

**Modelagem matemática como processo
para o desenvolvimento do pensamento
analítico e reflexivo**

José Ocimar Barros de Souza

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo no
Programa de Mestrado Profissional
em Ensino de Matemática
para obtenção do Título de Mestre em Ciências

Orientadora:
Professora Dra. Bárbara Corominas Valério

São Paulo
Janeiro de 2020

**Modelagem matemática como processo
para o desenvolvimento do pensamento
analítico e reflexivo**

Esta é a versão original do trabalho e contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante defesa pública ocorrida em 11 de dezembro de 2019.

Membros da banca:

- Profa. Dra. Bárbara Corominas Valério
(Presidente) – IME-USP
- Profa. Dra. Cláudia Inéz Garcia – EACH-USP
- Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita – UNESP

DEDICATÓRIA

A minha esposa, Cristina, pela sua crença em Deus, confiança, perseverança e apoio incondicionais ao projeto a que me propus desenvolver.

Aos meus filhos, Felipe, Ana Beatriz e Pedro. Total fonte de inspiração. Meus verdadeiros heróis.

Aos meus pais, Hamilton e Zilmar (*in memoriam*), exemplos de dedicação, entrega, luta e amor.

Aos meus irmãos, Luis Eduardo e Maria Helena. Companheirismo e amor desde sempre.

Por fim, dedico particularmente, a minha força de vontade, a qual me propiciou no sucesso deste desafio a que me propus enfrentar e superar; a perseverança foi real diante de todas as adversidades encontradas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me manter, suprir e me proteger ao longo de toda a minha jornada.

À minha orientadora, Profa. Dra. Bárbara Corominas Valério. Além de mentora, uma amiga entusiasta que soube sabiamente indicar caminhos.

À Diretoria e Coordenação do Colégio COC Vila Yara por aceitarem, acolherem e acreditarem no projeto.

Aos meus queridos e dedicados estudantes, por constituírem a essência da minha existência, como professor.

Aos amigos e demais familiares que de algum modo apoiaram e acreditaram no sucesso desse trabalho.

Aos professores do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo, pela sua dedicação e entrega.

Aos professores David Pires Dias, Iole de Freitas Druck, Cláudia Inés Garcia e Vanderlei Minori Horita, por suas ricas e generosas contribuições durante os processos de qualificação e defesa final.

RESUMO

SOUZA, José Ocimar Barros de. **Modelagem Matemática como processo para o desenvolvimento do pensamento analítico e reflexivo**. 2019. s/n. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

A experiência profissional do autor, como professor na Educação Básica há mais de três décadas, mostrou que nem sempre uma aula bem ministrada, com ou sem o uso de tecnologia, por um professor experiente e competente, resulta em aprendizagem significativa para o estudante. A inquietude causada por essa constatação serviu como incentivo à procura de alternativas para o aperfeiçoamento do trabalho docente e, em consequência, na busca da melhoria da aprendizagem dos estudantes. Os diversos estudos realizados, nas diferentes disciplinas cursadas durante o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo, levaram o autor à opção de desenvolver um trabalho baseado nos pressupostos da Modelagem Matemática, tendo em vista que tal estratégia alia teoria e prática, propiciando aos estudantes amplas condições para a compreensão de problemas do mundo real. A pesquisa foi aplicada junto a um grupo de estudantes da 1ª série do Ensino Médio de uma Instituição privada de Ensino, situada na cidade de Osasco, na grande São Paulo. Por meio de uma situação problema, levantada pelo grupo de estudantes, a qual trata do aquecimento global, procurou-se aplicar a teoria relacionada ao trabalho com modelagem, associando-a a prática. Os dados estatísticos e gráficos pesquisados pelo grupo foram analisados, junto ao professor pesquisador, por meio de cálculos com matrizes e, também, com o auxílio da ferramenta Excel. O desafio do grupo consistiu na obtenção de uma lei de formação, por ajuste de curvas, que melhor representasse a situação, ou seja, o foco do trabalho relacionou-se com o estudo de funções, sobretudo na análise de tabelas, gráficos e lei de formação. Percebemos que por meio da ferramenta Excel foi possível obter uma modelação satisfatória, ou seja, uma função compatível aos dados. Durante o processo de modelagem, verificou-se a interação positiva dos estudantes com os desafios propostos e com a descoberta de novos objetos do conhecimento, necessários à compreensão do todo. Os diversos encontros e

reflexões realizados foram imprescindíveis ao desenvolvimento do pensamento analítico e reflexivo dos mesmos. Ao final, após a resolução do problema e obtenção da lei da função mais adequada à situação proposta, oriunda de um gráfico do aquecimento global, foi possível constatar, por meio de uma reflexão com o grupo de estudantes, o grande potencial de alcance num trabalho com a Modelagem Matemática, sobretudo no que diz respeito à luz que a matemática pode lançar sobre os problemas da sociedade, tanto na sua compreensão quanto na proposição de soluções alternativas.

Palavras-chave:

Modelagem Matemática, Funções, Aquecimento global, Excel. Ajuste de curvas.

ABSTRACT

SOUZA, José Ocimar Barros de. **Mathematical Modeling as a process for the development of analytical and reflective thinking**. 2019. s/n. Dissertation (Master) – Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2019.

The professional experience of the author, a school teacher for over three decades, has shown that well-taught lessons (with or without technology) is not always result in student's meaningful learning. This ascertainment encouraged the author to search alternatives to improve teachers' work and therefore, to increase student achievement in mathematics. The various studies undertaken on the different subjects of master's degree in Math Education from the University of São Paulo lead the author to develop a work based on the assumptions of Mathematical modeling. This strategy intends to combine theory with practice to provide broad conditions for students understand real-world problems. The research was applied with a group of students in the first grade of high school in a private educational institution, located in the city of Osasco, in the greater São Paulo. This group of students proposed a problem situation about global warming. Due to this situation, the author sought to apply theory related to modeling work, associated with the practice. Statistical data and graphs researched by students were analyzed with teacher by calculations on matrices and with the aid of the software Microsoft Excel. The challenge for participants was to obtain a law of formation by curve fitting that would best represent the situation. In other words, the focus of the work related to study of functions, mainly in tables analysis, graphs and a law of formation. Everyone knows by excel tool was obtained a satisfactory modeling, that is, a function compatible with data. The positive interaction of students with the proposed challenges and the discovery of new knowledge objects needed for global understanding was verified during the modeling process. The several meetings and reflections with students were indispensable for improve their analytical and reflective thinking. At the end, after problem solved and obtaining the better law of function of the proposal situation reflections the immense potential scope in working with mathematical modelling, mainly as mathematics can not only help to understand the society's problems, it can also help in proposing alternative solutions.

Keywords: Mathematical Modeling, Functions, Global Warming, Excel, Curve Fitting.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1. Informação, conhecimento e compreensão	13
2.2. Pensamento analítico, reflexivo e aprendizagem significativa	15
2.3. Operações do Pensamento	19
2.4. A Modelagem Matemática	23
2.5. Operações do pensamento como fundamento à Modelagem Matemática	26
2.6. As fases da Modelagem Matemática	27
3. DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	30
4. RELATO DOS ENCONTROS E RESULTADOS DO EXPERIMENTO	32
4.1. Apresentação detalhada do projeto – Encontro 1	32
4.2. Fechamento do tema para o projeto – Encontro 2.....	33
4.3. Interação sobre o problema do aquecimento global – Encontro 3.....	35
4.4. Obtenção de uma função linear por meio de uma tabela de valores bem comportados – Encontro 4.....	38
4.5. Análise de um vídeo sobre a aplicação do método dos mínimos quadrados – Encontro 5	42
4.6. Utilização do software Excel para a solução do problema do ajuste de curvas – Encontro 6	46
4.7. Uma conversa sobre a Mostra Cultural do colégio – Encontro 7	49
4.8. Estudo do gráfico do aquecimento global – Encontro 8.....	51
4.9. Apresentação, avaliação e reflexões do trabalho de pesquisa e planejamento de ações para a Mostra Cultural – Encontro 9.....	60
5. ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO APLICADO	63
5.1. Grupo que iniciou e finalizou o projeto.....	63
5.2. Grupo que iniciou e não finalizou o projeto.....	68
6. REFLEXÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	71
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
ANEXO 1: Questionário aplicado ao grupo que iniciou e finalizou o projeto	79
ANEXO 2: Questionário aplicado ao grupo que iniciou e não finalizou o projeto.....	81

1. INTRODUÇÃO

Lecionar a disciplina de Matemática profissionalmente é uma realidade desde meus incompletos dezenove anos, acreditando por um longo tempo que a aprendizagem dos saberes escolares adquiridos por um estudante eram resultados de um conjunto de fatores, tais como, sua natural habilidade pela disciplina; sua aplicação, atenção às aulas e dedicação na resolução de tarefas e listas de problemas; estudos complementares; uma aula bem ministrada, por um professor apaixonado, envolvente, com domínio técnico de sua disciplina aliado ao controle de sala e, sobretudo, comprometido com o sucesso de todos os estudantes; além de uma escola estruturada com horários diferenciados para reforço e aprofundamento.

Após anos de magistério foi possível compreender que o resultado numérico obtido pelo estudante por vezes não reflete o seu nível de compreensão dos conceitos da disciplina, especialmente se considerarmos que os procedimentos e diferentes sistemas de avaliação adotados pelos professores, na quase totalidade dos colégios brasileiros, reforçam a memorização (decoreba) de conteúdos por valorizarem de forma acentuada a nota, obtida por meio de provas e trabalhos inseridos em um calendário fixo, estimulando, segundo Moreira (2012), uma aprendizagem mecânica e sem significado. Nesse sentido, aos estudantes que apresentavam resultados insatisfatórios, frequentemente os creditava à sua dificuldade; inaptidão numérica e/ou de interpretação; complexidade do assunto; falta de interesse e/ou atenção; ausência de registros e tarefas; ausência de pré-requisitos ou, ainda, antipatia pelos conteúdos matemáticos.

Em síntese, tais concepções baseavam-se no fato de que o resultado do estudante, satisfatório ou não, eram decorrentes da combinação de um ou mais fatores dos quais foram citados nos parágrafos anteriores, porém, observando, a cada ano, um número crescente e considerável dos mesmos e independentemente de suas aptidões, demonstrando desinteresse gradativo pelo conhecimento matemático, com seguida queda de aprendizagem. Diante dessa constatação, algumas questões passaram a fazer parte do cotidiano escolar, como, O que está havendo com as minhas aulas?; Por que os estudantes não vêem a beleza que há na Matemática?; Como é possível que dedicação ao ensino não implique em aprendizagem aos estudantes?

Para elevar as inquietações ou talvez frustrações, uma fala chega e ecoa a nossos ouvidos: - "O senhor foi o melhor professor de Matemática que eu já tive! Pena que eu pouco sei sobre o que foi ensinado!". A legitimidade da afirmação coloca-nos diante da necessidade de rever as práticas, tendo em vista que o fato de dominar o conteúdo não garante a aprendizagem do (s) estudante (s).

Evidentemente existem consistentes argumentos e teorias que justificam o desinteresse e insucesso escolar de um estudante em Matemática. No entanto, embora haja clareza das inúmeras e relevantes variáveis envolvidas, não será foco deste trabalho uma discussão acerca dos diferentes aspectos que levam ao insucesso e/ou desinteresse pela Matemática. Pretende-se por aqui, discutir sobre o uso da Modelagem Matemática como uma estratégia que visa à aprendizagem dos estudantes, num ambiente permeado por situações-problema que favoreçam o desenvolvimento de habilidades, como, a capacidade de interpretar e manipular dados brutos; ler e interpretar informações apresentadas por meio de tabelas e/ou gráficos; identificar informações relevantes; aplicar o raciocínio lógico, hipotético e dedutivo; formular e analisar hipóteses; realizar conjecturas; generalizar; construir argumentações consistentes para tomar decisões responsáveis e coerentes e, por fim; analisar situações reais de forma crítica e reflexiva.

Para corroborar com a escolha da Modelagem Matemática como estratégia central desse trabalho de pesquisa, destaca-se o conceito de letramento matemático, previsto na Base Nacional Comum Curricular, com introdução no Ensino Fundamental e aprofundamento no Ensino Médio:

"O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. [...] O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (BNCC, 2018, p. 266)."

Ressalta-se, também, que a escolha por essa estratégia de trabalho deve-se ao fato da absoluta concordância com um dos conceitos defendidos pelo professor Rodney Carlos Bassanezi (2002, p.16), em que afirma: "A Modelagem Matemática

consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

Após a opção pelo desenvolvimento do trabalho por meio da Modelagem Matemática, surgiu a definição do tema: Funções.

A escolha desse tema deve-se ao fato de que as situações problema abordadas na Educação Básica, sobretudo no Ensino Médio, têm grande probabilidade de serem modeladas por meio de funções, estando ao alcance da compreensão dos estudantes. Em resumo, acreditamos que o trabalho com Modelagem Matemática, em vários momentos do processo, requer conceitos e linguagens utilizadas no estudo das funções.

Para reforçar ainda mais essa escolha, podemos argumentar de diversas formas, como, o tema possui ampla abrangência na Educação Básica, com fundamentos iniciados no Ensino Fundamental II, aprofundado em todas as séries do Ensino Médio; os conceitos estudados ao longo do curso tornar-se-ão aliados na aquisição de novos conceitos relacionados à Trigonometria e à Geometria Analítica e, importantes habilidades serão desenvolvidas ao longo deste projeto, como podemos elencar abaixo:

- Utilizar a linguagem algébrica, bem como sua simbologia e nomenclatura, como ferramenta para a interpretação de situações apresentadas na língua materna;
- Ler, interpretar, analisar e avaliar leis de formação, tabelas e gráficos cartesianos;
- Utilizar o software Excel para explorar tabelas e plotar gráficos;
- Utilizar o software Excel para realizar ajuste de curvas;
- Formular e testar conjecturas e hipóteses.

Além disso, o desenvolvimento de um trabalho com ênfase em funções amplia a possibilidade de utilizar algumas das grandes ideias da matemática que se inter-relacionam: equivalência, proporcionalidade, variação e interdependência.

Definido o tema, os objetivos e as habilidades que deverão ser abordadas no projeto, uma importante escolha vem a seguir: a metodologia a ser aplicada.

A escolha dessa metodologia depende dos questionamentos que se esteja interessado em compreender e, também, da forma de interação entre professor, estudante e conhecimento que se pretende propiciar. Assim, antes de explicitar-se a

metodologia utilizada, é necessário enfatizar algumas questões que norteiam esse trabalho: Como o estudo de funções, por meio da Modelagem Matemática, pode contribuir para o desenvolvimento dos pensamentos analítico e reflexivo dos estudantes?; De que maneira a análise de uma situação real, sob a perspectiva da modelagem, pode despertar o olhar crítico do estudante em relação ao mundo que o cerca?; Como desenvolver habilidades e competências necessárias à alfabetização em matemática, numa concepção de ensino e aprendizagem que rompe com os modelos tradicionais?

Para o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), alfabetização (letramento) em matemática é a capacidade de o indivíduo identificar e entender o papel que a matemática desempenha no mundo, fazer julgamentos bem fundamentados e utilizar a matemática e envolver-se com ela de forma que atenda às necessidades de sua vida como cidadão construtivo, consciente e reflexivo. Numa visão pragmática, a alfabetização em matemática é uma das condições essenciais para a construção da cidadania de um indivíduo. É válido ressaltar que tal conceito vem ao encontro do que defende Skovsmose, em sua Educação Matemática Crítica, e, ainda, que esses pressupostos estão em plena consonância no que se pretende com um trabalho baseado na Modelagem Matemática.

Para alcançar os objetivos propostos e buscar respostas às questões apresentadas neste trabalho, o experimento didático apresentou-se como a metodologia mais adequada. Esta escolha baseou-se também no fato de que a utilização dessa metodologia favorece de forma satisfatória o desenvolvimento da descoberta, da crítica e da prática social. Para Moura (1996), uma atividade orientadora de ensino tem uma necessidade: ensinar. Por meio de ações planejadas, o professor define o modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo, elegendo instrumentos auxiliares de ensino, que são os recursos tecnológicos necessários a cada objetivo. Tais recursos vão desde o giz e lousa à utilização de softwares, vídeos ou aplicativos.

Conforme já mencionado, o conteúdo escolhido para esse trabalho foi o estudo de funções, com sua linguagem, notação e conceitos específicos. Por meio da Modelagem Matemática pretende-se analisar a eficiência dessa linguagem na leitura, interpretação e análise reflexiva de diferentes situações reais. Destaca-se novamente a escolha do público alvo, a saber, estudantes da 1ª série do Ensino Médio, pois é nesse ano em que geralmente ocorrem a introdução, desenvolvimento

e aprofundamento do estudo das funções como relação de dependência biunívoca entre duas variáveis, bem como suas representações numéricas, algébricas e gráficas.

A questão norteadora do trabalho, por conseguinte, está centrada no pensamento analítico e reflexivo. Nesses dois aspectos do pensamento, concordamos com Bruner e Dewey. Para Bruner (1975) o pensamento analítico é uma forma de pensamento com o objetivo de compreender as situações por meio da decomposição em partes mais simples. Segundo ele, tal pensamento é condição primordial para a resolução de uma situação problema, uma vez que, para sua compreensão e solução, são necessárias uma sequência de etapas: definição do problema; formulação da hipótese; coleta de dados; condução da análise e, por fim, desenvolvimento da solução. Segundo Dewey (1979), desenvolver um pensamento reflexivo é estar em um constante processo de discernimento e compreensão da situação problema, no intuito de melhor conduzir as ações para compreendê-la e, em instância derradeira, solucioná-la.

Diante do exposto, pode-se sintetizar a questão central deste trabalho com a seguinte problemática:

“Como desenvolver o pensamento analítico e reflexivo dos estudantes, por meio do trabalho com Modelagem Matemática, na investigação de situações problema do mundo real que requerem conhecimentos específicos sobre as Funções?”

No caminho para tentar responder à questão proposta, torna-se necessário traçar alguns objetivos específicos, quais sejam: utilizar a Modelagem Matemática como uma estratégia diferenciada no processo de ensino-aprendizagem; significar, por meio da conexão entre teoria e prática, os conteúdos relacionados ao estudo de funções; romper com o paradigma de que a Matemática é uma ciência repleta de fórmulas e algoritmos a serem memorizados, com a finalidade de resolver situações mecânicas, repetitivas e muitas vezes, sem sentido; ressignificar o espaço da sala de aula, transformando-o num ambiente de pesquisa e descoberta; e analisar problemas reais, compreendendo a Modelagem Matemática como processo para o desenvolvimento do pensamento analítico e reflexivo.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O aumento do conhecimento é como uma esfera dilatando-se no espaço. Quanto maior a nossa compreensão, maior o nosso contato com o desconhecido.

Blaise Pascal

O propósito desse capítulo consiste em apresentar diferentes operações do pensamento, essenciais ao desenvolvimento do homem em todas as suas atividades, no fundamento ao trabalho com a Modelagem Matemática.

2.1. Informação, conhecimento e compreensão

Numa era em que as mudanças e demandas sociais acompanham o exponencial crescimento tecnológico, a discussão sobre a importância de diferenciarmos os conceitos de informação, conhecimento e compreensão, sobretudo nos muros da Escola e Universidade, torna-se essencial. A palavra informação deriva do latim "*informare*", que significa "*dar forma, modelar*", e que com o tempo, passou a ser usada para "*descrever algo*" ou "*criar noção sobre algo por meio da descrição do mesmo*". Entretanto, a ideia sobre esse "*algo*" depende do interlocutor, pois uma mesma informação pode ter significados diferentes para sujeitos diferentes, ou, ainda, pode não ter ou produzir significado relevante a quem quer que seja. De modo geral, independente dos diferentes conceitos e concepções acerca do que é informação, concordamos com Bruner (1957): "A coisa mais característica da vida mental, para além do fato de que aprendemos os acontecimentos do mundo real à nossa volta, é que constantemente vamos além da informação dada. (Bruner, J. *Beyond the information given*, 1957, p. 218) ". Ir além da informação dada nos remete inevitavelmente ao ato de refletir sobre o seu significado, ou seja, a uma reflexão.

