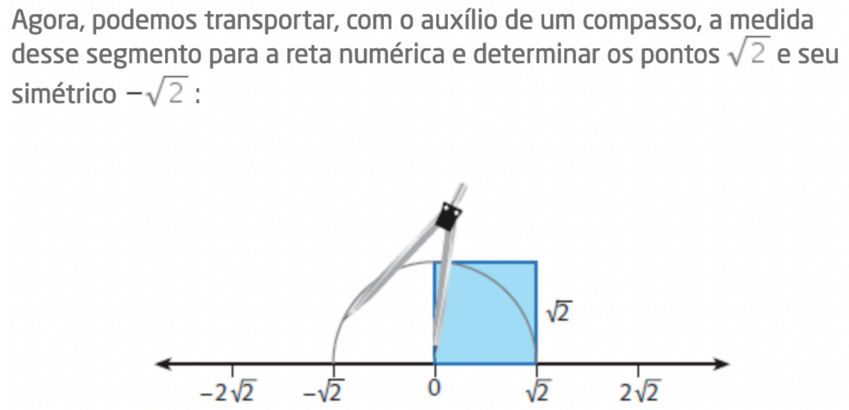



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Portanto, o número $\sqrt{2}$ é construtível. Foi uma das primeiras vezes que matemáticos do Ocidente se depararam com um número irracional, segundo há registros. Note que, pela Definição 1, podemos considerar que o número $-\sqrt{2}$ também é construtível.

Pensando no ensino dos números irracionais, não é necessário definir os subconjuntos de números irracionais construtíveis ou não construtíveis, ou definir o que é comensurabilidade. Mas essa construção pode ser de grande auxílio na localização da $\sqrt{2}$ na reta numérica. A saber: a partir da construção da $\sqrt{2}$, basta transportar com o compasso a medida desse segmento para uma reta numérica real, fixando a ponta seca do compasso no $0$ e demarcando a localização do número $\sqrt{2}$. Isso pode ser observado nesta ilustração do livro didático de 8º ano da Editora Moderna:

Figura 7: Ilustração da localização, com o compasso, dos números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ na reta real.




Fonte: Matemática Compreensão e Prática 8 (2019).

Agora, vamos pensar mais uma vez no conjunto dos números irracionais. Como já colocado, todos os irracionais têm uma propriedade em comum: possuem representação decimal infinita e não-periódica. Alguns números irracionais são construtíveis, sendo possível determinar um subconjunto dos números irracionais, o dos números irracionais construtíveis.

É possível determinar subconjuntos de qualquer conjunto. Porém, podemos notar pela definição de números construtíveis, que todos os números racionais são construtíveis, inclusive porque são todos comensuráveis com a unidade. Ou seja, ao determinar o conjunto dos números reais construtíveis, todo o conjunto dos números racionais está contido nele, além de todos os irracionais construtíveis[19].

Note que, dessa forma, conhecendo a propriedade da construtibilidade (Definição 1), é possível formar um conjunto que inclua tanto números racionais quanto irracionais. Números que possuem uma diferença fundamental em suas representações decimais, assemelham-se definindo uma propriedade específica: a construtibilidade. Esta discussão se aproxima muito da habilidade EF09MA01 da BNCC[20], confirmando a importância de o professor de matemática conhecer estas nuances e propriedades do conjunto dos números irracionais, ainda mais se for apresentá-las aos alunos, como sugere a Figura 7, retirada de um livro didático.

### 6.3. Números Algébricos e Transcendentes

- Definição 3: Um número $N$ é chamado de algébrico se existir uma equação polinomial com coeficientes inteiros que tenha esse número $N$ como raiz.
- Definição 4: Todo número que não é algébrico é chamado de *transcendente*.

É fácil entender, pela Definição 3, que qualquer número racional $\frac{a}{b}$ é algébrico, raiz da equação $bx - a = 0$. O número irracional $\sqrt{2}$, além de construtível, é algébrico, porque a equação $x^2 - 2 = 0$ é polinomial com coeficientes inteiros e uma de suas raízes é justamente $\sqrt{2}$. Aqui, vale uma observação. A outra raiz dessa equação é $-\sqrt{2}$, número que, como já colocado, também é construtível.

---

[19] Para mais detalhes sobre os números construtíveis, sugiro a leitura do Trabalho de Conclusão de Curso de Valderi Candido da Costa, disponível em: https://mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Valderi.pdf (último acesso em 30 de abril de 2024).

[20] "(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade)." (BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018, p. 317)

Também é possível notar que a definição de número algébrico não parte do princípio de que o número precisa ser real. Isso quer dizer que existem números algébricos complexos. Um exemplo é a própria unidade imaginária, o $i$, raiz da equação $x^2 + 1 = 0$. Novamente ressalto que apesar de o ensino dos números complexos ficar reservado ao Ensino Médio, o professor deve ter, como abordado no Capítulo 4, conhecimento a respeito dos conteúdos futuros que o aluno estudará.

Agora, tomemos o número real $\sqrt[3]{2}$, raiz não-exata famosa pelo Problema de Delos[21], ou problema da duplicação do cubo. A duplicação de um cubo recai no uso de $\sqrt[3]{2}$ e só foi resolvido anos depois da suposta consulta ao oráculo, por Arquitas de Tarento, que utilizou conceitos de geometria analítica. A dificuldade ilustrada pela lenda é a de construir o novo altar: o número $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, como foi provado a partir dos trabalhos de Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel e Évariste Galois, no século XIX. Porém, Arquitas de Tarento conseguiu encontrar uma solução analítica para o problema, já que $\sqrt[3]{2}$ é um número algébrico (raiz da equação $x^3 - 2 = 0$).

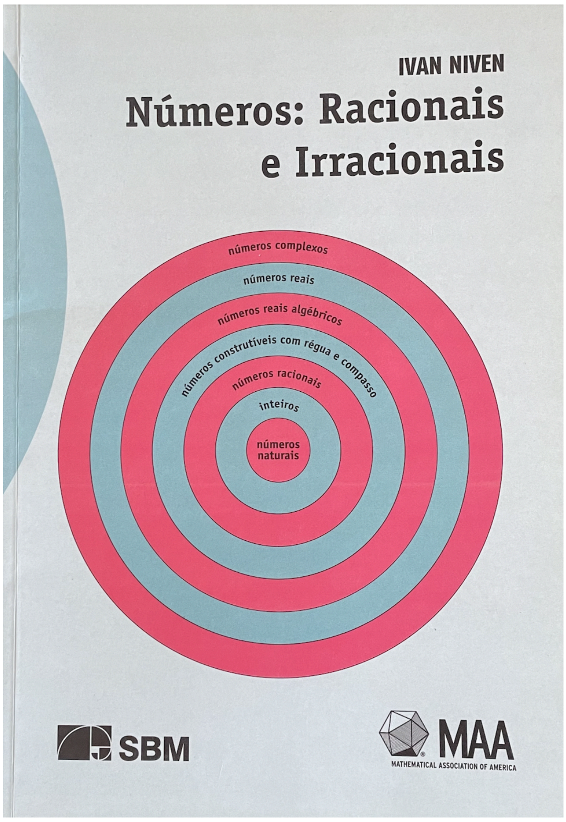
Não é difícil perceber que todos os radicais com radicandos racionais, independentemente do índice de suas raízes, são números algébricos. Isso quer dizer que todos os números construtíveis também são algébricos[22]. Portanto, o conjunto dos números algébricos reais contém todos os construtíveis com régua e compasso.

Considerando os subconjuntos dos números construtíveis e dos números algébricos, que, para além de subconjuntos dos números irracionais, são subconjuntos que contém os racionais e em particular, um contém o outro (os algébricos contêm os construtíveis), podemos compreender a ilustração na capa do livro Números: Racionais e Irracionais, de Ivan Niven:

Figura 8: Capa do livro Números: Racionais e Irracionais, de Ivan Niven.

[21] O Problema de Delos faz parte de uma lenda que conta que os atenienses, preocupados com a peste, consultaram o oráculo de Apolo, em Delos, sobre como combater a doença. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, no formato de um cubo, deveria ser duplicado. Os atenienses, ao duplicarem as arestas do cubo, construíram um altar em que o volume foi, na verdade, multiplicado por 8, e Atenas não se livrou da peste.

[22] Para mais detalhes sobre essa afirmação, sugiro a leitura do material Geometria Euclidiana Aula 12 de Almir Rogério Silva Santos e Humberto Henrique de Barros Viglioni, disponível em <https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/15482416022012Geometria_Eucliadiana_Plana_Aula_12.pdf>, especificamente seção 12.3.2. Acesso em 27/02/2024.




Fonte: SBM (2012)

Pode-se pensar a organização dos conjuntos numéricos contidos nos números reais de modo que os números irracionais tornem-se mais semelhantes aos racionais, por possuírem características em comum. Isso porque outros conjuntos podem ser definidos a partir de outras propriedades (números construtíveis com régua e compasso ou algébricos), e não apenas a partir da representação decimal infinita ser periódica ou não.

Ainda na capa do livro de Ivan Niven, os números que estão fora do conjunto dos reais algébricos, mas dentro do conjunto dos reais (representados por uma das coroas circulares azuis), são os números reais transcendentes. Todos os reais transcendentes são irracionais.

Vamos retornar à análise das formas de representar os números irracionais, já que a propriedade mais utilizada para definir este conjunto é a representação decimal infinita não periódica.

O número $\sqrt[3]{2}$ e outros reais algébricos não-construtíveis (irracionais), bem como os construtíveis, podem ser representados sem reticências recorrendo apenas ao símbolo de radiciação. Aqui, estou incluindo a representação de dízimas periódicas, porque podemos utilizar o símbolo do *overline*: $0,3333... = 0,\overline{3}$. Veja que o aluno, então, já estará em contato com símbolos que não são numéricos para representar os números que está aprendendo.

Observe alguns exemplos de números reais transcendentes: $\pi$, $e$, $2^{\sqrt{2}}$, $ln\,2$, $log\,3$ e os números irracionais que compunham nossa lista $L$: $1,41421234567891011...$ e $1,4142101001000....$ Quando não recorrem a reticências, recorrem a outros símbolos que até então, não seriam usualmente associados a números, como raízes no expoente, logaritmos ou letras gregas.

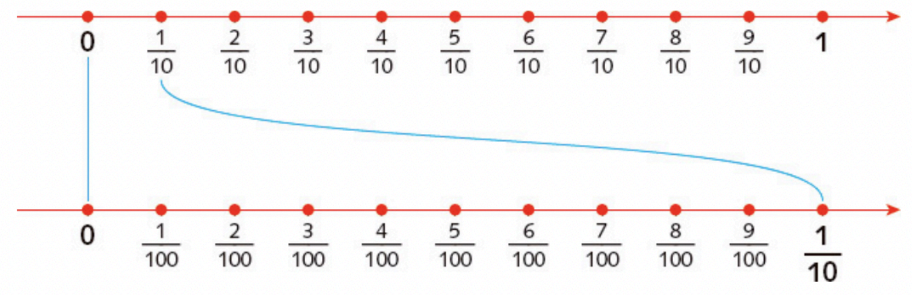
### 6.4. Não-enumerabilidade dos Números Transcendentes

Por fim, vamos definir mais algumas características de conjuntos numéricos, para concluir a importância de saber o que foi mencionado neste capítulo.

O conjunto dos números inteiros não é denso[23] nos reais, pois entre os números inteiros $-3$ e $-2$, por exemplo, não existe um outro número inteiro. Já o conjunto dos números racionais é denso nos reais. É possível localizar, na reta real, muitos (infinitos) racionais entre $1$ e $2$, por exemplo; e, com atenção, é possível compreender que isso vale para quaisquer outros dois números racionais.

A densidade é abordada, indiretamente, na Educação Básica. Durante o ensino dos números racionais, um exercício muito comum em materiais didáticos envolve localizar um número racional entre dois inteiros consecutivos, ou entre dois racionais quaisquer. Observe a seguir um fragmento de livro didático digital de 6º ano:

Figura 9: Ilustração da reta real que destaca os números racionais entre $0$ e $\frac{1}{10}$.




[23] Definição 5: S é *denso nos números reais* se, dados dois números reais a e b quaisquer, existe t pertencente a S tal que t está localizado entre a e b, isto é, a < t < b.

Fonte: Matemática Compreensão e Prática 8 (2019).

Pode-se ver claramente a propriedade da densidade dos números racionais nos números reais na ilustração acima, ainda que não seja formalmente nomeada assim nos livros didáticos.

Para além da localização dos números racionais, a densidade é de fundamental importância na localização dos números irracionais. Inclusive, durante as aulas observadas na escola E1, o conteúdo principal era justamente o de aproximar raízes quadradas não-exatas para números racionais (com um ou dois algarismos depois da vírgula), possibilitando sua localização na reta real. O conjunto dos números irracionais, por sua vez, também é denso na reta real.

Além de denso, o conjunto dos números racionais é enumerável[24]. A cardinalidade é a maneira formal de tratar da quantidade de elementos de um conjunto. Ela possibilita dimensionar e comparar inclusive conjuntos com infinitos elementos. Conjuntos que são enumeráveis têm a mesma cardinalidade, que é a cardinalidade do conjunto dos números naturais, chamada de $aleph\ 0$.

O conjunto dos números algébricos é enumerável[25], mas o conjunto dos números reais não é enumerável. Demonstração: Suponha, por absurdo, que os números reais sejam enumeráveis. Isso quer dizer que seria possível construir uma função $f$, bijetora, $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, também seria possível construir uma lista dos números reais associados a cada número natural, da seguinte forma:

$0 \rightarrow y_0$

$1 \rightarrow y_1$

$2 \rightarrow y_2$

$3 \rightarrow y_3 \ldots$

[24] Um conjunto numérico é chamado de *enumerável* se existe uma função bijetora entre ele e qualquer subconjunto dos números naturais, incluindo o próprio conjunto.

[25] A demonstração desse fato pode ser encontrada em SILVA, W. M. L. Um estudo sobre o infinito: enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos. 2016. 74 f. Dissertação (Doutorado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016. Disponível em: <https://bdtd.uftm.edu.br/bitstream/tede/397/5/Dissert%20Wysner%20M%20L%20Silva.pdf >. Acesso em: 8 de jun. de 2023.

Em que, cada $y_n$ , $n \in \mathbb{N}$, representa um número real. Observe também que a representação decimal de cada $y_n$ pode ser esquematizada da seguinte forma: $a_0, a_1 a_2 a_3$... em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\ e\ n > 0$.

Agora, vamos construir o número $y$ da seguinte forma:

$a_0$ diferente da parte inteira de $y_0$;

$a_1$ diferente do primeiro algarismo depois da vírgula de $y_1$;

$a_2$ diferente do segundo algarismo depois da vírgula de $y_2$; etc

Observe que $y$ com certeza é um número real, com infinitas casas decimais. Observe também que $y$ é diferente, em pelo menos um algarismo, de todos os $y_n$ listados inicialmente. Sendo assim, $y$ é um número real que não está na imagem da função bijetora definida inicialmente, o que seria impossível se o conjunto fosse, de fato, enumerável. Conclui-se, então, que os números reais não são enumeráveis.

Vamos, agora, nos deter com calma nas informações apresentadas. Os números algébricos são enumeráveis, mas os números reais, não. A conclusão, portanto, é de que os números transcendentes não são enumeráveis. Todos os números reais transcendentes são também irracionais, então este conjunto tem cardinalidade maior que a do conjunto dos números racionais.

Esse fato é importante para mostrar, por exemplo, que a maioria dos números da reta numérica real são irracionais, o que pode ser um motivador para o estudo desse conjunto numérico. Novamente: não cabe no escopo dos conteúdos do Ensino Fundamental uma apresentação formal sobre transcendência, cardinalidade ou enumerabilidade. Mas o professor, de posse desses conhecimentos, tem mais certeza da importância de seu aluno compreender a complexidade dos números irracionais, e pode evitar apresentar apenas alguns poucos exemplos como apenas as raízes não exatas, por exemplo. Ainda, pode escolher formas de vislumbrar algumas dessas características em aula, se julgar pertinente, nos pontos em que essas características mais se aproximam de habilidades da BNCC. A reta numérica real será fundamental no estudo de funções durante o Ensino Médio, e a boa compreensão de suas característcias e propriedadesauxiliará nesses estudos futuros.

## 6.5. Estes conhecimentos matemáticos no Ensino Básico

As características que foram detalhadas nas seções de 3.1 a 3.4 podem não fazer parte diretamente do currículo matemático na Educação Básica, mas é interessante que o professor as reconheça e se aproprie delas. Por mais que os conceitos de números construtíveis, algébricos e transcendentes não sejam (e pode-se argumentar que nem devam ser) ensinados na Escola Básica, essas propriedades transpassam suas características na representação e na identidade dos números conforme os alunos trabalham os conteúdos escolares.

No 9º ano, os alunos já são apresentados ao número $\pi$, localizam-no na reta numérica e realizam operações com ele, um número que também é transcendente. Além disso, também fazem cálculos e fatorações com muitos radicais não-exatos algébricos (construtíveis ou não), já acentuando a importância de conhecer bem as características do conjunto dos irracionais.

É importante que o professor, ciente de todas as propriedades mencionadas até aqui, ensine o conjunto dos número irracionais de forma atenta inclusive às problemáticas que podem surgir nos alunos - como, por exemplo, associar todas as raízes quadradas a números racionais (já que algumas são equivalentes, como $\sqrt{16} = 4$); ou ainda, fazer associações falsas como “todas as raízes podem ser construídas” (quando se utiliza o teorema de pitágoras como motivador) ou “todos os números são raiz de alguma equação com coeficientes inteiros” (caso se utilize equações como motivadores).

É interessante se pensar que, quando os alunos compreendem o que é o período de uma dízima periódica, podem também compreender o que é uma dízima não periódica. É possível idealizar uma atividade centrada nos alunos inventando números decimais que sejam dízimas não periódicas. Ao determinar que os números devem ter infinitas casas decimais, mas que não podem ter período, os alunos possivelmente verão a necessidade de definir algum tipo de regra que determine como serão as infinitas casas decimais da dízima que estão criando. Algo dessa natureza pode gerar números como $0,123456789\ldots$ ou $2,101112131415\ldots$, ambos transcendentes, combinando este conjunto numérico com um componente criativo.

Está mencionada na BNCC a pretensão de que, para ensinar sobre o conjunto dos números irracionais, o professor provoque nos alunos a necessidade de “novos” números, utilizando a geometria, dando a ideia de que apenas os números racionais não seriam "suficientes" para a matemática; a proposta para os números irracionais que não podem ser representados a partir de uma construção geométrica seria completar a reta numérica. Está dado então um desafio, que é fazer essas conexões e ao mesmo tempo, aprofundar o conceito de número irracional, demonstrando sua real importância para os alunos.

Dentro desse mérito, é importante citar o livro *Números Racionais, Reais e Complexos*, de Jaime Ripoll, Cydara Ripoll e José Francisco Silveira (2006) em que é discutida a “insuficiência” dos números racionais - inicialmente sem mencionar a geometria. Após demonstrações sobre a praticidade e importância dos números racionais em situações do cotidiano e também dentro da matemática, sobretudo pela importância das frações, os autores trazem a seguinte problemática:

> Os números racionais estão muito longe de constituírem um campo numérico matematicamente satisfatório: existem muitos problemas que ficariam sem solução, se nos contentássemos com eles. Por enquanto, nos limitaremos a observar uma insuficiência aritmética do campo dos racionais, qual seja: sua incapacidade de atribuir um resultado à simples operação de extração de raízes quadradas. (Ripoll; Ripoll; Silveira, 2006, p. 175)

Em seguida, trazem o seguinte:

> Logo, para resolvermos as deficiências acima, só nos resta uma saída: adotar um ponto de vista mais geral, criar um campo numérico que inclua os racionais e seja mais satisfatório. Este campo será o dos números reais (...). (Ripoll; Ripoll; Silveira, 2006, p. 176)

Note que, apresentada a necessidade de números que não sejam racionais, o desenvolvimento do livro imediatamente vislumbra uma definição mais abrangente de número. Para lidar com essa "insuficiência aritmética", seria necessário definir um conceito diferente de número, que no livro já é apresentado como número real, deixando claro que essa definição deverá unir os números racionais e as raízes quadradas não exatas (irracionais) em um único conjunto.

Podemos notar também que, para os autores, conhecer a operação da radiciação e se deparar com a impossibilidade de calcular a $\sqrt{2}$, por exemplo, apenas com números racionais, não traz a conclusão de que esse cálculo é impossível. Na realidade, a conclusão é de que existem números para além do conjunto dos racionais. Os números irracionais já são apresentados como incontestavelmente importantes para a coesão da matemática, pois sem eles, a definição da radiciação - operação inversa da potenciação - fica condicionada apenas a alguns números.

Curiosamente, o capítulo seguinte do livro (Capítulo 5) trata de definir e estabelecer os processos de construção geométrica da Geometria Euclidiana para que então, o Capítulo 6 inicie com a insuficiência já pregada na BNCC: a limitação "geométrica" dos números racionais - que não bastam para medir *exatamente* todos os segmentos de reta, apenas *aproximadamente*. Se já havia sido afirmada a necessidade de números fora do conjunto dos racionais, agora está provada a existência deles através de segmentos de reta no papel.

Diferentemente de Ivan Niven, que separa o conjunto dos números irracionais em construtíveis e não-construtíveis, no livro de Ripoll et. al. (2006), os autores se ocupam em construir uma régua infinita. Abdicando da propriedade dos números serem construtíveis com régua e compasso, constrói-se a régua definindo que seja possível simplesmente medir de maneira exata todo e qualquer segmento que pode ser traçado. Isso define todo o conjunto dos números reais positivos, estando inclusas todas as dízimas infinitas periódicas e não-periódicas. Nesse processo, estão inclusos os irracionais algébricos e transcendentes, definindo a parte positiva da reta real[26].

Esse procedimento usa a Geometria Euclidiana de forma mais teórica, preocupando-se em definir o conjunto dos números reais. Depois de definir a "régua infinita", bastaria acrescentar todos os opostos dos números reais positivos, definindo por completo todo o conjunto dos números reais.

---

[26] Para entender melhor o rigor com que a construção dessa régua infinita é feita, recomenda-se consultar o Capítulo 6 do livro.

Para o professor, conhecer esta outra maneira de construir os números reais é importante não só para compreender melhor o conjunto dos números reais, mas também para considerar abordar uma versão deste viés em suas aulas, pensando nos conhecimentos prévios de seus alunos. A "régua infinita" é também uma versão da reta real, que é mencionada na BNCC, e a qual se deseja que o aluno conheça e compreenda.

## 6.6. Como estes conhecimentos se relacionam com Conhecimentos Especializados e esta pesquisa

É sabido que o professor de Matemática que atua na Educação Básica deve possuir um repertório de conhecimentos matemáticos que ultrapasse a mera realização de cálculos. Estes conhecimentos incluem, por exemplo, saber o que estrutura os algoritmos matemáticos utilizados na escola e saber responder perguntas levantadas em sala dentro de um nível desejado de profundidade. O professor deve auxiliar o estudante na compreensão do conteúdo estudado sem distanciá-lo do tema com informações que não seriam compreendidas. Esses conhecimentos podem ser chamados de *Especializados*, na definição de Ball; Thames; Phelps (2008).

