**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**
***FACULDADE DE EDUCAÇÃO***

# *A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática*

**ANTONIO CARLOS BROLEZZI**

**Tese apresentada como exigência parcial para obtenção do grau de Doutor em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, dentro da área de concentração Ensino de Ciências e Matemática, sob orientação do Professor Doutor Nílson José Machado.**

**SÃO PAULO**
***Dezembro de 1996***

Para a Selminha, que não é de mais ninguém.
Para Rachel, Anastácio, Paulo, Adriana, Guilherme, Ana, João, Célia e Mariana.

*Preste atenção na cigarra cantando entre as árvores: primeiro se ouve uma série de notas precisamente definidas e claramente separadas, acelerando lentamente. Então, na medida em que o trinado ganha força, sente-se que as notas lentamente unem-se umas as outras; mas ainda cada trinado pode ser individualizado como parte elementar de um canto de flauta. Por fim, repentinamente, deparamo-nos com uma nota contínua que é o clímax do canto da cigarra até seu final.*

*Agora observe o mar quando quebra na praia. Cada onda toma volume, precipita-se, e desaparece na areia. Podemos separar regularmente cada onda daquelas que a precederam e daquelas que a seguirão, e ainda cada onda individual é parte do contínuo do mar.*

*Assim é, em nossa experiência do dia-a-dia, a relação entre a continuidade e a ideia do discreto: às vezes a experiência da continuidade subjaz à do discreto e às vezes o discreto leva ao contínuo. Sua relação é uma relação entre parceiros iguais.*[1]

**Agradecimentos*:***

Ao CNPq, pelo financiamento deste trabalho de pesquisa.

Ao Nílson, professor e orientador, por tantas horas de atendimento que resultaram nesta Tese, pelos livros, almoços e chocolates.

Aos Profs. Drs. Seiji Hariki e Elza Furtado Gomide, pelos valiosos comentários sobre o projeto deste trabalho durante o exame de qualificação.

Aos professores da Faculdade de Educação, em especial aos Profs. Drs. José Mário Pires Azanha, Helena Coharik Chamlian e Mary Julia M. Dietzsch, em cujas aulas se desenvolveram várias das ideias aqui contidas.

À Profa. Dra. Maria Ignez de Souza Vieira Diniz e à Rosemeire Ap. Alves de Oliveira, responsáveis pelo CAEM, e a todos os Professores de Matemática que participaram das minhas Oficinas.

Ao Prof. Dr. Nelson Jahr Garcia, Diretor da ESPM, pelas várias contribuições para este texto. À Profa. Sandra Esteves de Souza, pelo auxílio na língua francesa.

[1] DA COSTA, Newton C. A. & DORIA, F. A. *Continuous & Discrete: A Research Program.* IN: Bol Soc. Paran. Mat. (2a Série), v. 12/13, n. 1/2. Curitiba: Ed. da UFPR, 1991/2, pp. 123-127, p. 123

## *Resumo*

Discreto e contínuo são termos que se referem respectivamente a duas das ações básicas na elaboração da Matemática: *contar* e *medir*. Neste trabalho examinamos o problema pedagógico que surge da tendência de se abordar os temas de Matemática elementar optando por um ou outro aspecto, sem explorar a interação entre eles.

Nossa ideia é que isso se resolve através da administração da tensão conceitual entre essas noções. Trata-se de caminhar com ambas as pernas, a da ideia do discreto e a da continuidade, na construção dos conceitos matemáticos.

Este trabalho é baseado na pesquisa em História da Matemática, justificada pela visão do conhecimento como uma rede conceitual, uma rede de significações em permanente transformação.

Procuramos assim fazer uso da História para repensar aspectos do ensino de Matemática elementar, especialmente relacionados ao nosso tema: a construção da ideia de Número; o nascimento do Cálculo Diferencial e Integral; as relações entre qualidade/quantidade.

Ao final, mostramos exemplos de Oficinas Temáticas para a formação de professores, nas quais procuramos aplicar a abordagem histórica visando administrar o par conceitual discreto/contínuo dentro de assuntos do currículo elementar de matemática.

## *Abstract*

Discrete and continuous are concepts related respectively to two basic actions in Mathematics: to count and to measure. In this work we examine the pedagogical problem originated in the tendency of approaching elementary Mathematics by making an option between either one or other feature, without exploring the relationship between them.

Our idea is that it can be solved by managing the conceptual tension between those notions. It is a matter of getting along with both ideas, the discreteness and the continuity, in the construction of mathematical concepts.

The present work is based on Mathematics History research, justified by the image of knowledge as a conceptual net, a net of meanings which always change.

We make use of the History to think over certain features of Mathematics elementary teaching specially meaningful to our work: the construction of the idea of Number, the birth of the Differential and Integral Calculus, the relationship between quality and quantity.

At last, we show examples of Thematical Workshops to teachers training, in which our aim is to apply the historical approach in order to deal with the conceptual pair discrete/continuous in topics of the mathematical elementary curriculum.

## *Resumée*

Discret et continuous sont les termes qui se rapportent, respectivement, aux deux opérations fondamentales de la Mathématique: compter et mesurer. Dans ce travail ci, nous examinons le problème pédagogique qui advient de la tendance d'aborder les sujets de la Mathématique élémentaire, en choisissant l'un ou l'autre, sans exploiter l'interaction entre eux.

À notre avis, cela se résout avec l'administration de la tension conceptuelle entre ces deux notions. Il s'agit donc de avec les deux jambes, l'idée du discret et l'idée de la continuité, dans la construction des concepts mathématiques.

Notre travail s'appuye sur la recherche de l'Histoire de la Mathématique, justifiée para la vision de la connaissance comme un réseau conceptuel, un réseau des significations en marcher permanente transformation.

Nous avons essayé d'utiliser l'Histoire pour repenser aux aspects de l'enseignement de la Mathématique élémentaire, surtout ceux qui se rapportent au sujet de notre travail : la construction de l'idée de numéro, la naissance du calcul différentiel et intégral, les rapports entre qualité et quantité.

À la fin, nous présentons des exemples d'ateliers mathématiques, pour la formation de professeurs, dans lesquels nous avons essayer d'appliquer l'abordage historique, envisageant administrer le paire conceptuel discret/continuous sur les sujets du curriculum élémentaire de Mathématique.

# Sumário

# Introdução

## *O Par Discreto/Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática*

> *A sucessão dos números naturais 1,2,3,... é a representação matemática para o discreto, enquanto que o arquétipo para a continuidade matemática é encontrado na reta real* $\Re$.
>
> Da Costa[2]

## O Problema e a Tese

Neste trabalho abordamos um problema pedagógico que se refere ao par discreto/contínuo. Para apresentar o problema, precisamos inicialmente caracterizar esses dois termos, ambos com significado amplo.

De modo geral, *discreto* é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte[3]. Vem do latim *discretus*, particípio passado do verbo *discernere* (discernir), que significa *discriminar, separar, distinguir, ver claro.* Etimologicamente, *discernere* vem de *cernere*, que quer dizer *passar pelo crivo, joeirar, decidir*[4]*.* Da mesma fonte derivam as palavras *segredo, secreto, certo, discrição.* Desse sentido de *ser separado*, *distinto*, vem o uso de discreto referindo-se a quem sabe guardar um segredo, é prudente, circunspecto, recatado, modesto, não se faz sentir com intensidade, é pequeno.

Já *contínuo* vem de *con-tenere (ter junto, manter unido, segurar). Contínuo* é o que está imediatamente unido a outra coisa. Da mesma origem vem *conter, conteúdo, continente, contente* (o que cabe em si, e não cobiça alargar-se). *Contínuo* designa também o funcionário que presta assistência contínua ao chefe[5]*.*

Utilizamos neste trabalho os termos discreto e contínuo em referência, respectivamente, a duas das ações básicas da Matemática: contar e medir. Existem, como sabemos, certas grandezas chamadas *contáveis*, que são objeto de contagem, como o número de livros em uma prateleira. Outro tipo de grandezas é formado por aquelas quantidades que são passíveis de *medida*, como a largura desta folha de papel em que escrevo, ou o peso de uma caneta. O primeiro tipo de grandezas é chamado *discreto*. Grandezas discretas são as que se prestam a contagem. Já o segundo tipo é chamado *contínuo*, e se refere às medidas.

Pode-se dizer que na Matemática há duas grandes correntes. Uma delas se refere mais diretamente ao discreto, pois lida com indução, recursão, combinatória, e em geral tudo o que se refere à aritmética dos números inteiros, de um ponto de vista algorítmico. É a Matemática Discreta. A corrente que se refere ao contínuo lida com a ideia de função, com a geometria, com derivadas e integrais[6].

---

[2] DA COSTA, Newton C. A. & DORIA, F. A. *Continuous & Discrete: A Research Program.* IN: Bol Soc. Paran. Mat. (2a Série), v. 12/13, n. 1/2. Curitiba: Ed. da UFPR, 1991/2, pp. 123-127, p. 123

[3] Cf. CUNHA, Antônio Geraldo. *Dicionário Etimológico Nova Fronteira de Língua Portuguesa.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1996.

[4] Cf. MAGNE, Augusto. *Dicionário Etimológico da Língua Latina: Famílias de Palavras e Derivações Vernáculas.* Rio de Janeiro: MEC, 1953.

[5] Cf. MAGNE, A. Op. cit.

[6] Além dessas duas correntes *quantitativas*, a Matemática tem também características de tipo *qualitativo*. A Matemática não lida somente com *grandezas quantitativas*, expressas em números, variáveis algébricas ou elementos geométricos como comprimento e área. A Matemática lida também com *propriedades qualitativas* de objetos, como na topologia ou nas leis da lógica, entre outros temas.

Na Matemática, enquanto Ciência organizada, há uma distinção entre a Matemática discreta e a parte referente ao tema da continuidade, o que não implica em uma divisão completa da matéria. Na verdade, entre essas duas correntes da Matemática há uma "*elegante interação*"[7], mesmo que exista uma tensão bipolar dentro do par discreto/contínuo. Usando uma expressão de Da Costa, discreto e contínuo são "*parceiros essencialmente iguais*"[8].

No ensino de Matemática elementar, muitas vezes constata-se a tendência de se tentar optar, em cada assunto, por um ou outro aspecto, sem explorar a relação entre eles. Dessa maneira de encarar o discreto e o contínuo como realidades completamente disjuntas surgem consequências graves para o ensino, e perde-se muito da riqueza da Matemática. Verifica-se assim a existência de um problema no ensino de Matemática elementar, ocasionado pela tendência de se optar ora pelo discreto ora pelo contínuo, fazendo sucumbir um em função do outro.

Nossa ideia é que esse problema não se resolve através da simples opção entre essas noções, no sentido de eliminar uma em função da outra, mas sim pela administração da tensão conceitual entre elas. Trata-se de caminhar com ambas as pernas, a da ideia do discreto e a da continuidade, na construção dos conceitos matemáticos, explorando, no ensino, essa interação. Entendemos que a riqueza de uma abordagem que leve em conta ambos os aspectos ajuda a desenvolver melhor os conceitos matemáticos, pois muitos deles têm origem nessa interação.

## Metodologia

Neste trabalho, utilizamos basicamente a pesquisa em História da Matemática. É preciso dizer que a ideia do presente trabalho teve sua origem nos estudos que realizamos anteriormente sobre o valor didático da História da Matemática[9]. Ao realizar aquele trabalho, percebemos que o recurso à História pode ter um papel decisivo na organização do conteúdo matemático que se quer ensinar, estruturando-o com base no modo de raciocinar próprio de um conhecimento que se quer construir.

Procuramos assim delinear uma concepção do recurso à História da Matemática não como *mero acessório didático*, mas como verdadeiro *definidor de estratégias pedagógicas*. Para nós, fazer uso da História da Matemática não implica necessariamente *contar* a História aos alunos. A abordagem que denominamos de *Arte de Contar* consiste em *estruturar* o conteúdo da matéria a ser ensinada à luz da sua evolução histórica. Um ensino assim planejado, a nosso ver, seria mais significativo, por atender ao Princípio da Metamorfose que caracteriza a imagem do conhecimento como uma rede conceitual, de acordo com Pierre Lévy. Conforme explica Machado,

> *O Princípio da Metamorfose explicita a ideia, suficientemente vivenciada por todos os que lidam diariamente com informações, de que a rede de significações que constitui o conhecimento está em permanente transformação*[10]

A rede cognitiva muda ao longo do tempo, conforme se alteram os feixes de relações que determinam cada nó de significado. Sendo os conceitos historicamente definidos, precisamos estudar a história para acompanhar essa metamorfose na construção do conhecimento.

É nesse sentido que agora estamos colocando em prática aquelas ideias, aplicadas a um assunto específico que percorre a História da Matemática e está na gênese do desenvolvimento de partes importantes da matéria: a interação do par discreto/contínuo.

Historicamente, esse par está presente na formação de inúmeros conceitos matemáticos. Na História da Matemática, observamos que a relação entre o discreto e o

---

[7] YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p. *Prefácio*, p. x

[8] DA COSTA, Newton C. A. & DORIA, F. A. *Continuous & Discrete: A Research Program.* IN: Bol Soc. Paran. Mat. (2 Série), v. 12/13, n. 1/2. Curitiba: Ed. da UFPR, 1991/2, pp. 123-127, p. 124

[9] BROLEZZI, Antonio Carlos. *A Arte de Contar: uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática*. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 1991. 244 p.

[10] MACHADO, Nílson José. *Epistemologia e Didática: As concepções do conhecimento e a prática docente*. São Paulo, Cortez, 1995. 320 p., p. 145 Cf. também LÉVY, Pierre. *As Tecnologias da Inteligência*. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993

contínuo foi sempre fonte de uma certa tensão conceitual muito fértil e produtiva, que gerou ampliações do universo matemático. A Matemática procurou assim entender as diferenças e a relação entre os dois tipos de grandezas, o que parece sempre ter se dado em meio a controvérsias. Desde a crise dos incomensuráveis na Escola Pitagórica e os paradoxos de Zeno de Elea, até as atuais discussões a respeito da mecânica quântica e o surgimento do estudo dos fractais, a Matemática enriqueceu-se e evoluiu, desenvolvendo diversos instrumentos e conceitos, visando atender às características do estudo dos diversos elementos, e desenvolvendo suas duas principais correntes para lidar com o duplo aspecto das grandezas quantitativas.

É por esse motivo que iremos estudar, na História da Matemática, alguns desenvolvimentos conceituais que surgiram em torno de pontos de tensão entre esses aspectos. O estudo da História serve para elaborar ideias que permitam o caminhar com *ambas as pernas* a que nos referimos acima, em algumas das várias situações de ensino em que essas noções se apresentam.

## Descrição do conteúdo

Neste trabalho procuramos fazer uso da História para repensar aspectos do ensino de Matemática elementar, através dos cortes definidos por alguns pontos de tensão entre discreto e contínuo, que consideramos especialmente significativos: a construção da ideia de Número, o nascimento do Cálculo, e a relação qualidade/quantidade. Através do estudo desses temas, esperamos levantar elementos suficientes para elaborar uma contribuição para o ensino de Matemática elementar, construindo instrumentos para explorar e administrar essa tensão.

No **Capítulo 1**, estudamos a interação do par discreto/contínuo na construção da ideia de Número. Procuramos mostrar que na construção da ideia de Número pela criança, há propostas de ensino que tomam por base exclusivamente a *contagem* para chegar à ideia de Número, determinando uma visão parcial da realidade numérica. Nossa ideia é a de que uma maior compreensão da relação entre o discreto e o contínuo poderia complementar essas propostas, já que a análise da evolução histórica e da lógica da construção do conhecimento leva a descobrir formas de abordagem da ideia de Número também pela via das *medidas.* Parece ser assim conveniente e possível trabalhar tanto com a contagem de objetos quanto com a medida de tamanhos, já que o número se constrói com ambos os aspectos.

Quando ocorrem ampliações na ideia de Número no currículo de Matemática elementar, e se introduzem os números Racionais e Reais, sente-se de modo determinante a falta de uma abordagem que leve em conta a relação entre discreto e contínuo. Em geral, no trabalho com frações, faz-se referência à continuidade de formas geométricas, como círculos e retângulos, dos quais se extraem imagens que auxiliam a dar significado aos "números quebrados". Mas o verdadeiro significado do Número Racional, composto pelas ideias de fração, de divisão e de razão, só pode ser atingido por um trabalho que leve em consideração o duplo aspecto, discreto e contínuo, dos números.

A maneira como surgiram os números irracionais, após a crise dos incomensuráveis na Grécia Antiga, mostra que é necessário fazer-se referência ao duplo aspecto discreto/contínuo no ensino de Matemática. Para se introduzir a noção de número irracional, tornam-se necessárias explicações sobre a continuidade da reta real, sobre o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, sobre as grandezas incomensuráveis. Tudo isso gira em torno das ideias de discreto e contínuo, e não se pode falar de uma delas sem referência a outra.

No **Capítulo 2**, falamos sobre o par discreto/contínuo nas ideias fundamentais do Cálculo. Na história do nascimento do Cálculo Diferencial e Integral, a presença daquela interação se mostra particularmente interessante. Historicamente, vemos que o caminho para a construção das ideias fundamentais do Cálculo pode ser feito pela via do discreto ou do contínuo, e ambas as abordagens acabam se complementando. A passagem do finito ao infinito, tanto o *infinitamente grande* quanto o *infinitamente pequeno*, e a recomposição do finito a partir de uma soma infinita de partes infinitamente pequenas estão no cerne das ideias fundamentais do Cálculo. Para se chegar a uma formulação abrangente do Cálculo, foi necessário trabalhar a noção de número e a continuidade da reta real, fazendo ligações entre o discreto e o contínuo. No ensino do Cálculo, portanto, parece útil lidar com as noções que geraram as ideias fundamentais, percorrendo ambas as vias.

No **Capítulo 3**, vamos um pouco além dos componentes curriculares da Matemática, para estudar o aspecto mais geral que se refere à avaliação da aprendizagem. A relação entre notas, conceitos, medida de aproveitamento e a discussão sobre a possibilidade de se avaliar a inteligência requer um estudo aprofundado das relações entre qualidade/quantidade, e a referência à relação discreto/contínuo é necessária. Em uma possível síntese entre a qualidade e a quantidade, está a presença do contínuo geométrico, e as componentes qualitativas da Matemática.

No **Capítulo 4**, recolhemos contribuições para o ensino de Matemática originadas do estudo histórico, fazendo um balanço das ideias mais importantes dos capítulos anteriores. A ideia desse capítulo é destacar elementos para a inserção no ensino da Matemática elementar da compreensão da interação discreto/contínuo, e mostrar que algumas posturas frente ao ensino têm um valor mais profundo do que habitualmente se pensa, pois estão associadas à interação entre as duas correntes principais da Matemática.

No **Capítulo 5**, colocamos essas contribuições em forma de Oficinas Temáticas para a formação de professores, nas quais recolhemos, além do estudo teórico, a prática de nosso trabalho com professores. Nessas oficinas temáticas ministradas para Professores de Matemática, procurou-se concretizar a abordagem histórica de tópicos do currículo elementar de matemática, visando auxiliar o Professor a ampliar o campo de visão de alguns assuntos, fornecendo instrumentos para a elaboração de abordagens com mais significado para o aluno. Não fornecemos estratégias prontas para uso em sala de aula, mas sim formas de administrar o par conceitual, dentro de assuntos da Matemática elementar.

# Capítulo 1

# O Par Discreto/Contínuo e a Ideia de Número

Neste Capítulo mostramos que contar e medir são operações através das quais se constrói a ideia de número, e que portanto é conveniente trabalhar a compreensão da relação entre o discreto e o contínuo para ensinar números naturais, racionais e reais.

*Devem ter sido necessárias muitas eras para perceber que um casal de faisões e um par de dias eram ambos exemplos do número dois.*

Russell[11]

*A medida nos vem da própria origem do algarismo e da ideia de contagem.*

Moles[12]

*(...) Não existe, no entanto, uma distinção cognitiva entre "contar", e "medir", e a relação entre ambos requer um estudo mais profundo.*

Crump[13]

É muito comum encontrar explicações para a origem dos números com referência apenas à *contagem*. Livros didáticos, por exemplo, têm trazido explicações históricas valorizando a versão de que os números teriam surgido apenas através da comparação entre um grupo de objetos, como pedras, com outro grupo de objetos que se quer contar, em geral ovelhas. Identificam-se, nessa versão, a ideia de *contar* com a ideia de *número*. Dizer como surgiram os números seria o mesmo, então, que dizer como surgiu a contagem. Como exemplificado no trecho abaixo, extraído de um bom livro didático de primeiro grau, constatamos freqüentemente essa referência apenas ao aspecto da *contagem* como a fonte primordial da ideia de número:

> *Num determinado momento da História, os homens sentiram necessidade de contar objetos, animais, pessoas, etc. Essa necessidade fez com que inventassem uma forma de representar essas contagens.*
>
> *Para o homem primitivo,* contar *significava fazer* correspondência*.*
>
> *Durante a caçada, por exemplo, para cada animal que conseguia abater, o caçador fazia uma marca em um pedaço de madeira.(...)*
>
> *O homem primitivo contava dessa forma, estabelecendo uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos.(...)*[14]

Contar e fazer correspondência um-a-um são, segundo muitos autores, a fonte da ideia de número. Essa associação entre a contagem e a ideia de correspondência um-a-um não é, entretanto, uma explicação suficiente para o surgimento da ideia de número. É preciso adequar essa teoria à complexa riqueza do conceito numérico, complementando-a. Os números não podem ter surgido somente da necessidade de *contar objetos.* Iremos mostrar agora estudos históricos que podem ampliar a visão sobre a origem do número,

[11] RUSSELL, Bertrand. Cit. in. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete.* Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 4

[12] MOLES, Abraham Antonie. *As Ciências do Impreciso.* Trad. Glória de C. Lins. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1995. 371 p., p. 21

[13] CRUMP, Thomas. *La antropología de los números.* Versión española de Paloma Gómez Crespo. Madrid, Alianza Editorial, 1993. 276 p., p. 136

[14] BONGIOVANNI, V., VISSOTO LEITE, O. R., LAUREANO, J. L. T. *Matemática e Vida* (Quinta-série). São Paulo, Ática, 1995. 48 p., p. 9

permitindo afirmar com certa segurança que o uso de noções numéricas pelo homem esteve sempre associado tanto à ideia de contagem quanto à de medida.

## Contar e medir na origem dos números

A ideia de medida está associada à ideia de ordem. O cerne da ideia de ordem está na *comparação* entre duas quantidades ou medidas *diferentes*, de modo a estabelecer uma ordem entre elas: maior ou menor tamanho, primeiro, segundo e terceiro lugar, etc. Visando uma comparação de tamanho ou uma ordenação, é necessário constatar que alguma grandeza ou grupo de objetos é *diferente* de outro em termos de quantidade Essa comparação das *diferenças* parece estar muito próxima da origem dos números, e sem referência a ela fica difícil explicar como o homem chegou à ideia, bem mais sofisticada, de *comparação por igualdade* numérica entre conjuntos.

O homem teria, assim, se deparado muito cedo com a noção de *maior* e *menor*, de *antes* e *depois* (em ordem crescente ou decrescente), e através disso começou a comparar conjuntos com quantidades idênticas. É nesse sentido que podemos afirmar que o duplo aspecto da *contagem* e da *medida* está presente desde a origem da ideia de número. Um aspecto da realidade auxilia o outro, e não há uma relação de antecedência clara para nenhum deles.

Estudos antropológicos sobre a origem dos números constatam desde o início essa dualidade dos *números discretos* e da *medida contínua,* sem a qual não teria havido evolução da Matemática. Crump, por exemplo, em sua obra *A Antropologia dos Números,* dedica um primeiro capítulo - *A Ontologia do Número* - ao estudo das características presentes em diversas linguagens numéricas primitivas dos componentes *ordinal* e *cardinal* da noção de número. No Capítulo Seis - *Medição, Comparação e Equivalência* -, comenta os diversos usos numéricos em medidas, analisando a linguagem de tribos indígenas e a cultura de povos primitivos.

Os estudos de Crump mostram essa pluralidade de utilização primitiva das noções numéricas, indo além dos cardinais. O homem primitivo *tanto contava quanto media*, e podemos dizer que não fazia uma coisa sem fazer também a outra. Crump busca a origem dos números nas linguagens referentes às medidas (cap. 6), ao tempo (cap. 7), à música (cap. 8). Os números não surgem só como inteiros, mas através de uma rede conceitual formada pelo seu uso para lidar com trocas, para o reconhecimento da dança e do ritmo, nos jogos, nas leis e costumes sociais, nas artes e na arquitetura, nas abordagens religiosas e nas visões cosmológicas, nas tentativas de descrição da vida e dos objetos. Em muitos desses empregos da noção numérica, a ideia de *ordenação* parece estar bem próxima da origem do número, e não só a ideia de correspondência um-a-um.

Segundo Crump,

> *agrupar conjuntos segundo uma equivalência numérica não constitui necessariamente uma parte integrante de toda cultura que use números*.[15]

É possível, inclusive, que os números *ordinais* tenham surgido antes dos *cardinais*. Afinal, os números ordinais são originalmente *adjetivos*, e mais próximos portanto dos objetos a que se referem, pois os cardinais são *substantivos*, e supõem uma certa "existência independente". Desse modo, parece mais natural que o homem fizesse primeiro uma referência à ordenação de objetos, antes de contá-los e, evidentemente, antes de se ter uma ideia de que houvesse uma *quantidade abstrata numérica* com existência independente, sem referência direta aos objetos que se desejem contar.

Reforçam essa explicação histórica autores como Hurford, por exemplo, conforme citação de Crump. Hurford afirma que

> *se necessita* tanto *um domínio da ordem* quanto *um domínio da superposição um a um dos grupos para que possa preexistir o domínio humano do número e criar* conjuntamente *as condições nas quais podem surgir o número e os numerais*[16].

[15] CRUMP, Thomas. Op. cit., p. 27
[16] HURFORD, J.,R. *Language and Number.* Oxford: Blackwell, 1987. p. 67, conforme CRUMP. op. cit., p. 28

É claro que essa ideia de *ordem* não pode supor um conhecimento muito avançado de *medidas*. Crump observa que a ideia de medida, do ponto de vista conceitual, é muito mais sofisticada que a ideia de contagem, e evidentemente não é a teoria dos espaços métricos que se situa na origem dos números:

> *o processo de construir um contínuo medível só é dominado em uma etapa avançada do desenvolvimento cognitivo*[17]*.*

Crump mostra que basta uma noção geral de medida para desenvolver a noção de número, e faz referência aos Ponan, tribo de Papúa-Nova Guiné estudada por Lancy[18], que possuem um bom discernimento numérico cardinal, enquanto que em termos de ordinais só trabalhem com noções gerais como "*primeiro-intermediário-último*".

Temos assim uma sólida referência histórica à associação entre números cardinais e ordinais, na origem das habilidades numérica. O fato, por exemplo, de a unidade (o Número Um) não ser aceita como um *número* pela matemática grega a partir de Pitágoras[19], indica a tradição antiga de considerar os números *em ordem,* como composição de uma ordenação a partir da Unidade inicial, e não diretamente como cardinalidade de um conjunto, fruto da correspondência um-a-um.

Crump registra relações intrínsecas entre contagem e medida. Segundo suas pesquisas, existe uma relação interna inseparável entre contagem e medida, como é o caso da *medida das distâncias* por meio da *contagem* de passos[20]. Crump sugere que entre medida e contagem poderia haver uma distinção somente de *ponto de vista* ou de *utilização da linguagem,* que apresenta diferentes componentes característicos para uma e outra operação. Há, segundo ele, uma distinção de *abordagem* ou de *uso,* mas não uma distinção no que se refere à natureza do conhecimento, conforme vemos na citação da epígrafe desse capítulo:

> *Não existe, no entanto, uma distinção cognitiva entre "contar", e "medir", e a relação entre ambos requer um estudo mais profundo.*[21]*.*

Crump mostra portanto que há uma interrelação forte entre *contar* e *medir*, ou, o que é equivalente, entre o *discreto* e o *contínuo*. Dessa relação teria surgido a ideia de número, utilizada para ordenação, para a contagem e para a medida de dias, distâncias, etc. Os estudos da História da Ideia de Número fundamentam a teoria de que as atividades de contagem e medida estão **ambas** igualmente presentes na origem e na formação da ideia de Número.

É preciso pesquisar as primeiras descobertas numéricas não só nos vestígios de objetos ou inscrições, mas no estudo das linguagens faladas, verdadeiro berço das concepções numéricas. Afinal, antes mesmo de haver registros de símbolos numéricos, parece lógico que o homem utilizasse noções quantitativas oralmente[22]. Teria sido talvez na utilização da linguagem que nasceu a Matemática, como prova o interesse de estudos antropológicos pela análise das línguas indígenas, testemunhas de um possível período oral, anterior ao registro pictográfico.

O fato de a oralidade anteceder o desenho ou a escrita na manifestação da linguagem humana leva-nos a tentar descobrir nos numerais falados de tribos indígenas indícios a respeito dos usos primitivos de noções numéricas. É na utilização da linguagem, e não na manipulação de pedrinhas ou na confecção de traços, que parece estar a fonte do conhecimento sobre a verdadeira origem histórica dos Números.

Nos numerais falados encontramos vestígios muito interessantes sobre a estreita relação da dualidade contagem/medida. Trata-se da aplicação da noção de *muitos* a grandezas iguais ou maiores que três, fato que se dá em diversas línguas indígenas. É

---

[17] CRUMP, op. cit., p. 129

[18] LANCY, D.F. *Cross-cultural Studies in Cognition and Mathematics*. New York: Academic Press, 1983. p. 142. Cit. in. CRUMP, op. cit., p. 28

[19] Cf. GIORELLO, Giulio & MONDADORI, Marco. *Número*. IN: *Enciclopedia Einaudi*, Vol. 15 (*Cálculo/Probabilidade*). Trad. José Manuel Ferreira. Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1989. p. 25

[20] Cf. CRUMP, T. Op. cit., p. 136

[21] CRUMP, T. Op. cit., p. 136

[22] Cf. GROZA, Vivian Shaw. *A Survey of Mathematical Elementary Concepts and their Historical Development*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1968, 327 p., p. 7

interessante também que algumas tribos contam até mais que três, utilizando combinações dos números iniciais, como no caso dos Tamanacs de Orinoco[23]:

| a | oa | ua | oa-oa | oa-oa-a | oa-oa-oa | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |

O *destaque* dado ao número três e a sua não-utilização posterior para formar os demais algarismos faz supor que houve um estágio anterior em que a linguagem abarcava somente o *um* e o *dois.* O conceito de **ua** (três) representava tudo o que viesse a partir daí. Somente em uma evolução posterior da linguagem, teriam começado a ser usados **a** (um) e **oa** (dois), noções mais fáceis de manipular, para formar números maiores. O *três*, entretanto, deixa de ser utilizado nessas combinações, pois talvez fosse de difícil manipulação prática, e por ter se impregnado desse aspecto de *número grande demais*.

Nas próprias línguas modernas encontramos o mesmo tipo de "tratamento diferenciado" ao número *três*, muitas vezes revelando sua associação direta com a noção de *muitos*. É o caso por exemplo da língua francesa, na qual *trois* (três) e *très* (muito) têm a mesma origem. Ou do inglês, em que *three* (três), *throng* (multidão) e *through* (através) têm a mesma raiz etimológica. Outras línguas latinas também possuem uma origem comum para o *três* e o *trans,* este último com sentido de *transcender, ultrapassar, ir além...* Ifrah diz que alguns povos indígenas apontavam para os cabelos da cabeça para referir-se a quantidades maiores que dois, indicando que eram tão difíceis de medir quanto o número de fios em uma cabeleira. Segundo Ifrah,

> *Desde a noite dos tempos o número 3 foi, assim, sinônimo de pluralidade, de multidão, de amontoado, de além, e constituiu, conseqüentemente, uma espécie de limite impossível de conceber ou precisar*[24]*.*

Isso prova que não havia, inicialmente, nenhuma prática de se comparar um-a-um os objetos de dois conjuntos numéricos, independentemente de seu tamanho. Toda utilização de número principiava pela ideia de sequência, e em ordem iam sendo construídos números maiores, que representavam uma quantidade discreta ou medidas de distância, peso, volume. Grandezas contínuas foram desse modo assimiladas pela linguagem humana, na medida em que se viam conjuntos “muito grandes” como contínuos. Um conjunto com um número "muito grande" de elementos tende a revestir-se com aparência de *continuidade* (pense-se, por exemplo, na areia da praia, cujo montante não se avalia pela *contagem* do número de grãos, mas pela *medida*, utilizando noções de volume ou massa).

O estudo da História parece levar à conclusão de que o Número não teria surgido puramente de considerações discretas, ou seja, da contagem. A medida é, assim, pelo menos tão antiga quanto a contagem. Os aspectos contínuos da realidade teriam sido trabalhados pelo homem desde o início, tornando-se parte de sua linguagem e de sua forma de pensar. Somente muito mais tarde é que o homem começou a *associar elementos de conjuntos*, tomando-os em correspondência um-a-um, discriminando a realidade numérica, em uma etapa posterior de evolução.

O homem teria, portanto, começado a tratar os números aplicando-os a medidas tanto quanto a contagens. Segundo pesquisas sobre a natureza do conhecimento matemático, as habilidades numéricas elementares estão associadas à essa visão imediata e aproximada do "tamanho" da quantidade que se quer contar. Sem contar diretamente, é difícil diferenciar “ooooooo” de “oooooooo”. Mas utilizando a comparação de comprimentos, vemos que a diferença é visível por simples percepção:

[23] Id.ibid., p. 14

[24] IFRAH, Georges. *Os Números: História de uma grande invenção.* Trad. Stella M. de Freitas Senra. 3ª ed. São Paulo: Globo, 1989. 367 p., p. 18

| | |
|---|---|
| o o o o o o o | |
| o o o o o o o o | |

Howard Gardner, em seus estudos sobre a inteligência, afirma que as abelhas exercitam, continuamente, uma capacidade instintiva para calcular distâncias. Referindo-se a estudos antropológicos, Gardner comenta que adultos de Kpelle na Libéria calculam o número de pedras em pilhas variando de dez a cem pedras, apenas pela estimativa, superando nisso os adultos americanos[25]. Essa poderosa capacidade de estimativa, em grupos não-alfabetizados, sugere que o raciocínio numérico intuitivo faz uso tanto de noções contínuas quanto discretas. De acordo com as observações da evolução histórica da noção de Número, percebemos que é razoável supor que as medidas e as considerações contínuas fazem parte da base da noção de Número.

Assim, seria natural que muitas maneiras de trabalhar com as noções iniciais de número levassem em consideração tanto a contagem de objetos quanto o tamanho ou a medida do objeto.

## O ensino do número natural pela via do discreto e do contínuo

Uma dessas maneiras de trabalhar com a ideia de número é a que relata Petrovski[26], autor de interessantes estratégias de ensino de números a crianças, fazendo uso de considerações sobre grandezas contínuas. Antes de adquirirem o conhecimento sobre a série dos números naturais, as crianças trabalham com a noção mais geral de grandeza, comparando as diferenças entre objetos no que se refere ao peso, volume, comprimento, área, etc.

O método relatado por Petrovski mostra que a criança, trabalhando com objetos reais, naturalmente efetua comparações entre eles, diferenciando-os uns dos outros. Segundo Petrovski, a criança que ainda não sabe contar consegue verificar a desigualdade entre objetos, segundo vários parâmetros de comparação. É a partir dessa ideia de desigualdade que é possível às crianças estabelecer uma base para a compreensão dos números naturais.

Petrovski mostra assim como se consegue ensinar a contar partindo de experiências de medidas, como a comparação entre tamanhos de objetos. Segue portanto a via da continuidade, para construir a ideia de número.

As experiências de Petrovski mostram como ensinar números utilizando a referência ao contínuo. Do mesmo modo, a utilização de barras de Cuisenaire e outros materiais de ensino, ajudam a associar comprimento a número, lidando com ambos os aspectos de discreto e contínuo.

Mas não é uma unanimidade entre os educadores que se deva sempre abordar o discreto e o contínuo para construir a ideia de número. Por exemplo, correntes derivadas dos estudos piagetianos fazem uma opção radical pelo discreto. Constance Kamii, em seus famosos estudos sobre a construção do número pela criança[27], considera apenas o número como algo que é construído pela repetida adição de "1". Kamii desaconselha o uso de barras de Cuisenaire, pois, segundo ela, a utilização das barras de Cuisenaire para ensinar número

> *reflete a falha de não diferenciar entre quantidades discretas e contínuas*[28]*.*

---

[25] GARDNER, Howard. *Estruturas da Mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas.* Trad. Sandra Costa. Porto Alegre, Artes Médicas Sul, 1994. 340 p., p. 125

[26] PETROVSKI, A. *Psicologia Evolutiva y Pedagogica.* Trad. Leonor Salinas. Moscou, Editorial Progreso Moscú, 1979. 352 p., pp. 19-20

[27] Cf. KAMII, Constance & DECLARK, Georgia. *Reinventando a Aritmética: Implicações da Teoria de Piaget.* Trad. Elenice Curt, Marina Célia M. Dias, Maria do Carmo D. Mendonça. 3[a] ed. Campinas, SP: Papirus, 1990. 308 p., p, 23

[28] Id., ibid.

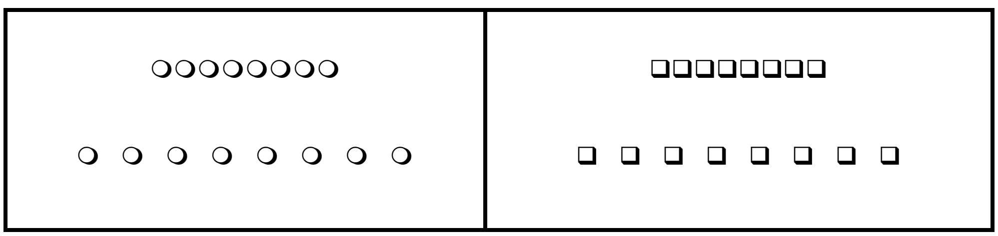
Kamii diz que, *depois* que a criança tivesse construído o número, *então* ela poderia usar as barras de Cuisenaire ou outro material semelhante, para visualização da comutatividade, divisão de conjuntos, etc. Mas tendo presentes as considerações históricas e antropológicas que fizemos acima, somos levados a lançar um olhar de surpresa para tais propostas de ensino, que querem fazer tudo começar unicamente pelo discreto. Kamii chega a afirmar claramente que

> *para o ensino inicial do número elementar as quantidades contínuas não são apropriadas*[29]*.*

Mas são os próprios experimentos clássicos piagetianos feitos com crianças, relatados por Kamii, que tendem a mostrar que justamente *antes* e *durante* a formação da ideia de número, é que a criança se mostra mais sensível e pronta para relacionar o discreto e o contínuo, a contagem de objetos e o tamanho de um grupo de objetos. Os resultados dos testes piagetianos sugerem que a criança, antes de saber lidar com números para realizar contagens, parece já saber fazer estimativas sobre quantidades contínuas e tamanhos. Essa bagagem anterior, longe de ser desprezada, deveria pelo contrário ser aproveitada para a construção inicial da ideia de número. Gardner comenta que a criança está consciente, antes de saber contar, de que há pilhas maiores e pilhas menores de moedas ou balas. Segundo ele, se a criança for confrontada com

> *dois conjuntos de balas, um cobrindo um espaço mais amplo do que o outro, tende a concluir que a pilha mais amplamente dispersa contém mais doces, mesmo se, de fato, a outra pilha (mais densa) for mais numerosa*[30]*.*

Também Kamii registra explicitamente esse fato com fotos e esquemas, como o abaixo, mostrando que a criança normalmente *acredita* que a fila de baixo *tem mais* que a fila de cima.