Para Wiggins e McTighe (2019), a ideia de compreender é seguramente distinta da ideia de conhecer alguma coisa. Concorda-se com os autores, quando exemplificam: "Bem, ele sabe muito de Matemática, mas na verdade não compreende seu fundamento" ou "Ela sabe o significado das palavras, mas não compreende a frase". Conhecimento e compreensão envolvem pensamentos mais avançados, com conexões mais abrangentes, pois o ato de conhecer para

compreender envolve aspectos relacionados a conceitos, instruções, descrições, princípios, procedimentos, manipulação de dados, elaboração de hipóteses e teorias. Outro autor que requer atenção é Bloom (1956), quando afirma que compreensão é a capacidade de reunir habilidades e fatos, por meio da efetiva aplicação, análise, síntese e avaliação.

Entende-se que um dos maiores desafios do educador atual consiste em buscar diferentes estratégias, visando à aplicação de atividades que possibilitem ao estudante transformar uma informação ou um conjunto de informações em conhecimento, sendo este para a compreensão. Para John Dewey (1933) a compreensão resulta da aquisição de sentido dos fatos para o aprendiz. Segundo ele, entender o significado de uma coisa, um acontecimento ou uma situação é vê-la em suas relações com outras coisas. A relação entre meios e consequência é o centro e a essência de toda a compreensão.

Essa busca, inevitavelmente, conduzirá tais educadores às questões relacionadas diretamente ao pensamento, à forma de pensar, sobretudo se for considerado que a ação de pensar é a condição necessária para a concretização de uma aprendizagem com significado. Embora possa parecer óbvio às pessoas, consideramos importante ressaltar neste espaço, desde já, sobre a crença de que não há como um indivíduo aprender e conhecer profundamente sobre algo, sem pensar, sendo ainda mais pragmático, crer que somos o resultado da forma como pensamos, ou, ainda, da forma como conduzimos nossas ações e escolhas, orientadas pelos nossos pensamentos. Segundo Raths (1977), pensar é uma forma para aprender, ou seja, um caminho para a aprendizagem ou, ainda, pensar é uma forma de perguntar pelos fatos, e se o pensamento tem algum objetivo, os fatos assim encontrados serão significativos para esse objetivo.

As questões norteadoras do trabalho educacional, no dia a dia do ambiente escolar, desde o início com o planejamento anual e com os planos de aula bimestrais, até os momentos de avaliação contínua ou formativa, deveriam estar baseadas em:

“Como propiciar situações que levem os estudantes a pensarem de forma analítica e reflexiva? Que atividades, situações problema, questionamentos e estratégias podem conduzi-los ao verdadeiro ato de pensar?”.

“Como incentivá-los, por meio de tais atividades, ao exercício pleno e contínuo do questionamento, base do pensamento analítico e reflexivo?”.

“Como, por meio de perguntas que apresentam dilemas, podemos levá-los à compreensão das principais ideias que estão por detrás do conteúdo, indo além dele?”.

Antes de tentar buscar quaisquer respostas a tais perguntas, deve-se acreditar que é fundamental resgatar historicamente os motivos que levaram (e levam) o homem ao ato de pensar.

2.2. Pensamento analítico, reflexivo e aprendizagem significativa

Conforme destacou-se anteriormente, Bruner argumenta que o pensamento analítico é condição central para a resolução de problemas, enquanto Dewey defende a utilização do método científico e reflexivo como meio para obter a real compreensão do mundo em que vivemos. Bassanezi reforça que a atividade de aplicar a matemática é tão antiga quanto a própria matemática, sendo que muitos conceitos e teorias surgiram a partir de problemas práticos. Estabelecendo uma conexão entre as ideias defendidas por esses autores, pode-se entender que o ato de aplicar matemática, na busca da solução e compreensão de uma situação real, consiste necessariamente no exercício e desenvolvimento do pensamento analítico e reflexivo.

Desde os primórdios até os dias atuais, o homem pensa e age de acordo com suas necessidades no intuito de prosperar e garantir sua sobrevivência, liberdade e independência. Como nômade, ele pensou essencialmente na forma como poderia viver e se alimentar melhor, usufruindo ao máximo do que a natureza pudesse lhe oferecer. Para sua proteção, estabeleceu moradias em locais mais altos e seguros; descobriu o fogo, inventou a roda, desenvolveu artefatos para a caça, construiu embarcações para a pesca, além de incontáveis instrumentos para sua defesa e conquistas geográficas. Tudo fruto do pensamento, a serviço da solução de problemas reais, do seu cotidiano. Ao dominar as técnicas de plantio e irrigação do solo, deixou a condição de nômade, fixando-se na terra para cuidar das colheitas. As moradias, utensílios e instrumentos diversos precisaram ser adaptados à sua nova condição de vida. Por se fixar à terra, tornou-se definitivamente um indivíduo social, coletivo, deparando-se com uma gama de problemas inéditos que, por sua vez,

exigiram soluções novas e diferentes daquelas a que estava acostumado. Desenvolveu sistemas numéricos e formas de escrita distintas. Criou o comércio, originalmente movimentado por meio do escambo, depois, a moeda, as cédulas e, por fim, os bancos. O conhecimento, que primitivamente era prático e transmitido entre os povos de geração a geração, começou a ser multiplicado de forma mais técnica e sistematizada por meio de registros. A humanidade passou por diversas revoluções e transformações que influenciaram o modo de pensar, de resolver problemas e adaptar-se às novas demandas. Embora as escolas tenham sua origem no século XII, foi a partir do século XIX que as disciplinas começaram a ser divididas, num formato próximo ao que temos hoje. As formas de reprodução e multiplicação do conhecimento variaram de acordo com a época e as demandas da sociedade. Foram inúmeras transformações.

Para Raths, no entanto, o papel da escola, sobretudo no mundo pós-guerra, limitou-se às exigências das grades curriculares de ensino prescritas para cada disciplina, no sentido de garantir o cumprimento do programa e a cobertura dos conteúdos. O estabelecimento da prioridade em se cumprir o currículo e o programa sacrificaram de maneira considerável as atividades que enfatizavam o pensamento. A sociedade, após esse período, apresentou uma tendência conservadora que influenciou de maneira decisiva sobre o ensino do pensamento. Havia um desejo de soluções simples para os problemas complexos. Se houvesse algo errado com a sociedade, provavelmente a origem estaria nas escolas, que supostamente não davam a devida atenção à leitura, nos diferentes níveis de escolaridade. De um modo geral, havia um desprezo pelos processos intelectuais, o que descartou praticamente o pensamento analítico e reflexivo dos currículos escolares.

No ano de 1985, Gardner, em continuidade a um movimento iniciado na década de 1950, utilizou a expressão "Revolução Cognitiva" para designar um movimento interdisciplinar que combinava novas ideias da psicologia, da antropologia e da linguística, mesclando-as com os recentes campos da inteligência artificial, da computação e da neurociência. Esse movimento colocou não só o pensamento em evidência, como também diferentes inteligências, as inteligências múltiplas de Gardner. Para Gardner, a sociedade clamava por soluções para diferentes problemas, as quais só se concretizariam por meio de indivíduos que apresentassem propostas criativas, práticas e eficientes e, um currículo pautado na

memorização de técnicas e estratégias para a leitura ou cálculo, não cumpriria esse papel.

No mundo contemporâneo, ser o detentor de uma informação já não é mais algo tão poderoso como em outrora, pois o diferencial de cada indivíduo reside no fato de ele saber interpretar e manipular as diferentes informações obtidas. A escola precisa proporcionar um ambiente que possibilite o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais para que esse indivíduo esteja em condições de compreender o mundo que o cerca. Embora o presente trabalho esteja direcionado aos alunos da 1ª série do Ensino Médio, destaca-se o que prevê a BNCC, Base Nacional Comum Curricular, para o Ensino Fundamental (2018, p.10):

"As aprendizagens essenciais devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento".

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho, desde as primeiras séries do Ensino Fundamental até seu aprofundamento no Ensino Médio.

Por meio dessas competências, a BNCC reconhece que a Educação deve firmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza. Tais competências, inter-relacionadas, deverão ser desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica, no intuito de garantir a formação de um jovem competente para enfrentar os problemas do mundo real e, também, problemas que ainda sequer existem. Novamente, retorna-se às questões centrais que desafiam o professor atual:

“Como desenvolver competências num currículo baseado na cobertura dos conteúdos?”

“De que maneira as suas atividades de aula poderão servir ao desenvolvimento do pensamento?”

“Como elaborar um currículo que estimule a valorização do conhecimento e não simplesmente uma nota ou meta numérica a ser alcançada?”

Um possível caminho para responder a estas questões consiste na elaboração de um currículo pautado numa aprendizagem significativa. Para Moreira, aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva no sentido de não literal, ou seja, não ao “pé da letra” e, não arbitrária significa que a interação não é como qualquer ideia prévia, mas como algum conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende. Ainda segundo Moreira a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. A este conhecimento prévio, especificamente relevante à nova aprendizagem, David Ausubel chama de subsunçor ou ideia âncora. Para Ausubel, a aprendizagem significativa compreende na ampliação e reconfiguração de ideias e conceitos já existentes na estrutura mental, capacitando o indivíduo a relacionar e acessar novos conteúdos. Neste constante concorda-se com a visão humanista que Joseph Novak dá à aprendizagem significativa, propondo uma integração construtiva e positiva, entre sentimentos e ações, na condução do engrandecimento humano. A perspectiva de Novak é que, quando a aprendizagem é significativa, o aprendiz cresce, tem uma sensação boa e se predispõe a novas aprendizagens na área. Mas o corolário disso é que quando a aprendizagem é mecânica, o sujeito acaba por desenvolver uma atitude de recusa à matéria de ensino e não se predispõe à aprendizagem significativa.

Por fim, o propósito deste trabalho é mostrar que, apesar de um Currículo pré-estabelecido, é possível desenvolver uma aprendizagem significativa por meio da Modelagem Matemática, na busca de soluções para problemas reais e de relevância aos sujeitos envolvidos, pois como Bassanezi (2014) afirma: "para o desenvolvimento de um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedades, necessitamos lançar mão de instrumentos matemáticos relacionados entre si a outras áreas do conhecimento humano."

2.3. Operações do Pensamento

Da infância à fase adulta, o ser humano é levado a crer que o pensamento está relacionado à maturidade e que, para nos tornarmos adultos devemos pensar e refletir acerca de nossas atitudes, no âmbito pessoal e profissional. Expressões como: "*Você não pensou no que fez?*", "*Pense melhor antes de tomar essa decisão!*", "*Viu no que deu, agindo sem pensar?*", são comuns no cotidiano de todo indivíduo. A crença de que evoluímos em relação às nossas ações, orientadas sob a forma como pensamos, predomina, historicamente, em todas as sociedades. De fato, todo avanço tecnológico, nos diversos campos do conhecimento, é fruto de indivíduos que, por meio do pensamento inquietante, formulam hipóteses, testando-as e validando-as com as devidas aplicações no mundo real.

Para o célebre matemático Blaise Pascal: "[...] toda a nossa dignidade reside no pensamento. É através dele que devemos nos elevar, e não através do tempo e do espaço, que não podemos preencher. Procuremos, portanto, pensar bem! Aí está o princípio da moralidade".

Na comunidade escolar, é senso comum que o pensamento é um fator essencial para que se obtenha uma aprendizagem com significado. Essa crença coloca, novamente, o ser humano diante de questões perturbadoras e centrais, tais como: "Que estratégias e atividades, aplicadas em sala de aula, serão propícias a favorecer o desenvolvimento do pensamento?"; ou "Como desenvolvê-las e aplicá-las, numa grade curricular tradicional que se baseia na crença de que os estudantes aprendem e assimilam os conteúdos de forma linear e crescente, especialmente na área de Matemática?".

Não há uma ordem sequencial ou hierárquica para estruturar diferentes operações de pensamento em um indivíduo. Embora possamos dizer a alguém "pense x, para depois pensar y", outra pessoa poderá "pensar y e, depois x". O pensamento é algo individual. Vale ressaltar que, por vezes, utiliza-se o pensamento de outra pessoa, não significando que ele é genuinamente nosso! Por exemplo, copiar e entender a solução completa de um problema, sem sequer ter pensado em uma estratégia para sua resolução.

Raths (1977) diz ser necessário, no contexto escolar, um conjunto de operações mentais imprescindíveis ao desenvolvimento do pensamento a serviço da aquisição do conhecimento. Operações como observação, comparação,

classificação, resumo, obtenção e organização de dados, planejamento, codificação e levantamento de hipóteses são indispensáveis para a resolução de problemas. Tais operações devem permear o trabalho docente de modo que, por meio de perguntas e atividades intencionais, estas sejam desenvolvidas com sucesso pelos estudantes. Nesse sentido, o professor deve elaborar e projetar as suas aulas no intuito de abordar uma ou mais dessas operações, planejando também o devido tempo para avaliar até que ponto as mesmas foram praticadas e desenvolvidas. Ressaltamos novamente que não há ordem no trabalho com essas operações, mas que as mesmas devem ser estimuladas desde o início da escolaridade do indivíduo.

A seguir, para direcionar e ratificar o que está sendo descrito até o momento, elencamos algumas operações que, para Raths, são essenciais ao trabalho docente:

Comparação – Uma situação que requer a comparação entre dois ou mais objetos certamente propicia o pensamento. Os professores podem estruturar atividades que proponham a comparação entre estes dois ou mais objetos. No caso das funções, podemos dar como exemplo a seguinte atividade, que pode ser discutida individualmente ou em grupo: "analisem, num mesmo sistema de coordenadas, os comportamentos das funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$." Os estudantes poderão por meio da comparação de tabelas ou gráficos no plano cartesiano, com ou sem a utilização de um software ou aplicativo, comparar o comportamento das funções, identificando semelhanças e diferenças.

Observação – O ato de observar sugere que o indivíduo envolvido esteja em rigorosa atenção, em prol de um objetivo previamente estipulado. Considerando o exemplo das funções f e g apresentados anteriormente, embora não seja possível comparar sem antes observar, entende-se que o ato de observar pode ser focado num único objeto, por exemplo, observar o que ocorre com a plotagem apenas da função f e, dessa observação, fazer os devidos registros e conjecturas. Conforme já dito, o ato de comparar pode anteceder o ato de observar e vice-versa, dependendo dos objetivos propostos em cada uma das atividades e, até mesmo, do olhar de cada indivíduo ao objeto estudado.

Classificação – De forma natural, classificamos as coisas e objetos desde a mais tenra infância. Classificamos, por via de regra, para agrupar, diferenciar, organizar e, ainda, valorizar. Quando criança, por exemplo, separamos grupos de brinquedos por suas características comuns, dando-lhes a importância segundo o nosso desejo. Com a maturidade mais desenvolvida, no Ensino Médio, o professor

pode propor atividades que auxiliem os estudantes a classificar diferentes figuras planas ou espaciais. Novamente citando funções, eles podem receber, de forma aleatória, um conjunto de funções do 1º e 2º graus, com diferentes leis de formação. Com ou sem o auxílio de um software, os estudantes poderão classificá-las por meio da diferenciação entre os expoentes máximos, ou, ainda, por meio do comportamento de seus gráficos no plano cartesiano. Essa ação poderá, inclusive, auxiliar na compreensão dos motivos pelos quais esses objetos são estudados de forma separada, especialmente nos manuais didáticos.

Resumo – Hipoteticamente o leitor poderia ser solicitado a resumir, até aqui, tudo o que lhe foi apresentado nesta dissertação. Certamente essa ação lhe demandaria diferentes ordens de pensamento, como: sequência temporal de fatos, observação e classificação de objetos ou eventos, utilização de diferentes registros de representação e, até mesmo, roteirização de procedimentos. Pensando ainda em atividades que podem ser finalizadas com um resumo do que foi estudado ou pesquisado, seria exigido do estudante uma operação complexa de pensamento, que se adequa a qualquer atividade de ensino, seja no fechamento de uma aula, finalização de uma sequência didática ou mesmo após uma unidade ou capítulo.

Interpretação – Frequentemente o insucesso dos estudantes, em matemática, é atribuído à falta de leitura e/ou interpretação. Esta crença, normalmente presente na fala de diversos professores, está relacionada a não compreensão de um texto matemático ou de uma situação problema. Neste trabalho de pesquisa considera-se que o ato de interpretar é mais abrangente, pois vai desde a interpretação de um resultado numérico, "por que o produto de dois ímpares não pode ser um número par?", geométrico, "por que não é possível construir um triângulo com as medidas 1 cm, 2 cm e 3 cm?" e, também, interpretações mais complexas, "por que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta?". A interpretação é uma operação complexa, pois envolve inferência, julgamento, avaliação e generalização.

Crítica – Ao se fazer uma crítica, faz-se também julgamentos, análises, comparações e interpretações, segundo nossos padrões implícitos ou explícitos. Cabe ressaltar que não deve haver crítica sem reflexão. Em uma aula de matemática, por exemplo, o professor pode solicitar atividades que propiciem ao estudante a leitura e análise crítica de textos, enunciados, resultados desconexos ou incompatíveis em exercícios, teorias inconsistentes apresentadas nos manuais didáticos e, até mesmo, críticas às contextualizações desconexas em questões de

exames para acesso ao Ensino Superior. Para Ole Skovsmose (2008) o avanço tecnológico permitiu à Matemática o poder de projetar a realidade, por meio de modelos utilizados como referência para a tomada de decisões. Segundo ele, o trabalho docente deve convergir para o desenvolvimento de uma nova habilidade, a "materacia", a qual não se refere apenas a habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática. Indo além da aplicação de fórmulas matemáticas, a materacia engloba uma reflexão sobre essa aplicação. Nesse sentido, o estudo de problemas reais que envolvem variáveis interdependentes, no âmbito das funções, tornam-se aliados ao exercício da materacia.

Hipóteses – Para um matemático profissional seria óbvio dizer-lhe que deveria levantar hipóteses sobre o que pesquisa. Mas, numa sala de aula, quantas são as oportunidades para que os estudantes formulem e testem suas próprias hipóteses acerca do que estudam ou investigam?; como essa operação é desenvolvida?; existem momentos para que hipóteses sejam colocadas à prova, para serem validadas ou refutadas? Uma hipótese é uma premissa dentro de uma teoria, podendo ser validada com base em um método científico. Tomemos, como exemplo, a análise de um gráfico cartesiano sobre o aumento da temperatura média em nosso Planeta. Poderíamos levantar como hipótese o fato de que a temperatura aumenta devido ao crescimento populacional. Ou ainda, que o aumento da temperatura ocorre por causa da poluição atmosférica. Retomando as ideias de Skovsmose, a reflexão crítica acerca dessas hipóteses, tendo a Matemática como aliada, são essenciais ao desenvolvimento da materacia.

Decisão – Como dito anteriormente, desde os primórdios o homem pensa. E isso o faz tomar decisões. Atravesso o rio a nado ou uso algo que pode flutuar?; enfrento o tigre de dentes de sabre com as mãos, com uma lança, ou fujo para um local seguro?; decidir é uma operação que acompanha o indivíduo desde o nascimento. No âmbito escolar, o professor pode oferecer atividades que favoreçam a utilização dessa operação. Algumas atividades cujos comandos são "resolva isso", "calcule aquilo", "determine o valor de", podem ser substituídas por atividades que levem a conflitos, como, "utilize uma tabela de dados e um gráfico de setores para apresentar esse fato, e decida qual das duas representações atende melhor à sua conclusão", "Resolva esse grupo de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas aplicando as técnicas de substituição, comparação e eliminação. Depois,

compare seus procedimentos e decida qual técnica é a mais adequada a um tipo particular de sistema", no estudo de fenômenos reais, de ordem social ou científica, por vezes nos deparamos com gráficos cartesianos cujas representações não se constituem numa reta ou numa exponencial, pois seus pontos não seguem uma tendência. Em situações dessa natureza, deve-se decidir qual o ajuste a ser feito para a melhor análise e compreensão do problema.