Pelo exposto neste capítulo, é possível afirmar que há uma gama de *Conhecimentos Especializados* sobre o ensino de números irracionais. Alguns exemplos possíveis de tais *Conhecimentos* seriam: maneiras eficientes de abordar e ensinar a representação decimal dos números racionais e irracionais (finita e infinita, periódica e não-periódica), referências a frações geratrizes de dízimas periódicas e a localização de números reais na reta numérica.

Certamente, há muitos outros *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* envolvidos nesse ensino. Justamente por representarem formas mais vantajosas e interessantes de explicar, desenvolver, exemplificar, demonstrar e ilustrar tópicos matemáticos a serem estudados, é importante que sejam observados e analisados.

É daí que veio o interesse em entrevistar professores de matemática e assistir às suas aulas, investigando como aparecem alguns destes *Conhecimentos*

*Especializados* durante o planejamento e a execução dessas aulas. Nesse momento, mais algumas indagações aparecem: esses professores estão cientes desses *Conhecimentos*? Como esses *Conhecimentos* se fazem presentes nas suas aulas, mesmo se os profissionais não estejam cientes sobre eles? Como suas aulas são afetadas por isso?

Vale lembrar que os *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* são ferramentas que podem ser adaptadas pelo professor, de acordo especificamente com as demandas das turmas. Mas isso não torna este estudo menos importante, já que a análise dessas aulas habilita o vislumbre de possíveis novas maneiras de abordar esse ensino. Pesquisas já realizadas, como a de Bezerra (2017) e Corbo (2012), reiteram a complexidade e a amplitude do assunto.

Ronaldo Bezerra, professor e mestre também pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP, escreveu que seu projeto tinha o objetivo de "incorporar a metodologia de ensino por atividades investigativas” (p. 142) ao ensino dos números irracionais, com o objetivo de instigar o interesse e o fascínio dos alunos do 8º ano para o assunto e para a matemática. As atividades elaboradas por ele foram aplicadas numa escola particular da cidade de São Paulo, e ele se apoiou na pesquisa de Fonseca e Abrantes (1999) para elaborar atividades em que os alunos tentaram, por exemplo, solucionar como construir um quadrado de área $a^2 + b^2$ a partir de um quadrado de lado a e um quadrado de lado b, ou responder à questão “é possível determinar a representação decimal de qualquer raiz quadrada com a utilização de calculadora simples ou científica?” (p. 92).

Bezerra (2017) cita a pesquisadora Corbo (2012) nas considerações finais de seu trabalho, demonstrando que ambos concordam com a problemática apresentada por Ripoll; Ripoll; Silveira (2006):

> Desde o início tomamos como ponto de referência as palavras da pesquisadora CORBO (2012, p. 15), a qual afirma que o grande desafio no ensino dos números irracionais está em encontrar uma forma de suscitar um impasse que faça os estudantes perceberem a *insuficiência dos números racionais para resolver certos problemas.* (BEZERRA, 2017, p. 142, grifos originais).

Ele finaliza constatando que as atividades investigativas são importantes por ampliarem os horizontes do ensino de números irracionais na escola. Ele também evoca o sucesso que obteve em seus objetivos de ensino e pesquisa, mesmo que as atividades investigativas tenham provocado, por sua natureza, mudanças no planejamento enquanto o projeto esteve em curso, o que pode acontecer com todo professor.

Já a professora doutora Olga Corbo, apoiando sua tese de doutorado nos textos de Fischbein (1994) e Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), também se debruçou, como nessa dissertação, sobre quais são os conhecimentos necessários ao professor de matemática para explorar os conceitos e noções relativas ao conjunto dos números irracionais no Ensino Básico, importando-se em tratar das noções contra-intuitivas do assunto. Apesar de concordar com a "insuficiência" dos racionais mencionada e explorada por Ripoll; Ripoll; Silveira, Olga se preocupa em descrever o conjunto dos números Irracionais como Ivan Niven, decifrando as características heterogêneas dele de acordo com a possibilidade de serem construtíveis ou não, ou de serem algébricos ou não. As propostas e o estudo feitos por ela, portanto, permeiam também o conceito de *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* de Deborah Ball (2008).

## 7. COLETA DE DADOS DA PESQUISA

Esta pesquisa teve início em 2018, com o interesse geral em aprofundar conhecimentos a respeito das práticas do professor de matemática em sala de aula. Naquela época, já havia 2 anos que trabalhava em uma escola particular da zona norte da cidade de São Paulo, a qual chamo de E1 nesta dissertação, e ocupava o cargo de professora de matemática no plantão de dúvidas. O plantão de dúvidas consistia em um horário semanal em que eu estava disponível para os alunos (50 minutos para cada ano) e deveria auxiliá-los paralelamente ao professor regular. Para isso, eu procurava me atualizar sobre em qual ponto do conteúdo o professor estava, geralmente fazia uma breve explicação em lousa sobre o assunto e resolvia novamente algum exercício que já tinha sido feito em sala, mas que os alunos presentes ainda não haviam compreendido. Depois, pedia que resolvessem mais exercícios, ou os auxiliava com lições de casa.

Junto do início do meu mestrado, assumi minha primeira turma como professora titular, uma turma de 9º ano nessa mesma escola E1. Em termos de projeto de mestrado, tomei a decisão de focar no ensino dos conjuntos numéricos e, posteriormente, no ensino dos números irracionais, influenciada também pelo currículo do próprio 9º ano e por aquela minha primeira experiência após a conclusão da graduação.

Durante o primeiro ano no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, cumprindo os créditos em disciplinas necessários, ficou muito clara para mim a minha inexperiência como educadora, já que, no plantão de dúvidas, os atendimentos eram mais pontuais e, como professora titular, interagia com os alunos com mais frequência (5 aulas por semana) e era responsável pela continuidade do conteúdo. Tudo isso influenciava e alterava a preparação das minhas aulas mas, apesar das horas de estágio que já cumprira na graduação, frequentemente o resultado das aulas que eu planejava eram diferentes dos resultados que eu antecipava. Com a experiência, percebo que diferenças entre o real e o planejado podem sempre acontecer, mesmo com atividades revisitadas e aplicadas mais de uma vez (e, portanto, mais previsíveis), mas naquele momento, era difícil lidar com esses imprevistos.

Em minhas reuniões com meu orientador, conversávamos sobre esses desafios que eu vivia em sala de aula. Com esta realidade em mãos, um dos textos que ele pediu que eu lesse foi o já citado *Content Knowledge for Teaching: What makes it special?*, de Deborah Ball, Mark Thames e Geoffrey Phelps. Meu interesse pelo conceito de *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* do professor de matemática foi imediato e então, decidi que meu trabalho deveria tê-lo como base.

Os *Conhecimentos Especializados de Conteúdo*, como já definidos no Capítulo 4, teoricamente podem ser observados em todos os tópicos matemáticos abordados em sala de aula, e não apenas no ensino dos conteúdos analisados por Ball; Thames; Phelps (2008). Por exemplo, para ensinar sobre o conjunto dos números irracionais, que foi extensamente descrito no Capítulo 6, pode-se afirmar que o professor de matemática deve deter o conhecimento sobre como ensinar a um adolescente de $14$ anos a localização exata da $\sqrt{2}$ na reta numérica (a partir da diagonal de um quadrado de lado $1$, por exemplo), e também como explicar para esse mesmo adolescente que a reta numérica real só fica completa com todos os números irracionais. Isso, apenas para listar dois.

Então, para viabilizar esta dissertação, era necessário escolher em qual tópico matemático focar para estudar os *Conhecimentos Especializados de Conteúdo*, o que foi feito justamente de acordo com minha realidade no 9º ano. Foi decidido, então, fazer uma investigação para identificar alguns dos *Conhecimentos Especializados* utilizados por alguns professores de matemática no momento em que eles ensinam seus alunos sobre o conjunto dos números irracionais; professores esses que concordassem em participar da pesquisa.

Em 2019, quando eu ainda trabalhava na escola E1, assisti a aulas de dois professores, que serão chamados de professores P1 e P2, que trabalhavam comigo. O professor P1 dividia as turmas de 8º ano comigo no mesmo período (manhã), mas não lecionávamos o mesmo conteúdo: eu ministrava 1 aula por semana de revisão de conteúdos matemáticos anteriores, enquanto ele ministrava as outras 4 aulas sobre o conteúdo de 8º ano. O professor P2 ministrava os mesmos conteúdos que o professor P1, mas para as turmas do período da tarde. Neste ano, eu não era mais professora de 9º ano, mas sim de 7º e 8º.

Depois das observações, entrevistei ambos a respeito das aulas assistidas, perguntando sobre a preparação das aulas que vi e também sobre alguns processos que pude observar. Também perguntei sobre suas respectivas formações iniciais, experiências como docentes da Educação Básica e a utilização de alguns *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* que pude identificar. Essas entrevistas estão transcritas nos Apêndices desta dissertação.

As aulas escolhidas foram as de introdução do conteúdo do conjunto dos números irracionais, ministradas ao final do 8º ano, a partir da localização na reta numérica de raízes quadradas não exatas. Toda essa parte inicial foi feita antes da realização do exame de qualificação, e será relatada a seguir com detalhes.

As divisões de aulas de um mesmo ano entre vários professores eram comuns na escola E1 e, a partir do 8º ano e até o Ensino Médio, havia também uma divisão das aulas de matemática em duas frentes: Matemática 1 e Matemática 2. As aulas de Matemática 1 ocorriam apenas uma vez por semana com o objetivo de revisar conteúdos matemáticos anteriores. As aulas de Matemática 2 aconteciam 4 vezes por semana e o conteúdo era o do próprio ano letivo.

No caso das turmas da manhã, o professor P1 ministrava as aulas de Matemática 2 e era eu quem ministrava as aulas de Matemática 1. Nas turmas da tarde, o professor P2 ministrava as aulas de Matemática 2 e outro professor, que não foi observado para esta pesquisa, ministrava as aulas de Matemática 1.

Em agosto de 2019, eu conversei com o professor P1, na sala dos professores que compartilhávamos, a respeito da minha pesquisa e perguntei quando seria a introdução do conteúdo dos números irracionais no 8º ano. Ele me respondeu que, no início do 4º bimestre (mês de outubro) haveria um conteúdo muito pontual a respeito de aproximações de raízes quadradas não exatas para números racionais. Tal conteúdo constava no livro didático de 8º ano adotado pela escola, mas a definição e o aprofundamento do conjunto dos números irracionais e reais começariam a ser feitos apenas no 9º ano, como eu já sabia pela minha experiência do ano anterior.

Ele me alertou que seria um conteúdo curto, focando apenas na aproximação para números decimais racionais. Eu escolhi seguir com a observação de aulas e posterior entrevista para aproveitar este conteúdo do final do 8º ano e começar uma parte da minha pesquisa antes do exame de qualificação.

Expliquei ao professor P1 sobre o meu interesse em assistir a essas aulas e depois realizar uma entrevista com ele, perguntando se ele aceitaria fazer parte da minha pesquisa, ao que ele disse sim. Dois meses se passaram sem que conversássemos novamente sobre esse assunto e, no final de setembro (final do 3º bimestre letivo), durante a semana de provas bimestrais dos alunos, eu o encontrei e lembrei-o dessa conversa, para pedir que ele me avisasse quando fosse começar as aulas que eu desejava assistir.

Durante a primeira semana do 4º bimestre, todos nós professores da escola E1 estávamos ocupados com correções das provas bimestrais. Quando chegou o final da segunda semana, novamente entrei em contato com o professor P1 a respeito das aulas que eu gostaria de assistir e fui surpreendida: as aulas já haviam acontecido, e ele havia se esquecido de me avisar.

É claro que houve frustração da minha parte, mas a solução que ele propôs, e que eu aceitei, foi: assistir às aulas seguintes que ele ia ministrar, que seriam as aulas de conclusão do conteúdo, com a correção da última atividade proposta a respeito do tópico – logo antes de iniciar o conteúdo seguinte, que era o de relações métricas na circunferência. Sendo assim, nas turmas da manhã, assisti apenas 1 aula em cada sala (5 salas no total), em que metade do tempo foi dedicado ao assunto que me interessava e a outra metade, a outro tópico.

Também para minha surpresa, em todas as aulas, antes de iniciar a correção da lição de casa, o professor P1 começou a aula propondo um exercício extra, sobre como fazer a aproximação de uma dada raiz não exata para um número de representação decimal racional (com um algarismo depois da vírgula). A minha impressão foi de que aquilo foi uma adaptação justamente porque eu estava lá para assistir a aulas daquele conteúdo, o que foi útil para que eu pudesse presenciar ao menos uma parte do modo que ele ensinava o assunto.

Os exemplos foram feitos em lousa pelo professor P1, que ia sempre perguntando aos alunos e solicitando a participação da sala, para que dissessem o que deveria ser feito a seguir e de que maneira. Detalhes e análises sobre essas aulas estão no próximo capítulo.

Após assistir a essas aulas, conversei com o professor P1 para agendarmos uma entrevista. O professor P1 é um professor experiente, que tinha por volta de 45 anos de idade, e que dava aulas em 3 escolas em 2019. Isso quer dizer que, apesar de ter concordado em fazer parte da minha pesquisa, o tempo que ele poderia disponibilizar ao meu projeto era pequeno, compreensivelmente. Dando aulas nos três períodos do dia, a solução que encontramos foi realizar a entrevista por e-mail, como eu já havia visto acontecer em outros trabalhos de mestrado. A entrevista está integralmente transcrita ao final do trabalho, nos Apêndices.

O contato com o professor P2 aconteceu de forma muito semelhante ao contato que fiz com o professor P1, pois nos encontrávamos na sala dos professores com frequência. Quando conversei com ele sobre minha ideia de assistir a algumas aulas e realizar também uma entrevista posteriormente, uma identificação espontânea aconteceu: o professor P2 é mestre em ensino de matemática e, para sua dissertação, realizara 8 entrevistas. De imediato, ele se prontificou a realizar a entrevista pessoalmente, em um horário que combinaríamos depois. Assim, na mesma semana em que assisti às aulas do professor P1, entrei em contato com o professor P2 para lembrá-lo do que já havíamos combinado e para que ele me passasse os horários.

Pude acompanhar uma semana de aulas dele e, portanto, uma sequência didática a respeito justamente da aproximação de raízes quadradas não exatas para números racionais. Acompanhei 2 turmas distintas. Nessas aulas, o professor P2 transformou o breve conteúdo do livro em um processo dinâmico, partindo de resoluções de raízes quadradas exatas para, depois, explicar sobre as aproximações que desejava ensinar. Isso demonstrou para os alunos que o conteúdo seria útil não apenas para localizar as raízes não exatas na reta numérica (algo de natureza mais abstrata), mas também para ganhar uma habilidade de determinar mentalmente, com um pouco de prática, os resultados de raízes quadradas exatas. Para além dos cálculos manuais, o professor P2 criou uma maneira de auxiliar as crianças do 8º ano a estruturar uma sequência de cálculos que poderia ser feita mentalmente, atraindo-as para o conteúdo.

O processo que aqui menciono está descrito com mais detalhes no Capítulo 8, mas segue um resumo, pensando em radicandos de $4$ algarismos: primeiro, o aluno deve separar o radicando em duas partes, uma com os últimos algarismos (unidade e dezena), e a outra com os primeiros (centena e unidade de milhar); depois, observando os primeiros algarismos, vai determinar em qual dezena se encontra a raiz; em seguida, observando o último algarismo do radicando, vai determinar com quais algarismos a raiz pode terminar; e por fim, vai escolher qual das duas opções se adequa melhor para o resultado, observando novamente os primeiros algarismos e de qual dezena a raiz se aproxima mais.

Um exemplo: $\sqrt{3844}$. Separando o radicando, temos $38$ e $44$. O número $38$ está entre $36$ e $49$, cujas raízes quadradas são $6$ e $7$; então, $\sqrt{3844}$ será um número entre $60$ e $70$. O número $3844$ termina com $44$, sendo o último algarismo o $4$, então sua raiz quadrada só pode ser um número terminado em $2$ ou $8$; portanto, $\sqrt{3844}$ é $62$ ou $68$. Como a primeira parte do radicando se aproxima mais de $36$ do que de $49$, esta raiz quadrada se aproxima mais de $60$ do que de $70$; sendo assim, $\sqrt{3844} = 62$, partindo da premissa que a raiz seria exata.

Essa sequência de cálculos foi ensinada primeiro. Quando os alunos conseguiam, mentalmente e seguindo tal método, o valor correto de raízes quadradas exatas, eles se sentiam como uma calculadora (segundo relatos colhidos no momento), o que os deixou muito animados e estimulados. Essa habilidade adquirida foi assim associada ao cotidiano deles, tornando o aprendizado mais ativo e o conteúdo mais palpável. Mesmo quando utilizado para descobrir apenas o valor de raízes exatas, o método não perde a conexão com o conteúdo seguinte. Afinal, para localizar uma raiz quadrada não exata na reta numérica, é necessário saber entre quais quadrados perfeitos consecutivos seu radicando se encontra. Ou seja, essa ideia levou a outra análoga, mas agora não necessariamente com raízes exatas.

Em seguida, o professor P2 ensinou sobre a aproximação de raízes não exatas com uma casa decimal de maneira similar à que pode ser verificada nas aulas do professor P1: localizando o radicando entre dois números quadrados perfeitos consecutivos e depois, ensinando-os a descobrir qual a primeira casa decimal que seria utilizada, deixando claro que as aproximações sempre seriam feitas por falta.

Por fim, depois das aulas assistidas, foi realizada uma entrevista com as mesmas perguntas feitas para o professor P1. Essa entrevista aconteceu presencialmente, na própria sala dos professores da escola E1, após o horário de trabalho. A transcrição está nos Apêndices.

Todas essas partes da pesquisa, com os devidos detalhes, foram apresentadas para a banca do exame de qualificação no início de 2020. Naquele primeiro projeto também havia ponderações minhas a respeito de outros textos de práticas educacionais que, na minha opinião naquele momento, poderiam ser de auxílio para uma análise mais embasada a respeito das aulas que foram assistidas. Na banca, porém, foi-me apontada a necessidade de focar em um viés de estudo, e portanto, em uma dessas fontes, para analisar as aulas e as entrevistas feitas com o aprofundamento desejado e de maneira mais proveitosa e interessante.

Também foi aconselhada no exame de qualificação uma pesquisa maior em literatura a respeito dos números irracionais, bem como uma extensão das explicações a respeito das diferentes características desse conjunto em comparação aos conjuntos dos inteiros ou dos racionais, ambos objetivos que segui e tentei descrever no capítulo 6.

O meu interesse, desde o exame de qualificação, era continuar com esse mesmo processo de coleta de dados, mas conduzi-lo em seguida em aulas com a introdução do conjunto dos números irracionais. Saí da banca de qualificação me sentindo orientada a respeito dos próximos passos e sabendo que ainda havia bastante para ser pesquisado e coletado. Porém, no mesmo ano de 2020, junto a mudanças na minha realidade pessoal (de emprego e de moradia), a pandemia do Coronavírus alterou completamente a vida no mundo e com isso, também a maneira com que as aulas foram ministradas nas escolas de educação básica. Minha rotina tornou-se tão complicada pela minha carga de trabalho e pelo peso do isolamento social voluntário, que não tive condições de continuar minha pesquisa naquele ano.

No ano de 2021, a escola em que eu então trabalhava, que a partir de agora chamarei de E2, começou o ano com rodízio presencial de alunos. Na época, metade dos alunos ficavam em casa assistindo aula on-line enquanto a outra metade, da mesma turma, estava em sala; e os grupos iam trocando dia a dia. Isso durou apenas algumas semanas, pois, mesmo que em sala as crianças usassem máscaras e respeitassem o distanciamento social, os alunos começaram a se contaminar e logo o número máximo permitido pelo protocolo escolar foi atingido, fazendo com que voltássemos ao modo completamente remoto por cerca de um mês. Após esse período, o rodízio voltou e com a vacinação, as crianças puderam estar em sala todas juntas no final do ano.

As aulas que assisti nesse ano na escola E2, escola particular da cidade de Santo André, aconteceram exatamente nessa primeira transição. Ou seja, assisti a algumas aulas presencialmente, em que metade dos alunos estava online, e depois, assisti às aulas seguintes também online, com todos os alunos nessa condição.

Na escola E2, no 8º ano, os alunos têm 3 aulas por semana de Álgebra, uma das frentes de matemática, e 2 aulas por semana de Geometria, a outra frente. O conteúdo dos números irracionais foi introduzido na frente de Álgebra, e pude assistir 3 aulas em cada uma das 2 turmas do período da tarde, ministradas por uma professora, que será chamada de P3 a partir de agora. Escolhi as turmas da tarde por conta da minha disponibilidade pessoal.

Na primeira aula assistida, a professora P3 utilizou uma atividade prática motivadora em que os alunos, tanto em sala quanto em casa, deveriam desenhar dois quadrados de lado $2\,cm$ numa folha sulfite (utilizando régua, mas sem compasso ou transferidor). Depois, eles deveriam traçar uma diagonal de cada quadrado e destacá-la com uma caneta marca-texto. Em seguida, eles recortaram os dois quadrados e depois, os cortaram ao meio, pela diagonal que haviam destacado. Todos esses materiais haviam sido pedidos pela professora antecipadamente.

Todos os alunos terminaram esse processo com 4 triângulos idênticos. Em seguida, eles uniram os 4 triângulos para formar um quadrado com lado igual à medida da diagonal destacada inicialmente. O novo quadrado era, então, a soma dos dois quadrados que haviam sido desenhados, tendo, portanto, área $8\,cm^2$. Isso significa que a diagonal do quadrado de lado $2\,cm$ deveria ter uma medida que, ao ser multiplicada por si mesma, resultasse em 8.

Por fim, os alunos mediram com a régua o tamanho deste lado e multiplicaram o número encontrado por ele mesmo. Nenhum deles chegou exatamente na medida 8. Essa motivação iniciou a discussão a respeito de uma limitação dos números racionais para representar uma medida que as crianças haviam construído.

Na aula seguinte, a professora já se ocupou de definir o conjunto dos números irracionais como o conjunto de todos os números que não são racionais e que são representados por dízimas não periódicas. É importante aqui ressaltar que anteriormente a esse estudo, ela já havia trabalhado dízimas periódicas e suas frações geratrizes, conectando essas definições aos números racionais.

A professora P3, também nessa segunda aula, destacou algumas propriedades do conjunto dos números irracionais, relacionando as dízimas não periódicas com a atividade prática descrita. Foi concluído que o número que deveria ser elevado ao quadrado para obter 8, presente na construção que os alunos haviam feito, deveria ser uma dessas dízimas não periódicas. Uma das propriedades destacadas dos números irracionais foi que o conjunto não possui $0$, o que foi apresentado como uma curiosidade.

Em seguida, ela resolveu junto com os alunos alguns exercícios propostos no livro didático adotado pela escola E2 e seguiu a sequência didática com explicações expositivas e mais momentos de resolução de exercícios. Esse processo também é analisado com mais detalhes no próximo capítulo.

Essa metodologia me permitiu ter contato com colegas mais experientes do que eu, e também contato com suas escolhas didáticas. Ao entrevistá-los, procurei conhecer um pouco de suas visões sobre a educação e entender as motivações das escolhas feitas durante a preparação da sequência didática, e também durante a aula em si, nos exemplos utilizados, na condução das explicações do conteúdo e nas respostas às dúvidas dos alunos.