No livro *A Criança e o Número,* Kamii refere-se a este fato pelo menos sete vezes, verificando-o não só no teste das filas de objeto (Cf. páginas 7, 10, 11 e 26), mas também mostrando que as crianças naturalmente comparam o número de cartas de baralho em pilhas diferentes avaliando a altura das pilhas de cartas (Cf. páginas 66, 90 e 92).

Mesmo diante da confirmação desse conhecimento espontâneo que estabelece uma relação entre números, medidas e contagens, Kamii estabelece seus *Princípios de Ensino* somente levando em consideração a *quantificação discreta* de objetos[31].

Essa visão meramente discreta da natureza do número que encontramos em Kamii é justificada por ela com base na teoria de Piaget[32], a respeito da diferenciação entre conhecimento físico e conhecimento lógico-matemático[33]. No conhecimento físico, a criança faz uso de abstrações simples, ou empíricas. Assim, a criança percebe por simples abstração que duas plaquetas têm o mesmo peso ou que têm cores diferentes. No conhecimento lógico-matemático, no entanto, a criança realiza abstrações reflexivas. Segundo Piaget, para perceber que duas plaquetas são ***duas*** plaquetas, a criança necessitaria fazer uma construção a partir das relações entre os objetos.

Assim sendo, as propriedades contínuas dos objetos, *como medida de comprimento* ou *peso,* seriam objeto de abstrações empíricas, ao passo que a *quantidade* (discreta) dos objetos seria fruto da abstração reflexiva.

---

[29] KAMII, Constance. *A Criança e o Número: Implicações Educacionais da Teoria de Piaget para a Atuação junto a Escolares de 4 a 6 anos.*Tard. Regina A. de Assis. Campinas, SP, Papirus, 1995. 124 p., p. 59

[30]GARDNER, op. cit., p. 101

[31]Cf. KAMII, op. cit., p. 42

[32]Cf. PIAGET, Jean. *Introdução a la Epistemologia Genética*. Volumen I: *El Pensamiento Matemático.* Trad. Maria T. Cevasco , Victor Fischman. Buenos Aires: Paidos, 1978. 315 p.

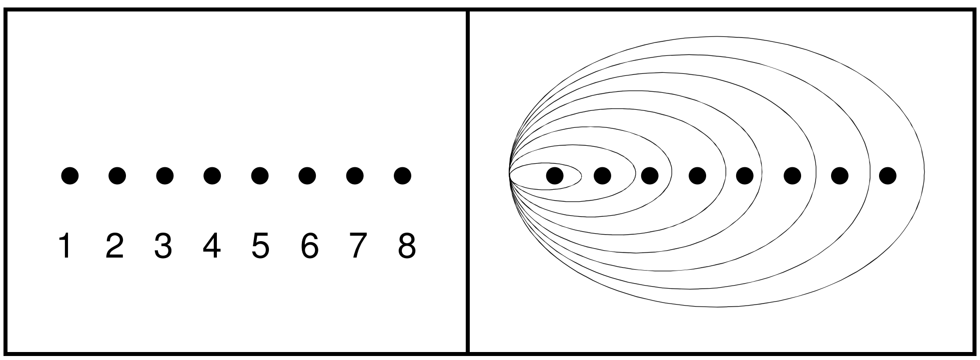
[33]Cf. KAMII, op. cit., p. 14 ss.

Mas o próprio Piaget, segundo comenta Kamii, não concebe abstrações reflexivas, sem a existência anterior de abstrações simples ou empíricas. Ao menos, dentro dos estágios sensório-motor e pré-operacional. Esse fato mostra uma vez mais que é necessário levar em conta os aspectos contínuos das noções numéricas para chegar à ideia completa de número. Diz Kamii:

> *O fato de que a abstração reflexiva não pode ocorrer independentemente das primeiras construções de relações feitas pelas crianças tem implicações importantes para o ensino do número*[34].

De acordo com Piaget[35], o número é uma síntese feita por abstração reflexiva das relações de ordem e de inclusão hierárquica[36]. Mesmo utilizando a terminologia piagetiana das distinções entre conhecimento físico e lógico-matemático, e entre abstrações empíricas e reflexivas, podemos concluir que é necessário fazer uso da visão contínua das medidas, que as crianças apresentam mesmo antes de conhecer os números (conforme constata a própria Kamii), pois fornecem a visão de inclusão hierárquica que, segundo Piaget, é fundamental para a construção da ideia de número. Assim, embora evite, como já explicamos, a referência à continuidade para ensinar números, Kamii revela, na teoria de Piaget que fundamenta seus estudos, que existe uma porta aberta para justificar a necessidade de trabalhar com ambos os aspectos discreto e contínuo na construção da ideia de número.

Em nenhum conjunto discreto de elementos ocorre uma inclusão hierárquica, que segundo Piaget é componente fundamental da ideia de número. Somente nas medidas é que esta inclusão de fato ocorre. Os esquemas que vemos no livro de Kamii são meramente esquemas mentais, não existem nos conjuntos discretos utilizados.




Já nas medidas de comprimento, peso, volume, etc., está presente naturalmente a ideia de inclusão hierárquica. Três litros contêm de fato dois litros. Portanto, soa estranha a rejeição que Kamii faz do uso de medidas, como modo de construir a ideia de número, como a que vemos no trecho abaixo:

> *A relação dois seria impossível de ser construída se as crianças pensassem que os objetos reagem como gotas d'água (que se combinam e se transformam numa gota)*[37]*.*

Na verdade, toda criança percebe que juntando água se obtém mais água, assim como sabe que pilhas de cartas de alturas diferentes possuem quantidades de cartas diferentes. Mas Kamii rejeita de antemão a interação entre grandezas discretas e contínuas. Essa opção unilateral pelo discreto como único modo de construir a ideia de número supõe também a distinção entre *números perceptuais* e simplesmente *números.* Os números perceptuais, segundo Piaget, são números pequenos, até quatro ou cinco, que podem ser "contados" pela simples observação, sem fazer uso de uma estruturação lógico-matemática. Já os números maiores não podem ser "percebidos", mas podem ser contados um a um. Então Kamii cita a célebre comparação zoológica:

[34]KAMII. op. cit., p. 18
[35]Cf. PIAGET, op.cit., p. 128
[36]Cf. KAMII. op. cit., p. 19
[37] KAMII, op. cit., p. 17

> *Até alguns pássaros podem ser treinados para distinguir entre "oo" e "ooo". Contudo, é impossível distinguir "ooooooo" de "oooooooo", apenas pela percepção.*[38]

Mas existem outras comparações zoológicas que servem para mostrar que as medidas também são "perceptíveis" intuitivamente, como no caso das abelhas já citado. O estudo da História da ideia de Número leva a pensar que não se deve descartar o uso de comparações entre contagem e medida para a formação inicial da ideia de número. Alguns dos argumentos piagetianos citados talvez possam também servir para reforçar a necessidade do trabalho com medidas, uma vez que são a base da ideia intuitiva de inclusão hierárquica.

No ensino dos números elementares ou naturais parece portanto não ser necessário priorizar o discreto sobre o contínuo. Na verdade, pode-se ensinar números fazendo uso tanto de imagens que se referem ao discreto quanto ao contínuo, e não se trata de fazer uma opção entre esses dois aspectos.

## Discreto/Contínuo e os números quebrados

No ensino de frações e na construção dos números racionais aparece também a importância de se trabalhar tanto um aspecto quanto o outro. Para falar sobre isso devemos estudar também as representações e os usos numéricos das principais civilizações da antigüidade.

Além do estudo da linguagem oral, a análise dos *símbolos numéricos* fornece elementos para o estudo da relação entre discreto e contínuo. Tomemos, por exemplo, o caso das primeiras linguagens matemáticas relativamente bem desenvolvidas, como são as do Egito Antigo e dos povos da Mesopotâmia.

A Matemática do Egito Antigo utiliza Números tanto para contagem quanto para medida. Os números aos olhos dos egípcios não se constituíam em um conjunto obtido pela correspondência um-a-um. Um sinal claro de que os Números para os egípcios não eram resultado dessa correspondência um-a-um entre conjuntos é a freqüência e a desenvoltura com que utilizavam frações. Os egípcios davam uma exclusividade à utilização de *frações unitárias,* isto é, aquelas com numerador igual a um[39]. Nessa radical preferência, pode-se constatar o uso freqüente de noções numéricas para medidas, às quais não se poderiam aplicar apenas números inteiros. Fixando-se o numerador em *um*, os egípcios podiam trabalhar com medidas de uma forma intuitivamente palpável, pois podiam considerar frações como representações de pedaços de inteiros, cuja divisão era determinada pelo denominador:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \ldots$$

A própria divisão egípcia era elaborada por meio de um algoritmo que consistia em uma multiplicação pelo inverso do divisor. Isso também mostra como a ideia de número para os egípcios estava associada às medidas.

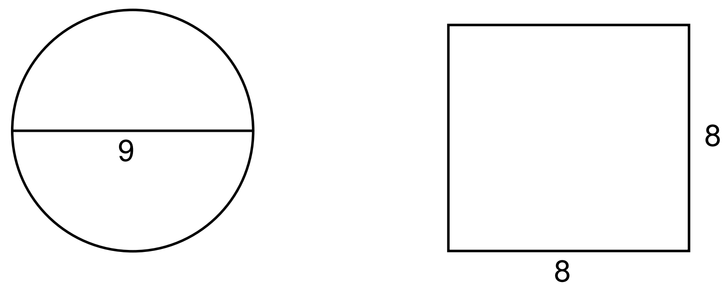
Ainda no Egito Antigo, vemos a utilização sistemática de aproximações numéricas simples, com números redondos e conhecidos, para resolver problemas de cálculo de áreas envolvendo o número $\pi$. Assim, no problema 50 do Papiro Ahmes[40], encontramos a indicação do cálculo da área de um círculo de diâmetro 9 por meio da equivalência da área de um quadrado de lado 8:

---

[38] KAMII, op. cit.,p. 15

[39] Segundo os historiadores da Matemática, permitia-se também o uso esporádico da fração 2/3, mais familiar, aparentemente por motivos de ordem religiosa.

[40] Cf. BOYER, Carl Benjamin & MERZBACH, Uta C. *A History of Mathematics: Second Edition*. Singapore: John Wiley & Sons, 1989. 764 p., p. 20




Alguns autores[41] procuraram nessa relação entre áreas encontrar o **valor de** $\pi$ que seria do conhecimento dos egípcios na época, isolando-o dentro das fórmulas de áreas do círculo e do quadrado:

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2$$

$$\Rightarrow \pi = \frac{64}{81}\cdot 4 = \frac{256}{81} = 3\cdot\frac{13}{81}$$

$$\Rightarrow \pi \cong 3{,}16$$

Concluem assim, esses autores, que o valor de $\pi$ conhecido pelos egípcios era aproximadamente 3,16. Mas é difícil afirmar que os egípcios soubessem ou tivessem interesse em realizar tais operações algébricas para *obter* $\pi$, e nem há tampouco registros de que tivessem jamais percorrido o caminho contrário, partindo de um valor aproximado de $\pi$ para chegar a um valor para a área de um círculo.

O que sem dúvida é seguro afirmar é que os egípcios utilizavam números para lidar com Geometria, aproximando numericamente o valor da área de um círculo pela área de um quadrado. Ou seja, mesmo em meio às dificuldades próprias da Matemática nascente para trabalhar com números irracionais, cuja existência estavam ainda longe de imaginar, utilizavam números para contagem e para medidas, sem fazer distinção clara entre ambas as atividades. Sendo assim, encontramos uma vez mais a presença aliada das noções discretas e contínuas. A separação - ou a percepção da existência de uma separação conceitual entre essas noções - virá somente mais tarde.

Já na Mesopotâmia, onde a Matemática era extremamente mais evoluída que no Egito, encontramos modos sutis e sofisticados de lidar com a relação entre discreto e contínuo, sem fazer qualquer opção entre um e outro aspecto. Desenvolveram um sistema numérico com base sexagesimal, talvez inicialmente motivados pela praticidade oferecida pela grande variedade de divisores inteiros que a base 60 possui (1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60). Com sua notação posicional, em cada *casa* havia 60 possibilidades de ocupação numérica, desde o zero (casa vazia) até o 59.

Isso permitia escrever números grandes e chegar a aproximações muito boas de números irracionais utilizando poucos algarismos sexagesimais. Vale lembrar que enquanto para nós cada “casa” tem um valor posição baseado nas potências de dez, para eles, que funcionavam em base 60, cada “casa” em relação às suas vizinhas tinha um valor muito maior ou muito menor, de modo que seus números cresciam muito rapidamente para um lado e decresciam também muito rapidamente em direção ao outro lado.

Segundo Aaboe,

> *outra vantagem da base babilônia é que mais frações podem ser escritas como frações sexagesimais finitas do que como frações decimais finitas*[42].

---

[41]Cf., p. ex., BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974, 488 p., p. 13

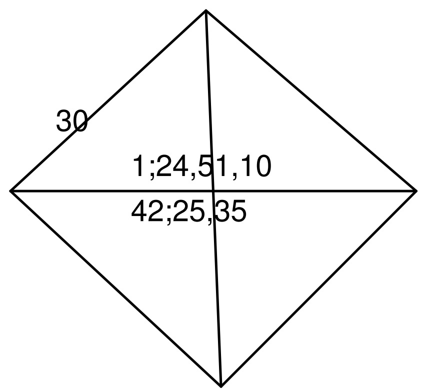
[42]Cf. AABOE, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Trad. de João Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. 170 p., p. 25

Esse recurso tornava possível contornar o problema das grandezas irracionais, constituindo uma linguagem numérica extremamente útil para lidar com medidas contínuas, evitando a distinção entre discreto e contínuo. De certo modo, podemos dizer que os povos da Mesopotâmia tinham uma ideia de Número que não era restrita aos racionais, pelo fato de utilizarem números para realizar medidas. Falando da noção de número dos babilônios, afirma Bourbaki:

> *Toda medida de tamanho implica em uma noção difusa de números reais*[43].

Para Bourbaki, na ciência babilônia existia uma noção “ingênua” de número real, pois possuíam um sistema numérico que permitia expressar valores muito próximos de qualquer número real.

Assim, por exemplo, utilizando um algoritmo simples[44], obtinham um valor muito bom para a diagonal de qualquer quadrado facilmente, com exatidão de várias casas decimais, pois, como vemos no desenho da tableta abaixo, multiplicavam o lado do quadrado por um valor aproximado de $\sqrt{2}$, em linguagem sexagesimal escrito como 1;24,51,10 , que no sistema decimal significa 1,414213 , valor bastante próximo do exato.




Com certeza, o fato de os cálculos de números irracionais serem tão facilitados e precisos fez com que nem se preocupassem com a existência de uma *natureza diferenciada* nessa classe de números.[45]

Na análise da *linguagem numérica* dos povos da Antigüidade encontramos as principais fontes da noção intuitiva de número. A Matemática pré-helênica dos egípcios e babilônios apresenta uma característica comum muito importante para o nosso estudo: a utilização de números racionais (ou aproximações de irracionais) tanto para contagem quanto para medida. A ideia de número se apoia assim na complementaridade entre as noções de discreto e contínuo.

Mais tarde, porém, irá surgir uma tendência a se separar e fazer oposição entre discreto e contínuo, sem uni-las em uma ideia genérica de “número”, como faziam os antigos. Para se entender essa oposição radical em sua origem e sua justificação em termos de concepção filosófica, será preciso ir além, e adentrar o mundo da matemática grega.

## Discreto/contínuo e os números irracionais

Os gregos foram responsáveis pelas primeiras noções e ideias propriamente científicas, ou seja, fundamentadas em uma lógica de raciocínio e baseadas na tentativa de formar definições dos termos empregados.

Segundo a expressão famosa de Proclus Diadochus (410-485 dC), foi Tales o primeiro a utilizar esse método *imaterial* de trabalho científico na Matemática, querendo provavelmente dizer com isso que Tales chegava a resultados raciocinando dedutivamente[46].

[43] BOURBAKI, Nicolas. *Elements of the History of Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 301 p., p. 147
[44] Cf. ZIPPIN, Leo. *Uses of Infinity*. Washington: The Mathematical Association of America, 1962. 151 p., p. 34
[45] Cf. BOURBAKI, Nicolas. *Elements of the History of Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 301 p., p. 147
[46] Cf. HEATH, Thomas Litle. *A History of Greek Mathematics*. New York, Dover, 1981. 2 v. p.128

Esse novo modo de encarar a Matemática supõe considerar noções de caráter universal, como "triângulo retângulo", "triângulos semelhantes", etc.

Enquanto os papiros egípcios forneciam *soluções individualizadas* para cada problema proposto de Aritmética ou Geometria, sem tentar chegar a métodos gerais nem demonstrar fórmulas e afirmações amplas, os gregos irão trabalhar exatamente no âmbito das *generalizações* e na obtenção de *princípios gerais*. Conseqüentemente, os gregos tentam estabelecer definições e regras de utilização dos números, originando assim uma visão de número que irá determinar em parte o estilo de Matemática que seria praticada nos séculos seguintes.

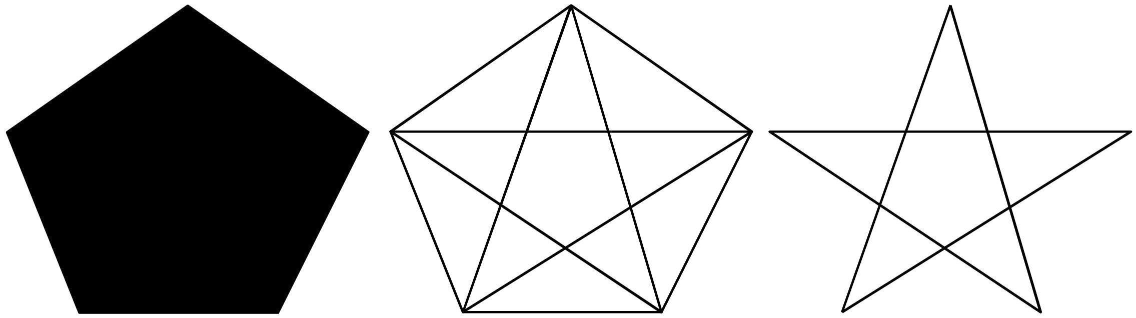
A Matemática enquanto Ciência dedutiva teve portanto sua origem na Grécia. É certo que os povos mesopotâmicos sabiam calcular com precisão as posições dos astros, e que os egípcios construíam pirâmides com maestria e exatidão matemáticas. Mas somente com o método *imaterial*, com o relativo *afastamento* das aplicações práticas imediatas, inaugurado pelos gregos, foi possível que se forjassem as bases do pensamento científico contemporâneo.

A versão histórica clássica diz que Tales, tendo viajado ao Egito, trouxe de lá os princípios da Geometria. Essa história aparece em Proclus[47], mas há uma referência anterior de Heródoto[48] (século V aC), que afirma terem os gregos aprendido a arte da Geometria no Egito. Seja como for, o fato é que os gregos rapidamente aprimoraram as ideias geométricas dos egípcios, elevando-as a um patamar muito superior e diferente. Fowler[49] comenta o exemplo do *cálculo de áreas*. Os egípcios calculavam as áreas multiplicando a média dos lados opostos dos quadriláteros, sejam eles de que tipo forem, o que gera uma área quase sempre maior que a verdadeira. Já os gregos chegam a resultados sofisticados, como o da Proposição 35 do Livro I de *Os Elementos* de Euclides: *paralelogramos que estão na mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si* (i.e., têm a mesma área). Proclus comenta que esse resultado é surpreendente pois permite visualizar que se podem aumentar indefinidamente o comprimento dos lados do paralelogramo sem que sua área aumente, contrariando as noções egípcias[50].

É evidente que tais resultados contrastam com a Geometria egípcia anterior. Além disso, é preciso salientar que o estilo do trabalho de Tales contrasta totalmente com as preocupações práticas dos egípcios ou mesmo dos babilônios. É atribuído a ele, por exemplo, uma possível demonstração de que o diâmetro bissecta o círculo. Ora, esse tipo de interesse filosófico no estudo da Matemática abre caminho a todo um mundo de indagações. Segundo referem os comentadores, Pitágoras de Samos, possível aluno de Tales, após realizar, como ele, viagens pelo mundo cultural da época, funda uma associação de estudiosos de diversos assuntos, que irão se dedicar à busca do *conhecimento pelo conhecimento*, sem preocupação pelas aplicações práticas imediatas dos resultados que obtém.

O interesse dos pitagóricos estava na descoberta de *tudo* o que se referisse a um determinado assunto que tinham escolhido para estudo naquele momento. Por exemplo, dedicaram muito tempo ao estudo da música, tendo descoberto as relações matemáticas das *notas musicais* com o comprimento das cordas que emitiam um determinado som. Outro objeto de estudo conhecido era o *pentágono regular*, dentro do qual traçavam a figura do pentagrama, estrela de cinco pontas formada pelas diagonais do pentágono. Essa estrela tornou-se logo objeto de veneração dos pitagóricos, que a adotaram como um dos seus símbolos.

[47]PROCLUS, *Comentário...*, 64-5. Cit. in FOWLER, D.H. *The Mathematics of Plato's Academy: a New Reconstruction.* Oxford, Oxford University Press, 1990. 401 p., p. 283
[48]HERÓDOTO, *Histórias* ii, 109. Cit. in FOWLER, op. cit., p. 283
[49]FOWLER, op. cit., p. 232
[50]Cf. FOWLER, op. cit., p. 284



Aprofundando no estudo do pentágono e do pentagrama, teriam chegado a resultados tão surpreendentes que causaram uma verdadeira ruptura no pensamento da Antigüidade, a chamada *crise dos incomensuráveis*. Essa crise irá significar uma mudança conceitual em relação à noção de número dos gregos. Mais especificamente, na verdade os gregos não mudarão em relação aos números, que continuarão a ser para eles somente os naturais. Mas será inaugurada uma área nova de conhecimento, que é a álgebra geométrica, que trabalha com números tratados geometricamente.

A crise dos incomensuráveis é considerada de grande importância para o estudo da evolução da Matemática, e, mais especificamente, para a evolução da ideia de número. Segundo Fowler,

> *parte da bagagem intelectual de toda pessoa alfabetizada, ao lado da segunda lei da termodinâmica e dos princípios da relatividade e indeterminação, é alguma versão da história da descoberta da incomensurabilidade por Pitágoras ou pelos pitagóricos e o papel dessa descoberta na Matemática grega*[51].

Para a compreensão do alcance dessa descoberta é preciso ter em mente dois conceitos básicos da visão matemática pitagórica: o conceito de *número* e a ideia de *razão*. Para os pitagóricos, bem como para a mente clássica grega, número era uma entidade de existência real, constituída por unidades. Segundo a descrição de Aristóteles na *Metafísica*, referida por Fowler, os pitagóricos

> *reduzem todas as coisas a números (1036b13) (...). Pois constróem o universo inteiro a partir de números - só que não de números consistindo em unidades abstratas; eles supõem as unidades tendo grandeza espacial. Mas como a primeira unidade foi constituída de modo a ter grandeza, eles parecem incapazes de explicar (1080b16-21).*[52]

Assim, não eram considerados números nem o zero nem o um, nem outras combinações não-naturais, como números fracionários, etc. Os números naturais eram, para os pitagóricos, o motivo da diferenciação entre os seres da natureza. Cada ser têm seu número, e os próprios números possuem uma entidade no universo. O lema da escola pitagórica era: "TUDO É NÚMERO".

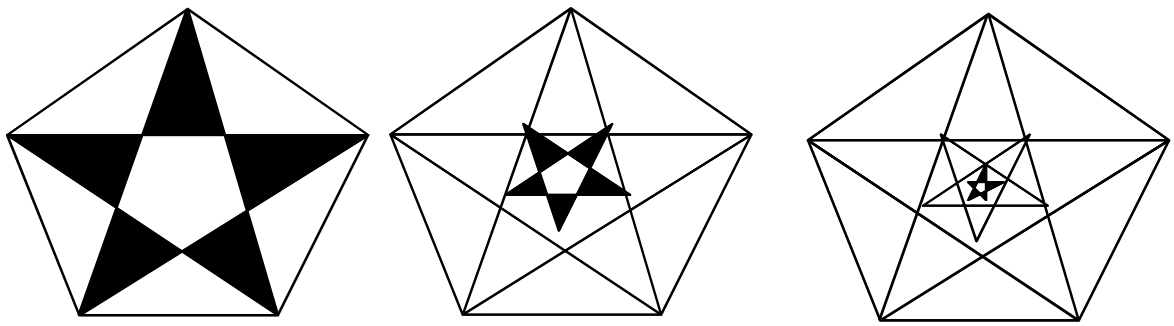
Entre duas grandezas quaisquer, como por exemplo duas hastes de junco, haveria uma relação numérica, dada pela razão entre o número da primeira e o número da segunda. Esse número podia ser obtido facilmente, tomando um padrão de unidade de medida com a qual se media cada grandeza. Era óbvio, para os pitagóricos, que quaisquer duas grandezas seriam comensuráveis, bastando encontrar a unidade de medida compatível com ambas.

A descoberta das razões simples entre o comprimento das cordas vibrantes e as notas musicais que produziam serviu apenas para reforçar essa visão de mundo, que os pitagóricos logo procuraram divulgar entre seus seguidores. Desse modo, surgiram as primeiras divisões das disciplinas pitagóricas, como a distinção entre a *aritmética* – estudo dos *números em repouso* – e , a *música* – estudo dos *números em movimento*. Dessa maneira ia se configurando o universo pitagórico, em grande harmonia, no qual as esferas celestes percorriam suas trajetórias emitindo o som correspondente ao seu número.

---

[51] FOWLER, op. cit., p. 294
[52] FOWLER, op.cit., p. 302

Conta-se[53] que em uma excursão de navio, um grupo de pitagóricos ficou perplexo ante as opiniões de um membro, Hippasus de Metapontum, que teria começado a discorrer sobre os mistérios da auto-reprodução do pentágono regular e do pentagrama inscrito nele. Hippassus teria chamado a atenção para o fato de ser sempre possível observar um novo pentágono regular no centro do pentagrama. Dentro desse pentágono invertido sempre se poderia desenhar outro pentagrama, e assim por diante... Nesse momento, teria surgido uma certa perplexidade entre alguns dos ouvintes, que vislumbraram nessa reprodução ao infinito que não existiria uma grandeza, por menor que fosse, capaz de medir ao mesmo tempo o lado do pentágono e sua diagonal. Ou seja, teriam percebido a existência de duas grandezas incomensuráveis – e isso dentro do próprio símbolo da escola pitagórica.



A existência de grandezas incomensuráveis foi percebida pelos pitagóricos como a revelação sacrílega de um defeito na perfeição do Universo. Hippassus acabou sendo atirado ao mar, para que se assegurasse o segredo de uma tal hecatombe na doutrina pitagórica. Segundo a narração de Pappus de Alexandria (~320 dC), *o primeiro que descerrou o conhecimento sobre os irracionais e o divulgou, pereceu por afogamento*[54]*.* Outras versões contam que a pessoa que descobriu os incomensuráveis pereceu em um naufrágio[55], para ressaltar a gravidade da descoberta e o abalo cósmico que produziu. O próprio Pappus relativiza o valor histórico desse episódio, sugerindo que talvez não passasse de uma parábola para alertar quem desse pouca importância às dificuldades dos irracionais, pois acabaria

> *perambulando a esmo no mar da não-identidade...imerso na torrente do vir-a-ser e daquilo-que passa, onde não há qualquer padrão ou medida*[56]*.*

Seja como for, refeitos do susto inicial, os amantes da Matemática que eram os discípulos de Pitágoras devem ter buscado uma compreensão maior do fenômeno, e acabaram encontrando outros exemplos de grandezas não-comensuráveis.

Anos mais tarde, Aristóteles (384-322 aC) relata uma possível demonstração da existência de grandezas incomensuráveis, atribuindo-a aos pitagóricos. O interesse de Aristóteles pelo assunto se manifesta no fato de que cita por volta de trinta vezes a *incomensurabilidade da diagonal* nos seus trabalhos. Segundo Fowler, uma vez que Aristóteles não diz explicitamente se está-se referindo ao lado e à diagonal *do quadrado*, pode-se supor igualmente que ele se referia também à diagonal e ao lado *do pentágono* regular, o que parece inclusive mais plausível, dado o interesse dos pitagóricos pelas "propriedades mágicas" do pentágono e do pentagrama.

Vamos relatar a versão clássica da demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. A prova baseia-se somente na ideia de números pares e ímpares, para mostrar que, em um quadrado de lado $l$ e diagonal $d$, não pode haver $p$ e $q$ inteiros, com $q$ diferente de zero, tais que $\frac{l}{d} = \frac{p}{q}$. Esta é considerada a primeira

---

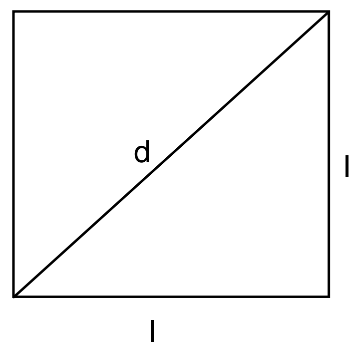
[53] Cf. BOYER, Carl Benjamin & MERZBACH, Uta C. *A History of Mathematics: Second Edition*. Singapore: John Wiley & Sons, 1989. 764 p., p. 84

[54] PAPPUS de Alexandria. *Comentário ao Livro X dos Elementos de Euclides*. Cit. in FOWLER, op. cit., p. 301

[55] Cf. HEATH, Thomas Litle. *A History of Greek Mathematics*. New York, Dover, 1981. 2 v. p. 154

[56] Id, Ibid

*demonstração por absurdo* da História da Matemática, e aparece geralmente nos livros didáticos para provar que $\sqrt{2}$ é um número *irracional.*




Suponhamos, por absurdo, que existam *p* e *q* nas condições acima. Obviamente, podemos tomar *p* e *q* primos entre si, para termos a fração $\frac{p}{q}$ irredutível. Aplicando a *d* e *l* o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow \frac{d^2}{l^2} = 2.$$

Como $\frac{p}{q} = \frac{d}{l} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{d^2}{l^2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$, temos que $p^2$ é par, e *p* também tem que ser par, pois os fatores primos de $p^2$ são os mesmos de *d*. Então, existe um *k* inteiro tal que $p = 2k$. Daí que

$$p^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2.$$

Assim, temos $q^2$ par, e do mesmo modo *q* é par. Ora, se $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível, não podemos ter ao mesmo tempo *p* e *q* pares. Portanto, provamos por absurdo que não podem existir *p* e *q* nas condições acima, isto é, o lado *l* e a diagonal *d* do quadrado são incomensuráveis.

Na verdade, a prova baseia-se no fato de que na decomposição de um número quadrado perfeito todos seus fatores primos devem aparecer dobrados, isto é, se 2 pertence ao conjunto de fatores primos de *n*, então 2 vezes 2 deve aparecer na decomposição em fatores primos de $n^2$. Daí que não podem existir *p* e *q* inteiros tais que $p^2/q^2 = 2$, ou $p^2/q^2 = k$, sendo *k* um número primo qualquer.

Fowler fornece outras versões alternativas para a mesma demonstração, interpretando de modo distinto o emprego da noção de pares e ímpares, e inclusive propondo uma possível demonstração, referida ao pentágono[57]. No caso do pentágono, equivale provar que o chamado "*Número de Ouro*", isto é, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, é irracional.

Comentando a crise dos incomensuráveis, Bourbaki[58] atribui aos gregos a ideia de número real, devido ao fato de possuírem uma teoria coerente de razões de quantidades. Segundo Bourbaki, basta terem colocado a questão da incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado para que concluamos que possuíam uma distinção muito clara entre uma razão e seus valores aproximados. Entretanto, essa distinção não serviu para estender a noção de número dos gregos. Evidentemente, o conceito de *números irracionais* está

---
[57]Cf. FOWLER, op. cit., p. 304-305
[58] Cf. BOURBAKI, Nicolas. *Elements of the History of Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 301 p., p. 147

diretamente associado à noção de grandezas incomensuráveis. Mas os gregos não fizeram a extensão do seu universo numérico, apenas reforçaram a separação entre a *Teoria dos Números* e a *Geometria*.

A divisão da Matemática em disciplinas separadas como compartimentos estanques parece ser fruto do receio pitagórico de misturar a pureza dos números com a possibilidade das grandezas incomensuráveis. O quadro das quatro disciplinas pitagóricas (mais tarde chamado de *Quadrivium*) fica assim completo[59]:

| | Números | Grandezas |
|---|---|---|
| Em repouso | Aritmética | Geometria |
| Em movimento | Música | Astronomia |

Além dessas distinções, é importante notar que os gregos reconheciam ainda outro campo do saber, a Logística, que seria ensinada aos homens de vida prática que precisavam fazer uso de números em operações e cálculos, como os agrimensores, militares, etc. Desse modo, a Aritmética grega tratava do que hoje chamamos de Teoria dos Números, enquanto a Logística grega se referia às operações aritméticas, que hoje é assunto que faz parte da Álgebra.

Dentro dessas divisões da Matemática, o conceito de número passou a ter um significado múltiplo. No dizer de Desanti,

> *o mesmo conceito, o mesmo nome (número) se apresenta, desse modo, com duas faces: uma face "ontológica" (multiplicidade constituída por unidades); e uma face "operatória" (multiplicidade de medidas)*[60]*.*

A crise dos incomensuráveis marca assim o início claro de uma visão dicotômica entre a contagem e a medida, entre o discreto e o contínuo. E mostra claramente que a ideia de número é composta tanto de referências à contagem quanto de referências à medida.

Kline descreve assim esse acontecimento no mundo grego:

> *Os gregos eram de uma casta intelectual muito diferente e não se contentavam com aproximações. Mas padeciam também de certa debilidade. Reconheciam que existiam números que não eram nem inteiros nem fracionários, mas tão convencidos estavam de que no conceito de número não cabia nada mais que inteiros e frações, que não aceitaram que os irracionais fossem números também. E se limitaram a considerar essas quantidades como comprimentos ou como áreas geométricas. Por isso não desenvolveram nunca uma* aritmética *dos números irracionais*[61]*.*

O conceito de número real está portanto baseado na referência tanto ao discreto quanto ao contínuo, e o trabalho com a matemática elementar deve levar em conta atividades que envolvam ambos os aspectos.

Young, ao falar sobre a relação entre discreto e contínuo e o surgimento dos irracionais, cita Kline, dizendo que a crise dos incomensuráveis

> *trouxe à tona uma dificuldade que preocupava todos os gregos, qual seja, a relação entre o discreto e o contínuo*[62]*.*

---

[59] Acrescentando o *Trivium* das disciplinas que se referiam à linguagem (Gramática, Retórica e Dialética), temos o currículo das *Sete Artes Liberais*, que compunham o programa de estudo dos homens livres.

[60] DESANTI, Jean T. *Una Crisis de Desarrollo Ejemplar: El "Descubrimiento" de los Numeros Irracionales.* Apud: PIAGET, Jean (Org.) *Tratado de Lógica y Conocimiento Cientifico*. Volumen III: *Epistemologia de la Matemática.* Buenos Aires, Paidos, 1979., p. 523

[61] KLINE, Morris. *Matemáticas para los Estudiantes de Humanidades*. Trad. Roberto Helier. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica, 1992. 575 p., p. 77

[62] KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972. p. 34. Cit. in. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 41

Além de atingir e abalar o conceito de número dos gregos, a crise dos incomensuráveis teve como consequência uma série de indagações por parte dos filósofos a respeito da natureza das coisas. Depois da confrontação entre *comensurável/incomensurável,* surgiu com força a indagação a respeito de outras formas de realidade dual, também importantes para a formação do pensamento grego: a contraposição *divisível/indivisível*, presente nas discussões acerca da natureza e possibilidade do *movimento*, e as noções de *espaço/tempo*.

O estudo de tais temas dá início a uma busca pela compreensão dos fenômenos ligados ao movimento que levará por fim à criação do Cálculo Diferencial e Integral. Somente então é que terá prosseguimento a evolução da noção de número, no reconhecimento das propriedades da reta real, *arquétipo da continuidade* como diz Da Costa. A história dos números e a história do Cálculo se fundem, aqui, em um mesmo caminho que vai da Matemática grega aos tempos atuais. Nessa construção, terá papel fundamental a interação entre discreto e contínuo, como veremos no próximo capítulo.

# Capítulo 2

# O Par Discreto/Contínuo nas Ideias Fundamentais do Cálculo

Neste Capítulo, mostramos o caminho impregnado da interação discreto/contínuo que levou ao nascimento do Cálculo Diferencial e Integral. Desde sua origem na Antigüidade grega, em meio aos paradoxos do movimento, até a construção do Cálculo por Newton e Leibniz, mostramos a presença de duas vias , a da ideia do discreto e da continuidade, levando posteriormente ao desenvolvimento da ideia de Limite e de Números Reais. Mostramos também algumas implicações desse estudo para o ensino do Cálculo.

*Os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram.*

Aristóteles[63]

O *Cálculo teve sua origem nas dificuldades encontradas pelos antigos matemáticos gregos na sua tentativa de expressar suas ideias intuitivas sobre as razões ou proporções de segmentos de retas, que vagamente reconheciam como contínuas, em termos de números, que consideravam discretos*

Boyer[64]

*A Matemática requer o infinito e apesar disso sua existência é um ato de fé.*

Young[65].