Certamente outras operações de pensamento podem ser acrescentadas à lista apresentada. A seguir, após a conceitualização formal de Modelagem Matemática, veremos que existem outras operações, especificamente direcionadas ao trabalho com modelagem.

2.4. A Modelagem Matemática

Ao consultar um dicionário é encontrado, para o vocábulo modelar, algumas definições: "*elaborar algo por meio de um modelo ou por molde*", "*retratar de forma precisa*", "*fazer por molde*", "*reproduzir exatamente*" entre outras. Se for fixado apenas o conceito ou definição do que é modelar, pode-se conduzir a pensar que o importante é o modelo, o molde, ou seja, o produto final. E tem sido assim, de forma geral, que o ensino da Matemática ocorre: com foco no produto, nas fórmulas prontas. Nesse sentido, concordamos com Bassanezi (2014), quando afirma que na maioria das Instituições de Ensino, principalmente em relação ao ensino de Matemática, a ênfase maior é dada ao produto em detrimento do processo, implicando na má qualidade do primeiro. Assim, no contexto desse trabalho, utiliza-se a expressão modelar com o significado de expressar algo, do mundo real, por meio de um modelo ou molde, entretanto valorizando o processo. Modelagem, então, consistirá no ato ou efeito de modelar, ou seja, fazer modelação.

Bassanezi utiliza as seguintes definições para *modelo matemático* e *Modelagem Matemática*:

"Um *modelo matemático* é um conjunto consistente de símbolos, relações, equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno – este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo outro modelo matemático".

"*Modelagem Matemática* é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com

a finalidade da provisão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Além disso, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motivando o usuário na procura da compreensão da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la".

Em resumo, a *modelagem* se relaciona com o processo, ou seja, a maneira como os eventos ocorrem, já o ato de *modelar* relaciona-se diretamente com o modelo. Nesse sentido, a afirmação "*vamos elaborar um modelo!*", pode lançar luz apenas ao resultado final. Em contrapartida, a afirmação "*vamos desenvolver esse tema utilizando Modelagem Matemática!*", certamente explicita a preocupação com o processo, em todas as suas etapas.

É evidente que a modelagem também se importa com o modelo, ou seja, com a estrutura final. De fato, será o modelo que dirá o quão próximo do problema real conseguimos chegar. É, afinal, por meio dele que poderemos compreender de forma crítica a realidade para, quem sabe, modificá-la. O que queremos explicitar é que o produto não deve ser o único foco do trabalho docente, o que vem ocorrendo de forma constante nas Instituições, em todos os níveis de ensino.

Para Bassanezzi, o professor que aceita o caminho da modelagem como método de ensino, tem como desafio ajudar o estudante a compreender, por meio da construção de modelos matemáticos, cada etapa do processo daquilo que estiver estudando. Nesse processo, professor e estudante tornam-se ao mesmo tempo, aprendizes e protagonistas.

Na construção de modelos matemáticos inevitavelmente precisaremos utilizar uma simbologia adequada e equilibrada, de modo a analisar o fenômeno ou objeto estudado. Também é certo que professor e estudante se depararam com a necessidade de compreender, avaliar e aplicar novos conceitos, por vezes não previstos. Aqui reside uma nova visão de ensino, que pode vir a ser um obstáculo ao professor, tendo em vista que a escolha da Modelagem Matemática como método de ensino pressupõe o rompimento da barreira tradicional, em que os assuntos, dispostos de forma crescente e sequencial, estão estabelecidos nas grades curriculares das escolas.

Embora seja real acreditar que a Modelagem Matemática é um excelente caminho para romper o ensino tradicional da Matemática e, ainda, despertar o gosto

por esta ciência a diversos estudantes, que possuem ou não dificuldades com ela, precisamos refletir sobre as vantagens e desvantagens relacionadas à sua utilização. Em seu livro, Bassanezi descreve algumas vantagens e obstáculos relacionados à escolha da Modelagem Matemática como estratégia de ensino. A seguir, serão destacados de forma resumida os aspectos por ele levantados:

Vantagens:

Argumento formativo – A Modelagem Matemática desenvolve a capacidade matemática e a atitude dos estudantes, tornando-os exploratórios, criativos e habilidosos na resolução de problemas.

Argumento da competência crítica – Prepara o estudante para a vida real, observando o que o cerca de forma crítica e argumentativa.

Argumento da utilidade – Mostra ao estudante o caráter útil da Matemática, como ferramenta para resolver problemas nas diferentes áreas do conhecimento.

Argumento intrínseco – O estudante adquire um rico arsenal para entender e interpretar a Matemática em toda as suas facetas.

Argumento de aprendizagem – Proporciona melhor compreensão dos argumentos matemáticos, no que diz respeito aos conceitos e aplicações.

Argumento da alternativa epistemológica – A modelagem vai ao encontro da proposta de Etnomatemática, iniciada por D'Ambrosio na década de 1970, uma vez que possibilita o trabalho com Matemática considerando a diversidade sociocultural.

Obstáculos:

Obstáculos instrucionais – Por ser um processo mais demorado, os professores têm receio de não cumprir o seu programa, previamente estabelecido. Além disso, alguns acreditam na precisão da Matemática, não a encarando que as aplicações e conexões devam fazer parte do ensino dela.

Obstáculos para os estudantes – Por estarem acostumados a ver o professor como transmissor do assunto, ao se tornarem protagonistas do aprendizado, podem se perder e ficar apáticos nas aulas.

Obstáculo para os professores – A falta de conhecimento do processo de modelagem, o medo de se perderem em suas aulas ao se depararem com situações desconhecidas e, ainda, o medo de não cumprir o currículo, impedem o professor no trabalho com a modelagem.

Independente dos obstáculos apresentados, o trabalho com Modelagem Matemática poderá impactar positivamente a aprendizagem dos estudantes e seus resultados, inclusive em exames nacionais e internacionais. Vale ressaltar que o modelo tradicional de ensino vem, ao longo dos anos, mostrando-se ineficaz. Relatórios do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB/2017) indicam estagnação e retrocesso na aprendizagem em Matemática dos estudantes, respectivamente nas séries finais do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Em relação ao Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA/2015), a situação não é diferente. Os resultados são baixos e indicam pouquíssimo letramento em Matemática, ou seja, ausência de habilidades matemáticas essenciais para a leitura, análise, reflexão e compreensão dos problemas sociais, tecnológicos e científicos que a sociedade atual nos apresenta. Evidentemente, entendemos que tais resultados são decorrentes de um conjunto complexo de fatores, envolvendo formação de professores, infra-estrutura das Instituições e políticas públicas eficazes, temas que não estão no espectro deste trabalho de pesquisa.

2.5. Operações do pensamento como fundamento à Modelagem Matemática

Entende-se, após as diversas leituras, que a elaboração e utilização de atividades, estratégias e metodologias que favoreçam de forma ampla o trabalho com as múltiplas operações de pensamento, para a análise e solução de situações problema da realidade, se configuram como ações essenciais para o desenvolvimento do pensamento analítico e reflexivo dos estudantes. Diante dessa crença, entende-se que o modelo de aula tradicional que impõe e pressupõe um estudante passivo, ouvinte, atento, não questionador, reproduzidor de técnicas e algoritmos e, no melhor cenário, com boas habilidades para resolver problemas por similaridade e correlação às que são apresentadas pelo professor, deve ser repensado e, gradativamente reconfigurado para um modelo de aula em que estudante e professor sejam protagonistas no processo de ensino e aprendizagem. Certamente não se espera que a mudança para esse novo modelo ocorra de forma abrupta. O que se espera é que, ao escolher o caminho da Modelagem Matemática, professor e estudante tenham consciência de que o aprendizado ocorrerá de forma partilhada, ou seja, que o aprendizado será construído em conjunto.

Para complementar as operações de pensamento descritas anteriormente, apresentamos, segundo Bassanezi (2014), outro grupo de operações significativas que podem ser desenvolvidas durante o trabalho com a Modelagem Matemática:

Experimentação – Atividade laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Nessa etapa, a adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental pode dar maior ou menor grau de confiabilidade aos dados obtidos.

Abstração – Procedimento que deve levar à formulação de modelos matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer adequadamente a seleção das variáveis, problematização, formulação de hipóteses e, ainda, a simplificação.

Resolução – Momento em que é decidido o modelo matemático que substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática adequada.

Validação – É o processo de aceitação ou não do modelo. Nessa etapa, as hipóteses devem ser testadas em confronto com os dados empíricos.

Modificação – Etapa em que alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação do modelo proposto. Nesse momento, alguns ajustes/modificações podem ser necessários.

A elaboração e estruturação de um trabalho com Modelagem Matemática em que todas as operações de pensamento, até aqui descritas, possam ser contempladas. Entendo que, dessa forma, haverá a contribuição para a formação de um estudante pleno, que enxerga a Matemática como uma construção do homem em benefício do seu desenvolvimento e, além disso, para um olhar que vai além dos números e cálculos. Um olhar crítico para o benefício de toda uma sociedade.

2.6. As fases da Modelagem Matemática

Para Almeida e Silva (2014), a configuração de como ocorre a transição entre as situações inicial e final em uma atividade de modelagem não é algo universal, ou seja, não se dá de forma única. Nesse sentido, as múltiplas operações de pensamento podem ser desenvolvidas em diferentes fases da modelagem, as quais podem ser requisitadas mais de uma vez. Entretanto, também não se acredita que fases específicas do processo de modelagem podem propiciar o desenvolvimento de certas operações de pensamento em detrimento de outras. Por exemplo, se estivermos num momento inicial de experimentação, em que a obtenção dos dados está sendo processada, é mais provável que as operações de observação,

comparação e classificação sejam requisitadas, em detrimento da operação de decisão. Porém, conforme já observado, como não há uma ordem hierárquica entre tais operações, a operação de decisão pode antecipar a de classificação se, por acaso, houver a necessidade de se decidir por dispensar os dados coletados. De acordo com as autoras, as fases de modelagem são caracterizadas como: interação, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação.

A seguir, apresentamos de forma resumida as fases definidas por Almeida e Silva, procurando, segundo a nossa compreensão, correlacioná-las às operações de pensamento que julgamos essenciais ao trabalho com a Modelagem Matemática:

Interação – Essa etapa representa o primeiro contato com a situação problema que se pretende estudar. Nela, devemos nos cercar de informações e dados quantitativos e qualitativos para que, de forma reflexiva, possamos realizar a formulação do problema e a definição de metas para a sua resolução. A escolha do tema e a busca de informações se constituem como foco central nesta fase. Operações de pensamento relacionadas às habilidades de observação, comparação, classificação, organização e decisão são necessárias.

Matematização – De modo geral, a situação problema identificada na fase de interação apresenta-se na linguagem natural, não estando diretamente ligada a uma linguagem formal da matemática. Assim, torna-se necessária a apropriação de um vocabulário específico, evidenciando matematicamente o problema a ser resolvido. É nessa fase que surgirá, por exemplo, a necessidade da abordagem do problema por meio de funções. As operações de pensamento relacionadas à formulação de hipóteses, suposições, imaginação e codificação poderão surgir durante o processo de matematização.

Resolução – É nesta fase que é decidido e construído o modelo que será utilizado para representar o problema. Interpretação, tomada de decisão, crítica e escolha do modelo são operações necessárias nessa etapa.

Interpretação dos resultados e validação – Essas duas fases ocorrem concomitantemente, pois a interpretação do modelo obtido na fase de resolução implica na análise e reflexão para a validação do mesmo. Entende-se que o papel do modelo, no processo de interpretação e validação, deve vir ao encontro do que defende Skovsmose em sua proposta de uma Educação Matemática Crítica, ou seja, além de interpretar a realidade, ele deve desenvolver no estudante uma leitura crítica do meio que o cerca.

Almeida e Silva quando se referem sobre a impossibilidade de prever o tempo que deverá ser destinado a cada fase, tendo em vista os diferentes obstáculos nelas presentes e, ainda, a dinâmica de cada atividade prevista. Vale ressaltar, conforme dito anteriormente, que o processo de Modelagem Matemática pressupõe professor e estudante como aprendizes. Assim, torna-se natural que haja necessidade de utilizarmos mais ou menos tempo em cada uma das atividades. Ainda segundo as autoras, é essencial, em cada fase, que o professor mantenha o foco no desenvolvimento cognitivo do estudante, por meio de observações acerca do seu comportamento, expressão, questionamento e interpretação do problema estudado. Entendemos, ainda, que as fases no processo de modelagem podem ser consideradas como operações de pensamento.

Bassanezi, diz que o ensino tradicional da Matemática cujos conteúdos apresentam-se quase sempre bem delineados, numa sequência de pré-requisitos estruturados para a cobertura de um programa, configura-se como uma das principais dificuldades para a adoção do processo de modelagem. Segundo ele, a melhor maneira de se aprender Modelagem Matemática é fazendo modelagem. As diversas leituras realizadas sobre o assunto nos indicam que existem formas de utilizar a modelagem: por meio de situações problema já estabelecidas e definidas pelo professor e, ainda, por meio de situações problemas oriundas das necessidades dos estudantes. Nesse trabalho de pesquisa, optamos por investigar e aplicar a modelagem numa situação problema apresentada pelos estudantes, ou seja, numa situação real escolhida por eles.

3. DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Como mencionado anteriormente, o estudo envolveria estudantes da 1ª série do Ensino Médio, de uma instituição privada de ensino, situada na região de Osasco, grande São Paulo.

Na proposta inicial o pesquisador, por também ser o professor titular das turmas, pensou em aplicar o projeto durante as aulas regulares, o que envolveria todos os estudantes da 1ª série do colégio, no entanto, em diálogo e reflexão com Coordenação e Direção do colégio, optou-se por utilizar aulas no contra turno. Os principais aspectos que levaram pesquisador e corpo diretivo do colégio a essa decisão foram a quantidade de horas aulas semanais ministradas pelo professor (2 h/a) *versus* extenso conteúdo a ser desenvolvido (apostilado); quantidade de estudantes envolvidos *versus* estratégias de observação, registro e acompanhamento do pesquisador; e Incerteza de que, com a metodologia utilizada, todo o programa seria cumprido.

Assim sendo, os seguintes combinados foram firmados com Coordenação e Direção:

- Os estudantes das 1ªs séries seriam convidados a participar, de forma voluntária, de um estudo envolvendo uma pesquisa de caráter investigatório e científico, tendo como pesquisador o seu professor das aulas regulares. O convite, assim como as explicações sobre o projeto, ficaria a cargo do professor;
- Os encontros aconteceriam às quintas feiras, das 14h às 15h.

Conforme combinado, na primeira semana de abril de 2019, o professor utilizou suas aulas no período regular, sendo uma hora/aula em cada uma das três turmas, 1A, 1B e 1C para introdução ao projeto. Para melhor contextualizar este trabalho de pesquisa, os seguintes aspectos foram abordados nesses encontros:

- O significado dos termos Educação Básica e Educação Superior, com ênfase nos conceitos de Licenciatura e Bacharelado, especialmente aos fins a que se destinam cada um desses cursos;
- As diferentes possibilidades de estudo em cursos de pós-graduação, nas modalidades *lato sensu* e *stricto sensu*: aperfeiçoamento, especialização, MBA, mestrado acadêmico, mestrado profissional e doutorado; o programa de pós-

graduação da Universidade de São Paulo, com seus diferentes cursos; o programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade de São Paulo, ao qual está vinculado o projeto do pesquisador e, ainda, o significado de um trabalho por meio da Modelagem Matemática.

É importante destacar que os itens supracitados foram abordados com a profundidade necessária para que os estudantes tivessem condições de compreender a amplitude e o universo do estudo acadêmico. Ressalta-se também que, para a maioria, muitos aspectos surgiram como novidade, como, por exemplo, os termos "mestrado acadêmico" e "mestrado profissional".

Os minutos finais de cada aula foram destinados à adesão dos estudantes ao projeto, de caráter investigativo e sem nenhuma atribuição de nota. Nesse momento houve o interesse de quarenta e cinco estudantes em participar do projeto.

Entre os meses de abril e setembro ocorreram nove encontros. No primeiro encontro compareceram apenas dezoito dos quarenta e cinco estudantes que haviam inicialmente manifestado interesse. Com eles, foram formados quatro grupos de trabalho, dos quais apenas um finalizou o projeto, ou seja, participou de todos os encontros. Os outros grupos participaram do projeto até o mês de junho e, após as férias, comunicaram que não continuariam no projeto.

Considera-se importante observar que a ideia inicial era que os encontros acontecessem semanalmente, mas devido a outras atividades do colégio isso não foi possível.

No que segue, será relatado como ocorreram os nove encontros realizados. Como somente um dos grupos terminou o projeto, decidimos relatar apenas as atividades e discussões desenvolvidas por este grupo.

Em agosto, após a notícia da desistência dos três grupos, decidiu-se por aplicar um questionário aos mesmos, para avaliar os motivos que levaram a esta decisão e qual a impressão que esses estudantes tinham tido do projeto até aquele momento. Vale ressaltar que um questionário similar foi também aplicado ao grupo que iniciou e finalizou o projeto.

A partir daqui, para preservar a identidade dos estudantes, utilizaremos as indicações M1, M2 e M3 para os três integrantes do gênero masculino e, F1 e F2 para as duas integrantes do gênero feminino.

4. RELATO DOS ENCONTROS E RESULTADOS DO EXPERIMENTO

Nesta parte do trabalho, ocorrerá a apresentação do tema, das discussões, dos avanços, das reflexões, das dificuldades e dos conteúdos matemáticos desenvolvidos pelo grupo que iniciou e finalizou o projeto. A reflexão acerca dos estudantes que deixaram o projeto ocorrerá adiante.

Os momentos de estudo com esse grupo de estudantes poderiam receber diferentes denominações: aulas diferenciadas, reuniões de estudos, estudos avançados ou, ainda, episódios de ensino. Optou-se por chamar esses momentos de "encontros". Embora em todos eles houvesse uma intencionalidade, com objetivos pré-estabelecidos, registrou-se também os elementos surpresa, ou seja, estudos e necessidades que surgiram no momento das discussões. Aliás, eis um desafio e uma vantagem do trabalho com Modelagem Matemática: os elementos surpresa.

A seguir, apresentaremos cada um desses encontros, destacando os objetivos, discussões, entraves, avanços e conquistas, segundo nossas bases teóricas, em cada um deles.

4.1. Apresentação detalhada do projeto – Encontro 1

Objetivos:

Apresentar a proposta do projeto, retomando o conceito de Modelagem Matemática, com ênfase aos significados de processo e produto; apresentar o tema a ser estudado: funções; e identificar os conteúdos prévios dos estudantes sobre o tema funções.

Discussões realizadas:

Durante os primeiros 30 minutos, houve o aprofundamento teórico sobre Modelagem Matemática, destacando-se a importância do processo de construção do conhecimento matemático. Nesse ponto, foi enfatizado que a riqueza dos conhecimentos específicos adquiridos durante o trabalho tem igual ou maior valor do que o produto, modelo. Evidentemente, também se destacou que um bom modelo, o qual representa de forma fidedigna a realidade, é algo muito almejado por estudantes e pesquisadores. Em síntese, procurou-se esclarecer ao grupo a

importância da valorização tanto de processo como de produto, principalmente levando-se em consideração ser algo comum a estudantes da Educação Básica, especialmente do Ensino Médio, a valorização apenas do produto final, quando os mesmos estão envolvidos em trabalhos escolares de diferentes disciplinas, algo que o autor constatou não apenas por experiência docente, mas também por meio de diversas leituras e relatos de professores de outras áreas do conhecimento. Ao longo dessa exposição os estudantes ouviram atentamente e não realizaram perguntas. Vale ressaltar que essa exposição foi dialogada, sem a utilização de nenhum recurso ou mídia.