Como pesquisadora, ao assistir às aulas, pude identificar momentos valiosos em que as escolhas pedagógicas dos professores entraram em cena. Relaciono-os a seguir com as definições teóricas expostas nos Capítulos 4 e 5.

# 8. ANÁLISE DAS AULAS ASSISTIDAS E DAS ENTREVISTAS REALIZADAS

Em outubro de 2019, a primeira parte prática desta pesquisa foi realizada quando assisti a aulas da introdução do conteúdo de números irracionais. No material adotado pela escola E1 havia a definição dos números irracionais, e também a localização deles na reta real. Os professores participantes dessa pesquisa e que ministraram as aulas que assisti focaram o ensino desse tópico na aproximação de números irracionais (raízes quadradas não exatas) para racionais com uma casa decimal e o relato das aulas assistidas, bem como algumas considerações sobre as entrevistas realizadas com eles, encontram-se a seguir.

## 8.1 Professor P1

As primeiras aulas assistidas foram ministradas pelo professor aqui chamado de P1, professor de 8º ano das turmas da manhã da escola E1. Nessa mesma escola, as outras aulas foram ministradas pelo professor P2, professor das turmas de 8º ano da tarde. A escola E1 tem duas unidades, mas ambos os professores P1 e P2 trabalhavam na mesma unidade, única que participou da pesquisa. Mesmo assim, como será visto, as abordagens do conteúdo foram distintas, e de acordo com algumas concepções pessoais dos professores observados.

Assisti a 5 aulas do professor P1, todas na mesma manhã e em turmas diferentes. Todas as aulas foram semelhantes, começando com um exemplo da aproximação de uma raiz quadrada realizado em lousa, seguindo com a correção de uma lição de casa a respeito do conteúdo e terminando com o início do tópico seguinte da matéria.

Como mencionado no capítulo anterior, houve um problema de comunicação entre mim e o professor P1 sobre as datas das aulas e as possibilidades de meu acompanhamento, então não consegui assistir às aulas de introdução do conteúdo, nem acompanhar uma sequência didática. Apesar disso, a pertinência das aulas para a pesquisa se mantém, já que este ainda é o primeiro contato dos estudantes com os números irracionais.

A seguir, relato com detalhes um dos exercícios feitos em lousa e que pude observar. Inicialmente, o professor mencionou que eles iriam realizar a aproximação de uma determinada raiz quadrada juntos, em caráter de revisão do conteúdo – até por ser uma aula de conclusão do assunto. O número $\sqrt{113}$ foi usado em uma das salas. É possível que as escolhas tenham sido arbitrárias, mas também é possível que já neste ponto, tenha havido uma escolha consciente do professor, reconhecendo diferenças entre cada turma em que ele P1 estava. A confirmação destas hipóteses não foi feita na entrevista porque são detalhes de análise das aulas que me surgiram apenas depois.

Ainda sobre a condução da resolução do exemplo junto com a turma, desde o primeiro momento estava posto que a raiz quadrada dada deveria ser aproximada para um número "decimal"; não houve investigação inicial para compreender se o número era, ou não, irracional. Atribuo isso a um pequeno conjunto de fatores: o tempo de aula, o andamento do conteúdo, a necessidade de focar em um objetivo específico (a técnica ensinada para realizar a aproximação) e também suponho ser possível que esta discussão já tivesse sido feita anteriormente, nas primeiras aulas sobre o conteúdo, podendo ser, na visão do professor P1, dispensada naquele momento.

Também foi notada ênfase no termo "decimal" em vez de "racional", de maneira que a representação decimal infinita daquela raiz praticamente não foi considerada. Novamente, uma escolha que ao meu ver, foi feita em razão do foco na técnica de resolução e do tempo que estava disponível naquele momento. Outra possibilidade é que tenha sido uma escolha de palavras que buscava aproximar o conteúdo matemático do vocabulário mais usual do aluno, omitindo que deveria ser um decimal racional. Sendo esse o caso, e sendo uma escolha consciente do professor, pode-se caracterizar esse saber como um *Conhecimento Especializado de Conteúdo*, pois tem como objetivo o ensino de um tópico específico em aula e é oriundo de um pensamento matemático característico do professor. Ainda, pode-se chamar atenção para a utilização ou não desses termos, para o caso de induzirem a possíveis erros no futuro – como, por exemplo, o aluno associar representações decimais sempre a números racionais, e os números irracionais a representações com outros símbolos, como raiz quadrada.

Voltando ao exemplo da $\sqrt{113}$. O professor P1 colocou o número na lousa e disse para a sala que iam aproximá-lo para um número de representação decimal com uma casa "depois da vírgula". Ele perguntou, a seguir, entre quais números inteiros essa raiz deveria estar, estando subentendido que os alunos deveriam pensar em números inteiros e consecutivos. O exemplo $\sqrt{113}$ é um número entre 10 e 11 e então, o professor escreveu o seguinte em lousa:

$$100 < 113 < 121$$
$$\sqrt{100} < \sqrt{113} < \sqrt{121}$$
$$10 < \sqrt{113} < 11$$

É possível observar na entrevista (transcrita no Apêndice A) a importância que o professor P1 dá ao reconhecimento dessas sentenças matemáticas, quando explica como justifica o ensino desse conteúdo aos alunos: *"(...) eu justifico afirmando a importância das raízes não exatas até mesmo pela prática de lidarmos com os limitantes superiores e inferiores (quadrados perfeitos)"* (Apêndice A). A partir dessa frase, pode-se compreender tanto a importância das raízes não exatas em si, que ajudam a completar a reta numérica real, quanto a conexão que há entre elas e os quadrados perfeitos, que são números racionais com raízes exatas e que os alunos já conhecem.

Na aula, a conclusão seguinte era de que a aproximação seria do tipo "10 vírgula 'alguma coisa'". Em seguida, ele perguntou qual seria a primeira "tentativa", e alguns alunos lembraram e concordaram que uma "boa estratégia" seria começar calculando $(10,5)^2$. Isso porque, pensando nas possibilidades de resposta deste exercício em ordem crescente, 10,5 está exatamente no meio. Os termos aqui entre aspas foram utilizados pelo professor P1. O resultado da potência $(10,5)^2$ seria comparado com o 113 e, sendo maior ou menor do que ele, a aproximação da $\sqrt{113}$ seria menor ou maior do que 10,5.

A participação dos alunos foi sempre solicitada pelo professor na aula. Não foi possível perceber apenas por essa observação se a caracterização de "boa estratégia" para o cálculo inicial de $(10,5)^2$ foi algo construído em sala durante as explicações ou pontuado diretamente pelo professor. Menciono isso porque apenas alguns alunos responderam em voz alta sobre essa parte da resolução, então o professor P1 reforçou a ideia de que era uma boa forma de iniciar a localização do número na reta, pelos motivos que mencionei no parágrafo anterior.

Aqui é interessante retomar mais uma resposta da entrevista do professor P1. Ele afirmou que trabalha com os alunos *"a ideia de que entre dois números inteiros quaisquer existem infinitos números racionais e irracionais"* (Apêndice A), reforçando, em análise, que é com esses dois conjuntos numéricos que se tem a completude da reta real. Sendo assim, é interessante pensar que para localizar uma raiz não-exata nesse método do professor P1, é preciso entender os números racionais que existem entre dois inteiros consecutivos, para depois calcular uma aproximação correta e só depois localizar satisfatoriamente o número irracional.

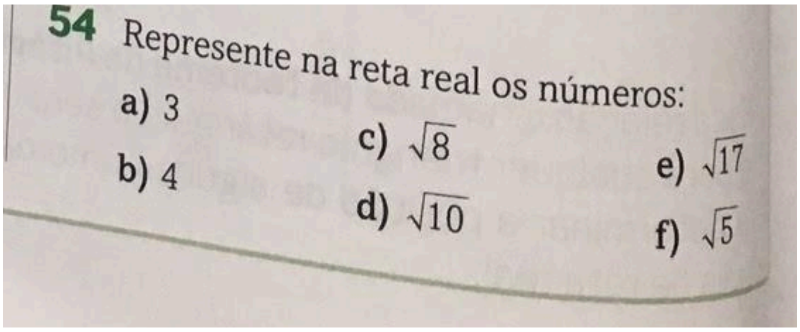
O resultado de $(10,5)^2$ é $110,25$, que é menor do que $113$. Assim, a aproximação que era buscada estava entre $10,5$ e $11$: $10,5 < \sqrt{113} < 11$. Esta sentença não foi escrita pelo professor P1 em lousa, já que o foco eram os cálculos de multiplicação. Continuando o processo, utilizando tentativa e erro, o cálculo feito em sequência foi $(10,7)^2$. O valor $10,7$ foi escolhido por um motivo semelhante ao da escolha do $10,5$. Pensando nas possibilidades de resposta entre $10,5$ e $11$, o número $10,7$ é o mais próximo, por falta, da metade do intervalo (com apenas uma casa decimal).

O valor de $(10,7)^2$ é $114,49$, um número maior do que $113$ e portanto, $10,5 < \sqrt{113} < 10,7$. Neste ponto, o professor P1 ressaltou mais uma vez que a aproximação que estavam procurando só precisava ter uma casa decimal e que seria sempre feita *por falta*, ou seja, o valor da aproximação elevado ao quadrado não poderia ser maior que $113$.

Conferindo apenas se $(10,6)^2$ não ultrapassa $113$, foi calculado $(10,6)^2 = 112,36$. Assim, $10,6$ é a aproximação buscada.

Terminado o exemplo, em todas as turmas se seguiu a correção do exercício $54$ da lição de casa, que está registrado a seguir:

Figura 10: Imagem com o exercício corrigido nas aulas observadas do professor P1.



**54** Represente na reta real os números:

a) 3
b) 4
c) $\sqrt{8}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\sqrt{17}$
f) $\sqrt{5}$

Fonte: Matemática Compreensão e Prática 8 (2019).

Após o cálculo das aproximações necessárias para os itens c ao f, o professor desenhou a reta real para localizar todos os números do exercício. Citando mais uma vez a entrevista, o professor P1 relatou que planeja essas aulas justamente focando na *"localização numérica na reta real, e em como tratarmos dos números com infinitas casas decimais não periódicas (irracionais)."* (Apêndice A). É interessante perceber que esse pensamento e a proposta do material já coincidiam com o que é mencionado atualmente na BNCC. Por essa frase também pode-se supor que houve a exposição e talvez a discussão das dízimas não periódicas em sala, característica importante dos números no conjunto dos irracionais.

Pelas aulas que assisti, pude aferir que os alunos compreenderam que o processo da aproximação para um número racional é necessário para que seja possível localizar uma raiz quadrada não-exata na reta real. O professor mencionou na entrevista que:

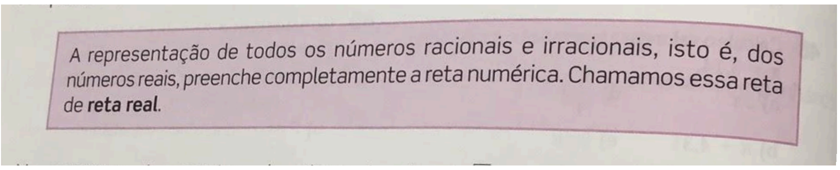
> Faço aquele esquema utilizando a representação geométrica (desenho geométrico), mostrando com a figura que $\sqrt{2}$ está no intervalo entre os inteiros 1 e 2. Acredito muito na importância do visual (figuras) para o entendimento da parte algébrica. (Professor P1, 2024, Entrevista concedida a Isabel Bonacella, Apêndice A)

Assim, sabemos que os alunos tiveram contato com uma localização exata de um número irracional na reta numérica, algo que pode tornar mais palpável o fato de que, sem os números irracionais, a reta real é incompleta.

É interessante retornar às propriedades dos números irracionais, no Capítulo 6, e pontuar que os números irracionais que não são construtíveis também possuem uma localização exata na reta real. Por mais que a representação desses números, na reta real, recorra a uma aproximação, devido à limitação da ilustração da reta, existe um ponto para cada número irracional, como é feito por Ripoll, (2005) e mencionado na seção 6.5 desta pesquisa.

Observo, ainda, que no material, a motivação é também a completude da reta numérica, como pode ser notado nas imagens a seguir:

Figura 11: Introdução do conteúdo da reta real, mencionando que só os números racionais não são suficientes para cobrir toda a reta numérica.



A representação de todos os números racionais e irracionais, isto é, dos números reais, preenche completamente a reta numérica. Chamamos essa reta de **reta real**.

Fonte: Matemática Compreensão e Prática 8 (2019).

Também perguntei ao professor P1 a respeito das dúvidas que ele observava quando dízimas periódicas apareciam nos exercícios e se ele notava diferenças nas perguntas depois que ensinava sobre frações geratrizes (Apêndice A). A minha intenção inicial era tentar conectar essas possíveis observações do professor P1 para relacionar às dúvidas que eu já observara como professora de 9º ano com relação aos irracionais (dízimas não periódicas), mas por fim, isso não foi expandido na entrevista e nem observado nas aulas. Ainda assim, vale a menção aqui para esclarecer a estrutura original das entrevistas.

Pondero que, para realizar as quatro operações básicas com dízimas periódicas corretamente, é preciso transformá-las nas frações geratrizes. Já no caso dos números irracionais, os caminhos são diversos: a operação pode ficar apenas indicada (como $\sqrt{2} + \sqrt{3}$), na multiplicação existe uma propriedade que permite uma parte dos cálculos se os irracionais forem raízes de mesmo índice (como $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{30}$), pode ser que seja conveniente transitar pelo uso das aproximações ( $\sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq 1,4 + 1,7 = 3,1$, por exemplo), pode ser preciso fatorar raízes não exatas, racionalizar o denominador e, mesmo assim, não chegar a um número familiar aos alunos. No caso de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, os alunos podem sentir que ainda "falta" efetuar uma conta, ou imaginar que é um valor próximo de 5 (resultado de 2 + 3), questões que observei durante 2018 e minhas aulas para o 9º ano.

Essa discussão está aqui para propor uma breve reflexão sobre esses aspectos. Durante todos os anos escolares em que os alunos realizam operações com os números racionais, quando há o número 2, de alguma forma a quantidade 2 é de fato representada. Porém, ao se deparar com $\sqrt{2}$ e ao utilizar o recurso da aproximação, o aluno poderá observar como os valores aproximados de $\sqrt{2}$ ao serem elevados ao quadrado *não* chegarão exatamente em 2. Essas considerações são importantes para o professor que irá ensinar esses conteúdos aos seus alunos.

Na entrevista, o professor P1 ainda relacionou esses *Conhecimentos* a um Projeto de Resolução de Problemas de que ele participou durante a graduação e que foi aplicado nas escolas de Londrina, razão pela qual poderíamos supor que a resolução de problemas também apareceu em suas aulas anteriores sobre números irracionais. Uma possibilidade é que ele pode ter apresentado o conteúdo através de um problema centrado na localização dos números irracionais na reta, podendo ou não ter contexto no cotidiano.

Por fim, nas aulas assistidas, quando terminou a correção do exercício da Figura 10, o professor concluiu o assunto e passou ao tópico seguinte, que era de relações métricas na circunferência.

## 8.2 Professor P2

Com o professor P2, também em 2019, pude acompanhar três aulas (uma sequência didática) em cada uma das duas turmas do 8º ano da tarde na escola E1. O relato detalhado está a seguir.

Como motivação, o professor P2 propôs um desafio: que os alunos utilizassem calculadoras, inclusive do celular, para descobrir números quadrados perfeitos de 4 algarismos cujas raízes ele, o professor, adivinharia. Depois de alguns minutos nessa espécie de jogo, o professor havia adivinhado corretamente todas as raízes. Impressionados, os alunos se interessaram em saber como ele fez as contas mentalmente, e o professor P2 explica então um algoritmo que ele chama de “ETA”, que são as iniciais das palavras “Entre”, “Termina” e “Aproxima”. Observe o exemplo:

Questão: Quanto é $\sqrt{1296}$?

Resolução pelo “método ETA”:

1. O aluno deve primeiro dividir o número de quatro algarismos em dois blocos de dois algarismos: nesse caso, $12$ e $96$. Números de três, cinco ou mais algarismos não são mencionados nesse momento.
2. Em seguida, vem o primeiro passo do “ETA”: “Entre”. O aluno vai focar nos dois primeiros algarismos e, sabendo os quadrados perfeitos até $100$, pensar **entre** quais dois números quadrados perfeitos consecutivos está o número $12$. No caso, $12$ está entre $9$ e $16$, cujas raízes são $3$ e $4$. Assim, $1296$ está entre $900$ e $1600$ e portanto, $\sqrt{1296}$ está **entre** $30$ e $40$.
3. Em seguida, vamos ao passo da letra T: “Termina”. O aluno deve ver com qual algarismo **termina** o radicando: $6$. Se um número quadrado perfeito termina em $6$, sua raiz quadrada **termina** em $4$ ou $6$. Assim, conclui-se que $\sqrt{1296}$ é $34$ ou $36$ (parte-se da premissa de que a raiz é exata).
4. O último passo é referente à letra A: "Aproxima". De qual dos quadrados perfeitos pensados inicialmente o radicando $1296$ se **aproxima** mais: $900$ ou $1600$? Como $1296$ está mais próximo de $1600$, $\sqrt{1296}$ estará mais próxima de $40$ do que de $30$, sendo então igual a $36$.

Sendo descrito com detalhes, o processo pode parecer longo, mas com um pouco de prática, se torna ágil e, para os alunos, até mágico. Conhecimentos anteriores que são necessários para que o aluno utilize o "ETA" aparecem nos dois passos 2 e 3 acima: deve-se saber os quadrados perfeitos (q.p.) até $100$, que quadrados perfeitos de 4 algarismos possuem raízes quadradas de 2 algarismos, e saber da relação que o último algarismo dos números quadrados perfeitos tem com sua raiz:

| $\acute{U}ltimo\ algarismo\ do\ n\acute{u}mero\ q.p.$ | $\acute{U}ltimo\ algarismo\ de\ sua\ raiz\ quadrada$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $1\ ou\ 9$ |
| $4$ | $2\ ou\ 8$ |
| $9$ | $3\ ou\ 7$ |
| $6$ | $4\ ou\ 6$ |
| $5$ | $5$ |

Quadro 2: Elaborado pela autora (2024).

Esse processo captou o interesse dos alunos, pois o professor conseguiu adivinhar qual número eles digitaram na calculadora para descobrir os quadrados perfeitos. Assim, os alunos dispõem-se a entender quais cálculos mentais o professor fez para poderem fazer também e, no processo, percebem e aprendem mais propriedades sobre quad

Depois de o professor P2 explicar o "ETA", os alunos participam de uma rodada competitiva de "adivinhação" (via cálculo mental) de algumas raízes quadradas de números de quatro algarismos, que agora o professor questiona

A respeito dessa dinâmica, do "ETA", o professor P2 respondeu em entrevista:

> Faz muito mais sentido para eles até depois, quando estão resolvendo exercícios [do livro]. Eles percebem que quando eles armam as contas, resolvem 3 exercícios durante uma aula inteira e dessa maneira, eu consigo fazer 15 e eles estão muito mais envolvidos. (Professor P2, 2024, Entrevista concedida a Isabel Bonacella, Apêndice A).

De maneira dinâmica e animada, esses alunos estão assimilando uma nova forma de pensar o cálculo de raízes quadradas que, quando funciona perfeitamente, fornece a raiz quadrada de um número quadrado perfeito; e, quando não funciona perfeitamente, fornece a informação de que aquele número não é quadrado perfeito [27].

O passo a passo do "ETA" foi registrado no caderno e esta foi a primeira aula

[27] Este fato é aqui mencionado para o leitor e abordado com mais detalhes na página seguinte. Mas não foi citado pelo professor P2.

observada nas duas turmas. Depois, na aula seguinte, de maneira muito similar a do professor P1, o professor P2 conduz sua aula sobre aproximações baseando-se nos quadrados perfeitos cujas raízes são números naturais consecutivos.

A respeito do conteúdo de aproximação das raízes não exatas, o professor P2 respondeu em entrevista:

> Faz parte e eu preciso dar. É realmente para cumprir, tanto que são poucas aulas sobre isso e a gente faz poucos exercícios sobre o assunto. Até porque, quando a gente fala sobre essas raízes, elas estão no conjunto dos números irracionais e existem outros números no conjunto e que a gente não pode passar, então é um caso muito específico de números irracionais que eles conseguem ver, e eu não vejo como *prático* para eles. (P2, 2024, Entrevista concedida a Isabel Bonacella, Apêndice A)

A partir dessas colocações, algumas considerações são importantes. Primeiro a de que o conteúdo é passado de forma fugaz, apenas para dar conta do tópico que consta no livro, e sendo assim, acaba não sendo visto pelo professor como uma importante introdução a um conjunto numérico que será estudado no ano seguinte.

De fato, pelo relato feito no capítulo anterior, em questão de dias perdi a oportunidade de ver essas aulas do professor P1, o que me faz compreender que ele também aborda o conteúdo de forma rápida e pontual.

Segundo: o foco no procedimento, nos cálculos, que também pode ser observado nas aulas do professor P1. O professor P2, utilizando a ferramenta da calculadora, e focando primeiramente em quadrados perfeitos, captou o interesse dos alunos, que conseguiram descobrir respostas exatas com cálculos mentais. Depois, ele passou para o cálculo aproximado, tendo como motivação os números que não são quadrados perfeitos. Como disse em entrevista: *"(...) eu acabei traçando uma relação, então para eles é quase que uma continuação. Eles não veem como outro conteúdo"* (Apêndice A).

Terceiro: nas aulas do professor P2 é notável a conexão que é feita entre os números racionais e irracionais ao abordar esse conteúdo. Essa conexão também foi observada nas aulas do professor P1. Ao captar o interesse dos alunos com o "ETA", o professor P2 utilizou números racionais para abrir o caminho para a compreensão do motivo de utilizarem as multiplicações para as aproximações que deverão fazer.

Na escola E1, não é permitido utilizar calculadora nas provas, então os cálculos nas aulas seguintes e nas avaliações teriam que ser feitos sempre à mão. Sobre isso, o professor P2 disse: *"eu acho desgastante para eles. Mas eu acho que é importante eles perceberem o processo"* (Professor P2, Apêndice A).

Observe, agora, outra aplicação do método "ETA", porém com uma raiz quadrada que já adianto ser não exata: $\sqrt{7434}$. Pensando na perspectiva do aluno do 8º ano, é provável que ele não saiba, apenas olhando para este radical, se a raiz é exata ou não. Então, vamos começar a aplicar o método do professor P2.

Separando o radicando, temos $74$ e $34$. O número $74$ está entre $64$ e $81$, cujas raízes quadradas são $8$ e $9$; então, $\sqrt{7434}$ está entre $80$ e $90$. O número $7434$ termina com $34$, sendo o último algarismo $4$, então a $\sqrt{7434}$ só poderia ser $82$ ou $88$. Como $7434$ está mais próximo de $8100$ do que de $6400$, a raiz seria $88$.