Iremos encontrar a origem das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral na história da Matemática grega. Segundo a História, os gregos possuíam, já na época em que Euclides escrevia "*Os Elementos*", quase todos os fundamentos para desenvolver o Cálculo, mas ficaram presos por algumas concepções limitantes.

Foram os gregos os primeiros a procurar a compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo, ao infinitésimo, em busca de uma explicação para o movimento e transformações dos seres. Da ideia de movimento virão os primeiros conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

## Raízes do Cálculo na Grécia Antiga

Após a crise dos incomensuráveis, que pode ser situada no seio da nascente escola pitagórica, irá surgir outra grande polêmica muito fértil entre os filósofos pré-socráticos. Ao que tudo indica, o problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou

---

[63] ARISTÓTELES, *Física*, 207 b 28. Cf. DESANTI, Jean T. *Una Crisis de Desarrollo Ejemplar: El "Descubrimiento" de los Numeros Irracionales.* Apud: PIAGET, Jean (Org.) *Tratado de Lógica y Conocimiento Cientifico.* Volumen III: *Epistemologia de la Matemática.* Buenos Aires, Paidos, 1979., 523 p., p. 57

[64] BOYER, Carl Benjamin. *The History of Calculus and its Conceptual Development.* New York, Dover, 1959. 346 p., p. 4

[65] YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete.* Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 4

algumas concepções polêmicas acerca da natureza do mundo físico, como a *doutrina atomística*, defendida por Demócrito, que propunha a existência do *infinitamente pequeno* compondo o ser das coisas[66].

Demócrito, no século quinto a.C., foi o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone. Apesar de os egípcios já saberem encontrar o volume da pirâmide de base quadrada, o mérito de Demócrito está em ter generalizado, bem ao estilo grego, a maneira de determinar o volume para pirâmides de base poligonal qualquer. Para obter o volume do cone, bastava uma inferência natural obtida pelo aumento, repetido indefinidamente, do número de lados do polígono regular formando a base da pirâmide.

A importância de Demócrito para nosso assunto está no fato de ter sido, aparentemente, o primeiro a falar de *infinitesimais*, e a considerar a possibilidade de trabalhar com o infinitamente pequeno a fim de recompor o todo, como no caso de utilizar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antecipando-se assim ao teorema de Cavalieri, nesses casos[67].

A teoria dos infinitesimais de Demócrito e seus seguidores foi combatida duramente por outra escola filosófica, nascida em Eléa (Magna Grécia), pelo influxo das ideias de Parmênides. A doutrina eleática chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. Propunha, em substituição, considerar a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico.

Um aluno de Parmênides, Zeno de Eléa, entrará para a História com seus famoso dons dialéticos[68]. Através da manipulação de argumentos lógicos, pretendia demolir as ideias dos adversários. Zeno dizia que a ideia de infinitésimos é totalmente absurda, pois se possuem algum comprimento, então uma quantidade infinita deles irá compor uma reta de comprimento infinito; e se não têm nenhum comprimento, então uma quantidade infinita deles tampouco terá comprimento algum. Além disso, dirá também: aquilo que acrescentado a outro não o faz maior, e subtraído de outro não o faz menor, é simplesmente *nada*.

Mais famosos ainda que esses argumentos são seus quatro *paradoxos sobre a impossibilidade do movimento*. Não se sabe ao certo contra que escolas ou doutrinas específicas ele dirigia esses paradoxos, pois afetam de modo direto ou indireto muitas concepções da época, em geral baseadas na doutrina pitagórica de que espaço e tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes. Mas espaço e tempo possuem a propriedade da continuidade, e esses paradoxos deixam a descoberto as dificuldades de se *imaginar* ou *intuir* os fenômenos associados à *continuidade.*

A questão toda está em se considerar tempo contínuo e espaço discreto, ou vice versa. Os paradoxos de Zeno recolhem essa sensação de certo desamparo intuitivo, pois relatam uma situação de perplexidade comum frente à continuidade e ao infinito.

Por exemplo, no caso do Paradoxo da Dicotomia, Zeno nos coloca frente à aparente impossibilidade de percorrermos um número infinito de distâncias num tempo finito. Imaginemos uma pessoa que deve atravessar uma sala de um lado a outro. Antes de chegar à parede oposta, deve evidentemente chegar à metade da sala. Antes disso, porém, deve percorrer a metade da metade, ou um quarto da distância. E assim por diante, sempre dividindo a distância pela metade, indefinidamente. Desse modo, a pessoa nunca chegará ao outro lado, pois terá que percorrer um número infinito de espaços, ainda que pequenos, num tempo evidentemente finito.

O paradoxo mais conhecido é sem dúvida o de *Aquiles e a Tartaruga*, embora seja similar ao da Dicotomia. Agora temos o atleta Aquiles, com toda sua força física, sendo derrotado numa corrida por uma lenta tartaruga. Basta para isso que deixe a tartaruga sair com uma vantagem de distância, mesmo pequena, à frente dele. Pois assim que Aquiles alcançar a posição inicial da tartaruga, ela já se deslocou dali, mesmo que seja pouca coisa. Quando Aquiles chegar ao local onde a tartaruga devia se encontrar agora, esta já adiantou-

[66]BOYER, Carl Benjamin. *The History of Calculus and its Conceptual Development*. New York, Dover, 1959. 346 p., p. 21
[67]Id., Ibid., p. 22
[68]Id. Ibid., p. 23

se outro pequeno espaço, e assim por diante, de modo que a tartaruga sempre está à frente de Aquiles, até cruzar vitoriosa a reta de chegada.

O *Paradoxo do Estádio* chama hoje pouca atenção, embora seja de uma sutileza muito interessante.

No *Paradoxo do Estádio,* Zeno supõe, inicialmente, por absurdo, que o tempo seja, de fato, constituído por *instantes* indivisíveis e que o espaço seja formado por *pontos* também indivisíveis. Consideremos agora um estádio onde os corredores são pontos indivisíveis. Há três grupos de cinco corredores em uma pista de atletismo: cinco estão imóveis, e os dois outros grupos estão correndo em sentidos contrários, conforme a figura abaixo:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | | |
| **F** | **G** | **H** | **I** | **J** | → | | | |
| | | | ← | **K** | **L** | **M** | **N** | **O** |

Considerando que a velocidade dos corredores é tal que percorram a distância entre dois pontos em um instante, então o "ponto-corredor" J irá passar de C para D em um "instante", enquanto o "ponto-corredor" K irá passar de C para B no mesmo instante, conforme mostra o esquema abaixo:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | | |
| | **F** | **G** | **H** | **I** | **J** | → | | |
| | | ← | **K** | **L** | **M** | **N** | **O** | |

Entretanto, o corredor K passou por dois "pontos" J e I, encontrando-se agora sob o corredor H. Ora, o tempo necessário para passar por dois pontos é dois instantes; logo, um instante é igual a dois instantes, o que é uma contradição.

Zeno completa seus paradoxos com o *Paradoxo da Flecha,* que faz par com o do Estádio indo contra a noção de espaço e tempo constituído por partes indivisíveis. Um arqueiro dispara uma flecha, e observamos sua trajetória em direção ao alvo. Supondo que fosse possível considerar a posição da flecha em cada *instante de tempo*, veríamos que a mesma encontra-se imóvel, ocupando um lugar específico no espaço, que é evidentemente igual ao volume e forma da flecha. Ora, em cada instante, a flecha está imóvel; como o tempo é constituído de instantes, a flecha está portanto parada em toda sua trajetória. Poderíamos, por exemplo, colocarmo-nos diante dela, e no instante em que ela nos tocasse, estaria parada, e não nos feriria.

Apesar de que lidamos no dia-a-dia com noções de velocidade e de movimento, esses conceitos são bastante sofisticados. É importante insistir nesse fato para não subestimar-se a importância dos paradoxos de Zeno. Na verdade, os dois últimos paradoxos são reais, se considerarmos tempo e espaço constituídos por instantes e pontos discretos. Por outro lado, se consideramos tempo e espaço contínuos, surgem os paradoxos de Aquiles e da Dicotomia. Zeno fecha, assim, o cerco à perplexidade da noção de movimento e de velocidade, trazendo à tona controvérsias intrínsecas que, em geral, tendem a passar despercebidas aos olhos acostumados ao movimento.

A atitude mais comum, já na época de Zeno, é a do filósofo que, após ouvir as explicações de Zeno sobre a impossibilidade do movimento, ficou uns instantes pensativo e, levantando-se, disse que a solução de todos eles era "pôr-se a andar", e foi-se embora. A atitude desse filósofo é como que um símbolo da postura assumida pelos gregos frente às dificuldades de compreensão dos fenômenos que estão intimamente ligados às noções de discreto e contínuo, como tudo o que se relaciona com o *infinito*. Os paradoxos de Zeno marcaram bastante o desenvolvimento da Matemática grega, dificultando a visão integrada entre as noções de discreto e contínuo.

Como consequência da perplexidade ante esses fenômenos, os gregos desenvolveram o que se chamou de *Horror ao Infinito*, que na Matemática teve consequências muito importantes. Segundo Boyer, a Matemática adquiriu outra configuração após Zeno:

> *As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em* Os Elementos *os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas (e esse continha a maior parte da Matemática pré-helênica e pitagórica) era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos*[69]*.*

De início, a atitude se concretizou numa separação quase completa entre a Teoria dos Números e a Geometria. Com isso, lograram alcançar resultados importantes nos dois campos, evitando a discussão dos pontos de tangência entre discreto e contínuo, números e geometria. Pode-se dizer inclusive que o "horror ao infinito" gerou, ou ao menos contribuiu significativamente, para o desenvolvimento da *Álgebra Geométrica*, que consistia na resolução de problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas, isto é, realizando todas as *operações* sem necessidade de referência direta a números e suas representações. Cada *número* é um segmento de reta. *Somar* significa juntar dois segmentos e formar um maior. A *multiplicação* é a obtenção da área do quadrilátero cujos lados são os segmentos dos fatores. Assim, não é necessário distinguir entre números *racionais* ou *irracionais,* nem pensar se dois segmentos são *comensuráveis* ou *incomensuráveis*. Dados dois segmentos de reta, sempre é possível somá-los, subtrair um do outro, multiplicá-los ou dividir um pelo outro (isto é, encontrar o segmento que, multiplicado pelo primeiro, resulta numa área igual à do quadrilátero de um lado unitário e de outro igual ao segundo segmento). Tudo isso pode ser feito sem necessidade de *pensar numericamente* em nenhuma etapa do processo.

O *refúgio na álgebra geométrica* está registrado principalmente no Livro II de *Os Elementos* de Euclides. Na verdade, essa monumental obra de Euclides de Alexandria, cujos treze volumes foram publicados entre 330 e 320 aC, refere-se à maior parte da elaboração matemática grega anterior, acrescida da organização lógica oriunda dos trabalhos de Aristóteles.

A obra de Euclides representa o início da busca que resultará no Cálculo Diferencial e Integral. Euclides reúne toda a elaboração grega dos séculos anteriores, e registra o momento em que os pesquisadores começam a se voltar para a possibilidade da exploração da continuidade e da geometria em termos de análise algébrica, interessando-se mais por métodos de redução como o método de exaustão de Eudoxo. Não é por acaso que Arquimedes, bem como todos os criadores do Cálculo no século dezessete, irão se voltar para Euclides e tentar buscar aí as ideias do Cálculo.

A principal dificuldade para os gregos desenvolverem o Cálculo era o uso freqüente da ideia de *razão*. Esse fundamento da Matemática grega irá dificultar que se enxerguem as ideias fundamentais do Cálculo. Como diz Boyer,

> *Os próprios conceitos que deram nascimento ao Cálculo - aqueles de variação e continuidade, do infinito e do infinitesimal - foram banidos da matemática grega por esta razão, sendo o trabalho de Euclides um monumento a esta exclusão.*[70]

No mundo grego se estabelece a grande divisão entre as noções de discreto e contínuo, em termos de concepção filosófica, marcando profundamente a evolução da Matemática. É Euclides quem melhor registra essa dicotomia que caracterizava a mentalidade grega, dividindo em livros diferentes aquilo que se referia à *geometria* daquilo que se referia aos *números*. A Geometria seria o "reino da continuidade", enquanto a Aritmética seria o "reino do discreto".

O estabelecimento desses distintos "reinos" é possibilitado pela estrutura lógica fechada com que Euclides constrói sua obra. A solidez lógica da estrutura de *Os Elementos*

---

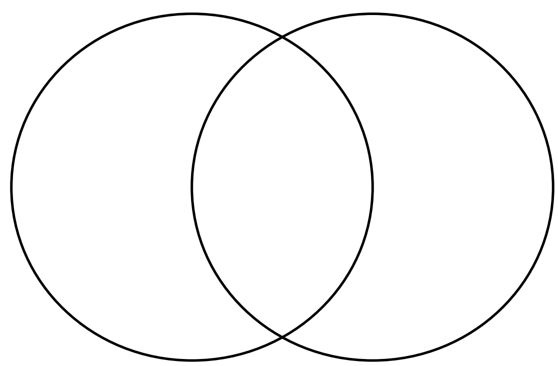
[69] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974, 488 p., p. 87

[70]BOYER, C.B., Op. cit., p. 301

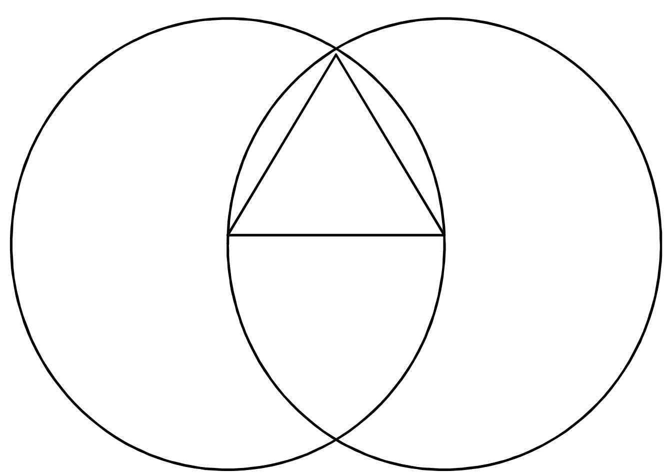
serve muito bem para conhecermos a real concepção de números e da constituição dos entes geométricos praticada pelos gregos.

Todo o conteúdo de *Os Elementos* está apresentado na forma de *teoremas* e *demonstrações*, precedidos de uma lista de *definições, axiomas* e *postulados*. E isso não somente na parte referente à geometria, onde encontram-se os famosos *cinco postulados.* Esses postulados, que precedem o Livro I de geometria, serão mais tarde objeto de controvérsia, dando origem às *geometrias não-euclidianas*. Mas também a parte referente aos números se inicia com uma série de postulados, menos famosos que os da Geometria, e que caracterizam a visão grega de Número, envolvendo apenas a noção de número natural, ou seja, o aspecto discreto.

Para Euclides, a *razão* não era um *número* no sentido aritmético abstrato, e o tratamento dado aos *irracionais* em *Os Elementos* é totalmente geométrico. Desse modo, as ideias de *variabilidade, continuidade* e *infinidade* não podiam ser rigorosamente estabelecidas, e Euclides baniu-as de sua geometria. Essa separação radical entre discreto e contínuo, presente na estrutura de *Os Elementos* de Euclides, apresenta entretanto algumas falhas visíveis. Os matemáticos que, a partir do século XIX, debruçaram-se sobre as instigantes possibilidades abertas pela exploração das geometrias surgidas da alteração do *Quinto Postulado* de Geometria, acabaram por encontrar a chamada *Falha da Continuidade.* Essa falha surge quando Euclides afirma, por exemplo, que dados dois pontos distintos quaisquer, se os tomarmos por centros de circunferências cujos raios sejam iguais à distância entre os pontos, então essas circunferências vão se interceptar em dois pontos, conforme a figura abaixo:



Euclides utiliza esse "fato" para demonstrar a construção do triângulo equilátero, formado pelos raios das duas circunferências.



Mas, partindo unicamente das bases lógicas que Euclides nos fornece, não é possível afirmar que as circunferências *vão de fato se interceptar*, pois nada se diz acerca da *continuidade* da linha que forma as circunferências[71]. Esse pormenor, talvez de aparência

[71] Cf. TRUDEAU, Richard J. *The Non-Euclidean Revolution*. Boston: Birkhauser, 1987. 269 p., p. 46

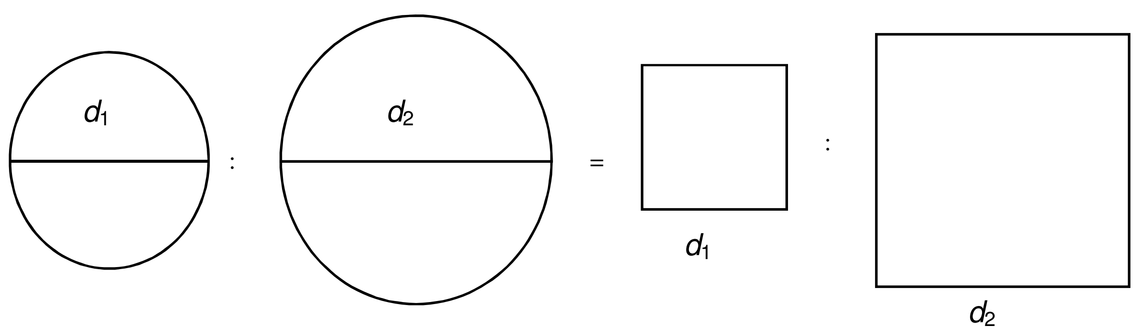
insignificante, é na verdade uma manifestação de uma visão que irá influenciar na criação do Cálculo Diferencial e Integral. É por causa desses pormenores, como a falha da continuidade de Euclides, que a Matemática grega não chegou ao Cálculo já na Antigüidade.

Como diz Boyer:

> Os Elementos *baseiam-se em "intuição refinada" e não deixavam espaço livre para a "intuição ingênua" que viria a tornar-se especialmente ativa na gênese do Cálculo no século dezessete.*[72]

A diferença entre estes dois tipos de *intuição* fica mais patente nos trabalhos que marcam a evolução pós-Euclides, principalmente nas obras de Arquimedes. Para verificarmos de que forma os gregos estavam próximos do Cálculo, é preciso explicar antes o *Método de Exaustão* de Eudoxo e a utilização que dele fez Arquimedes.

Conforme já vimos, o conceito de *proporção* dos pitagóricos, associando a razão entre dois segmentos de reta à razão entre números inteiros, não podia ser aplicada no caso das *grandezas incomensuráveis*. Eudoxo[73], aluno de Platão, propôs então uma outra definição de proporção, de caráter mais geral, permitindo que os quatro termos da proporção fossem todos grandezas geométricas, evitando por completo qualquer extensão à ideia pitagórica de número. Desse modo, Eudoxo constrói um instrumento útil que podia ser manuseado sem haver misturas entre números e grandezas geométricas, isto é, sem ferir o modo de pensar grego. Podia-se já falar de "a razão entre as áreas de *dois círculos*" como sendo equivalente a "a razão entre os quadrados construídos sobre os diâmetros dos círculos", conforme a figura abaixo:




Com esse instrumento em mãos, Eudoxo desenvolve o seu *Método da Exaustão*, que se baseia num princípio que acabará por ficar conhecido como *Postulado de Arquimedes*, embora o mesmo o atribua a Eudoxo[74]. O enunciado desse axioma é dado por Euclides X, 1, dizendo que, dadas duas grandezas diferentes (ambas não nulas),

> *se da maior subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, e do que restou subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, repetindo esse processo continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor grandeza dada.*[75]

O que há de fantástico nesta definição é que exclui o *infinitesimal* de todas as demonstrações geométricas dos gregos. Além disso, permite raciocinar sem ultrapassar a compreensão intuitiva clara, pois Eudoxo não propõe ir até o infinito para de fato atingir o limite, mas apenas afirma que se pode chegar a uma grandeza tão pequena quanto qualquer outra dada.

A diferença entre o *método de exaustão* e o *limite* do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de os gregos não realizarem essa *passagem ao infinito*, pois não tinham noção de um *continuum* aritmético. Mas o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual *limite* quanto no *método de exaustão* geométrico. Pode-se talvez dizer

[72]BOYER, C. B. Op. cit., p. 47
[73]Cf. HEATH, Thomas Litle. *A History of Greek Mathematics*. New York, Dover, 1981. Vol. I, pp. 323-325
[74]Cf. HEATH, T.L. Op. cit., pp. 327-28
[75]EUCLIDES. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Trad. e com. por Thomas Little Heath. 2ª ed. New York, Dover, 1956. 13vols. em 3 vols. Vol. III, p. 14

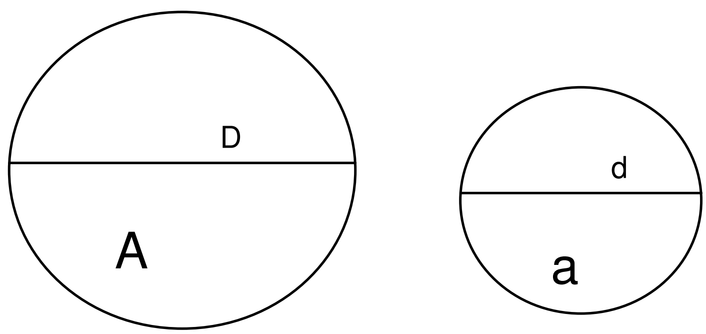
que a noção de limite tivesse sido vislumbrada pelos gregos, como se poderia inferir do fragmento de Aristóteles citado na epígrafe:

> *Minha teoria não tira nada às considerações dos matemáticos, ao suprimir o infinito que existiria em ato segundo o acréscimo infinito, que não se poderia recorrer: pois os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram*[76].

Vejamos com um exemplo como é possível a comparação entre o *método de exaustão* e o *uso do conceito de limite*[77]. A proposição, já mencionada, de Euclides XII, 2, de que as áreas de círculos estão na mesma razão que as áreas dos quadrados de lado igual aos seus diâmetros, é demonstrada da seguinte forma:

Se ***A*** e ***a*** são as áreas dos círculos de diâmetros ***D*** e ***d*** respectivamente, então temos que provar que

$$a : A = d^2 : D^2.$$




Supondo. por absurdo, que não seja assim. Então haverá uma outra área ***a'*** de modo que $a' : A = d^2 : D^2$. Se ***a'*** for *menor* que ***a***, então no círculo de área ***a*** podemos inscrever um polígono de área ***p*** tal que ***p*** seja *maior* que ***a'*** e *menor* que ***a***. Isso é sempre possível, pelo *princípio da exaustão* (Proposição de Euclides X, 1), que diz que se de uma grandeza (como, no caso, a diferença entre ***a*** e ***a'***), retirarmos mais do que sua metade, e da diferença mais do que a metade, e assim por diante, a diferença pode ser feita *menor* que qualquer grandeza dada. Se ***P*** é a área de um polígono semelhante inscrito no círculo de área ***A***, então sabemos que $p : P = d^2 : D^2 = a' : A$. Mas como $p > a'$, então $P > A$, o que é absurdo, uma vez que o polígono está inscrito no círculo. De um modo similar pode ser demonstrado que a suposição $a' > a$ leva igualmente a uma contradição, e a verdade da proposição fica estabelecida.

Note-se que o *método da exaustão* não exige que o polígono inscrito chegue a *coincidir* com o círculo, mas apenas lida com o fato de a diferença poder ser tão pequena quanto desejarmos. Daí que ele seja similar em temos de *raciocínio* com o uso de limites.

Por exemplo, se considerarmos a sequência infinita $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ como sendo as áreas dos polígonos inscritos, teríamos um limite ***C*** tal que, dado qualquer número positivo $\varepsilon$, podemos encontrar um outro inteiro positivo ***N***, tal que para $n > N$ pode ser demonstrado que

$$|C - P_n| < \varepsilon .$$

Essa é uma formulação, em termos de limites, do raciocínio de Eudoxo. Só que na linguagem dos limites não se faz uso de noções intuitivas de área, nem de tentativas de imagens sensoriais que ilustrem o que está acontecendo em cada passo. Os limites

[76]ARISTÓTELES, *Física*, 207 b 28. Cf. DESANTI, Jean T. *Una Crisis de Desarrollo Ejemplar: El "Descubrimiento" de los Numeros Irracionales.* Apud: PIAGET, Jean (Org.) *Tratado de Lógica y Conocimiento Cientifico.* Volumen III: *Epistemologia de la Matemática.* Buenos Aires, Paidos, 1979., 523 p., p. 57

[77]Cf. EUCLIDES. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Trad. e com. por Thomas Little Heath. 2ª ed. New York, Dover, 1956. 13vols. em 3 vols. Vol. III, pp. 371-78

simplesmente lidam com símbolos pré-definidos, sem se preocupar com qualquer visualização mental, mas apenas com as possibilidades fornecidas pelas definições adotadas[78]. Essa expressão formalizada da noção de limite data do século XIX. Mas as ideias já estavam no mundo grego.

Segundo Boyer, as ideias fundamentais do Cálculo só não se desenvolveram mais na Grécia devido ao fato de que

> *a Matemática grega não incluía um conceito geral de número e, conseqüentemente, nenhuma noção de uma variável contínua algébrica sobre a qual tais teorias pudessem ser logicamente baseadas*[79]*.*

Seja como for, o surgimento do Cálculo no século dezessete está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos, como o *método da exaustão*[80]. Para avaliar até que ponto chegaram os gregos, basta verificar que Arquimedes (287-212 aC) realizou o ***Cálculo da área sob a parábola***[81] antecipando-se, assim, em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral[82]. Em sua obra *O Método*[83], Arquimedes chega ao resultado de que um segmento parabólico é 4/3 do triângulo de mesma base e vértice (o vértice do segmento é o ponto a partir do qual a perpendicular à base é maior).

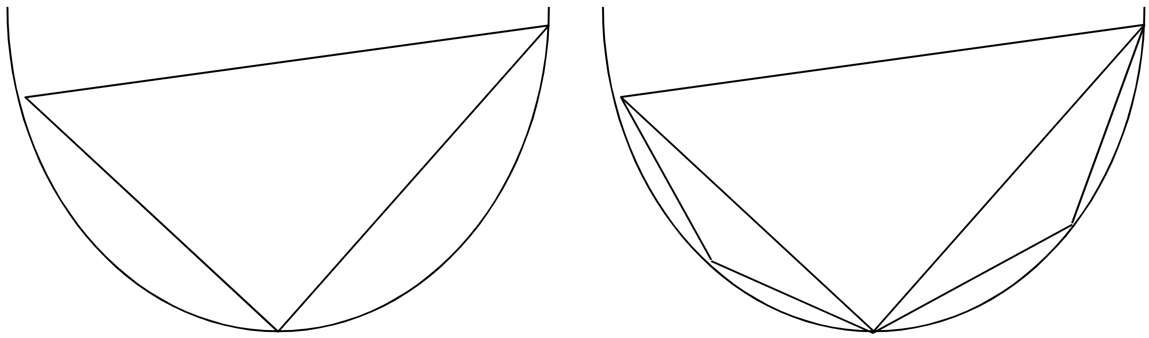
A base do método de Arquimedes está em considerar que superfícies são constituídas por retas. Não sabemos se considerava que haveria *infinitos segmentos* de retas compondo a área de uma figura. Parece que considerava-os como *indivisíveis*, pois chegava a muitos resultados pelo método da balança, usando o princípio do nivelamento como quem estivesse pesando mecanicamente uma coleção de lâminas finas ou de fitas de algum material pesado[84].

Arquimedes, após obter um resultado pelo seu *método mecânico,* demonstrava-o pelo *método da exaustão*[85]. Para *provar* o resultado obtido para a área sob a curva da parábola, Arquimedes inscreve no segmento parabólico um triângulo de área *A*, tendo a mesma base e vértice que o segmento, e mostra que a área do segmento parabólico tem área $\frac{4}{3}A$. Dentro de cada um dos segmentos menores tendo os lados do triângulo como base, ele inscreve triângulos similares. Prosseguindo da mesma forma, ele obteve uma série de polígonos com um número crescente de lados.

Arquimedes então demonstra que a área do n-ésimo polígono é dada pela soma de uma série. Arquimedes não achou o limite da série, apenas encontrou a soma dos n termos e acrescentou o restante, que pode ser feito *tão pequeno quanto quisermos.* Mas é importante frisar que Arquimedes não usa a noção de *limite* e sim o princípio da exaustão, o qual permite considerar que a área do segmento parabólico não podia ser nem maior nem menor que o valor obtido, que é $\frac{4}{3}A$.

---

[78]Cf. BOYER, Carl Benjamin. *The History of Calculus and its Conceptual Development*. New York, Dover, 1959. 346 p., p. 36
[79]Cf. BOYER, op. cit., p. 29
[80]Cf. BOYER, op. cit., p. 36
[81] YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 310-2
[82]Cf. BOYER, Carl Benjamin. *The History of Calculus and its Conceptual Development*. New York, Dover, 1959. 346 p., pp. 49-50
[83]Cf. Trad. de HEATH em *The Method of Archimedes.* Cambridge: University Press, 1912. 51 p., p. 17
[84]Cf. BOYER, op. cit., p. 50
[85]Cf. BOYER, op. cit., p. 51



Para definir $\frac{4}{3}A$ como a *soma de uma série infinita*, Arquimedes precisaria valer-se de um conceito geral de ***número real***, o qual não estava disponível em sua época[86]. Segundo Edwards[87], faltava a Arquimedes a noção de *passagem ao limite*, pois ele partilhava com os gregos do chamado *horror ao infinito*.

Como conclui Boyer[88], é incorreto imputar a Arquimedes as ideias expressas na Integral e na Derivada, pois ele se servia de considerações infinitesimais apenas para *indicar* o resultado, e não para *prová-lo.*

O estudo da Matemática grega mostra como as ideias originais do Cálculo têm início em considerações que envolvem tanto noções de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas, servindo ambas para se chegar aos resultados do Cálculo.

Assim, será também por estes dois caminhos - ambos igualmente úteis - que surgirá o reconhecimento da relação inversa entre problemas de área e de tangente a uma curva, que é o cerne do Teorema Fundamental do Cálculo. Mas isso somente irá aparecer de maneira explícita nos trabalhos de Newton e Leibniz, na segunda metade do século XVII.

# Newton e Leibniz: dois Caminhos para o Cálculo

Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) chegaram ao Cálculo através de caminhos diferentes. Não só é diferente a linguagem com que ambos expressaram as ideias fundamentais do Cálculo, mas também em termos de concepção pode-se verificar uma diferença grande entre os trabalhos destes homens. Tanto Newton quanto Leibniz podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo. Mas a maneira de ver o Cálculo era distinta.

Constatar a diferença entre os dois pontos de vista é muito interessante para o nosso estudo. Analisando os fundamentos da teoria do Cálculo, Robinson, o criador da análise não-standard, identifica dois modos distintos de trabalhar as ideias básicas:

> *No que se refere aos fundamentos do novo assunto, Newton vacilava, referindo-se às vezes aos infinitesimais, às vezes aos limites, e às vezes a uma intuição física básica, e seus sucessores imediatos deram preferência a essa última abordagem. Por outro lado, Leibniz e seus seguidores basearam o desenvolvimento da teoria sobre os diferenciais infinitamente pequenos, de primeira e segunda ordem.* [89]

Boyer, ao escrever a história do desenvolvimento conceitual do Cálculo, mostra que, de modo geral, podemos dizer que Newton baseou seu Cálculo em noções de continuidade, enquanto Leibniz tomou como base a ideia discreta das mônadas. Diz Boyer:

---

[86] Cf. BOYER, op. cit., p. 52
[87] Cf. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. New York, Springer-Verlag, 1979. 351 p., p. 75
[88] Cf. BOYER, op. cit., p. 59
[89] ROBINSON, Abraham. *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1974. 293 p., p. 260

> *Newton, o cientista, encontrou na noção de velocidade a base que para ele parecia satisfatória; Leibniz, o filósofo, que era também tanto teólogo quanto cientista, preferia encontrar a base na diferencial, a contrapartida em pensamento da mônada, que deveria desempenhar um papel tão grande no seu sistema metafísico*[90].

Podemos dizer assim que, em termos de tendência, ou estilo, Newton teria chegado ao Cálculo pela via do contínuo, e Leibniz, pela via do discreto. Ambas as maneiras de abordar o problema mostraram-se igualmente úteis, pois, enquanto não estava estabelecida a noção de limites, as ideias de movimento contínuo e de infinitésimos discretos surgiram como tentativas de esquematizar as impressões sensíveis a respeito da variação. Diz Boyer:

> *Isso explica porquê o Cálculo, nos estágios iniciais do seu desenvolvimento, estava cercado com conceitos de geometria do movimento, e com explicações de indivisíveis e infinitamente pequenos; pois estas ideias eram sugeridas pela intuição e experiência ingênuas de continuidade.*[91].

A percepção da relação inversa entre a derivada e a integral, e a formulação de regras de procedimento para se obter derivadas e integrais, podem ser tomados como a essência da criação do Cálculo. Para chegar a esses conceitos, Newton segue o caminho constituído pela manipulação da noção contínua de velocidade e movimento.

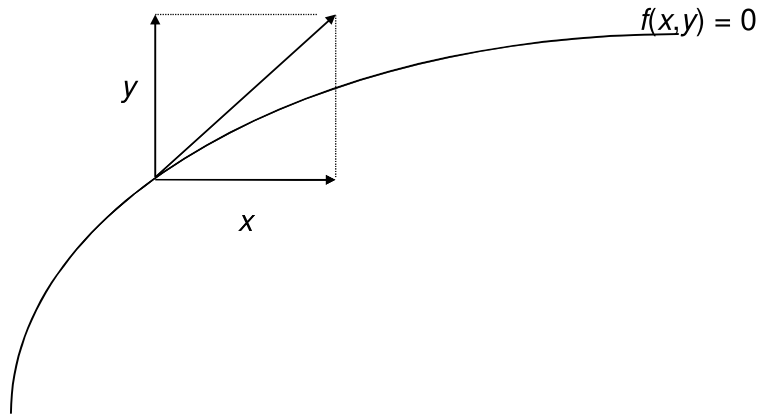
Newton trabalhava com quantidades variáveis que tinham um significado baseado na noção de movimento contínuo, considerando-as fruto do movimento contínuo de pontos, retas, e planos. Ele não considerava as variáveis como *agregados de elementos infinitesimais*[92]. Ao longo de seu trabalho, Newton fez referência aos infinitésimos; mas foi removendo qualquer referência a eles ao longo do seu trabalho, até chegar a considerar que quantidades matemáticas não deveriam ser constituídas por *momentos* ou *partes muito pequenas*, mas sim como descritas pelo movimento contínuo.[93]. Newton sentia-se incomodado em interpretar suas proposições em termos de infinitesimais, preferindo usar *velocidades*, que também chamava de *movimentos*, *mutações*, ou *fluxões* de quantidades. Assim, Newton refere-se ao seu Cálculo como o *Método das Fluxões,* e afirma acerca dele:

> *Procurei demonstrar que no método das fluxões não é necessário introduzir na geometria números infinitamente pequenos* [Opera omnia*, I, 333*].[94].

A *fluxão* de Newton é uma velocidade finita, e não uma quantidade infinitamente pequena. Para Newton, as variáveis eram todas consideradas como *quantidades fluentes*. Newton constrói o Cálculo utilizando conceitos mecânicos, *cinemáticos*, para expressar as variáveis, o que seria, em linguagem de hoje, considerá-las em função do tempo. Para Newton, o conceito fundamental do Cálculo é eminentemente cinemático, e a ideia central é a de *fluxão x,* vetor velocidade de *x*, ou taxa de mudança da variável. Trata-se da decomposição no eixo *x* do vetor velocidade do ponto[95].

---

[90]BOYER, op. cit., p. 213
[91]BOYER, op. cit., p. 11
[92]BOYER, op. cit., p. 193
[93]BOYER, op. cit.; p. 195
[94]BOYER, op. cit., p. 202
[95] Cf. EDWARDS, p. 192




Já Leibniz tem outra maneira de encarar as coisas. Para Leibniz, a visualização do Cálculo se dá de forma estática:

> *Leibniz considerava as variáveis como percorrendo sequências de valores infinitamente próximos. No seu Cálculo há pouco uso de conceitos de movimento.*[96].

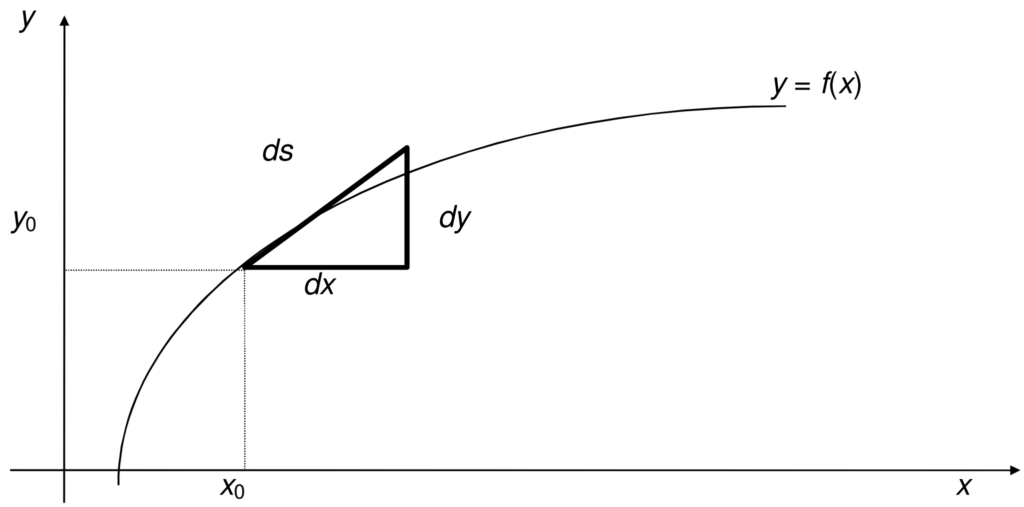
Leibniz julgava necessários os infinitésimos, e tecia sobre eles analogias, buscando uma visualização do Cálculo através de considerações discretas, através do diferencial. A diferencial de uma variável $y$ é a diferença ($dy$) entre dois valores consecutivos de y em uma sequência de números infinitamente próximos[97].

> *A diferencial de uma quantidade pode ser imaginada como tendo em relação à própria quantidade uma razão análoga àquela de um ponto para com a Terra ou o raio da Terra para com o raio do Universo*[98].