Após a apresentação, conversamos acerca de conceitos fundamentais sobre funções, no sentido de averiguar os conhecimentos prévios do grupo. De forma breve, foram resgatados os conceitos de interdependência e representações em diagramas de Euler-Venn, assuntos já conhecidos por eles. Nesse instante, foi destacada a vasta aplicação desse conteúdo em diferentes situações reais de diferentes áreas do conhecimento, reforçando assim a escolha do tema.

O encontro foi produtivo, pois, além de resgatar conhecimentos prévios sobre funções, o grupo demonstrou compreensão sobre a possibilidade do trabalho com a modelagem numa aula de matemática.

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

Após breve retomada e avaliação do encontro, agradecendo e enaltecendo a participação do grupo, ficou combinado que os participantes trariam temas ou situações reais com potencialidade para o desenvolvimento de um trabalho com Modelagem Matemática. É importante ressaltar que a estudante F2 criou um grupo de WhatsApp, incluindo o professor, para que fosse possível a troca de informações sobre o projeto.

4.2. Fechamento do tema para o projeto – Encontro 2

Objetivos:

Mostrar as formas em que podem ser apresentadas as situações problema para um estudo com modelagem; discutir a amplitude de atuação que podem ser alcançadas, a partir da forma escolhida; analisar as hipóteses dos estudantes sobre

que tipo de problema real poderia ser abordado por meio da Modelagem Matemática; decidir, em parceria com o grupo, o tema a ser estudado.

Discussões realizadas:

De forma breve, foram retomadas as discussões ocorridas no encontro anterior. Após isso, foram apresentadas as possibilidades do trabalho com problemas que poderiam ser abordados por meio da modelagem:

Problemas apresentados em livros ou manuais didáticos, ou seja, problemas prontos, os quais os estudantes estudaram a sua solução;

Problemas criados pelo professor, de ordem teórica ou aplicada, para a discussão e solução dos estudantes;

Problemas com maior amplitude, do mundo real, que poderiam ser apresentados pelo professor ou pelos próprios estudantes.

Durante a apresentação do projeto e, também, no primeiro encontro, já havia dada certa ênfase à riqueza de se trabalhar com problemas do mundo real. Nesse sentido, talvez induzidos pelas apresentações ocorridas nesses dois momentos, os estudantes foram unânimes em propor e iniciar o trabalho escolhendo o próprio tema de estudo.

Assim sendo, na continuidade desse encontro, houve, por parte dos estudantes, uma chuva de ideias acerca dos problemas que poderiam ser abordados no projeto. Eles apresentaram problemáticas do interesse deles, a sua maioria relacionada à cidade de Osasco. Durante aproximadamente dez minutos, os temas foram registrados no quadro para que, de modo democrático, fosse escolhido um que pudesse ser abordado num trabalho com modelagem. Nesse *brainstorm* os seguintes temas foram por eles levantados:

- Assaltos na região de Osasco;
- Qualidade do asfalto utilizado nas vias públicas de Osasco;
- Trânsito na região de Osasco;
- Aquecimento global.

Após o registro em lousa, professor e estudantes discutiram por aproximadamente 20 minutos cada um dos temas, no intuito de identificar as suas potencialidades para o trabalho com modelagem. Ressalta-se a riqueza das discussões, pois o grupo compreendeu que os temas poderiam convergir para um trabalho que realmente pudesse envolver a matemática.

Ao final, o grupo decidiu desenvolver o trabalho com o problema do "aquecimento global". Além de ser um tema atual, os estudantes já possuíam conhecimentos prévios sobre o assunto, tendo em vista as discussões realizadas em outras disciplinas da grade curricular. Vale ressaltar que a proposta inicial desse tema foi realizada pelos alunos M1 e M2.

Observa-se que os demais temas foram escolhidos pelos outros grupos, os quais não concluíram o projeto.

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

Nos minutos finais, novamente foi feita uma breve retomada e avaliação do encontro, enaltecendo a participação ativa do grupo, especialmente no momento de definição do tema. Para o terceiro encontro, os estudantes ficaram de trazer dados estatísticos em tabelas e/ou gráficos para que pudéssemos identificar a problemática a ser abordada.

4.3. Interação sobre o problema do aquecimento global – Encontro 3

Objetivos:

Analisar dados e/ou gráficos referentes ao aquecimento global; identificar características e especificidades da situação a ser estudada; e formular a situação problema, definindo metas para a sua resolução.

Discussões realizadas:

Com base em uma pesquisa na internet, o estudante M1 apresentou e compartilhou com o grupo algumas informações estatísticas referentes ao aquecimento global. Além de sua pesquisa apresentar um conceito para aquecimento global, ele obteve dados sobre os maiores emissores de gases do efeito estufa (figura 4.1) e um gráfico sobre a média da variação da temperatura no planeta (figura 4.2). O foco da nossa discussão, neste momento, não foi direcionado às possíveis causas do aquecimento global, como por exemplo, a poluição ou o efeito estufa. Nosso olhar foi direcionado à análise matemática do gráfico (figura 4.2), visando a sua interpretação e tendência. No instante dessa análise, novos conceitos como ajuste de curvas e tendência de crescimento foram acrescentados à discussão.

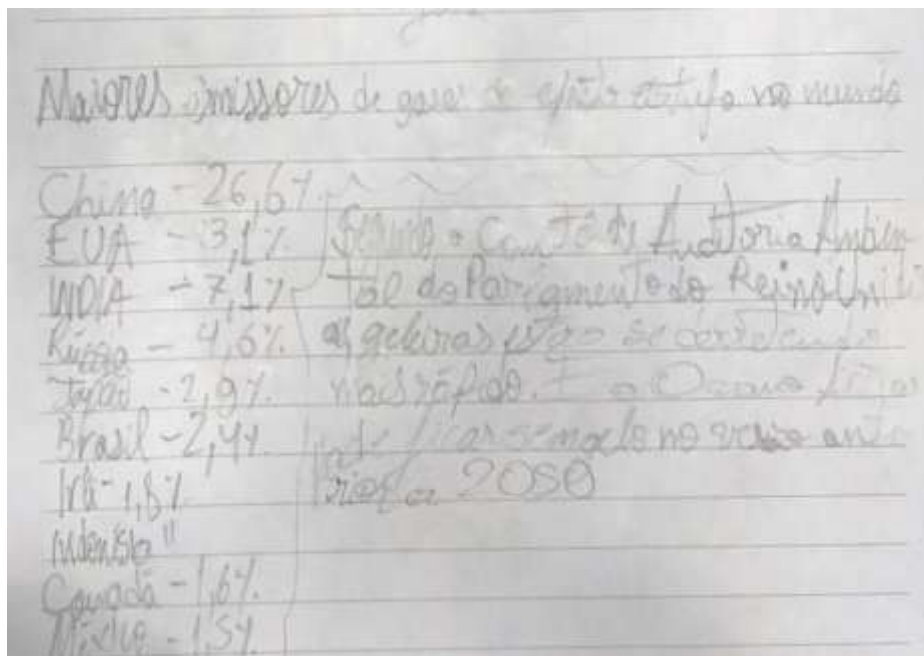


Figura 4.1: Maiores emissores de gases do efeito estufa no mundo. Foto do caderno do aluno M1. Fonte: Acervo do autor.

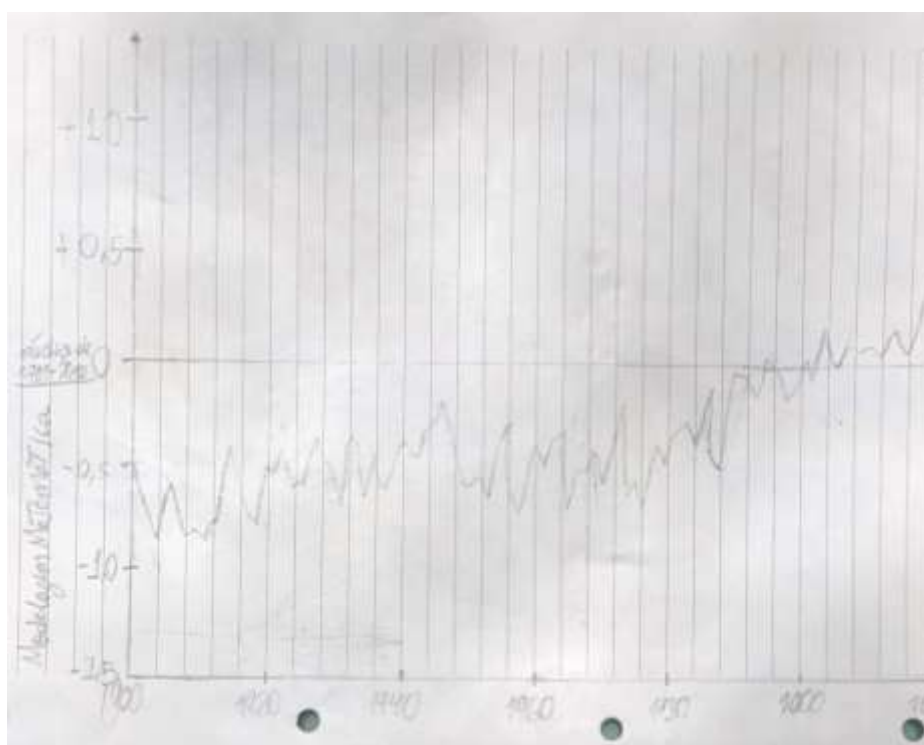


Figura 4.2: Gráfico sobre a média da variação da temperatura no planeta. Foto do caderno do aluno M1. Fonte: Acervo do autor.

O gráfico, traçado à mão livre pelo estudante M1, foi uma reprodução do gráfico apresentado a seguir (figura 4.3), resultado da pesquisa do grupo sobre aquecimento global.

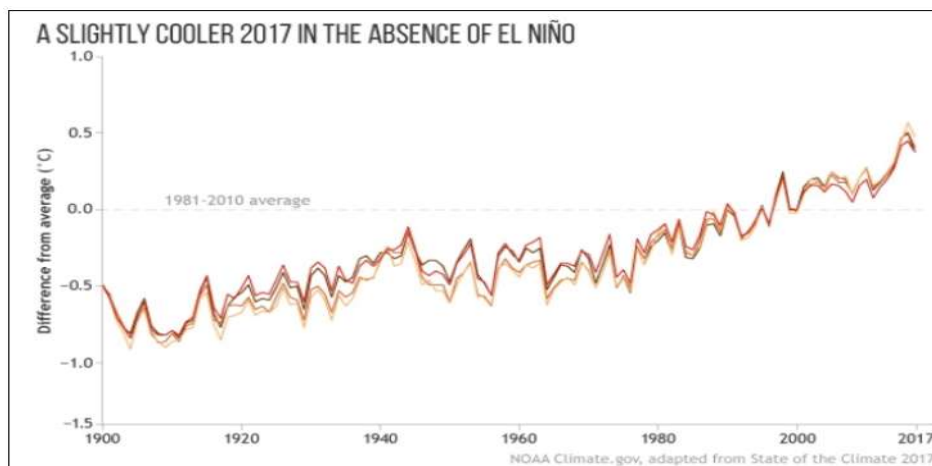


Figura 4.3: **2017 State of the climate: Global surface temperature**

Fonte: <https://www.climate.gov/news-features/featured-images/2017-state-climate-global-surface-temperature>

Esses primeiros elementos estatísticos foram suficientes para que fosse discutido sobre a possibilidade de analisar a tendência do gráfico apresentado na figura 4.3. O conceito de função foi retomado como relação de interdependência entre duas variáveis, no caso, o tempo, em anos, e a variação média de temperatura anual, em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$). Afirmações sobre a tendência do gráfico, tais como, "ele desce e sobe", "não cresce de forma igual" e "pode ser que continue crescendo" foram fomentadas por professor e estudantes. Confirmamos que, nessa fase de interação do problema, o estudo e análise dos dados constituíram-se, segundo Almeida (2014), como a principal etapa para a formulação do problema e definição de metas para sua resolução.

Conforme observado anteriormente, o foco do olhar de estudantes e professor não estava direcionado às causas do aquecimento global, mas sim, em como obter o modelo matemático mais adequado ao gráfico analisado. Nesse sentido, o grupo, com o auxílio e participação do professor, estabeleceu a seguinte problemática a ser solucionada:

“Qual a função mais apropriada para representar o gráfico analisado?”.

É importante ressaltar, nessa fase de interação do problema, que diferentes operações de pensamento foram solicitadas e desenvolvidas: comparação, observação, interpretação e levantamento de hipóteses. Também foi possível constatar, nessa etapa, o que destacou Bassanezi (2014), em relação às vantagens da adoção do trabalho com modelagem no que se referem ao ganho no campo argumentativo, quais sejam: o argumento formativo, o argumento de utilidade, o

argumento intrínseco e o argumento de aprendizagem. Ainda, em relação à escolha metodológica de desenvolvermos esse trabalho em grupo, concordando com Cohen e Lotan (2017), quando afirmam que essa metodologia consiste numa técnica eficaz para atingir certos objetivos de aprendizagem intelectual e social, sendo, ainda, excelente para o aprendizado conceitual, para a resolução criativa de problemas e para o desenvolvimento de proficiência em linguagem acadêmica, aspectos que evidenciamos durante essa fase.

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

O encontro foi finalizado com o desafio de identificar o comportamento do gráfico estudado. Como demanda para o próximo encontro, foi sugerido que o grupo estudasse sobre ajuste de curvas e método dos mínimos quadrados. A orientação dada ao grupo é que esse estudo fosse realizado por meio da análise de vídeos e documentos publicados na web. O professor sugeriu alguns links, entretanto os estudantes poderiam utilizar pesquisa própria.

4.4. Obtenção de uma função linear por meio de uma tabela de valores bem comportados – Encontro 4

Objetivos:

Analisar o comportamento de uma função polinomial do 1º grau; refletir sobre o significado do termo "bem comportado", no caso do estudo do comportamento de funções; e obter, por meio de uma tabela de valores, a lei de formação de uma função polinomial do 1º grau.

Discussões realizadas:

Antes de iniciar o relato desse encontro, duas informações são necessárias:

I - Em suas aulas regulares, os estudantes já tiveram contato com o plano cartesiano e com a construção de gráficos de funções polinomiais do 1º grau, ou seja, a noção de que uma função do tipo $y = ax + b$ pudesse ser representada geometricamente por uma reta no plano cartesiano.

II - Por estarem num grupo pequeno, optou-se por desenvolver e utilizar muitas das discussões e cálculos em lousa. Desse modo, a partir daqui, um significativo número de registros fotográficos será uma reprodução do que registrou-se em lousa.

O encontro foi iniciado com a constatação de que os estudantes não haviam realizado os estudos solicitados ao término do encontro anterior. A justificativa principal do grupo deveu-se ao fato de que os mesmos tiveram compromissos com as demandas do colégio, relacionadas à entrega de trabalhos acadêmicos de outras disciplinas e ocorrência de provas. Diante dessa constatação e, na urgência de avançarmos em nossos estudos, foi apresentado a eles um método para determinar, a partir de um conjunto de pontos, a lei da função linear que os envolve. De forma expositiva e dialogada, entretanto com a interação do grupo, estudamos como obter a lei de uma função a partir de uma tabela de valores "bem comportados".

Inicialmente, analisou-se uma tabela bem comportada (figura 4.4), criada pelo professor, com o objetivo de obter a sua lei de formação.

x	y
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Figura 4.4: Tabela de valores "bem comportados" criada pelo professor, em lousa, para determinação da lei de formação de uma função linear. Fonte: Acervo do autor.

Quando questionados sobre o motivo pelo qual foi utilizado o termo "bem comportado" para a tabela de valores, os estudantes hesitaram um pouco, mas conseguiram observar a regularidade em relação ao crescimento constante, tanto aos valores de x , quanto aos valores de y . No entanto, quando solicitados a identificar, de modo direto ou por meio de tentativa, que expressão matemática envolveria intimamente os valores de x e y dessa tabela, não conseguiram obter uma relação correta, embora tentativas como $y = x + 4$ e $y = 5x$ fossem formuladas. Essa dificuldade, segundo nossa interpretação, deve-se ao fato de este ser um problema inédito e complexo, pois solicita a utilização e aplicação de habilidades que o grupo ainda não havia desenvolvido. Vale aqui ressaltar que, em suas aulas regulares de álgebra, os estudantes ainda não haviam tido o contato com problemas dessa natureza, ou seja, problemas do tipo: dada uma tabela ou gráfico, obter sua lei de formação. No entanto, o problema recíproco, de traçar um gráfico a partir de uma função dada já havia sido por eles resolvido.

Diante do exposto, optou-se por conduzir o grupo à solução do problema, por meio da interação dialogada. Assim, de forma interativa, foi construído, a partir da tabela, o gráfico apresentado a seguir (figura 4.5):

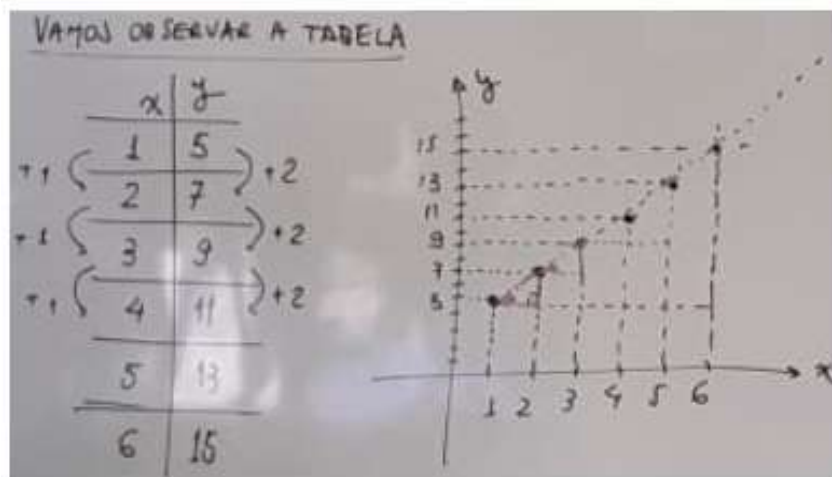


Figura 4.5: Tabela de valores e representação cartesiana desenvolvidas pelo professor, com a participação dos estudantes.
Fonte: Acervo do autor.

Após a plotagem dos pontos na lousa, os estudantes foram questionados a responder que tipo de curva poderia ser traçada. Todos foram unânimes em responder que deveria ser traçada uma reta. No entanto, quando questionados por que motivo a reta deveria ser traçada, nenhum deles soube explicar. Nesse momento, com o auxílio do gráfico e, ainda, retomando os seus conhecimentos prévios, utilizou o conceito trigonométrico da tangente de um ângulo agudo para mostrar-lhes que a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo eram constantes e, nesse caso específico, igual a 2. Esse registro foi realizado, pelo professor, ao lado da tabela (figura 4.5) na tentativa de reforçar essa constatação. Embora haja compreensão do autor quanto à fragilidade dessa argumentação, sobretudo se a considerarmos sob o olhar do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria Analítica em nível superior, entendemos que tal argumentação foi contundente no sentido de justificar o traçado da reta. Vale ressaltar que, nesse momento, também foi discutida a ideia de função real, tendo em vista que entre os pontos escolhidos, poderia existir uma infinidade de valores não inteiros que seguiam a mesma tendência. Isso foi importante para justificar o traçado da reta.