Muitos estudantes poderiam, então, parar por aqui. Porém, calculando $88^2$, temos $7744$. E algumas perguntas que podem seguir são: será que o processo do professor P2 precisaria de mais um passo, o de conferir o resultado? E se não desse certo, além de concluir que a raíz não é exata, como prosseguir para uma possível aproximação?

Essas questões, como outras já mencionadas, ocorreram-me só depois, por isso não foram mencionadas na entrevista com o professor P2. Mas é algo que pode ser observado também nos exemplos nas aulas do professor P1: não fica a cargo do aluno descobrir a natureza daquele número. Ao serem apresentados, nesse ponto da matéria do 8º ano e nas poucas aulas que eu assisti, às raízes quadradas, os alunos já são informados pelos professores se as raízes são exatas ou não – se são números racionais ou irracionais.

Algumas suposições me vêm à mente: os professores se vêem sem tempo de abordar essa discussão, enquanto têm uma responsabilidade maior em "cumprir" o conteúdo do livro; os professores pensam que essa discussão não seria valorosa nesse momento; ou, simplesmente, esse pensamento não lhes ocorreu, por julgar que, ao trabalharem com radicandos menores nos exercícios seguintes, os alunos já teriam memorizado aqueles que são quadrados perfeitos.

A essas suposições, podemos associar diferentes Conhecimentos de Ball; Thames; Phelps (2008). Ao julgar que "não há tempo" para abordar o conteúdo de outra forma, o professor utiliza seus *CEC* mas também o *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo*, e toma a decisão, como visto, de organizar uma sequência didática para este tópico que ocupe apenas uma semana de aulas, ou até menos. Se observa que determinada discussão é mais ou menos valorosa para uma turma, utiliza seus *CEC* para focar nos aspectos matemáticos mais importantes e muitas vezes, dentro dessas escolhas, tem em mente o *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte*, para não deixar de preparar seu aluno para os próximos tópicos matemáticos que estudará. Se assumir que os alunos de 8º ano já conhecem os quadrados perfeitos até 100, pode até estar considerando este um *CCC* e une isso a seus *CEC* para planejar a introdução do conteúdo com uma determinada quantidade de informações.

Essa associação aqui descrita não pretende ser absoluta e nem única, mas apenas uma das possibilidades de caracterizar os Conhecimentos do professor P2 ao preparar e ministrar suas aulas. Quanto ao professor P1, é notável que manifesta uma questão semelhante à do professor P2 com relação ao Currículo, ambos mostrando que o *CEC* aparece associado ao *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo* em seus cotidianos na escola E1.

Como levantado por Ball; Thames; Phelps (2008), essas divisões sobre qual Conhecimento está sendo acionado em cada momento podem ser sutis, às vezes dúbias[28] e como as aulas são sempre muito dinâmicas, reconhecer as estreitas divisões entre esses domínios de Conhecimentos pode, em verdade, valorizar o trabalho intricado dos professores.

É importante voltar ao exercício 54 (Figura 12) do material adotado pela escola (e trabalhado em sala por ambos os professores), que pede a localização dos números na reta. Com efeito, todos os radicandos do exercício são menores do que 20, números que os alunos vêem com tanta frequência na escola que poderiam ser

[28] "Nem sempre é fácil discernir onde uma categoria se diferencia da outra (...)" (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403 – Tradução livre) Original: "It is not always easy to discern where one of our categories divides from the next (...)." (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 403)

facilmente reconhecidos como quadrados perfeitos, um possível argumento para abreviar a discussão. Isso se contrapõe, todavia, aos exemplos escolhidos e utilizados pelos professores em sala, com números de 3 e 4 algarismos, tornando ainda mais importante pensar aqui na discussão sobre $\sqrt{113}$ ou $\sqrt{7434}$ serem irracionais.

Sugiro, então, um caminho para aproximar $\sqrt{7434}$ e localizá-la na reta numérica, conectando ambas as formas de abordar o conteúdo dos professores P1 e P2. Após conferir o resultado do "ETA", como $88^2 = 7744 > 7434$, vamos calcular $87^2$ e descobrir o resultado. O número $87^2$ terminará em $9$, sendo impossível resultar em $7434$; de fato, $87^2 = 7569$, mas o objetivo agora não é adivinhar o valor da raiz quadrada, e sim, fazer a aproximação desejada.

Como ainda $7569 > 7434$, pode-se pensar em calcular $86^2 = 7393$. O objetivo é localizar $7434$ entre dois números quadrados perfeitos consecutivos. Obtemos então, $86 < \sqrt{7434} < 87$ e agora, seguindo o observado nas aulas do professor P1, vamos calcular $86,5^2 = 7482,25$. Assim, $86 < \sqrt{7434} < 86,5$. Calculando, em seguida, $86,2^2 = 7430,44$ e $86,3^2 = 7447,69$, temos $86,2 < \sqrt{7434} < 86,3$. Considerando uma aproximação "por falta", então conclui-se que $\sqrt{7434} \simeq 86,2$.

Mais uma consideração importante a respeito da sequência didática do professor P2: a ausência de construções geométricas, em particular a do número $\sqrt{2}$, que é ilustrada no material didático e segundo entrevista (Apêndice A), feita pelo professor P1.

Em entrevista, o professor P2 disse, sobre a localização exata da $\sqrt{2}$ na reta: "(...) eu comento de maneira muito breve, mas eu não reproduzo e não peço para eles fazerem. Eu falo assim 'Olha, gente, isso aqui tem como fazer no 9° ano'', porque não é nem matéria do 8°(...)" (Professor P2, Apêndice A). Em contrapartida, diz em seguida: "(...) se eu não falar, talvez ninguém nunca mais fale" (Professor P2, Apêndice A).

Na construção da $\sqrt{2}$ (ou na ausência dela), pode-se ver um exemplo de uma diferença concreta no uso que cada professor faz de seus *Conhecimentos Especializados*.

Nota-se, portanto, que o professor P2 sabe construir a $\sqrt{2}$ e localizá-la na reta (ambas habilidades que podem ser caracterizadas como *CCC*), entende como a menção disso pode auxiliar no ensino que está realizando de números irracionais e decide mencioná-la por mais que não seja, segundo ele, "matéria do 8º"[29] (*CEC*). Ainda, sente-se compelido a limitar esse conteúdo a essa única menção, pois seu *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo* mais uma vez se impõe. Ao mesmo tempo, o professor P1 afirma acreditar que as demonstrações geométricas fornecem imagens que auxiliam na compreensão algébrica da localização dos irracionais na reta (*CEC*), e assim sendo, não conduz a aula para mais outros tópicos dentro do assunto, como o método "ETA" ou outras possíveis formas de prática de cálculo mental. Isso também se deve ao seu *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo*, que lhe dá a noção de que não dispõe de mais aulas para tratar de irracionais no 8º ano.

Pensando novamente nas aulas do professor P2, ao tratar da localização das raízes quadradas não exatas somente através das aproximações, pode-se pensar que está sendo criada a ideia (incorreta) de que nenhuma raiz não exata pode ser localizada precisamente na reta real, podendo induzir a erros no futuro. Na realidade da escola E1, ambos os professores fizeram o que pensaram ser mais pertinente para uma compreensão correta do conteúdo com o tempo disponível no planejamento, ainda que tenham seguido caminhos diferentes.

Mais uma análise pertinente dessas aulas é que, por estarem inseridas em um mesmo contexto da escola E1 e visando não apenas seguir a BNCC, mas também preparar os alunos para os próximos anos de aprendizagem, é possível que se pense que diferentes abordagens podem advir de diferentes compreensões a respeito do que é necessário ser ensinado, ou até, diferentes compreensões sobre o *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte*. Ainda que este domínio de Conhecimento definido por Ball; Thames; Phelps (2008) não seja o foco desta dissertação, vale

[29] Pode-se afirmar que, com isso, o professor P2 procura tratar do que está ou não mencionado na BNCC. Mesmo assim, vale relembrar que a construção de um segmento de medida igual à raiz quadrada de estava no material didático de 8º ano adotado pela escola E1.

mencionar que não necessariamente seria este o caso, já que, apesar de apresentarem abordagens diferentes, ambos os professores tratam das aproximações para localizar os números irracionais na reta numérica, o que já vislumbra a completude da reta numérica, que será trabalhada no 9º ano (da escola E1).

Por fim, a respeito do método "ETA" do professor P2, cabe a reflexão, sem perda de valor, se essa maneira de iniciar o conteúdo de aproximação e localização de irracionais na reta numérica não poderia causar equívocos de aprendizado posteriormente. Isso porque o método funciona mediante condições que foram mencionadas apenas uma vez nas aulas (números quadrados perfeitos de 4 algarismos), e sustenta sua característica lúdica por fornecer valores exatos, e não aproximados, como os alunos estudam em seguida.

Apesar disso, não se pode negar que representa um *Conhecimento Especializado de Conteúdo* do professor P2. São cálculos matemáticos que, pelo observado na aula assistida, vão levar ao objetivo de aprendizado a que o professor deseja chegar e, ainda, advêm de uma forma de pensar que é 'Como eu posso ensinar este conteúdo de forma mais proveitosa?' Diz o professor P2:

> Não é sempre que eu deixo eles usarem calculadora, eu tentei implementar para eles usarem de uma maneira produtiva, então realmente faz parte e é para fugir um pouco da mesmice. A aula se torna mais dinâmica porque, além de aprenderem, os alunos acabam se divertindo, então eu gosto bastante dessa aula. Mas, antes de fazer assim, eu já tinha ensinado (acho que duas vezes) sem usar essa metodologia ou esse tipo de aula e foi muito cansativo - tanto para mim, como professor, como para os alunos. E desse jeito eu percebo que eles ficam bem envolvidos. (P2, 2024, Entrevista concedida a Isabel Bonacella, Apêndice A)

## 8.3 Professora P3

Em 2021, assisti a duas sequências didáticas da professora que aqui chamo de P3 na escola E2, localizada em Santo André. Também foram aulas das turmas de 8º ano da tarde, como no caso do professor P2. Mas, uma grande diferença para as aulas de 2019 é que, em 2021, assisti de fato às aulas de introdução do conjunto dos números irracionais para os alunos.

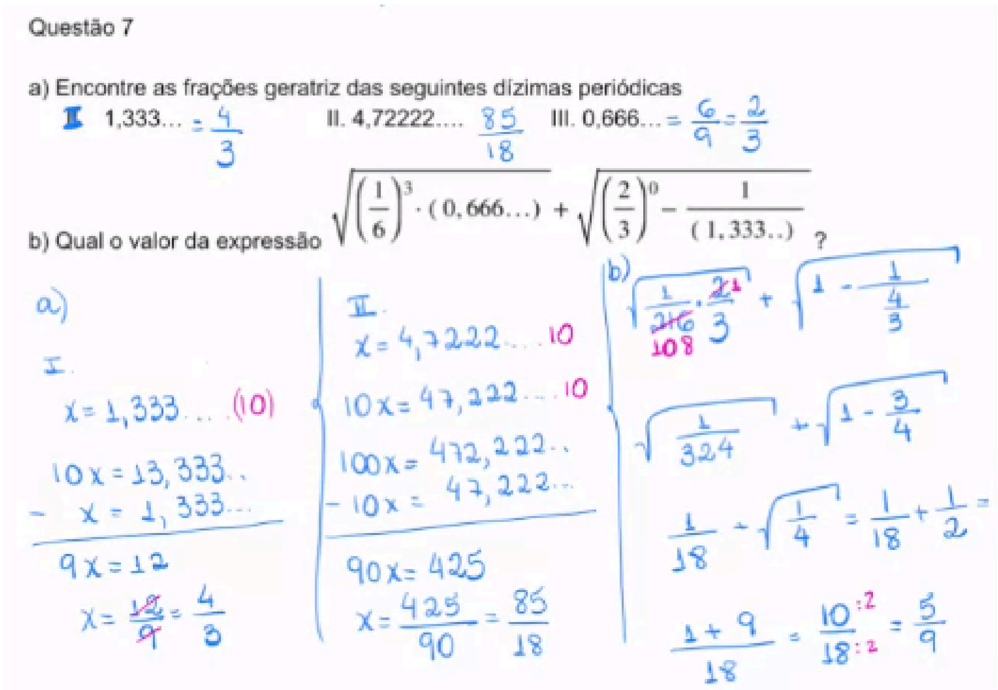
Nesse caso, além de cumprir com o ensino de um dos tópicos do livro, a professora também compreendia que se tratava de apresentar e definir um importante conjunto numérico, o dos números irracionais, e de ensinar aos alunos como realizar as operações matemáticas com tais números. Com isso, pude observar logo de imediato a relação diferente com o tempo e planejamento das aulas, em que a professora disponibilizou duas semanas (seis aulas) para a sequência didática que foi observada.

Em 2021, a escola E2 ainda funcionou em formato denominado "híbrido" no primeiro semestre. Em uma semana, metade dos alunos assistiam a aulas presencialmente e a outra metade assistia à mesma aula online (ao vivo), em casa. Na semana seguinte, os grupos trocavam.

Isso é relevante para a participação dos alunos em sala, que era frequentemente solicitada pela professora P3. Ela já iniciava a aula fazendo chamada e pedindo para que ligassem as câmeras. Com alguns alunos presencialmente em sala e ao mesmo tempo, outros online, ela se certificou diversas vezes de que todos a estavam entendendo e ouvindo. Isso pode parecer trivial em qualquer aula, mas com certeza era uma preocupação a mais para a professora, que vivenciava uma situação inusitada.

Iniciei as minhas observações também online. As aulas se iniciaram com a correção de uma avaliação, da qual destaco um dos exercícios a seguir:

Figura 12: Captura de tela de um dos exercícios corrigidos pela professora P3 em uma das aulas assistidas em 2021.




Fonte: Elaborada pela professora P3, coletada pela autora (2024).

Esta imagem mostra alguns pontos interessantes. O primeiro é o recurso digital que a professora utilizou nas aulas já caracterizadas como "híbridas". Em sala, os alunos acompanharam a explicação pelo telão, e os alunos que estavam em casa, viam a imagem destacada acima. Os cálculos mostrados em azul e rosa foram feitos durante a aula, em seu tablet pessoal, utilizado como instrumento de trabalho. Essa maneira de ensinar já era familiar à professora P3, que também trabalha em uma outra instituição de ensino (pré-vestibular), que se tornou totalmente EAD em 2020.

O segundo ponto de destaque é o conteúdo deste exercício: dízimas periódicas – e mais especificamente, transformá-las em suas frações geratrizes. Este é um conteúdo importante não apenas por serem números reais ou um tópico que compõe o livro didático, mas também, e principalmente, por serem números *racionais* (podem ser transformados em frações) com representação decimal infinita.

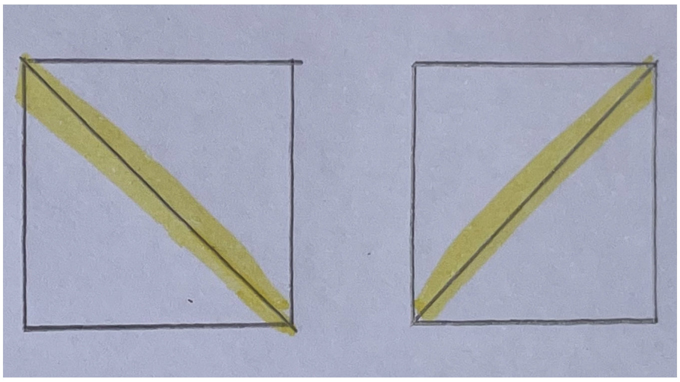
O fato de que as dízimas periódicas possuem um período é o que as caracteriza como números racionais, enquanto a característica comum de todos os números *irracionais* é que possuem representação decimal também infinita, mas não-periódica. Assim, as dízimas periódicas são o primeiro contato dos alunos com números com infinitas casas decimais e constituem, justamente por isso, um requisito importante para a compreensão dos números irracionais.

Na aula seguinte, em que foi feita a atividade de introdução do conjunto dos números irracionais, não parece que a professora P3 se sentiu podada em suas possibilidades de ensino dentro deste formato híbrido de aula – muito pelo contrário. Realizou a mesma atividade com os alunos que estavam na escola e com os em casa, atividade adaptada do próprio livro didático adotado pela escola E2.

A professora P3 pediu para que os alunos que estariam presentes em sala levassem uma folha sulfite, régua, marca-texto e tesoura, e solicitou os mesmos materiais para os alunos que estavam em casa.

Para a atividade, a professora pediu que os alunos construíssem, com a régua (e sem compasso), dois quadrados com lado medindo 2 cm. Portanto, cada quadradinho possui área $4\,cm^2$. Em seguida, pediu que traçassem uma das diagonais em cada um dos quadrados e depois a destacassem com o marca-texto. Por fim, os alunos recortaram os quadrados e depois cortaram-nos ao meio, passando a tesoura justamente pela diagonal que haviam destacado.

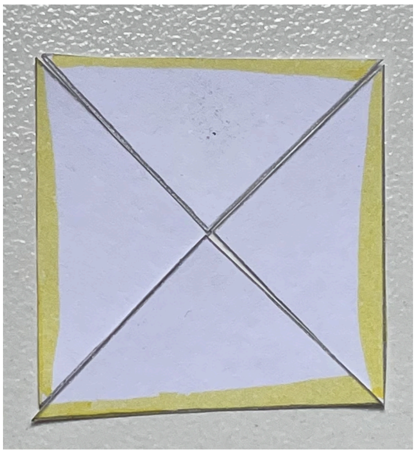
Figura 13: Ilustração dos dois quadrados que foram construídos pelos alunos.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Ao passar a tesoura sobre as diagonais, os alunos passaram a ter quatro "peças" triangulares iguais. Em seguida, a professora pediu que, com essas quatro peças, montassem um único quadrado, que ficaria contornado pelo marca-texto. Como um quebra-cabeças, seguindo esse passo-a-passo, os alunos construíram um novo quadrado com o dobro da área, ou seja $8\,cm^2$.

Figura 14: Representação da construção realizada pelos alunos, em que o quadrado de área $8\ cm^2$ foi construído, com lado igual à diagonal dos quadrados originais.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

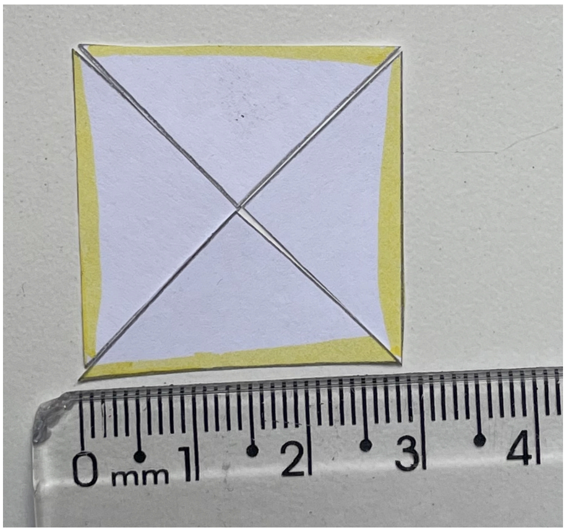
Essa atividade faz referência ao problema da duplicação do quadrado. Na Grécia antiga, esse problema foi resolvido a partir da construção geométrica da solução: para construir um quadrado com o dobro da área do original, é preciso construir um novo quadrado com lado igual à medida da *diagonal* do primeiro quadrado. Apesar de ser facilmente construído com régua e compasso, esse novo lado do quadrado "dobrado" sempre tem medida incomensurável com o lado do quadrado original - o que, para os gregos, era admirável.

Na atividade em questão, a construção não foi feita com compasso, mas também foi feita geometricamente, com um caráter menos rigoroso e mais lúdico. A professora fez uma alteração para que a atividade fosse aplicada com mais tranquilidade e aproveitamento em aula: no material didático, os quadrados iniciais possuíam lado igual a 1 cm, o que ela pensou ser muito pequeno para reproduzir com os alunos. Outro adendo importante é que esse passo-a-passo foi criado pela professora, pois, no livro, essa duplicação estava exposta com todas as figuras e os cálculos já feitos, concluindo a irracionalidade do lado do novo quadrado logo em seguida.

Em sala, a conclusão da atividade foi um pouco diferente. A professora pediu que medissem o lado do novo quadrado com a régua, o lado destacado com o marca-texto. Ela anotou as diferentes medidas encontradas no tablet, para que todos da sala pudessem ver, e depois, pediu que elevassem as medidas anotadas ao quadrado, utilizando calculadora. Os objetivos eram, primeiramente, verificar que várias medidas eram encontradas pelos alunos; e em segundo lugar, conferir se, ao elevar tais medidas ao quadrado, chegariam na área 8.

A conclusão foi de que nenhuma das medidas encontradas era exatamente a raiz quadrada de 8, por mais que todos os alunos tivessem medido o lado de um quadrado com área 8.

Figura 15: Na reprodução acima, o lado do novo quadrado tem medida de aproximadamente $2,85\ cm$. Esse número ao quadrado é igual a $8,1225$, um pouco maior que $8$.




Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Foi interessante ver a frustração dos alunos que participaram ativamente de toda a aula. Estavam de certa forma "indignados" ao final, porque as multiplicações não resultaram em 8. Algumas suposições que levantaram sobre o que poderia estar "errado": a régua, que não é perfeita; a maneira que mediram; a maneira que construíram os quadrados (diziam frases como "Espera, vou ajeitar melhor as peças" enquanto mexiam os triângulos para aperfeiçoar o quadrado "dobrado"), etc. Como disse a professora P3 em entrevista: *"Depois eles mediram e perceberam que na verdade, não dava para medir: cada um achava uma medida. Essa foi a ideia da atividade"* (Professora P3, Apêndice A).

Destaco essa frase com particular interesse. Quando se pensa nos números irracionais construtíveis, pode-se imaginar que depois de construí-los, basta medir com a régua e que teremos o seu valor. Assim, todo número construtível também poderia ser medido. A régua, porém, é um instrumento com o qual se pode medir apenas os valores marcados nela, fornecendo, nesse caso, sempre uma aproximação da medida que foi construída. Na atividade observada, a própria área $8\,cm^2$ nunca foi encontrada de forma prática, apenas teórica, já que é de conhecimento que ao somar as duas áreas $4\,cm^2$, a área total só poderia ser $8\,cm^2$. Um pensamento que está por trás disso é que o raciocínio de multiplicar a medida do lado por si mesma não gera dúvidas ao construir os primeiros quadrados de lado $2\,cm$, um número natural; mas começa a gerar questionamentos no segundo quadrado: não só por ser o dobro do primeiro, nem por ter sido construído da maneira que foi (com os pedacinhos de papel), mas por ter um lado com medida que pertence a outro conjunto numérico.