Esses valores tinham de ser infinitamente pequenos[99], para obter a reta tangente à curva no ponto $(x_0,y_0)$ dado. Para cada ponto $(x,y)$ na curva podemos formar o "triângulo característico" $dx$, $dy$, $ds$ ($ds$ é a diferencial do comprimento do arco $s$). Se o segmento de reta $ds$, infinitamente pequeno, for prolongado, formará a tangente à curva em $(x,y)$.[100]

---

[96]BARON, Margaret E. & BOS, H.J.M. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*. Brasília, Editora da UnB, 1985. 5 v., v. 3, p. 70
[97] Cf. BARON & BOS, v. 3, p. 58
[98]BOYER, op. cit., p. 212
[99]BARON & BOS, op. cit., p. 70-71
[100] Cf. EDWARDS, p. 233




Vemos assim que tanto o "*caminho discreto*" de Leibniz quanto o "*caminho contínuo*" de Newton irão desembocar na teoria do Cálculo, que terá uma evolução posterior no sentido de definir melhor o que eram os números reais e a ideia de limite.

## Discreto/Contínuo na Formalização do Cálculo

A visão discreta de Leibniz e a visão contínua de Newton foram ambas igualmente úteis para compor o cenário para o Cálculo que estava nascendo. As preocupações metafísicas de Newton e Leibniz levaram ambos a tentar esclarecer a natureza do "ser" das variáveis e dos fenômenos relacionados a elas. Essas explicações iniciais serviram para dar sustentação a esse período inicial do Cálculo, até que a matemática evoluísse mais para poder ultrapassar a visão dicotômica entre o discreto e o contínuo.

Assim, afirma Boyer:

> *Somente após o desenvolvimento do conceito geral abstrato de número real o caminho estava claro para interpretar ambos os cálculos fluxionário e diferencial em termos de limite de uma sequência infinita de razões ou números; mas essa interpretação não tornou-se aceita ainda por mais um século.*[101]

Ambas as abordagens de Newton e Leibniz são portanto caminhos para se chegar ao mesmo fim. O Cálculo moderno é, em essência, o mesmo que eles criaram, mas com uma linguagem e uma abordagem conceitual bem distinta de ambos:

> *No Cálculo moderno a operação de diferenciação associa uma função a uma derivada. Para Leibniz, a diferenciação associava uma diferencial infinitamente pequena a uma variável. Para Newton, tomar fluxões significava associar uma velocidade finita a uma variável. Portanto, a concepção da operação fundamental nos cálculos de Newton e Leibniz era totalmente diferente do conceito de diferenciação que está em uso no Cálculo moderno.*[102]

Mas para chegar à formulação moderna do Cálculo era necessário voltar a pensar sobre a ideia de número e a natureza da reta real. Em 1826, Cauchy estabelece a noção de limites, em certa medida elaborando em linguagem matemática uma estrutura flexível dentro da qual as noções de discreto e contínuo pudessem ser trabalhadas. Com a ferramenta da noção de limite, Weierstrass (1815-1897) formaliza o Cálculo, introduzindo a linguagem dos *Épsilons e Deltas*.

Explicam Baron & Bos:

> *Tanto no Cálculo de Newton quanto no Cálculo de Leibniz existiam problemas graves sobre a consistência lógica dos conceitos fundamentais - a fluxão*

[101]BOYER, op. cit., p. 216
[102]BARON & BOS, op. cit., p. 73

*(definida por razões últimas) e a diferencial (como diferença infinitamente pequena). No Cálculo moderno essas dificuldades quanto aos fundamentos são esclarecidas pelo uso de um conceito bem definido de limite. Por isso não encontramos no Cálculo moderno as quantidades infinitamente pequenas.*[103]

Os dois caminhos percorridos por Newton e Leibniz se encontraram em um mesmo ponto, o Cálculo. Conseqüentemente, o Cálculo é o “reino” onde interagem de modo especial o discreto e o contínuo. Para chegar a uma melhor definição do Cálculo, foi necessário elaborar a teoria sobre o *contínuo*, e tentar compreender a natureza da reta real. O Cálculo irá se apoiar assim sobre os números reais, e sobre a ideia de limite.

Foi Georg Cantor (1845-1918) quem chamou a atenção para a continuidade da reta real, ainda não suficientemente explicada. Cantor propôs a construção de um conjunto especial de pontos, chamado de *Conjunto de Cantor* ou *Poeira de Cantor*. Esse conjunto tem grande importância histórica, e pode ser considerado o mais simples dos fractais. Segundo Young:

*Cantor foi levado ao conjunto que agora leva seu nome em seus esforços para esclarecer as características essenciais de um contínuo matemático - e portanto cobrir a distinção entre um conjunto de pontos contínuo e discreto.*[104]

A construção do conjunto de Cantor começa com o intervalo unitário [0,1], representado como um segmento de reta. Primeiro removemos um terço central, o que nos deixará com dois segmentos, [0,1/3] e [2/3,1]. Então removemos um terço central de cada segmento, e assim por diante, indefinidamente:

O que resulta é a chamada *Poeira de Cantor*, conjunto denotado por *C*. Ora, calculando o que foi removido, vemos que seu comprimento é

$$1/3 + 2(1/3)^2 + 4(1/3)^3 + ... = 1.$$

Isso mostra que o processo de retirada dos *terços* esgota completamente o intervalo [0,1], e que o “comprimento” de *C* é zero. Entretanto, o espantoso é que existe um função

$$f : C \to [0,1]$$

a qual mapeia *C* sobre o intervalo unitário, mostrando que *C* tem a mesma cardinalidade que o intervalo [0,1]. [105]

Com esse tipo de exploração do contínuo, foi-se chegando a um conceito mais sofisticado e abstrato de número real. Cantor elabora, em suas pesquisas, a hipótese do contínuo, definindo a continuidade da reta real com relação ao infinito enumerável do conjunto dos racionais.

*Na teoria dos conjuntos cantoriana, o número cardinal de um conjunto designa sua “quantidade de elementos”. A cardinalidade do conjunto dos inteiros 1, 2, 3, ... é representada por* $\aleph_o$. *A cardinalidade do conjunto dos números reais é* $2^{\aleph_o}$. *A hipótese do contínuo afirma que não há nenhum conjunto cujo cardinal esteja entre* $\aleph_o$ *e* $2^{\aleph_o}$. [106]

---

[103] BARON & BOS, op. cit., p. 73

[104] YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 320

[105] Cf. YOUNG, op cit, p. 321

[106] DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben. A Experiência Matemática. (2a ed.) Trad. João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985. 481 p., p. 457

O contínuo tem uma potência infinitamente superior ao infinito enumerável, e não existe potência "entre" a potência do infinito enumerável e a potência do contínuo[107]. Cantor fornece a característica fundamental do contínuo: todos os pontos de um contínuo são pontos de acumulação. Dedekind (1831-1916), com seus cortes para representar os reais, logra expressar claramente a continuidade da reta real através na noção de conjuntos, permitindo trabalhar com quaisquer grandezas, racionais ou irracionais, dentro de uma estrutura algébrica, não geométrica. A definição dos números reais como construções por meio de certos processos de limite começando com os números naturais constituiu-se no que veio a chamar-se a "aritmetização da análise".[108]

Conforme comenta Da Costa, a representação matemática da ideia de discreto através da sucessão dos números naturais, torna-se a base do arquétipo da continuidade, que é a reta real. Mas prossegue Da Costa:

> *No entanto, a relação entre a ideia do discreto e a continuidade na Matemática contradiz nossa intuição de que ambos os conceitos de algum modo situam-se no mesmo nível; dentro da nossa tradição matemática, o discreto aparece como a propriedade fundamental, enquanto que o contínuo é subordinado a ele.(...) Assim, dentro da nossa compreensão usual de sobre o que é a Matemática, a ideia do contínuo repousa rigidamente subordinada à do discreto.* [109]

Desse modo, mesmo bem definido matematicamente, o contínuo continua a desafiar a mente com um problema de ordem epistemológica, colocado por Caveing do seguinte modo: *O contínuo é um dado primitivo e intuitivo, ou uma construção matemática?*[110] Da Costa sugere algumas linhas de pesquisa que permitam obter estruturas contínuas antes de estruturas discretas, a fim de estabelecer, dentro da Matemática, uma relação entre parceiros iguais. Essas indagações sobre a interação entre discreto e contínuo traduzem-se em um problema de base do Cálculo. Petitot comenta essa dificuldade da base da análise:

> *Ora, se se remonta do seu formalismo de base - a saber, o formalismo diferencial - até ao seu conceito primitivo - a saber, o de infinitesimal -, depara-se com uma contradição. Com efeito, dada a estrutura arquimediana da reta real, uma quantidade infinitesimal é necessariamente nula; sendo o contínuo divisível sem resto até ao infinito, não poderiam aí existir nem "átomos" indivisíveis fazendo parar o processo de divisão, nem infinitamente pequenos que o excedam.*[111]

Esse paradoxo dos infinitesimais só se resolve, aponta Petitot, pelo método da análise não-standard de Robinson, que de certo modo restabelece a relação entre discreto e contínuo. Em 1960, Abraham Robinson provou que os infinitésimos podem ser definidos de modo a fornecer uma estrutura rigorosa para o Cálculo. A análise não-standard tem a mesma consistência interna que o Cálculo baseado em números reais e limites. Comenta Young sobre a análise não-standard de Robinson:

> *Apesar de o tema estar ainda na sua infância e seu futuro estar longe de ser claro, ainda assim constitui-se em um esforço para construir uma ponte cobrindo o espaço existente entre o contínuo e o discreto.*[112]

A análise não-standard faz parte portanto dessa tentativa de construir um fundamento sólido, ligando o discreto ao contínuo, para as ideias do Cálculo Diferencial e Integral. Ao comentar sua própria criação, Robinson chama a atenção para o fato de que a teoria do Cálculo somente veio a ser bem fundamentada muito tempo depois de suas bases estarem lançadas:

---

[107] Cf. KOYRÉ, Alexandre. *Estudos da História do Pensamento Filosófico.* Trad. de Maria de Lourdes Menezes. São Paulo: Forense Universitária, 1991. 296 p., p. 16
[108] Cf. BARON & BOS, op. cit., v. 4, p. 55
[109] DA COSTA, Newton C. A. & DORIA, F. A. *Continuous & Discrete: A Research Program.* IN: Bol Soc. Paran. Mat. (2a Série), v. 12/13, n. 1/2. Curitiba: Ed. da UFPR, 1991/2, pp. 123-127, p. 124
[110] CAVEING, op. cit., p. 145
[111] PETITOT, Jean. *Infinitesimal.* IN: *Enciclopedia Einaudi*, Vol. 4 (*Local/Global*). Trad. João Sàágua. Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1985. pp. 209-285, p. 209
[112] YOUNG, op.cit., p. 197

> *Penso que nos séculos futuros será considerado algo muito estranho na história da matemática que a primeira teoria exata dos infinitesimais foi desenvolvida 300 anos após a invenção do Cálculo diferencial.* [113]

Na verdade. não é nada incomum na história da Ciência, que a formalização venha muito tempo depois da criação. Acompanhando a história do Cálculo, vemos que suas ideias iniciais tiveram sua origem nas tentativas de compreensão da relação entre o discreto e o contínuo, já desde a visão estática grega, quebrada em parte pela descoberta pitagórica dos incomensuráveis, que deram a largada na corrida em busca de definições satisfatórias de número e infinito. A distinção entre o Repouso e o Movimento fará parte dessa busca. A consideração do movimento, fonte de inquietação no tempo de Zeno, acabou por abrir caminho a uma nova forma de abordar a relação entre o discreto e o contínuo, permitindo a criação do Cálculo Diferencial e Integral. Leibniz, com suas mônadas e infinitésimos, chegou ao Teorema Fundamental do Cálculo pela via do *discreto*. Newton, praticamente ao mesmo tempo, com seus fluxões, pela via do *contínuo*.

Na essência do Teorema Fundamental do Cálculo estava a relação entre o discreto e o contínuo, ainda que de início latente aos olhos dos primeiros desbravadores do Cálculo. Baron & Bos afirmam que a tradição atribuiu a Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz um papel central na "invenção" do Cálculo, *ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens (...)*[114]. Somente na formalização deste é que se pode dizer que os matemáticos chegaram a uma compreensão mais global da relação entre o discreto e o contínuo, com Weierstrass, Dedekind e Cantor, esse "grande triunvirato" na expressão de Boyer[115], que foram sem dúvida os responsáveis maiores pelo estabelecimento das definições necessárias de número e infinito. Conforme afirma Boyer,

> *a Derivada e a Integral são, em última análise, sinteticamente definidas em termos de considerações ordinais e não de quantidade e variação contínuas. São, entretanto, os resultados de tentativas de esquematizar nossas impressões sensíveis dessas últimas noções.*[116]

Finalmente, parece repousar sobre a análise não-standard de Robinson a possibilidade de se obter uma teoria que esquematize essas impressões, de modo a apoiar o Cálculo sobre a base sólida da interação discreto/contínuo.

Acabamos de ver, portanto, que o início do Cálculo, quer nas primeiras tentativas gregas quer na obra de Newton e Leibniz, se dá na consideração de fenômenos tanto de natureza discreta quanto contínua. Ambos os caminhos são interessantes e levam ao mesmo Cálculo, servindo inclusive de ponte de ligação entre as nossas impressões mais intuitivas e sensíveis para as análises mais isentas de referências à intuição, como no caso da técnica dos limites.

No Cálculo Diferencial e Integral, a sequência histórica mostra uma ordem lógica de construção do Cálculo que é bem distinta da sequência geralmente adotada nas escolas. A noção de limite é cronologicamente bastante posterior às noções fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, tal como as apresentavam Newton e Leibniz. Mas nos currículos de Matemática elementar em geral, dá-se não só uma inversão histórica - colocando Limites antes das noções de derivada, por exemplo -, mas também uma inversão, digamos assim, de *valores*: as derivadas são encaradas como sendo Limites, de modo que a ênfase do estudo recai sobre a noção de limites, e não sobre as ideias do Cálculo em si.

O estudo histórico das dificuldades da compreensão da relação entre o discreto e o contínuo e útil para estruturar o ensino de Cálculo de modo significativo. Mas o principal é chegar a uma compreensão do papel característico próprio de cada noção, de grandezas discretas e contínuas, de modo a permitir a administração conceitual de ambas no ensino do Cálculo, uma vez que formam uma dualidade de caráter complementar para a construção das ideias de Derivada e Integral.

---

[113] ROBINSON, Abraham. *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1974. 293 p., p. x

[114] BARON, Margaret E. & BOS, H.J.M. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo.* Brasília, Editora da UnB, 1985. 5 v., v. 3, p. 5

[115] Cf. BOYER, op. cit., p. 298

[116] BOYER, op. cit., p. 11

A seguir, falaremos sobre a relação entre os pares qualidade/quantidade e discreto/contínuo, para completar nosso estudo sobre a importância de se levar em consideração ambos os aspectos das grandezas. Entendemos que sem referência à discussão a respeito da qualidade e da quantidade ficaria muito pobre nosso estudo sobre o discreto e o contínuo, pois deixaríamos de lado fatos muito interessantes a respeito das ideias de medida, de contagem e de avaliação.

# Capítulo 3

# O Par Discreto/Contínuo e a Relação Quantidade/Qualidade

> Neste Capítulo estudamos as relações entre qualidade/quantidade em referência ao par discreto/contínuo, examinando a presença do contínuo geométrico e das componentes qualitativas da Matemática na interação entre qualidade e quantidade. O papel da avaliação da aprendizagem é discutido, examinando-se a possibilidade de se avaliar a inteligência e os limites da ideia de medida de conhecimento.

*Qualitative is nothing but poor quantitative.*

Rutherford[117]

*Todo mundo acredita nisso, os experimentalistas porque acham que é um teorema matemático, os matemáticos porque acham que é um fato experimental.*

Lippmann[118]

*Há assim como que um escândalo metodológico, uma alienação epistemológica, uma clivagem ontológica, em poucas palavras, uma lacuna que exige uma elucidação.*

Petitot[119]

Existe uma conexão profunda entre as noções de *discreto* e *contínuo* e os termos *quantidade* e *qualidade.* Tal relação é particularmente interessante para nosso trabalho. Iremos neste capítulo explorar um pouco a conexão entre os dois pares de conceitos. Embora discreto e contínuo sejam ambos tipos de quantidades, na verdade há muitos qualitativos envolvidos na interação entre ambos. Para compreendermos melhor a tensão entre discreto e continuo, não podemos deixar de estudar o par qualidade/quantidade. Ao longo da história da Ciência, entre essas duas noções oscilou um pêndulo, ora favorecendo ora outra.

## O qualitativo versus o quantitativo na História da Ciência

Os aspectos qualitativos da realidade estão associados ao desenvolvimento da linguagem natural. A linguagem humana tenta apreender o mundo através das suas propriedades, dando adjetivos às coisas. O termo *qualidade* é utilizado para referir-se às propriedades de um objeto, como a cor, o aroma e o sabor de um bom vinho. Ao estudar algumas propriedades específicas, como a extensão do caule de uma flor ou o número de abelhas em uma colmeia, passam-se a utilizar os termos que pertencem ao gênero da *quantidade*, tradicionalmente em referência ao mundo das coisas que se medem ou se contam uma a uma.

---

[117] Cit. in. THOM, René. *Qualidade/Quantidade.* IN: *Enciclopedia Einaudi*, Vol. 10 (*Dialéctica*). Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1988, pp. 226-242, p. 234

[118] G. Lippmann (Físico Francês, 1845-1921). Cit. in. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 206

[119] PETITOT, Jean. *Infinitesimal*. IN: *Enciclopedia Einaudi*, Vol. 4 (*Local/Global*). Trad. João Sàágua. Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1985. pp. 209-285,

Aparentemente, a quantidade é um caso particular da qualidade, e cada termo possui seus usos específicos. Entretanto, o âmbito de cada termo não é tão delimitado, e não é clara a subordinação da quantidade à qualidade, nem vice-versa. Ambas concorrem igualmente para apreensão do real, e são definidas por mutua recorrência.

Piaget, estudando a epistemologia genética, remonta à íntima associação entre os termos qualidade/quantidade, que chegam a ser indissolúveis:

> *Mas afirmar que a qualidade e a quantidade sejam indissolúveis não significa absolutamente que sejam idênticas: simplesmente uma é tão primitiva quanto a outra, a partir do ponto de vista genético, e culminam, em seu estado de equilíbrio operatório, em uma forma de solidariedade tal que não se poderia definir uma sem recorrer a outra*[120]*.*

Essa mútua recorrência não implica em subordinação de uma pela outra, em que uma delas deixa de existir. Procurou-se muitas vezes conciliar e fundir as noções de qualidade e quantidade, seguindo a tendência unificadora ou uniformizadora. Conforme comenta Thom[121], nessa construção histórica, com freqüência, houve tentativas de reduzir, em última instância, a ideia de qualidade a uma faceta da quantidade, ou vice-versa.

Em seu artigo sobre qualidade/quantidade, Thom aponta que já Pitágoras procurava explicar a realidade do mundo reduzindo-o aos critérios da quantidade. Conforme vimos, observando a relação entre as notas musicais e o comprimento das cordas vibrantes que as produziam, teria ele criado a concepção de que "tudo é número", isto é, as quantidades justificariam o modo de ser das coisas.

Mesmo na época de Pitágoras, essa tentativa "quatificadora" da realidade encontrou obstáculos sérios, pois há um duplo aspecto dentro da própria ideia de quantidade. Os pitagóricos não chegaram à total compreensão de que existem *quantidades discretas*, obtidas por meio de contagem de objetos, e *quantidades contínuas*, representadas pelas grandezas em referência às medidas (de comprimento, tempo, etc.). Essa dualidade causará, no seio da escola pitagórica, a chamada *crise dos incomensuráveis*, originada das dificuldades de construção dos números irracionais, aparentemente incompatíveis com a noção de número que possuíam. A partir daí, os gregos farão uma opção radical pelos métodos geométricos, a chamada *fuga na Geometria*.

A preferência pela Geometria ficará imortalizada na atitude de Platão, que elegeu a Geometria como um pressuposto fundamental para o acesso ao conhecimento, sendo a única expressão adequada das Ideias. Essa escolha teve como consequência, entre outras, a estruturação de *Os Elementos* de Euclides a modo geométrico.

Segundo Thom, foi Aristóteles quem soube reintroduzir plenamente a qualidade no campo filosófico, após Platão, possivelmente vislumbrando já o poder da atividade lingüística na apreensão do mundo real. Aristóteles (384-322 aC) desenvolveu, em seu *Organon*[122], ou Instrumento da Ciência, os fundamentos da lógica, valorizando o papel da linguagem como modo de compreender o universo.

Conforme afirma Machado:

> *Aristóteles restaura em parte a dignidade do mundo empírico, revigorando o significado do predicado, da qualidade, como contraponto para certa superestimação das relações numéricas, do quantitativo, presente em muitos de seus antecessores*[123]*.*

Na Ciência medieval, a ausência dos componentes quantitativos fará empobrecer a análise dos fenômenos, e permitirá o surgimento de doutrinas nominalistas que contribuem para frear o desenvolvimento científico. A supervalorização da linguagem subsistirá durante boa parte da Idade Média. Enquanto os filósofos tecem infindáveis

---

[120] PIAGET, Jean. *Introdução a la Epistemologia Genética*. Volumen I: *El Pensamiento Matemático*. Trad. Maria T. Cevasco , Victor Fischman. 325 p. Buenos Aires, Paidos, 1978. 315 p., p. 82

[121] Cf. THOM, René. Op. cit., pp. 226-242

[122] Cf. KNEALE, Willian & KNEALE, Martha. *O Desenvolvimento da Lógica*. 1a ed. Trad. de M. S. Lourenço. Lisboa, Fundação Calouste Gulberkian, 1972, 770 p., p. 25

[123] MACHADO, Nílson José. *Epistemologia e Didática: As concepções do conhecimento e a prática docente*. São Paulo, Cortez, 1995. 320 p., p. 199

polêmicas acerca dos universais, os descontentes com a esterilidade reinante na Ciência irão buscar outros modos de fazer ciência, fugindo das estritas concepções aristotélicas.

Na chamada "Ciência Moderna", irão ressurgir as concepções platônicas de valorização da quantidade. Com o impulso do movimento de um pêndulo, o ressurgimento do quantitativo será avassalador, ocultando progressivamente a problemática das qualidades, e levando ao extremo oposto em um verdadeiro neo-pitagorismo.

Francis Bacon sintetiza a supervalorização da quantidade na Ciência Moderna em sua obra, o *Novum Organum,* composta de uma série de aforismos. Sua leitura lança luzes interessantes sobre esse tema. Podem ser encontradas em Bacon os principais argumentos para justificar esse distanciamento com que a Ciência Moderna encara os aspectos qualitativos da realidade.

A impressão da **onipotência do quantitativo,** preponderante principalmente a partir do século XIX e manifestada na sentença de Rutherford acima, parece ter sido reforçada por Bacon, pois podem ser encontrados vestígios de uma ocultação da problemática da qualidade — ou até mesmo de um retraimento em relação a ela — em aforismos do *Novum Organum* como os citados abaixo:

> *Não há nenhuma solidez nas noções lógicas ou físicas*. Substância, qualidade, ação, paixão*, nem mesmo* ser, *são noções seguras. Muito menos ainda as de* pesado, leve, denso, raro, úmido, seco, geração, corrupção, atração, repulsão, elemento, matéria, forma *e outras do gênero. Todas são fantásticas e mal definidas.*[124]

> *As noções das espécies inferiores, como as de* homem, cão, pomba, *e as de percepção imediata pelos sentidos, como* quente, frio, branco, negro*, não estão sujeitas a grandes erros. Mas mesmo estas, devido ao fluxo da matéria e à combinação das coisas, também por vezes se confundem. Tudo mais que o homem até aqui tem usado são aberrações, não foram abstraídas e levantadas das coisas por procedimentos devidos.*[125]

Bacon parece pretender relativizar o poder dos termos da linguagem que tentam descrever o real, pois postula a incompetência do intelecto humano para captar o real, com a conseqüente inoperância da linguagem que tenta interpretá-lo por meio de qualidades e adjetivos. No aforismo XLIX, por exemplo, diz que o

> *intelecto humano não é luz pura* [lumen siccum], *pois recebe influência da vontade e dos afetos*.

Mais adiante, aponta que

> *inúmeras são as fórmulas pelas quais o sentimento, quase sempre imperceptivelmente, se insinua e afeta o intelecto.*

No aforismo LVIII, adverte claramente que qualquer

> *estudioso da natureza deve ter por suspeito o que o intelecto capta e retém com predileção. Em vista disso, muito grande deve ser a precaução para que o intelecto se mantenha íntegro e puro.*

Essa preocupação com a "pureza" do intelecto é, segundo Bacon, essencial para se resolver o problema da inutilidade das pesquisas científicas do modo como até então vinham sendo feitas. Para ele, como afirma no aforismo XLI,

> *o intelecto humano é semelhante a um espelho que reflete desigualmente os raios das coisas e, dessa forma, as distorce e corrompe.*

No fundo o que parece estar em jogo é a dúvida sobre a competência da linguagem humana como instrumento de captação do real, manifestando certa repugnância em relação aos aspectos qualitativos da análise científica. Não é por acaso que Bacon se separe de Aristóteles. É interessante como parece apontar sempre para a supremacia da quantidade no âmbito da pesquisa científica, como forma de evitar as *aberrações* que seriam

---

[124]BACON, Francis. *Novum Organum.* Coleção *Os Pensadores.*Volume XIII. São Paulo, Abril Cultural, 1973. Aforismo XV, página 21

[125] Id.ibid., aforismo XVI

resultado da não utilização de *procedimentos adequados,* como diz no aforismo XVI. Parecem ser esses, portanto, vestígios de uma tentativa de adotar a *quantificação da realidade*, como única forma segura de fazer ciência.

Bacon teve um importante papel em seu momento histórico, fornecendo elementos teóricos para fazer voltar à luz a esquecida análise quantitativa, e dando-lhe uma nova missão: a de fornecer rigor à pesquisa científica, tão à mercê do mero palavreado da sua época.

Essa quantificação será uma das características principais da Ciência Moderna. Galileu já tinha voltado às concepções platônicas anteriores para opor-se ao aristotelismo de sua época. Mais tarde, o extraordinário sucesso das grandes leis da mecânica e da física, a ótica de Newton, a teoria do calor de Fourier, a teoria eletromagnética de Maxwell, irão compor a chamada *invasão do quantitativo*.

Esse sucesso teórico com dimensões práticas chamativas acaba levando à ideia da *onipotência do quantitativo*, obrigando o estudo da qualidade a

> *retrair-se para a fortaleza da subjetividade*[126]*.*

A subjetividade torna-se como que um refúgio único contra os assaltos do cientificismo triunfante (principalmente no século XIX). O cume desse reducionismo está expresso na sentença de Rutherford, para quem a qualidade não é mais que a quantidade mal especificada.

Em Bacon, esses sinais de preferência pelo quantitativo se explicam como uma forma de se chegar a uma ciência mais *prática*. Sua advertência, no livro 2, é peremptória:

> *Contudo, advertimos de modo claro e firme que com os atuais métodos não se podem lograr grandes progressos nas doutrinas e nas indagações sobre ciências, e bem por isso não se podem esperar significativos resultados práticos.*[127]

De certo modo, trata-se de uma continuação do que havia sugerido no Livro 1(aforismos C e seguintes):

> *Deve-se buscar não apenas uma quantidade muito maior de experimentos, como também de gênero diferente dos que até agora nos têm ocupado.*[128]

Em seguida passa a descrever a "experiência literata", pela qual se parte, segundo o método do *Novum Organum*, dos fatos particulares observados aos axiomas menores, destes aos médios e depois aos mais gerais.[129] Toda afirmação científica confiável deveria estar, portanto, baseada em uma quantidade muito grande de experimentos, feitos de uma forma acurada e rigorosa, que seriam capazes de dar às *qualidades* um conteúdo bem mais seguro, segundo Bacon. Constituí-se fato muito significativo que, como aperfeiçoamento dos métodos de pesquisa científica, sugira esquemas como a *Tábua de Graus ou de Comparação do Calor*[130] para tratar do assunto do frio e do quente.

Da exacerbação do poder da palavra passamos a uma supervalorização do quantitativo na Ciência, originando, no outro extremo do movimento pendular, o desvio chamado cientificismo.

## O par discreto/contínuo na interação quantidade/qualidade

Há sinais de um retorno das qualidades à Ciência, caracterizando uma verdadeira tendência histórica. Esse retorno está marcado pela consideração da interação discreto/contínuo. Assim, da Matemática surgem novas ideias para abordar, sem extremismos, o par qualidade/quantidade.

Como diz Thom, para mostrar a conexão profunda entre qualidade e quantidade, é dentro da própria Matemática que surgem naturalmente aspectos qualitativos:

---

[126] THOM, René. Op.cit., p. 234
[127] *Novum Organum*, Livro 2, Aforismo CXXVIII
[128] *Novum Organum*, Livro 1, Aforismo C
[129] Cf. *Novum Organum*, Livro 1, Aforismo CIV
[130] Cf. Aforismo XIII

> *Uma descrição completa do mundo matemático, que é o mundo da quantidade pura, conduz necessariamente a introduzir considerações "qualitativas".*[131]

O papel da continuidade para se compreender os fenômenos mais diversos é apontado também por Michael Otte, que cita a opinião de Charles Sanders Peirse de que a continuidade é a chave para entender a natureza em geral. Para Peirse, uma das tarefas mais importantes da filosofia é compreender a continuidade tanto do ponto de vista matemático quanto filosófico[132].

É justamente na análise da interação discreto/contínuo que encontramos um caminho interessante para superar esse problema, através de uma outra forma de abordar a qualidade, pela via do *contínuo*.

A tendência quantificadora de Bacon e da Ciência Moderna, pela própria natureza da medida, pretende reduzir esse *contínuo* a um conjunto *discreto* de valores, o que é no mínimo claramente empobrecedor. Daí a incapacidade dos métodos experimentais para adequar-se à realidade das qualidades, recortando espaços contínuos e substituindo-os por tabelas e tábuas de valores discretos.

A compreensão da relação entre quantidades discretas e contínuas volta a preocupar os matemáticos após a criação do Cálculo Diferencial e Integral, e é diretamente abordada em 1872 por Dedekind. Depois de 1975, começa a haver também um renascimento do pensamento qualitativo em Física. Nos últimos decênios, no próprio seio das ciências mais tradicionalmente quantitativas, como a Matemática e a Física, parece haver uma renovação do qualitativo, que surge de modo inegável no *contínuo geométrico.* Outros aspectos qualitativos imediatos, como a direção, as invariantes topológicas (singularidades), campos, vetores, tensores e outros entes geométricos ou algébricos, manifestam

> *um ressurgimento abundante de diversidades qualitativas*[133]*.*

De fato, em sua origem etimológica, *contínuo* vem do latim *con-tenere*, (*ter junto, manter unido*). Caveing procura no sentido que vem do grego a ideia de *ter em conjunto, possuir semelhança*[134] *,* imagem tirada do uso pelos gregos do termo contínuo. Assim, o contínuo pode ser utilizado para estudar a categoria do adjetivo, a qualidade, pois representa o conteúdo dos termos que descrevem propriedades de objetos.

Pela noção de *campo semântico* podemos entender melhor o papel da continuidade na análise da linguagem. Essa noção é explicada por Thom como se segue, tomando o exemplo dos adjetivos *quente* e *frio*.

Quente e frio são duas qualidades ou, segundo Thom, objetos representados pela categoria do adjetivo que pertencem ao mesmo "campo semântico", e por isso podem ser comparados. Cada campo semântico pode ser encarado como um espaço contínuo, dividido em bacias de atração, ou poços potenciais, que são mínimos de uma função potencial V(x). Essa função potencial depende do tipo de adjetivo considerado, estando sujeita a parâmetros de controle sociais ou lingüísticos. Nessas bacias repousam adjetivos de gradação como fresco, ameno, morno, correspondentes às diversas denominações lingüísticas que dividem entre si o campo.

Os campos semânticos são assim espaços contínuos, em que se A e B são duas qualidades que pertencem ao mesmo campo semântico, então há uma sequência contínua de qualidades $X_t$, variando t de 0 a 1, em $\Re$, tal que $X_0 = A$ e $X_1 = B$.

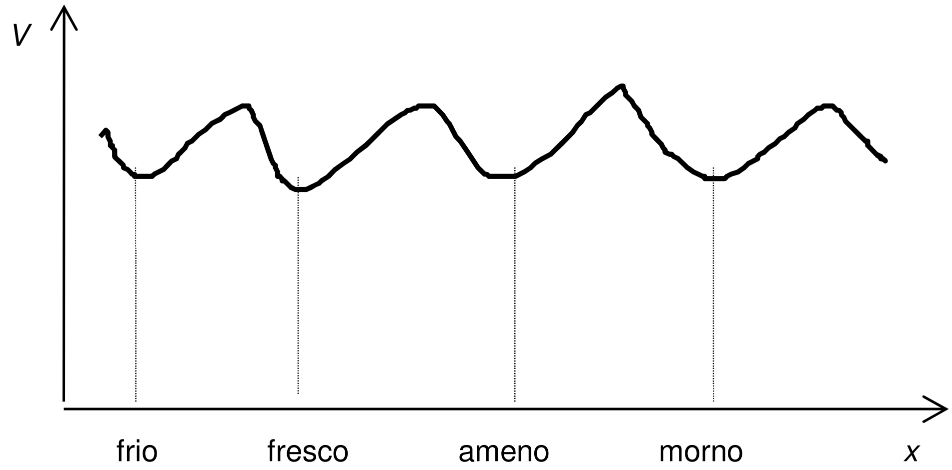
---

[131] THOM, op. Cit., p. 226

[132] Cf. OTTE, Michael. *Das Prinzip der Kontinuitat.* Mathematische-Semesterberichte (res.). 39(1992), n$^0$ 2, 105-125

[133] THOM, rené. Op. cit., p. 236

[134] Cf. CAVEING, Maurice. *Algunas Observaciones sobre el Trato que Recibe el Continuo en los* Elementos *de* Euclides y en la Física *de Aristóteles.* Apud.: APÉRY, Roger. *Pensar la Matemática.* 2ª ed. Trad,. de Carlos Bidón-Chanal. Barcelona, Tusquets, 1988. 319 p., p. 21




Poços de potenciais (*V*) associados a um campo semântico (*x*)

A análise da linguagem traz à tona de modo inegável o problema da semântica. Essa renovação do qualitativo, mesmo em ciências mais tradicionalmente quantitativas, marca uma linha que certamente trará, num futuro próximo, grandes avanços no sentido de compreender as relações entre qualidade e quantidade.

Nesse renascimento do qualitativo na Ciência, as análises quantitativas estão encontrando seu espaço. Nas Ciências Sociais contemporâneas, o uso de informações quantitativas, por exemplo via Estatística, não diminui o caráter qualitativo desses ramos do conhecimento. O tratamento de dados e informações quantitativas por meios computacionais não diminui nem enfraquece o poder da análise qualitativa.

É certo que o computador reduz tudo a sinais numéricos. Dentro dele, funciona a ideia de Pitágoras de que “Tudo é Número”. Esses números são armazenados de duas formas: digital e analógica. O computador digital armazena "zero" ou "um", sendo mais diretamente associado ao discreto. No computador digital, a informação é representada em última análise de maneira discreta.[135] O computador analógico lida com quantidades contínuas, isto é, constituídas de variáveis reais, revestidas de características de continuidade.

Dentro desse mundo quantificado, entretanto, existe uma valorização cada vez maior dos aspectos qualitativos do conhecimento humano. A tendência mundial favorece novamente as palavras. Antes único reduto do qualitativo, as palavras adquiriram agora outros parceiros, como o som e a imagem, mesmo que digitalizadas. O hipertexto reforça o valor do qualitativo, eximindo do homem a tarefa de analisar tudo quantitativamente para tomar decisões. O trabalho humano tornar-se mais direcionado ao serviço e, especificamente, à educação, à distribuição da informação. Isso pode ser encarado como um retorno ao qualitativo, pela via quantitativa, digital[136]. Estamos vivendo uma era de mudança de concepção de inteligência, em que se valorizam os aspectos qualitativos e quantitativos.

As mudanças na concepção de inteligência implicam em uma nova forma de avaliar o aprendizado. Tendo em mente essa abordagem interativa entre os conceitos de qualidade e quantidade, podemos pensar melhor sobre a avaliação educacional, no caminho da síntese ou da harmonia sugerido por Thom.

## Os par qualitativo/quantitativo na avaliação educacional

O estudo do par discreto/contínuo em relação ao par qualidade/quantidade traz luzes novas para a discussão da avaliação educacional. Pois revela uma relação presente,

[135]. Cf. *Enciclopedia Einaudi: Analógico/digital.* Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1989.
[136] Cf. NEGROPONTE, Nicholas. *A Vida Digital.* Trad. Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 1995. 210 p.

ainda que oculta, por trás da elaboração de critérios de notas e atribuição de pontos para trabalhos e provas de alunos. No que se refere à avaliação educacional, essa valorização dos dois aspectos - o qualitativo e o quantitativo - parece passar pela necessária superação da preocupação centrada nas "tecnologias da avaliação".

Como afirma Machado[137], em seu trabalho *Avaliação educacional: das técnicas aos valores*, o problema da elaboração dos instrumentos de medida não deve ser encarado como assunto central. Há questões muito mais importantes relacionadas à avaliação, e que são muitas vezes deixadas de lado. Tudo o que se refere às concepções sobre a natureza do conhecimento e o significado da medida são muito mais decisivas para o desenvolvimento de formas de avaliar mais abrangentes que discussões infindáveis sobre métodos e critérios de notas, médias e desvios-padrão.

É comum associarem-se os processos de avaliação com processos de *medida,* no sentido empírico do termo. Nesse contexto se inserem as tentativas de realizar *medidas de inteligência* através dos testes de QI e outras abordagens *científicas* do gênero. Conforme identifica Machado[138], tal associação é compatível apenas com uma visão de ensino baseada na ideia de “encher o balde”, sendo o teste do conhecimento uma medida da “profundidade” em que se conseguiu encher o balde.

A maneira como os resultados finais são apresentados não importa muito, mas sim os *meios* de fazer avaliação, ou seja, a concepção da avaliação educacional como uma *medida da altura da água em um balde* ou coisa do gênero. Em qualquer concepção menos superficial do que seja o conhecimento, a ideia de medida não se encaixa perfeitamente. Aliás, *medir* é uma atividade que nem mesmo em ciências empíricas encontra uma definição tranqüila e simples. Já afirmava Hardie em 1942:

> *Não há uma unanimidade acerca das condições segundo as quais a medida é possível mesmo em um assunto como a física*[139]*.*

Se mesmo nas ciências ditas *precisas* a medida é algo complicado, quanto mais no ramo das chamadas *Ciências do Impreciso,* termo usado como título de um recente trabalho de Moles[140], entre as quais estão as ciências do humano, do qualitativo, das variáveis que, se quantificadas, apresentam uma correlação fraca.