Conforme dito no início do relato desse encontro, os estudantes já tinham o conhecimento de que uma reta pode ser representada algebricamente pela função $y = ax + b$. Desse modo, usamos esse conhecimento para obter os valores dos

parâmetros a e b . Retomando a noção da geometria plana que por dois pontos passa uma única reta, o professor solicitou que o grupo escolhesse dois pontos da tabela para o desenvolvimento algébrico do problema. Passo a passo o sistema foi elaborado e os valores dos parâmetros a e b obtidos. Ao obtermos o valor de a , o professor retornou ao gráfico mostrando ao grupo que tal valor era coincidente com a tangente do ângulo formado com o eixo das abscissas. Embora o nome desse número fosse denotado e apresentado como "coeficiente angular da reta", optou-se por não aprofundar esse conceito. A figura 4.6 apresenta o registro do que foi desenvolvido:

RETA: função de 1.ª grau

dois pontos: $(2, 7)$, $(6, 15)$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} 7 = a \cdot 2 + b \\ 15 = a \cdot 6 + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \quad (-1) \\ 6a + b = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - b = -7 \\ 6a + b = 15 \quad (+) \end{cases}$$

$$4a = 8 \rightarrow a = 2$$

coeficiente angular da reta

ENTÃO

$$y = 2x + 3 \quad (\text{modelo} = \text{fórmula})$$

$b = 3$

Figura 4.6: Desenvolvimento algébrico para a obtenção dos parâmetros a e b da função $y = ax + b$, a partir da tabela e gráfico da figura 4.5. Fonte: Acervo do autor.

Após a obtenção da função $y = 2x + 3$ os estudantes foram convidados a verificar sua validade, substituindo os valores de x e y da tabela. O momento do teste dessa fórmula foi de suma importância, pois os estudantes desenvolveram as operações de pensamento relacionadas à experimentação, verificação e abstração. Além disso, o professor teve a oportunidade de retornar ao gráfico da figura 4.3 e, junto aos estudantes, realizar a seguinte indagação: "e no caso dessa representação em que os pontos não são bem comportados? Como proceder?".

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

O encontro foi finalizado com a problemática: como obter a representação algébrica de um gráfico cujos pontos não são bem comportados? O professor orientou que o grupo assistisse a um vídeo sobre como obter uma função por ajuste de curva, por meio do método dos mínimos quadrados. A proposta foi feita para que

os estudantes tivessem contato com a dificuldade desse problema. Para tanto, o link do referido vídeo foi enviado aos estudantes por meio do grupo de WhatsApp.

4.5. Análise de um vídeo sobre a aplicação do método dos mínimos quadrados – Encontro 5

Objetivos:

Estudar, em conjunto, a resolução do problema da obtenção da lei de uma função linear por meio do método dos mínimos quadrados; apresentar os conceitos de matriz e matriz transposta; mostrar como efetuar o produto entre duas matrizes.

Discussões realizadas:

Foi constatado que apenas o aluno M3 assistiu ao vídeo e, mesmo assim, não o assistiu em sua totalidade. Novamente deparou-se com a dificuldade do grupo em relação às demandas do colégio, sobretudo na entrega de trabalhos e avaliações de diversas disciplinas e, ainda, levando-se em conta as atividades extra-escolares que cada um possui. Assim, optou-se por assistir ao vídeo em conjunto para compreender as necessidades e a solução do problema: obter a lei da função que melhor representa uma tabela de valores não comportados. Essa ação ocorreu de forma cadenciada e intercalada, ou seja, em momentos estratégicos o vídeo foi interrompido, para que fosse possível analisar cada um dos procedimentos e conteúdos matemáticos envolvidos. De imediato o vídeo apresentou uma tabela de valores, que foi reproduzida na lousa, pelo professor (figura 4.7).

x	y
1	9
2	11
3	10
4	13
5	13
6	14

Figura 4.7: Tabela de valores "mal comportados" extraídos do vídeo.

Estabeleceram uma relação dessa tabela com a tabela de valores utilizada no encontro anterior e, por não terem uma única reta passando por todos os pontos, refletiram sobre a impossibilidade de obter uma única função do tipo $y = ax + b$ que representasse todos os pontos. Desse modo, o grupo compreendeu que deveriam

obter, por meio de métodos ainda não conhecidos, uma função que melhor se ajustasse à situação, justificando assim o termo matemático "ajuste de curvas".

No prosseguimento do vídeo, se depararam com um conjunto de equações, que foram representadas na lousa (figura 4.8):

x	y
1	9
2	11
3	10
4	13
5	13
6	14

$a+b=y$
 $a+b=9$
 $2a+b=11$
 $3a+b=10$
 $4a+b=13$
 $5a+b=13$
 $6a+b=14$

Figura 4.8: Tabela de valores e equações lineares de cada ponto.

Analisando a tabela e as equações, refletiu-se sobre que técnica deveria ser utilizada para resolver um sistema dessa natureza, obtendo os valores de a e b . O grupo sugeriu que pudessem usar o método da substituição, mas logo essa opção foi abandonada, tendo em vista a questão levantada: "isolar o que, em qual das equações e, por fim, substituir em qual delas?"

Antes de retomar o vídeo foi dito a eles que novos conceitos seriam utilizados na resolução do problema, ainda não antecipando esses conhecimentos. Também refletiram sobre a dificuldade em obter essa função por estimativa ou tentativa, considerando que essa tarefa já se mostrou demasiadamente complexa no caso de tabelas bem comportadas.

Com a retomada do vídeo, ficou clara a inquietação do grupo, pois surgiram objetos desconhecidos como matriz, matriz transposta e, ainda, multiplicação entre matrizes. Diante disso, a opção adotada pelo professor foi a de apresentar esses conceitos, esclarecendo ao grupo que, histórica e didaticamente os mesmos seriam objetos de conhecimento da série seguinte, a 2ª série do Ensino Médio. Dessa forma, mesmo entendendo que o assunto não teria a devida compreensão, o professor optou por mostrar-lhes, na lousa, os procedimentos e conceitos envolvendo matrizes (figura 4.9):

Figura 4.9: Exemplo de matriz, matriz transposta e produto entre matrizes.

Os estudantes participaram ativamente durante o processo de obtenção da matriz produto. Cada um deles foi convidado à lousa para obter um a um, os elementos da referida matriz (figura 4.9). No entanto, devido à experiência do autor no exercício da docência, é certo que esse momento não foi suficiente para uma compreensão significativa desses assuntos.

Retomou-se o vídeo, desde a elaboração das equações, com o objetivo de verificar como as matrizes foram utilizadas para a obtenção da lei de formação da função. Segue uma parte da resolução apresentada no referido vídeo (figura 4.10).

Figura 4.10: Parte da solução apresentada no vídeo.

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=oqBUWqEI378>.

Acervo do autor.

Na sequência do vídeo, o professor que o apresenta mostra a solução da equação usando o método da triangularização de Gauss (escalonamento). O fato de

os estudantes não conhecerem essa técnica nos levou a pausar o vídeo, finalizando a resolução do sistema pelo método da adição, já conhecido por eles. Assim, após serem informados dessa ação e do motivo pelo qual o vídeo seria pausado, desenvolveram em conjunto a solução do sistema pelo método da adição (figura 4.11).

$$\begin{pmatrix} 9 & 21 \\ 21 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 262 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Triangulação de GAUSS
↳ 2ª parte do método

$$\begin{cases} 9a + 21b = 262 & (-6) \\ 21a + 6b = 70 & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -54a - 126b = -1572 \\ 441a + 126b = 1470 & (+) \end{cases}$$

$$105a = 102$$

$$a = \frac{102}{105} = 0,9714285714$$

$$(+)\ 21 \cdot 0,9714285714 + 6b = 70$$

$$b = 8,2666666666$$

$$y = 0,97x + 8,27$$

Figura 4.11: Finalização do processo de ajustamento de curva. Fonte: Acervo do autor.

A discussão foi finalizada com a verificação da fórmula. Com o uso da calculadora, testaram a validade da função $y = 0,97x + 8,27$, substituindo todos os valores da tabela (figura 4.7). Nesse momento, foi possível verificar que os valores substituídos em x não tinham como imagem, o valor exato correspondente na tabela. Nesse aspecto, professor e estudantes concordaram que esse fato ocorreu por se tratar de uma expressão "ajustada" e, ainda, devido às aproximações que foram realizadas para os parâmetros a e b .

Nesse encontro, conforme prevê Bassanezi (2014), ficaram evidenciados dois obstáculos que podem surgir no desenvolvimento de um trabalho com a modelagem: o obstáculo para os estudantes e o obstáculo para os professores. No primeiro, por estarem acostumados com um professor transmissor do conhecimento, os estudantes não conseguiram avançar sozinhos na compreensão dos novos conteúdos e, em alguns momentos, mantiveram-se em silêncio, como se não soubessem o que fazer. Paradoxalmente ao trabalho com modelagem, no segundo, o professor, por também estar inserido há décadas numa mesma sistemática de ensino e, ainda, pressionado pelo fator tempo, ao verificar a "paralisação" dos

estudantes diante do novo, imediatamente assumiu o papel de transmissor do conhecimento, explicando ao grupo cada uma das passagens, sobretudo as que envolviam as matrizes. Ainda assim, entende-se que o encontro foi relevante por reforçar o desenvolvimento das operações de pensamento relacionadas à observação, experimentação, interpretação e abstração.

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

O encontro foi finalizado com a constatação de que obter a lei de formação a partir de tabelas bem comportadas é tarefa com complexidade significativamente menor do que a obter essa lei a partir de tabelas não comportadas. O professor não definiu nenhuma tarefa para o próximo encontro.

Esses primeiros encontros com os estudantes foram importantes para a definição estratégica dos demais encontros, no sentido de estabelecer metas e caminhos a serem traçados para o fechamento do trabalho. Devido ao comportamento do gráfico estudado decidiu-se, juntamente com a orientadora da pesquisa, que seria escolhido apenas um conjunto de pontos do gráfico para continuidade do trabalho.

Concorda-se que o fato de os estudantes saberem que existe uma série de procedimentos, técnicas e utilização de diferentes objetos matemáticos para a obtenção da função já se constitui, por si só, num elemento grandioso para a compreensão do problema que estamos dispostos a resolver. Além disso, entende-se que essa etapa vem ao encontro do conceito de matematização que, segundo Bassanezi (2014), consiste na transição de uma representação, da linguagem natural à linguagem matemática, possibilitada por meio de linguagem e símbolos específicos.

4.6. Utilização do software Excel para a solução do problema do ajuste de curvas – Encontro 6

Objetivos:

Mostrar a viabilidade do Excel para obter o ajustamento de curvas oriundas de tabelas mal comportadas.

Discussões realizadas:

O encontro iniciou com a retomada das dificuldades observadas na utilização dos métodos dos mínimos quadrados para a obtenção da função linear oriunda de uma tabela de valores mal comportados. Nesse momento, foram retomados os conteúdos necessários durante o processo de ajustamento de curvas: representação matricial, matrizes transpostas, produto de matrizes e técnicas para resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas.

A seguinte reflexão foi levantada pelo professor:

“Vimos que é possível, de forma compreensível e relativamente prática, o processo para obtenção da lei de formação de uma função cuja tabela apresenta valores bem comportados. No entanto, constatamos que a técnica utilizada nessa situação não se aplica quando os valores da tabela são mal comportados. Para a solução desta situação, no encontro anterior, nos deparamos com um processo não tão simples, o dos mínimos quadrados, para a obtenção dessa lei, por meio de um ajuste de curvas. No exemplo analisado tínhamos apenas seis pontos, o que nos direcionou a seis equações. E se desejarmos realizar um ajuste de curvas quando nos deparamos com uma tabela com 10, 20, 30 ou mais pontos mal comportados?”

O questionamento foi necessário para contextualizar e introduzir um novo elemento na discussão: a tecnologia. O professor verificou que o grupo conhecia a ferramenta Excel, no entanto pouco ou quase nunca a utilizavam. Assim, essa ferramenta tecnológica foi apresentada como uma possibilidade para plotar gráficos e obter linhas de tendência, ou seja, obter a lei da função por ajuste de curvas, o método dos mínimos quadrados. Vale ressaltar que a escolha do Excel se deu pela sua facilidade de acesso e praticidade, inclusive por sua disponibilidade no celular.

Assim sendo, a questão discutida no encontro anterior foi resolvida novamente, agora com a utilização da ferramenta Excel. Como os estudantes não sabiam os comandos para solucionar o problema, o professor apresentou os passos necessários para a obtenção da lei de formação da função, quais sejam:

Digitar a tabela de valores;

Selecionar a tabela de valores e "inserir gráfico de dispersão";

Nos pontos plotados, clicar com a parte direita do *mouse* e ir em "adicionar linha de tendência". Na mesma janela, já aberta, escolher o tipo de regressão (linear) e, também, selecionar "exibir equação no gráfico".

Após seguir o passo a passo descrito anteriormente, estudantes e professor obtiveram a seguinte situação (figura 4.12):

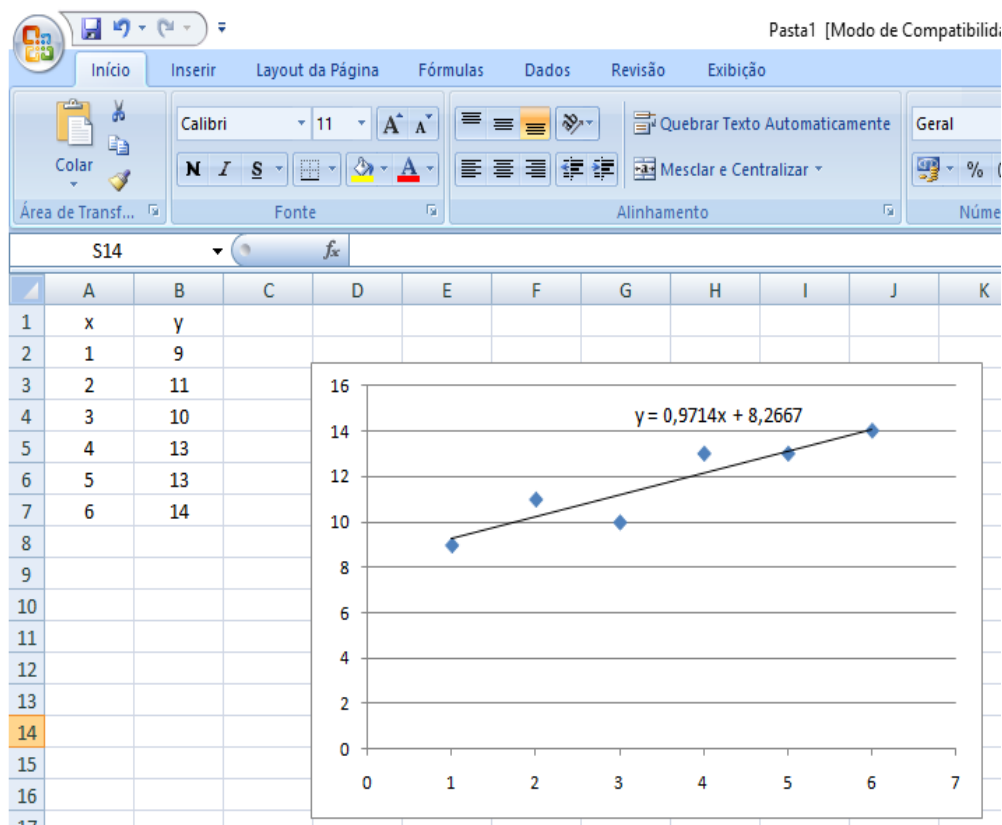


Figura 4.12: Ajuste de curva realizado no Excel. Fonte: Acervo do autor.

Os estudantes ficaram positivamente surpresos com o fato de a ferramenta obter praticamente a mesma equação obtida por meio de extensos cálculos, realizados no encontro anterior. Nesse instante, foi retomado o fato de a tecnologia ser grande aliada ao avanço do conhecimento científico, no sentido de ampliar a capacidade de observação, comparação de resultados, interpretação, experimentação e abstração, operações essenciais à modelagem.

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

O encontro foi finalizado com uma reflexão sobre o grande poder que a tecnologia pode nos proporcionar em prol da compreensão e solução de problemas do mundo real. Após isso, a seguinte tarefa foi designada ao grupo: em relação ao gráfico do aquecimento global (figura 4.3), seria o ajuste linear, proporcionado pelo Excel, a nossa melhor modelação, em outras palavras, o modelo linear cumpriria de forma fidedigna com a tarefa de prever o aquecimento global em épocas futuras?

4.7. Uma conversa sobre a Mostra Cultural do colégio – Encontro 7

Objetivos:

Discutir com o grupo de estudantes a possibilidade de apresentar o trabalho de modelagem na Mostra Cultural promovida pelo colégio.

Discussões realizadas:

Na semana que antecedeu este encontro, a Coordenação do colégio, em reunião com os professores do Ensino Médio, deu detalhes sobre a Mostra Cultural do colégio, um evento freqüente e tradicional. Nessa reunião, foi solicitado que os professores e estudantes do Ensino Médio participassem, obrigatoriamente, de pelo menos um projeto. Após a reunião, o professor pesquisador vislumbrou a possibilidade da apresentação do trabalho desenvolvido sobre modelagem e aquecimento global. Assim, utilizando o contato criado no WhatsApp, informou ao grupo de estudo sobre essa possibilidade. Nesse sentido, em caráter extraordinário, esse encontro não tratou do problema da modelagem, mas sim, da possibilidade de apresentarmos nossos estudos na Mostra Cultural.

Os estudantes acataram a ideia de forma positiva e entusiástica. Juntos, traçamos algumas ideias para a mostra, como:

Elaboração de cartazes para: Definir/conceituar aquecimento global Mostrar as conseqüências do efeito estufa; Conceituar Modelagem Matemática.

Obtenção de uma sala de modo que a mesma fosse utilizada como substrato para a apresentação.

A aluna F2 relatou que, na Mostra, seria interessante destacar o papel da matemática como suporte para a análise e interpretação de acontecimentos, utilizando-a assim para interpretação e leitura da realidade. Tal relato vem ao encontro dos pensamentos de Freudenthal (1970) em sua Educação Matemática Realística (EMR), no sentido de que a matemática deve ser conectada com a realidade, aproximar dos alunos, ser relevante para a sociedade e ser de valor humano.

No início deste trabalho, deixamos claro que o nosso foco seria o olhar matemático para a solução do problema de "obter uma função matemática que melhor represente o gráfico do aquecimento global". Entretanto, com a possibilidade de participação na Mostra Cultural, é certo que haveria a possibilidade de os

estudantes extrapolarem o aspecto matemático, perpassando por questões sócio-culturais, econômicas e ambientais, ou seja, por objetos do conhecimento presentes em outras áreas do conhecimento.

Não se pretende, neste trabalho, apresentar os resultados dessa Mostra. No entanto é relevante registrar que tal informação é importante para evidenciar, segundo Moreira (2012), a importância de uma aprendizagem significativa, tendo em vista que a mesma não é aquela que o aprendiz nunca esquece, mas sim aquela que, para Ausubel, proporciona ao estudante novos conhecimentos potencialmente significativos, em consonância com sua predisposição para aprender. Consideramos que os novos conhecimentos (ajuste de curvas) em consonância com a apresentação na Mostra (predisposição dos estudantes) são a combinação ideal para essa aprendizagem significativa.

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

Refletiu-se sobre a importância do conhecimento matemático para a leitura e interpretação dos problemas da sociedade, enfatizando a questão do aquecimento global. Como tarefa, foi novamente solicitada a revisitação ao gráfico do aquecimento global (figura 4.3), para que pudessem estudá-lo com maiores detalhes no próximo encontro. A seguinte questão foi levantada ao grupo, pelo professor:

“Seria o modelo linear a melhor opção para nosso ajuste? Ou haveria outras opções, como uma curva ou uma linha sinuosa?”

Nesse momento, para concretizar essa ideia, o professor traçou na lousa algumas curvas, sem escala ou graduação nos eixos, refletindo sobre a possibilidade da escolha de alguns pontos, constituindo-se no estudo de uma curva que representasse à primeira (figura 4.13):

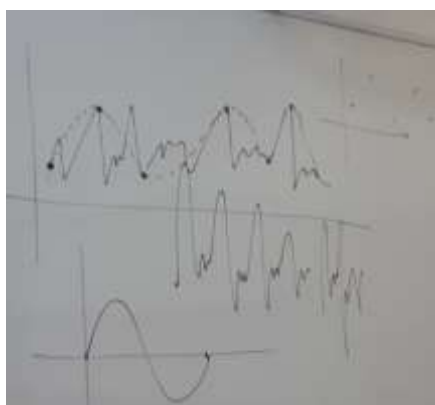


Figura 4.13: Curvas traçadas pelo professor na lousa. Fonte: Acervo do autor.