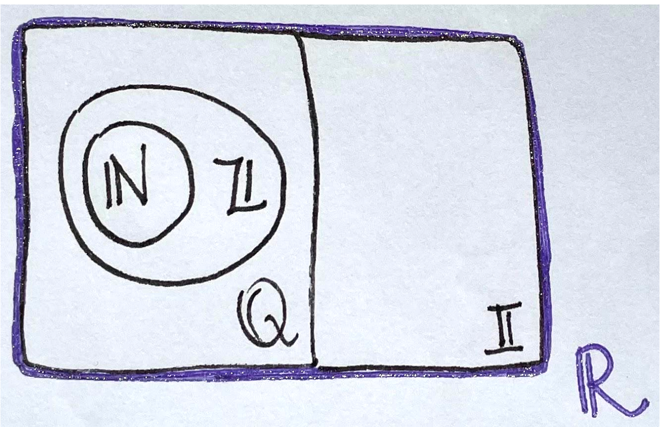
A partir dessa experiência e dessa atividade motivadora, a professora, na aula seguinte, introduziu o conjunto dos números irracionais formalmente, com a definição clássica de que são números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b$ inteiros (e $b \neq 0$). Ela também mencionou a característica comum de todos os números irracionais: terem representação decimal infinita e não-periódica, para explicar porquê não foi possível encontrar a medida exata de $\sqrt{8}$. Na explicação dela, como é um número com infinitas casas decimais e que não segue um padrão, por melhor que fosse a régua, toda medida finita resultaria em um valor apenas aproximado.

Em comparação aos relatos das aulas na escola E1, vê-se a diferença que se dá às aproximações quando o interesse é apresentar a definição de números irracionais. No contexto das aulas assistidas na escola E2, a atividade introdutória mostrou que aproximar não é suficiente, e ao não encontrarem um valor exato de $\sqrt{8}$, os alunos ficaram comovidos, mostrando que naquele contexto, foi uma boa atividade motivadora. Pensando nos Conhecimentos de Ball; Thames; Phelps (2008), pode-se notar que a atividade relatada já evidenciou diversos domínios de Conhecimento da professora P3: *CEC*, mais notoriamente, ao escolher essa atividade, ao orientar os alunos em cada passo e ao evidenciar as características do novo quadrado construído (com lado igual à diagonal do primeiro); e também *CCC* que, justamente por ser *Comum*, se faz presente nos cálculos da professora.

No decorrer da aula seguinte, ela também disse que, devido a essa característica, os alunos poderiam imaginar ainda diversos outros números irracionais, como $0,1234567\ldots$, número em que as casas decimais seguem a ordem numérica infinitamente. A professora P3 também contou aos alunos que existem muito mais números irracionais do que racionais. Isso só é verdade em razão dos números transcendentes, mas essa característica não foi mencionada e nem explicada.

Ao fazer a ilustração de todos os conjuntos numéricos, ela inicialmente fez uma representação similar à seguinte:

Figura 16: Réplica da primeira representação dos conjuntos numéricos apresentada pela professora P3 aos alunos.



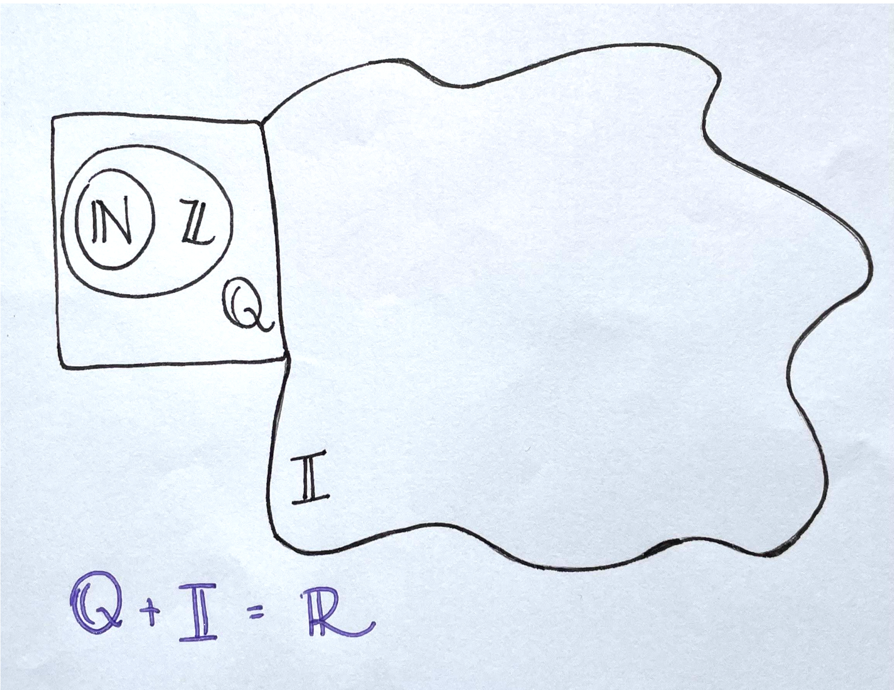

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Essa representação é muito comum nas escolas e busca evidenciar que certos conjuntos numéricos estão contidos em outros, como os naturais contidos nos inteiros, ou os próprios irracionais contidos nos reais. Ainda assim, ela deve ser usada com cautela, pois ilustra todos os conjuntos como finitos e deixa de fora, por exemplo, características importantes como: dentro do conjunto dos racionais, existem infinitas formas de escrever o mesmo valor. Assim, nessa representação, os números que são inteiros, mas não são naturais, por exemplo, só podem ser negativos, e então, nenhum deles terá valor igual a algum número natural; mas, os números que são racionais, mas não são inteiros, podem ter o mesmo valor de números inteiros positivos ou negativos, sendo representados como frações aparentes.

Podem ser mencionadas ainda outras problemáticas em relação à representação da Figura 17, mas essa do parágrafo anterior é, em particular, chamativa. Isso porque, nesse ponto do conteúdo, o professor que está caracterizando os números irracionais quer falar justamente de números que são reais mas não são racionais, ou seja, de um conjunto que está dentro dos reais mas que além de ficar por fora dos racionais, não o engloba – um fato que não havia sido ilustrado até então. A diferença dos conjuntos é justamente o que interessa.

Essas noções da limitação dessa representação podem também ser consideradas *CEC*, pois interessam ao professor, que se dedica ao ensino desse tópico e a preparar o estudante para seguir estudando matemática. Ainda, a escolha da professora P3 em apresentá-la pode ser justificada pensando na maneira como foi trazida, como uma revisão (*"Lembram daquela ilustração dos conjuntos numéricos?"* - frase dita pela professora P3 durante as aulas observadas), e o intuito de fazer um acréscimo às ideias que ela representa. Ela a "corrigiu" explicando que, como existem muito mais números irracionais, uma representação mais fiel a esta ideia seria como a seguir:

Figura 17: Réplica da segunda representação dos conjuntos numéricos apresentada pela professora P3 aos alunos.




Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Nessa segunda versão da ilustração fica mais claro o fato de que a cardinalidade dos conjuntos é representada pela área das formas, o que, novamente, pode representar a noção falsa de que existem menos números naturais do que racionais. Inclusive, apenas uma parte do conjunto dos números irracionais apresenta verdadeiramente cardinalidade maior do que a os número racionais, que são os transcendentes[30].

Relembrando a ilustração que foi trazida, também com suas limitações, na motivação deste trabalho, pode-se pensar que esse formato sempre terá suas questões ao ser utilizado, e uma vez mais considerar a reta real como "melhor maneira" de representar os conjuntos dos racionais e irracionais. Essa "melhor maneira", contudo, vem atrelada à menção da completude da reta. Isso, por consequência, significa também que sem os números irracionais a reta é incompleta, ou "com buracos", espaços vazios, mesmo que tenha sido desenhada até então como "cheia", completa.

Essa menção vale para destacar que de qualquer forma, ao ensinar sobre o conjunto dos números irracionais, o professor deverá retomar as representações de conjuntos a que os alunos já foram apresentados e promover alguma discussão a respeito delas. Em maior ou em menor grau, seja pela reta numérica e sem definição formal, seja com a definição e também com a ilustração da Figura 18, todos os professores P1, P2 e P3 passaram por tal discussão. E nos três caminhos observados, o *CEC* esteve presente, sobretudo ao considerar que, como visto, as abordagens escolhidas pelos professores não dependem somente de um livro didático ou de quanto tempo dispõem para abordar o conteúdo, mas de como compreendem a importância daquele conteúdo e de como entendem que será a melhor forma de ensinar o seu aluno.

Nas aulas seguintes observadas da professora P3, ela também definiu o conjunto dos números reais como a união dos conjuntos dos números racionais e irracionais, como na Figura 18. E então ressaltou que são conjuntos que não possuem intersecção, dizendo inclusive o seguinte: *"O número 0 é natural, então o conjunto dos números irracionais é um conjunto que não tem o 0. Já pararam para*

[30] Esse fato já foi mencionado com mais detalhes no Capítulo 6, Seção 6.4.

*pensar nisso?*" De fato, pensar em um novo conjunto numérico sendo definido sem o $0$ é uma novidade e mencioná-la com destaque pode ser visto como mais uma maneira que a professora encontrou de marcar a diferença (intersecção vazia) entre os números racionais e irracionais.

Posteriormente, em entrevista, quando questionada sobre as reações dos alunos à atividade de duplicação do quadrado, a professora P3 disse:

> A maioria deles ficou instigado, pensando: 'Será que não vai dar mesmo? Nem que um meça muito bem?' Ficou esse ponto de interrogação neles. (...) Na verdade, a gente acaba falando para os alunos que não. Eu não sei se eles realmente são convencidos disso. A gente tenta. (Professora P3, 2024, Entrevista concedida a Isabel Bonacella, Apêndice A)

Esse trecho chama a atenção pelos termos usados que, sob a percepção dessa pesquisa, demonstram algumas limitações do sistema de ensino. De acordo com a fala da professora, *"a gente acaba falando para os alunos (...)"*, no sentido de que há um momento em que talvez nem a atividade prática consiga dar conta de instaurar no estudante a aprendizagem do conteúdo, e o professor precise repetir, dizer, formalizar ou até "contar" qual a conclusão a que se deseja chegar.

As causas disso não são do escopo desta pesquisa, mas de toda forma, é notável que uma professora com tanta bagagem, experiência, desenvoltura e dedicação, conclua que existe um momento em que o professor "precisa" avançar à conclusão desejada, sem a certeza de que os alunos estejam convencidos do que lhes foi mostrado, apesar de ter elaborado a aplicação de uma atividade tão rica quanto a que foi relatada. Para os professores P1 e P2, o tempo se mostrou imperativo, enquanto para a professora P3, não ficou claro se também se pode atribuir esse fato à falta de tempo, ou a uma certa limitação de abstração que ela identifica nos alunos dessa idade que, apesar disso, precisam aprender esse conteúdo nessa fase da vida (*Conhecimento do Conteúdo e do Currículo*).

Também chama a atenção o verbo "convencer" em vez de "entender" ou "compreender". Há, sem dúvidas, entendimento e compreensão a respeito da atividade e de que eles se depararam com números que ainda não conheciam (pelo menos não nesse formato). Mas, ao se tratar de um conceito tão abstrato, que versa sobre a ideia de infinito, é preciso que os alunos sejam mais do que ensinados, mas convencidos a respeito dos números irracionais.

Como professores e/ou pesquisadores, também é preciso buscar conhecimento sobre como os alunos aprendem, além do estudo de como o ensino é feito. Isso, contudo, não é o foco dessa pesquisa, mas ainda assim, após assistir às aulas, foi elaborado um questionário opcional aos alunos que procurava compreender um pouco melhor sobre como aprenderam os números irracionais depois dessa atividade.

É importante retornar neste ponto ao objeto de pesquisa dessa dissertação, que são os Conhecimentos Especializados de Conteúdo. Muitos *Conhecimentos Especializados* foram observados nas aulas da professora P3 aqui relatadas, como as representações geométricas que podem auxiliar no ensino dos números irracionais, a natureza dos números irracionais como dízimas não periódicas, e as definições formais dos conjuntos numéricos, além da maneira como respondia às colocações frustradas dos alunos, que relataram suas medidas consistentemente diferentes da raiz quadrada exata de 8. Nenhum desses *Conhecimentos* apareceu isolado, mas todos juntos se alternando nas aulas observadas.

Ainda, relacionando essa observação de aulas com a anterior, na escola E1, é visível uma concordância entre a professora P3 e o professor P1 quando ela se apoia na geometria para apresentar o conjunto dos números irracionais. Ela disse em entrevista: *"E eu gostei dessa abordagem, porque a gente consegue trabalhar no 8º ano com eles, mostrando, e sem usar Pitágoras. Usando a ideia de área."* Novamente a ideia de "mostrar" se faz necessária, para abreviar a distância entre a compreensão dos alunos e a abstração do conteúdo matemático.

Como mencionado, depois das aulas assistidas e das entrevistas, também foi realizado um questionário opcional com as turmas observadas na escola E2. As perguntas do questionário foram feitas com o intuito de compreender melhor se os alunos já conseguiam, depois dessas aulas, dar exemplos de números irracionais que ainda não tinham sido estudados.

O intuito foi extrair mais informações para o escopo dessa pesquisa. O questionário está replicado na íntegra no Apêndice B. Aqui será feita uma breve análise de algumas respostas que chamam a atenção.

A maioria das perguntas do formulário consistia em pedir exemplos de números reais ou especificamente irracionais que atendessem a alguma condição, como por exemplo, estar entre 12,5 e 12,6. A maioria dos alunos que responderam ao questionário (83%) respondeu números decimais com reticências ao final, como por exemplo:

Figura 18: Exemplos de respostas dos alunos à pergunta 3 b) do questionário (Apêndice B).

12,53467932736...

12,57616390616388127391617434261929315412885341838312178512435466187752143253198981723341523190398938958987 9...

Fonte: Questionário elaborado pela autora, respostas anônimas de dois alunos diferentes.

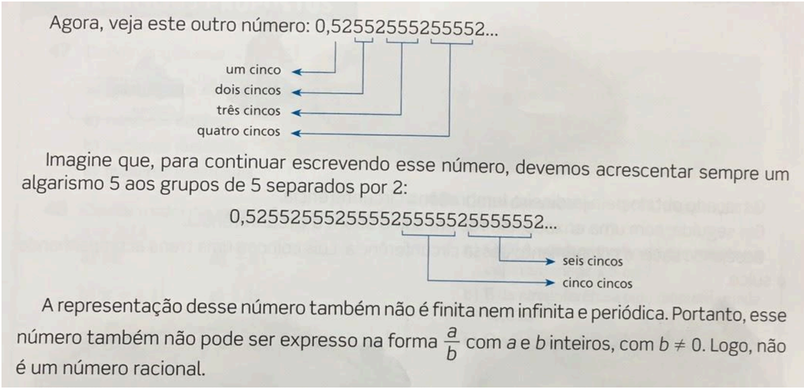
No questionário, foi dada a opção de que os alunos enviassem uma foto com a resposta caso sentissem que a mídia do formulário era insuficiente para expressar os números que desejavam responder, e preferissem responder no papel. Essa alternativa não foi utilizada por nenhum aluno. Isso leva a entender que, para eles, as reticências representam uma maneira suficiente de representar a dízima não periódica.

Como observado na Figura 12, as reticências também são utilizadas pela professora P3 e pelos alunos como símbolo que representa as infinitas casas decimais das dízimas periódicas. Dessa forma, a única característica que pode separar as respostas exemplificadas na Figura 18 de dízimas periódicas é observar que em nenhuma delas há 3 algarismos iguais repetidos em seguida.

Isso, contudo, não garante, como já exposto no Capítulo 6 desta dissertação, que esses números não sejam dízimas periódicas. Ainda, isso não seria suficiente para classificar essas respostas como erradas.

Aprofundando a análise, pode-se observar que exemplos de números irracionais expostos em livros didáticos, como o utilizado pelos alunos da escola E1, também utilizam reticências, mas possuem uma característica a mais: utilizam algum tipo de padrão para que o leitor consiga perceber que não haverá repetição de um período. Por exemplo:

Figura 19: Destaque dos exemplos da Figura 10.


Agora, veja este outro número: 0,52552555255552...

um cinco

dois cincos

três cincos

quatro cincos

Imagine que, para continuar escrevendo esse número, devemos acrescentar sempre um algarismo 5 aos grupos de 5 separados por 2:

0,525525552555525555525555552...

seis cincos

cinco cincos

A representação desse número também não é finita nem infinita e periódica. Portanto, esse número também não pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com $a$ e $b$ inteiros, com $b \neq 0$. Logo, não é um número racional.

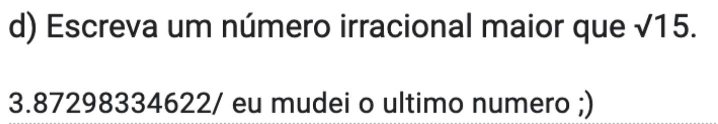
Fonte: Matemática Compreensão e Prática 8 (2019).

Nos exemplos acima, é perceptível um padrão (a quantidade de 5 antes do 2 aumentando) que é explicitado para garantir que não haverá um período se repetindo nas infinitas casas decimais representadas pelas reticências. No caso do questionário, a ideia por trás de pedir que os alunos escrevessem um número irracional especificamente entre outros dois números já determinados era fazê-los pensar em algum número irracional que ainda não havia sido apresentado para eles (pelo menos não nas aulas assistidas).

Apesar de que as respostas não apresentavam essa característica visível na Figura 20, nota-se o esforço em representar infinitas casas que não se repetem, produzindo respostas longas, como uma das observadas na Figura 19. Apesar de matematicamente insuficiente para garantir que aquele número seja de fato irracional, pode-se inferir que ao digitar tantos algarismos, havia alguma intenção do aluno em esclarecer uma característica que havia aprendido que o número deveria apresentar: as infinitas casas decimais.

Outra resposta interessante se destaca a seguir:

Figura 20: Exemplo de resposta de um aluno à questão 3 d) do questionário (Apêndice B).




Fonte: Questionário elaborado pela autora, resposta anônima.

O comentário do aluno na resposta acima pode trazer o questionamento: qual último número? Como $\sqrt{15}$ é um número irracional, não há último algarismo na sua representação decimal. Em contrapartida, ao calcular $\sqrt{15}$ com auxílio de uma calculadora, haverá um último algarismo no visor, que pode ser alterado, como provavelmente foi o caso. O número respondido é, sim, maior do que $\sqrt{15}$, mas, em diferença das respostas apresentadas na Figura 18, não apresenta reticências, sendo um número de representação decimal exata. É uma resposta que também exemplifica como a presença das reticências faz referência a uma compreensão importante de que o número irracional não é um decimal qualquer.

Por fim, mais uma resposta se destaca:

Figura 21: Exemplo de resposta de um aluno à questão 6 do questionário.

**6. Este questionário provocou em você alguma reflexão a respeito dos números? Se sim, qual?**

A quantidade de números que possui entre dois números distintos.

Fonte: Questionário elaborado pela autora, resposta anônima.

Ao pensar no ensino dos números irracionais, como já exposto aqui, há sempre a discussão sobre a representação dos números reais na reta numérica e a completude dessa reta. Quando há, de fato, a compreensão da natureza dos números irracionais e de como preenchem a reta numérica, é natural que se expanda o entendimento de que há infinitos números entre dois números quaisquer.

Em adendo a essa resposta, vale acrescentar que é importante, como exposto neste capítulo, que o conjunto dos números irracionais não seja reduzido a uma série de exercícios repetitivos que visam à prática de uma habilidade algébrica dos alunos. Os números irracionais precisam ser entendidos por sua identidade matemática distinta, almejando, realmente, ao letramento matemático. Isso, contudo, pode ser difícil de se obter, ainda mais em pouco tempo, mas é visível nas respostas aqui destacadas que a sequência didática da professora P3 prepara o caminho que os alunos seguirão nesse sentido, provocando pensamentos a respeito da quantidade de números na reta numérica, da quantidade de algarismos nas representações decimais desses números e na existência, ou não, de padrões.

## 9 CONCLUSÕES

Esta pesquisa revelou que os *Conhecimentos Especializados de Conteúdo* na perspectiva de Ball; Thames; Phelps (2008) são complexos e diversos, evidenciando sua presença durante as aulas de números irracionais observadas em 2019 e 2021. A complexidade se dá devido à intrincada relação das práticas dos professores com os diferentes *Conhecimentos* de Ball; Thames; Phelps (2008), como exemplificado a seguir.

No relato das aulas e na análise da entrevista do professor P2, ao mostrar que sabe construir a $\sqrt{2}$ e localizá-la na reta, mostra seu *Conhecimento Comum de Conteúdo*; quando entende que a menção dessa construção pode auxiliar no ensino que está realizando de números irracionais, e decide mencioná-la por mais que não a ensine, utiliza seu *Conhecimento Especializado de Conteúdo;* e quando, então, foca a aproximação de números irracionais em uma sequência de passos apresentados de forma lúdica, introduzidos inclusive com o uso da calculadora, mais uma vez utiliza seu *CEC* e seu *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo*, pois fica claro na entrevista (Apêndice A) que não sente que dispõe de mais tempo (dentro do planejamento da escola E1) para explorar esse assunto de outras formas.

De forma semelhante, a professora P3 navega por seu *Conhecimento Comum de Conteúdo* e *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo* durante a condução das aulas e também na entrevista, especialmente ao mencionar sua vasta experiência. Contudo, foi observada a forte presença de *CEC* desde o planejamento da aula, ao pesquisar uma nova atividade (duplicação do quadrado) para introduzir o conjunto dos números irracionais que trouxesse as características que julgava necessárias conectadas à concretude da geometria; na condução da atividade, que exigiu particular resiliência em um contexto de isolamento social parcial, mas que foi uma condução efetiva ao serem analisadas as interações dos alunos; e por fim, novamente, ao dedicar mais algumas aulas à formalização e definição do conjunto, mostrando novamente *Conhecimento Comum de Conteúdo* e também a importância que dá à prática de cálculos com os irracionais, para além do conceito inicialmente trabalhado com a atividade motivadora.

Embora seja desafiador elencar os *Conhecimentos Especializados de Conteúdo*, a riqueza deles se dá justamente nisso: são abundantes e variados, e ainda assim observáveis, como foi destacado acima.

Por fim, depois das aulas assistidas, foi realizada uma entrevista com cada um dos professores observados, fornecendo mais informações sobre como veem o ensino que promovem, e mais ferramentas para análise dos *Conhecimentos* observados. Um exemplo é a fala da professora P3, a respeito da atividade que promoveu: *"E eu gostei dessa abordagem, porque a gente consegue trabalhar no 8º ano com eles, mostrando, e sem usar Pitágoras. Usando a ideia de área."* A ideia de "mostrar" se dá nos quadrados que os alunos construíram e recortaram e, por essa frase, pode-se interpretar que abrevia a distância entre a compreensão dos alunos e a abstração desse conteúdo matemático.

Mais um componente desta pesquisa foi um questionário voluntário feito aos alunos da escola E2 a respeito dos números irracionais e após a sequência didática observada. Desse questionário, destaca-se uma resposta:

Figura 22: Exemplo de resposta de um aluno à questão 6 do questionário.

6. Este questionário provocou em você alguma reflexão a respeito dos números? Se sim, qual?

A quantidade de números que possui entre dois números distintos.

Fonte: Questionário elaborado pela autora, resposta anônima.

Ao pensar no ensino dos números irracionais, há a discussão sobre a representação desses números na reta numérica e a completude da reta. Quando há, de fato, a compreensão de que os números irracionais preenchem a reta numérica, é natural que se expanda o entendimento de que há infinitos números entre dois números quaisquer, como relatado na Figura 23.

Os números irracionais precisam ser entendidos por sua identidade matemática distinta, almejando, realmente, ao letramento matemático. Isso, contudo, pode ser difícil de se obter, e ainda mais em pouco tempo, mas pode-se ver na resposta acima que alguma reflexão foi provocada, podendo indicar o caminho que os novos aprendizados seguirão.