Machado mostra que, apesar de o discurso educacional estar impregnado de características ditas “construtivistas”, como por exemplo a interdisciplinaridade, a prática avaliativa permanece sempre voltada para essa ideia de medida. É uma concepção quantitativa da ciência fazendo sua aparição nas ciências humanas, pretendendo atingir uma *precisão* na avaliação do conhecimento. No máximo, a discussão gira em torno da opção entre utilizar letras como notas (“conceitos”), ou utilizar notas numéricas.

Em ambos os casos, subjaz a ideia de medida, uma tentativa de quantificar a inteligência. A inteligência e o conhecimento são realidades muito amplas e complexas, que não cabem em critérios meramente quantitativos de avaliação. A possibilidade de se impor uma *nota* que represente de algum modo a *medida do aprendizado* do aluno é algo questionável. O resultado de uma avaliação desse tipo é sempre a categorização dos alunos dentro de padrões e níveis distintos.

Na escola, essas categorizações discretas com visão cientificista geram um clima de horror às *semanas de prova*, aos *testões* e outros instrumentos de medir o aprendizado, que apresentam como resultado rótulos como Suficiente ou Insuficiente. Mas qual a diferença essencial entre um aluno 8,5 e um aluno 9? Que fenômeno misterioso do destino faz com que um aluno D seja separado para sempre do convívio com um aluno C? Em que ponto obscuro do processo contínuos de ensino/aprendizagem um aluno passa do estado de reprovado para o de aprovado? São questões que deveriam movimentar os educadores, mas que raramente são alvo de atenção.

---

[137] Cf. MACHADO, Nílson José. *Epistemologia e Didática: As concepções do conhecimento e a prática docente.* São Paulo, Cortez, 1995. 320 p., p. 296
[138] Op. cit., p. 280
[139] Cit. in. MACHADO, Nílson José. Op. cit., p. 268
[140] Cf. MOLES, Abraham Antoine. *As Ciências do Impreciso.* Trad. Glória de Carvalho Lins. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1995. 371 p.

Nessa discussão, em uma tentativa de se compreender melhor o significado dos resultados da avaliação educacional, é útil fazer referência às origens e à história do tema da medida e da qualidade e quantidade. Segundo Thom, a lacuna deixada no pensamento científico pela retirada das qualidades torna-se por demais evidente com o fracasso relativo do movimento behaviorista, incapaz de reduzir o agir humano ao controle numérico.

O vazio produzido no pensamento científico pela opção radical pela quantidade levou a uma ruptura com os moldes do empirismo puro. Uma abordagem meramente quantitativa das avaliações também tende ao fracasso, pois baseia-se na quimera de ser possível medir quase fisicamente o conhecimento. É preciso ultrapassar as visões meramente quantitativas que caracterizam o empirismo de Bacon e os modernos empirismos "tecnológicos", e recuperar o caráter qualitativo das avaliações. Nas palavras de Machado:

> *É imprescindível a consciência de que os números resultam, desde a origem, de um processo de interpretação, de que eles constituem indícios valiosos para o reconhecimento de qualidades e competências, de que eles representam os avaliados mas não se identificam com os mesmos.*[141]

Desse modo, a contagem do número de erros ou de acertos não passa a ser o ponto central da avaliação. Através do exame desses erros e acertos, o professor pode conhecer melhor a forma de pensar dos alunos, em um sentido qualitativo. Esse tipo de "prova", entretanto, deve constituir no máximo um dos componentes acessórios do processo de avaliação do ensino. Se se quiser conhecer de fato como são ou como estão os alunos, é preciso levar em conta o desempenho contínuo do aluno, e não só o desempenho em momentos específicos, como na hora da *prova individual sem consulta*. É preciso observar como o aluno trabalha individualmente, e em grupo. É preciso saber como atua em situações em que deve consultar informações, ou sabê-las de cor. É preciso ainda saber como utiliza o conhecimento que se deseja que tivesse adquirido em situações novas, e não somente em problemas rotineiros.

Ou seja, para avaliar, é preciso levar em consideração os diversos componentes do espectro de competências que caracteriza a inteligência múltipla, *avaliando* e também *valorizando* a inteligência do aluno. Ou, como diz Machado,

> *favorecendo a apreciação pelo professor de um elenco de qualidades, diversas para diferentes seres humanos, mas seguramente existentes em todos, em cada um*[142]*.*

Uma avaliação assim, atenta à captação da qualidade, segue o rumo atual das mudanças científicas que procuram transcender os aspectos meramente quantitativos da realidade. O conhecimento adquire uma nova forma de ser encarado, já não mais passível de simples medida. O Projeto Spectrum[143], por exemplo, ao destacar a existência de múltiplas competências na ideia de inteligência, abre caminho para uma avaliação diversificada, valorizando a compreensão qualitativa do aluno.

Essas ideias merecem muito mais que o rápido tratamento dessas linhas. Esperamos que atraiam a atenção dos pesquisadores interessados na construção de um ensino adequado à humanidade, que quanto mais globalizada mais diversificada se torna.

---

[141] MACHADO, Nílson José. *Epistemologia e Didática: As concepções do conhecimento e a prática docente*. São Paulo, Cortez, 1995. 320 p., p. 297

[142] MACHADO, op. cit., p. 297

[143] Cf. GARDNER, Howard. *Estruturas da Mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas*. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre, Artes Médicas Sul, 1994. 340 p., p. 89. Cf. também MACHADO, op. cit., p. 297

# Capítulo 4

# Balanço Teórico: Contribuições para o Ensino da Matemática

Neste Capítulo, fazemos um balanço das ideias mais importantes dos capítulos anteriores, tendo em mente recolher contribuições para o ensino de Matemática originadas do estudo histórico precedente. Procuramos destacar ideias que possibilitem a inserção no ensino da Matemática elementar da compreensão da interação discreto/contínuo.

*Eu a abarco logo com um só olhar...; não sucessivamente, no detalhe de suas partes, como ocorrerá mais tarde, senão toda inteira, em seu conjunto...*

Mozart

Até aqui fornecemos um panorama sobre três abordagens distintas: a relação entre as noções de discreto e contínuo e a ideia de Número, a presença de ambas as vias no surgimento do Cálculo e a interrelação entre os pares discreto/contínuo e qualidade/quantidade.

No presente capítulo, faremos um balanço teórico do que foi visto nos anteriores, ressaltando as ideias mestras desse estudo. O objetivo é mostrar como as discussões anteriores, baseadas em quase sua totalidade no estudo da História da Matemática, fornecem contribuições valiosas para a compreensão da relação em questão e sua inserção no ensino da Matemática elementar.

Esse balanço teórico acaba levando necessariamente a ideias referentes ao ensino da Matemática elementar, pois nossa preocupação habitual é a melhoria do ensino de Matemática. Assim, muitas das conclusões a que chegamos se traduzem em contribuições para a elaboração de estratégias de ensino. Gostaríamos de dizer, no entanto, que muitas dessas indicações de caráter mais prático irão talvez soar como coisa já vista para quem lida com o ensino de Matemática visando uma construção mais significativa do seu conteúdo. Acreditamos que a contribuição maior desse trabalho é mostrar que essas atividades têm um valor mais profundo do que habitualmente se pensa, pois estão associadas à relação entre os elementos do par discreto/contínuo, as duas correntes principais da Matemática. Afinal, são realmente muitos os assuntos do programa de Matemática elementar, como álgebra, trigonometria ou funções, os quais têm relação com a tensão entre os termos acima.

Por outro lado, é bastante surpreendente a raridade com que essa relação é mencionada nos textos sobre ensino de Matemática. Na verdade, essa dualidade surge já desde a discussão mais inicial sobre a natureza do Número até a construção do Cálculo Diferencial e Integral, pois trata-se de um assunto que percorre quase todo o conteúdo do programa elementar de Matemática. Mas talvez devido à sua natureza um tanto paradoxal, é muito raro encontrar estudos específicos sobre essa relação, ou mesmo referências esparsas em estudos sobre o ensino da Matemática.

Após estudar História da Matemática tendo como objetivo entender essa relação, ficou muito claro para nós que ela está no centro de inúmeras questões do ensino da Matemática elementar, das mais simples até as mais complexas.

Nunca tivemos a pretensão, obviamente, que falar sobre todo o programa de Matemática elementar, e escolhemos nos ater apenas à noção de Número e às ideias fundamentais do Cálculo. Nossa esperança é que esse estudo sirva para chamar a atenção dos pesquisadores do ensino da Matemática sobre a importância desse tema, fonte fértil de significado para o currículo elementar de Matemática, de modo que a pesquisa se estenda a outros tópicos do currículo elementar.

Vamos agora iniciar a exposição da contribuição desse estudo para o ensino da Matemática. Esse balanço teórico irá desembocar na exploração da tensão entre o discreto e o contínuo, que se fará no capítulo 5.

# Contribuições para o ensino de números

A primeira descoberta significativa do presente trabalho está ligada à construção da ideia de número, assunto abordado no Capítulo 1. Constatamos que não se pode pretender desenvolver uma ideia abrangente de Número sem levar em conta os dois aspectos, discreto e contínuo, em suas múltiplas características e implicações.

Estudos antropológicos e epistemológicos mostram que o surgimento e evolução da noção de número natural não esteve somente atrelada à contagem discreta de elementos individuais, na famosa associação entre o número de ovelhas em um rebanho e a quantidade de pedrinhas em um saco. Na verdade, o uso do número natural sempre esteve vinculado também a atividades envolvendo medidas de grandezas contínuas, e de uma forma mais simples à noção de ordenação, que supõe a comparação entre grandezas diferentes. Assim, não há razão para restringir o ensino de número natural somente a exemplos e situações discretas. É preciso levar em conta as suas componentes primordiais, presentes na evolução histórica e na psicogênese do conceito numérico.

Resumindo, no ensino inicial de Número, nosso estudo mostrou que é preciso fornecer situações que envolvam pelo menos os seguintes aspectos:

- a percepção mais elementar da igualdade e da diferença entre objetos.
- a capacidade de estimar quantidades discretas e grandezas contínuas;
- as atividades humanas de contar e medir;
- as componentes ordinal e cardinal do número;

Indo além do número natural, a evolução da ideia de Número passa também pela constatação da tensão entre discreto e contínuo. Apesar de os egípcios e os povos da Mesopotâmia utilizarem frações e números decimais, nosso estudo mostra que somente após a identificação das grandezas incomensuráveis é que surgem de uma forma mais definida os próprios números racionais. E, no fundo, a crise dos incomensuráveis, que marca o surgimento dos números irracionais, nada mais é que a explosão da tensão acumulada entre o discreto e o contínuo no mundo grego. A crise reflete o grande problema gerado pela dificuldade de expressão de grandezas discretas e contínuas dentro da linguagem matemática que estava em evolução.

Portanto, também a construção dos números racionais está na dependência de uma abordagem que leve em conta o discreto e o contínuo. O número racional surge então como um nó de uma rede conceitual formado por três linhas principais:

- a vertente egípcia das frações unitárias, como parte de um todo;
- o uso do valor posição para representar números quebrados na Mesopotâmia;
- a noção de razão grega, tendo como contrapartida os incomensuráveis.

Assim, uma estratégia de ensino que leve em conta esses aspectos estará administrando a tensão entre o discreto e o contínuo, trabalhando tanto com um quanto com o outro aspecto, para construir a noção de número racional e expandir, assim, o campo numérico do aluno. É preciso formar um elenco das componentes conceituais do número racional. Nossos estudos sobre os números racionais apontam três componentes fundamentais:

- tomar uma parte de um todo;
- dividir um número inteiro por outro;
- comparar duas grandezas.

Esses componentes da ideia de número racional precisam ser trabalhadas em conjunto, pois somente uma delas, sem as outras, não é suficiente para criar um ensino significativo.

Quanto à construção dos números reais, também concluímos que só pode ser levada a cabo de uma forma significativa se considerarmos tanto o discreto quanto o contínuo, administrando a tensão entre ambos. Para chegarmos a essa conclusão, foi muito elucidativo verificar que nem os povos da Mesopotâmia nem os egípcios preocuparam-se em identificar a existência dos números irracionais.

Os babilônios calculavam com uma aproximação muito boa números irracionais, como a diagonal do quadrado de lado unitário, sem nenhum constrangimento. Como o algoritmo que utilizavam para calcular a raiz quadrada de um número permitia chegar a aproximações tão boas quanto quisessem, não tinha sentido para eles a preocupação sobre a natureza do número em questão. Pelo que pudemos entender, os babilônios lidavam diretamente com a continuidade, através das aproximações de medidas, sem questionar sobre a “racionalidade” do valor encontrado.

Os egípcios desenvolveram as frações para lidar com as medidas, trabalhando com números inteiros e com frações unitárias, ou seja, divisões da unidade em um número inteiro de partes. Apenas com frações unitárias, nunca iriam reparar na existência dos irracionais, pois limitavam-se de um modo ou de outro ao reino discreto dos números naturais, aplicando-os tanto a medidas quanto a contagens.

Somente os gregos, ao comparar o discreto e o contínuo, puderam vislumbrar, com bastante surpresa, a existência dos irracionais. Se não tivessem tentado olhar o mundo em busca de uma visão unificadora, tentando lidar tanto com os números (discretos) pitagóricos quanto com a teoria das proporções entre grandezas (contínuas), os gregos não teriam percebido a existência de grandezas incomensuráveis. É claro que a reação grega de horror ao infinito, de repúdio aos números irracionais e de fuga na álgebra geométrica, não resultou em uma imediata assimilação dos números reais. Mas possibilitou uma abertura tão grande de perspectiva que chegou quase à invenção do Cálculo Diferencial e Integral por Arquimedes, dois mil anos antes de Newton e Leibniz.

Concluímos, assim, que levar em conta a interação entre discreto e contínuo é fundamental para se compreender os números reais, mesmo que essa “compreensão” traga os riscos de se ficar um pouco confuso com os paradoxos da continuidade. Aliás, os próprios gregos, com os paradoxos de Zeno, deixaram registrado que não foi fácil, de início, lidar com ambas as noções de discreto e contínuo. Mas é claro que valeu a pena. Basta verificar o avanço que a Matemática, junto com outros ramos do conhecimento, obteve em um par de séculos na Grécia, em comparação com os milênios de estagnação egípcia ou babilônica. Podemos dizer que os gregos de certo modo quase preencheram o abismo que antes separava a visão discreta do Egito e a abordagem contínua da Mesopotâmia. Não souberam administrar perfeitamente a tensão entre discreto e contínuo, pois optaram por separá-los criando áreas totalmente distintas - a Teoria dos Números e a Geometria. Mas tiveram o mérito de não ignorar nenhum deles, dando atenção tanto ao estudo dos Números quanto da Geometria.

Com relação ao ensino dos números reais e suas propriedades, e particularmente sobre o trabalho com os irracionais, nosso estudo revelou que é muito importante imitar o que os gregos fizeram de bom, evitando apenas a sua reação de surpresa desmedida. Ou seja, não ficar somente na visão discreta nem na contínua, mas lidar com ambas as noções, para se construir a ideia de número real. Para isso é de grande utilidade fazer uso da Álgebra Geométrica. A Álgebra Geométrica foi uma grande invenção grega, que visava evitar um confronto direto com o mundo dos números irracionais. Nosso estudo mostra que a Álgebra Geométrica deveria assim ser mais valorizada, pois é uma grande fonte de estratégias de ensino para os números reais. Podemos assim tecer um elenco de elementos que consideramos valiosos para o desenvolvimento da ideia de número real:

- explorar a representação geométrica de valores numéricos, dentro da Álgebra Geométrica;
- considerar os casos extremos propostos pelos paradoxos de Zeno ou seus similares, não como episódios folclóricos, mas como modo de entender melhor e valorizar a relação entre discreto e contínuo na composição da reta real;

- estudar a natureza da notação posicional e das aproximações dos números irracionais;
- não ignorar os casos mais "complicados" das representações periódicas infinitas de números, quer irracionais ou não;
- mostrar a ideia de infinito sem deixar de lado tanto o infinitamente grande quanto o infinitamente pequeno. Para isso, pode-se fazer uso do princípio da exaustão e das representações geométricas intuitivas dessas ideias.

Essas são, segundo as análises desse trabalho, alguns dos componentes necessários para se trabalhar com os reais, fazendo referência simultaneamente ao discreto e ao contínuo para se construir os conceitos relacionados aos números reais.

## Contribuições para o ensino do Cálculo

Com esse tipo de abordagem da ideia de Número, pensamos que seja mais natural para o aluno a passagem para o estudo da relação entre funções, das ideias de variação e de áreas relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral. Esse assunto é considerado o coroamento de um curso de Matemática elementar, embora muitos alunos acabem o segundo grau sem estudar Cálculo. Na verdade, há propostas interessantes de se ensinar Cálculo já no primeiro grau, e há pesquisas em curso sobre esse tema. Nos nossos estudos da História do Cálculo, no segundo capítulo do presente trabalho, constatamos que as ideias do Cálculo têm sua origem primeira nas discussões em torno do discreto e do contínuo quando das tentativas gregas de compreensão da ideia de Número. Assim, trabalhando a ideia de Número através da administração da tensão entre o discreto e o contínuo, preparamos o aluno para entrar no assunto do Cálculo sem sustos, e abrandamos o aspecto de dificuldade com que o Cálculo é estigmatizado muitas vezes.

Muitos alunos esbarram nas dificuldades representadas pela *linguagem matemática* do Cálculo, e não pelas *ideias* em si. Afinal, como já falamos, os gregos estiveram a um passo da construção do Cálculo dois séculos antes de Cristo, sem ter ainda sequer uma linguagem algébrica simbólica. As ideias fundamentais do Cálculo podem ser assim construídas, desde que se leve em consideração a distinção entre a lógica da Matemática pronta e a lógica da Matemática em construção. A lógica do ensino é a lógica da Matemática em construção, e não a lógica da Matemática pronta e formalizada.

No caso do Cálculo, vemos que a lógica da Matemática em construção é aquela que se permite levar em consideração tanto o aspecto contínuo quanto o discreto, sem fazer uma opção entre ambos. Falamos no Capítulo 2 que Newton e Leibniz chegaram ao Cálculo por caminhos diferentes, Newton se utilizando mais de conceitos ligados ao movimento e à continuidade, e Leibniz com uma visão mais estática e discreta. Ambos são portanto modos válidos e úteis para se construir as ideias básicas do Cálculo, isto é, a relação inversa entre a derivada e a integral e a formulação de regras e procedimentos para se obter derivadas e integrais.

Essas ideias centrais do Cálculo, como sabemos, referem-se ora a conceitos de natureza contínua ora a conceitos de natureza discreta, pois o Cálculo é o reino onde se juntam os elementos mais diversos do universo matemático. Já foi dito que o Cálculo não é uma única disciplina, mas um conjunto heterogêneo de assuntos bem distintos. Especificamente, no Cálculo estão presentes de modo marcante as duas correntes principais da Matemática, o discreto e o contínuo. Ambos os assuntos devem ser abordados, para se construir o Cálculo de uma forma significativa, e já há obras didáticas que procuram justamente exercitar a interação entre o discreto e o contínuo[144].

Estudando na História a lógica da Matemática em construção, constatamos que o Cálculo surgiu bem antes do surgimento da linguagem matemática dos limites, responsável pela sua formalização. A noção de limite e o conceito geral abstrato de número real foram conquistas bem posteriores ao Cálculo, e acabaram por estabelecer o padrão da linguagem e do rigor para a interpretação matemática das ideias do Cálculo. Mas não se deve imaginar que a noção de limite seja a base do Cálculo, pois o Cálculo foi construído em um rigor

[144] Por exemplo, ver YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p.

próprio da sua época, conforme a lógica da Matemática em construção, e os limites vão depois estabelecer outra lógica, a da Ciência pronta e formalizada.

Aliás, se o objetivo do ensino do Cálculo fosse apenas assentá-lo sobre suas bases formais, talvez fosse aconselhável estruturá-lo por meio da análise não-standard, que permite a utilização sem incoerências da ideia de infinitésimos. Mas quando se procura ensinar Cálculo seguindo a ordem lógica do Cálculo já formalizado, os alunos sentem muita dificuldade com a linguagem e os conceitos sofisticados, principalmente o de limites, a que são apresentados. Esse trabalho revelou que o Cálculo foi construído de uma forma mais próxima da intuição, fazendo referência ao discreto ou ao contínuo, sem faze-los entrar em choque.

Cremos que uma das maiores contribuições desse trabalho está justamente em mostrar que essa ordem histórica de construção do Cálculo pode ser extremamente útil para evitar as dificuldades características da formalização excessiva e precoce que geralmente se dá ao se tentar apresentar o Cálculo conforme a ordem da Matemática pronta.

Lidando tanto com exemplos de matemática discreta quanto de continuidade, e deixando a linguagem algébrica dos limites para mais tarde, estamos respeitando a lógica da Matemática em construção, e tornando o Cálculo mais acessível. Esse é um bom exemplo das vantagens da administração conceitual da tensão entre o discreto e o contínuo.

Desse modo, podemos resumir nas ideias abaixo as principais contribuições desse estudo sobre o ensino do Cálculo:

- convém ter em mente, ao se introduzir o ensino do Cálculo, os problemas que lhe deram origem: a busca das quadraturas, as tangentes;
- é interessante variar as explicações em torno dos conceitos iniciais do Cálculo - derivadas, máximos e mínimos, áreas sob curvas, pelos vários métodos de resolução de problemas;
- pode-se trabalhar, no ensino do Cálculo, exemplos de Matemática Discreta, como P.I.F., e também de continuidade, como a noção (intuitiva) de velocidade;
- está de acordo com a lógica da Ciência em construção apresentar soluções para os problemas do Cálculo sem basear-se exclusivamente no conceito de limite, trabalhando mais a intuição e as analogias discretas e contínuas.
- parece razoável apresentar as ideias de derivada e de integral antes de limites, em uma introdução ao Cálculo no 1º e 2º graus;

Assim, seguindo a linha representada por essas diretrizes, o ensino de Cálculo pode tornar-se mais acessível e mais completo também, habilitando o aluno para aplicar as ideias de Cálculo em diversas situações. Vale dizer, como afirmamos no início desse capítulo, que muitas das ideias aqui apresentadas já são utilizadas, tendo inclusive caracterizado a reforma curricular recente nos cursos de Cálculo para alunos de Licenciatura em Matemática da USP. Mas à prática bem sucedida dessas estratégias estamos agora juntando um referencial teórico, pois não havia ainda um estudo específico sobre as razões de se sugerir a administração da tensão entre discreto e contínuos através dessas atividades.

## Contribuições para a avaliação educacional

Prosseguindo na colheita da ideias mais importantes do estudo desenvolvido nos capítulos anteriores, chegamos agora ao Capítulo 3, que procura estabelecer a relação entre os pares discreto/contínuo e quantidade/qualidade. A razão de ser desse Capítulo está no fato de a Matemática, como já dissemos, não lidar somente com quantidades, mas também com aspectos propriamente qualitativos, principalmente na Topologia e na Lógica. Além disso, nosso interesse pelo par quantidade/qualidade se explica também pela grande relevância do tema na Educação, pelas implicações na questão da avaliação educacional.

Além disso, pensamos que estudar a relação quantidade/qualidade contribui para entender a relação discreto/contínuo. Nesse sentido, foi importante constatar as tentativas históricas de se reduzir um aspecto em função do outro, de um modo análogo ao que se tentou fazer com o discreto e o contínuo. Ou seja, em primeiro lugar, a conclusão inicial do nosso estudo é a de que é preciso saber lidar com a quantidade e a qualidade, respeitando suas diferenças, do mesmo modo que precisamos lidar com o discreto e o contínuo, sem querer fazer uma opção entre eles.

Como vemos na História, Pitágoras foi o primeiro a tentar fazer desaparecer o qualitativo em nome da sua tese quantitativa - “Tudo é Número”. Depois dele, a força adquirida pela lógica após Aristóteles fez pesar a balança para o lado qualitativo, fazendo com que a Ciência ficasse marcada pela “força da palavra” que caracterizou boa parte do conhecimento medieval. Com Francis Bacon, toma força o outro lado, mais platônico e pitagórico, de desprezar as palavras em nome da medida numérica. É a chamada Ciência Moderna, que se caracteriza pela onipotência do quantitativo.

Atualmente, acompanhamos um verdadeiro renascimento do qualitativo na Ciência. Mas o papel da análise quantitativa parece não estar diminuindo. Exemplo disso é o surgimento da Sociologia enquanto ramo específico do conhecimento acerca do homem em sociedade. Na Sociologia, a Estatística tem papel importante como ferramenta de equacionamento matemático de fatores humanos, sem que a Sociologia perca seu caráter qualitativo típico das Ciências humanas. Ou seja, tanto as análises quantitativas quanto qualitativas estão encontrando seu espaço na Ciência contemporânea.

Outro exemplo significativo disso é dado pelo tipo de presença cada vez maior do computador na sociedade. Já foi dito que o computador, por reduzir tudo a sinais elétricos diretamente associados a números em seu interior, estaria tornando realidade a visão pitagórica de que “Tudo é Número”. O computador digital, quase a totalidade dos que há hoje em dia, armazena em cada célula apenas zero ou um, e tem que fazer discretas todas as quantidades. O computador analógico, ainda em fase de pesquisas, estabelece relações com quantidades contínuas.

No seu funcionamento, um dispositivo analógico usa a informação contínua constituída de variáveis reais, estabelecendo procedimentos com características de continuidade. Nos computadores digitais a informação é representada em última análise de maneira discreta, e vem elaborada de modo sucessivo.[145]

Mas ambos os sistemas reduzem tudo, quer palavras, imagens ou sons, a números. Aparentemente, portanto, estaríamos vivendo na era da quantificação universal, de certo modo profetizada por Pitágoras há 2500 anos.

Entretanto, o que verificamos é uma valorização cada vez maior dos aspectos qualitativos do conhecimento humano, pela grande ênfase dada à informação. Na sociedade informatizada torna-se mais presente e valioso o qualitativo, o poder da palavra, da informação[146].

Conforme vimos no Capítulo 3, esse ressurgimento das diversidades qualitativas está ainda por trazer mudanças nas concepções de avaliação educacional. Enquanto o mundo passa a valorizar mais os aspectos qualitativos, os modelos de avaliação ainda permanecem, em grande parte, centrados em uma visão quantificadora. *Medir o conhecimento* é ainda a ambição dos processos de avaliação, sem perceber que o conhecimento transcende o mundo das coisas quantificáveis.

As mudanças na concepção de inteligência vem sendo sentidas, e parece que é a partir daí que as mudanças na avaliação do aprendizado irão acontecer. Pesquisas como a de Gardner[147] são importantes para mostrar o engano de pretender quantificar a inteligência, o conhecimento ou o aprendizado, revelando as falhas dos testes de QI e outras provas desse gênero.

Entretanto, surge na pesquisa sobre o discreto e o contínuo uma esperança nova de se poder fazer uso da praticidade e objetividade quantitativas para se chegar à avaliação qualitativa. Trata-se da linha sugerida por Thom, de explorar o papel do contínuo geométrico em uma possível síntese entre os conceitos qualidade e quantidade. A novidade e a força dessa teoria, ainda em fase de discussão, estão em se poder satisfazer as ânsias

---

[145]. Cf. *Enciclopédia Einaudi: Analógico/digital*. Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1989.

[146] Cf. NEGROPONTE, Nicholas. *A Vida Digital*. Trad. Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 1995. 210 p.

[147] Cf. GARDNER, Howard. *Estruturas da Mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas*. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre, Artes Médicas Sul, 1994. 340 p.

por exatidão quantitativa de Bacon e da Ciência Moderna com o valor evidente e insubstituível das categorias qualitativas na apreensão do real.

# Capítulo 5

# Explorando a Tensão entre o Discreto e o Contínuo no Ensino de Matemática: Oficinas Temáticas

> Neste Capítulo, mostramos exemplos de Oficinas Temáticas para a formação e reciclagem de professores, nas quais procuramos aplicar a abordagem histórica visando administrar o par conceitual discreto/contínuo dentro de assuntos do currículo elementar de matemática.

*Pode parecer surpreendente que a sensibilidade deva ser apresentada em conexão com demonstrações matemáticas, as quais aparentemente interessariam apenas ao intelecto. Mas não, se tivermos em mente o sentimento da beleza matemática, da harmonia dos números e formas e da elegância geométrica. É um real sentimento estético que todo verdadeiro matemático reconhece, e isso é sensibilidade autêntica.*

Poincaré[148]

Neste capítulo iremos mostrar o conteúdo de algumas oficinas temáticas ministradas para Professores de Matemática no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME-USP ou em Oficinas Pedagógicas de Delegacias da Rede Pública de Ensino. Foram mais de 50 oficinas com três horas de duração, ministradas desde 1988, abrangendo aproximadamente 1500 professores. Nessas atividades, procurou-se trabalhar, entre outros, assuntos ligados ao par discreto/contínuo, dentro da abordagem histórica de tópicos do currículo elementar de matemática.

Esperamos, com esses exemplos de oficinas, mostrar como é possível na prática construir um ensino que leve em conta a interação discreto/contínuo, baseado na pesquisa em História da Matemática. Mas reparamos que uma oficina colocada em forma de texto perde sua característica principal, que é a ação desenvolvida pelos participantes, visando a construção do assunto abordado. O que mostramos aqui é na verdade apenas um *roteiro* de algumas oficinas, pois não podemos registrar, dadas as características desse trabalho, tudo o que ocorre nas três horas de trabalho em grupo, que é a duração de uma oficina.

A pesquisa em História da Matemática, nosso interesse há muito tempo e que já resultou na Dissertação de Mestrado *A Arte de Contar*[149]*,* tem sido uma porta aberta para um universo tão rico, que pudemos extrair desse estudo temas para diversas oficinas de ensino de matemática. Dessas, escolhemos algumas para dar de exemplo neste trabalho.

O objetivo dessas oficinas era auxiliar o Professor no sentido de ampliar o campo de visão de alguns assuntos, visando fornecer instrumentos para a elaboração de abordagens com mais significado para o aluno. Entendemos que a abordagem histórica permite multiplicar as possibilidades de explicação e de elaboração de atividades pelo próprio professor, individualmente ou com a equipe de sua escola. Cada professor conhece as necessidades específicas do trabalho com seu grupo de alunos. Nunca pretendemos elaborar estratégias prontas para uso em sala de aula, ou alguma espécie de receita didática

---

[148] POINCARÉ, Henri. *Science and Method.* Dover: New York, 1952, p. 52. Cit. in. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete.* Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 123

[149] BROLEZZI, Antonio Carlos. *A Arte de Contar: uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática*. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 1991. 244 p.

para trabalhar este ou aquele assunto. Procuramos apenas fornecer uma instrumentação versátil para que ele tenha mais recursos, podendo ter mais liberdade para trabalhar a matéria dessa ou daquela maneira, conforme seus critérios. Abrir horizontes e convidar à refletir são nossos objetivos contínuos.

Desse modo, ainda que não limitemos as oficinas ao estudo específico da interação discreto/contínuo, através do recurso à história dos conceitos matemáticos envolvidos, mostramos em que pontos se faz necessário administrar esse par conceitual, dentro de assuntos da Matemática elementar que possuem ligação especial com essa interação.

- **Frações e Decimais: História e Significado**

Sabemos, pelo estudo da História da Matemática, que a origem das frações está ligada às medidas. A passagem dos inteiros para os fracionários se faz no contato com a continuidade. Posteriormente, na definição matemática do número racional, surge com força sua relação com o discreto, pois um racional é definido em termos de um par ordenado de inteiros.

Para o ensino, é preciso o cuidado de não limitar-se apenas à *definição,* com base na *ideia do discreto*, do número racional; é preciso trabalhar a origem histórica, com base na *continuidade*, dos números fracionários.

Nesta oficina, procuramos no triângulo de significado dos racionais mostrar as origens históricas em três culturas distintas, Egito, Mesopotâmia e Grécia, nas quais situamos uma ênfase respectivamente maior em termos de frações, decimais e razões.

Com esta oficina, construímos o conceito dos racionais partindo de considerações *contínuas* - as *medidas*, fonte inicial dos números quebrados - e também *discretas* - a ideia de *razão* dos gregos, que consideravam números apenas os inteiros.

- **Razão Áurea e a Beleza da Matemática**

Nesta oficina estendemos a análise da origem dos racionais até surgirem os primeiros vislumbres gregos sobre a existência dos irracionais. Segundo algumas teorias históricas, o primeiro vislumbre poderia ter sido dado na contemplação do pentagrama, figura de propriedades matemática interessantes, na qual está contida a ideia do número de ouro, da razão áurea, uma “razão irracional” que fascinava os pitagóricos. Tal razão estaria no cerne da crise dos incomensuráveis, que marca o assombro grego ante a impossibilidade de representar razões entre certas grandezas *contínuas* por meio de números inteiros, *discretos*. A sequência de Fibonacci é outro exemplo dessa interação, pois é constituída de *números inteiros*, mas tem um razão entre dois termos consecutivos que tende ao número de ouro, que é *irracional*. Na administração dessa tensão conceitual surge uma das mais belas páginas da História da Matemática, em que vemos a presença da Matemática na estética e em algumas propriedades da natureza dos seres vivos.

- **Introdução à Trigonometria pela construção do Relógio de Sol Egípcio**

A trigonometria, arte criada para calcular distâncias inacessíveis utilizando propriedades de triângulos retângulos, é fonte rica para ilustrar a interação entre o discreto e o contínuo. Em primeiro lugar, as relações trigonométricas no triângulo retângulo são razões entre comprimentos contínuos, e muitas delas não podem ser representadas como razões entre números inteiros. São “razões irracionais”. No ensino da Trigonometria, inicialmente a representação dessas razões como a/b, onde a e b são lados do triângulo retângulo, pode entrar em choque com o fato de serem irracionais, pois um irracional não pode ser escrito como p/q, onde p e q são inteiros, q não-nulo. Ocorre que a e b são *medidas* (*contínuas*) de lados de triângulos, enquanto que p e q são *inteiros* (*discretos*).

Se construirmos as razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de aplicações como as que são necessárias para a construção do relógio de sol, modelo egípcio (reto), deixamos claro para os alunos que essas razões podem ser números irracionais pois são *medidas contínuas.*

- **Raízes Quadradas e Operações com Radicais: A Alternativa da Geometria**

A criação da Álgebra Geométrica pelos gregos serviu para que pudessem realizar operações com grandezas diretamente, sem cair no problema de representar grandezas incomensuráveis. A Álgebra Geométrica é constituída por técnicas de realizar operações numéricas através da Geometria, lidando diretamente com medidas contínuas.

A Álgebra Geométrica, apresentada formalmente em *Os Elementos* de Euclides (aprox. 300 aC), é útil hoje no ensino de Matemática elementar, para representar radicais. Os radicais, geralmente apresentados como resultados de equações algébricas, possuem uma definição baseada nos inteiros, com umas regras de operação que costumam ser de difícil assimilação pelos alunos.

A operação entre radicais fica simplificada quando são representados como segmentos de reta. Assim, manipulando diretamente grandezas *contínuas*, trabalhamos com radicais, sem ficar presos à definição dos irracionais em termos de inteiros, *discretos*.

# Oficina 1

## Frações e Decimais : História e Significado

Lecionando em cursos universitários de áreas não exatas, como Administração de Empresas, Comunicação Social, Hotelaria, Publicidade e Propaganda, Marketing, Turismo e outros, notamos algumas constantes no que se refere à deficiência da formação matemática básica. Alunos dessas faculdade normalmente apresentam dificuldades para aplicar conhecimentos de Matemática elementar em cursos de nível superior que exigem certos cálculos matemáticos, como Estatística, Matemática Financeira ou Cálculo Diferencial e Integral.

Uma das maiores deficiências dos alunos aparece quando são levados a trabalhar com frações e números decimais. Ao que tudo indica, o ensino elementar de Matemática não consegue construir na mente dos alunos um conceito de Número Racional que permita sua utilização pelos alunos mais tarde. As operações com racionais são quando muito mecanizadas em torno de algumas regrinhas básicas, muitas vezes confundidas umas com as outras. Resultados como os das operações abaixo são considerados estranhos, ou mesmo fruto de um erro de operação, pelo fato de termos, as lidar com frações, propriedades peculiares.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

b) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$

d) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{15}$

Assim, a multiplicação do item a) gera um resultado menor que a divisão do item b). A adição de duas frações, duas partes, no item c), gera uma fração imprópria, uma representação de algo que é maior que um inteiro. No item d), surge a "fração negativa", cuja interpretação em termos de "pedaços" negativos não é trivial.

Qual a dificuldade de se trabalhar com frações e números com vírgula?

Uma tentativa de explicação para essa dificuldade parece estar na ênfase do ensino elementar na ideia de "treinamento intensivo" como única forma de ensinar a operar com frações e decimais. Não se procura propiciar a assimilação do conceito dos números racionais. Apenas repetir exercícios não é suficiente para construir o conceito de racionais, de modo a que ele possa ser usado mais tarde, quando os alunos estejam na faculdade. A experiência com o ensino universitário tem mostrado que falta uma conceituação maior por trás dessa repetição de exercícios. Vale lembrar a indagação irônica de Wilder sobre essa repetição exaustiva de exercícios:

> *Que diferença essencial existe entre ensinar um animal humano a usar um algoritmo para encontrar a raiz quadrada de um número e ensinar uma pomba a apertar certas combinações de botões coloridos para obter alimento*[150]*?*

Wilder faz essa pergunta em seu livro sobre o desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos, onde mostra como conhecer a história dos conceitos ajuda a transcender essa espécie de condicionamento behaviorista característico de algumas maneiras de ensinar matemática apenas pela repetição de exercícios.