A proposta levantada foi a seguinte: por termos muitos pontos no gráfico do aquecimento global (figura 4.3) e por não ter uma única tendência, talvez a escolha estratégica de alguns pontos seria mais adequada, como base para obter uma boa modelação para a curva. O encontro foi finalizado com a tarefa de pensarem sobre essa possibilidade.

4.8. Estudo do gráfico do aquecimento global – Encontro 8

Objetivos:

Analisar a validade do modelo linear, no Excel, para a modelação do gráfico do aquecimento global; estudar as diferentes modelações do Excel, buscando a que melhor modela o gráfico do aquecimento global.

Discussões realizadas:

Antes de iniciar o relato desse encontro, ressalta-se que, por motivos particulares, a estudante F2 não participou desse momento.

Neste encontro ocorreu a retomada da questão deixada no encontro anterior, e foi decidido que a proposta de escolher alguns pontos do gráfico sobre aquecimento global para a obtenção da lei da função seria a melhor opção.

Antes de avançar nas discussões, ocorre a necessidade de retomar o referido gráfico da figura 4.3:

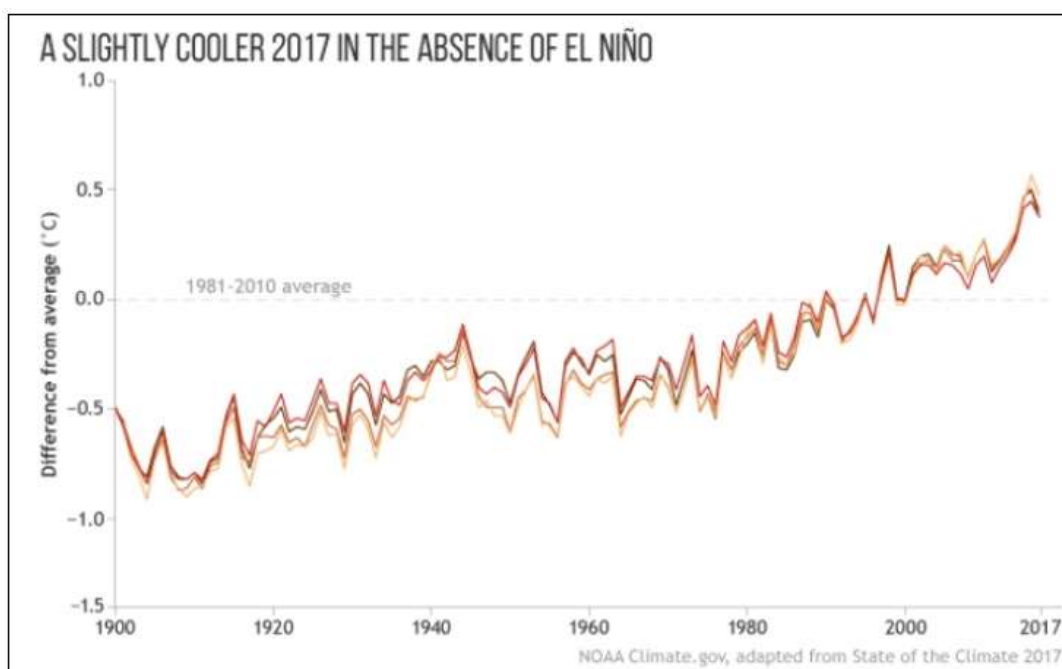


Figura 4.14: Retomando o gráfico da figura 4.3. Fonte: Acervo do autor.

O computador e um projetor foram utilizados para que o gráfico, projetado na lousa digital, possibilitasse maior visibilidade ao grupo de estudantes acerca dos pontos que deveriam ser utilizados para a obtenção da curva e, respectivamente, da lei da função. Contudo, uma discussão, que ainda não tivera ocorrido, foi provocada:

“Professor: Qual o significado da linha tracejada, indicada pelo 0,0 no eixo das ordenadas?”

Os estudantes fixaram sua atenção ao gráfico, mas não conseguiram responder. O estudante M3 afirmou ter compreendido e, de forma dialogada, tentou explicar ao grupo:

M3: Olha, é tipo uma média. Aí depois a média virou zero. Tem que ver...O texto está ali professor? Apontando para o computador.

Professor: O texto tá.

M3: Eu acho que no texto eles vão falar a média que deu.

Professor: Pode mexer lá. Pode mexer.

F1: Tem que ligar no computador. Foi.

M3: É uma média sim. Acho que foi feita de 1981 a 2010. Não fala a média no texto...Mas acho que entendi a ideia. É tipo assim...em 1900 a diferença de temperatura em relação a média caiu...de 2000 pra frente começou a subir...

Professor: vocês estão entendendo?

Restante do grupo: não.

M3: Deixa eu tentar na lousa...

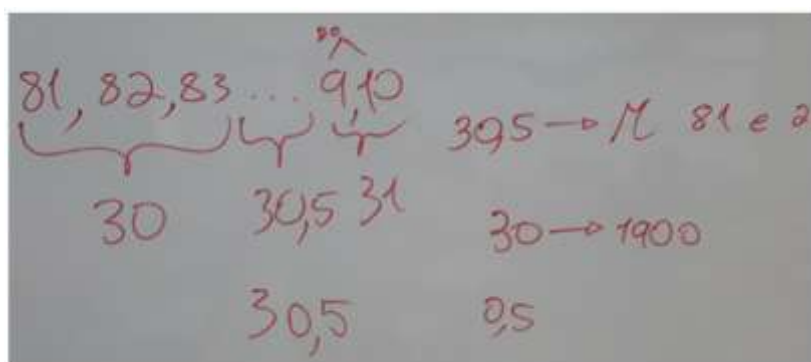


Figura 4.15: Registro do estudante M3 para explicar a questão da média do gráfico da figura 4.14. Fonte: Acervo do autor.

Após o registro e nova explicação do estudante M3, o professor procurou reforçá-la buscando a conexão com outro exemplo:

Professor: - Imaginem que a nota média do Enem é de 500 e ela foi estabelecida em certo período para comparar diferentes estudantes ao longo do

tempo, em anos. Vamos denotar essa nota média como sendo "0,0", nosso novo parâmetro. Assim, um estudante de hoje que tira 600 em alguma área do conhecimento, estará +100 acima do 0,0; ou seja, +100 acima da média estabelecida e, o que tira -50 está 50 pontos abaixo da média.

Questionados sobre a compreensão das explicações de M3 e do professor, o grupo reagiu positivamente e após a compreensão dessa questão, o professor retomou o gráfico solicitando auxílio quanto a decisão a ser tomada referente a que conjunto de pontos deveriam utilizar no eixo das abscissas.

Segue transcrição de parte dessa conversa:

Professor: Qual é a decisão que nós temos que tomar agora? Não é exatamente uma reta. Prestem atenção. (pausa) Não é exatamente uma reta. Não é uma parábola. Mas eu acho que dá pra gente fazer três coisas: modelar por uma reta....(interrupção)..nós vamos escolher algum conjunto de pontos aqui. (apontando para o gráfico projetado – nesse momento, todos em pé diante dele)....tem que ver qual devemos usar....vamos colocar na lousa uma tabela de pontos....vamos pegar dez pontos (um, dois, três, quatro, cinco,...., nove, dez, onze), onze pontos! Nós vamos colocar esses onze pontos aqui. Que nem fizemos nos encontros passados.

M3: Nós temos que ver quais devemos pegar.

Professor: Aqui, eu vou estabelecer o eixo x... nós vamos estabelecer...então o zero, o $x = 0$ vai representar o ano de 1900, o $x = 1$, vai simbolizar o ano de ... quer dizer, nós vamos escolher um ponto por aqui e estimar..talvez 1910.

Nesse instante os estudantes conversaram sobre a forma de obter esses pontos, por meio de uma média, não sendo possível identificar no áudio de forma precisa todas as falas.

O diálogo prosseguiu:

Professor: ...precisamos estabelecer o que será o nosso eixo y. Daí nós vamos escolher juntos, por estimativa mesmo, nossa modelagem....agora vou precisar da ajuda de vocês...esse 0 foi escolhido para o ano de 1900. E agora, nós vamos intervalar como? Como seria melhor?

M3: pega a diferença entre os anos. Pega 2017...subtrai, divide por 10. Pega 2017, subtrai de 1900, vai dar...117...e divide por 10.

Professor: vocês estão entendendo o que ele quer dizer? Ele está usando a distância.

F1: Entendi. Não, não entendi.

Professor: Preciso explicar o que estou tentando fazer, digo, estou tentando buscar de vocês as respostas. Senão, corro o risco de dar as mesmas aulas as quais todos estamos acostumados, um modelo em que o aluno apenas olha e observa os passos do professor, detentor das respostas. Então vai M3, tenta explicar o que pensou.

M3: Pensa que isso é geometria. Como se fosse uma reta. A gente tem o ponto 1900 e o 2017. A gente quer saber o tamanho. O tamanho vai ser assim...tá...só que aí, a gente não quer...(pausa)...onze ou dez pontos...

Professor: Ali tem onze, apontando para a tabela.

M3: A gente quer onze pontos. Então a gente vai dividir esse 117 por 11.

F1: Tá.

Professor à F1: Entendeu?

F1: Entendi.

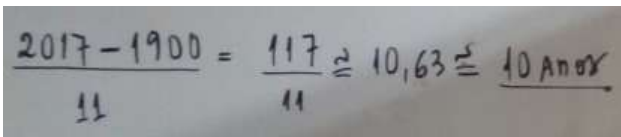
Professor: Precisamos usar uma calculadora.

F1: 117 por 11...dá aproximadamente 11.

M2: Dá 10,6.

Professor: vamos pegar de 10 em 10 anos ou de 11 em 11? A decisão é nossa. Acho que vai dar pouca diferença. Talvez seja melhor de 10 em 10.

F1: É, melhor. Fica mais fácil.



$$\frac{2017 - 1900}{11} = \frac{117}{11} \approx 10,63 \approx 10 \text{ Anos}$$

Figura 4.16: Registro do professor na lousa após a explicação do estudante M3.
Fonte: Acervo do autor.

Estabelecido o intervalo em que seriam estimadas as medidas, os estudantes fixaram a sua atenção ao gráfico projetado na lousa digital. Outra decisão precisou ser por eles tomada: o gráfico apresenta, embora muito próximas uma da outra, quatro linhas. O grupo decidiu que utilizaria um ponto que estivesse no centro dessas linhas. Isso ocorreu de forma visual e estimada. Enquanto alguns faziam a leitura e estimativa dos pontos, a aluna F1 os registrava na tabela (x, y) que foi representada previamente pelo professor (figuras 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20):

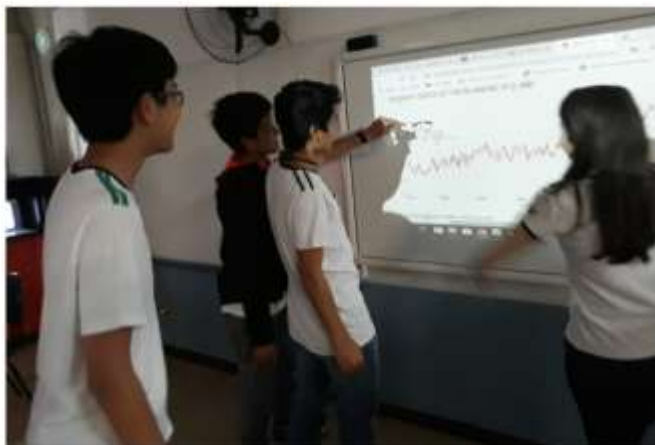


Figura 4.17: Estudantes estimando pontos no gráfico.
Fonte: Acervo do autor.



Figura 4.18: Estudantes estimando pontos no gráfico.
Fonte: Acervo do autor.

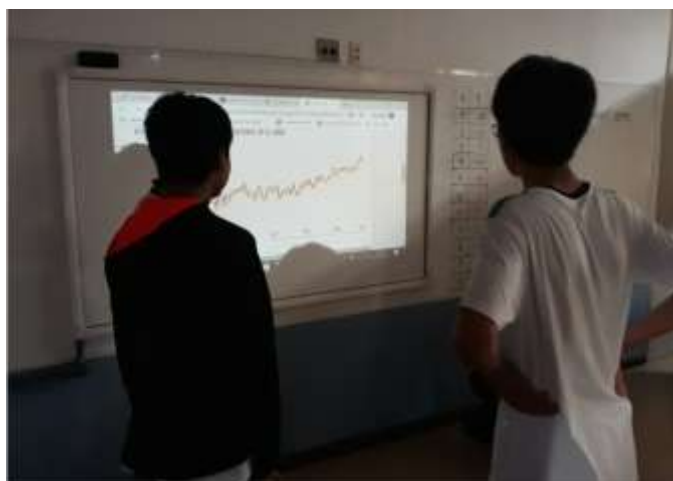


Figura 4.19: Estudantes estimando pontos no gráfico.
Fonte: Acervo do autor.



Figura 4.20: Estudantes estimando pontos no gráfico.
Fonte: Acervo do autor.

Após a estimativa dos onze pontos do gráfico, a tabela ficou assim:

	x	y
(1900)	0	-0,5
(1910)	1	-0,8
(1920)	2	-0,7
(1930)	3	-0,6
(1940)	4	-0,4
(1950)	5	-0,5
(1960)	6	-0,4
(1970)	7	-0,4
(1980)	8	-0,3
(1990)	9	-0,01
(2000)	10	0,0

2017

$$2017 - 1900 = 117 \approx 10,63 \approx 10 \text{ anos}$$

Intervalos

x	y	
11	0,2	(2010) 29 - 0,5
12	0,5	(2017) 29

= 2000

Figura 4.21: Estudante F1 após finalização da tabela de valores. Fonte: Acervo do autor.

O passo seguinte foi a digitação da tabela na planilha Excel, para enfim, ser obtido as linhas de tendência e as funções matemáticas para o gráfico estudado. De forma participativa, os alunos M2 e M3 ficaram no computador (figura 4.19) enquanto os demais observavam os trabalhos. Passo a passo, as etapas para a obtenção da lei de formação (estudadas no 6º encontro) foram utilizadas.



Figura 4.22: Estudantes M2 e M3 digitando os valores da tabela da lousa no Excel. Fonte: Acervo do autor.

O grupo observou as diferentes opções apresentadas pelo software Excel, tais como a linha de tendência linear e a linha de tendência polinomial. Desse modo, optaram por utilizar esses dois modelos. Enquanto os resultados eram visualizados na tela do computador e na projeção da lousa digital, os estudantes M1 e F1 realizavam o registro em lousa. As imagens 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26 ilustram o desenvolvimento desse trabalho, no Excel e na lousa:

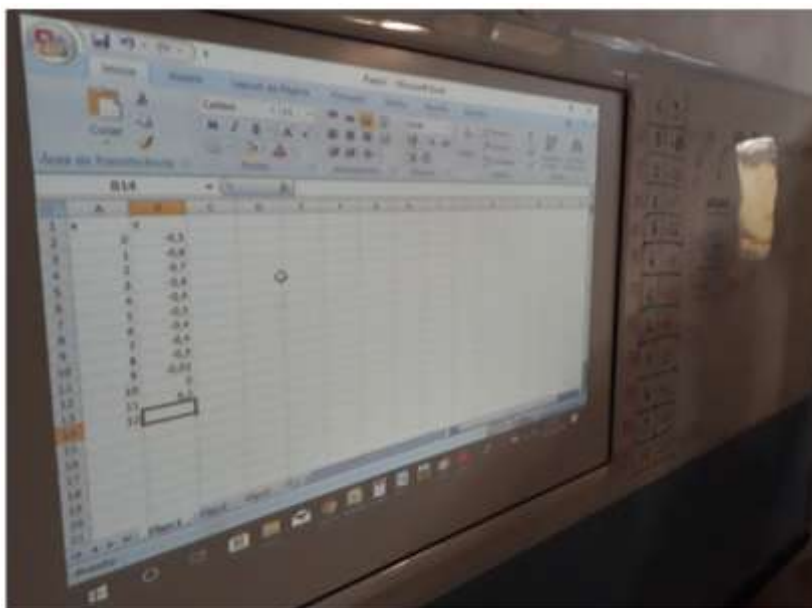


Figura 4.23: Tabela feita pela estudante F1, na lousa, digitada no computador pelo estudante M2. Fonte: Acervo do autor.

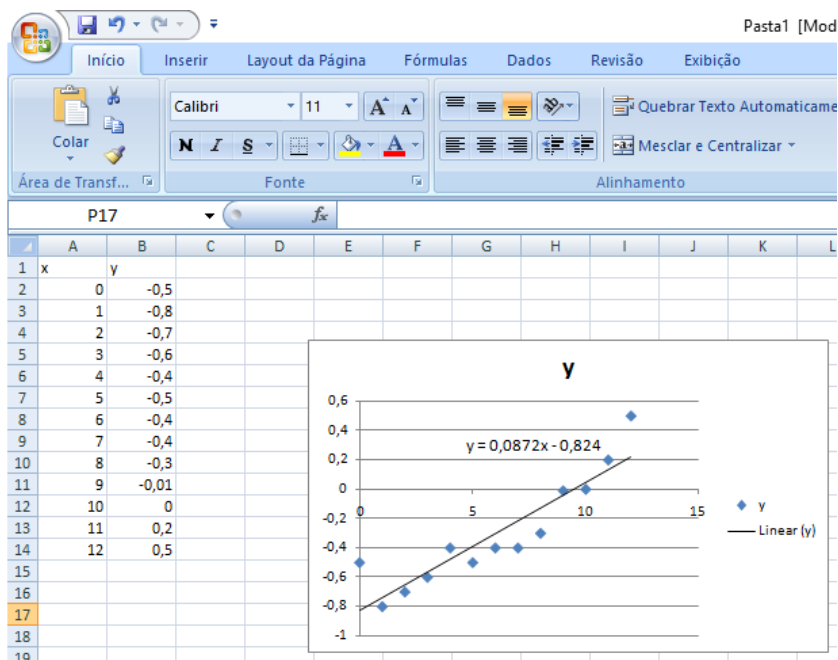


Figura 4.24: Gráfico e função linear obtidos no Excel.
Fonte: Acervo do autor.

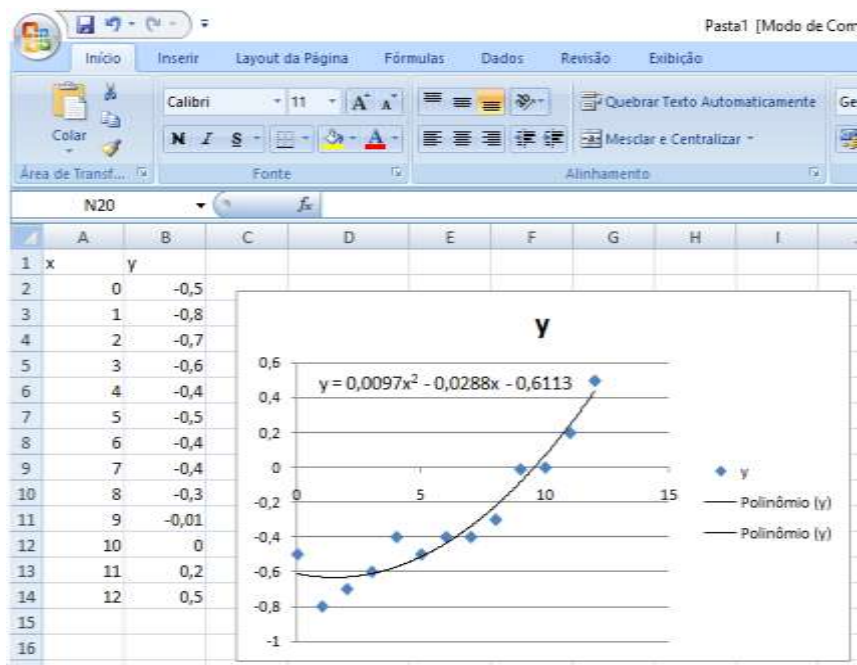


Figura 4.25: Gráfico e função polinomial obtidos no Excel.
Fonte: Acervo do autor.

