Capítulo 3:
O CONTEÚDO MATEMÁTICO DAS ATIVIDADES DE ENSINO

Como forma de promover uma síntese do que foi dito até agora, estabeleçamos uma relação entre o fluxo geral da atividade e o desenvolvimento do nosso trabalho. Inicialmente, há o desprendimento de distintas ou especiais atividades – a atividade de pesquisa realizada pelo sujeito – que estão direcionadas para o motivo que as impele (a insatisfação com o modelo de ensino vigente, que cria um 'encapsulamento' da aprendizagem escolar). Posteriormente, as ações ou processos (buscar pressupostos teóricos, redefinir o conceito de *espaço de aprendizagem*) se desprendem relacionadas a objetivos conscientes (promover uma forma de organização do ensino que supere o 'encapsulamento' da aprendizagem escolar). Por fim, surgem as operações (a organização das atividades de ensino) que dependem intrinsecamente das condições (o conteúdo matemático das atividades de ensino, o espaço de aprendizagem do Clube de Matemática) para a concretização do objetivo real dado.

A introdução e os dois primeiros capítulos deste trabalho abordam as duas primeiras etapas do processo descrito acima. Dessa forma, neste capítulo, abordaremos o conteúdo das atividades de ensino que correspondem aos nossos instrumentos e às ferramentas da nossa atividade. Por instrumentos, como já foi enfatizado, estamos entendendo tanto os elementos físicos ou simbólicos, os externos ou internos, como as ferramentas ou os signos. Sendo assim, concebemos que as atividades de ensino são as ferramentas do sujeito que levaram a concretização das suas operações e, por conseqüência, à obtenção de resultados.

Leontiev (1983, p.87) definiu que "os instrumentos determinam os métodos e operações". Dessa forma, podemos fazer a seguinte analogia: se quisermos desmembrar um objeto físico utilizando vários instrumentos (serras, martelo, serrote, faca etc), cada um destes

determina a forma de realização da ação. Trazendo essa situação para o meio educacional, podemos compreender, então, que o tipo de atividade de ensino é que determinará a forma como os alunos apropriar-se-ão dos conceitos e dos conteúdos a serem ensinados.

Por isso, quando abordamos as atividades de ensino, estamos, de acordo com Moura (1996, 2001), tratando das ações que têm por objetivo a constituição de uma unidade formadora do aluno. A atividade de ensino é uma unidade formadora porque engloba os seguintes aspectos: os objetivos de ensino, os conteúdos e uma concepção de aprendizagem. Dessa forma, ao desenvolvermos as atividades, estaremos promovendo a mobilização e integração dos diversos conhecimentos escolares dentro da educação. Para Moura (1996, p.30):

> A atividade de ensino, como materialização dos objetivos e conteúdos, define uma estrutura interativa em que os objetivos determinam os conteúdos, e estes por sua vez concretizam esses mesmos objetivos na planificação e desenvolvimento de atividades educativas.

Porém, isso somente ocorre a partir do momento em que entendemos que os objetivos e conteúdos são dois elementos integradores desse conhecimento. Os conteúdos são concebidos, aqui, como um objetivo social que se torna possível em sala de aula; dessa forma, segundo Moura (2001, p.148), "este conteúdo passa a ter uma história, que é a própria história da humanidade ao resolver problemas". Essa compreensão de que os conteúdos têm uma história ligada ao desenvolvimento social, implica em "saber com quem eles fazem fronteira, com quem se interconectam e como se desenvolvem" (MOURA, 2001, p.149).

Com estas palavras, fica evidente a necessidade de uma análise conceitual que possibilite a produção de modelos de situações pedagógicas, nas quais dado conteúdo passe a ter um determinado sentido para o aluno. Moura (2001, p.149) aponta o seguinte: "Aprofundar-se no conteúdo é definir uma maneira de ver como este se relaciona com outros conhecimentos e como ele faz parte do conjunto de saberes relevantes para o convívio social. É também definidor de como tratá-lo em sala de aula (...)". Resumindo, é evidente a necessidade de uma organização do trabalho escolar; porém, enfatizamos a não obviedade dessa afirmação por ter consciência da complexidade do processo de aprendizagem, já demonstrada pelas contribuições teóricas da abordagem histórico-cultural e da Teoria da Atividade.

Para fazer a organização do ensino e conseqüentemente elaborar as atividades de ensino, mostraremos o desenvolvimento histórico do conceito com o propósito de estabelecer os nexos conceituais que possibilitarão a compreensão significativa do mesmo. Pois, segundo

Kopnin (1978, p. 184), "para revelar a essência do objeto, é necessário reproduzir o processo histórico real do seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecemos a essência do objeto".

Esse processo de revelação da essência do objeto vai ao encontro da criação do contexto de descoberta que caracteriza o espaço de aprendizagem. Lembramos, aqui, que este contexto está vinculado à estratégia davydoniana de ascensão do abstrato para o concreto, que é essencialmente genética, ou seja, visa descobrir e reproduzir as condições de origem dos conceitos a serem adquiridos, em outras palavras, descobrem os seus 'germes'. Para Engestrom (2002, p.186):

> O conhecimento escolar se torna e permanece inerte [...] porque não é ensinado geneticamente, porque seus "germes" nunca são descobertos pelos estudantes, e conseqüentemente porque os estudantes não têm chance de usar esses "germes" para deduzir, explicar, predizer e controlar na prática fenômenos e problemas concretos em seu ambiente. Assim, a encapsulação pode ser rompida organizando-se um processo de aprendizagem que leve a um tipo de conceito radicalmente diferente daqueles produzidos em formas anteriores de escolarização.

Para isto ocorrer, temos a exigência de que os sujeitos da atividade "reproduzam o processo atual pelo qual as pessoas criaram conceitos, imagens, valores e normas" (DAVYDOV, 1988b, parte 2, p.21-22). A reprodução desse processo se dá por via da análise do processo histórico. Quando falamos em histórico, estamos nos referindo ao processo de mudança do objeto, às etapas de seu surgimento e desenvolvimento. Para Kopnin (1978, p.183), "o histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo". Sendo assim, o pensamento tem o objetivo de reproduzir o processo histórico real em toda sua objetividade, complexidade e contrariedade. A forma como o pensamento realiza esta tarefa é explicada por Kopnin (1978, p.183) da seguinte maneira:

> O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. O histórico é o primário em relação ao lógico, a lógica reflete os principais períodos da história.