Trabalhar o significado dos números racionais permite ao aluno utilizar o conteúdo elementar em situações diferentes. Mas trabalhar o significado não consiste em

---

[150] WILDER, Raymond Louis. *Evolution of Mathematical Concepts.* New York, John Wiley, 1973. 216 p., p. 5

fazer com que o aluno saiba apenas a definição do que caracteriza um elemento do conjunto dos racionais:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathrm{Z} \text{ e } q \in \mathrm{Z}^{*} \right\}$$

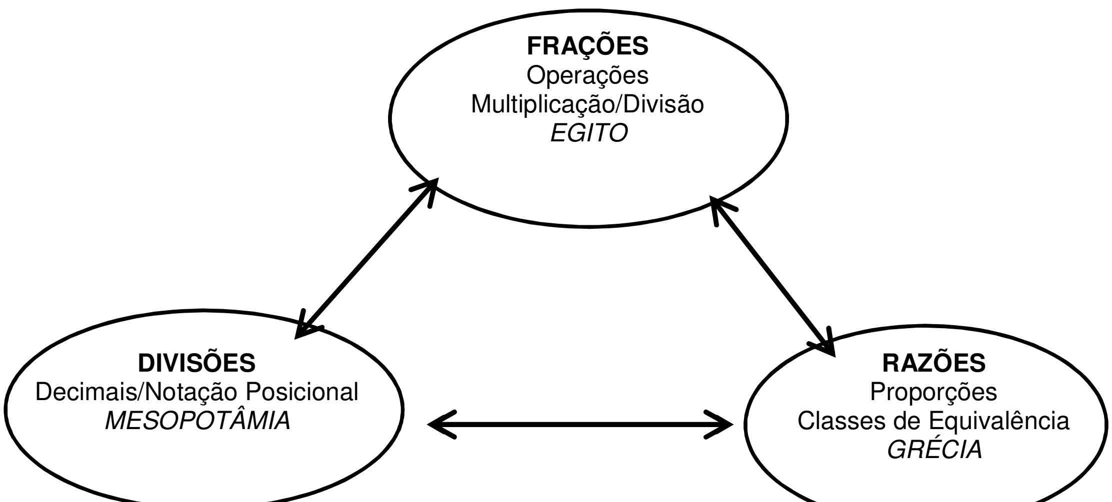
A definição acima baseia-se exclusivamente na ideia do *discreto*, pois um número racional é definido através dos inteiros, que são a representação matemática para o discreto[151]. É preciso distinguir entre a *definição* e o *significado*.

No que se refere ao ensino, os defeitos resultantes de uma visão de número unicamente baseada no discreto se fazem sentir claramente quando se chega a construção da ideia de número racional, pois devem-se fazer referências à partição, à divisão de segmentos em partes.

> *Partição resulta em partes que devem ser contadas, e muitas crianças lidam com as partes como entidades discretas. Para entender o conceito de número racional, no entanto, é necessário entender que partição resulta em uma quantidade que é representada por um novo tipo de número. A questão se transfere de Quantos? para Quanto?*[152]

Para um aluno que não possui o conceito de número racional, a leitura e a compreensão da definição acima não é suficiente para que trabalhe com o número. Conhecer o número racional significa tomar contato com os usos das frações e decimais, e conhecer sua história ajuda a mostrar que usos são esses. O significado dos racionais pode ser construído sobre o triângulo formado pelas três influências básicas na formação histórica do conceito dos racionais: Frações, Divisões, Razões.

Nesta oficina procura-se construir o significado do número racional através de seus componentes principais: a ideia de fração, que já era conhecida pelos egípcios; a ideia de número decimal, ou número com vírgula, oriunda da Mesopotâmia, onde a base era sessenta; a ideia de razão, advinda da teoria das proporções gregas.




*Triângulo de Significado do Número Racional*

Utilizando o triângulo de significado do número racional, trabalhamos a relação entre o discreto e o contínuo sem fazer opções radicais por um ou outro aspecto. Mesmo porque na Mesopotâmia e no Egito Antigo não havia ainda a preocupação por essa distinção, e os gregos, responsáveis pelas primeiras categorizasses dentro da Matemática, irão trabalhar diretamente com a Álgebra Geométrica, evitando também uma opção, mas lidando com grandezas discretas e contínuas.

---

[151] Cf. DA COSTA, Newton C. A. & DORIA, F. A. *Continuous & Discrete: A Research Program.* IN: Bol Soc. Paran. Mat. (2ª Série), v. 12/13, n. 1/2. Curitiba: Ed. da UFPR, 1991/2, pp. 123-127

[152] CARPENTER, Thomas P.; FENNEMA, Elizabeth; ROMBERG, Thomas A. (Ed.) *Rational Numbers: An Integration of Research*. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1993. 372 p., p. 3-4

Vamos agora olhar com mais atenção para cada um dos vértices desse triângulo, para caracterizar melhor o que pretendemos dizer.

**Egito**

De acordo com a História, a Matemática do Egito Antigo utiliza Números para contagem e para medida[153]. Como não poderiam empregar apenas números inteiros para fazer medidas, desenvolveram o uso de frações com numerador igual a um. Fixando-se o numerador em *um*, os egípcios podiam trabalhar com medidas de uma forma prática, considerando frações como representações de pedaços de um inteiro.

No Egito Antigo se utilizavam portanto frações em sua concepção estrita, própria, que é a de frações como partes de um inteiro. Isso se deduz da utilização quase que exclusiva de frações unitárias pelos egípcios, isto é, aquelas que possuem o numerador igual a um. A origem latina da palavra fração (do lat. *frangere*, quebrar, partir; daí, outras palavras correlatas como fragmentos ou frangalhos), parece fazer referência a essa noção inicial de fração própria. A fração imprópria não era utilizada no Egito, nem aquela com numerador diferente de 1, com a exceção misteriosa da fração 2/3. Toda grandeza quebrada pode ser expressa como uma soma de frações unitárias, e grande parte da Matemática egípcia consiste em expressar grandezas que seriam frações impróprias ou com denominador diferente de 1 através de uma soma de frações unitárias. A notação numérica dos hieróglifos permitia a representação das frações unitárias facilmente. E havia uma representação semelhante também em hierático, a escrita cursiva sagrada dos papiros.

As operações egípcias eram compatíveis com a noção de fração unitária. Basta inverter um número inteiro para obter uma fração unitária com o denominador desejado. Como não podemos somar diretamente frações com denominadores diferentes, basta superpor frações unitárias para se ter um número racional qualquer.

As frações unitárias egípcias também tinham utilidade para realizar divisões. Na verdade, os egípcios não concebiam divisões e multiplicações como operações no sentido atual do termo. Tinham duas operações que eram:

- mediação: tomar a metade de uma quantia;
- duplicação: tomar o dobro de um valor.

Com essas duas operações realizavam multiplicações e divisões de inteiros, conforme os esquemas abaixo:

[153] Cf. BOYER, Carl Benjamin & MERZBACH, Uta C. *A History of Mathematics: Second Edition*. Singapore: John Wiley & Sons, 1989. 764 p., p. 14

**Multiplicação egípcia:**

a) 7 x 9 = ?

| | |
|---|---|
| \ 9 | 1 / |
| \ 18 | 2 / |
| \ 36 | 4 / |
| 9+18+36=63 | 1+2+4=7 |

b) 13 x 15 = ?

| | |
|---|---|
| \ 1 | 15 / |
| 2 | 30 |
| \ 4 | 60 / |
| \ 8 | 120 / |
| 1+4+8=13 | 15+60+120=195 |

A divisão era realizada pelo mesmo processo, tomando a multiplicação pelo inverso do divisor. Aqui entram as frações unitárias.

**Divisão egípcia:**

a) 28 : 2 = 28 x ½

| | |
|---|---|
| 1 | ½ |
| 2 | 1 |
| \ 4 | 2 / |
| \ 8 | 4 / |
| \ 16 | 8 / |
| 4+8+16 = 28 | 2+4+8=14 |

b) 29 : 2 = 29 x ½

| | |
|---|---|
| \ 1 | ½ / |
| 2 | 1 |
| \ 4 | 2 / |
| \ 8 | 4 / |
| \ 16 | 8 / |
| 1+4+8+16=29 | 2+4+8+½=14½ |

Em todas as passagens que envolviam a representação de uma fração com denominador diferente de 1 era utilizado o princípio que vimos acima, que permite escrever qualquer fração como uma soma de frações unitárias. Os egípcios não consideravam uma fração racional própria geral m/n como uma "coisa", mas como parte de um procedimento incompleto[154].

No Egito Antigo, a necessidade de realizar medições de grandezas *contínuas* esbarrava na existência de uma linguagem numérica apta apenas para representar quantidades *discretas*, inteiras. Houve então um aperfeiçoamento da linguagem, de modo que pudesse permitir a representação de números quebrados. Criaram-se, assim, as frações, que representavam partes de um todo. Bastava para isso inverter os números inteiros, constituindo assim frações unitárias. Superpondo frações unitárias e números inteiros, podiam-se representar outras frações quaisquer, inclusive impróprias. As frações egípcias também possuíam o caráter de partição, sendo utilizadas para realizar divisões. A divisão entre inteiros, para os egípcios, era o produto de um inteiro pelo inverso do outro.

O próprio símbolo da multiplicação (x) parece ter origem na ideia de multiplicar pelo inverso da segunda, nas divisões entre frações.

Vamos agora procurar na matemática da Mesopotâmia elementos para compor a noção de número racional.

**Mesopotâmia**

[154] Cf. BOYER, Carl Benjamin & MERZBACH, Uta C. *A History of Mathematics: Second Edition*. Singapore: John Wiley & Sons, 1989. 764 p., p. 16

Na Mesopotâmia a Matemática desenvolveu-se mais que no Egito, e lá encontramos uma interessante abordagem numérica para lidar com o par discreto/contínuo, utilizando aproximações de números quebrados pela notação posicional sexagesimal. O sistema numérico sexagesimal dos babilônios permitia escrever números grandes e chegar a aproximações muito boas de números quebrados, racionais ou irracionais, utilizando poucos algarismos sexagesimais. Cada "casa" em relação às suas vizinhas tinha um valor muito maior ou muito menor, de modo que seus números cresciam muito rapidamente para um lado e decresciam também muito rapidamente em direção ao outro lado. Por exemplo, comparemos o número abaixo, em base decimal, e o real valor posição que cada algarismo representa:

2546,967 =

2000 + 500 + 40 + 6 + 9/10 + 6/100 + 7/1000

Já se os mesmos algarismos estivessem ocupando posições dentro do sistema sexagesimal babilônio, representariam:

$2546{,}967_{(60)}$ =

432000 + 18000 + 240 + 6 + 9/60 + 6/3600 + 7/216000

Assim, podiam utilizar números tanto para grandezas discretas quanto para grandezas contínuas, contornando o problema dos irracionais. Evitavam portanto a discussão entre o discreto e o contínuo.

Por exemplo, utilizando um algoritmo simples[155], obtinham um valor muito bom para a diagonal de qualquer quadrado facilmente, com exatidão de várias casas decimais, pois multiplicavam o lado do quadrado por um valor aproximado de $\sqrt{2}$, em linguagem sexagesimal escrito como 1;24,51,10 , que no sistema decimal significa 1,414213 , valor até essa casa exatamente igual ao que pode ser obtido hoje com calculadora.

Para os babilônios não fazia diferença se o número era inteiro, racional ou irracional, pois só lidavam mesmo com aproximações.

Os povos da Mesopotâmia não tinham, assim, necessidade de distinguir entre o discreto e o contínuo, pois lidavam diretamente com aproximações de números, e aproximações muito boas. Realizavam divisões e outras operações entre números e tinham uma forma de representar os resultados, mesmo quebrados, através de valores aproximados, independentemente de os mesmos serem racionais ou irracionais. Desenvolveram a notação posicional, utilizando-a para representar números quebrados (nossos "decimais"), e não trabalhavam com frações, mas com números decimais.

Com certeza, o fato de os cálculos de números irracionais serem tão facilitados e precisos fez com que nem se preocupassem com a existência de uma *natureza diferenciada* nessa classe de números.[156]

Essa distinção somente começará a fazer sentido na Grécia Antiga, onde surge a concepção filosófica do conhecimento científico e da Matemática.

**Grécia**

A Matemática grega é bastante diferente da Matemática pré-helênica, dos egípcios e babilônios. De modo especial, a noção numérica irá mudar radicalmente com os gregos. Os egípcios forneciam *soluções individualizadas* para cada problema proposto de Aritmética ou Geometria, sem tentar chegar a métodos gerais nem demonstrar fórmulas e afirmações amplas. Os babilônios forneciam *soluções aproximadas* dos valores numéricos, sem preocupação com um possível distinção da natureza numérica. Já os gregos irão trabalhar exatamente no âmbito das *generalizações* e na discussão da *natureza dos números* envolvidos.

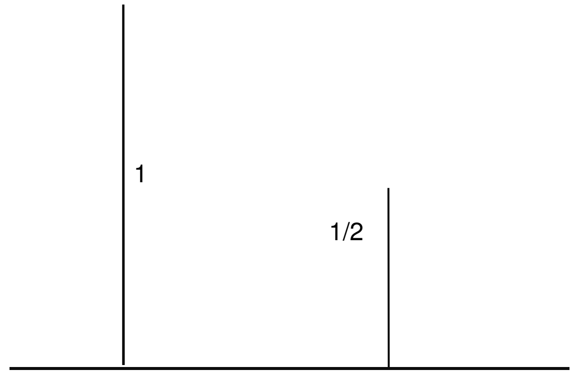
Os pitagóricos interessaram-se particularmente pela natureza dos números. O estudo da música e as relações matemáticas das *notas musicais*, levaram os pitagóricos a considerar a razão entre inteiros que representaria uma razão entre comprimentos.

---

[155] Cf. ZIPPIN, Leo. *Uses of Infinity*. Washington: The Mathematical Association of America, 1962. 151 p., p. 34

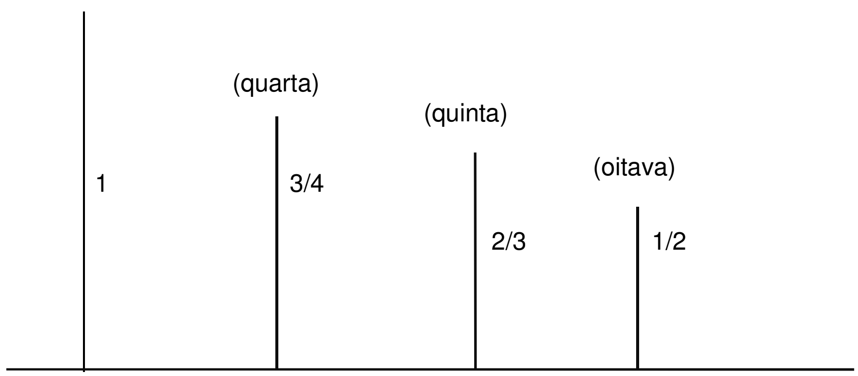
[156] Cf. BOURBAKI, Nicolas. *Elements of the History of Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 301 p., p. 147

Perceberam que a relação entre uma nota musical e a mesma nota musical uma oitava acima era de 2 para 1, em termos de comprimento de corda vibrante:

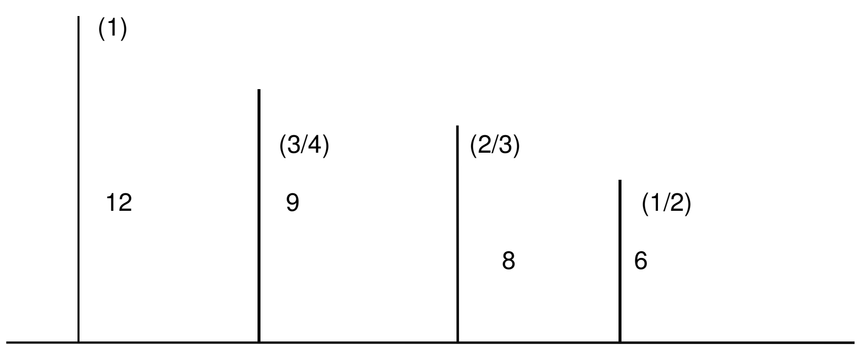



Desse modo, os pitagóricos começaram a tentar estabelecer uma correspondência entre os números de que dispunham, que eram somente os naturais, isto é, discretos, e as medidas de comprimento de segmentos, ou a altura de uma coluna d'água dentro de uma garrafa ou vaso, que é uma medida contínua. Ou seja, começaram a tentar explorar o par discreto/contínuo.

Descobriram então que havia muitas relações métricas interessantes associadas às notas musicais. Entre uma corda e a sua metade, há uma relação de uma oitava (isto é, produz o mesmo som, uma oitava acima). Há outras frações, ou razões entre comprimentos de corda, que produzem sons harmônicos:




Tomando o mmc entre 2, 3 e 4, que é 12, podemos obter uma unidade de medida padrão para observar melhor as razões todas.



Esses 4 números possuem propriedades interessantes que certamente fascinaram os pitagóricos, relacionados à teoria das médias, um dos seus assuntos favoritos:

$$9 = \frac{6 + 12}{2}$$ (9 é a média aritmética entre 6 e 12)

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)$$ (8 é a média harmônica entre 6 e 12)

Essas relações entre inteiros e medidas, entre o discreto e o contínuo, deve ter animado os gregos, pois confirmava, de alguma forma, a ideia de que tudo se expressava como razão entre números inteiros. Com esses sucessos iniciais, os pitagóricos entusiasmaram-se e reforçaram sua concepção de que tudo na natureza se expressa pelo número discreto, inclusive as grandezas contínuas.

Somente a crise dos incomensuráveis irá mostrar aos gregos que nem todas as relações entre medidas contínuas se expressam por meio de razões entre inteiros discretos. Embora os gregos não chegassem a reconhecer claramente a existência de uma natureza diferenciada de números, os irracionais, compreenderam ao menos que existiam grandezas incomensuráveis, e sobre elas estabeleceram regras de operação, dentro da álgebra geométrica, regras essas que permitiam realizar operações diretamente com os segmentos de retas, sem necessidade de representar a medida numérica dos segmentos incomensuráveis.

Desse modo, os gregos constataram uma lacuna numérica que seria mais tarde preenchida pelos irracionais. Mesmo sem saber exatamente que tipo de número iria preencher essa lacuna, os gregos utilizaram-na para delimitar definitivamente os números racionais (positivos), aqueles que podem ser expressos como razão entre inteiros.

Resumindo, podemos dizer que os gregos distinguiam entre números naturais, que para eles eram os únicos números de fato, e as razões entre números, desenvolvendo assim a ideia de razão associada aos racionais. Mas descobriram a lacuna numérica que viria mais tarde a ser preenchida pelos irracionais, permitindo assim a caracterização dos racionais como aqueles que podem ser representados como razões entre inteiros. Lidaram com o discreto via números naturais e com o contínuo via representações geométricas, respeitando, por assim dizer, igualmente ambos os aspectos da realidade, desenvolvendo a geometria para poder lidar mais diretamente com as grandezas incomensuráveis.

Acabamos de ver os três usos de noções numéricas que se completam na construção da ideia dos Racionais. De certo modo, podem-se situar as frações como tendo um primeiro desenvolvimento significativo no Egito; os decimais, ou a notação posicional para representar números quebrados, frutos de uma divisão não exata, tiveram origem na Mesopotâmia; por fim, a ideia de classes de equivalência e a concepção de racionais como razões entre inteiros como tendo sua origem primitiva na Grécia.

Desse modo, se chega ao número racional de forma mais completa, administrando a tensão conceitual entre o discreto e o contínuo sem fazer uma opção entre eles, já que ambos os aspectos são igualmente úteis na construção dos números racionais.

# Oficina 2

## Razão Áurea e a Beleza da Matemática

Os primeiros conhecimentos sobre a Razão Áurea datam do período em que a Matemática grega ainda estava começando a se organizar como ramo do conhecimento, no século VI aC. Como sabemos, existe uma diferença muito grande entre a forma em que a Matemática é construída e a forma como ela é organizada posteriormente. Captar essa diferença é importante para o ensino. Caso interessante para se estudar é a diferença entre a Matemática do tempo de Pitágoras de Samos (580-500 aC) e a época em que Euclides de Alexandria publicou sua obra *Os Elementos* (c. 300 aC). Os treze volumes de *Os Elementos* recolhem boa parte da elaboração matemática grega anterior. O livro I, que versa sobre geometria plana, encerra-se com o Teorema de Pitágoras sobre as medidas dos lados do triângulo retângulo. Embora não se conheça ao certo o modo como Pitágoras ou um de seus seguidores teria demonstrado seu Teorema, pode-se afirmar que não foi a mesma demonstração encontrada em Euclides duzentos anos mais tarde.

Quando Euclides escreveu sua obra, no começo do século III aC, já se tinha tornado claro para os geômetras o ideal de demonstração. Os princípios e leis da inferência válida, do raciocínio silogisticamente estruturado, foram estabelecidos de por Aristóteles (384-322 aC)[157], sendo a geometria historicamente o primeiro ramo do conhecimento a ser apresentado de maneira Lógica Formalizada. Mas *demonstrar* tinha um significado no tempo de Pitágoras e outro no tempo de Euclides.

Em sua obra *A Criação Científica*, Moles analisa o processo geral de construção do conhecimento científico e identifica essa metamorfose no significado da demonstração[158]. Machado, em referência ao trabalho de Moles, sugere a importância para o ensino da transformação da ideia de demonstração[159]. Em poucas palavras, pode-se dizer que tem valor trabalhar tanto a demonstração no estilo de Euclides quanto a demonstração pitagórica.

Por isso, nesta Oficina procuramos reproduzir uma atividade ao estilo pitagórico, para se tentar captar o momento de construção, ainda com caráter informal, do conhecimento. Não dispomos de qualquer obra completa de geometria grega anterior aos *Elementos* de Euclides[160], mas supõe-se que a maneira de demonstrar de Pitágoras fosse a construção de uma figura na qual se pudesse "ler" a ideia em questão. Pitágoras dedicava-se à exploração de um tema em seus múltiplos aspectos.

Um dos temas favoritos de Pitágoras era o Pentágono Regular, figura que possui propriedades muito interessantes.

---

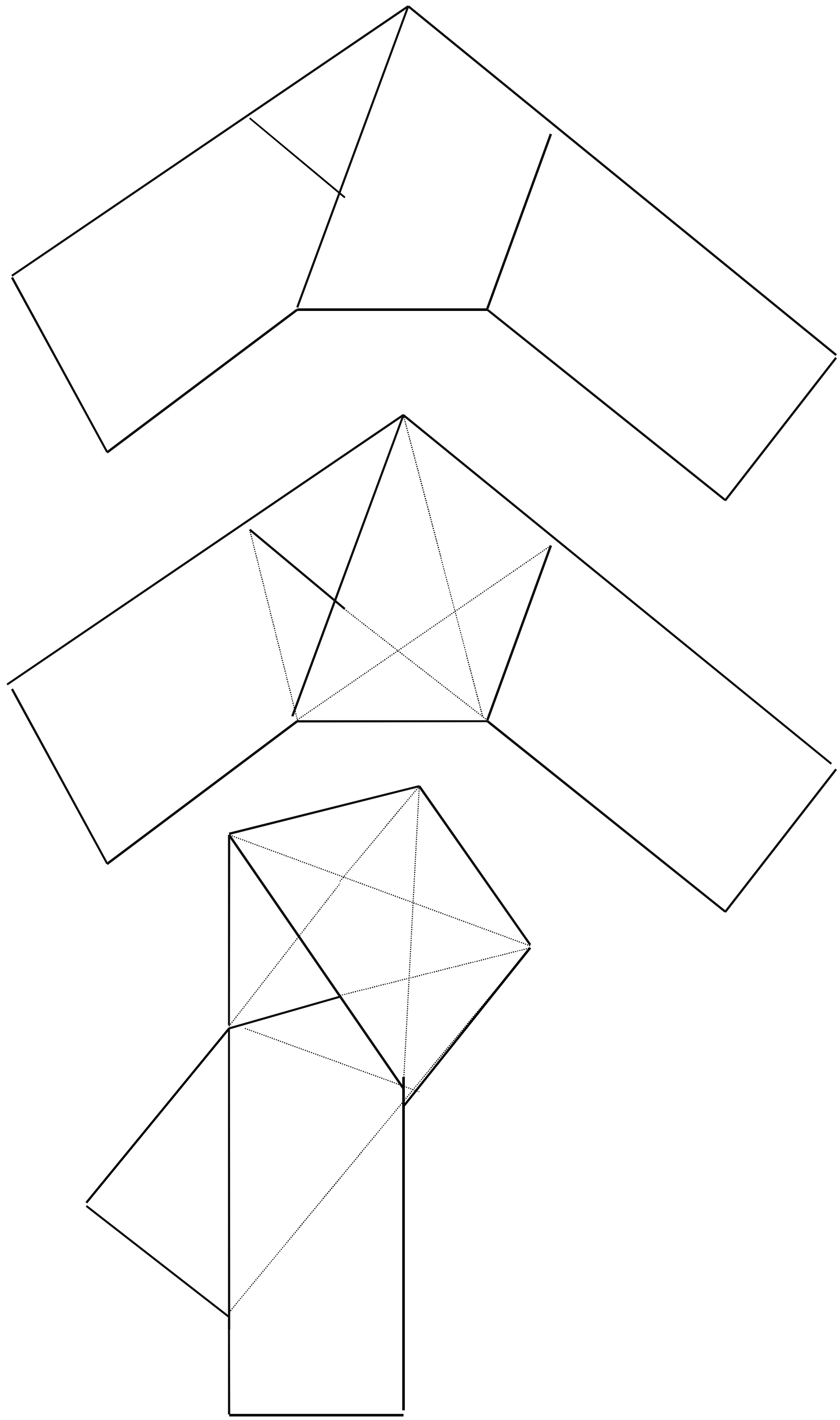
[157] Cf. KNEALE, Willian & KNEALE, Martha. *O Desenvolvimento da Lógica*. 1a ed. Trad. de M. S. Lourenço. Lisboa, Fundação Calouste Gulberkian, 1972, 770 p., p. 25

[158] Cf. MOLES, Abrahan Antoine. *A Criação Científica*. Trad. de G. K. Guinsburg. São Paulo, Perspectiva/EDUSP, 1971., p. 37

[159] Cf. MACHADO, Nílson José. *Matemática e Língua Materna: Análise de uma Impregnação Mútua*. São Paulo, Cortez, 1990. 169 p., p. 37

[160] Cf. KNEALE, Willian & KNEALE, Martha. *O Desenvolvimento da Lógica*. 1a ed. Trad. de M. S. Lourenço. Lisboa, Fundação Calouste Gulberkian, 1972, 770 p., p. 7

Para se chegar a essa figura, basta dobrar uma tira de papel, na tentativa de obter um “nó plano”, como mostramos abaixo.

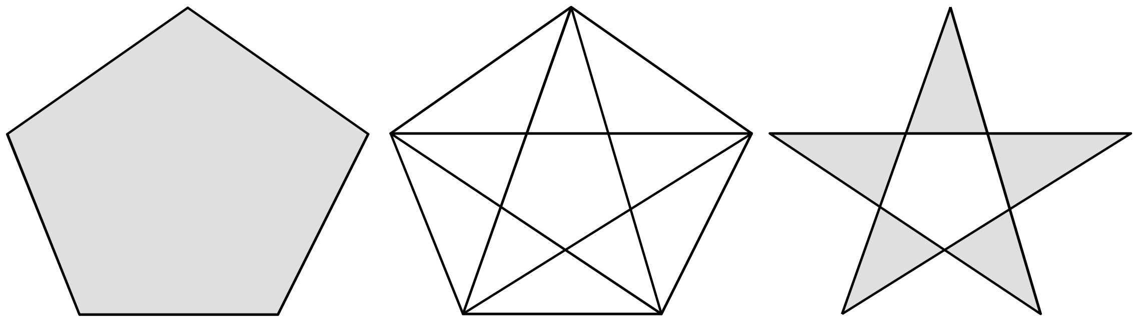


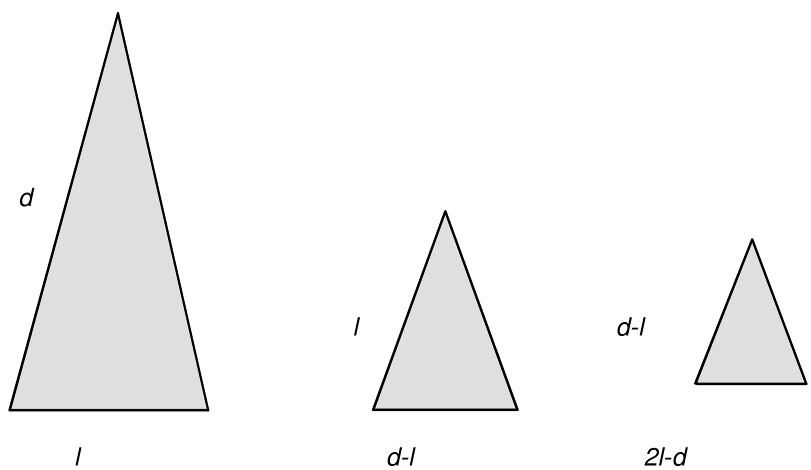
Olhando essa figura contra a luz de uma janela, podemos observar no interior do pentágono a formação de uma estrela de cinco pontas, chamado Pentagrama. O

Pentagrama é formado pelas cinco diagonais do Pentágono regular, e possui propriedades que devem ter fascinado os pitagóricos.

Podemos estudar as propriedades do Pentagrama observando a existência de vários tipos de triângulos dentro dele.

Comparando as medidas dos triângulos semelhantes que aparecem na figura do pentagrama, podemos calcular a razão de semelhança, baseando-se sempre em duas medidas: o lado *l* e a diagonal *d* do pentágono.



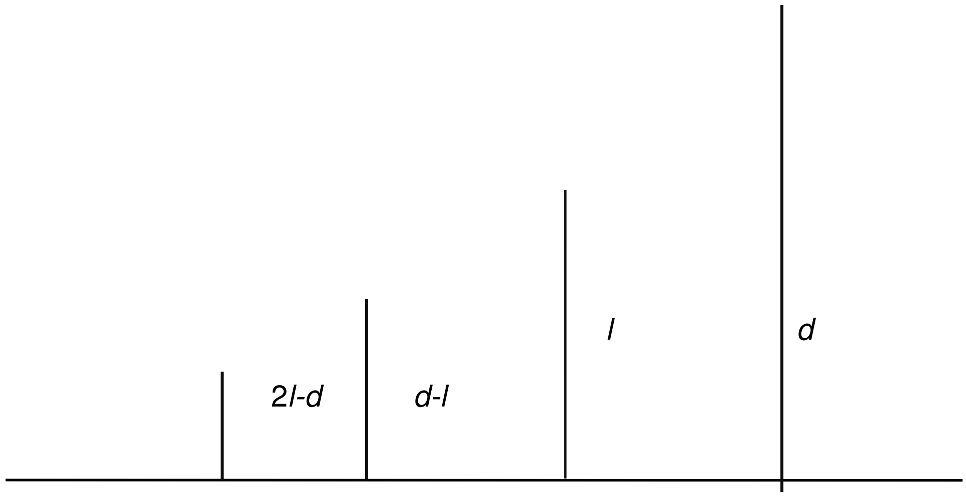



Fazendo a proporção entre os lados correspondentes dos triângulos acima, temos o aparecimento da famosa seção áurea, elemento essencial da estética grega. A razão áurea está também presente de forma intrigante em muitas formas da natureza. Em particular, está associada à sequência de Fibonacci e à espiral logarítmica[161], que representa o crescimento natural de um ser vivo, sem que perca a forma original:

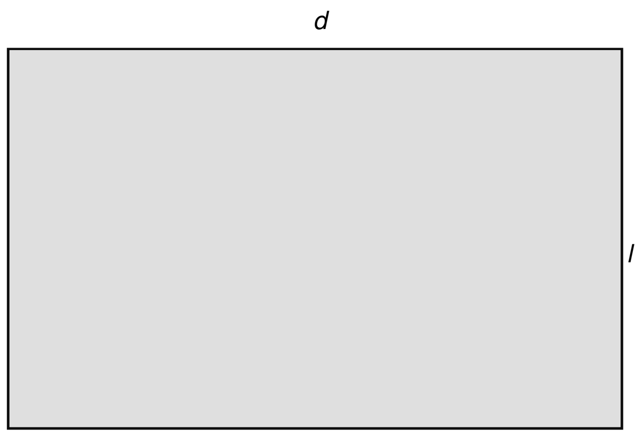
$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d - l}$$

Euclides chamava essa propriedade de *média e extrema razão*, significando com isso *a razão obtida quando um segmento de reta é dividido em duas partes diferentes tais que a razão do todo para a maior parte é igual à razão da maior para a menor*. Posteriormente, passou a ser conhecida por *razão áurea* ou *divina proporção*. Podemos observar suas propriedades nos segmentos de reta abaixo:

[161] Cf. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 149

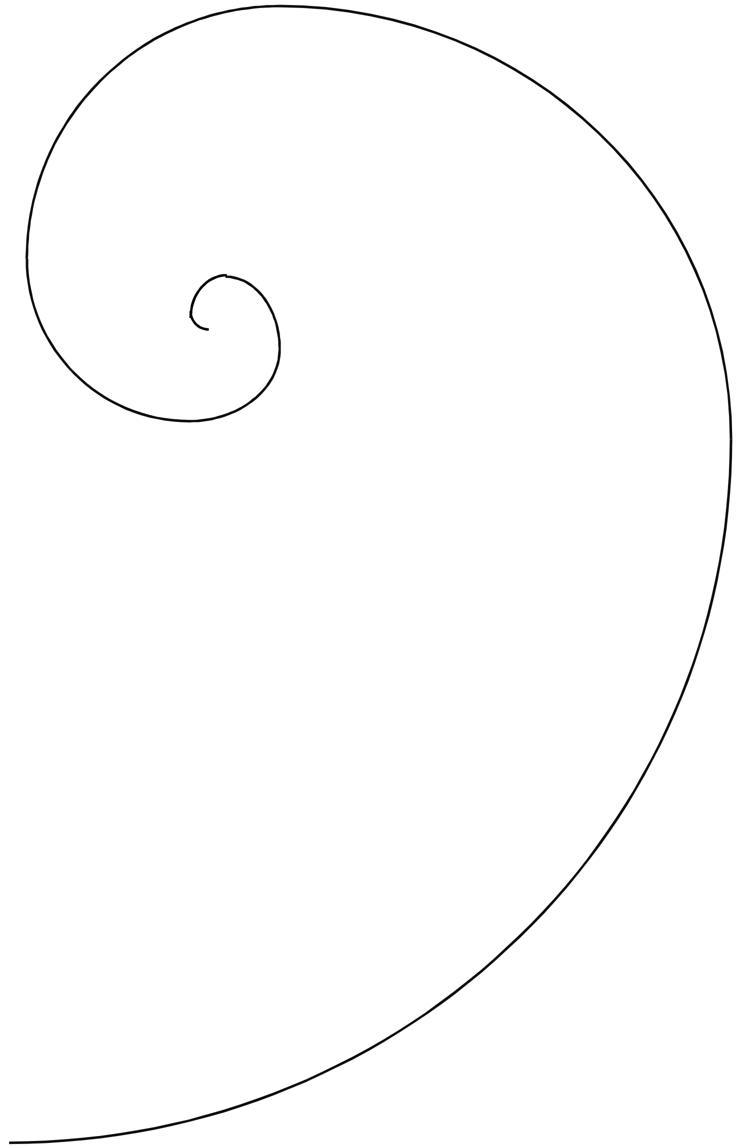


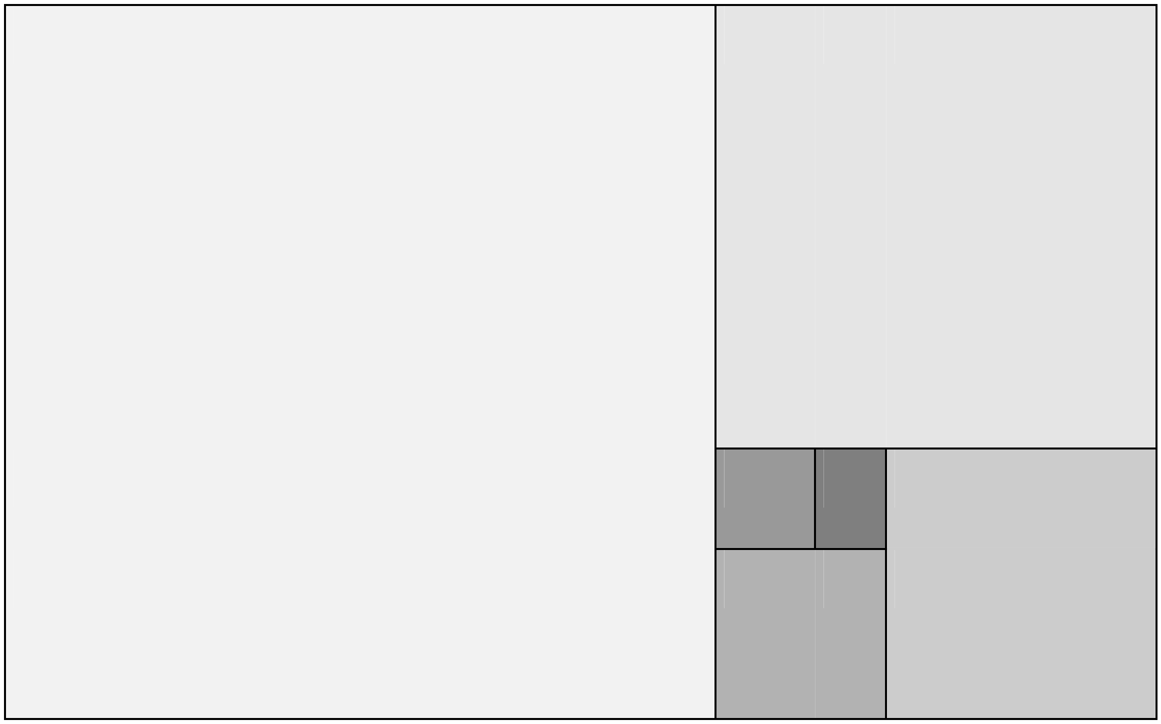

Juntando a primeira linha à segunda, obtemos a terceira, e assim por diante. Ocorre com a seção áurea o fenômeno da auto-propagação, em que se transmite a mesma proporção de uma para outra construção. Essa característica está presente não só nos triângulos, mas também nos retângulos construídos com as medidas da média e extrema razão, isto é, medidas tais que a razão do maior para o menor lado seja $\tau = \frac{d}{l}$. São os *retângulos áureos*, presentes em muitas construções gregas, como o parthenon.