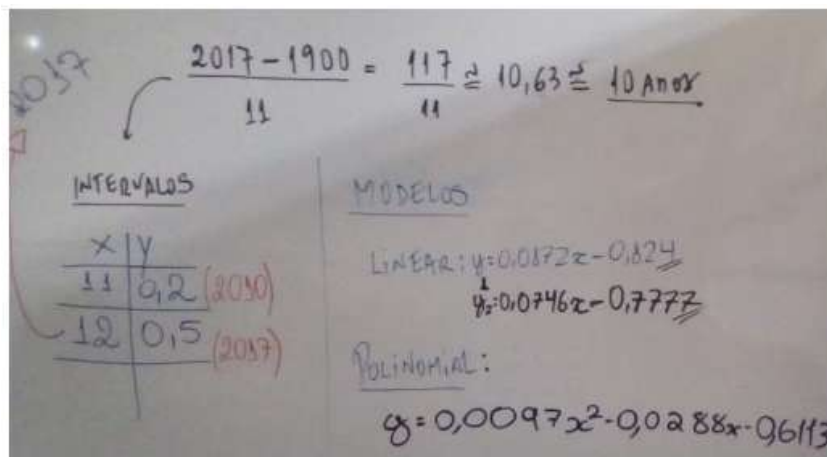


Figura 4.26: Registro em lousa dos modelos linear e polinomial realizado pelos estudantes M1 e F1. Fonte: Acervo do autor.

Finalizada a obtenção dos modelos linear e polinomial, o grupo, com o auxílio da calculadora utilizada pela aluna F1, testou ambas as expressões. Escolhendo alguns valores aleatórios da tabela, os estudantes verificaram qual das duas expressões mais se aproximava dos valores de y , a partir do valor tomado para x . Após a realização dos cálculos ficou evidenciado que a expressão mais adequada foi a polinomial $y = 0,0097x^2 - 0,0288x - 0,6113$. Aproveitamos ainda para refletir sobre em que momento, do curso regular de matemática, uma função com coeficientes numéricos dessa natureza poderia ser apresentada para, por exemplo, determinarmos as suas raízes. Também se refletiu sobre a ocorrência dos erros de medição e cálculos durante o processo, entretanto sem que se fizesse, por exemplo, uma comparação percentual entre os erros oriundos dos dois modelos.

Por fim, discutiu-se sobre a impossibilidade de que a variação continuasse a crescer indefinidamente, embora fosse possível fazer uma previsão para, por exemplo, os anos de 2021, 2022 até 2025.

O encontro foi extremamente significativo, pois foi possível verificar que o grupo, incluindo o professor, utilizou diferentes operações de pensamento. Também ficou evidenciado o desenvolvimento de importantes fases da modelagem: matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Fechamento e demandas para o próximo encontro:

O encontro terminou com uma roda de conversa, novamente retomando a grande vantagem que a tecnologia proporciona ao estudo das diferentes ciências, reforçando o fato de que, sem ela, nesse caso, teriam que realizar todos os cálculos

envolvendo o método dos mínimos quadrados, o que tomaria demasiado tempo de trabalho, inclusive com a maior probabilidade de erros serem cometidos. Também foi destacado o cumprimento da tarefa proposta: a de encontrar um modelo (fórmula) mais adequado ao gráfico que foi proposto a estudar. Como demanda o grupo recebeu um questionário para uma avaliação dos encontros (anexo 1). Para que tivessem total liberdade nas respostas, eles foram orientados a não se identificarem.

4.9. Apresentação, avaliação e reflexões do trabalho de pesquisa e planejamento de ações para a Mostra Cultural – Encontro 9

Objetivos:

Apresentar e avaliar o trabalho desenvolvido do início ao fim do estudo e traçar as próximas ações para a apresentação na Mostra Cultural do colégio.

Discussões realizadas:

Este encontro contou com a presença de duas novas integrantes do grupo, agregando ainda mais ao trabalho para a Mostra Cultural. Durante a semana que antecedeu a esse encontro, as mesmas conversaram com a aluna F2, manifestando interesse de integrar o grupo. Ambas também procuraram o professor responsável pelo grupo, que as incluiu no projeto, para o evento do colégio. Vamos denotá-las, nesse registro, como as estudantes F3 e F4.

Esse nono encontro foi dividido em duas partes: a primeira para realizar um fechamento do trabalho com a Modelagem e, a segunda para traçar ações para a Mostra do colégio.

1ª parte do encontro

Essa etapa do encontro foi iniciada com a apresentação do documento de dissertação do professor pesquisador. Cada item da dissertação, desde a capa, agradecimentos, resumo até as considerações finais e bibliografia foram apresentados para o grupo de estudantes. O objetivo do professor foi o de mostrar as etapas de um trabalho dessa natureza, bem como a complexidade de fazê-lo. Ressalta-se que o trabalho não foi lido na íntegra, e sim projetado na lousa digital para que todos tivessem uma dimensão do todo. Os estudantes mostraram total interesse nesse momento, pois nunca tiveram vivência em uma ação similar. Foram discutidos aspectos estéticos, ABNT, referências, citações e a importância da

transparência no registro escrito e fotográfico. A apresentação durou aproximadamente 40 minutos e foi extremamente rica.

Posterior a apresentação, abriu-se a possibilidade de comentários e considerações adicionais sobre o projeto, constituindo-se num outro momento rico de reflexões. A seguir, alguns recortes, sem correção de fala ou linguística, das falas dos alunos participantes:

F1: *"...teve umas 40 pessoas que queriam entrar no projeto, depois 18 se inscreveram..no final ficaram apenas nós....as pessoas não saíram por que não quiseram participar...tipo, elas saíram porque tinham outras coisas pra fazer..."*

F2: *"...acho que uma coisa também, que eles saíram, era o fato de a gente meio que não saber o que fazer, meio que ficar livre, ..., quando a gente chegou aqui....vimos que nós teríamos que trabalhar..."*

M3: *"...então, não sei se coloquei na minha resposta ou se falei pra vc, professor, ..., tipo, pra cada aula vc tinha que ter um objetivo...não ficou claro..."*

F2: *"...no começo achei que seria uma coisa mais de conta, de exercício...com o passar do tempo mudei de ideia...positivamente...pois vi que não era só isso..."*

F4: *" ...tipo, no começo eu não quis participar...achei que era conta....mas quando vi a F2 falando do projeto...fiquei com vontade de entrar...daí aproveitei a Mostra..."*

As falas dos estudantes evidenciam a necessidade de o professor pesquisador compartilhar previamente o planejamento e, ainda, discutir o processo passo a passo durante a sua execução. É certo que houve um planejamento prévio, para cada etapa, entretanto, o fato de não dividir antecipadamente os objetivos de cada encontro com os estudantes, deixou-os sem norte. O grupo só se deu conta que estava realizando de fato matemática durante os encontros, a partir do 5º encontro, quando, na lousa e no computador, puderam colocar a "mão na massa". Essa reflexão é de extrema importância e serve de advertência a trabalhos futuros, com ou sem a utilização da Modelagem Matemática: dividir o planejamento das aulas com os alunos, não importa com que periodicidade (semanal, quinzenal ou mensal) pode ser uma ação estratégica para o engajamento do estudante com a aprendizagem, pois os mesmos podem acompanhar o curso como maior compreensão do mesmo.

2ª parte do encontro

Essa etapa destinou-se a elaboração de um plano estratégico para a apresentação do projeto na Mostra Cultural do colégio. O grupo conseguiu, com a coordenação, a disponibilidade de uma sala de aula para essa apresentação. Nessa sala, cujo foco será o problema do aquecimento global, haverá um circuito, com estações, em que o visitante terá a oportunidade de observar painéis, vídeos e cartazes, com gráficos e dados estatísticos. Cada estudante dará conta da explicação teórica desses objetos visuais. Após as explicações desses objetos, um representante explicará a origem do projeto, com ênfase no trabalho de Modelagem Matemática, mostrando o papel da matemática na leitura e compreensão do problema estudado. A proposta é que as pessoas entrem na sala, passem por uma espécie de circuito permeando os objetos visuais, com a finalização centralizada no projeto de modelagem.

Na compreensão do grupo de estudantes e professor, a culminância do projeto numa Mostra Cultural, vai além da obtenção da lei da função que modelou a curva de aquecimento estudada, tendo em vista a possibilidade de apresentar aos participantes que o conhecimento matemático pode ser importante aliado à compreensão do mundo e da sociedade.

5. ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO APLICADO

5.1. Grupo que iniciou e finalizou o projeto

Embora já tenha deixado, no registro do 9º encontro, alguns relatos verbalizados pelos estudantes, julga-se relevante uma seção para a análise de suas respostas ao questionário (anexo 1). Assim sendo, segue uma análise e reflexão sobre as respostas dos cinco estudantes ao questionário avaliativo do projeto.

Quando perguntados sobre o motivo pelo qual aderiram ao projeto (questão 1), três estudantes responderam que o motivo foi o "interesse em ampliar seu conhecimento matemático", um respondeu "interesse pelo tema – Modelagem Matemática" e, um respondeu "empatia pelo professor". De uma forma pragmática, pode-se inferir que esses estudantes, por meio de suas respostas, demonstram interesse em ampliar o conhecimento matemático, seja pelo novo que se apresenta ou pela empatia com seu professor.

Em relação à substituição das aulas regulares por aulas similares às que foram desenvolvidas durante os encontros (questão 3), quatro estudantes responderam que sim, que tal substituição poderia ser feita. Destacamos os argumentos apresentados por eles, com alguns recortes de suas respostas, ressaltando que a escrita segue modelo oral de fala:

"...há bastante interação dos alunos para com o tema...os alunos explicam aos outros, assim escapando da monotoneidade (monotonia) de o professor explicar a eles".

Possibilidade de "botar a mão na massa";

"Aulas desse tipo incentivam os alunos a participarem...".

Possibilidade de sair da "zona de conforto".

As respostas supracitadas são indicadores de que os estudantes consideram importante a sua participação no processo, evidenciando que os mesmos têm predisposição para deixarem a condição de meros receptores dos conteúdos.

A seguir, uma resposta afirmativa de um estudante à questão de número três:

3) Você acredita que as aulas regulares de matemática, do colégio, poderiam ser substituídas por aulas similares a que foram desenvolvidas no projeto?
 Sim Não

Justifique sua resposta?
 Porque há bastante interação dos alunos para com o tema, por exemplo, os alunos explicam aos outros, assim tem escapando da monotonia de o professor explicar a eles.

Figura 5.1: Resposta de um estudante à questão 3 do questionário. Fonte: Acervo do autor.

Não há dados estatísticos para uma inferência com maior embasamento teórico, no entanto, convida-se a refletir sobre a possibilidade de que a resposta negativa à questão 3, dada por um único estudante, baseia-se na característica do colégio em relação aos vestibulares. A possível reflexão que se faz a partir dessa resposta é que, em geral, os estudantes, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental II, treinam para "passar no vestibular" e/ou "ir bem na prova do ENEM". Esse fato fica ainda mais forte em colégios que utilizam material apostilado, caso do colégio em que foi realizada a pesquisa. Ressalta-se que tal reflexão é baseada na experiência e convivência do pesquisador com esses estudantes e seu grupo de professores de diferentes disciplinas.

Para dar maior ênfase a hipótese acima descrita, segue a resposta desse estudante:

3) Você acredita que as aulas regulares de matemática, do colégio, poderiam ser substituídas por aulas similares a que foram desenvolvidas no projeto?
 Sim Não

Justifique sua resposta?
 Não, como a principal (objetivo) objetivo da escola são os vestibulares, teriamos falta de tempo para o projeto.

Figura 5.2: Resposta de um estudante à questão 3 do questionário. Fonte: Acervo do autor.

De forma geral, quando questionados sobre se saberiam explicar o significado do termo Modelagem Matemática (questão 4), o grupo apresentou respostas interessantes. Dada a relevância dessa questão ao projeto, optou-se por transcrevê-las na íntegra nesse documento:

"Sim, modelagem envolve gráficos e modelos, consiste em transformar um tema em algo que possa ser estudado e junto com a matemática forma-se este

termo, ou seja, algum problema é transformado num gráfico (por exemplo) através da matemática e pesquisa."

"Encontrar a matemática em diversas matérias e assuntos (encontrar e estudar)."

"Modelagem Matemática é a área da matemática em que se discute um tema e o modela matematicamente por meio, por exemplo, de gráficos."

"Para mim, a modelagem é um problema que está presente no dia a dia de todos os cidadãos e nisso, observamos com mais profundidade aquilo que está sendo tratado. Um exemplo disso é que o projeto que fizemos, sobre o aquecimento global, e conseguimos encontrar uma solução para este problema."

"Modelagem Matemática é o trabalho matemático dentro de temas atuais e cotidianos do estudante. Também é um jeito de desenvolver a autonomia dos alunos para com os estudos."

As respostas evidenciam que há compreensão por parte dos estudantes envolvidos de que a modelagem é um meio para aproximar a matemática da realidade, por meio do estudo e compreensão de um tema.

Sobre a dinâmica utilizada durante os encontros, questão de número cinco, o grupo apresentou respostas positivas, classificando-a, ao final, como boa. No entanto, um dos estudantes considerou que faltou um pouco de organização nos primeiros encontros. Em relação aos demais encontros também os classificaram como bons. Os argumentos para a afirmação de que a dinâmica foi "boa" foram os seguintes:

"...Ao longo do trabalho nossas pesquisas começaram a ganhar mais vida...,quando começamos a fazer as contas e os gráficos para achar a solução do nosso problema..."

"...não ficava cansativa, o professor não sobrecarregava as nossas cabeças e isso facilitou na conclusão do projeto."

"nossas aulas foram produtivas e legais..."

"...boa por permitir os alunos terem mais oportunidades para aprender por conta própria."

A questão de número seis questionou o grupo sobre o que haviam aprendido, em termos matemáticos, nesses encontros. Também por se tratar de uma questão de extrema relevância ao projeto, faremos a transcrição das respostas na íntegra:

"Aprendi matrizes, como usar o Excel (em relação aos gráficos). Pelo que eu lembro era isso."

"Aprendemos funções lineares, funcionamento delas, matriz, aceitando os fatos, pois não tivemos a explicação da formação de suas fórmulas."

"Eu aprendi a usar matrizes (matéria do 2º ano) e a usar o Excel para modelar gráficos de certas equações."

"Durante esses encontros aprendemos sobre funções bem e mal comportadas, matriz, função do 1º grau e algumas teorias de grandes matemáticos."

"Eu aprendi a modelar gráfico, usar as funções para isso, aprendi a usar matriz e matriz transposta entre outros conceitos."

As respostas evidenciam que o trabalho com matrizes, na solução dos sistemas, marcou de forma significativa os estudantes. O uso do Excel e o trabalho com funções também ficaram evidenciados em suas respostas.

Em relação à sétima questão, sobre se os estudantes observaram alguma conexão dos conteúdos trabalhados no projeto com os desenvolvidos nas aulas regulares, as respostas mostraram que quatro alunos do grupo conseguiram identificar algumas relações, sobretudo no estudo de gráficos e comportamento funções (*"...parábolas, linhas.."*). Um dos alunos respondeu que não pois, *"..em sala de aula eu nunca poderia aprender a usar o Excel."*

As respostas evidenciam que o tema funções, desenvolvido nas aulas regulares e nas aulas do projeto, foi assimilado de forma significativa pelo grupo, inclusive para o estudante que respondeu negativamente à questão. Tal fato se justifica, pois esse estudante deixa transparecer, na resposta à questão anterior, que *"eu aprendi a usar matrizes.....e a usar o Excel para modelar gráficos de certas equações"*. Dada a natureza do trabalho desenvolvido no projeto, podemos, sem perda de generalidade, interpretar o termo *equações*, registrado pelo estudante, como sendo *funções*.

A questão oito solicitou do grupo o que deveria ser feito de diferente para tornar o projeto mais interessante, caso eles participassem de um projeto similar a esse novamente. Embora o grupo tenha classificado nossos encontros como bons e produtivos, quatro dos cinco participantes realizaram críticas construtivas, indicando sugestões de mudanças:

"...o que deveria ser feito diferente seria a introdução ao projeto, pois não ficou tão clara a ideia e objetivos do projeto."

"...o projeto poderia ser dividido em partes para os alunos conseguirem visualizar melhor o resultado."

"...deveria talvez ter uma preparação prévia sobre os conceitos matemáticos que serão utilizados no processo."

"poderia ter dado uma prévia dos conteúdos que podem ser tratados no projeto."

As respostas escritas vêm ao encontro dos discursos realizados no 9º encontro e reforçam a tese de que o planejamento e objetivos do projeto devem ser compartilhados a priori, com os estudantes. É interessante aqui destacar que os estudantes, em suas aulas regulares, não fazem questão de ter esse compartilhamento do planejamento e objetivo das aulas. Embora seja um aspecto a ser considerado no projeto, observamos mais um ponto positivo no trabalho com a Modelagem Matemática, no sentido de proporcionar a possibilidade para o desenvolvimento do pensamento analítico e reflexivo.

Ressalta-se que as duas últimas falas sobre conhecimentos prévios refletem a prática usualmente adotada em sala de aula, onde inicialmente os conteúdos são apresentados, para só então os alunos trabalharem com os mesmos na forma de exercício. No entanto, numa estratégia baseada na Modelagem Matemática, espera-se justamente o contrário, ou seja, a necessidade de que os conteúdos e conceitos matemáticos sejam solicitados conforme o problema vai sendo resolvido.

Quando perguntados sobre o que eles diriam a um colega, caso tivessem que recomendar este projeto, questão nove, o grupo foi unânime ao responder que indicariam, pois:

"...o projeto é muito interessante, desafiador e complexo,..."

"...recomendaria a qualquer um pois desperta certo interesse durante o projeto e isso deixa bem satisfatória a conclusão dele."

"...para ter uma outra visão da matemática e para que ele possa perceber como a matemática pode ser divertida e englobar muitos outros assuntos."

"...o projeto é empolgante e que é possível aprender coisas que não se aprendem em sala de aula..."

"...projeto legal, onde se aprende matemática com mais profundidade e aprofundar-se em pesquisas sobre os problemas globais".

Estas respostas evidenciam a visão distorcida que os estudantes têm dessa disciplina em suas aulas regulares, provavelmente pelo trabalho mecânico empregado por seus professores, ao longo de sua escolaridade.

A última questão, de número dez, foi reservada para comentários adicionais que os estudantes quisessem realizar. Dos cinco estudantes, dois a deixaram em branco. Os que responderam evidenciaram aspectos relacionados à importância do olhar para o problema do aquecimento global, à possibilidade de implantar a Modelagem Matemática nas aulas regulares para a captação de mais estudantes, à importância do compartilhamento do planejamento com os estudantes e, por fim, à possibilidade de haver o envolvimento do projeto com outras disciplinas.

Um olhar amplo às respostas desse grupo ao questionário, mesmo considerando os ajustes a serem realizados, reforça a tese de que a Modelagem Matemática é uma excelente estratégia para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, proporcionando maior significado a essa disciplina.

5.2. Grupo que iniciou e não finalizou o projeto

Conforme comentado anteriormente, treze dos dezoito alunos desistiram do projeto, no retorno de férias às aulas regulares, no início do mês de agosto. Buscando compreender de forma mais clínica o que os levou a essa desistência, aplicou-se a esse grupo um questionário - anexo 2 - similar ao que foi aplicado ao grupo que finalizou o projeto, com a alteração de algumas questões. Dos treze estudantes, doze responderam ao questionário.

Quando perguntados sobre o motivo pelo qual aderiram ao projeto, primeira questão, seis estudantes responderam que o motivo foi o "interesse em ampliar seu conhecimento matemático", cinco responderam "interesse pelo tema – Modelagem Matemática" e, apenas um respondeu "empatia pelo professor". Essas respostas, quando confrontadas com as respostas do grupo que finalizou o projeto, reforçam a tese de que os estudantes têm predisposição para a aprendizagem por meio de aulas diferentes das quais estão habituados a ter.

A segunda questão referiu-se ao tema escolhido: seis estudantes haviam escolhido o tema "Assaltos na região de Osasco", três o tema "Qualidade do asfalto utilizado nas vias públicas de Osasco" e, os demais, não se recordava do tema escolhido.

Na terceira questão, os estudantes deveriam enumerar o motivo pelo qual deixaram o projeto. A seguir foi elencado os motivos mais alegados, em ordem de ocorrência nas respostas:

- Não teria mais disponibilidade no horário da tarde;
- Estou preocupado com as minhas outras atividades do colégio;
- O tema Modelagem não era o que esperava;
- Não houve empatia com as pessoas do meu grupo;
- Não tive a percepção de que aprenderia algo novo;
- Percebi que o tema que escolhi não era motivador/desafiador;
- A condução do professor/pesquisador não foi adequada/esclarecedora.

Embora os motivos maiores da desistência estejam relacionados à ausência de tempo e às atividades do colégio, ficou entendido que a ocorrência das outras respostas são relevantes, pois reforçam o fato de que os objetivos idealizados do projeto e o compartilhamento do planejamento devem ser discutidos e disponibilizados aos estudantes. Outra reflexão, relacionada à empatia, deve ser aqui registrada: o único grupo que finalizou o projeto foi constituído de estudantes da mesma turma. Os demais grupos foram formados por estudantes de turmas diferentes. Esse fato pode justificar a ausência de empatia citada por alguns que deixaram o projeto.

Em relação à substituição das aulas regulares por aulas similares às que foram desenvolvidas durante os encontros, metade do grupo se posicionou a favor e, a outra metade, contra. Os argumentos a favor dessa substituição estão relacionados ao aumento da quantidade de alunos que participariam do projeto. Os argumentos contrários, em sua totalidade, estão relacionados ao fato de que o projeto atrapalharia o desenvolvimento normal do curso. Novamente a questão da cobertura dos conteúdos foi um entrave, fato relevante aos estudantes e, em geral, às instituições de ensino que trabalham em prol do ingresso ao ensino superior, por meio dos vestibulares.

Quando perguntados se saberiam explicar, mesmo que brevemente, o significado do trabalho com a Modelagem Matemática, quinta questão, sete estudantes demonstraram ter razoável ideia sobre a mesma e, os demais, pouca ou nenhuma noção sobre a finalidade desse trabalho. De modo geral, os estudantes que responderam ter noção acerca desse trabalho, sustentaram suas respostas no

fato de que a Modelagem Matemática ajuda a entender melhor a matemática. Comparando a resposta dada pelo grupo que finalizou o projeto, identificamos significativo avanço na interpretação do que realmente pode ser desenvolvido por meio da modelagem.

Em relação ao que mais chamou a atenção nos encontros em que participou, sexta questão, a maioria das respostas enalteceu o trabalho em grupo, ou seja, o trabalho colaborativo. Isso evidencia a necessidade de aprimorarmos essa estratégia de ensino.

A sétima questão procurou identificar o que poderia ser feito de diferente para tornar o projeto mais interessante. Apenas um estudante sugeriu que todos os grupos deveriam focar no mesmo projeto, com divisão de tarefas que permitem maior aprofundamento. Os demais não se posicionaram, justificando a pouca participação no projeto.

Em relação à oitava questão, sobre a possibilidade de indicação de um amigo à participação nesse projeto, todos foram unânimes em responder que fariam a indicação, por ser um projeto interessante. Devido a pouca participação, as respostas a essas questões não foram pautadas em argumentos relevantes.

A nona questão, destinada a um espaço para comentários adicionais, não obteve respostas.

Observando as respostas a todas as questões do questionário dos estudantes que finalizaram o projeto e, também, do questionário dos que não o finalizaram, fica evidente a predisposição dos dois grupos em participar de momentos diferentes dos vivenciados nas aulas regulares, tradicionais. Outro aspecto de alta relevância refere-se à garantia de que os planejamentos e seus respectivos objetivos devam ser compartilhados para que os estudantes possam acompanhar, a cada etapa, o que deles se espera.

6. REFLEXÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

A utilização da Modelagem Matemática como estratégia de ensino requer o rompimento de concepções e crenças sobre a forma como se ensina e se aprende matemática.

Durante anos, professores e estudantes dessa disciplina conviveram, lado a lado, com um modelo peculiar de trabalho em sala de aula: o modelo baseado no paradigma do exercício. Tal paradigma pode ser compreendido como uma prescrição ou receita médica, fazendo com que o formato de uma aula de matemática pareça ser único, imutável e universal, quase sempre seguindo o mesmo roteiro: inicialmente, o professor apresenta ideias e/ou técnicas matemáticas, que apenas ele conhece. Depois, como se num passo de mágica, são desenvolvidos alguns exemplos de exercícios, os quais se adaptam perfeitamente às ideias e técnicas apresentadas. Para completar essa forma de abordagem, um conjunto de exercícios escolhidos intencionalmente é apresentado aos alunos de forma que eles apliquem o que supostamente aprenderam. Seguindo esse padrão, as aulas se alternam, ora o professor usando um tempo maior da aula em sua exposição, ora os estudantes dedicando maior tempo na resolução de listas e situações repetitivas, por vezes sem nenhum significado. Para reforçar ainda mais essa prática, os livros, apostilas e manuais didáticos apresentam a mesma estrutura, mantendo assim esse ciclo.

Diante desse cenário, a Modelagem Matemática torna-se uma estratégia alternativa que modifica esse ciclo vicioso de aula, uma vez que os problemas abordados direcionam os conteúdos e assuntos a serem estudados, independente da forma que os mesmos são apresentados aos estudantes: problematização de um fato real, em que questões de ordem quantitativa e qualitativa são formuladas ao longo do processo, na busca da solução; problemática apresentada diretamente pelo professor, que propõe a discussão e solução de uma questão específica ou, ainda, a abordagem por meio de um tema gerador. É certo que a escolha da Modelagem rompe de modo imediato com o paradigma do exercício, pois não há uma sequência ou receita pronta para a solução dos problemas.

O trabalho aqui apresentado optou pela utilização de um tema gerador, o aquecimento global. Tal escolha proporcionou grande riqueza de discussões, estudo

de novos objetos da matemática e, também, a utilização e apropriação de uma poderosa ferramenta tecnológica, o Excel. No entanto, a mesma também apresentou obstáculos, os quais se pretendem refletir nessa seção.

Considera-se, após a finalização do projeto, que a amplitude e dimensão do tema constituíram-se como um importante obstáculo, mesmo tendo ocorrido o direcionamento à obtenção da lei da função do gráfico de aquecimento. Refletindo sobre a situação em que problemas específicos podem ser apresentados pelo professor, uma das formas de abordagem da Modelagem, os estudantes poderiam ser provocados a solucionar pequenas situações envolvendo matrizes e suas operações, sistemas lineares e utilização do Excel. Tais problemas proporcionariam ao grupo de estudantes um conjunto de habilidades capacitando-os a compreensão e resolução do problema mais amplo, qual seja a obtenção da lei da função por ajuste de curvas, o método dos mínimos quadrados. Como tal ação não foi utilizada pelo pesquisador, optou-se pela observação de um vídeo sobre ajuste de curvas com a obtenção da referida lei, utilizando-se o software Excel. Entende-se que tal escolha também propiciou o desenvolvimento de diferentes habilidades com a mobilização de várias ordens de pensamento, no entanto tal riqueza poderia ter sido ainda maior caso a utilização de pequenos e específicos problemas houvesse sido o caminho. Ressalta-se ainda que o fator tempo apresentou-se como determinante pela escolha da utilização do vídeo e da ferramenta Excel.

Outro elemento relevante refere-se à desistência, após as férias do meio do ano, da maior parte do grupo de estudantes que aderiu ao projeto. Embora a resposta dada por esse grupo ao questionário investigativo aponte o horário alternativo e demandas do colégio como os principais motivos da desistência, faz-se necessário refletir acerca da possibilidade da amplitude do tema tê-los desestimulado, uma vez que a solução do mesmo não era imediata. Nesse sentido, talvez a opção por pequenos problemas antes da solução do problema maior mantivesse mais estudantes no projeto.

Após essas reflexões, visando à investigação de novas situações problema com uma abordagem por meio da Modelagem Matemática, pode-se:

- Desafiar os estudantes à resolução de pequenos problemas de investigação, certificando-se que tais situações servirão de suporte para a solução de uma problemática de maior amplitude;

- Garantir que os membros de cada grupo sejam da mesma turma, possibilitando maior facilidade de conversação entre estudantes e professor, no caso de o trabalho ser desenvolvido no período contrário às aulas regulares;
- Compartilhar o planejamento estratégico com os estudantes, em cada encontro, explicitando o que se espera e onde se pretende chegar.

Conforme já dito, não há fórmula pronta para o trabalho com a Modelagem. O que se pretendeu nessa seção foi apenas possibilitar uma pequena reflexão visando à melhoria de trabalhos futuros.

Novamente parafraseando o professor Rodney Carlos Bassanezi:

O professor que aceita o caminho da modelagem como estratégia de ensino, tem como desafio ajudar o estudante a compreender, por meio da construção de modelos matemáticos, cada etapa do processo daquilo que estiver estudando, refletindo sobre o verdadeiro papel da matemática na construção de um cidadão pleno e consciente.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O rompimento do trabalho com o modelo tradicional de ensino não é tarefa fácil, tanto para os professores como para os estudantes. Durante várias décadas esses atores conviveram com um sistema pronto, subdivido em disciplinas envoltas num conjunto de conteúdos pré-estabelecidos para serem desenvolvidos num intervalo de tempo limitado, tendo como suporte os referenciais curriculares, a experiência do professor e as prescrições indicadas em livros, apostilas e manuais didáticos. Tudo em prol da cobertura do programa, de modo que os conteúdos fossem difundidos e, ainda, que a aprendizagem acontecesse. De certa forma, independente do quanto isso possa ter sido traumático ou doloroso a muitos estudantes, o conhecimento se desenvolveu e aconteceu. De fato, esse modelo de ensino formou excelentes professores, médicos, engenheiros, advogados e outros tantos profissionais. No entanto, esse sucesso deu-se a uma minoria, o que nos remete a refletir sobre a eficiência desse sistema. Ano a ano, o fracasso desse modelo é evidenciado pelos resultados e relatórios do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), resultados estes que indicam o baixo letramento dos estudantes, sobretudo nas áreas de Matemática, Língua Portuguesa e Ciências. Evidentemente tal fracasso não se deve apenas ao modelo tradicional de ensino, mas, a nosso ver, a toda uma engrenagem sistêmica. Nesse sentido, entendemos que ações de todas as ordens e em todas as esferas devem ser tomadas para que, a médio e longo prazo, esse quadro seja revertido.

A reflexão que se busca deixar nesta etapa final do trabalho desenvolvido, especialmente em relação à Matemática é:

“E nós, professores formados e em plena atividade, o que podemos fazer a curto ou em médio prazo?”.

A resposta talvez esteja na busca de alternativas viáveis que possam ser aplicadas com maior brevidade e estejam ao alcance dos professores.

O trabalho realizado nessa pesquisa, mesmo que com um pequeno grupo de estudantes, lança luz à possibilidade de promover aprendizagem significativa, favorecendo o desenvolvimento de habilidades e importantes operações do pensamento, por meio de uma diferenciada estratégia de ensino: a Modelagem

Matemática. Durante alguns meses, ao longo de 9 encontros, foi possível verificar o grande ganho matemático desses estudantes, como, leitura, interpretação e utilização de diferentes representações para um mesmo problema, uso da tecnologia, cálculo e manipulação de diferentes objetos matemáticos, tomada de decisão, levantamento de hipóteses, conclusão e leitura crítica da realidade e, por fim, reflexão sobre a estratégia utilizada. Além disso, nos encontros, observou-se intensa motivação e interesse, dos estudantes e professor pesquisador, na busca da solução do problema a que se propuseram a resolver. O trabalho foi rico em discussões e reflexões acerca da utilidade e alcance da Matemática. Pode-se afirmar, com exatidão, que o grupo participante, após a conclusão do projeto, obteve maior consciência do importante papel que a Matemática tem na leitura e compreensão da sociedade que os cerca. Diante de tal constatação, ocorre a reflexão sobre outra questão: "qual seria o tamanho do ganho, para estudantes e professor, se todo o curso de matemática fosse desenvolvido por meio da Modelagem Matemática?".

Diante dos desafios, obstáculos, vícios e crenças que permeiam o ensino e aprendizagem dessa disciplina, o professor, preocupado com o sucesso de seus estudantes, deve ocupar-se em buscar novas alternativas para a melhoria do processo.

Das inúmeras possibilidades de trabalho, acreditamos que o caminho da Modelagem Matemática constitui-se numa opção acessível e viável para desenvolver o pensamento analítico e reflexivo do estudante.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALENCAR, Edvonete Souza de. BUENO, Simone. **Modelagem Matemática e inclusão**. Editora livraria da física. São Paulo. 2017.
- ALMEIDA, Lourdes Werle de. SILVA, Karina Pessôa da. **Modelagem Matemática em foco**. Editora ciência moderna. Rio de Janeiro. 2014.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora contexto. São Paulo. 2014.
- BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas**. Editora Penso. Instituto Sidarta. Porto Alegre. 2018.
- BUSHAW, Donald. **Aplicações da matemática escolar**. Atual Editora. São Paulo. 1997.
- COHEN, Elizabeth G. LOTAN, Rachel A. **Planejando o trabalho em grupo**. Editora Penso. Instituto Sidarta. Porto Alegre. 2017.
- ENEM. **Eixos teóricos e metodológicos**. Brasília, Distrito Federal. 2009.
- HOWARD, Anton e RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Editora Porto Alegre. Rio Grande do Sul. 2001.
- HOWARD, Eves. **Introdução à história da matemática**. Editora da Unicamp. Campinas. São Paulo. 2011.
- HUETE, Juan Carlos Sánches. BRAVO, José A. Fernández. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Artmed. Porto Alegre. 2006.
- IZQUIERDO, Ivan. **A arte de esquecer**. Vieira e Lent. Rio de Janeiro. 2004.

- KRULIK, Stephen. REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Atual editora. São Paulo. 1997.
- MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática**. Editora Cortez. São Paulo. 1995.
- MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares**. Editora livraria da física. São Paulo. 2012.
- PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de matemática: da organização linear à ideia de rede**. Editora FTD. 2000.
- PISA 2003. **Estrutura de avaliação**. Conhecimentos e habilidades em Matemática, Leitura, Ciências e Resolução de Problemas. Editora moderna. 2004.
- PISA 2006. **Estrutura da avaliação**. Conhecimentos e habilidades em Ciências, Leitura e Matemática. Editora moderna. 2007.
- POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Editora Interciência. Rio de Janeiro. 2006.
- RAMOS, Marise Nogueira. **A pedagogia das competências: autonomia ou adaptação**. Editora Cortez. 2002.
- RATHS, Louis E. JONAS, Arthur. ROTHSTEIN, Arnold M. WASSERMANN, Selma. **Ensinar a pensar**. Editora Pedagógica Universitária. São Paulo. 1977.
- SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Editora Cortez. São Paulo. 2007.
- SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica: A questão da democracia** Editora Cortez. São Paulo. 2001.

WIGGINS, Grant. McTIGHE, Jay. **Planejamento para a compreensão.** Alinhando currículo, avaliação e ensino por meio do planejamento reverso. Fundação Lemann. Instituto Canoa. Editora Penso. Porto Alegre. 2019.

ANEXO 1: Questionário aplicado ao grupo que iniciou e finalizou o projeto

Nesse ano, você participou de vários encontros envolvendo um projeto de pesquisa na área de Modelagem Matemática, conduzido pelo seu professor às quintas-feiras no período da tarde. As respostas às questões a seguir constituem um importante objeto de análise. Nesse sentido, gostaria que suas respostas sejam as mais sinceras possíveis para que eu possa avaliar o projeto desenvolvido.

Muito obrigado.

- 1) Após a apresentação inicial do projeto, realizada em sala de aula, assinale o principal motivo (apenas um) que o levou a participar do projeto?
- () Interesse pelo tema (Modelagem Matemática)
- () Interesse em ampliar seu conhecimento matemático
- () Empatia pelo professor

- 2) Qual foi o tema escolhido pelo seu grupo?

O que você achou do tema escolhido?

- () Motivador () Interessante
- () Desafiador () Complexo

- 3) Você acredita que as aulas regulares de matemática, do colégio, poderiam ser substituídas por aulas similares a que foram desenvolvidas no projeto?

- () Sim () Não

Justifique sua resposta?

- 4) Você saberia explicar o significado do termo Modelagem Matemática?

5) Como você avalia a dinâmica utilizada durante nossos encontros?

6) O que vc aprendeu, em termos de conteúdos matemáticos, nesses encontros?

7) Em relação aos conteúdos estudados, você vê conexão com os conteúdos trabalhados nas suas aulas regulares? Justifique com exemplos ou argumentos consistentes.

8) Se você fosse participar deste projeto novamente, o que você acha que deveria ser feito diferente para tornar o projeto mais interessante?

9) Se você tivesse de recomendar este projeto para um amigo da escola, o que diria para ele?

10) O espaço a seguir é reservado para que você possa falar sobre algum aspecto do projeto, que não tenha sido contemplado nas questões anteriores.

Novamente obrigado.
Professor José Ocimar Barros de Souza

ANEXO 2: Questionário aplicado ao grupo que iniciou e não finalizou o projeto

No 1º semestre desse ano, você participou de alguns encontros envolvendo um projeto de pesquisa na área de Modelagem Matemática, conduzido pelo seu professor às quintas-feiras no período da tarde. As respostas às questões a seguir constituem um importante objeto de análise. Nesse sentido, gostaria que suas respostas sejam as mais sinceras possíveis para que eu possa avaliar o projeto desenvolvido.

Muito obrigado.

1) Após a apresentação inicial do projeto, realizada em sala de aula, assinale o principal motivo (apenas um) que o levou a participar do projeto?

- Interesse pelo tema (Modelagem Matemática)
- Interesse em ampliar seu conhecimento matemático
- Empatia pelo professor

2) Qual foi o tema escolhido pelo seu grupo?

O que você achou do tema escolhido?

- Motivador Interessante
- Desafiador Complexo

3) Após as férias de julho você optou pela não continuidade no projeto. Enumere, em ordem crescente, o(os) motivo(s) de sua desistência, ou seja, marque 1 para o primeiro motivo, 2 para o segundo (caso existir), e assim sucessivamente.

- O tema Modelagem não era o que você esperava.
- A condução do professor/pesquisador não foi adequada/esclarecedora.
- Não tive a percepção de que aprenderia algo novo.
- Percebi que o tema que escolhi não era motivador/desafiador.
- Não teria mais disponibilidade no horário da tarde.
- Estou preocupado com as minhas outras atividades do colégio.
- Não houve empatia com as pessoas do meu grupo.

4) Você acredita que o projeto poderia ser desenvolvido durante das aulas regulares?

() Sim () Não

Justifique sua resposta?

5) Você saberia explicar, mesmo que de forma breve, o significado do trabalho com Modelagem Matemática?

6) O que mais chamou a sua atenção nos encontros em que você participou? Ou ainda, o que você aprendeu durante os encontros realizados?

7) Se você fosse participar deste projeto novamente, o que você acha que deveria ser feito diferente para tornar o projeto mais interessante?

8) Se você tivesse de recomendar este projeto para um amigo da escola, o que diria para ele?

9) O espaço a seguir é reservado para que você possa falar sobre algum aspecto do projeto, que não tenha sido contemplado nas questões anteriores.

Novamente obrigado.
Professor José Ocimar Barros de Souza