Porém, o pensamento não deve seguir cegamente o movimento do objeto, todas as suas casualidades e seus desvios. Por isso, uma das funções do lógico dentro do pensamento é a de refletir o histórico por meio de abstrações que mantêm a linha do processo histórico real.

As palavras de Kopnin (1978, p.186) ressaltam a importância da relação entre o lógico e o histórico[5]:

> O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária

[5] Ver CATALANI (2002) como exemplo de trabalho sobre a relação entre o histórico e o lógico.

> para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento dialético do histórico e do lógico resolve-se o problema da correlação entre o pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história do seu desenvolvimento.

Ao estudarmos a história do desenvolvimento real do objeto, estamos criando as premissas indispensáveis para o entendimento mais profundo da sua essência. Para descobrirmos essa essência, Rozental (apud DAVYDOV, 1982, p. 355) indica que ela somente se "revela por meio da generalização". A partir daí, podemos chegar ao conceito, que para Kopnin (1978, p. 191) é "a confluência, a síntese das mais diversas idéias, o resultado de um longo processo de conhecimento". Em outras palavras, o "conceito é o resultado da generalização de uma massa de fenômenos singulares, é o essencial e o geral descobertos pelo pensamento nas coisas soltas e nos fenômenos" (DAVYDOV, 1982, p. 355).

3. 1 - UMA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

A história das origens da álgebra entre os hindus e árabes, de acordo com Hogben (1970), possui três grandes correntes, a saber:

- A necessidade de criar regras de calcular mais simples ou algorismos (a aritmética, no século XIII, era assim chamada, por ter como principal divulgador o algebrista árabe Al- Khowarizmi);
- A solução de problemas de caráter prático, que envolvessem o uso de números, isto é, a solução de equações;
- O estudo das séries, que revelou novas descobertas sobre as propriedades dos números naturais, levando ao início do desenvolvimento da chamada álgebra abstrata.

A partir de agora, faremos o caminho na busca pela compreensão dos nexos conceituais das equações. Inicialmente, abordaremos o desenvolvimento dos números para demonstrar que o surgimento do zero é um dos fatores essenciais para o surgimento da álgebra elementar. Após esta etapa, concentraremos o foco na solução dos problemas práticos, que possibilitaram a criação da linguagem matemática das equações.

3. 2 - O DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA ELEMENTAR

Iniciar uma história do desenvolvimento da álgebra seria impossível sem ter a compreensão de como o homem aprendeu a contar e, por conseqüência, como foi o surgimento dos números.

A invenção dos números teve entre as suas preocupações básicas responder a questões de ordem prática e utilitária: "As matemáticas orientais [6] surgiram como uma ciência prática com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização de obras públicas e a cobrança de impostos" (STRUIK, 1986, p.47). Segundo Caraça (2002, p.3), a contagem é "uma operação elementar da vida individual e social". Portanto, mesmo um indivíduo isolado tem necessidade de estabelecer contagens, inicialmente rudimentares, e com o aumento da atividade social estas passam a ter características mais complexas.

Entre os vários procedimentos [por exemplo: a unidade, o registro, a etiquetação, a ordem... (ALFONSO, 1993)] para se estabelecer uma contagem, um dos principais é a idéia de correspondência. Caraça (2002) nos diz que a contagem se realiza correspondendo sucessivamente a cada objeto da coleção um número natural. É claro que inicialmente esta correspondência era entre duas coleções de seres ou de objetos e, para ser mais preciso, entre as partes do corpo e os objetos ou seres.

A correspondência um a um é um elemento que "não oferece somente um meio de estabelecer uma comparação entre dois grupos: *ela permite também abarcar vários números sem contar nem mesmo nomear ou conhecer as quantidades envolvidas*" (IFRAH, 1998, p.27, grifo do autor).

O contar é uma propriedade humana que exige, segundo Ifrah (1998), três condições psicológicas para que haja a compreensão da contagem e da concepção de número:

– O homem deve ser capaz de atribuir uma posição a cada objeto que esteja diante dele;

O termo *oriental* refere-se às civilizações estabelecidas ao longo dos rios Nilo, Eufrates, Tigre, Indo, Ganges, Huang Ho e Yang-(Tse) (STRUIK, 1986, grifo do autor).

- O homem deve ter a capacidade de intervir, com o intuito de introduzir na unidade que passa a lembrança de todas as outras que a precedem;
- O homem deve ser capaz de conceber esta sucessão simultaneamente.

Mediante a prática de contar nos dedos, o homem conseguiu compreender dois aspectos importantes na noção de número e de contagem: a cardinalidade, que se baseia no princípio da equiparação, e a ordinalidade, que se refere ao agrupamento e à sucessão.

Para Ifrah (1998, p.52, grifo do autor):

> A partir do momento em que o homem teve acesso à abstração dos números e aprendeu a distinção sutil entre os números cardinais e os números ordinais, ele retomou seus antigos *instrumentos…* mas desta vez passou a considerá-los sob o ângulo da contagem. De simples instrumentos materiais eles tornaram-se, assim, verdadeiros símbolos numéricos, bem mais cômodos para assimilar, guardar, diferenciar ou combinar números inteiros.

A utilização de objetos concretos como símbolos numéricos teve fim com o surgimento da escrita e a criação dos algarismos, que passaram a representar, por meio de símbolos taquigráficos, os números.

Os primeiro registros de algarismos encontrados referem-se a um calendário Sumério, civilização que vivia na região da antiga Mesopotâmia por volta de 5700 anos[7] antes da era cristã. Após estas primeiras formas de representação rudimentar de signos numéricos, as demais civilizações, de acordo com o grau de desenvolvimento social do seu povo, estruturaram também os seus sistemas de numeração.