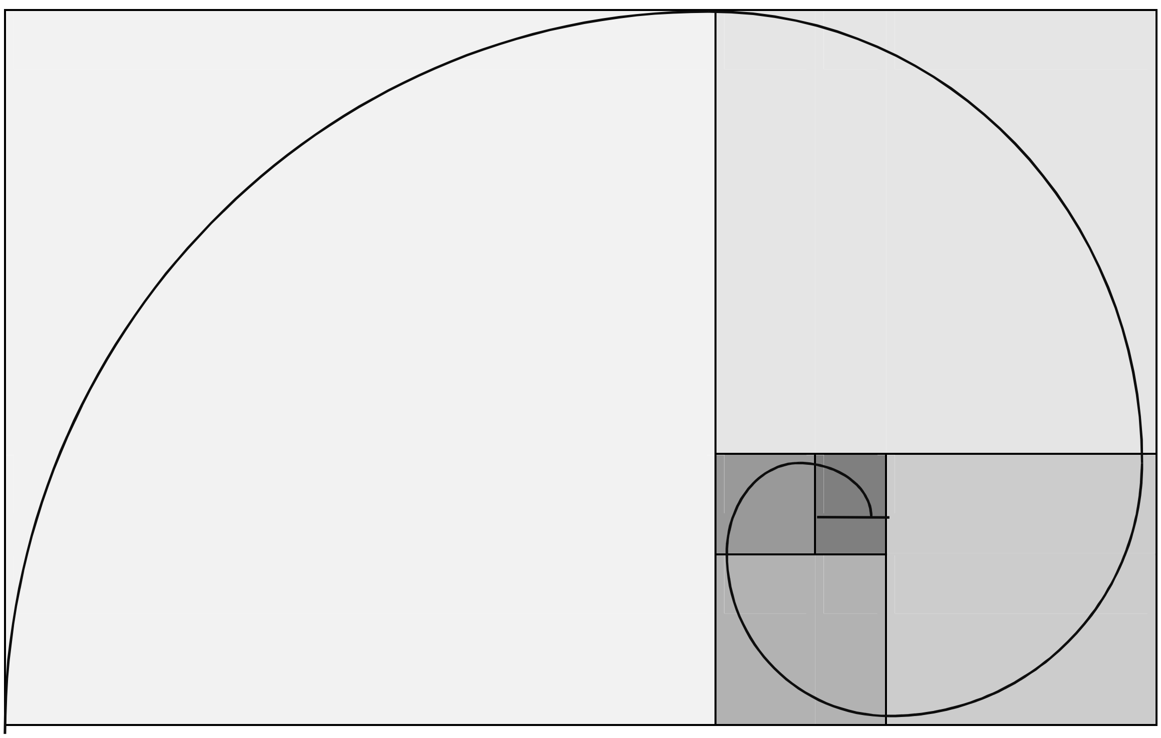



O retângulo áureo era usado na arquitetura e na arte grega clássica, e também é usado hoje em dia, pela proporção que guarda com medidas do corpo humano, como a relação entre a altura de uma pessoa e a altura do umbigo. Os cartões de crédito e outros cartões idênticos também são retângulos aproximadamente áureos. Dentro do retângulo áureo, podemos construir outros, sobrepondo o lado menor sobre o maior. Assim, tomando arcos nos quadrados formados por essa sobreposição, temos a espiral áurea, que mostra bem a auto-reprodução da razão áurea. Essa espiral, presente em caracóis e outros seres vivos, mostra as propriedades de um corpo que cresce mas não muda em forma[162]

[162] Cf. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 148







O cálculo do número de ouro ($\tau = d/l$) pode ser realizado a partir da equação do segundo grau em que transformamos a razão áurea pela substituição de $d = l\tau$. Facilmente podemos concluir que $\tau \sim 1{,}618$. Esse número pode ser utilizado para constatar a presença da proporção áurea nas medidas do corpo humano.

Leonardo de Pisa (1180-1250), ou Fibonacci, *o maior matemático europeu durante a Idade Média*, segundo a expressão de Young[163], ficou famoso por ter proposto o seguinte problema, em seu livro *Liber Abaci*, escrito por volta de 1202:

> *Quantos pares de coelhos podem ser produzidos a partir de um único casal em um ano se a cada mês cada par dá origem a um novo par que a partir do segundo mês se torna produtivo, e se não ocorrem mortes?*[164]

Esse problema dos coelhos dá origem à famosa sequência de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

cujo termo geral é dado pela fórmula recursiva

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,, \text{ onde } f_1 = f_2 = 1.$$

Evidentemente, trata-se de uma sequência de números inteiros, que representam o número casais de coelhos a cada mês. Mas, estudando a razão (entre inteiros!) de um número da sequência para seu sucessor, isto é, $r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ , temos um limite $L = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, que pode ser determinado dividindo a fórmula recursiva acima por $f_{n+1}$: $\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+1}} + \frac{f_n}{f_{n+1}}$ . Daí, temos $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$, e fazendo n tender a infinito, $n \to \infty \Rightarrow r_n \to L$, isto é, $L = 1 + \frac{1}{L}$. Resolvendo a equação $L^2 = L + 1$, obtemos

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto o limite da razão entre dois termos da sequência de Fibonacci é a razão áurea, $\tau$ = 1,6180... Esse número irracional não pode ser expresso como uma razão de inteiros, pois trata-se de uma medida contínua incomensurável. Vemos assim que a sequência de Fibonacci é bastante interessante para se apreciar a interação entre discreto e contínuo[165].

A razão áurea também dá origem à fração contínua infinita mais simples:

$$t = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

O valor dessa fração contínua é o limite da sequência dos quocientes parciais

$$1, \quad 1 + 1 = 2, \quad 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}, \cdots$$

os quais dão origem a razões entre números consecutivos da sequência de Fibonacci, que tende a $\tau$.

Desse modo, através do reconhecimento de triângulos semelhantes formados no interior do pentágono, chegamos a uma razão de semelhança, na qual surge a razão

---

[163] Cf. YOUNG, op. cit., p. 124
[164] Id., ibid.
[165] Cf. YOUNG, op. cit., p. 141

áurea, sendo a razão entre a diagonal e o lado do pentágono regular. O cálculo do número de ouro permite-nos depois explorar a medida de cartões de crédito e outras formas geométricas do cotidiano, bem como o reconhecimento de proporções estéticas no corpo humano.

Ao lidar com temas como números irracionais, semelhança de figuras, infinito, e ao praticar a medida e a aproximação, estamos trabalhando o tempo todo com noções tanto discretas quanto contínuas, estabelecendo ligações e caracterizando a matemática como uma ciência que lida com a realidade e ao mesmo tempo transcende-a, tendo ligações com a estética e a noção de beleza.

# Oficina 3

## Introdução à Trigonometria pela construção do Relógio de Sol Egípcio

A Trigonometria é um dos assuntos do currículo mais interessantes do ponto de vista epistemológico. Tem muita relação com outras áreas do conhecimento, sendo ela mesma formada por uma rede conceitual bastante heterogênea: elementos de Geometria, de Teoria dos Números e de Álgebra. Envolve a Geometria, fornecendo recursos para transcender a Geometria Euclidiana através dos modelos esféricos. Trata dos conjuntos numéricos, pois lida com muitos exemplos de grandezas incomensuráveis. E possui uma linguagem simbólica bastante particular, fazendo uso de sistemas sexagesimais e decimais ao mesmo tempo.

Com relação à interação discreto/contínuo, as razões trigonométricas fornecem especial exemplo da necessidade da administração da tensão entre esses termos. O discreto e o contínuo surgem de diversas maneiras na Trigonometria, e não explorar a relação entre eles é deixar passar uma ocasião ótima de se aprofundar nos conceitos matemáticos.

De modo especial, o trabalho com medidas é muito importante na trigonometria, embora seja deixado de lado em nome de um algebrização da linguagem trigonométrica que, ao nosso ver, é precoce e leva a deformações conceituais.

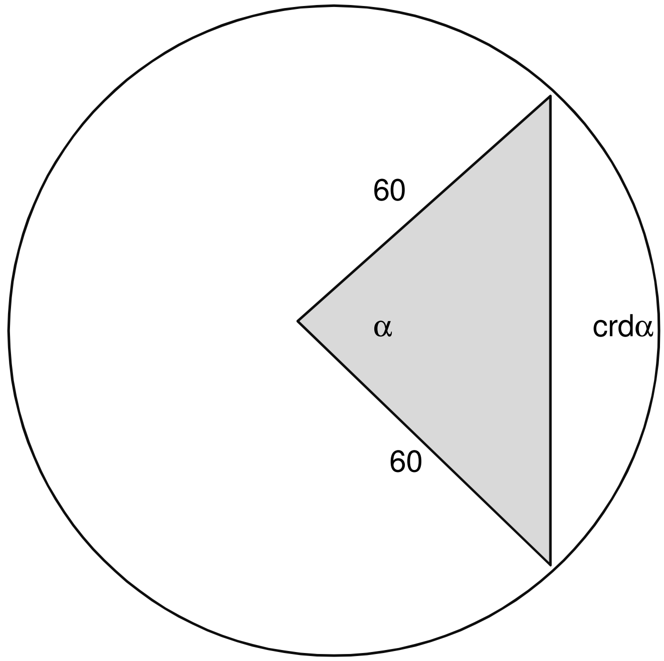
Da carga simbólica forte da Trigonometria advém muito da dificuldade do seu ensino e aprendizagem. A origem grega de boa parte dos seus conceitos e a utilização da linguagem dos ângulos calcada na base 60 dos povos da Mesopotâmia fazem com que os alunos tenham muita dificuldade em aprender Trigonometria.

Mas o que parece pesar mais que os símbolos empregados é o amálgama conceitual que utiliza, lidando com “razões irracionais”. O aluno - geralmente apresentado aos números irracionais na sétima ou oitava séries -, é levado a caracterizar o número irracional como sendo aquele que não se pode expressar por uma razão de números inteiros. A linguagem algébrica de p/q empregada pode levar, contudo, a passar despercebida a importância de p e q serem inteiros, e o número irracional fica sendo aquele que não pode ser escrito como p/q. Ora, quase na mesma época escolar, são apresentadas ao aluno as razões trigonométricas no triângulo retângulo, e muitas delas são números irracionais, embora escritos como b/a, c/a, , etc.

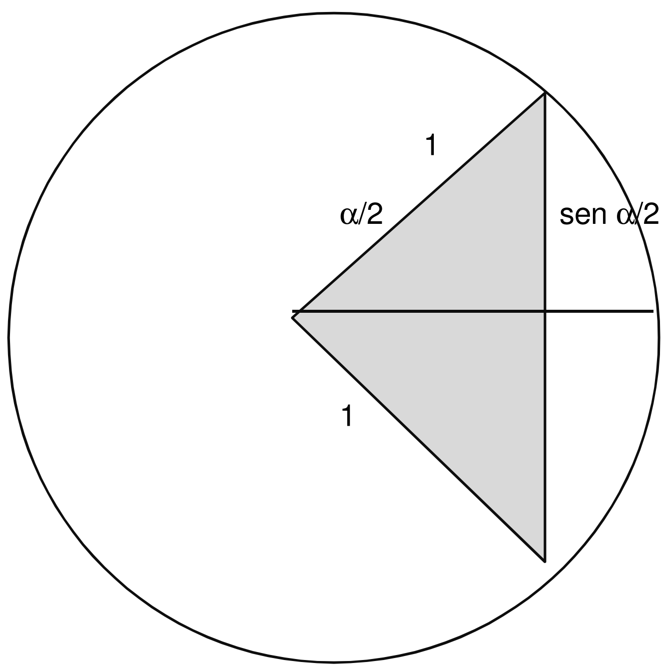
Surge assim um certo conflito conceitual entre as razões trigonométricas, por um lado, muitas delas expressas por números irracionais, e o conceito de número racional, por outro. Esse choque pode ser caracterizado como tendo origem na contraposição entre discreto e contínuo. A questão toda está no fato de que as razões trigonométricas estão diretamente associadas a medidas de segmentos, contínuos, enquanto que a distinção entre racionais e irracionais se baseia em considerações puramente discretas, isto é, dentro do conjunto dos números inteiros.

Para administrar essa aparente contradição, é preciso trabalhar com medidas, e a partir delas construir a ideia de razões trigonométricas. Tendo em mente a origem das razões trigonométricas, vemos que o seno de um ângulo era a medida da meia-corda associada ao ângulo, sendo portanto um segmento de reta - podendo ter medida racional ou irracional - e não era a princípio associado diretamente à ideia de número.

Partindo do círculo trigonométrico, que para os antigos tinha raio 60, chegamos ao seno considerado como uma *medida*. Ptolomeu (aprox. 150 dC) considerava a corda de um ângulo $\alpha$, conforme vemos abaixo.



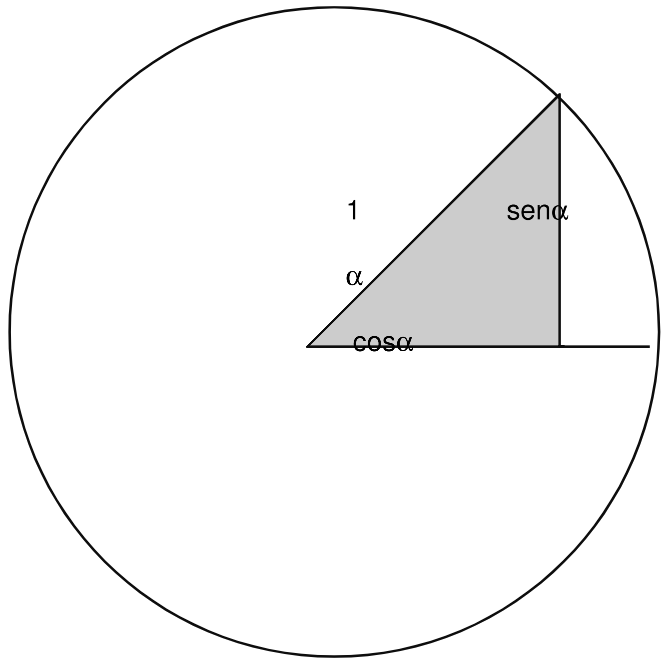

A metade da medida da corda de Ptolomeu é sessenta vezes a medida do seno da metade do ângulo $\alpha$, como vemos na figura abaixo.

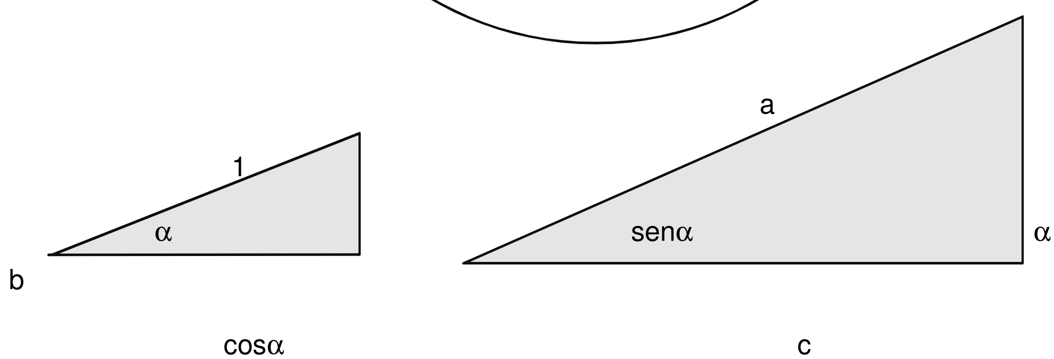



$$\text{sen } \alpha/2 = 1/120 \text{ cdr } \alpha$$

A transposição da medida seno para a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa pode ser visualizada observando a semelhança dos triângulos abaixo. Assim, estamos levando em conta a ideia de medida junto com a ideia de contagem.

Mostrar que as razões trigonométricas são apenas fruto de uma semelhança entre triângulos é útil para evitar baseá-las na ideia de razão. Pois as razões trigonométricas surgem inicialmente como medidas de segmentos, os quais podem ser racionais ou irracionais. Lidamos com o fato de que muitas razões trigonométricas possam ser expressas como números irracionais, fruto de medidas (continuas), e as considerações discretas que geram a definição de número irracional como aquele que não pode ser escrito em forma de p/q, p e q inteiros, q não nulo. O trabalho levando em conta o discreto e o contínuo acaba dando maior significado às razões trigonométricas.



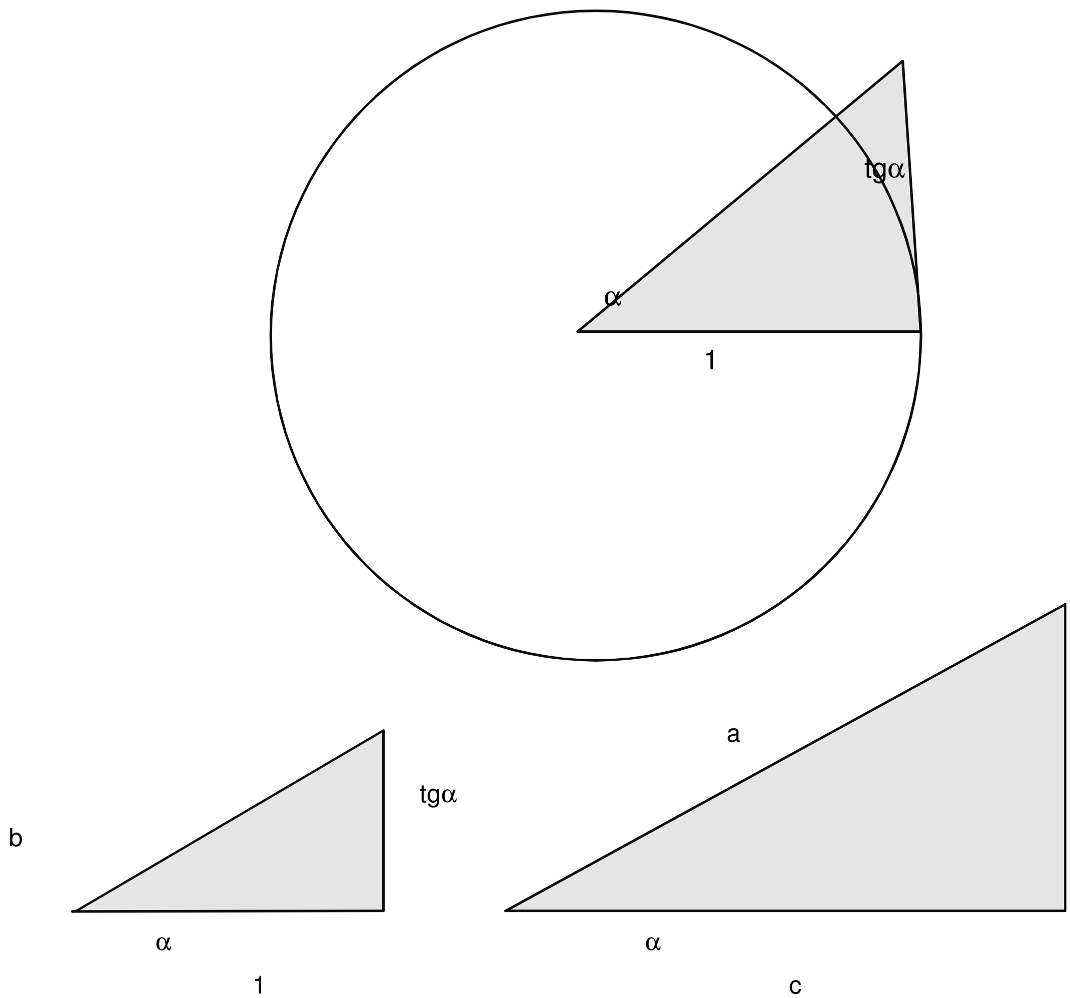




$$\frac{\text{sena}}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sena} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\text{cosa}}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \text{cosa} = \frac{c}{a}$$

As relações acima são fruto da observação da semelhança entre um triângulo retângulo de lados a, b e c e o triângulo semelhante que possui 1 por medida da hipotenusa.

Já a fórmula da tangente surge do triângulo retângulo com um dos catetos igual a 1, o raio do círculo trigonométrico:



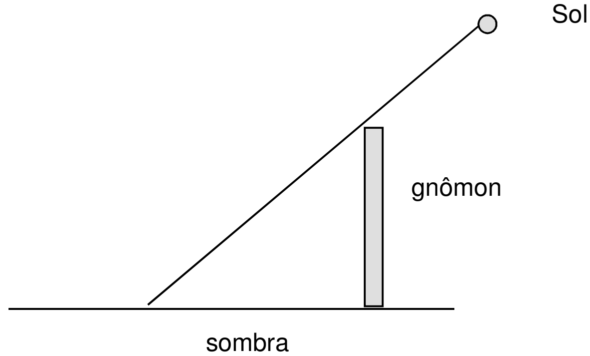

$$\frac{tg\alpha}{1} = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{b}{c}$$

Para percorrer esse caminho de associar medidas às relações trigonométricas, para trabalhar com o contínuo além do discreto, podemos fazer uso da construção do relógio de sol egípcio. A construção desse modelo de relógio de sol egípcio de 3500 anos serve para criar contexto para o trabalho com as razões irracionais da trigonometria, sem criar contradições de significado na mente dos alunos.

O princípio de funcionamento do relógio de sol egípcio é muito simples, pois basta associar o comprimento da sombra de uma haste vertical em uma dada hora do dia, de acordo com a inclinação da luz solar. É um trabalho que envolve apenas o conhecimento de semelhança de triângulos e das relações métricas no triângulo retângulo.

Uma vez que os raios de sol, em uma dada região da Terra, são paralelos, temos a existência de um mesmo ângulo de inclinação com relação ao solo.

Esse ângulo, associado às medidas da haste vertical e da sombra produzida por ela, permite visualizar triângulos retângulos que variam acordo com a hora do dia.

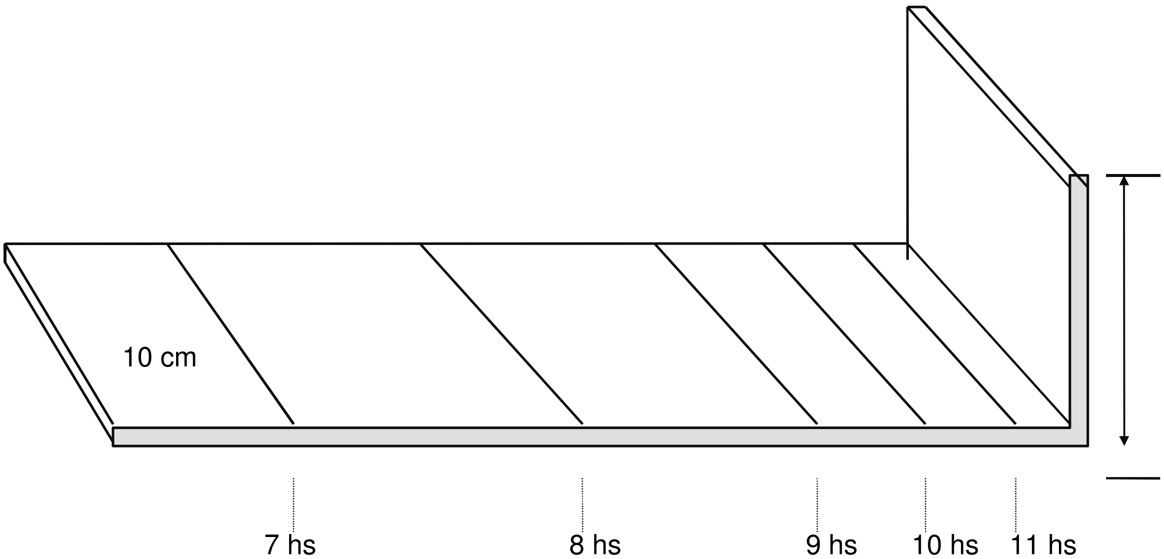



Em uma mesma região da terra, a uma mesma hora do dia, a inclinação do raio solar será a mesma. Desse modo, dependendo da altura da haste vertical do relógio de sol (chamada *gnômon*), teremos um determinado comprimento de sombra. Considerando o comprimento do *gnômon* como sendo unitário, uma tabela de sombras poderá ser construída, indicando o provável comprimento da sombra para cada hora solar:

| Hora da manhã | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| Sombra | $2+\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}/3$ | $2-\sqrt{3}$ |

Esses valores obtidos para as sombras não têm origem, inicialmente, em razões de lados de triângulos, mas como medidas dos próprios lados dos triângulos. Desse modo, o fato de serem todos quase todos irracionais não deve causar estranheza, pois tratam-se de medidas de grandezas contínuas.

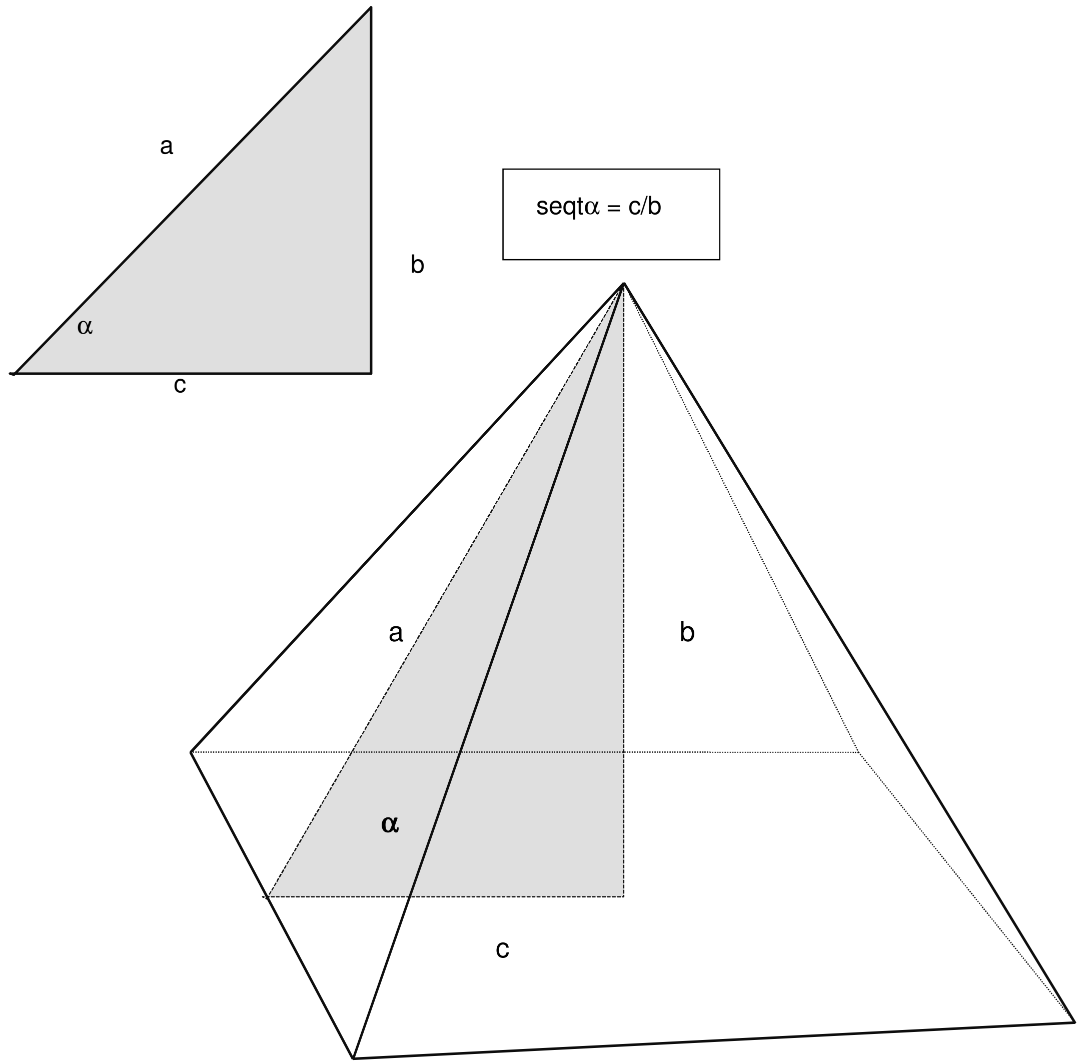
Com essas medidas, podemos fazer uma tabela de valores aproximados das sombras, para construir o relógio de sol com haste vertical de 10 cm.




Relógio de sol (modelo egípcio - reto)

| Hora | Ângulo da luz solar (em relação ao solo) | Gnômon | Comprimento da sombra (aprox.) |
|---|---|---|---|
| 7 hs - 17 hs | 15° | 10 cm | 37,3 cm |
| 8 hs - 16 hs | 30° | 10 cm | 17,3 cm |
| 9 hs - 15 hs | 45° | 10 cm | 10 cm |
| 10 hs - 14 hs | 60° | 10 cm | 5,8 cm |
| 11 hs - 13 hs | 75° | 10 cm | 2,7 cm |

A medida da sombra, dado um gnômon, é a cotangente do ângulo de inclinação da luz do sol em relação ao solo. De fato, os egípcios conheciam essa relação, que chamavam de *seqt*. O seqt era usado para manter constante a inclinação das faces oblíquas das pirâmides, desde a base até o cume. Bastava que o deslocamento vertical mantivesse para com o deslocamento horizontal a mesma razão, para que a parede da pirâmide mantivesse a mesma inclinação.




Olhando as relações trigonométricas - seno, cosseno e tangente - como medidas de segmentos, que podem também ser obtidas por semelhança de triângulos através de relações entre lados correspondentes, trabalhamos diretamente com a continuidade. Desse modo, evitamos o ensino que parte unicamente das “fórmulas” trigonométricas, não evitando a confusão entre a/b (razões entre grandezas contínuas) e p/q (razões entre números inteiros discretos).

# Oficina 4

## Raízes Quadradas e Operações com Radicais: A Alternativa da Geometria

O trabalho com radicais, geralmente feito na última série do primeiro grau, costuma apresentar grandes dificuldades para o aluno, que se vê perdido em meio a uma série de propriedades de operações com expoentes e raízes. Essas propriedades são fáceis de serem confundidas umas com as outras, e o aluno costuma não saber diferenciar quando "pode" multiplicar os radicandos, quando "deve" multiplicá-los, etc.

Erros como os dos exemplos abaixo são bastante freqüentes:

*a*) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$;

*b*) $2\sqrt{3}=\sqrt{6}$;

*c*) $\left(\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{10}$;

*d*) $\sqrt{3}+\sqrt{6}=\sqrt{3+6}=\sqrt{9}=3$;

*e*) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}$.

Ocorre que raízes quadradas de muitos números inteiros são números irracionais, e portanto não têm representação como razão de números inteiros. Trabalhar com a notação exata, utilizando o símbolo da radiciação, e apenas valendo-se das propriedades dos expoentes, é um caminho árduo, pois limita-se à linguagem do discreto, enquanto que os radicais são muitas vezes expressões de grandezas contínuas.

O símbolo da raiz não ajuda muito a se enxergar a natureza do radical. A história mais conhecida para o símbolo $\sqrt{\ }$ deve-se à Euler. Segundo a hipótese de Euler, o símbolo teria origem na deformação da letra *r,* inicial da palavra *radix*, raiz em latim. Mas Cajori[166] argumenta contra essa teoria, mostrando que o símbolo *R,* em evidente referência à palavra *radix*, teria convivido por séculos com o sinal da raiz. Tal notação aparece em traduções latinas a partir do árabe feitas por Gerardo de Cremona e João de Sevilha. Os trabalhos de Luca Pacioli e Leonardo de Pisa se encarregaram de divulgar o símbolo *R* na Europa, no início do século XVI.

O símbolo $\sqrt{\ }$ teria assim uma origem diversa. Cajori refere-se a estudos de historiadores que identificaram em vários manuscritos o uso do *ponto* para representar a raiz quadrada. Assim,

$$\bullet\, 3 = \sqrt{3}.$$

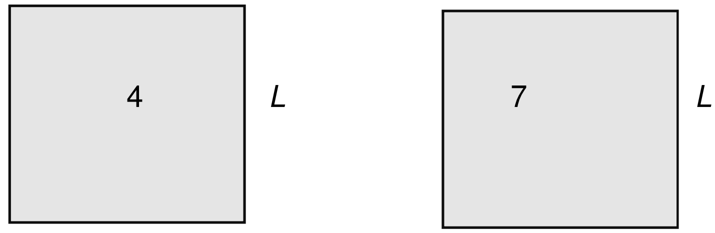
Da deformação do *pontinho* é que teria surgido, segundo essa teoria, o símbolo para a raiz:

$$\bullet \qquad\qquad\qquad \sqrt{\ }$$

Essa história serve para mostrar que o *símbolo* tem muitas vezes pouca relação com o *significado* que representa. Mas a história do símbolo da raiz traz outro dado muito interessante para a construção do significado dos radicais. Trata-se de um símbolo que "não pegou", encontrado em manuscritos de Junius Nipsus no século II, e que aparece também nos trabalhos de Gerbert (ano 1000). É a letra *L,* de *latus* (lado, em latim). Viete foi o grande divulgador do símbolo *L*. Mas quando Napier criou os logaritmos, utilizou a letra *L,* que já não podia ser utilizada para as raízes.

[166] Cf. CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations.* Vol. I: *Notations in Elementary Mathematics*. Chicago: The Open Court, 1928. 451 p.

Apesar de que o símbolo *L* não "vingou", a ideia por trás da sua utilização para representar a raiz quadrada é muito interessante. Pois está associada diretamente ao comprimento do lado de um quadrado que tem por área o radicando.



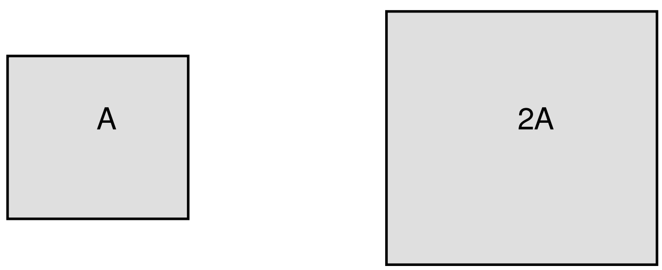

$L^2 = 4 \Rightarrow L = 2$ $\qquad$ $L^2 = 7 \Rightarrow L = \sqrt{7}$

Imaginar o que seria $\sqrt{2}$ fica, com essa notação, mais simples, pois se associam diretamente números irracionais com grandezas contínuas. Essa tradição remonta aos gregos, e tem pelo menos uma referência clássica em um problema proposto por Sócrates (469-399 aC).

Sócrates propõe o problema para um criado na casa de um amigo, e através de seu método de perguntas acaba por fazer com que o interlocutor resolva, por si mesmo, o problema em questão[167].

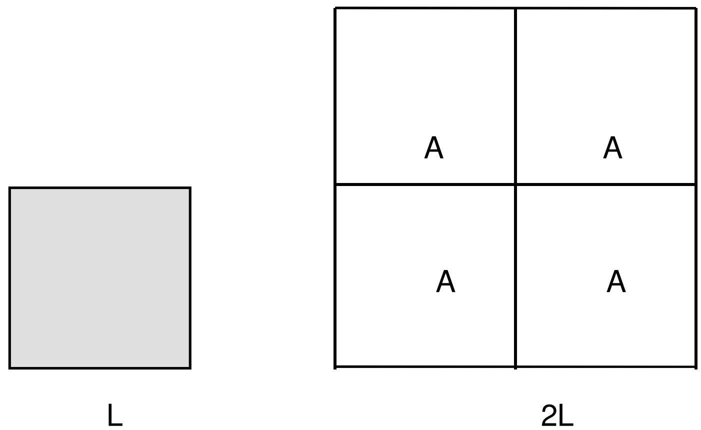
O problema pode ser expresso na seguinte forma:

> *Dado um quadrado qualquer, obter o lado de um quadrado que tenha o dobro da área do quadrado original.*



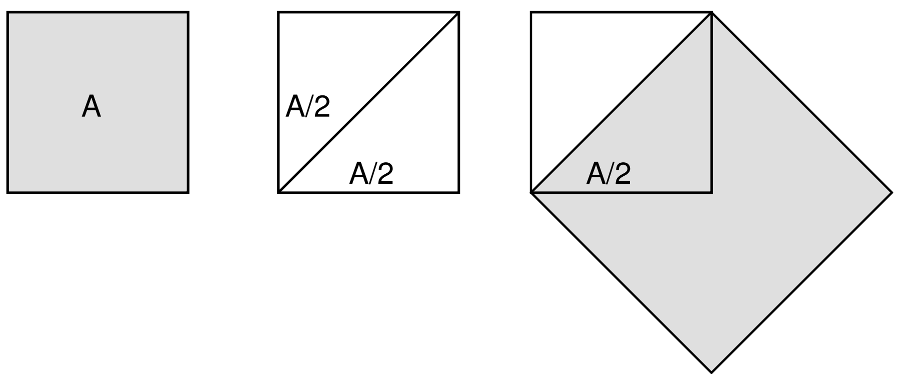

[167] Cf. GUSDORF, Georges. *Professores para que? Para uma Pedagogia da Pedagogia.* Trad. João Benard da Costa e Antonio Ramos Rosa. Lisboa: Moraes, 1970. 318 p., p. 13

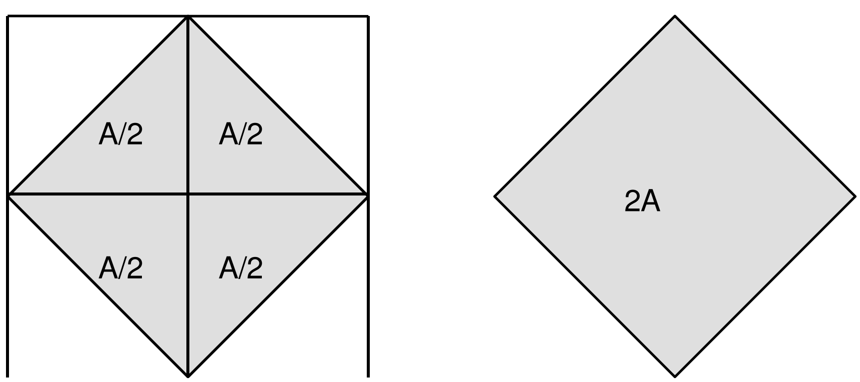
A primeira reação do criado é dizer que basta dobrar o lado do quadrado, para obter o dobro da área. Sócrates então mostra que o quadrado que tem o dobro do lado tem na verdade quatro vezes a área.




Como os gregos só concebiam números inteiros, o criado certamente tentaria obter um valor inteiro para o lado, sem poder descobrir qual seria o número (entre 1L e 2L) que representaria o lado do quadrado com o dobro de área.

Mas Sócrates vale-se do recurso às medidas, ao trabalho direto com a Geometria, com grandezas contínuas, para obter o lado desejado, que é a diagonal do quadrado inicial.




Sócrates mostra, utilizando apenas geometria, que a área do quadrado obtido é o dobro da área do quadrado inicial, pois contém exatamente quatro metades do mesmo.