Além disso, esta pesquisa cita algumas características do conjunto dos números irracionais que, apesar de não necessariamente serem parte do escopo de conteúdos que devem ser ensinados no Ensino Fundamental, devem ser de conhecimento do professor que apresentará esse conjunto aos alunos. Isso se conecta com a ideia de *Saberes Docentes* de Maurice Tardif (2005), abordada com mais detalhes no Capítulo 5, que apresenta que grande parte dos professores buscam referências, inspirações e parâmetros em suas próprias experiências escolares.

A conexão se apresenta de forma que seria possível, então, promover mais uma forma de aprendizado durante a formação de professores ao incentivar que haja um compartilhamento de experiências entre estes em formação e aqueles já atuantes. É possível imaginar uma extensão dessa busca para experiências vividas por seus pares.

Assim, embora o ensino eficaz não seja algo que possa ser completamente transmitido, a promoção de um compartilhamento mais intenso de experiências entre educadores, com direito a relatos de atividades, sequências didáticas e rotina de planejamento de aulas, além da observação de aulas, pode estabelecer um caminho promissor para preparar ainda mais os professores em formação para os desafios que encontrarão em suas carreiras. Essas discussões, embasadas em conhecimentos teóricos como os citados nesta pesquisa, poderiam munir os professores recém formados de mais *CECs* que podem ser acionados durante suas aulas.

É importante citar que a experiência pessoal sempre terá valor inegável e inestimável no processo de construção de um profissional, inclusive do professor. Abrindo mais espaço para essas trocas, valoriza-se precisamente as experiências de professores já em atividade. Esta pesquisa também sugere que há conhecimento formal na análise de experiências de professores já em atuação, especificamente *Conhecimentos Especializados de Conteúdo*, ressaltando os ganhos dessa interação. Este seria um caminho para que a formação inicial de professores também se ocupe dos Conhecimentos apontados por Tardif (2005) e Ball; Thames; Phelps (2008), além de contribuir também para a formação continuada daqueles já em atuação.

No Instituto de Matemática e Estatística da USP, no curso de Licenciatura em Matemática, já existe uma iniciativa semelhante à mencionada no parágrafo anterior, na disciplina MAT1500 - Projetos de Estágio. Nessa disciplina, obrigatória, anual e idealmente pensada para a segunda metade do curso, os estudantes (professores em formação) devem desenvolver, em parceria com professores supervisores (em formação continuada) que atuam na rede pública de ensino e que frequentam a universidade por meio do curso de extensão oferecido concomitantemente, um projeto, aplicá-lo ao longo do ano e apresentar suas conclusões ao final.

Minha experiência, cursando a disciplina em minha formação inicial, trouxe ganhos inestimáveis à minha prática, tanto na oportunidade de atuar diretamente com as crianças, quanto na troca com a colega professora. Um exemplo disso é a conversa que tivemos quando nós, professores em formação, saímos frustrados da sala de aula por não estarmos observando resultados que atendessem às nossas expectativas. A professora nos tranquilizou sobre diversos aspectos que ela conseguia observar e nós não, como o comportamento das mesmas crianças quando não estávamos lá, e relatou resultados palpáveis na melhora deles em matemática, inclusive com uma mudança positiva nas notas do SARESP.

Ainda, como professora, sigo constantemente revisitando a minha prática, pesquisando e estudando maneiras de ensinar conteúdos específicos (por exemplo, utilizando projetos), teorias educacionais sobre como me relacionar em sala com os estudantes, e inclusive revisitando os próprios conteúdos matemáticos que devem ser lecionados. Esta pesquisa é um dos resultados dessa prática. Desde 2018, as ferramentas concretas e abstratas das quais disponho para dar aula aumentaram consideravelmente, e a maneira como inicio as minhas aulas, desde o planejamento, até as avaliações formativas e somativas, alteraram-se em direção a uma maior percepção e aquisição de Conhecimentos Especializados de Conteúdo, e ainda, a uma maior percepção do perfil dos meus alunos, a partir dos questionamentos deles.

## REFERÊNCIAS


ADLER, J.; HUILLET, D. **The social production of mathematics for teaching.** In: SULLIVAN, Peter; WOOD, Terry (Org.). International Handbook of Mathematics Teacher Education: v. 1. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Learning Development. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. P. 195-222. Disponível em: <https://www.jilladler.co.za/wp-content/uploads/2017/05/Adler-Huillet_2008_SP_Ch_THE-SOCIAL-PRODUCTION-OF-MATHEMATICS.pdf>. Acesso em: 24 de jun. de 2023.

AYOUB, E.; NETO, S. S. Maurice Tardif - trajetória de um pesquisador: entre profissionalização do ensino, pensamento crítico e riscos contemporâneos. **Revista Pro-Posições**, Campinas, v. 32, p. 1-25, 2021. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/pp/a/Twcm6XXvZWkPbnnfLzZYTFy/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 3 de dez. de 2022.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. C. **Content knowledge for teaching: what makes it special?** Journal of Teacher Education, 2008.

BARBOSA, J. C.; GRILO, J. S. P.; MAKNAMARA, M. Discurso da Matemática Específica para Ensinar e a Produção do Sujeito 'Professor(a)-de-Matemática'. **Revista Ciência e Educação**, Bauru, v. 26, 2020. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132020000100237>. Acesso em: 11 de fev. de 2022.

BONINI, A. *et al.* Direitos à aprendizagem e ao desenvolvimento na educação básica: subsídios ao currículo nacional. **Acervo Digital UFPR**. Curitiba, 2018. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/bitstream/handle/1884/55911/direitos_a_aprendizagem_e_ao_desenvolvimento_na_educacao_basica_subsidios_ao_curriculo_nacional-preprint.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 12 de jan. de 2023.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Brasília, dez. 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm>. Acesso em: 2 de jul. de 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CARA, D. **A base comum nacional curricular e as "novas demandas para o professor"**. Disponível em: <https://slideplayer.com.br/slide/10591749/>. Acesso em: 12 de mar. de 2022.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. **Determining specialized knowledge for mathematics teaching**. *In:* CONGRESS

OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8., 2013, Antalya. *Proceedings* […]. Antalya: M.E.T. University, 2013.

CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. **A Conquista da Matemática - 7º ano**. São Paulo: FTP Educação, 2019.

CECILIO, B. *et al.* **Números algébricos e transcendentes**. 6 f. Dissertação (Licenciatura em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5873847/mod_folder/content/0/Numeros-algebricos-e-transcendentes.pdf> . Acesso em: 9 de fev. de 2022.

**Conceitos básicos da matemática - Breve história dos números II**. GCF Global. Disponível em: <https://edu.gcfglobal.org/pt/conceitos-basicos-da-matematica/breve-historia-dos-numeros-ii/1/>. Acesso em: 7 de abr. de 2023.

CORBO, O. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na educação básica**. 2012. 289 f. Tese (Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/bitstream/123456789/3493/1/OLGA%20CORBO.pdf>. Acesso em: 25 de mar. de 2023.

COSTA, V. C. da. **Números Construtíveis**. 2013. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Campina Grande. Disponível em: <https://mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Valderi.pdf>. Acesso em: 30 de abril de 2024.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

FANIZZI, S. **A Interação das Aulas de Matematica: um estudo sobre aspectos constitutivos do processo interativo e suas implicações na aprendizagem**. 2008. 293 f. Tese (Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05082008-142903/publico/DissertacaoSueliFanizzi.pdf> Acesso em: 10 de out. de 2018.

IGLIORI, S. B. C.; **A Noção de “Obstáculo Epistemológico” e a Educação Matemática**. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~dpdias/2015/A%20no%C3%A7%C3%A3o%20de%20obst%C3%A1culo%20epistemol%C3%B3gico%20e%20a%20educa%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em: 20 de setembro de 2018.

MORAIS, A. M.; NEVES, I. P. A teoria de Basil Bernstein: alguns aspectos fundamentais. **Revista Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 2, n.2, p. 115-130, 2007. Disponível em: <ps://core.ac.uk/download/pdf/12423945.pdf>. Acesso em: 2 de ago. de 2023.

NAKAMURA, K. **Conjunto dos números irracionais: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares.** 2008. 126 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11317/1/Keiji%20Nakamura.pdf>. Acesso em: 4 de nov. de 2022.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

NOBRE, R. B. **Sobre possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental**. 2017. 188 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-08042018-120458/publico/Dissertacao_Ronaldo_Bezerra_Nobre_7754202_Versao_Corrigida_Final.pdf>. Acesso em: 30 de set. de 2022.

**O que é a BNCC?**. Guia Especial Instituto Ayrton Senna, 2022. Disponível em: <https://institutoayrtonsenna.org.br/o-que-e-a-bncc/>. Acesso em: 13 de out. de 2022.

PESSOA, C. **Contrato didático: sua influência na interação social e na resolução de problemas**. 17 f. Dissertação - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/01/CC66657466404.pdf>. Acesso em: 3 de mar. de 2023.

RIBEIRO, A. J. **Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática**. 2012. 23 f. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000200007&lng=en&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em: 31 de mar. de 2021.

RIPOLL, C.; RIPOLL, J.; SILVEIRA, J. S. **Números Racionais, Reais e Complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

SÁ, R. **A Teoria das Situações Didáticas**. InfoEscola, 2013. Disponível em: <https://www.infoescola.com/pedagogia/a-teoria-das-situacoes-didaticas/>. Acesso em: 15 de set. de 2019.

SANTOS, L. L. C. P. Bernstein e o campo educacional: relevância, influências e incompreensões. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 120, p. 15-49, 2003. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/cp/a/8Rgg5Zjd4zXyjfSMTQWr66S/?lang=pt>. Acesso em: 17 de nov. de 2022.

SILVA, W. M. L. **Um estudo sobre o infinito: enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos**. 2016. 74 f. Dissertação (Doutorado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016. Disponível em: <https://bdtd.uftm.edu.br/bitstream/tede/397/5/Dissert%20Wysner%20M%20L%20Silva.pdf >. Acesso em: 8 de jun. de 2023.

SILVEIRA, E. MARQUES, C. **Matemática Compreensão e Prática 8**. 6. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2019.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 5. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2005.

## APÊNDICE A - ENTREVISTAS TRANSCRITAS

## ENTREVISTA COM O PROFESSOR 1

**Entrevistado(a):** Professor P1

**Data:** 03 de novembro de 2019

Obs.: Por incompatibilidades de horário, a entrevista foi realizada por e-mail.

1. Qual a sua formação? Há quanto tempo você dá aulas?
R: Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Ministro aulas há 25 anos.

2. Há quanto tempo você dá aulas para o 8º ano e na escola E1?
R: Mais ou menos 10 anos...

3. Você dá aulas só em uma das unidades? Em só um dos períodos (manhã ou tarde)? Sempre foi assim?
R: Dou aulas apenas em uma das unidades (A) e sempre no período da manhã.

4. No 4º bimestre, há o conteúdo de aproximação de raízes quadradas não exatas para números racionais com uma casa decimal. Para você, qual a importância desse conteúdo para os alunos? Como você incorpora essa justificativa nas suas aulas?
R: Acredito que todos os conteúdos ministrados sejam de extrema importância e não seria diferente com esse. São raras as perguntas desse tipo por parte dos alunos, mas antes mesmo de isso acontecer, eu justifico afirmando a importância das raízes não exatas até mesmo pela prática de lidarmos com os limitantes superiores e inferiores (quadrados perfeitos), bem como com os

cálculos propriamente ditos, que por muitas vezes não fazem parte da rotina dos alunos!

5. Como você planeja as suas aulas e a introdução desse conteúdo?
R: Planejo exatamente pensando na localização numérica na reta real, e em como tratarmos dos números com infinitas casas decimais não periódicas (irracionais).

6. Na sua opinião, esse conteúdo auxilia a localização dos números irracionais na reta numérica real? E, para você, é importante que um aluno saiba localizar os números irracionais na reta real?
R: Muito importante, porque trabalho com eles a ideia de que entre dois números inteiros quaisquer existem infinitos números racionais e irracionais!

7. Qual a relação que você observa entre esse conteúdo e a representação decimal dos números irracionais em dízimas não periódicas?
R: Geralmente, quando vamos trabalhar as representações dos números irracionais escritos na forma decimal não periódica, fazemos os arredondamentos universais, daí a importância do trabalho com as aproximações das raízes não exatas.

8. Durante as suas aulas de matemática que antecedem o conteúdo de fração geratriz, quando números como 0,333... ou 0,999… aparecem nas contas, quais dúvidas surgem nos alunos? Como você as aborda? E depois do conteúdo de fração geratriz ser ensinado, as dúvidas mudam? Esse conteúdo é ensinado antes da aproximação de raízes? Por quê?
R: Quando aparecem esses tipos de números, procuro trabalhar a ideia do número infinito de casas decimais e da sua proximidade com o limitante inteiro superior a ele, trabalhando com eles também a importância dos números decimais exatos e as proximidades dos números em questão.

9. Você percebe uma relação entre esses dois conteúdos (frações geratrizes de dízimas periódicas e aproximação de raízes não exatas)? Se sim, você menciona isso em aula?
R: Sim, percebo e faço sempre essa relação entre os conteúdos para melhores esclarecimentos de dúvidas e possíveis visualizações de relações por parte dos alunos.

10. Em algum momento do ano letivo, você mostra ou demonstra que o número $\sqrt{2}$ é irracional? Se sim, por quê? Como? E, se não, por quê? Você faz alguma outra abordagem explícita sobre os números irracionais?
R: Faço aquele esquema utilizando a representação geométrica (desenho geométrico), mostrando com a figura que $\sqrt{2}$ está no intervalo entre os inteiros 1 e 2. Acredito muito na importância do visual (figuras) para o entendimento da parte algébrica.

11. Você já ouviu falar sobre Conhecimentos Especializados para o Ensino de Matemática? Se sim, foi na sua graduação?
R: Sim, inclusive, na graduação, participava de um projeto de resoluções de problemas que foi instituído nas escolas estaduais de Londrina. Acho importante que os colégios invistam nesses Conhecimentos Especializados.

O seguinte parágrafo também foi enviado ao professor P1 ao final das perguntas:

*Conhecimentos Especializados de Conteúdo* são uma gama de conhecimentos matemáticos corretos que vão além dos procedimentos de cálculos, mas que não são constituídos apenas pela matemática formal ensinada nas universidades, mas também por tudo que o professor de matemática utiliza em aula: exemplos específicos, a maneira como responde às perguntas feitas, as indagações que faz, como analisa os erros dos alunos etc. Os Conhecimentos Especializados em Matemática definem a carreira do professor de matemática como uma profissão com um conjunto específico de habilidades.

## ENTREVISTA COM O PROFESSOR 2

**Entrevistado(a):** Professor P2
**Data:** 21 de outubro de 2019, 18:40

1. A primeira pergunta é: qual é a sua formação e há quanto tempo você dá aula?
R: Eu saí da escola em 2006. Em 2007 eu entrei na Universidade de São Paulo em Licenciatura em Matemática e me formei em 2011.

2. No final de 2011?
R: Isso, no final de 2011. Em 2012 eu entrei, no primeiro semestre, no mestrado, na Faculdade de Educação lá na USP, e em 2015, em junho, eu terminei o mestrado. Então essa é minha formação.

3. E esse mestrado era sobre…?
R: Meu mestrado foi em Educação, na linha de Didática, e eu estudei aspectos relevantes da escola, mas não teve relação com matemática. E eu dou aula como professor regular desde 2012, mas eu dava aulas particulares desde 2009.

4. E há quanto tempo você dá aula no 8° ano nessa escola (E1)?
R: Nessa escola desde 2015, que foi o ano em que eu comecei. Mas em 2015 era diferente de como é hoje, porque as aulas de matemática eram separadas em duas frentes: álgebra e geometria - e, naquela época, eu dava as aulas de geometria. Hoje já faz dois anos que essas frentes se juntaram, mas a disciplina de matemática ainda tem duas frentes: uma de revisão do ano anterior, com uma aula semanal, e a outra, pela qual eu sou responsável, com cinco aulas semanais nas quais eles aprendem os conteúdos novos - de álgebra e de geometria.

5. Quando você entrou, quantas aulas por semana eram de geometria?
R: Duas. Eram quatro de álgebra.

6. E você dá aulas para o 8° ano desde que você entrou?
R: Sim.

7. 8º ano da tarde?
R: Hoje, da manhã e da tarde, mas quando eu entrei era apenas para o 8° da tarde. Desde 2015, acho que as turmas para as quais eu mais dei aula foram as de 8° ano.

8. Você sente diferença entre o rendimento dos alunos nas turmas da manhã e nas turmas da tarde?
R: Eu percebo que o pessoal da tarde, eles... Depende muito da unidade, mas eu consigo sentir que eles conseguem ter um rendimento um pouquinho melhor à tarde. Talvez porque as turmas tenham menos alunos. Pode ser por conta disso. Mas eu percebo que assim: o pessoal da tarde tem uma disciplina um pouco melhor do que o pessoal da manhã.

9. Mas isso é comportamento.
R: É comportamento, mas esse comportamento pode contribuir para o rendimento, então, sim.

10. E qual é a diferença entre unidades que você mencionou?
R: Eu estou só com a frente de revisão à tarde na outra unidade, então eu não consigo ter um parâmetro muito bom, mas, esse ano, a turma do 8° ano da tarde é excepcional. Ela é muito, muito, muito boa. Ela está muito forte.

11. Aqui nessa unidade?
R: Não, na outra unidade, Unidade B. E lá é uma turma de 34 alunos, são muitos alunos, mas eles são muito bons. É um 8° que é excelente. E de manhã são três turmas, mas eu só estou com uma, as outras duas turmas estão com outro professor.

12. Nesse bimestre, há o conteúdo programático de aproximação de raízes quadradas para números racionais com uma casa decimal, e essas foram as aulas suas que eu consegui assistir. Para você, qual é a importância desse conteúdo para os alunos?

R: Olha, ensinar sobre isso é muito mais para eles entenderem que existe, que fazemos as aproximações e como essas aproximações são calculadas, porque fazer a conta na mão (que até é o que eles acabam fazendo) hoje em dia com celular, com calculadora, com toda essa tecnologia que a gente tem, eu acho desgastante para eles. Mas eu acho que é importante eles perceberem o processo. Eles entenderem que essa raiz que eles estão buscando está entre dois números que eles conhecem, saberem que existe tanto a aproximação por falta quanto a por excesso, e entenderem essas diferenças. Entenderem que existe uma padronização. Mas em aproximação, útil mesmo… Depois que a tecnologia foi disseminada, que está muito na nossa mão, é um conteúdo que eu... Faz parte e eu preciso dar. É realmente para cumprir, tanto que são poucas aulas sobre isso, e a gente faz poucos exercícios sobre o assunto. Até porque, quando a gente fala sobre essas raízes, elas estão no conjunto dos números irracionais e existem outros números no conjunto e que a gente não pode passar, então é um caso muito específico de números irracionais que eles conseguem ver, e eu não vejo como *prático* para eles.

13. E é por isso que você tenta incorporar calculadora nessas aulas?

R: Sim, para ficar mais dinâmico, porque muitas vezes eles mesmos são resistentes e querem usar calculadora. Então eu tentei incorporar em uma das aulas. Não é sempre que eu deixo eles usarem calculadora, eu tentei implementar para eles usarem de uma maneira produtiva, então realmente faz parte e é para fugir um pouco da mesmice. A aula se torna mais dinâmica porque, além de aprenderem, os alunos acabam se divertindo, então eu gosto bastante dessa aula. Mas, antes de fazer assim, eu já tinha ensinado (acho que duas vezes) sem usar essa metodologia ou esse tipo de aula e foi muito cansativo - tanto para mim, como professor, como para os alunos. E desse jeito eu percebo que eles ficam bem envolvidos. Faz muito mais sentido para eles até depois, quando estão resolvendo exercícios. Eles percebem que, quando eles armam as contas, resolvem 3 exercícios durante uma aula inteira e, dessa maneira, eu consigo fazer 15, e eles estão muito mais envolvidos.

14. E você sentiu essa melhoria nas turmas da manhã e nas turmas da tarde, igualmente?
R: Sim.

15. Como que é nas suas aulas, para você, a introdução desse conteúdo?
R: Quando eu era aluno?

16. Não, como professor: o seu planejamento, como você elaborou isso?
R: Tá, eu lembro muito de quando eu fui aluno e eu aprendi isso, porque para mim foi uma marca bem negativa. Para mim, não fazia sentido. Eu pensava: "Para que eu vou fazer essas contas?". E a minha primeira aula sobre isso foi muito parecida com a aula que eu tive quando eu era aluno. Depois de um curso que a gente teve aqui na escola mesmo, o curso do Mathema, foi que eu fiz uma adaptação, que eu percebi que eu poderia implementar a calculadora. Não foi exatamente sobre isso que tratamos no curso, sobre essa aproximação, mas sobre o uso de calculadora. E eu lembro que foi assim: uma ou duas semanas antes de eu dar essa aula, eu consegui perceber que existia um espaço pra isso. Mas eu ficava muito no que o livro trazia, não falava muito, não fazia ainda a relação da aproximação com o método da estimativa (quando calculo raiz exata). Ainda que eu já ensinasse desse jeito, além de ensinar o método da decomposição, foi só quando eu percebi que eles tinham uma facilidade para usar a calculadora e que eles também se envolviam bastante com a aula que eu acabei traçando uma relação, então para eles é quase que uma continuação. Eles não veem como outro conteúdo.

17. O método da estimativa de que você está falando é o que você apelidou de ETA?
R: Isso, é o ETA.

18. Na sua opinião, esse conteúdo auxilia na localização dos números irracionais da reta numérica real?

R: Sim. Sim, por causa do que eu acabei de falar: eles precisam encontrar dois números que eles conhecem e perceber que essa raiz que eles estão procurando está entre as raízes de outros dois números, que, no caso, são também números naturais, porque os radicandos são quadrados perfeitos. E esses números eles já conseguem localizar, então eu mostro para eles e depois falo: "Gente, vocês conhecem esses dois, esse outro vai estar *entre*. Aí vocês precisam ver: está mais perto de qual deles?", então isso auxilia, sim.

19. E, para você, é importante que o aluno saiba localizar esses números irracionais na reta?

R: Sim, mas de uma maneira muito visual, não tão precisa. Então, por exemplo: para eles localizarem a $\sqrt{2}$, poderiam fazer um triângulo retângulo, utilizar o Teorema de Pitágoras, usar o compasso e localizar precisamente, mas eu não comento - aliás, eu comento de maneira muito breve, mas eu não reproduzo e não peço para eles fazerem. Eu falo assim: "Olha, gente, isso aqui tem como fazer no 9° ano", porque não é nem matéria do 8°, e falo que existe. Só.

20. E por que você fala tão superficialmente? Porque vai ser abordado mais para frente?

R: Eu falo porque existe, e eu, como professor, me sinto na obrigação de falar tudo que existe. Não *tudo* que existe, mas tudo que pode dar margem para eles se interessarem. Eu acho que é muito ruim eles não terem nem essa possibilidade, porque eu imagino que, se eu não falar, talvez ninguém nunca mais fale. Então me sinto na obrigação de trazer essas curiosidades, mas a nível de curiosidade mesmo.