Os sistemas numéricos das civilizações egípcia, cretense, hitita e asteca, apesar de estes povos estarem distantes no tempo e no espaço, podem ser considerados similares por apresentarem as seguintes características comuns:

- Base dez, exceto o sistema asteca, o qual tinha base 20;
- Princípio aditivo para construção dos números;
- Utilização de algarismos para a unidade e para as primeiras potências da base dos sistemas de numeração.

A civilização grega apresentou um sistema de numeração que tinha as mesmas características do sistema cretense, porém eles criaram uma base 5 auxiliar, com símbolos para o 5, 50, 500…. Esta mesma idéia foi utilizada pelos romanos, só que eles utilizaram um princípio aditivo e subtrativo em seu sistema, com o intuito de reduzir a quantidade de símbolos utilizados para representar grandes quantidades numéricas. Para Ifrah (1998, p.206):

---

[7] Esta data refere-se ao primeiro sistema de calendário e está mais ou menos apoiada em provas astronômicas (BELL,1996, p.35).

"ficam claras, então, a complexidade e a insuficiência da numeração romana, que, ao recorrer às convenções e aos princípios mais variados, acabou não tendo coesão nem qualquer possibilidade operatória".

Um outro sistema de numeração é o babilônico, que possuía base sessenta, um símbolo para o zero e apresentava o princípio da posição. Apesar da base escolhida, os babilônicos só tinham dois algarismos: um que representava a unidade e outro para a dezena. Neste sistema, os números de 1 a 59 eram representados de modo aditivo, enquanto que, para além de 59, a escrita era posicional.

Um sistema que possuía características em comum com o babilônico era o sistema criado pelos chineses. A numeração chinesa tinha base decimal, diferentemente dos babilônicos, mas apresentava as demais características encontradas no modelo criado pela civilização babilônica. Na escrita dos primeiros algarismos, na numeração chinesa, estes tinham uma representação ideográfica, fator não presente no sistema babilônico.

Uma outra civilização que apresentou um sistema numérico posicional e tinha um símbolo para o zero foi a civilização maia. Os maias criaram um sistema de base 20, o qual apresentava símbolos para as unidades de primeira ordem. Um fato relevante nesta numeração era que, a partir da terceira ordem, havia uma irregularidade, pois este patamar não era 400 e sim 360.

Essas últimas três civilizações citadas demonstraram um grande desenvolvimento de seus sistemas de numeração, entretanto ainda faltava um detalhe para que chegássemos ao nascimento do ancestral do nosso sistema moderno de numeração e o estabelecimento das bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje. "Devemos a Índia o engenhoso método de exprimir todos os números por meio de dez símbolos, cada qual portador, tanto de um valor de posição, como de um valor absoluto, invenção notável, mas tão simples, que nem sempre lhe reconhecemos o mérito" (HOGBEN, 1970, p. 301).

Os hindus tinham usado por longo tempo uma numeração escrita muito rudimentar, antes da chegada à moderna. O sistema anterior apresentava "seus nove primeiros algarismos (os da unidade simples) como *signos independentes de qualquer intuição sensível*: eram distintos e não buscavam evocar visualmente os números correspondentes" (IFRAH, 1998, p.265, grifo do autor). Porém, não se submetendo ainda à regra de posição.

Este sistema era arcaico e, como os outros sistemas do mundo antigo, muito limitado e não satisfazia às necessidades dos sábios hindus, especialmente dos astrônomos. Para solucionar esse problema, os hindus utilizaram-se dos nomes dos números em sânscrito, recorrendo aos termos atuais, eles expressavam os números por extenso, não abreviado.

Nesta nova numeração, eram atribuídos nomes particulares aos nove primeiros números inteiros, um nome particular à dezena e a cada uma das potências, além de nomes compostos a todos os outros números. Para expressá-los, os hindus os colocavam na ordem das potências ascendentes de sua base, começando pelas unidades simples correspondentes, de forma contrária à utilizada por nós atualmente.

Com o passar do tempo, tendo como finalidade à abreviação, os matemáticos e os astrônomos passaram a suprimir do corpo dos números os indicadores da base e de suas potências, mantendo somente os nomes das unidades correspondentes e a ordem de seqüência regular.

Segundo Ifrah (1998, p.269), "ao operar tal simplificação, os sábios hindus tinham elaborado uma verdadeira numeração oral de posição, recebendo desse modo os nomes em sânscrito das nove unidades simples um valor variável dependente da sua posição na enunciação do número".

Porém, esse novo processo não estava completo, ele precisava ser aprimorado, pois, para representar o número 502, não bastaria dizer:

"dvi, pañca"

(2 . 5)

A representação significa 52 e não 502. Logo, era preciso fazer uso de um vocábulo especial para marcar a ausência das unidades de uma determinada ordem. Para contornar este problema, os hindus utilizaram-se do termo *sunya*, que significa vazio. Portanto, a partir de então, estava criado o zero pelos hindus.

Resumindo nossa história até o momento, os hindus já conheciam e dominavam os seguintes elementos:

- Algarismos distintos para representar as unidades de 1 a 9, os quais eram independentes de qualquer intuição visual direta;
- O princípio da posição;
- E a criação do zero.

Logo, a civilização hindu já tinha os ingredientes necessários à constituição da numeração moderna. Entretanto, esses elementos ainda estavam aplicados somente à numeração oral, ainda faltava submeter o sistema escrito a essas regras.

Para contornar mais esta dificuldade, no século VI d.C, os calculadores do norte da Índia resolveram expressar graficamente, em seus ábacos, os resultados que eram encontrados mediante as regras orais, porém, desta vez, a escrita dos números foi feita da direita para a esquerda de acordo com as potências decrescentes de 10, a partir do número

associado às unidades mais elevadas. Essa mudança pode ser justificada, pois essa era a forma que correspondia à do ábaco de areia utilizado pelos calculadores. Esses mesmos calculadores representaram o zero por um ponto[8] ou também, sem motivos conhecidos, por um pequeno círculo, que é o símbolo moderno do zero.