Isso ele faz sem entrar na questão complicada de tentar escrever um "número" $\sqrt{2}$. Essa foi sempre a solução grega para o problema de lidar com números irracionais. Diante da dificuldade de se representar raízes irracionais por meio de números inteiros, criou-se a Álgebra Geométrica, que manipula diretamente grandezas contínuas, já que os números discretos são insuficientes para representar irracionais.

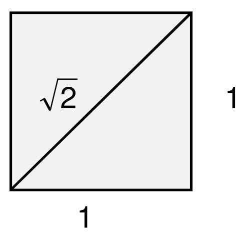
A criação da Álgebra Geométrica pelos gregos serviu para que pudessem realizar operações com grandezas diretamente, sem cair no problema de representar grandezas incomensuráveis. A Álgebra Geométrica é constituída por técnicas de realizar operações numéricas através da Geometria, lidando diretamente com medidas contínuas.

Apresentada formalmente em *Os Elementos* de Euclides (~300 aC), a Álgebra Geométrica é útil hoje no ensino de Matemática elementar, para representar radicais. Os radicais, geralmente apresentados como resultados de equações algébricas, possuem uma definição baseada nos inteiros, com umas regras de operação que costumam ser de difícil assimilação pelos alunos.

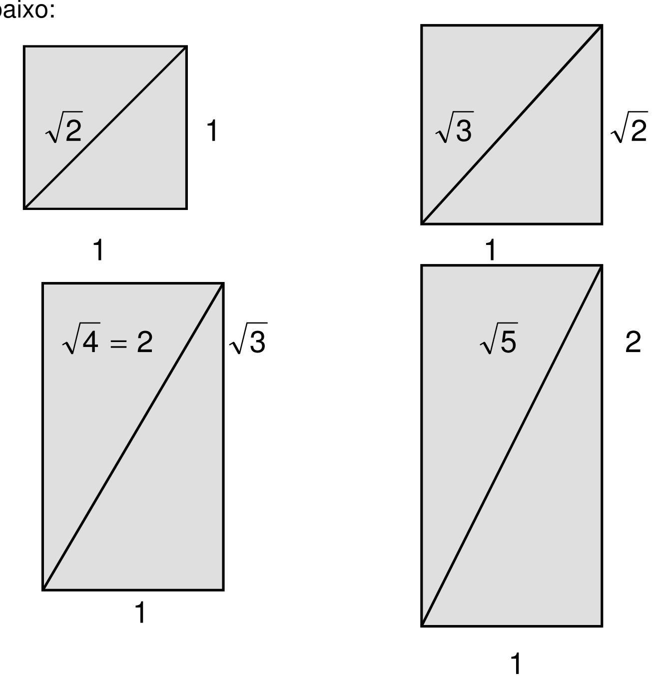
A operação entre radicais fica simplificada quando são representados como segmentos de reta. Assim, manipulando diretamente grandezas *contínuas*, trabalhamos com radicais, sem ficar presos à definição dos irracionais em termos de inteiros, *discretos*. A solução de equações algébricas fica também mais visível, em termos de geometria, manipulando segmentos e áreas.

Vamos mostrar a visualização geométrica dos radicais e suas operações, através da recuperação das operações fundamentais da álgebra geométrica de Euclides.

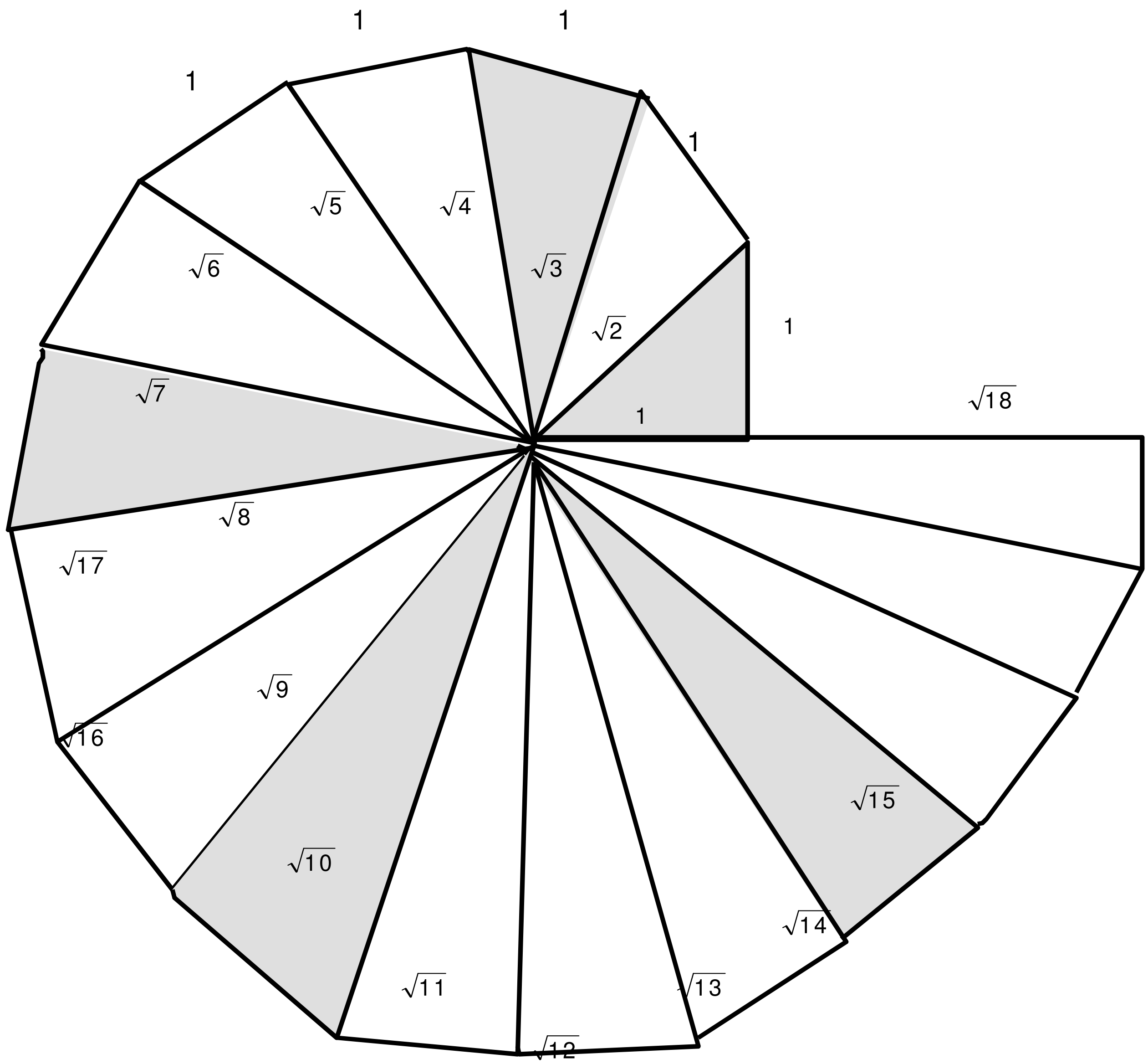
Em primeiro lugar, podemos representar raízes quadradas de qualquer número inteiro como uma diagonal de um retângulo com lados convenientes. O exemplo de Sócrates já fornece a representação de $\sqrt{2}$, que é a diagonal do quadrado de lado unitário:




Outras raízes quadradas podem ser construídas, tomando outros retângulos, conforme os desenhos abaixo:



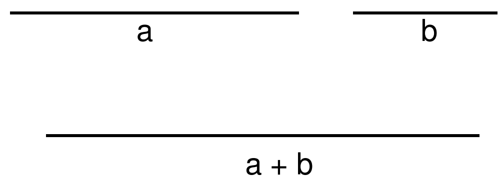
Essa construção seqüencial pode ser agrupada em uma espiral, conforme o diagrama abaixo, representando a espiral pitagórica para a geração de irracionais[168]:



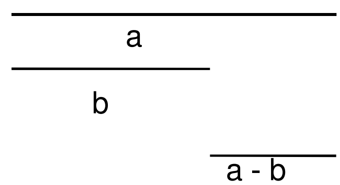

168 BELL, Frederick H. *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary Schools).* Dubuque, Iwoa: Wm C. Brown, 1978, 562 p., p. 51

Essa maneira de representar grandezas geometricamente, intitulada Álgebra Geométrica, ficou cristalizada no livro II de *Os Elementos* de Euclides. Mas os livros I e II, segundo os historiadores, referem-se à matemática pitagórica, ou seja, foram escritos por Euclides com base no conhecimento que remonta a Pitágoras e seus seguidores, até 200 anos antes de Euclides. As operações algébricas eram realizadas através da manipulação geométrica de segmentos de reta e áreas, pois as grandezas contínuas não possuíam, na visão pitagórica discreta de números, uma representação numérica.

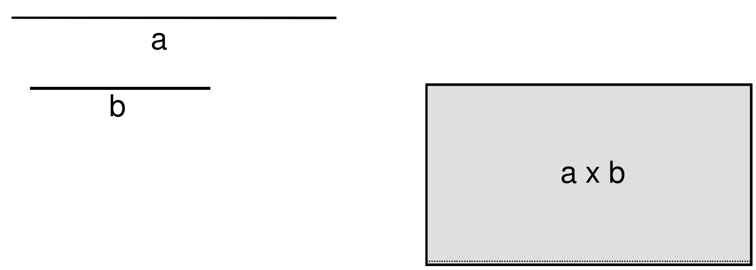
**1. Adição (a + b)**



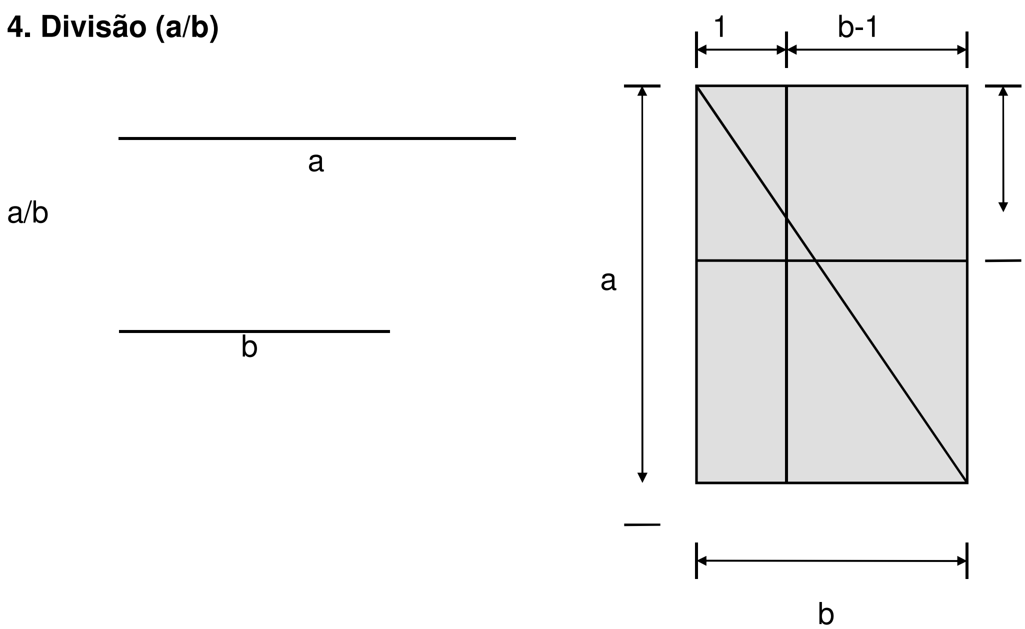

**2. Subtração (a - b)**



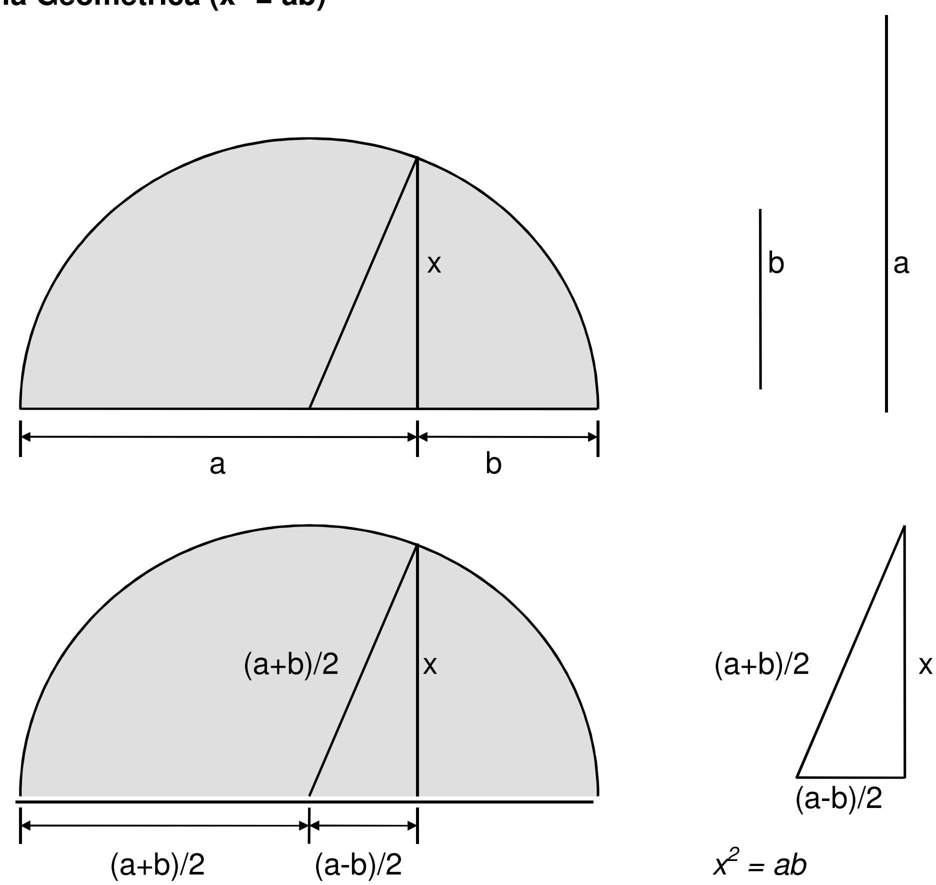

**3. Multiplicação (a x b)**



**4. Divisão (a/b)**




**5. Média Geométrica ($x^2$ = ab)**




$x^2 = ab$

A utilização da via geométrica permite fazer operações diretamente com quaisquer representações de valores reais, sem necessidade de regras de operação com radicais, no caso de raízes quadradas.

Assim, lidando com a continuidade, complementamos a visão discreta da representação de raízes quadradas em forma de radicais, e permitimos uma visualização direta tanto das próprias raízes quanto dos resultados de suas operações. O trabalho com medidas permite fazer operações com os radicais sem que se tenha de ater às mil regras de operação, pois está livre de complicações simbólicas como índices de raízes ou potências fracionárias.

# Conclusão

*Unificação, o estabelecimento de uma relação entre objetos aparentemente diversos, é ao mesmo tempo uma das grandes forças motivadoras e uma das grandes fontes de satisfação estética na matemática.*

Davis & Hersh[169]

Segundo as teorias estéticas, a harmonia não é obtida pela padronização, pela uniformização dos elementos, mas pela convivência adequada dos contrários. Dentro da Matemática, as duas correntes principais, a discreta e a contínua, apresentam aos olhos de quem as estuda diferenças aparentemente inconciliáveis, que fazem com que sejam justamente correntes distintas. Existe uma tensão conceitual entre elas, como entre fogo e água. Mas pode ser construída também uma elegante interrelação entre o discreto e o contínuo, em grande harmonia, respeitando as diferenças de cada um. Essa harmonia decorre da administração da tensão, que é necessária, a nosso ver, para desenvolver conceitos muito importantes da Matemática.

No ensino, essa harmonia deve estar presente com freqüência, pois é com ambas as pernas que se caminha, ora colocando uma à frente, ora outra, com cadência. Administrar essa tensão é missão de quem pretende ensinar Matemática de forma significativa, visando a construção dos conceitos e a compreensão do encadeamento interno da Matemática.

Procuramos demonstrar, ao longo desta Tese, a necessidade e a possibilidade dessa harmonia. Ou seja, que é necessário trabalhar ambos os aspectos da quantidade, sem fazer com que um sobrepuje o outro ou procure eliminá-lo. Mostramos que a História da Ideia de Número, das Ideias Fundamentais do Cálculo e das concepções científicas sobre Qualidade e Quantidade levam a concluir que ambos os aspectos estão presentes igualmente em muitas revoluções e avanços conceituais dentro da Matemática.

Especificamente, mostramos como isso é necessário no ensino do Número inicial e na ampliação do campo numérico com a introdução dos racionais e irracionais. Vimos que a própria ideia de número irracional repousa em uma interação entre dois aspectos, com uma tensão que ficou registrada na história da Grécia Antiga como a crise dos incomensuráveis. Assim, ao se ensinar Matemática, devemos levar em conta que a contagem e a medida se complementam, na construção do conhecimento numérico pelos alunos.

Mostramos também que o episódio histórico da construção das ideias fundamentais do Cálculo deixa clara a necessidade de administrar essa tensão. Afinal, da postura exclusivista dos gregos, que se recusavam a administrar essa interação, evitando encarar de frente a ideia de infinito, decorreu um atraso de mais de um milênio e meio até que as ideias, já em germe em Arquimedes, se transformassem no teorema fundamental do Cálculo com Newton e Leibniz.

Quando o mundo científico estava maduro para conceber o Cálculo, também foi pela via da administração dessa tensão que Newton e Leibniz o construíram. Newton aproximou-se partindo de considerações contínuas, e Leibniz escolheu a abordagem discreta das mônadas. Para o ensino do Cálculo, é preciso levar em conta ora imagens com fortes características da continuidade, ora metáforas que fazem uso do discreto. A explicitação da elegante interação aparece no ensino do Cálculo como uma necessidade, tanto para o aluno visualizar as ideias do Cálculo quanto para a própria utilização do mesmo em aplicações práticas.

A importância crescente dada ultimamente ao estudo do par conceitual qualidade/quantidade mostra também como é necessário fazer referência às duas noções. A Matemática tem papel fundamental na interpretação das relações entre quantidade e qualidade. Mas é preciso entender a Matemática em suas duas correntes principais, pois

[169] Davis & Hersh, *A experiência Matemática*. Cit. in. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 219

ambas, bem administradas, favorecem a compreensão dos aspectos qualitativos e quantitativos da realidade.

As implicações práticas desse estudo estão presentes de modo gritante nas discussões acerca da avaliação educacional, das concepções de inteligência e da própria possibilidade de medir ou avaliar o conhecimento.

Além disso, o próprio ensino de Matemática elementar pode ser altamente enriquecido por esse estudo. Procuramos mostrar isso com alguns exemplos de Oficinas Temáticas, que foram elaboradas e ministradas visando, através da abordagem histórica, fornecer ao Professor de Matemática instrumentos para a elaboração de estratégias de ensino com mais significado para o aluno, levando em conta alguns pontos nos quais se faz necessário administrar essa interação.

Na oficina sobre frações, mostramos como, pelo estudo da História da Matemática, vemos que a passagem dos inteiros para os fracionários se fez pelo contato com a continuidade, com as medidas, embora, posteriormente, o número racional venha a ser definido em termos de um par ordenado de inteiros.

Assim, nessa oficina, construímos o conceito dos racionais partindo de considerações *contínuas* - as *medidas*, fonte inicial dos números quebrados - e também *discretas* - a ideia de *razão* dos gregos, que consideravam números apenas os inteiros.

Na oficina sobre a razão áurea, estendemos a análise da origem dos racionais até os primeiros vislumbres gregos sobre a existência dos irracionais, provavelmente associados ao estudo do pentagrama, no qual está contido o número de ouro, essência da razão áurea. Observamos a crise dos incomensuráveis, que marca o assombro grego ante a impossibilidade de representar razões entre certas grandezas *contínuas* por meio de números inteiros, *discretos,* e vimos a presença da Matemática nas artes, na estética e em medidas da natureza.

Vimos também, na oficina sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo, como podemos trabalhar o fato de que as razões entre os lados do triângulo, muitas vezes irracionais, podem ser escritas como a/b, pois a e b são *medidas* (*contínuas*) de lados de triângulos, enquanto que um número irracional não pode ser escrito da forma p/q, com p e q *inteiros* (*discretos*). Mostramos isso a partir da construção do relógio de sol, modelo egípcio (reto), mostrando aos alunos que essas razões podem ser números irracionais pois são *medidas contínuas.*

Finalmente, na oficina sobre a Álgebra Geométrica, vimos como podemos realizar operações com radicais, sem cair no problema de representar grandezas incomensuráveis. Manipulando diretamente grandezas *contínuas*, trabalhamos com radicais, sem ficar presos à definição dos irracionais em termos de inteiros, *discretos*.

Assim, a harmonia que concebemos não diminui nem enfraquece as características fortes do discreto e do contínuo, propondo a administração conceitual da tensão entre eles, e não um nivelamento uniformizador. Nossa conclusão é de que é necessário e possível construir uma harmonia sem monotonia. Aproveitar a energia resultante desse choque para ampliar o universo matemático dos alunos: essa é a aposta deste trabalho.

Uma aposta e um projeto que podem levar a várias direções, e desde já vislumbramos diversas pesquisas possíveis para dar prosseguimento ao que fizemos. A amplidão do tema que escolhemos permitiu a existência de lacunas, pois tivemos que optar por alguns assuntos em detrimento de outros. Para preenchê-las, seria necessário um *aprofundamento* no estudo de certos temas, o que significaria estender este trabalho além dos seus objetivos. Por outro lado, há assuntos que mereceriam por si só um estudo completo, constituindo-se em outros temas possíveis para *trabalhos distintos*.

Indicamos sucintamente três possíveis direções a seguir, a primeira delas aprofundando na trilha dos próprios temas aqui tratados, e as demais sugerindo novos caminhos a trilhar:

1. Ao abordar os temas a que nos referimos: *o ensino dos números, o ensino do Cálculo, a avaliação educacional,* procuramos mostrar aplicações práticas da administração da tensão discreto/contínuo, listando, no capítulo 4, contribuições para o ensino de Matemática de tudo o que havíamos estudado nos capítulos anteriores. Mas nosso objetivo era a exploração desses temas em uma pesquisa histórica, e pareceu-nos que a explicitação de uma abordagem mais prática não caberia a essa pesquisa, de caráter teórico e bibliográfico. Fica assim para trabalhos posteriores uma discussão mais minuciosa desses temas, mostrando com mais pormenor o modo de lidar, no ensino, com a tensão a que nos referimos. É verdade que é preciso um nível grande de pormenorização para poder levar à prática qualquer procedimento de ensino. Mas também é verdade que não basta uma esmiuçada metodologia, se não estiver ancorada em uma pesquisa que indique as razões para tais procedimentos. Desse modo, entendemos que o presente trabalho deve servir de base para estudos posteriores, que aprofundem o tratamento aqui dispensado a vários temas, e cheguem a indicar com mais pormenor procedimentos para o ensino dos números, do Cálculo e para a avaliação educacional. Esse aprofundamento poderia constituir um novo trabalho, que complementaria o atual, preenchendo algumas lacunas.

2. Pensamos que um projeto distinto deste mas que também poderia servir de sequência a ele é um estudo da presença da tensão entre o discreto e o contínuo nas tecnologias atuais, envolvendo os computadores, as calculadoras eletrônicas, os meios de armazenamento de dados, de transmissão de informações, de geração de som e imagem. Sobre o tema de educação e informática, existe um trabalho bastante recente[170], que explora a bifurcação entre os processos analógicos e digitais da informática. Complementando essa abordagem, um estudo sobre a interação entre os pares conceituais discreto/contínuo e analógico/digital certamente teria fôlego para, por si só, constituir um outro trabalho. Conforme já dissemos no capítulo 4, página 99, existe uma associação entre os procedimentos analógicos com a continuidade, e os procedimentos digitais com a ideia do discreto. Mas a interação entre esses pares não fica apenas nisso, cabendo toda uma pesquisa para explorar a tensão discreto/contínuo nas tecnologias atuais, tendo como objetivo observar as implicações para o ensino.

3. Outro projeto que daria continuidade a este trabalho seria o de estudar, do ponto de vista da interação discreto/contínuo, a geometria fractal. Os fractais, sem dúvida, representam uma possibilidade tremenda de exploração do nosso tema, e poderíamos ter feito todo um trabalho em torno desse tema. Na geometria fractal, podemos ultrapassar a barreira que limita as dimensões às grandezas discretas: dimensão 1, 2 ou 3. Passamos a ter dimensões contínuas, representadas por números racionais ou irracionais. Na exploração dessa abertura, poderíamos estabelecer novas ligações com tópicos do currículo elementar, o que se constitui em um projeto bastante atrativo.

Finalizamos, assim, apontando para a frente, com a expectativa de um futuro no qual daremos continuidade ao que acabamos de começar.

---

[170] Cf. TENÓRIO, Robinson Moreira. *Educação e Informática: uma investigação da tensão entre os processos analógicos e digitais*. Faculdade de Educação da USP, Tese de Doutorado, 1996.

# Bibliografia


1. AABOE, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Trad. de João Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. 170 p.
2. APÉRY, Roger. *La Hipótesis del Continuo y el Axioma de Elección.* Apud.: Ibid, *Pensar la Matemática.* 2ª ed. Trad,. de Carlos Bidón-Chanal. Barcelona, Tusquets, 1988. 319 p., pp. 311-314
3. ARCHIBALD, Raymond Clare. *Outline on the History of Mathematics*. Ohio, Mathematical Association of America, 1941, 76 p.
4. ARISTÓTELES. *Metafísica*. Coleção *"Os Pensadores"*. Vol. IV. 1ª ed. Trad. de Vicenzo Cocco. São Paulo, Abril Cultural, 1973.
5. BACON, Francis. *Novum Organum.* Coleção *Os Pensadores.*Volume XIII. São Paulo, Abril Cultural, 1973.
6. BALL, Walter William Rouse. *A Primer of the History of Mathematics*. London, and Co., 1930. 149 p.
7. BARON, Margaret E. & BOS, H.J.M. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*. Brasília, Editora da UnB, 1985. 5 v.
8. BECKER, Oskar. *O Pensamento Matemático: sua Grandeza e seus Limites*. Trad. Helmuth Alfredo Simon. São Paulo: Herder, 1965. 189 p.
9. BELL, Eric Temple. *Men of Mathematics*. New York, Simon and Schuster, 1965. 590 p.
10. BELL, Frederick H. *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary Schools)*. Dubuque, Iwoa: Wm C. Brown, 1978, 562 p.
11. BOLL, Marcel. *As Etapas da Matemática*. Lisboa, Europa-América, 1979. 166 p.
12. BOURBAKI, Nicolas. *Elements of the History of Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 301 p.
13. BOYER, Carl Benjamin & MERZBACH, Uta C. *A History of Mathematics: Second Edition*. Singapore: John Wiley & Sons, 1989. 764 p.
14. BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974, 488 p.
15. BOYER, Carl Benjamin. *The History of Calculus and its Conceptual Development*. New York, Dover, 1959. 346 p.
16. BUNT, Lucas N. H.; JONES, Philip S.; BEDIENT, Jack D. *The Historical roots of elementary Mathematics*. New York: Dover, 1988. 299 p.
17. CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations.* Vol. I: *Notations in Elementary Mathematics*. Chicago: The Open Court, 1928. 451 p.
18. CAJORI, Florian. *A History of Mathematics*. 2ª ed. New York, The MacMillan Company, 1919, 516 p.
19. CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9ª ed. Lisboa, Sá da Costa, 1989. 318 p.
20. CARPENTER, Thomas P.; FENNEMA, Elizabeth; ROMBERG, Thomas A. (Ed.) *Rational Numbers: An Integration of Research*. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1993. 372 p.
21. CAVEING, Maurice. *Algunas Observaciones sobre el Trato que Recibe el Continuo en los* Elementos *de* Euclides y en la Física *de Aristóteles.* Apud.: APÉRY, Roger. *Pensar la Matemática.* 2ª ed. Trad,. de Carlos Bidón-Chanal. Barcelona, Tusquets, 1988. 319 p., pp. 17-42
22. COLLETTE, Jean-Paul. *Historia de las Matemáticas*. Traducción de Pilar González Gayoso. Mexico, Siglo Veintiuno, 1986, 2 v.

23. COOLIDGE, Julian Lowell. *Mathematics of Great Amateurs*. Oxford, Claredon, 1950. 211 p.

24. COSTA, Manuel Amoroso. *Ideias Fundamentais da Matemática e Outros Ensaios*. 3ª ed. São Paulo, Convívio/EDUSP, 1981. 330 p.

25. COURANT, Richard & ROBBINS, Herbert. *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. New York: Oxford, 1978. 521 p.

26. CRUMP, Thomas. *La antropología de los números*. Versión española de Paloma Gómez Crespo. Madrid, Alianza Editorial, 1993. 276 p.

27. DA COSTA, Newton C. A. & DORIA, F. A. *Continuous & Discrete: A Research Program.* IN: Bol Soc. Paran. Mat. (2ª Série), v. 12/13, n. 1/2. Curitiba: Ed. da UFPR, 1991/2, pp. 123-127

28. DESANTI, Jean T. *Una Crisis de Desarrollo Ejemplar: El "Descubrimiento" de los Numeros Irracionales.* Apud: PIAGET, Jean (Org.) *Tratado de Lógica y Conocimiento Cientifico*. Volumen III: *Epistemologia de la Matemática.* Buenos Aires, Paidos, 1979., 523 p.

29. DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira et al. *Proposta Curricular de Matemática MacMillan para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério*. São Paulo, Secretaria de Educação/Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 1990. 257 p.

30. EDWARDS Jr., C.H. *The Historical Development Of The Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979. 351 p.

31. EUCLIDES*. The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Trad. e com. por Thomas Little Heath. 2ª ed. New York, Dover, 1956. 13v. em 3

32. EVES, Howard. *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*. The Dolciani Mathematical Expositions, n. 5. Maine: The Mathematical Association of America, 1983. 270 p.

33. EVES , Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 1995. 844 p.

34. FOWLER, D.H. *The Mathematics of Plato's Academy: a New Reconstruction*. Oxford, Oxford University Press, 1990. 401 p.

35. GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York, Dover, 1972, 288 p.

36. GIORELLO, Giulio & MONDADORI, Marco. *Número*. IN: *Enciclopedia Einaudi*, Vol. 15 (*Cálculo/Probabilidade*). Trad. José Manuel Ferreira. Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1989. pp. 25-65

37. GROZA, Vivian Shaw. *A Survey of Mathematical Elementary Concepts and their Historical Development*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1968, 327 p.

38. GUSDORF, Georges. *Professores para que? Para uma Pedagogia da Pedagogia*. Trad. João Benard da Costa e Antonio Ramos Rosa. Lisboa: Moraes, 1970. 318 p.

39. HEATH, Thomas Litle. *A History of Greek Mathematics*. New York, Dover, 1981. 2 v.

40. HEATH, Thomas Litle. *The Method of Archimedes.* Cambridge: University Press, 1912. 51 p

41. HEATH, Thomas Little. *Diophantus of Alexandria: a Study in the History of Greek Algebra*. New York, Dover, 1964. 387 p.

42. HERSH, Reuben & DAVIS, Philip J. *O Sonho de Descartes*. Trad. de Márcio C. Moura. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1988. 335 p.

43. IFRAH, Georges. *Os Números: a História de uma Grande Invenção*. Trad. de Stella Maria de Freitas Senra. Rio de Janeiro, Globo, 1989, 367p.

44. IMENES, Luiz Márcio. *Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática. Dissertação de Mestrado*. Rio Claro, UNESP, 1989.

45. KAMII, Constance & DECLARK, Georgia. *Reinventando a Aritmética: Implicações da Teoria de Piaget.* Trad. Elenice Curt, Marina Célia M. Dias, Maria do Carmo D. Mendonça. 3ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1990. 308 p.

46. KAMII, Constance. *A Criança e o Número.* Trad. Regina A. de Assis. 20ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1995. 124 p.

47. KLINE, Morris. *Matemáticas para los Estudiantes de Humanidades*. Trad. Roberto Helier. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica, 1992. 575 p.

48. KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972. p. 34.

49. KLINE, Morris. *O Fracasso da Matemática Moderna*. São Paulo, IBRASA, 1976.

50. KNEALE, Willian & KNEALE, Martha. *O Desenvolvimento da Lógica*. 1a ed. Trad. de M. S. Lourenço. Lisboa, Fundação Calouste Gulberkian, 1972, 770 p.

51. KOYRÉ, Alexandre. *Estudos da História do Pensamento Filosófico*. Trad. de Maria de Lourdes Menezes. São Paulo: Forense Universitária, 1991. 296 p.

52. LAKATOS, IMRE. *Pruebas y Refutaciones: la Lógica del Descubrimiento Matematico*. Madrid, Alianza Editorial, 1986.

53. LÉVY, Pierre. *As Tecnologias da Inteligência*. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993.

54. LINES, Malcom E. *Pense Num Número: Ideias, Conceitos e Problemas que desafiam a mente e deixam os especialistas perplexos*. Trad. José Luís Malaquias. Lisboa: Gradiva, 1993. 229 p.

55. MACHADO, Nílson José. *Epistemologia e Didática: As concepções do conhecimento e a prática docente*. São Paulo, Cortez, 1995. 320 p.

56. MACHADO, Nílson José. *Lógica, Conjuntos e Funções.* São Paulo, Editora Scipione, 1988, 240 p.

57. MACHADO, Nílson José. *Matemática e Língua Materna: Análise de uma Impregnação Mútua.* São Paulo, Cortez, 1990. 169 p.

58. MACHADO, Nílson José. *Matemática e Realidade*. São Paulo, Cortez, 1987, 103 p.

59. MANDELBROT, Benoît. *De los Monstruos de Cantor y Peano a la Geometría Fractal de la Naturaleza*. Apud.: APÉRY, Roger. *Pensar la Matemática.* 2ª ed. Trad,. de Carlos Bidón-Chanal. Barcelona, Tusquets, 1988. 319 p., pp. 111-138

60. MIDONICK, Henrietta O. (Ed.) *The Treasury of Mathematics*. New York, Philosofical Library, 1965. 820 p.

61. MIKAMI, Yoshio. *The Development of Mathematics in China and Japan*. New York, Chealsea, 1913, 347 p.

62. MOLES, Abraham Antonie. *As Ciências do Impreciso*. Trad. Glória de C. Lins. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1995. 371 p.

63. MOLES, Abrahan Antoine. *A Criação Científica*. São Paulo, Perspectiva/EDUSP, 1971.

64. NEEDHAM, Joseph. *Science and Civilization in China*. Cambridge, University Press, 1959. 3 v.

65. NEGROPONTE, Nicholas. *A Vida Digital*. Trad. Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 1995. 210 p.

66. NEUGEBAUER, Otto e SACHS, A. *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, Conn. Yale University Press, 1945.

67. OTTE, Michael. *Das Prinzip der Kontinuitat*. Mathematische-Semesterberichte (res.). 39(1992), nº 2, 105-125

68. PETITOT, Jean. *Infinitesimal*. IN: *Enciclopedia Einaudi*, Vol. 4 (*Local/Global*). Trad. João Sàágua. Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1985. pp. 209-285

69. PETROVSKI, A. *Psicologia Evolutiva y Pedagogica.* Trad. Leonor Salinas. Moscou: Editorial Progreso Moscú, 1985. 351 p.

70. PIAGET, Jean & GARCIA, Rolando. *Psicogênese e História das Ciências*. Lisboa, Publicações Dom Quixote, 1987, 247 p.

71. PIAGET, Jean & INHELDER, B. *O desenvovimento das Quantidades Físicas nas Crianças.*Trad. Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1971. 359 p.

72. PIAGET, Jean (Org.) *Tratado de Lógica y Conocimiento Cientifico*. Volumen III: *Epistemologia de la Matemática.* Buenos Aires, Paidos, 1979.

73. PIAGET, Jean. *Introdução a la Epistemologia Genética*. Volumen I: *El Pensamiento Matemático.* Trad. Maria T. Cevasco , Victor Fischman. 325 p. Buenos Aires, Paidos, 1978. 315 p.

74. PIATELLI-PALMARINI, M. (Org.). *Teorias da Linguagem/Teorias da Aprendizagem*. São Paulo, Cultrix/EDUSP, 1983. 455 p.

75. PIRES, Célia Maria Carolino. *Currículos de Matemática: da Organização Linear à Ideia de Rede*. Tese de Doutorado. São Paulo, Faculdade de Educação da USP, 1995. 267 p.

76. ROBINSON, Abraham. *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1974. 293 p.

77. SANFORD, Vera. *A Short History of Mathematics*. New York, Houghton Mifflin, 1930. 402 p.

78. SMITH, David Eugene & KARPINSKI, L. C. *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston, Ginn and Company, 1911.

79. SMITH, David Eugene & MIKAMI, Yoshio. *A History of Japanese Mathematics*. Chicago, 1912.

80. SMITH, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*. New York, Dover, 1959. 2 v.

81. SMITH, David Eugene. *History of Mathematics*. Boston, Ginn and Co., 1923. 2 v.

82. SMOLE, Kátia Cristina Stocco. *A Matemática na Pré-Escola: uma Abordagem Consetânea à Teoria das Inteligências Múltiplas*. Dissertação de Mestrado. São Paulo, Faculdade de Educação da USP, 1995. 280 p.

83. SOUZA, Eliane Reame de. *Conceitos e Redes: Os Significados da Palavra Conceito e a Ideia de Rede na Organização do Conhecimento e do Ensino*. Dissertação de Mestrado. São Paulo, Faculdade de Educação da USP, 1994. 193 p.

84. STRUIK, Dirk. J. *A Concise History of Mathematics*. London, Dover, 1948. 299 p.

85. TENÓRIO, Robinson Moreira. *Educação e Informática: uma investigação da tensão entre os processos analógicos e digitais*. Faculdade de Educação da USP, Tese de Doutorado, 1996.

86. THOM, René. *Qualidade/Quantidade.* IN: *Enciclopedia Einaudi*, Vol. 10 (*Dialéctica*). Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1988, pp. 226-242.

87. TRUDEAU, Richard J. *The Non-Euclidean Revolution*. Boston: Birkhauser, 1987. 269 p.

88. VAN DER WAERDEN, Bartel Leenert. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin, Springer-Verlag, 1983. 223 p.

89. WILDER, Raymond Louis. *Evolution of Mathematical Concepts*. New York, John Wiley, 1973. 216 p.

90. YOUNG, Laurence C. *Mathematician and Their Times*. Amsterdan, Nort-Holland, 1981.

91. YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p.

92. ZIPPIN, Leo. *Uses of Infinity*. Washington: The Mathematical Association of America, 1962. 151 p.