21. Mas por que a nível de curiosidade?

R: Porque não vai ser cobrado deles, pelo menos não no nível da escola, pelo menos não nessa instituição em que eu estou. E eu sei, porque eu conheço todo o conteúdo que é dado, já dei aula do 6° ano até o 3° do Ensino Médio (considerando os plantões de dúvidas), então eu sei que não vai ser cobrado.

22. E você já leu a Base Nacional Comum Curricular?
R: A que vai entrar em vigor?

23. É, no ano que vem. A gente leu algumas partes na reunião de planejamento em janeiro.
R: Eu li algumas partes. Eu li mais, assim...

24. Os conteúdos?
R: Isso.

25. E não o texto inicial?
R: Não, eu só li os conteúdos.

26. No começo, na introdução do documento, é mencionado que a compreensão dos números irracionais ajuda o aluno a formar, a complementar, a finalizar a noção de *número*. O que você pensa sobre essa afirmação?
R: O que é colocado hoje já cumpre um pouco disso, porque é o último conjunto numérico que eles acabam vendo, que é diferente de todos os anteriores de que eles já têm conhecimento. Só mais para frente eles vão acabar entrando em contato com os complexos, e ainda que eles tenham contato e que eles aprendam sobre o conjunto dos números reais, os reais são uma união dos números racionais com os números irracionais.
O que eu acho mais legal dos irracionais é que eles não têm um padrão - talvez, quando eu retomar esse assunto, eu até enfatize esse fato, de que não existe um período. Vai ser bem legal, porque eu falo sobre isso. Faço uma relaçãozinha bem simples, mas bem legal. Eles se divertem bastante e eu acho que fica bem claro - como eu falei, só não dei ênfase, apesar de fazer esse comentário. Mas, sim, é o último conjunto que eles veem, e é bem diferente do que eles estão acostumados.

27. Não deu ênfase no quê?
R: Em falar desse não padrão da parte decimal.

28. A minha próxima pergunta tem um pouco a ver com isso mesmo. Qual a relação que você observa entre esse conteúdo - o de aproximação das raízes que não são exatas para o número racional com uma casa decimal - com a representação dos números irracionais em dízimas não periódicas? Qual a relação?
R: Eu acho que eu não entendi a pergunta.

29. Existe um conteúdo, o qual você ensinou, que é a “aproximação com uma casa decimal”. E existe o fato de que os números irracionais possuem representação decimal em forma de dízima não periódica. Qual é a relação entre esses dois tópicos? Você observa alguma relação?
R: De fato, eles não são o mesmo número. Como a gente fala, é uma aproximação. Eu sei que é impossível eles utilizarem, até porque são infinitas casas decimais, você nunca vai…

30. É impossível utilizar o número irracional?
R: Exatamente, então a gente precisa utilizar alguma coisa, porque o número existe. Mas acaba sendo uma representação, então eu vejo que existe uma relação, sim, até para eles saberem fazer essa escolha, saberem como que eles vão utilizar o número, saberem que, quando eles estão usando a calculadora, eles não estão usando um valor exato, então eu sempre falo "É aproximado", eles falam "Professor, tem que ficar colocando o símbolo de aproximado?" e eu falo "Não, você sabe que é aproximado, então não precisa ficar colocando o ‘tilzinho’ em cima do igual, mas é aproximado”. Porque esses números não são exatos, eu falo inclusive: “A minha calculadora tem 10 dígitos na tela e esse não é o valor".

31. Entendi. Você já ouviu falar sobre Conhecimentos Especializados para o ensino de matemática?
R: Não.

32. Ok. Durante as suas aulas de matemática, quando números como 0,3333... (a dízima periódica) e o 0,999... (dízima periódica) aparecem nas contas, quais dúvidas surgem nos alunos e como você as aborda?
R: Muitas vezes eles tentam fazer a transformação desses números em frações sem utilizar a fração geratriz. Então eles tendem a colocar $\frac{3}{10}$ ou $\frac{3}{100}$. Às vezes eles acham que não ter as reticências é a mesma coisa do que ter as reticências, então eu preciso falar muitas vezes: "Gente, coloca os três pontinhos, porque é diferente".

33. E você usa essa representação mesmo, de reticências?
R: Sim, é muito difícil eu colocar aquele - eu não sei nem o nome daquele símbolo - mas o traço em cima. É muito difícil eu representar com o tracinho em cima, principalmente quando estou fazendo a transformação da dízima periódica para a fração geratriz, porque eu quero que eles vejam o período mesmo. Quando você coloca o tracinho em cima, eles não estão *vendo* que aquilo fica repetindo infinitamente e infinitamente.

34. Entendi.
R: Eu acho legal mostrar pelo menos umas duas, três vezes o período se repetindo. Acabam sendo essas as dúvidas.

35. E antes de você falar de fração geratriz?
R: As dúvidas?

36. É, no começo do 8° ano.
R: Não aparecem e, se aparecerem, aparecem em um ou dois exercícios, mas eu logo falo: "Gente, isso aqui nós vamos trabalhar depois", e eu acabo pulando mesmo.

37. É porque não deve aparecer no meio da conta, né? Deve aparecer no final, quando é resultado.

R: Sim, mas às vezes aparece alguma conta com frações e eles têm a tendência de colocá-las na forma decimal. E eu falo: "Gente... Fração é muito mais legal".

38. Eles têm dificuldade de ver a fração como um número em si, eles acham que é uma conta.
R: Eles têm muito medo de fração, muito. E aí eles sempre falam assim: "Professor, deu dízima", então eles já trazem isso com eles, já conhecem a dízima e ficam muito surpresos: "Professor, deu dízima. Está certo?". Eles acham que está errado. Resultar em dízima, para eles, é estar errado.

39. Em algum momento do ano letivo você mostra ou demonstra que $\sqrt{2}$ é irracional?
R: Não.

40. Demonstrações não costumam ser utilizadas?

R: Não a demonstração formal, do $\frac{p}{q}$. Essa que você diz?

41. Pode ser só uma "mostração".
R: Eu falo que existe. "Gente, dá para demonstrar. A gente supõe que é racional e depois a gente chega que ele não é. Mas eu não vou fazer isso". E eu não faço, porque isso eu acho que muitos não conseguiriam acompanhar. Eles iam achar que isso seria cobrado, daí eles iam ficar mais preocupados do que instigados. Claro que em todas as turmas eu acho que teria pelo menos um que conseguiria acompanhar e que até gostasse, mas eu sempre falo: "Se alguém quiser saber mais, pode me perguntar". Ninguém nunca me perguntou. Mas eu sempre falo: "Existe uma demonstração, se alguém estiver interessado, pode me perguntar".

42. As perguntas que eu tinha elaborado já acabaram. Mas, fazendo essa entrevista com você, fiquei pensando que a pergunta que eu fiz sobre Conhecimentos Especializados acabou ficando perdida, porque a resposta foi "Não", e eu só continuei para a próxima pergunta. Na verdade, os Conhecimentos Especializados

são o foco principal do meu trabalho, mas eu só havia redigido perguntas adjacentes para o caso do professor responder “Sim”, apesar de saber que isso não é muito conhecido.
R: Mas é só dessa área ou de todas as áreas? Porque eu não sei nem o que é.

43. Não, pode ser sobre qualquer parte da matemática.
Existem os conhecimentos que são chamados de pedagógicos, e são aqueles que estão relacionados com qualquer aula: seja de matemática, seja de história, seja de português.[31] E existem aqueles conhecimentos que são conhecimentos específicos de matemática, mas que a gente usa só para ensinar, e só a gente usa. Só os professores usam.
R: Faz sentido, mas eu achava que isso entraria dentro da parte pedagógica.

44. Então, isso não entra dentro da parte pedagógica porque existe toda uma parte pedagógica que não necessariamente tem a ver com matemática, tem a ver em muitos momentos com mediação de conflitos e contrato didático[32]. Os Conhecimentos Especializados têm esse propósito: nomear uma coisa que a gente não sabia muito bem como nomear, mas que a gente usa muito, porque estamos ali dando aula de matemática. A formalização desses conhecimentos com esse nome, nesse artigo da Deborah Ball, foi muito importante, porque começou a colocar a carreira docente como uma profissão que tem uma gama de conhecimentos específicos para ser exercida. Nossos conhecimentos matemáticos são os mesmos de outros cursos e os nossos conhecimentos pedagógicos são os mesmos das professoras de história, de geografia e de todos os outros professores[33]. Mas ainda existem os conhecimentos que usamos especificamente como professores de matemática.

[31] Era dessa forma que eu compreendia o conteúdo do artigo de Deborah Ball em 2019, mas hoje vejo como estava equivocada. Não é possível separar a realidade da sala de aula e os desafios pedagógicos do ensino, do conteúdo que o professor está ensinando. Deborah Ball, Mark Thames e Geoffrey Phelps em nenhum momento mencionam outras disciplinas em seus textos.
[32] Novamente, não concordo mais com essa afirmação. A realidade do professor em sala de aula é conectada intrinsecamente ao conteúdo que ministra, pois ele interfere diretamente no próprio contrato didático. Para mais referências, sugiro a leitura do texto "O Contrato Didático", de Guy Brousseau (1982).
[33] Pensando na formação universitária em que muitas disciplinas da licenciatura são inclusive cursadas em conjunto por estudantes da graduação de matemática, história, letras etc.

R: Não conhecia isso, mas bem interessante.

45. O primeiro cara que falou disso foi em 1986, mas ele chamava esse conhecimento de pedagógico mesmo, e aí essa moça, Deborah Ball, em 2008, publicou esse artigo com mais dois autores. Em 2008 eles fizeram essa separação. O conhecimento pedagógico ela separou em uns 3. O conhecimento especializado está no meio. Ela fez um diagrama, e o conhecimento matemático, ela separou em 2.

R: Ela é matemática?

46. Ela é matemática e ela trabalha com formação de professores, essa é a área dela.

R: Brasileira?

47. Não… Estadunidense. Uma das coisas que o artigo abrange é como introduzir novos conteúdos nas aulas e as diferenças dinâmicas que você pode fazer. Por exemplo, usar calculadora seria uma delas. E outra que muito me interessa, porque eu me interesso muito por interações na sala de aula, é como que você responde a uma pergunta feita por um aluno: seja com uma afirmação ou com uma contra-pergunta. Os Conhecimentos Especializados não são listáveis: cada professor usa um determinado conjunto deles. É muito importante que eles sejam matematicamente corretos, mas é muito claro para mim que eles são maleáveis. Então, os Conhecimentos Especializados que você usa no 8° E são diferentes do que você usa no 8° F, porque também é pressuposto que você conhece seu aluno.

**ENTREVISTA COM A PROFESSORA 3, PARTE 01**

**Entrevistado(a):** Professora P3

**Data:** 25 de maio de 2021, 17:10

1. Vou começar deixando registrado que hoje é dia 25 de maio de 2021, 17:10, e você já assinou o termo de consentimento hoje mesmo, às 16:15. Novamente, muito obrigada. Nesse momento em que eu estou fazendo a entrevista, eu já assisti às aulas, o conteúdo já foi ministrado, mas eu ainda não fiz a coleta com os alunos. Estou, antes, recolhendo o termo de consentimento com os pais e responsáveis. A primeira pergunta é a respeito da sua formação. Qual a sua formação e sua trajetória até você chegar na E2?
R: Eu entrei no bacharelado em matemática e fiz quase todo o curso. Faltam 4 matérias para eu finalizar o bacharelado. Eu troquei no finalzinho para a licenciatura, porque eu não queria mais, eu queria dar aula mesmo. Depois, acabei fazendo só as matérias de pedagogia e algumas matérias de física (que não tinham no bacharelado), e aí eu concluí a licenciatura em matemática. Não terminei o bacharelado, ainda está em aberto, o curso está trancado.

2. Em que universidade que foi?
R: Na USP. Até dava para concluir os dois cursos, eles faziam um "combo" e você saía com os dois diplomas, mas, não… Eu tinha que passar por umas quatro matérias que me fizeram pensar “não, obrigada”.

3. As matérias, por exemplo, de álgebra, de cálculo, você fez todas no curso do bacharelado?
R: Sim. Inclusive eu fiz o Cálculo V, que não tem na licenciatura. Se não me engano, ficou faltando topologia, análise de "alguma coisa"... umas quatro, assim, "aleatórias", mais de álgebra mesmo, mais profundas. O resto eu fiz tudo no bacharelado, e só fiz as matérias de educação na licenciatura, que era o que faltava. Eu já tinha mais carga horária de matemática do que a licenciatura pedia.

4. Você precisou fazer algum trabalho complementar, ou realmente só as disciplinas que eram na Faculdade de Educação?
R: Não, só as disciplinas que eram na Faculdade de Educação.

5. Eu pergunto, porque quando eu fiz Álgebra I, por exemplo, na licenciatura, era uma matéria com 1 crédito de trabalho, e esse trabalho tinha como proposta aproximar aquele conteúdo, a ementa da matéria de Álgebra I, ao que nós vamos

ensinar no Ensino Básico. Esses créditos de trabalho propunham essa aproximação. Eu não lembro exatamente o ano em que foi implementado, mas, se não me engano, foi recente.

R: É, eu lembro das conversas, mesmo na licenciatura. Uma das queixas à USP era sobre essas distâncias entre o que você aprende e o que você tem que ensinar. Tanto é que os alunos conversam comigo e eu falo: “Nada disso que eu ensino a vocês eu vi na faculdade”. Na verdade, a gente traz do nosso histórico escolar ou do que a gente vai pesquisando com o passar do tempo, mas nada disso é da faculdade. Na faculdade, muito pouco. Porém, eu lembro que algumas matérias da educação traziam essa aproximação, mas eu não vou saber o nome. Acho que era Ensino da Matemática. A gente tinha aqueles "créditos complementares" que podíamos escolher como cumprir, e como eu já estava na licenciatura, peguei algumas coisas mais ligadas à educação do que à matemática mesmo. Eu lembro que algumas matérias traziam algumas dinâmicas, algumas coisas para ensinar.

6. Eram disciplinas optativas, né?

R: Isso, eram optativas. Depois, quando eu fui fazer a pós em Educação Matemática, existia uma aproximação melhor. Tivemos algumas matérias que traziam a ideia de ensinar mesmo, *como* a gente ensinaria, *o que* a gente poderia buscar e que seria diferente, alternativas para sair um pouco do tradicional de lousa e giz, essas coisas.

7. E essa pós era em "Educação Matemática" mesmo?

R: É, em Educação Matemática, aqui na Fundação Santo André.

8. Após a graduação, você realizou outros cursos de especialização ou aperfeiçoamento? Além dessa pós?

R: Em Educação Matemática, só essa pós. Teve uma época em que eu trabalhei com material Anglo, e, na outra escola, eu trabalhei por muito tempo com material Etapa, e nós tínhamos cursos do material que faziam essa ponte entre o material e o ensino. Então eu fiz vários cursos desses, e eu gostava bastante. Eu lembro que quando eu trabalhava com o material Etapa, todo mês a gente tinha um curso desses. Era bem legal. A gente tinha o curso com o autor do material e eles faziam essa ponte em vários conteúdos, ele dizia o que ele queria explicar. Não sei se vale como curso complementar, mas era legal, eu gostava.

9. Esses cursos aconteciam dentro da escola em que você trabalhava?
R: Dentro, não, era na rede. A escola era apostilada e a gente ia ao Etapa para fazer o curso. E na escola em que eu trabalhava, era obrigatório ir.

10. Quando foi isso?
R: Na faculdade, eu me formei em 2009. Eu me formei na sexta-feira e me casei no sábado.

11. Que legal! Você se formou em 2009 e os outros cursos vieram em sequência?
R: É, eu terminei a pós quando minha filha nasceu, em 2014.

12. Você já me disse que cursou disciplinas direcionadas para o ensino durante a sua formação acadêmica. Durante a graduação, até das obrigatórias da licenciatura, você escolheu alguns créditos optativos dentro desse mesmo tema. E depois, na pós, você também escolheu um curso voltado para isso.
R: Isso, para educação.

13. Dessas matérias optativas que você escolheu na graduação já em licenciatura, teve aquela que você mencionou e que trazia mais essas dinâmicas de ensino em sala de aula. Teve alguma outra que te chamou atenção, que você lembra mais?
R: Teve uma, eu gostava, era na Faculdade de Educação também. Era Psicologia da Educação, eu acho. Eu lembro que o professor trazia conteúdo de vários filósofos e pensadores da área de educação, então a gente tinha que ler muito, o que não costuma ser muito o forte da galera de exatas. Mas eu gostava das aulas. Ele nos fazia refletir sobre a ideia de educação no mundo de hoje. E ele era "famoso" – eu nem sabia disso quando eu fiz a matéria. Quando eu prestei concurso para a prefeitura, caíram perguntas com o nome dele.

14. Nossa!
R: É. E eu nem sabia que ele era um maioral. Foi engraçado quando eu entrei nessa disciplina e a sala estava abarrotada de gente. Ele começou a perguntar o que cada um fazia, e cada um vinha de uma área. Como era Psicologia da Educação, tinha

alunos do curso de geografia, de letras... Na hora que eu falei que era de exatas, ele falou: “Você não dura um mês no meu curso”. Eu pensei: “Só porque ele falou isso, eu vou até o final”. E fui. Foi um curso bacana, ele me ajudou a construir vários pensamentos. Apesar de ser uma matéria que não me atraía muito antes, por ser da área de psicologia, eu gostei, na época me fez pensar bastante coisa[34].

15. Você falou que fez concurso. Você chegou a passar? Você trabalhou na prefeitura?
R: Passei, trabalhei 4 dias. Mas eu não cheguei a ir para a sala de aula. Como eu passei com uma pontuação boa, eu poderia escolher a escola em que eu quisesse trabalhar. Minha mãe e meu marido falaram: “Pelo amor de Deus, você não vai trabalhar no Estado!”. E eu falava: “Por que não?”. E fui. Foi numa época que o Estado pagava para você durante 6 meses fazer um curso. Eu fiz esse curso também – foi um curso online, não sei se ainda é assim. Era com vários conteúdos e *ensinava a dar aula*. E aí você ganhava na época R$1200,00 por mês – era muita coisa. É muito interessante até de pensar, porque eram conteúdos que a gente explica na sala de aula e que, aparentemente, os professores não sabiam.

16. Então mesmo tendo uma boa nota, uma boa classificação, você precisava fazer um curso – era tipo um nivelamento, você diria?
R: Era, sim, tipo um nivelamento. Todos que passavam tinham que fazer o curso antes de escolher a escola onde iriam lecionar. E, ao final do curso, havia uma prova. Essa prova era presencial. Eu ouvi as pessoas falarem: “Nossa, eu aprendi 'tal coisa'” e me impressionava, porque eram coisas muito básicas, muito, muito básicas de ensinar, mesmo. Soma com frações, essas coisas assim. Depois que você fazia o curso, você escolhia a escola. Eu escolhi a escola que era perto da minha casa na época, só que eu já trabalhava em um outro colégio. Quando eu cheguei para assumir as aulas, eu falei: “Olha, não tenho todos esses horários disponíveis, eu trabalho em outra escola. Preciso dar uma ajustada”. Aí a moça falou: “Não, é assim: a gente vai te dar o seu horário e o horário que cair é esse, a gente até dá uma ajeitadinha, mas não tanto”. Eu falei: “Mas como assim? Eu não

[34] No momento da entrevista, não me ocorreu perguntar detalhes do que a interessou na disciplina, em relação ao ensino ou, ainda mais, ao ensino de matemática. Mas as visões da professora P3 sobre seu trabalho ficam claras ao longo da nossa conversa.

vou largar o outro colégio”. Era maio, era no meio do ano. Aí ela falou: “Mas quando cair em uma aula sua em outra escola, você falta aqui”. Eu falei: “Como assim?”. Ela: “É, você falta, você vai abonando”. Eu falei: “Não, não é certo eu fazer isso, porque vão ter pessoas me esperando para dar aula”. Ela repetiu: “Mas é assim, não dá para a gente mexer em horário, é o horário que cair”. Daí eu falei: “Então me tira disso”. Aí eu exonerei, nem entrei. Mas esse curso que a gente fazia, tinha um estágio também. Então eu fiquei um tempo com os professores na sala de aula dentro da escola estadual, à noite.

17. Você comentou que tinha um conteúdo sobre somar frações, e aí tinha lá como faz a soma de fração? E tinha alguma coisa sobre como você deve *ensinar* a soma de frações?
R: Olha, faz muito tempo, foi em 2010/2011. Mas eu acho que tinha, sim, algumas coisas sobre como você vai abordar o conteúdo com o aluno, que tipo de exercícios você poderia usar, mas era bem ralo, e mesmo assim as pessoas não sabiam.

18. E esse estágio durou quanto tempo?
R: Eu acho que eu tive que assistir umas 10 aulas.

19. E foram quantos meses de curso, mesmo?
R: 6 meses. Eu lembro, porque a gente recebia o dinheiro e eu achava muito. Eu falava: “Não é possível que alguém pague para eu fazer um curso desses”. Só coisas que eu já sabia. Aquilo me deixou bem assustada.

20. E há quanto tempo que você atua como professora? Desde 2009?
R: Não, desde 2004, logo que eu entrei na faculdade. A prefeitura de Jandira tinha um convênio com a USP e contratava os estudantes como professores para um cursinho popular da cidade. Quando eu entrei na USP, um amigo meu, que trabalhava nesse cursinho, não ia mais poder fazer esse estágio, porque o tempo máximo era de 2 anos. Ele me indicou e eu fui. Era uma delícia trabalhar naquele lugar. Foi lá que eu aprendi a dar aula. Era maravilhoso, fiquei muito triste quando eu não pude ficar mais.

21. Você entrou na faculdade em 2004?
R: Eu entrei em 2003. No começo de 2004, eu comecei a dar aula nesse cursinho. Eu fiquei lá em 2004 e 2005. Depois disso, fui para uma empresa, trabalhei no RH, mas não gostei. Eu era estagiária, ganhava supermal, não fiquei muito tempo e fui dar aula particular. Era uma agência de aula particular que me chamava, e eu dava aula particular quase todos os dias. Depois, me chamaram nessa mesma empresa em que eu trabalhei como estagiária, mas para ser analista de RH. Eu voltei em um cargo legal, que ganhava mais. Mas também não fiquei muito tempo. Logo me chamaram numa escola – eu ainda estava na faculdade. Aí eu comecei a trabalhar numa escola mesmo, como professora regular. Foi nessa escola que eu trabalhei com material Etapa. Era uma escola pequena e de bairro.

22. Era em São Paulo?
R: Era em São Paulo, perto da minha casa. Na época eu tinha duas turmas de cada ano: 6°, 7°, 8° e 9°. Essa escola só ia até o Ensino Fundamental. Depois eu fui para o colégio em que eu trabalhei até o ano retrasado. Peguei o Ensino Médio, que é mais a minha cara e que eu gosto mais. Eu dava aula para 8°, 9° e 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Aí eu vim para a escola E2.

23. E hoje você também trabalha em um outro lugar, conciliando, não é? Com videoaulas?
R: É, chama Vetor EAD. Era só presencial, não existia EAD, mas existia um projeto para o EAD que não se colocava em prática. Quando veio a pandemia, todas as aulas se tornaram virtuais e agora acabou a parte presencial, a gente só tem o EAD.