O último avanço que restava à civilização hindu era aprimorar o conceito do zero, que ainda estava ligado à ausência de uma coluna ou a um espaço vazio. Ele ainda não era considerado um número. Entretanto, na obra *Brahmasphuta Siddantha*, do matemático e astrônomo hindu Brahmagupta, já encontramos uma aritmética sistematizada dos números negativos e do zero (BOYER, 1999).

Resumindo o panorama, vejamos a importância hindu no desenvolvimento do conhecimento matemático, de acordo com Ifrah (1998, p.286):

> Ao liberar definitivamente seus algarismos significativos das colunas do ábaco de areia e ao inventar um signo zero, os sábios da Índia conduziram a uma série de importantes progressos. Especialistas nesta arte, eles simplificaram consideravelmente suas regras, aperfeiçoando-as continuamente, antes de lançar o que viria a se constituir, alguns séculos mais tarde, as próprias bases do nosso cálculo atual.

Porém, as vantagens da escrita numeral criada pelos hindus somente chegaram ao Ocidente por meio dos árabes. Estes serviram de intermediários entre a Índia e o Ocidente. Sem este intermédio, talvez nunca tivéssemos aprendido a calcular e a ciência e a técnica não teriam sido o que são hoje. De acordo com Hogben (1970, p.304):

> Os nômades árabes, que conquistaram e dominaram os restos do Império Romano, não possuíam classe sacerdotal. No mundo Islamita, o registro do tempo de há muito tempo se divorciara de qualquer casta privilegiada. Era aos eruditos judeus e árabes que incumbia a missão de organizar os calendários. Foram eles que introduziram todas as vantagens da escrita numeral criada pelos hindus.

A matemática da civilização Hindu, que fora compreendia, assimilada e disseminada pelos árabes, teve como principais focos de disseminação as universidades mouras da Espanha e o comércio siciliano no Mar Mediterrâneo. Entre os fatores que contribuíram para esta difusão, podemos citar:

- Função sacerdotal (Igreja Católica) do registro do tempo e da organização do calendário;
- A cultura independente da classe mercante;
- Os médicos judeus que levaram a cultura mourisca às capitais eclesiásticas da Europa Setentrional.

---

[8] Bindu, "o ponto", era uma das palavras -símbolos sinônimas de vazio (IFRAH,1998).

Segundo Hogben (1970), a popularidade dos métodos ia crescendo à medida que a Europa absorvia, do Oriente, a invenção social que possibilitou o abandono efetivo do ábaco. O papel e a imprensa, assim como o zero (sunya), são originários do Oriente.

Paramos neste ponto a nossa história sobre o sistema de numeração, pois o que ocorreu depois foi um longo caminho para a consolidação do uso dos algoritmos escritos em substituição aos cálculos feitos com o ábaco. E isto somente se deu em parte na Revolução Francesa:

> Foi preciso a Revolução Francesa para resolver a questão e para tornar claro que 'o cálculo por meio dos algarismos tem sobre o cálculo por meio de fichas na tábua de contar as mesmas vantagens que um pedestre livre e sem carga tem sobre um pedestre muito carregado'. Pois, foi por causa do peso que o uso do ábaco foi excluído das escolas e administração (IFRAH, 1998, p.318).

Analisando este percurso da criação de uma das invenções mais importantes do homem, podemos perceber o movimento da generalização do número, a síntese da longa caminhada em busca da abstração numérica. Essa síntese é encontrada no sistema de numeração criado pelos hindus e disseminado pelos árabes no Ocidente. Este sistema conseguiu reunir os seguintes fenômenos:

- O momento quando o número era somente sentido;
- Apropriou-se da contagem primitiva, o numeral neste tempo era o "chamado '*numeral concreto*', chamado assim por utilizar-se de objetos para controlar as quantidades" (MOURA, 1992, p.34);
- A utilização do princípio da repetição para estabelecer a contagem;
- A contagem por agrupamentos e a criação dos numerais para representá-los, que caracteriza o uso do princípio aditivo;
- O princípio da posição;
- A utilização das primeiras máquinas de contar – o ábaco;
- A criação do zero.

A partir dessa síntese, que criou o número abstrato, "o homem criou o instrumento que vai levar o homem à capacidade de poder cada vez mais quantificar o mundo" (MOURA, 1992, p.40). Com a criação desse novo instrumento cultural e principalmente com o surgimento do zero, abriu-se o caminho para o desenvolvimento da álgebra moderna e de todos os outros ramos do conhecimento matemático.

Entretanto, essa expansão da álgebra somente ocorreu porque, concomitantemente ao seu crescimento, houve o desenvolvimento da notação simbólica literal. Para Ifrah (1998, p. 337), "assim como a descoberta do princípio de posição e do zero criou a aritmética

moderna, a invenção da notação literal abriu uma era totalmente nova na história da matemática".

O desenvolvimento da linguagem simbólica não apresentou uma linha evolutiva contínua, mas sim autores individuais que foram criando abreviaturas de várias espécies, as quais, dependendo do contexto, eram ou não aceitas. Durante o decorrer da história, os gregos, por diversos motivos (entre eles o fato de terem esgotado o seu alfabeto), não puderam criar novos números e não conseguiram produzir esta linguagem. Os hindus não tinham um meio social capaz de impor o emprego universal de símbolos. Os árabes contribuíram com o sinal da radiciação. Foi na Europa medieval, com o desenvolvimento comercial, que os símbolos modernos foram surgindo e tomando força, até o momento em que a taquigrafia do matemático francês René Descartes foi considerada como padrão de linguagem matemática. Podemos assim perceber que um grande fato da história da matemática foi fruto da herança social comum e não obra de um gênio isolado.

Vejamos o quadro 3.1, baseado em Baumgart (1992), que mostra as mudanças da notação simbólica literal durante o passar dos anos.

Matemático	Ano	Notação	Expressão atual
Diofanto[9]	250 a. c	$x^3 2\ \ x8 - x^2 5\ \ 1 \cdot 4 = 44$	$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$
Brahmagupta	628	ya v(a) 3 ya 10	$3x^2 + 10x$
Pacioli	1494	Trouame .I. n°. Che gioto al suo qdrat° facia .12.	$x + x^2 = 12$
Vander Hoeke	1514	4Se. – 51Pri. – 30N dit is ghelijc 45.	$4x^2 - 51x - 30 = 45$
Ghaligai	1521	I e 32 C° - 320 numeri.	$x^2 + 32x = 320$
Rudolf	1525	Sit I y aequatus 12 $\mathcal{H}$- 36	$x^2 = 12x - 36$
Cardano	1545	Cubus p 6 rebus aequalis 20	$x^3 + 6x = 20$
Stifel	1553	2$\mathcal{H}$A + 2 y. aequata. 4335	$2xA + 2x^2 = 4{,}335$
Recorde[10]	1557	14. $\mathcal{H}$+ .15. • = 71. •	$14x + 15 = 71$
Buteo	1559	I ◊ P 6ρ P 9 [I ◊ P 3ρ P 24	$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$
Viète	1591	I QC – 15QQ +85C - 225Q +274N aequatur 120	$-15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$
Harriot	1631	aaa – 3 bba == + 2ccc	$x^3 - 3b^2x = 2c^3$
Descartes	1637	yy ∝ cy - $\frac{cx}{b}$y +ay - ac	
Wallis	1693	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$	

Quadro 3.1: As mudanças da notação simbólica na álgebra

3. 3 - AS EQUAÇÕES

A solução de problemas práticos envolvendo números se pôs presente em vários momentos da história das civilizações. Os matemáticos alexandrinos viram-se obrigados a preocuparem-se com a arte do cálculo pelos problemas que encontravam em astronomia e mecânica; os Hindus devotaram uma enorme atenção aos problemas numerais de ordem comercial; os egípcios dedicaram-se aos problemas de medição de terras…

[9] É evidente que esta expressão está escrita assim para facilitar a compreensão por parte do leitor, pois a escrita original utilizava o alfabeto grego (BAUMGART,1992).
[10] Um dos símbolos foi alterado do original, por motivos de impressão.

A resolução desses problemas possibilitou, após a criação, descoberta e consolidação de "regras simples e consistentes que regem a utilização dos números abstratos e os símbolos taquigráficos representativos dos verbos e das operações matemáticas" (HOGBEN, 1970, p.319), o que nós denominamos atualmente por equação, que podem ser consideradas como representações simbólicas equivalentes às questões enfrentadas por estas civilizações. As equações são, do ponto de vista da praticidade e aplicabilidade, um dos elementos mais importantes dentro da matemática moderna. Essa importância dá-se pelo fato de que a matemática é uma ciência cuja essência é o estabelecimento de relações entre conceitos, idéias e dados, os quais estão associados por meio de equivalências. A linguagem usada para expressar essas relações não é nada menos que as equações.

Estamos definindo uma equação[11] como "uma igualdade geral (com termos variáveis) que exprime uma condição que as variáveis devem preencher (diz-se então que elas a verificam). Toda equação propriamente dita é, pois, uma função proposicional que determina uma grandeza" (LALANDE, 1993, p.314).

Na matemática, encontramos diversos tipos de equações:

- As algébricas, por exemplo: $3x+2=6$ ou $5x^3+\sqrt{2x}=7$ e $\frac{1}{x^3}=3+\frac{2}{x^2}$.
- Exponenciais, por exemplo: $x^4+3x^3-5=e^{2x}$.
- Diferenciais, por exemplo: $2\frac{dy}{dx}+5=0$.
- Trigonométricas, por exemplo: $\operatorname{sen} x+x^3\cos x=2$.

Neste trabalho, abordaremos as chamadas equações algébricas e, em particular, as equações lineares com uma variável, ou seja, as conhecidas equações do primeiro grau.

Em Garbi (1997), encontramos uma definição do que seja uma equação algébrica. Para ele, equações algébricas são aquelas em que a variável (chamada neste caso de incógnita) aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas: soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação.

Se uma equação algébrica for posta sob a forma denominada canônica, que está expressa logo abaixo,

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\mathrm{K}+a_{n-1}x+a_n=0 \text{ (n inteiro e positivo)}$$

[11] A palavra equação vem da mesma raiz latina que produziu os seguintes termos: igual e igualdade (GARBI, 1997).

ela passará a ser chamada de equação polinomial, que é a nomenclatura mais conhecida para este tipo de equação. Vejamos um exemplo:

A equação $x^2 + 3x^3 - 21x = x^4 + 2x^3 - 16$ tem como forma canônica a expressão $x^4 - x^3 - x^2 + 21x - 16 = 0$

As equações lineares com uma variável, que são o objeto de estudo deste trabalho, são um tipo particular das equações algébricas. Vejamos uma definição para elas: Equações lineares com uma variável são aquelas nas quais as variáveis (as incógnitas) são monômios de primeiro grau.

Uma definição mais formal seria a seguinte: toda equação que possa ser expressa pela forma $a_1 x_1 = b$, em que x_1 é a incógnita e a_1 é um número, será chamada de equação linear com uma variável. Por exemplo:

$5x_1 + 2 = 3$, $8y - 1 = 0$ e $3x_1 = 8$

Tendo conceituado o objeto das atividades de ensino, podemos inseri-lo no contexto histórico do desenvolvimento de um dos ramos primordiais da matemática: a álgebra. Uma análise etimológica deste termo nos mostra que:

> Álgebra é uma variante latina do termo árabe al-jabr (às vezes transliterado al-jebr), usada no título de um livro, H*isab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito por volta de 825 pelo matemático árabe Mohamed ibn-Musa Al-khowarizmi. Este tratado de álgebra é com freqüência citado abreviadamente, como al-jabr (BAUMGART 1992, p.1).

Traduzindo literalmente o título do livro da citação acima, teríamos o seguinte: *Ciência da restauração (ou reunião) e redução*. Porém, matematicamente ficaria mais adequado desta forma: *Ciência da transformação e cancelamento*. Em Boyer (1999, p.252), temos o seguinte título: *A transposição dos termos subtraídos para o outro membro de uma equação e o cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação*. Mas segundo Baumgart (1992, p.1), uma tradução mais adequada seria: "*A Ciência das equações*".

Entretanto, hoje a álgebra não pode ser considerada meramente como a ciência das equações. Em Lalande (1993, p.41-42), encontramos alguns significados para este termo:

> a) Arte de tratar os problemas de aritmética representando os números (desconhecidos) através de letras. Ciência dos números indeterminados.
> b) Método geral de representação das relações e funções matemáticas e lógicas por meio de símbolos.
> c) Ciência das propriedades dos polinômios e das formas algébricas; arte de resolver as equações algébricas.
> d) Ciência da ordem.

Porém, a definição que será utilizada neste trabalho terá o enfoque nas duas fases do desenvolvimento deste ramo da matemática, que são a álgebra elementar, que aborda as equações e os seus métodos de resolução, e a álgebra abstrata, que estuda as estruturas matemáticas. Portanto, faremos uma definição que estabelece um vínculo com o desenvolvimento da linguagem algébrica. Denominaremos por álgebra o conjunto de regras que solucionam os problemas numéricos e as estruturas matemáticas, quer estas estejam simplificadas em parte por abreviaturas (álgebra retórica e sincopada) ou mediante letras e sinais operatórios (álgebra simbólica).

A transição da álgebra retórica e sincopada para a simbólica é um dos fatos que ajudam a compreender a matemática. Ao resolvermos uma equação (sentença matemática), estamos querendo que ela tenha uma forma que torne o seu significado evidente. As regras que produzem esse fato são o foco de estudo da álgebra. Segundo Hogben (1970, p.321), ‘toda dificuldade consiste em traduzir o problema, da linguagem vulgar para a linguagem algébrica”, com outras palavras, o grande ponto do trabalho com as equações está na arte de traduzir a linguagem do cotidiano em linguagem de grandezas.

Tendo em mente que o ponto crucial do trabalho com as equações é a tradução da linguagem do cotidiano para a linguagem das grandezas, vejamos como algumas civilizações fizeram esta tradução.

Os primeiros registros encontrados na história sobre a resolução de equações lineares remontam a cerca de 2000 a 1700 a. C em tabulas de argila babilônicas e no papiro de Rhind, pertencente aos egípcios.

No papiro de Rhind (escrito entre 2000 a 1800 a. c), encontramos equações lineares da forma $x + ax + bx = c$ ou $x + ax = b$, nas quais a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. Para a resolução dessas equações, os egípcios utilizavam-se da chamada regra da falsa posição e, segundo Bekken (1994, p.16, grifo do autor), “*pode ser descrito através da frase* ‘adivinhar’ *e* ‘ajustar’”. Em Boyer (1999, p.65), encontramos uma explicação para este método de resolução:

> Um valor específico, provavelmente falso, é assumido para a incógnita, e as operações à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende e usando proporções chega-se à resposta correta.

Vejamos um exemplo numérico:

Para resolver a equação $x + \frac{x}{3} = 24$, assuma um valor conveniente para x, digamos 6. Disto, temos que a expressão $x + \frac{x}{3}$ é igualada a 8, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para dar o resultado desejado, a resposta correta deve ser $6 \cdot 3$ ou 18.

Na civilização grega, no período de 500 – 200 a.C., a álgebra era geométrica; segundo Baumgart (1992), isto se devia à dificuldade lógica com números irracionais e mesmo fracionários e suas dificuldades práticas com o seu sistema de numeração. Por isso para resolver uma equação linear da forma $ax = bc$, eles recorriam a construções geométricas e consideravam esta equação uma igualdade entre as áreas ax e bc. Observemos como os gregos resolviam esta equação: inicialmente se construía um retângulo ABCD (figura 3.1), com lados AB = *b* e AD = *c* e então ao longo do segmento AD marcava-se AE, com medida *a,* AE = *a* (figura 3.2). Completa-se o retângulo AEFB e traça-se a diagonal AF que corta o segmento CD num ponto P (figura 3.3). O segmento DP é o valor desejado para *x*, pois o retângulo ABCD tem área igual ao retângulo AEGH, sendo que G e H são projeções do ponto P nos segmentos EF e AB, respectivamente. Observe as figuras abaixo:

Figura 3.1: O retângulo ABCD

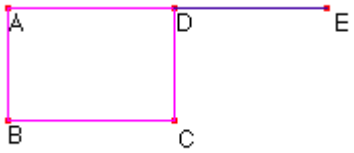

Figura 3.2: O segmento AE

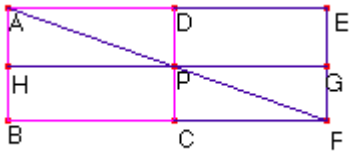

Figura 3.3: Os retângulos ABCD e AEGH.

Os chineses também lidaram com as equações no livro *Nove Capítulos sobre a arte matemática (*250 a.C.), em que encontramos soluções de problemas que eram expressos por equações lineares. O matemático grego Diofanto, por volta do mesmo período, seguindo os caminhos dos babilônicos, deu um novo impulso à álgebra. Ele criou uma das primeiras formas de notação simbólica literal, que posteriormente possibilitaria que a álgebra deixasse de ser uma coleção de regras e de receitas estabelecidas por tentativas feitas com vistas à resolução de determinadas equações numéricas (IFRAH, 1998).

Uma das principais contribuições de Diofanto à matemática foi a sincopação da álgebra grega. Em sua obra intitulada *Arithemetica,* que é uma coleção de problemas de aplicação de álgebra, encontramos a seguinte notação (BOYER, 1999, p. 85):

> Um número conhecido é representado por um símbolo parecido com a letra grega ζ (talvez a última letra de arithmos); o quadrado disto aparece como Δ^{γ}; o cubo como K^{γ}, a quarta potência dita quadrado-quadrado, como $\Delta^{\gamma}\Delta$, a quinta potência ou quadrado-cubo, como ΔK^{γ} e a sexta potência ou cubo-cubo como $K^{\gamma}K$. Coeficientes numéricos eram escritos depois dos símbolos para as potências a que estavam associadas; a adição de termos era indicada por justaposição adequada dos símbolos para os termos e a subtração era representada por uma abreviação de uma só letra colocada antes dos termos a serem subtraídos.

Apesar de o matemático árabe Mohamed ibn-Musa Al-khowarizmi não usar uma notação simbólica sincopada e negar alguns resultados já conhecidos, mesmo assim conseguiu produzir um trabalho que influenciou o desenvolvimento da matemática moderna. Ele escreveu um livro prático sobre resolução de equações. Nesse livro intitulado *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, encontramos um conjunto de regras para solução da equação linear ou, pelo nome que é mais conhecida, equação do primeiro grau $ax + b = 0$, em que $a \neq 0$.

Em Caraça (2002, p.145), temos que:

> As duas passagens fundamentais, na resolução da equação acima, são as seguintes:
>
> 1ª de $ax + b = 0$ para $ax = -b$
>
> 2ª de $ax = -b$ para $x = -\dfrac{b}{a}$.
>
> Que são conseqüências diretas das leis elementares da aritmética.

A primeira das regras que deu nome ao livro, *al-jebr*, pode ser traduzida por restituição e exerceu tanta influência no desenvolvimento da matemática, que acabou por designar tudo quanto diz respeito a equações.

As idéias de Al-Khowarizmi, as quais entraram na Europa via o *Liber Abaci* (1202) do italiano Fibonacci, contribuíram para uma evolução da álgebra, e alguns fatores com certeza fizeram que seu livro tornasse um clássico dentro da matemática: a utilização do

sistema indo-arábico de numeração que facilitava o trabalho numérico sem requerer o uso do ábaco; a invenção da imprensa que acelerou a padronização de símbolos; o ressurgimento da economia, que sustentou a atividade intelectual.

3. 4 - OS NEXOS CONCEITUAIS

Após o exposto, podemos estabelecer "os nexos que possibilitem a revelação do caráter geral de uma relação e por conseqüência o seu aspecto de generalidade" (DAVYDOV, 1982, p.353). O geral está aqui potencialmente impregnado de toda a diversidade do singular, revelando-o no processo do seu desenvolvimento, de sua realização e concretização.

Davydov (1982, p. 354, grifo do autor) aponta para o seguinte: "É importante indicar que a subsistência do singular dentro do geral tem lugar no processo de reprodução do **desenvolvimento** do objeto na forma de *conceitos*, no processo teórico dedutivo do singular através do geral".

O desenvolvimento do objeto na forma de conceitos só é possível por meio das generalizações que revelam o conhecimento da sua essência, da regularidade do avanço das coisas. Porém, na análise feita por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) sobre as concepções de álgebra e de ensino de álgebra, percebemos que nem sempre esta essência esteve dentro do plano principal das práticas de educação algébrica. Vejamos as idéias que predominaram na história da educação algébrica. Para isso, daremos dois passos: primeiro, analisaremos as concepções de álgebra para que, a partir daí, possamos compreender as propostas de ensino algébrico desenvolvidas dentro da escola.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fizeram um levantamento das concepções de álgebra decorrentes do desenvolvimento histórico deste ramo do conhecimento matemático. Vejamos no quadro 3.2 um resumo dessas concepções:

Características	Concepções			
	Processológica	**Lingüístico-estilística**	**Lingüístico-sintática-semântica**	**Lingüístico postulacional**
Principal	Conjunto de métodos, técnicas para resolver certos tipos de problemas.	É uma linguagem específica criada para expressar os procedimentos.	É uma linguagem que exige uma compreensão dos signos e dos símbolos.	Signos com significados mais abrangentes do que os anteriores.
Descrição	Não exige a existência de uma linguagem para expressá-la.	Cria uma distinção entre forma de pensamento e forma de expressão.	É uma linguagem específica e concisa.	Os signos lingüísticos representam não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas entidades matemáticas que não estão sujeitas ao tratamento quantitativo.
	Os procedimentos se constituem em técnicas algorítmicas que são baseadas numa seqüência padronizada de passos.	Defende a insuficiência da existência de um pensamento algébrico para que a álgebra se constitua em campo autônomo do conhecimento matemático.	Exige a consciência de que a linguagem algébrica, para adquirir a dimensão operatória e revelar o seu poder transformacional e instrumental, deve ser verdadeiramente simbólica.	

Quadro 3.2: As concepções de álgebra

Tendo identificado e caracterizado as concepções de álgebra mais utilizadas no meio educacional, faremos um paralelo entre elas e as concepções de ensino de álgebra, que constituem a educação algébrica.

No Brasil, como em outros países, durante todo o século XIX e início do século XX, a concepção de educação algébrica vigente é a que Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) denominaram de lingüístico-pragmática. Essa concepção de ensino está relacionada a uma visão de álgebra baseada numa proposta lingüístico-sintática-semântica.

Essa proposta de ensino de álgebra baseia-se no fato de que a aquisição das técnicas de manipulação algébrica, mesmo mecânicas, seria suficiente e necessária para que a criança tivesse a capacidade de resolução de problemas, que quase sempre não baseados na realidade ou na prática cotidiana. O relevante nesses problemas era a maneira como eram

elaborados, de forma que a sua solução requeresse certos tipos de procedimentos considerados, indispensáveis na aprendizagem do aluno.

Nessa perspectiva, a manipulação algébrica era o mote principal dessa concepção, sendo ela estruturada de forma que os tópicos conduzissem a uma álgebra aplicada relacionada com os problemas. Percebemos então uma hierarquização, na qual o foco principal era a assimilação pelo aluno de uma linguagem algébrica já constituída e consolidada.

Em oposição à perspectiva educacional anterior, a Matemática Moderna propôs uma outra concepção de educação vinculada a uma visão de álgebra lingüístico-postulacional. Esta nova concepção chamada de fundamentalista-estrutural concebe a álgebra como elemento de estruturação de todos os ramos da matemática escolar.

De acordo com esta concepção de educação algébrica, o aluno conseguiria adquirir a capacidade de lidar com a álgebra, a partir do momento em que compreendesse, mediante justificativas lógicas, todas as passagens encontradas numa transformação algébrica. Com o intuito de estabelecer essa fundamentação lógica, houve uma reestruturação do conteúdo algébrico, de forma que alguns tópicos considerados fundamentais deveriam preceder os ditos conteúdos genuinamente algébricos.

A última proposta de ensino de álgebra é a denominada de fundamentalista-analógica, que também está vinculada a uma concepção da disciplina numa perspectiva lingüístico-sintática-semântica. Essa concepção tem como características principais recuperar o valor instrumental da álgebra e manter o caráter fundamentalista, porém, agora as justificações se dão por meio de recursos analógicos geométricos, ou seja, recursos visuais.

Essa forma de justificação das passagens da manipulação algébrica é considerada, de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.84), "um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal".

Nessa proposta, ainda se faz uso das leis do equilíbrio físico, como um recurso analógico para a justificação das etapas da transformação algébrica. Tais leis são utilizadas recorrendo-se a materiais como balanças, gangorras e outros, os quais possuem um significado diferente do material concreto do qual fazem uso os recursos essencialmente geométricos-visuais.

O esquema abaixo (Figura 3.4) é uma síntese das principais características das concepções de educação algébrica:

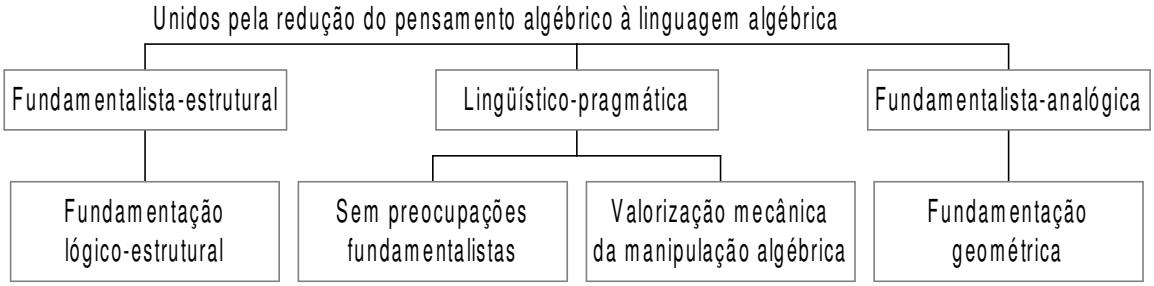

Figura 3.4: As concepções de educação algébrica

Fazendo uma análise das concepções de álgebra e das de educação algébrica, podemos perceber que ou há uma ênfase na linguagem algébrica em detrimento do pensamento ou enfatiza-se o ensino de uma linguagem já constituída mediante a assimilação da transformação algébrica.

Essa ênfase na manipulação e transformação algébrica, como apontaram Lins e Gimenez (1997), não é suficiente para promover a apropriação dos conceitos algébricos; por isso, é necessário então repensarmos uma solução para este problema.

Em Moura, Melo, Sousa e Scarlassan (2001), encontramos uma saída para esta situação. Eles apontam para a necessidade de consideramos o conceito de variável como fundamento principal, para toda a álgebra fundamental, e conseqüentemente das equações.

Quando falamos em variável, estamos usando a definição de Caraça (2002, p.120):

> [...] a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto (...). Pelo seu caráter essencial – síntese do ser e não ser – ela sai fora daquele quadro de idéias que quer ver na realidade uma permanência e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na fluência a primeira de suas características.

Esse caráter mutável, variável, de fluência da equação é exemplificado por Otte[12] (1993, p. 52), quando diz que a frase "cada acácia-vermelha é uma *Cássia Javanica*" é uma equação. Pois se trata de uma afirmação na forma A = B. E que tal equação representa uma relação entre as expressões de uma língua, que somente é verdadeira quando A tem exatamente a mesma denotação de B.

[12] "Falo sobre uma planta bem conhecida: descrevo-a, como se faz nos herbários, pelo número, pela cor e pela forma de suas pétalas, suas sépalas, seus estames, [...] e determino: Uma planta deste tipo chamaremos de 'acácia-vermelha', mas, além disso, também a chamaremos de *Cássia javanica*. Então, com absoluta certeza e validade universal, posso afirmar: 'Cada acácia-vermelha é uma *Cássia javanica*. A frase com certeza é verdadeira; sempre e em todas as circunstâncias, ela é irrefutável por qualquer observação..."

Porém, este caráter geral da equação se dissipa quando estamos interessados em determinar um valor numérico para a variável numa situação particular dentro do movimento de variação quantitativa sempre é possível se determinar um momento particular e, dentro de um grupo de variáveis, podemos sempre determinar um valor numérico específico (LIMA, PERICLES e TAKASAKI, 1998).

Percebemos então que se a variável constitui uma linguagem para os movimentos quantitativos gerais – as equações – que, por sua vez, representam a particularidade, e portanto, constituem uma linguagem particular, específica, um estado dos movimentos de controle das quantidades.

A partir do exposto acima e do desenvolvimento histórico, concluímos que as seguintes idéias constituem os nexos conceituais envolvidos no ensino das equações:

- Tomada de consciência sobre a fluência, movimento das grandezas no sentido quantitativo-qualitativo, isto é, o desenvolvimento do conceito de variabilidade.
- Compreensão de que esse movimento pode ser representado por formas diferentes de linguagem (a oralidade, a palavra escrita e a linguagem matemática).
- Compreender que as equações, especificamente as do primeiro grau, constituem uma forma de linguagem matemática que representa um estado dos movimentos das quantidades.

Essas idéias permearam a elaboração e organização das atividades de ensino desenvolvidas no experimento didático desenvolvido no Clube de Matemática, que serão expostas e analisadas no próximo capítulo.