24. É pré-vestibular?
R: Sim.

25. Nesse período desde 2004 até hoje, quando você começou a abordar o tópico dos números irracionais e números reais em sala de aula? Nas aulas particulares, vamos de acordo com a demanda, né?
R: É, nas aulas particulares, não sei te dizer. Para alguns alunos eu dei aula desde o 6º ano até nem sei qual ano, já conhecia a família e até jantava na casa deles. Além desses, no cursinho eu dava a parte de álgebra, então acredito que eu tenha

abordado esse conteúdo nesse primeiro cursinho em 2004. Era um cursinho popular e o material era doado por uma igreja, um material bem pobre. A gente tinha que complementar bem, faltava muita coisa, então acredito que eu tenha complementado a parte de números irracionais e em algum momento falado de conjuntos numéricos. Mas, no cursinho, isso tudo é muito corrido. Bem diferente da abordagem no Ensino Fundamental. No Ensino Fundamental, a abordagem é bem conceitual – você mostra o conceito, de onde vem... No cursinho, a abordagem é mais “o número irracional é esse aqui e pronto”, você não entra muito no mérito do *que* é.

26. Você diria que o cursinho é mais focado na aplicação?
R: É, no cursinho é mais “vamos usar”.

27. Em que momento você lembra que começou a introduzir o assunto, dessa forma mais conceitual que você falou, no Ensino Fundamental, em que o aluno estava vendo o conjunto dos números irracionais pela primeira vez com você?
R: Não vou saber a data, mas foi nesse primeiro colégio em que eu trabalhei. Provavelmente no 7º ano, porque, como era material Etapa, os conteúdos eram todos puxados para frente.

28. Há quanto tempo você trabalha na escola E2?
R: Desde 2020.

29. E há quanto tempo você dá aula desse tópico?
R: 3 anos na escola que eu mencionei anteriormente, depois 9 anos no Colégio Inovação. No Inovação, foram 3 anos sem dar essa matéria, depois me trocaram para álgebra e fiquei dando esse conteúdo por 9 anos – tanto no 8º quanto no 9º. No 9º, eu puxava o assunto de novo, porque eles já sabiam Teorema de Pitágoras, então eu fazia a construção da diagonal do quadrado e, com o compasso, localizava a $\sqrt{2}$ na reta.

30. E aqui nessa escola?
R: Nessa escola, desde esse ano. Ano passado, eu dava geometria.

31. Tem alguma característica nessa escola, ou nos alunos dessa escola, que fez você adaptar a aula que você já dava antes? Quais seriam essas características e como foi adaptada?
R: Essa é a primeira vez que eu trabalho com livro. Todas as vezes que eu trabalhei antes foi com apostila. A apostila é aula a aula, tem que dar o assunto daquele jeito que o autor propõe e não tem muita liberdade. Apesar de eu sempre fugir, eu nunca fui muito apostilada...

32. Por quê?
R: Era muito “tacado”. Até fazem algumas demonstrações, mas não é muito a cara do aluno do 8º ano. Então eu sempre fazia essas adaptações. No Anglo, eles faziam sugestões: “tente trabalhar com o aluno assim...” e traziam algumas sugestões e maneiras diferentes, que às vezes nós seguíamos. Mas com o livro fica mais aberto. Você pode procurar mais formas de dar o conteúdo, e você também tem mais tempo. Só por isso já foi diferente.

33. Então você se sentiu mais livre?
R: Sim, mais livre para dar o conteúdo.

34. Houve alguma outra adaptação?
R: Aqui eu tive mais tempo, o tempo que eu achava necessário para dar o conteúdo. Também tive que pensar direito na abordagem, porque como no 9º ano é bem profunda a parte de radiciação, e no 8º não há muitas dessas propriedades, algumas coisas eu não podia falar ali naquela hora. Por exemplo, "vamos multiplicar essas raízes". E eu não podia perder tempo com essa explicação, que eles terão ano que vem, então fui me segurando em algumas coisas, expliquei outras e fui fazendo assim.

35. Essa informação de que as propriedades de radiciação estão no 9º ano você sabe porque conversou com a professora no 9º?
R: É porque eu tenho acesso ao livro. Eu dou aula no 9º ano também, mesmo sendo geometria, é o mesmo material didático.

36. Você comentou comigo que a atividade que eu assisti nas suas aulas, de construir o quadrado, veio do livro. Certo?
R: É. Antes, no 9º ano, eu utilizava também a diagonal do quadrado, mas aqui eles ainda não sabiam Teorema de Pitágoras. E lá na outra escola, no 8º ano, eu nem falava de onde vinha o número irracional, eu apresentava o número irracional e pronto. Eu nem conhecia essa abordagem que o livro trouxe, e foi aquilo que eu te falei, eu sempre preparo aula, mesmo que eu já tenha dado o conteúdo – gosto de olhar o livro e dar uma pesquisada, até porque o material é novo para mim. E eu gostei dessa abordagem, porque a gente consegue trabalhar no 8º ano com eles, mostrando, e sem usar Pitágoras. Usando a ideia de área.

37. Como é a sua rotina de preparação de aula?
R: Eu preparo aulas semanalmente. Como eu trabalhei no 5º ano, no primeiro ano no Inovação, eu tive que fazer semanário, então peguei esse ritmo. Lógico, agora não preciso mostrar para ninguém, mas faço para me organizar e para preparar as minhas aulas: onde eu estou e o que eu vou dar essa semana. Então, por exemplo, essa semana vou começar o conteúdo dos irracionais – então, normalmente, eu preparo o conteúdo de irracionais inteiro: o que eu vou falar, como eu vou falar, o que eu tenho que falar aqui e ali etc. Eu tenho 3 aulas semanais, então eu preparo o conteúdo e divido nas semanas.

38. A maioria das aulas que eu assisti foi online, a escola tinha fechado novamente. As aulas começaram em fevereiro online, no final de fevereiro começou o ensino “híbrido”, e no final de março a escola fechou novamente. Em abril estávamos online – e foi bem nesse período o conteúdo.
R: É, quando nós combinamos estava no presencial, mas depois fechou de novo.

39. Em abril, teve semana de provas (todas online) e, após as provas, eu cheguei a assistir uma aula no esquema híbrido.
R: Que foi só a finalização, né?

40. Isso. Quais adaptações você fez para esses dois formatos? No online, entendo que você tem a experiência do Vetor, mas o “híbrido” é uma novidade para todo mundo.

R: Na verdade, eu uso a mesma técnica. É só mais cansativo estar no híbrido, porque você tem que “dar conta” de quem está na sala e de quem está em casa, e as interações são diferentes. Quando você está na sala com o aluno, a participação é maior. Só tem você na frente dele – não tem computador, não tem TV a cabo, então ele acaba interagindo com você. Tem essa diferença. Mas o “como” fazer é mais ou menos como eu já fazia em casa: eu uso o tablet, espelho o que estou fazendo, o meu tablet é a lousa e faço a mesma coisa. A interação com os alunos é melhor no híbrido, mas é mais cansativo, já que é preciso dar conta também de quem está em casa.

41. Você diria que houve alguma adaptação nesse momento que foi específica para o conteúdo dos números irracionais?
R: Não.

42. Quais são as dificuldades mais frequentes dos alunos que você observa ao tratar desse assunto?
R: É entender que uma raiz não exata não tem um valor exato. Eles querem achar o valor exato e teimam que existe. Você fala que não existe e eles continuam tentando. E daqui a pouco parece que eles esqueceram que não tem. Hoje, na aula, eu estava explicando expressões algébricas. E nas classificações das expressões algébricas, tem as expressões algébricas irracionais – que é quando, na variável, tem a raiz. E eu perguntei para eles: "Vamos fazer uma associação... Quais eram os números irracionais?". E o primeiro número irracional que todas as salas falam é o $\pi$. Que coisa doida! E eu insisto: "Mas tem uns que a gente usa muito... Quais eram? Quais outros?". E então alguns se lembram de $\sqrt{2}$ e eu consigo relacionar.

43. Você está querendo dizer que eles não lembram das raízes?
R: Eles lembram depois que você instiga. Eu achei engraçado que eles lembraram primeiro do $\pi$.

44. Por que você acha que isso acontece?
R: Eu não sei. Eles não estudaram circunferência para falar do $\pi$... Mas acho que é uma coisa meio mística. Todo mundo conhece. Se você falar do $\pi$ para a minha

mãe, ela vai lembrar que existe o número $\pi$. Talvez ela não saiba quanto é, ou onde vai usar, mas sabe que existe. Aparece até em filme.

45. E quando você fez essa pergunta, eles falaram só um número? Só o $\pi$?
R: Em uma sala, falaram também do número neperiano. Mas parece algo que os instiga. “Como assim, um número que tem um nome?” A raiz é “raiz de dois”, “raiz de cinco”, “raiz de sete”, tem um monte! E o $\pi$ e o número neperiano, não. Eles ficam mexidos.

46. E quais seriam as suas maiores dificuldades dentro da sala de aula abordando esses tópicos? Se você sente que tem alguma.
R: Eu sinto. Eu acho que a gente entra, nessa pergunta, na ideia de cursinho. A minha formação como professora começou no cursinho. Então os números irracionais eram um tipo de número que iríamos usar e ponto. Acabava sendo uma coisa básica: ele existe, ele está ali e ponto, vamos usar – e se usa assim. Então ensinar o que é básico, para a gente, é muito difícil, entende? Pelo menos para mim. Por isso que quando me puseram no 5º ano, que eu tinha que ensinar as pessoas a dividir, eu só fiquei 1 ano. Como assim eu vou ensinar a dividir? Ter que ensinar o porquê de uma coisa que para você é básica, é muito difícil. É essa a dificuldade que eu sinto. Quando eu vou ensinar, para mim é tudo tão óbvio, que fica difícil ensinar o outro o que ele tem que aprender e que, para ele, não é básico.

47. E quando você sente essa dificuldade, ela aparece quando planeja a aula, quando dá a aula, nos dois momentos...?
R: Ela começa quando você está planejando a aula. “Como eu vou ensinar isso aqui agora?”

48. E quando ela aparece durante o planejamento, você vai buscar algum apoio em algum lugar?
R: Eu normalmente busco apoio, sim. Procuro em vários materiais didáticos. Hoje, graças a Deus, a gente tem tudo online, temos mais acesso a eles. Então eu procuro em dois, três livros diferentes como que eles trazem o conceito. Mas eu também tenho que me aproximar ao máximo do material que a gente tem, porque, se sai muito do nosso material, fica meio perdido. Eu gosto muito da Conquista da

Matemática. E é um livro que eu usei na escola, quando eu fui estudante. Lógico, na versão de anos atrás, mas eu gostava dele. É um livro que traz muito exercício, traz a prática. Eu gosto de livros que trazem exercícios, que trazem jeitos de pensar.

49. E como estava o conteúdo dos números irracionais nesse livro? Você chegou a pesquisar?
R: Pesquisei. O jeito de explicar era bem diferente. Mostrava a reta numérica, com "buraquinhos", e falava “E agora?”, porque faltavam números. A partir daí, ele começava a criar um conceito de radiciação, mas não trazia uma demonstração e nem algo concreto para o aluno. Então gostei mais do nosso livro. E, se eu não me engano, começava também com um problema. E a partir desse problema é que ele traz o conteúdo.

50. Quando você está planejando a aula e sente a necessidade de um apoio, você pesquisa em outros materiais. E quando você está na sala de aula e você se depara com alguma dificuldade, ou alguma questão do aluno que te instiga, ou algum tipo de obstáculo, a que você recorre para resolver ou contornar essa situação?
R: Já falei para os alunos: “Não sei, vou procurar e trago na próxima aula”. Não tenho problema com isso. Agora, se eu conseguir explicar de outras maneiras, eu vou explicando. O que eu souber e o que eu lembrar do que eu pesquisei, eu uso. Acho que essa ideia da preparação de aula também traz bastante conteúdo e outras formas de pensar, porque os livros variam bastante. Eu vou fazendo para eles tudo o que eu lembro.

51. Para isso, o professor tem que ter repertório. Seja porque você estudou na graduação, ou na pós-graduação, ou durante o planejamento das aulas, há esse repertório.
R: Sim. Todos os lugares em que eu trabalhei me fizeram a professora que eu sou hoje. Lá naquele cursinho lá atrás, era metodologia UNO, nem sei se existe mais. Depois eu fui para o Etapa, que era “surtado” em matemática. Eles dão a matemática em um nível “plus”. Depois veio o Anglo, com a ideia mais de contextualizar a matemática. Pegou essa época de que tudo tem que ser contextualizado, então a apostila também trazia essa contextualização. Ah! E eu fiz

também revisão de livro, material didático. Então eu trabalhei com um monte de material didático, porque eu fazia revisão desses livros. Isso também vai criando repertório.

Obs.: Paramos a entrevista devido ao horário e combinamos de continuar em outro dia.

## ENTREVISTA COM A PROFESSORA 3, PARTE 02

**Entrevistado(a):** Professora P3
**Data:** 25 de maio de 2021, 17:10

1. Hoje é dia 1º de junho, uma semana depois da primeira parte da entrevista. As últimas perguntas ficaram para hoje. Na semana passada, você falou bastante sobre a sua formação e, como pesquisadora, consegui perceber um pouco da sua visão sobre a educação. Eu assisti àquela atividade do quadrado duplicado, que introduziu o conjunto dos números irracionais. Como foi a elaboração dessa atividade?
R: Eu vi a atividade desenhada no livro didático dos alunos e então quis que eles fizessem o quadrado, recortando e montando, para que eles vissem como as coisas iam se encaixar, visualmente mesmo. Achei que só olhar no livro poderia passar batido. Eu vi essa atividade no livro e pensei em perguntas para essa situação, para que os alunos se sentissem instigados a fazerem a atividade. A partir da área de um quadrado, eu queria que eles me contassem o lado do quadrado. Quando eu falava uma área que era um número do qual eles sabiam extrair a raiz quadrada, eles sabiam achar o lado do quadrado. Mas quando eu falei uma área que era um número que eles não sabiam extrair a raiz quadrada, que era o 8, eles não conseguiam me dizer o lado. Na cabeça deles, inicialmente, eles nem pensavam em raiz quadrada nesses termos. A partir disso, construímos dois quadrados de área 4 e com lados conhecidos, recortamos e montamos um quadrado de área 8. Depois eles

mediram e perceberam que, na verdade, não dava para medir: cada um achava uma medida. Essa foi a ideia da atividade.

2. E, além disso, os valores encontrados eram elevados ao quadrado e o resultado nunca era 8.
R: Isso, eles viram que nenhum deles dava certo. Por “melhor” que fosse, não dava certo.

3. Você já tinha aplicado essa atividade alguma outra vez?
R: Não.

4. E esse ano, você aplicou várias vezes em todas as salas de 8º ano?
R: Sim.

5. O que você achou das reações dos alunos? Quais reações mais apareceram?
R: A maioria deles ficou instigado pensando: “Será que não vai dar mesmo? Nem que um meça muito bem?”. Ficou esse ponto de interrogação neles. "Será que não dá certo mesmo?" Na verdade, a gente acaba falando para os alunos que não. Eu não sei se eles realmente ficam convencidos disso. A gente tenta.

6. Talvez seja difícil convencer, mas quais são as vantagens dessa atividade?
R: Principalmente no 8º ano, as coisas saem do palpável e vão para o abstrato. Então, quando você traz uma atividade mais palpável para eles, parece que encaixa melhor na vidinha deles. Essa é uma grande vantagem.

7. Em outras escolas, como você mesma chegou a vivenciar, o conteúdo dos números irracionais começa um pouco mais “tarde”, no final do 8º ano ou até no 9º ano. Você identifica que isso faz diferença para você como professora?
R: Eu gosto que comece antes. Antes desse assunto, eu tive que ensinar sistemas, porque eles iriam precisar em geometria.

8. E isso já estava no planejamento do 8º ou foi um conteúdo que ficou do 7º ano para ser visto agora?
R: Sistemas já faz parte do conteúdo do 8º, além de ser visto um pouco no 7º, mas no livro fica depois dessa introdução de números irracionais. Eu tive que dar antes, porque eles usam em geometria, que segue uma apostila diferente. Então, antes, eu

encaixei esse conteúdo, até porque já vinha do 7º também. Mas eu não consegui dar a parte do encontro das retas, porque elas se encontram nos números reais. Então eu acabei pulando essa parte, e aquilo me deixou desconfortável, eu dando sistema sem poder falar dos números reais. Então tem várias coisas que a gente já faz no 8º ano que, sem os números reais, parece que fica faltando alguma coisa.

9. Você também acha que faz diferença para o aluno?
R: Sim.

10. Isso de adiantar um conteúdo no planejamento anual pensando na outra frente, de geometria... Pensando no que você já me falou de ter introduzido esse assunto utilizando o Teorema de Pitágoras em outras escolas, será que a frente de geometria não poderia adiantar esse assunto para que você fizesse a introdução dessa forma?
R: Como eu dei geometria ano passado, eu sei que o conteúdo de triângulos fica só no final do ano. Então teria que adiantar muita coisa para conseguir “casar” os conteúdos no segundo bimestre.

11. Você diria que na sua formação você cursou disciplinas que te auxiliaram a se sentir mais preparada dentro da sala de aula, especificamente ensinando o conteúdo de números irracionais?
R: Mais na pós-graduação. Na faculdade mesmo, muito pouco. Não sei se pelo fato de ter ido para o bacharelado e depois feito a parte da licenciatura... Então eu acabei fazendo mais matérias de educação do que de educação na matemática. Acho que isso também deixou uma lacuna.

12. Você lembra de algo específico para o ensino de números irracionais na sua pós-graduação?
R: Tivemos uma disciplina em que trazíamos atividades mais palpáveis para as aulas. Lembro muito de uma atividade sobre fatoração e fator comum, em que recortamos quadrados e montamos a fatoração de um polinômio. Nessa matéria, nós falamos sobre os números irracionais com a ideia do Teorema de Pitágoras. Essa atividade dos polinômios ficou marcada em mim porque eu e uma outra menina, nós éramos uma dupla, nós tivemos que apresentar para outros grupos. Nessa disciplina, cada dupla pegou um tópico e elaborou uma atividade mais

palpável, e eu lembro que no tópico de números irracionais apareceu o Teorema de Pitágoras, com a diagonal do quadrado.

13. E como foi? Localização na reta? Algo mais?

R: Foi mais a localização mesmo. Era basicamente o que eu já conhecia, porque eu já trabalhava com isso. Construir um quadrado, traçar a diagonal, identificar o triângulo retângulo e calcular o tamanho da diagonal. Depois fazia a reta numérica, construía a perpendicular no 0 e depois fazia a transposição dos diferentes valores para encontrar a localização na reta numérica da $\sqrt{2}$ e de $2\sqrt{2}$ etc.

14. Muito obrigada novamente pelo seu tempo e sua disponibilidade.

## APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS

Olá! Por favor, preencha o formulário da maneira que for melhor para você. Os dois primeiros itens são os únicos obrigatórios. O e-mail é somente para que eu possa entrar em contato, caso necessário, a respeito do termo de consentimento para a participação na pesquisa. Seu nome e sua foto não serão analisados junto com os dados. São respostas anônimas que integrarão a pesquisa. Estou à disposição para esclarecer mais dúvidas.

E-mail:

Os seus pais ou responsáveis assinaram o termo de consentimento autorizando a sua participação nessa pesquisa?

( ) Sim
( ) Não

1. Explique com suas palavras o que você entende por um número irracional.

2. a) Escreva três números reais entre 2 e 5.

2. b) Escreva um número real entre 6,8 e 6,9.

Caso você deseje responder à questão 2 à mão em papel, por favor, envie a foto a seguir:
*(Adicionar arquivo)*

3. a) Escreva um número irracional entre 3 e 7.

3. b) Escreva um número irracional entre 12,5 e 12,6.

3. c) Escreva um número irracional entre 12/5 e 13/5.

3. d) Escreva um número irracional maior que $\sqrt{15}$.

3. e) Escreva um número irracional maior que 2/3.

3. f) Escreva dois números irracionais entre 40/11 e 41/11.

Caso você deseje responder à questão 2 à mão em papel, por favor, indique corretamente o(s) item(ns) e envie a foto a seguir:
*(Adicionar arquivo)*

4. Desconsiderando raízes não exatas, você poderia dar mais alguns exemplos de números irracionais?

Caso você deseje responder à questão 4 à mão em papel, por favor, envie a foto a seguir:
*(Adicionar arquivo)*

5. Ao responder a este formulário, você consultou algum material ou alguém? Se sim, por favor especifique os materiais ou a(s) pessoa(s) consultados.

6. Este questionário provocou em você alguma reflexão a respeito dos números? Se sim, qual?

## APÊNDICE C - TERMOS DE CONSENTIMENTO

### Termo de Consentimento Livre e Esclarecido entregue aos Alunos

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ______________________________________, RG ____________________, declaro saber da participação de meu/minha filho/a ______________________________________ na pesquisa O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS: UM ESTUDO SOBRE O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO CONTEÚDO NECESSÁRIO AO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pela pesquisadora Isabel Villas Bôas Bonacella, orientada pelo Prof. Dr. David Pires Dias, os quais podem ser contatados pelos e-mails isabel.bonacella@gmail.com e dpdias@usp.br ou telefone (11) 985-000-170.

O presente trabalho tem por objetivo: analisar a presença de Conhecimentos Especializados de Conteúdo, na definição de Deborah Ball, presentes nas aulas sobre números irracionais do 8º ano (turmas da tarde) da escola, e os instrumentos utilizados são: relatórios de análise de observação das aulas, entrevista com a professora e coleta de informações dos alunos.

Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

Nome e Assinatura do responsável:

____________________________________________________________

**Termo de Consentimento Livre e Esclarecido entregue aos Diretores**

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Eu compreendo os direitos dos participantes da pesquisa intitulada O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS: UM ESTUDO SOBRE O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO CONTEÚDO NECESSÁRIO AO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, orientada pelo Prof. Dr. David Pires Dias, e que tem como pesquisadora responsável Isabel Villas Bôas Bonacella, a aluna do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, os quais podem ser contatados pelos e-mails isabel.bonacella@gmail.com e dpdias@usp.br ou telefone (11) 985-000-170. Na qualidade de responsável por esta instituição, autorizo a participação de Tamira Augusto Actis. Compreendo como e por que esse estudo está sendo realizado. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

Nome:

Cargo:

Local:

Data:

Assinatura do responsável: ________________________________________

## Termo de Consentimento Livre e Esclarecido entregue aos Professores

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntária, da pesquisa intitulada O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS: UM ESTUDO SOBRE O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO CONTEÚDO NECESSÁRIO AO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, que tem como pesquisadora responsável Isabel Villas Bôas Bonacella, aluna do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientada pelo Prof. Dr. David Pires Dias, os quais podem ser contatados pelos e-mails isabel.bonacella@gmail.com e dpdias@usp.br ou telefone (11) 985-000-170. O presente trabalho tem por objetivos: analisar a presença de Conhecimentos Especializados de Conteúdo, na definição de Deborah Ball, presentes nas aulas sobre números irracionais do 8º ano (turma da tarde) da escola. Minha participação consistirá em ceder espaço para a pesquisadora assistir às minhas aulas e participar de uma entrevista. Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

Nome:

Assinatura: ______________________________________________

Local e data: