TRABALHO DE MESTRADO

- CARGA ESPACIAL EM DIELÉTRICOS -

Soluções exatas de alguns problemas em condição de circuito aberto e de curto-circuito

JOSÉ ALVES CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE

Orientador: Guilherme Fontes Leal Ferreira

Tese apresentada ao Depto. de Física do Instituto de Física e Química da USP, Campus de São Carlos, para obtenção do grau de Mestre em Física.

OK

USP / IFQSC / SBI
8-2-000002

São Carlos
- 1973 -

Depto. de Física e Ciência dos Materiais
BIBLIOTECA

Aos meus irmãos:

Hercília, Guia, Socorro, Lurdes
e Genival.

Os meus agradecimentos ao Prof. Guilherme Fontes Leal Ferreira, Orientador desta Tese de Mestrado, e a todos que colaboraram para a realização deste trabalho.

- ÍNDICE -

		Pg
INTRODUÇÃO	.....	1
SECÇÃO I	- Simetria do Condensador Plano ..	5
SECÇÃO II	- Simetria do Condensador Plano, em Circuito Aberto, com $V_0 \neq 0$ e $\sigma \neq 0$	34
SECÇÃO III	- Simetria do Condensador Plano, em Circuito Aberto com $\sigma \neq 0$	60
SECÇÃO IV	- Simetria do Condensador Plano com $V_0 \neq 0$, $\sigma \neq 0$. Carga Espacial flutuante	65
SECÇÃO V	- Simetria do Condensador Esférico Condição de Curto-Circuito com $\sigma = 0$	89
SECÇÃO VI	- Simetria do Condensador Esférico Condição de Circuito Aberto com $V_0 \neq 0$ e $\sigma \neq 0$	104
SECÇÃO VII	- Demonstração de que o modelo da caixa é solução exata para o condensador em simetria esférica ..	122
SECÇÃO VIII	- Simetria do Condensador Cilíndrico. Condição de Circuito aberto com $V_0 \neq 0$ e $\sigma \neq 0$.....	127
SECÇÃO IX	- Carga espacial em dielétrico infinito. Simetria Esférica com $\sigma \neq 0$	145
APENDICE	.....	153
CONCLUSÃO	.....	165
BIBLIOGRAFIA	.....	173

INTRODUÇÃO

O estudo do deslocamento de transportadores em isolantes fornece uma quantidade considerável de informações sobre as características, elétricas e estruturais de tais materiais.

Por isto há bastante interesse no comportamento transiente de transportadores de carga injetados em isolantes sólidos sob uma variedade de condições.

Desde que o estudo sobre este comportamento pode permitir a determinação de mobilidades da ordem de 10^{-11} cm^2 V^{-1} seg^{-1}, para altos polímeros, e da ordem de 0,13 cm^2 V^{-1} seg^{-1}, para o selênio ("range" da ordem de 10^{10}), segue-se que, na verdade, estas pesquisas se constituem em um poderoso método para investigar dielétricos.

O nosso trabalho consiste em uma análise matemática bastante simplificada sobre este transporte de cargas em materiais altamente resistivos.

Um modelo simples, negligenciando "trapping" e difusão é usado para deduzir expressões para a carga espacial, a corrente, os campos e a expressão s(t) do deslocamento da frente da carga espacial.

Este modelo consiste em que a carga espacial é considerada essencialmente de concentração constante, até uma posição s(t), e zero além como está indicado na figura 1.

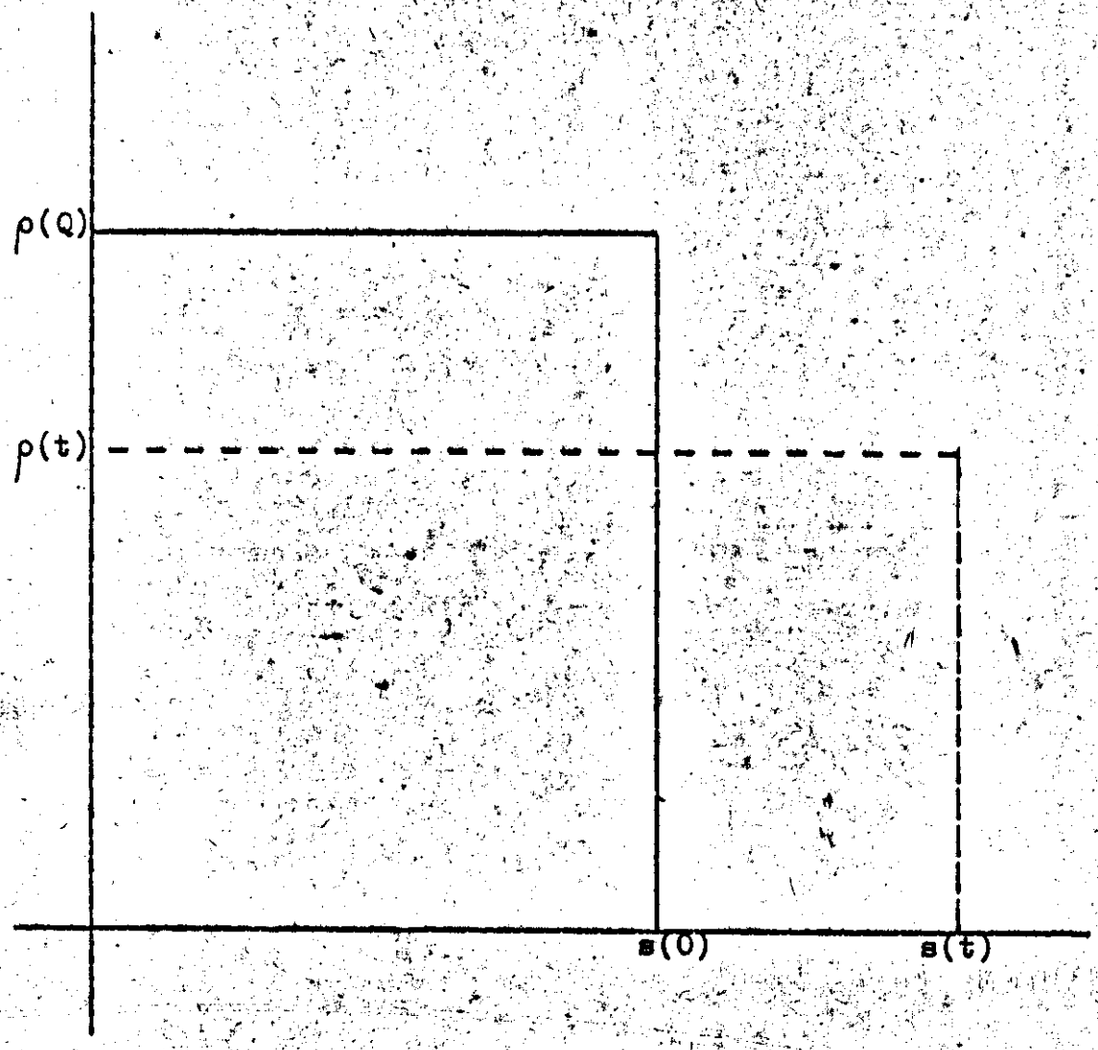

Figura 1

Esta é a distribuição que chamaremos distribuição em caixa (box charge distribution).

Em nosso estudo mostra-se que, com as condições iniciais e de contorno, a solução exata das equações de Poisson e da continuidade é dada pela distribuição em caixa, isto é, uma densidade de carga $\rho(t)$ (independente de x) variando apenas com o tempo, espraiando-se de $x=0$ até $x=s(t)$.

Dentro da estrutura do modelo assumido, expressões são

deduzidas as quais descrevem completamente a dependência espacial e temporal da densidade de carga, do campo elétrico da densidade de corrente e do deslocamento s(t).

Estas expressões provêm um quadro físico da dinâmica dos transportadores de carga dentro do isolante.

A geometria considerada varia segundo os isolantes estejam encerrados em condensadores planos, cilíndricos ou esféricos.

Apenas consideram-se situações em curto-circuito e circuito aberto sendo a condutividade, σ, considerada em alguns casos e em outros não.

No tratamento da geometria planar considera-se ainda, em circuito aberto, a evolução da carga espacial flutuante (floating space charge).

Todas as considerações são feitas supondo-se a carga espacial positiva. A componente da corrente de difusão é desprezada por simplicidade matemática.

Esta é uma boa aproximação sob condições experimentais típicas.

Nenhum tratamento quantitativo de "trapping" é incluído, embora Many-Rakavy [1] tenham demonstrado que as nossas equações podem ser adaptadas para o caso de um único sistema de "traps" na situação de "fast retrapping"

Nestas condições as equações diferenciais básicas descrevendo o movimento de um número arbitrário de transportadores após a sua injeção em um sólido isolante foram resolvidas exatamente.

Estas soluções provêm interessantes resultados para a evolução espacial e temporal da densidade de carga, cam-

po elétrico, densidade de corrente e deslocamento, s(t), à proporção que as cargas injetadas movem-se através do sólido.

No desenvolvimento deste trabalho foram especificamente abordados, tendo-se inicialmente uma carga espacial com densidade uniforme, estendendo-se até uma certa espessura de dielétrico:

1. circuito aberto, sem condutividade intrínseca, simetria do condensador plano;

2. o mesmo, com condutividade;

3. Voltagem aplicada, sem condutividade intrínseca, simetria do condensador esférico. Estudo especial do caso V=0;

4. circuito aberto, sem condutividade intrínseca, simetria do condensador esférico;

5. circuito aberto, com condutividade intrínseca, simetria do condensador esférico;

6. sistema sem eletródios, simetria do esférico;

7. os mesmos itens (3, 4, 5 e 6) para o caso cilíndrico.

- SECÇÃO I -

SIMETRIA DO CONDENSADOR PLANO

Circuito aberto com $V_o > 0$ e $\sigma = 0$.

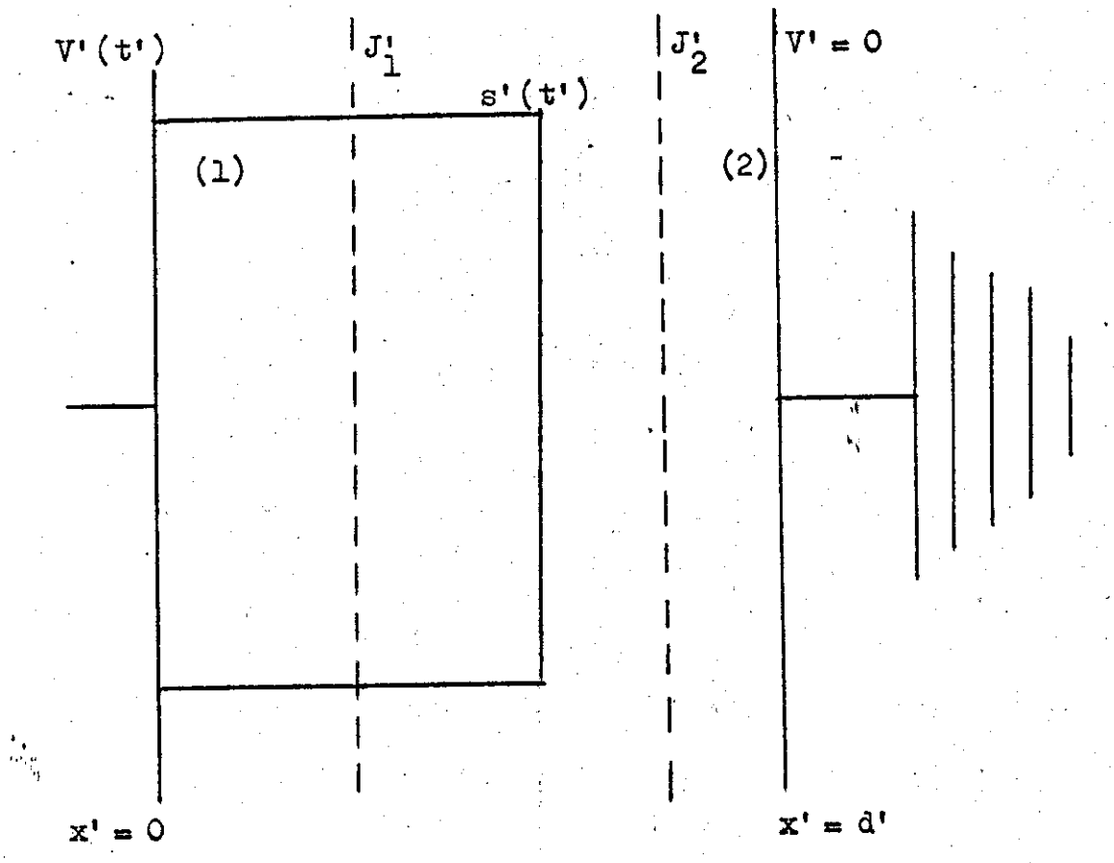

Figura 2

Seja um dielétrico entre as placas de um condensador plano.

O dielétrico estende-se de $x' = 0$ a $x' = d'$ (figura 2) e eletrodos estão aplicados a suas extremidades.

A placa em $x' = d'$ está em terra, e a outra, $(x' = 0)$,

a um potencial inicial V'_o.

A carga espacial disposta junto a um dos eletrodos divide o espaço entre as placas em duas regiões: a ocupada pela carga espacial, denominada região (1) e a outra, região (2).

Para a análise da dinâmica da carga espacial empregam-se as equações: equação de Poisson, $\nabla . \vec{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon}$, corrente de condução $\vec{i}' = \mu \rho' \vec{E}'$ equação da continuidade, $\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla . \vec{i}' = 0$, e a condição de contorno que representa o potencial entre as placas,

$$\int_0^{d'} \vec{E}' . d\vec{x}' = V'$$

Com a simetria planar podemos omitir o caráter vetorial do campo e corrente de condução. Assim, por exemplo, a equação da continuidade será escrita

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial i'}{\partial x'} = 0$$

e a equação de Poisson, $\frac{\partial E'}{\partial x'} = \frac{\rho'}{\epsilon}$

Nestas equações ϵ, μ, E', V' e ρ' representam, respectivamente, a constante dielétrica, a mobilidade do transportador, o campo elétrico, o potencial entre as placas e a densidade da carga espacial.

Como entre as placas do condensador ocorre a corrente de deslocamento a corrente total é representada por

$$J' = \mu\rho' E' + \varepsilon \frac{\partial E'}{\partial t'}$$

onde $\varepsilon \frac{\partial E'}{\partial t'}$ é a corrente de deslocamento.

Com a finalidade de eliminar das expressões certas constantes serão utilizadas unidades reduzidas.

Representando as unidades reduzidas por E, ρ, t, x e J obtém-se para as relações entre estas e as unidades não reduzidas $E = \frac{d'}{V'_o} E'$, $x = \frac{x'}{d'}$, $t = \frac{\mu V'_o}{d'^2} t'$ $\rho = \frac{d'^2}{\varepsilon V'_o} \rho'$ e

$$J = \frac{d'^3}{\varepsilon \mu V'^2_2} J'$$

A obtenção das relações entre as unidades ordinárias e as reduzidas é deixada para o apêndice.

Com a conversão das unidades as equações básicas tomam a forma $\frac{\partial E}{\partial x} = \rho$, $J = \rho E + \frac{\partial E}{\partial t}$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{E} = 0$, e,

$$\int_0^1 E\, dx = 1$$

- Equação da continuidade -

Da expressão da equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i} = 0,$$

sendo $\vec{i} = \rho\vec{E}$,

vem $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\,\vec{E}) = 0$$

Como o modêlo de caixa, que leva à solução exata como está demonstrado na secção III, assume que $\rho(x,t) = \rho(t)$, isto é que ρ é independente de x, deve-se ter, dentro da nuvem,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

e como, pela equação de Poisson, $\nabla \cdot E = \rho$, daí vem

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho^2 = 0.$$

- Expressão de Densidade, $\rho(t)$ -

Partindo da equação diferencial acima,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = 0,$$

separando as variáveis e integrando,

$$\int_{\rho_o}^{\rho} \rho^{-2} d\rho = \int_{t}^{0} dt$$

as integrais são imediatas, obtendo-se

$$\rho = \frac{\rho_o}{1 + \rho_o t}$$

a mesma relação de ρ com o tempo será obtida em outras geometrias.

- Cálculo dos Campos -

Partindo da equação da corrente total tem-se, na região (2),

$$J_2 = i_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0$$

Como $i_2 = \rho E_2 = 0$, pois $\rho(x,t) = 0$ para $x > s$, vem

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = 0,$$

e daí conclui-se que, E_2 = constante no tempo (A)

Da equação de Poisson nesta região,

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \rho = 0,$$

verifica-se que, (B) E_2 = constante no espaço.

De (A) e (B) conclui-se que

$$E_2(x,t) = C^{te}$$

Na região (1), de

$$\frac{dE_1}{dx} = \rho,$$

sendo $\rho(x,t) \neq 0$ para $x < s$, encontra-se $E_1 = \rho x + C(t)$.

Na fronteira $x=s$, entre as regiões carregada e não carregada, resulta, devido à continuidade dos campos, $E_1(s) = \rho s + C(t) = E_2(x,t)$

Como $E_2(x,t)$ independe do tempo, toma-se

$$E_2 = \rho_o s_o + C(0).$$

Obtém-se C(0) empregando-se a condição de contorno

$$\int_0^1 E(x,0)\,dx = 1, \text{ em } t=0.$$

Com a substituição dos campos correspondentes às regiões (1) e (2), vem

$$\int_0^{s_o} (\rho_o x + C(0))\,dx + \int_{s_o}^1 (\rho_o s_o + C(0))\,dx = 1$$

Esta é uma expressão de pronta integração, resultando

$$C(0) = 1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right) \text{ onde } q_o = \rho_o\, s_o$$

Substituindo-se esta expressão de C(0) em E_2, obtém-se

$$E_2 = 1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2}$$

Notemos que ρ_o pode ser negativo mesmo que a carga espacial, que ρ_o representa em unidades reduzidas, seja positiva, já que o potencial pode ser negativo.

Isto pode-se verificar facilmente da relação de conversão $\rho = \frac{d'^2}{\varepsilon V'_o}\rho'$ entre as densidades reduzida e não reduzida ρ e ρ', pois o depende apenas, do sinal de V'_o desde que ρ' foi admitida positiva.

Para $\rho' > 0$: se $V'_o > 0$ tem-se $\rho > 0$ e se $V'_o < 0$ tem-se $\rho < 0$. Daí se conclui que: para $\rho'_o > 0$ e $V'_o > 0$, $E_2 > 0$ sempre, pois $\rho_o > 0$, o que significa que nestas

condições a frente da nuvem se desloca só para a placa $x = 1$, e, para $\rho_o > 0$ e $V_o' - 0$, como $\rho_o < 0$, tem-se que $E_2 = 1 - \frac{|\rho_o| s_o^2}{2}$ podendo agora a frente da nuvem caminhar para a placa $x = 1$ ou $x = 0$, ou ainda simplesmente ficar imobilizada, segundo $E_2 \gtreqless 0$, o que se verifica facilmente da relação (I-4), para $\rho < 0$.

Deslocamento s(t) da frente da carga espacial.

$$\text{De } \frac{ds(t)}{dt} = E_2 = 1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2},$$

tira-se

$$s = s_o + (1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2})t,$$

ou, $s = s_o + E_2 t$ e $s = s_o - E_2 t$ para $\rho - 0$ pois neste caso $\mu < 0$.

Verificando-se então que a frente de carga espacial se desloca com movimento uniforme.

Para $\rho_o - 0$, a frente da nuvem caminha sempre para a 2ª placa ($x = 1$) pois $E_2 > 0$; e para $\rho_o < 0$, a frente da nuvem pode caminhar para uma ou outra placa e ainda pode ficar imobilizada conforme $e_2 > 0$, $E_2 < 0$ ou $E_2 = 0$.

- Cálculo do campo na região (1) -

Na região (1) tem-se, para a corrente total,

$$J_1 = \rho E_1 + \frac{\partial E_1}{\partial t} = 0,$$

onde substituindo-se, nesta relação, a expressão de E_1 e ordenando os termos de forma conveniente, resulta,

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho^2\right) x + \rho\, C(t) + \frac{dC(t)}{dt} = 0, \quad \text{mas} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho^2 = 0,$$

por ser a equação da continuidade, e a equação em C(t) fica então reduzida a

$$\rho\, C(t) + \frac{dC(t)}{dt} = 0,$$

de onde se tira

$$\frac{dC(t)}{dC(t)} = -\,\rho\, dt,$$

mas, da equação da continuidade obtém-se $\rho dt = -\frac{d\rho}{\rho}$, que substituída na expressão em C(t), dá,

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \frac{d\rho}{\rho}$$

Daí se obtém facilmente

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o}\, C(0),$$

e dado que a expressão de C(0) é conhecida, tem-se

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right]$$

e daí prontamente

$$E_1 = \rho x + \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right] \qquad \text{(I-5)}$$

- GRÁFICO DOS CAMPOS -

O gráfico dos campos é considerado para t=Cte, isto é, é o traçado do campo em cada ponto, x, em um mesmo instante. E portanto só se considera a dependência em x.

Neste caso observa-se que

$$E_1 = \rho x + \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right]$$

é a equação de uma reta em x, da forma $E_1 = ax + b$.

Para $\rho > 0$ e sendo ρ a declividade, deve-se ter para o gráfico de $E_1(x, t = Cte)$, neste caso,

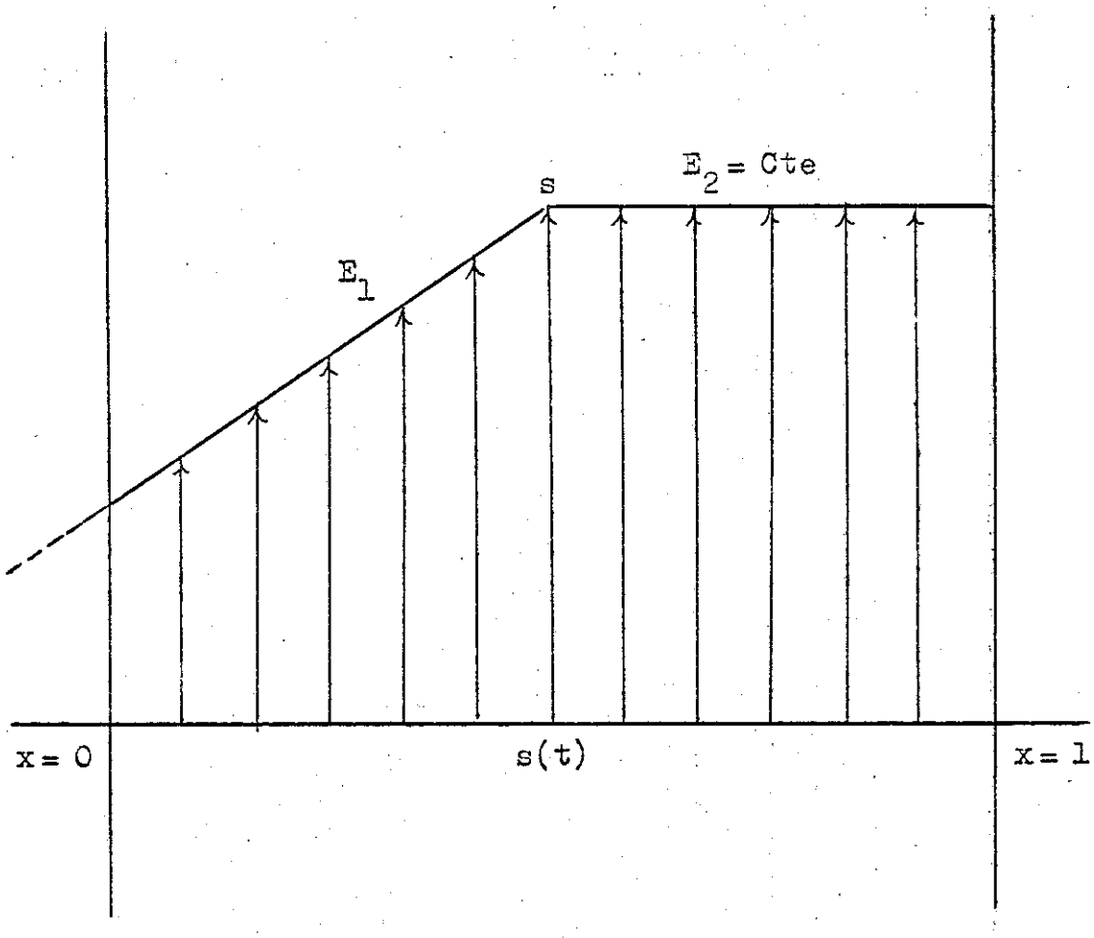

Figura 3

o gráfico da figura 3 corresponde ao caso em que

$$b = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right] > 0,$$

caso este que corresponde a uma "floating space charge", pois os campos transportam toda à camada da carga espacial, da esquerda para a direita.

Este caso não será considerado nesta secção I porque aqui consideraremos apenas o caso em que a nuvem não se destaca da placa $x = 0$ e que corresponde ao gráfico da figura 4.

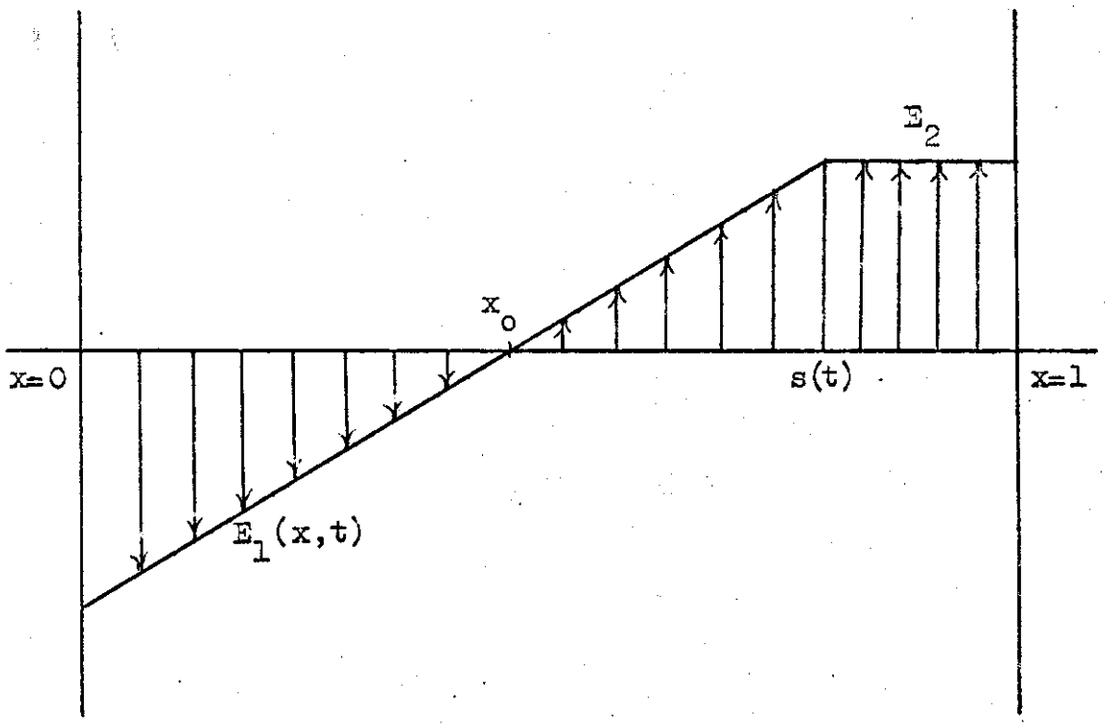

Figura 4

O gráfico da figura 4 corresponde ao caso em que,

$$b = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right] < 0$$

Este será o caso considerado nesta secção.

Para o caso em que $\rho < 0$, tem-se que b será sempre posi

tivo pois de

$$b = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right]$$

verifica-se facilmente que

$$\frac{\rho}{\rho_o} > 0$$

e sendo $s_o = \frac{s'_o}{d'} < 1$, pois $d' > s'_o \therefore \frac{s_o}{2} - 1 < 0$ e

como

$$q_o = \rho_o s_o < 0 \quad \therefore$$

$$q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right) > 0$$

e portanto segue-se que

$$b = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right] > 0$$

sempre, para $\rho < 0$, e, sendo ρ a declividade conclui-se que o gráfico de $E_1(x,t)$ para este caso é,

Depto. de Física e Ciência dos Materiais
BIBLIOTECA

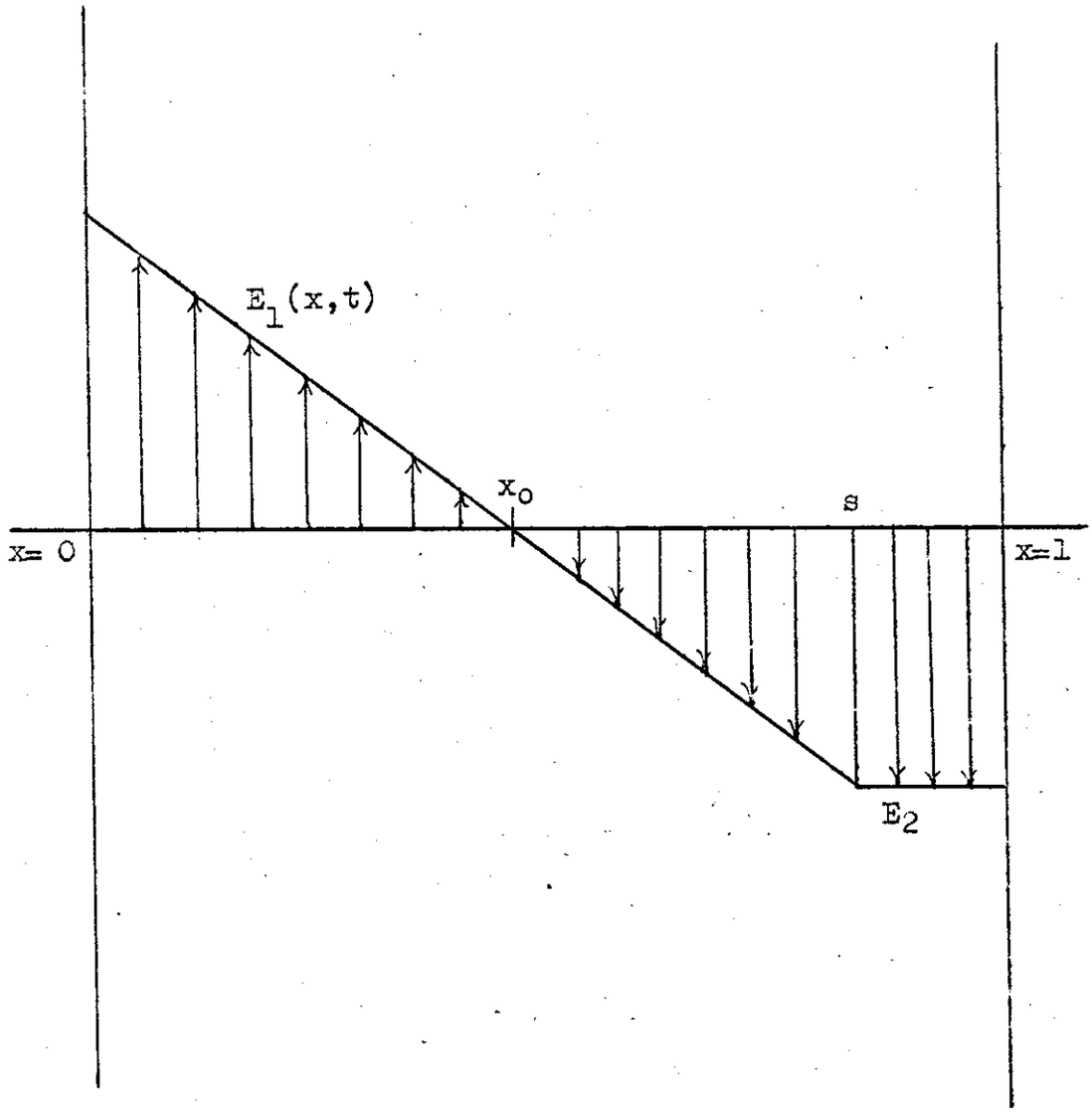

Figura 5

Mas a carga não se destaca pois embora o campo, frente à placa x= 0, aponte para a direita, como a carga é negativa, a força que atua no transportador aponta no sentido da placa x= 0 e cria uma corrente para a mesma.

O gráfico da força que atua no transportador, correspondente ao gráfico da figura 5, é a figura 6.

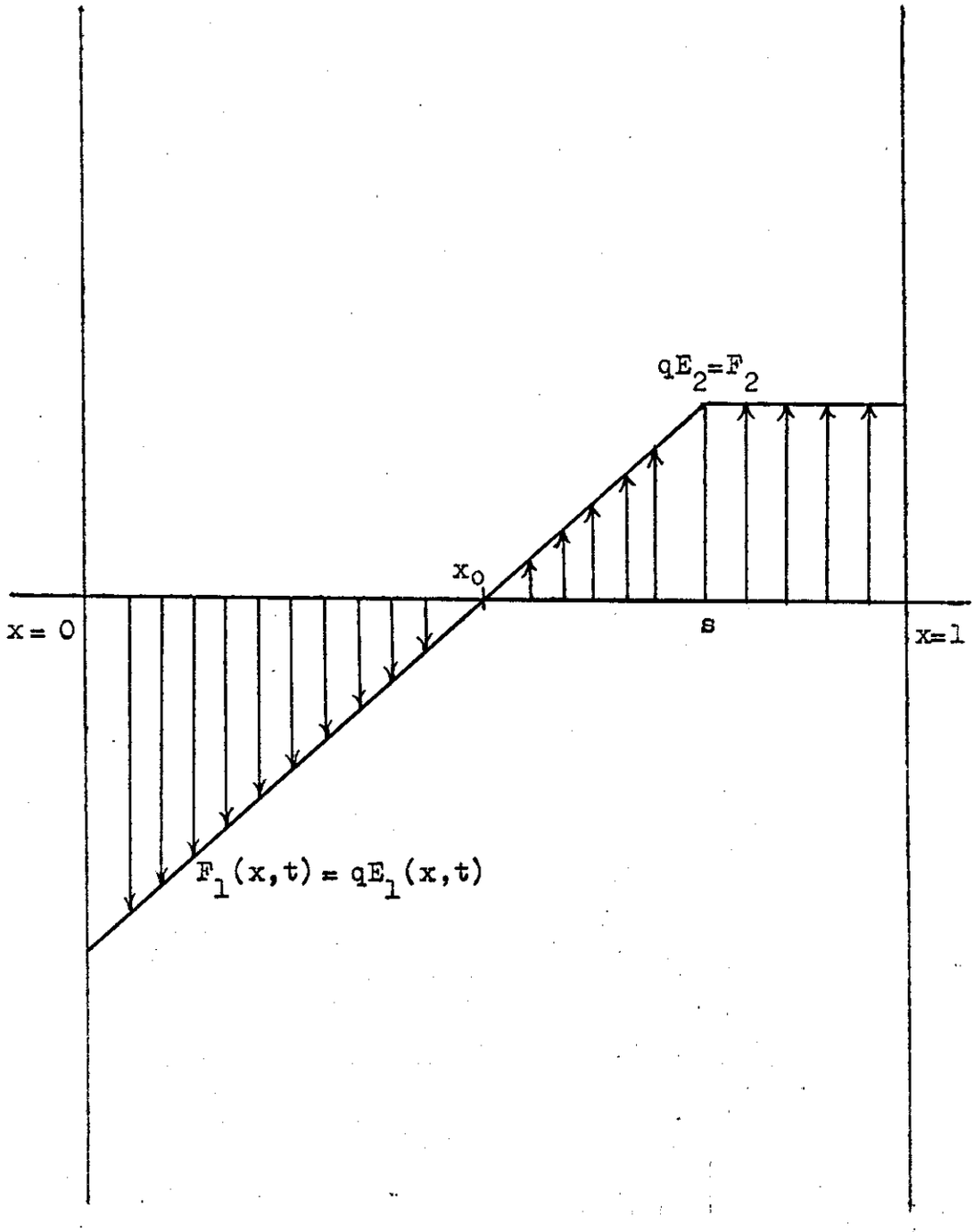

Figura 6

CARGA Q(t) QUE SE TRANSFERE DA CARGA ESPACIAL PARA A PLACA x = 0

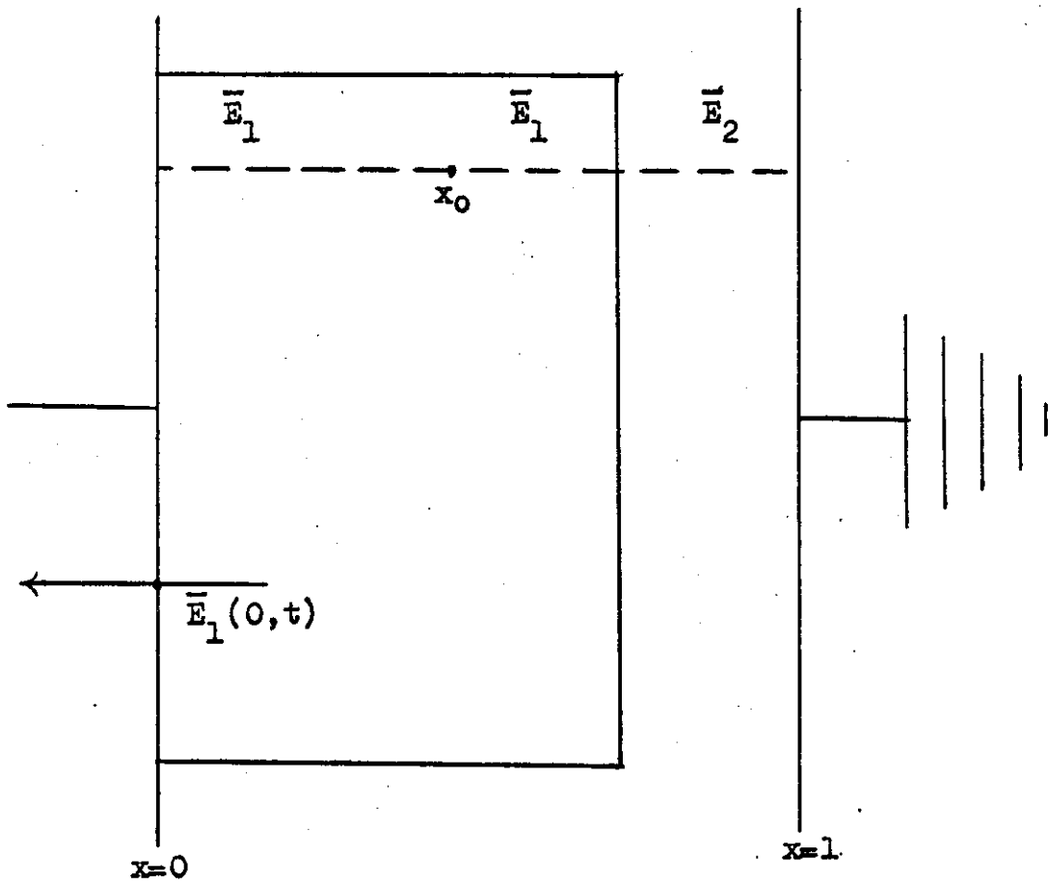

Figura 7

Como, nesta secção, considera-se apenas a situação em que a carga espacial não destaca, o gráfico dos campos corresponde ao gráfico da figura 4, para $\rho \simeq 0$; e deste se verifica que $E_1(x,t)$ é negativo na placa $x = 0$, por isto há uma corrente de condução para esta placa.

Sendo $E_1(0,t)$ o campo na placa $x = 0$ em qualquer tempo, a corrente de condução i, na placa $x = 0$, deve ser (fig.7),

$$i = \rho E_1(0,t)$$

Fazendo $x = 0$ na expressão de $E_1(x,t)$, equação (I-5), obtém-se

$$E_1(0,t) = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right]$$

Há corrente para a placa $x = 0$ quando $E_1(0,t)$ é negativo, portanto

$$E_1(0,t) = -\frac{\rho}{\rho_o}\left[q_o\left(1 - \frac{s_o}{2}\right) - 1\right],$$

e daí

$$i = -\frac{\rho^2}{\rho_o}\left[q_o\left(1 - \frac{s_o}{2}\right) - 1\right]$$

Como o sinal indica só o sentido da corrente e não o sinal da carga, que é positiva, vamos tomar só o módulo de i.

$$Q = \int_0^t |i|\,dt = \frac{1}{\rho_o}\left[q_o\left(1 - \frac{s_o}{2}\right) - 1\right]\int_0^t \rho^2\,dt$$

Suponhamos agora $\rho > 0$

No estudo dos gráficos dos campos já foi demonstrado que

$$E_1(0,t) = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right] = b > 0$$

para $\rho < 0$.

Sendo $\frac{\rho^2}{\rho_o} < 0$ para este caso, vem que

$$i = \frac{\rho^2}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right] < 0,$$

e,

$$i = -\frac{\rho^2}{\rho_o}\left[q_o(1 - \frac{s_o}{2}) - 1\right]$$

Não considerando o sinal, pois este indica o sentido da corrente e não o sinal da carga, resulta

$$Q = \int_0^t |i|dt = \frac{1}{\rho_o}\left[q_o\ (1 - \frac{s_o}{2}) - 1\right]\int_0^t \rho^2\ dt$$

Obtivemos então para expressão da evasão da carga negativa, pela placa $x = 0$, a mesma expressão que a obtida para a carga positiva.

Portanto a expressão que se obtiver para Q será válida para $\rho > 0$ e $\rho < 0$.

Sendo $\int_0^t \rho^2\, dt$ de fácil integração, obtém-se imediatamente

$$\int_0^t \left(\frac{\rho_o}{1 + \rho_o t}\right)^2 dt = \frac{\rho_o^2 t}{1 + \rho_o t}$$, obtendo-se então para Q,

$$Q = \left[q_o(1 - \frac{s_o}{2}) - 1\right]\frac{\rho_o t}{1 + \rho_o t}, \qquad \text{(I-6)}$$

Esta é a expressão da carga que se transfere da carga espacial, em um tempo qualquer t, para a placa $x = 0$.

Pode-se ainda tomar a expressão de Q, da seguinte forma,

$$Q = \left[q_o - (1 + \frac{q_o s_o}{2}) \right] \frac{\rho_o t}{1 + \rho_o t} \text{ , mas } 1 + \frac{q_o s_o}{2} = E_2 \text{ , donde}$$

$$Q = \left[q_o - E_2 \right] \frac{\rho_o t}{1 + \rho_o t}$$

Vamos obter agora a expressão de Q em função de s(t).

Da equação em s(t),

$$s = s_o + E_2 t \text{ ,}$$

tira-se

$$t = \frac{s - s_o}{E_2}$$

que substituido em Q dá

$$Q = \left[q_o - E_2 \right] \frac{\rho_o (s - s_o)}{E_2 + \rho_o (s - s_o)} \text{ ,}$$

que é a expressão de Q em função de s.

Nesta expressão E_2 é um parâmetro que depende das condições iniciais ρ_o e s_o.

- DESCARGA NAS PLACAS -

Q será determinada nos casos em que $E_2 = 0$, $E_2 > 0$ e $E_2 < 0$ recordando-se que estes tres casos só podem ocorrer para $\rho < 0$. (a) $E_2 = 0$.

Neste caso, da equação (I-7) verifica-se facilmente que

$$Q = q_o \text{ ,}$$

o que significa que toda a carga espacial transfere-se para a placa $x = 0$ em um tempo

$$t = \infty, \text{ obtido de } \rho = \frac{\rho_o}{1 + \rho_o t} \text{ para } \rho = 0$$

Neste caso, de

$$s = s_o - E_2 t,$$

verifica-se que a frente da nuvem não se desloca, pois $s(t) = s_o$ = constante, mas embora os campos existentes entre s_o e $x = 0$, se orientem para a placa $x = 1$ as forças que atuam nos transportadores, por ser $\rho < 0$, se orientam para a placa $x = 0$ e transportam as cargas que se encontram no intervalo $(0, s_o)$ para esta placa.

(b) $E_2 > 0$

Como, neste caso, os campos na carga espacial são positivos as forças serão negativas e toda a carga se transferirá para a placa $x = 0$ no tempo

$$t = \frac{s_o}{E_2}$$

Neste tempo, $s = 0$, e teremos para Q, equação (I-7)

$$Q = \left[q_o - E_2 \right] \frac{-\rho_o s_o}{E_2 - \rho_o s_o}$$

donde

$$Q = \left[q_o - E_2 \right] \frac{q_o}{\left[q_o - E_2 \right]} = q_o,$$

também neste caso toda a carga espacial inicial se transfere para a placa $x = 0$, adjacente à mesma. Nes-

te caso, por ser $E_2 \neq 0$, esta transferência se realiza em um tempo finito. O gráfico dos campos para este caso, está representado na figura abaixo.

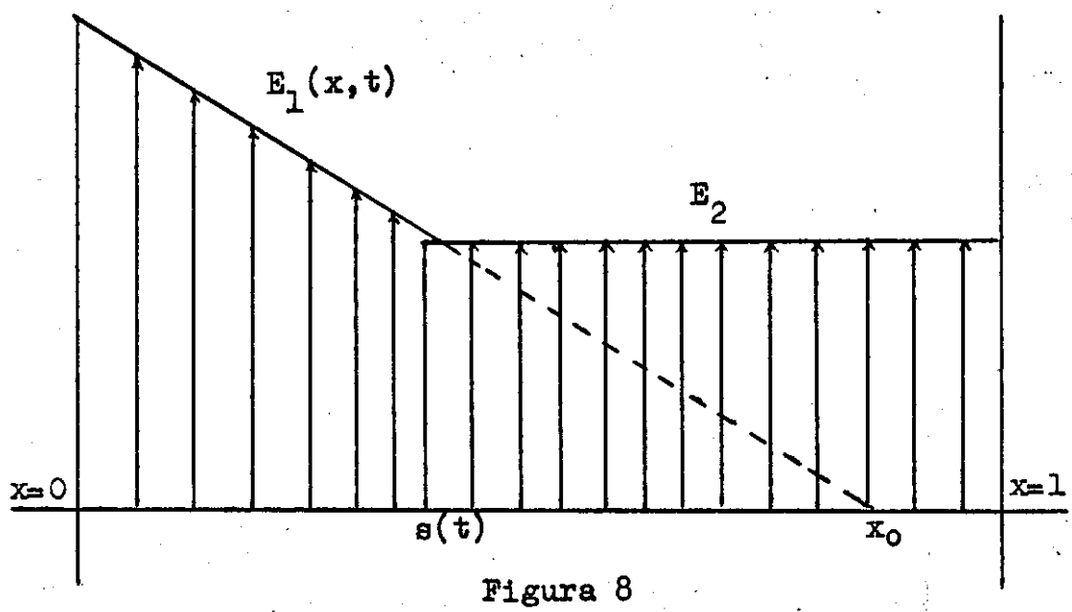

Figura 8

(c) $E_2 < 0$

Neste caso a frente da nuvem caminha para a placa s=1 pois as forças que atuam na mesma são positivas. A distribuição dos campos para este caso está indicada na figura 9.

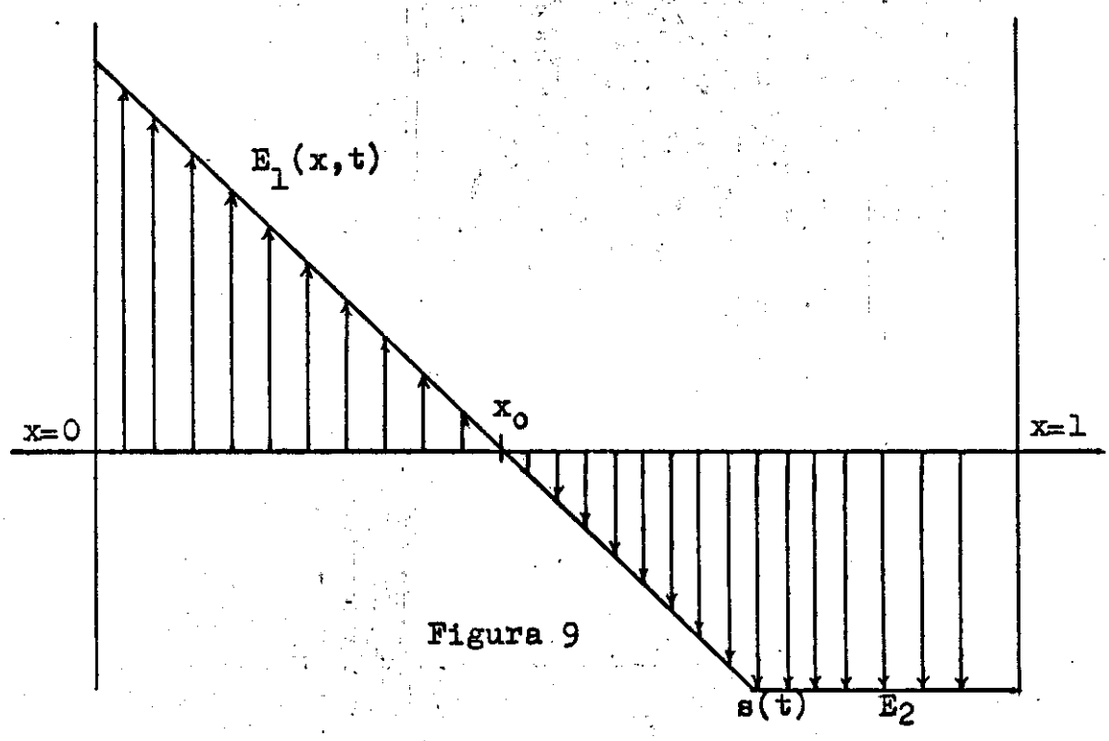

Figura 9

Pela placa $x = 0$ pode-se verificar a descarga apenas dos transportadores localizados na região $(0, x_o)$, (x_o sendo o ponto de campo nulo) já que só as forças neste intervalo são negativas.

Como a carga situada nesta região tem por expressão, em um tempo qualquer t,

$$q(t) = x_o \cdot \rho(t) \ ,$$

verifica-se que para que $q(t) = 0$ é necessário que $\rho(t) = 0$, e como isto só ocorre para $t = \infty$, então a descarga pela placa $x=0$ se completa em $t = \infty$. Na expressão geral da carga que se transfere para a placa $x = 0$,

$$Q_1 = \left[q_o - E_2 \right] \frac{\rho_o t}{1 + \rho_o t}$$

fazendo-se $t = \infty$, obtém-se

$$Q_1 = q_o - E_2$$

valor da descarga nesta placa.

Vamos determinar agora a descarga na placa $q=1$. A descarga nesta placa só se realizará após o tempo de trânsito t_1, que é o tempo que a frente da carga espacial leva para atingí-la.

Em $t \geq t_1$ a carga espacial preenche todo o dielétrico e é fácil demonstrar que o campo agora presente tem a mesma expressão que o campo $E_1(x,t)$ utilizando-se as novas condições de contorno.

O campo na placa x=1 é então, para qualquer $t \geq t_1$,

$$E_1(1,t),$$

e, consequentemente, a corrente nesta placa será

$$i(1,t) = \rho(t)\ E_1(1,t), \qquad t \geq t_1$$

Na expressão de $E_1(x,t)$, equação (I-5), fazendo-se x=1, vem

$$E_1(1,t) = \rho\ \frac{E_2 + \rho_o(1 - s_o)}{\rho_o}$$

Para a descarga, na placa x=1, no intervalo $(t - t_1)$, tem-se então,

$$Q_2 = \frac{E_2 + \rho_o(1 - s_o)}{\rho_o} \int_{t_1}^{t} \rho^2 dt$$

porém, da equação da continuidade, resulta:

$$\rho^2 dt = - d\rho$$

$$\therefore$$

$$Q_2 = \frac{E_2 + \rho_o(1 - s_o)}{\rho_o} (\rho(t_1) - \rho(t)), \qquad t \geq t_1$$

Esta é então a expressão da descarga na placa x=1, no intervalo de tempo $(t-t_1)$. A carga que se transfere para esta placa é aquela situada na região $(x_o,1)$ e é bem fácil demonstrar como foi feito para a região $(0,x_o)$, que esta descarga só se completa em $t=\infty$.

Para $t=\infty$, $\rho(t) = 0$, e, para a descarga total na placa x=1, tem-se

$$Q_2 = \frac{E_2 + \rho_o(1 - s_o)}{\rho_o}\ \rho(t_1)$$

substituindo-se $t_1 = \frac{1 - s_o}{E_2}$ na equação (I-2), da densidade, vem

$$\rho(t_1) = \frac{\rho_o\ E_2}{E_2 + \rho_o(1 - s_o)} \qquad \therefore$$

obtém-se para Q_2,

$$Q_2 = E_2$$

Esta é a expressão da descarga total na placa $x = 1$, entre $t = t_1$ e $t = \infty$.

A descarga pelas duas placas tem então o valor

$$Q = Q_1 + Q_2 = q_o,$$

isto é, toda a carga espacial se transfere para as duas placas.

Consideremos agora a situação em que $o - o$. Para este caso já foi visto que

$$E_2 = 1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2} > 0,$$

concluindo-se daí portanto que há uma única possibilidade na dinâmica da frente da carga espacial positiva, quando $V_o' > 0$, que é a de se deslocar, sempre para diante, no sentido da placa $x = 1$, pois $\frac{ds}{dt} = E_2 > 0$.

O gráfico para os campos, nestas condições, é o da figura 4.

Nestes termos, podemos calcular a descarga total de forma semelhante à que fizemos no ítem (c), caso em que $\rho < 0$ e $E_2 < 0$ e provaremos facilmente que também aqui a descarga total é igual a q_o, carga espacial inicial.

- TEMPO DE DESCARGA -

(1) Para $o < 0$, $E_2 < 0$ e $\rho > 0$, $E_2 > 0$ foi verificado que a frente da nuvem caminha para a placa $x = 1$.

Quando a frente da carga espacial alcança a placa x=1, é fácil de constatar que, em ambos os casos, a carga que permanece entre as placas é obtida de,

$$Q_2(t_1) = \rho(t_1) \cdot 1 = \rho(t_1)$$

sendo t_1 o tempo de trânsito,

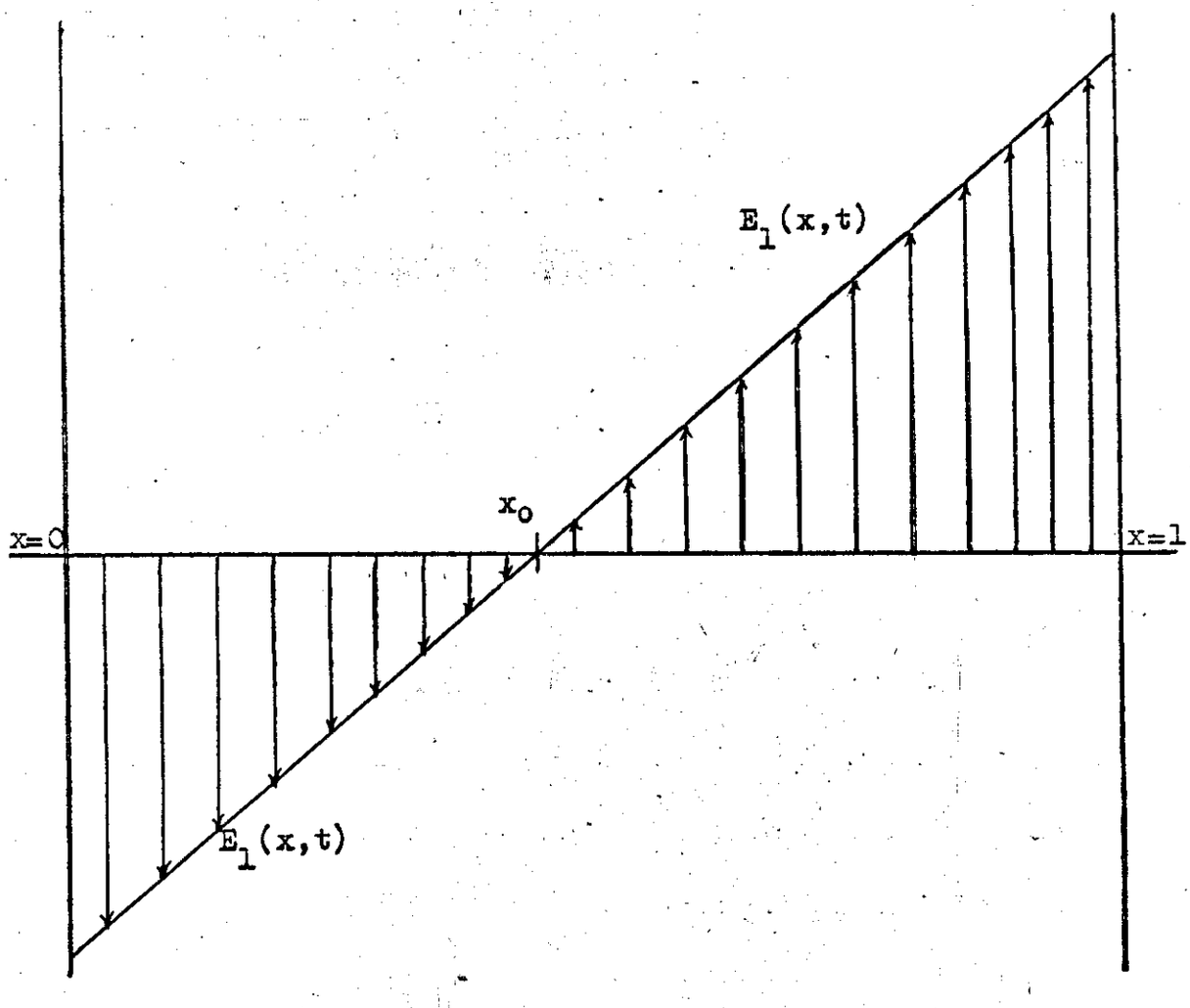

Figura 10

A figura 10 mostra a distribuição dos campos quando a

frente da nuvem atingiu a placa $x = 1$, para o caso $\rho > 0$. Tendo t_1 o significado indicado no parágrafo anterior, a carga que permanece no dielétrico, para $t > t_1$,

é $$Q(t) = \rho(t) \cdot 1 = \rho(t)$$

E como $Q(t) = 0$ só para $\rho(t) = 0$ e como isto só se verifica para $t = \infty$, segue-se daí que a descarga das cargas positivas e das negativas para $E_2 < 0$ se completa em $t = \infty$. A descarga se opera pelas duas placas. Isto não é difícil de se entender qualitativamente, pois as camadas próximas a x_0 têm velocidades praticamente nulas, $\frac{dx}{dt} = E_1(x,t)$, e levarão um tempo $t = \infty$, para atingirem as placas $x = 0$ e $x = 1$.

(2) Para $\rho < 0$, $E_2 = 0$ já foi mostrado no parágrafo anterior, item (a), que a descarga se efetua em $t = \infty$. A descarga se efetua apenas pela placa $x = 0$.

(3) Quando $\rho < 0$, $E_2 > 0$ também no parágrafo anterior, item (b); foi visto que a descarga se efetua em um tempo finito, $t = \frac{s_0}{E_2}$.

A descarga se verifica apenas por uma placa, a placa $x = 0$.

- PONTO DE CAMPO NULO -

A expressão do ponto de campo nulo deve ser procurada em $E_1(x,t)$ pois só este depende de x.

Igualando $E_1(x,t)$, equação (I-5), a zero

$$E_1(x,t) = \rho x_o + \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right] = 0$$

tira-se facilmente,

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[1 + q_o\left(\frac{s_o}{2} - 1\right)\right],$$

verificando-se que o ponto de campo nulo, x_o, é constante.

EXPRESSÕES EM FUNÇÃO DO PONTO DE CAMPO NULO

A partir da expressão do ponto de campo nulo, coloca-se facilmente

$$E_1(x,t)$$

em função de x_o, obtendo-se

$$E_1(x,t) = \rho(x - x_o), \qquad \text{(I-8)}$$

Sendo

$$E_2 = 1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2},$$

de

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2} - q_o\right]$$

substituindo-se, vem

$$\rho_o x_o = - \left[E_2 - q_o \right]$$

de onde se tira

$$E_2 = \rho_o (s_o - x_o), \qquad \text{(I-9)}$$

Da expressão de Q

$$Q = (q_o - E_2) \frac{\rho_o t}{1 + \rho_o t}$$

substituindo-se a expressão de E_2, vem

$$Q = (q_o - \rho_o s_o + \rho_o x_o) \frac{\rho_o t}{1 + \rho_o t}$$

e

$$Q = \rho_o x_o \frac{\rho_o t}{1 + \rho_o t}, \qquad \text{(I-10)}$$

Quando $x_o = s_o$, que corresponde a $E_2 = 0$ e a $t = \infty$, tem-se

$$Q = \rho_o x_o = q_o$$

o que confirma este resultado já obtido por outros meios.

- RESUMO DOS RESULTADOS -

Embora os resultados acima conseguidos surjam como caso particular do problema a ser tratado na secção seguinte, resolvemos apresentá-los tanto para ilustração do mé

todo usado como pela imediata possibilidade de interpretação dos mesmos. Os principais resultados obtidos nesta secção podem ser assim resumidos:

(1) Se inicialmente tem-se uma distribuição em caixa, ela assim permanece no decorrer do tempo, a densidade decrescendo de acordo com a relação

$$\frac{\rho_o}{1+\rho_o t}$$

(2) A frente da carga espacial desloca-se com velocidade constante.

(3) O campo na região (2), livre de carga espacial, permanece constante.

(4) O campo na região com carga espacial, $E_1(x,t)$, para $t = Cte$, é linear em x, $E_1 = ax + b$, e, para $x = Cte$ é diretamente proporcional à densidade, $E_1 = K\rho$.

(5) Para carga e potencial do mesmo sinal a carga tem a sua frente deslocando-se sempre para a placa x=1. Para carga e potencial de sinais contrários a frente da nuvem pode avançar, recuar ou imobilizar-se segundo $E_2 \gtreqless 0$

(6) O ponto de campo nulo é constante no tempo.

(7) O decaimento da carga espacial processa-se apenas de uma forma: descarga através das placas.

(8) O decaimento da densidade verifica-se por duas vias: (a) descarga pelas placas, (b) variação do volume da carga espacial enquanto a frente da nuvem se desloca.

(9) Toda a carga espacial se transfere para as placas.

(10) A descarga se efetua pelas duas placas quando $s_o > x_o$ e apenas pela placa $x=0$ quando $s_o < x_o$ e $s_o = x_o$.

(11) A carga espacial descarrega em $t=\infty$ nos casos em que $s_o = x_o$ e $s_o > x_o$ e em tempo finito quando $s_o < x_o$.

(12) Quando a descarga se efetua pelas duas placas as frações de descarga são: pela placa $x=0$, $\rho_o x_o$, e pela placa $x=1$, $q_o - \rho_o x_o$, ou, em função de E_2, respectivamente, $q_o - E_2$ e E_2, sendo $E_2 = 1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2}$.

(13) Depois que a frente da nuvem atinge a placa $x=1$, a carga espacial preenche todo o dielétrico, e a distribuição dos campos, nestas condições, é a mesma que a de $E_1(x,t)$, evidentemente, agora, para $t \geq t_1$ (t_1 = tempo de trânsito).

(14) O campo E_2 representa três grandezas:

(a) Campo na região sem cargas,
(b) Velocidade da frente da nuvem, em unidades reduzidas
(c) Uma carga situada entre s_o e x_o, tendo por expressão, $E_2 = \rho_o(s_o - x_o)$.

(15) O teorema de Lindmayer $J = - a\rho(x_o,t) \frac{dx_o}{dt}$, é também confirmado para o caso de circuito aberto, já que, de $x_o = Cte$, tem-se $J = 0$.

(16) A existência do ponto de campo nulo no interior da distribuição de carga espacial significa que existem cargas que se orientam para as duas placas sendo o plano de campo nulo a fronteira entre estas cargas de orientações opostas.

A localização do ponto de campo nulo na fronteira da distribuição de cargas ou no seu exterior significam cargas orientando-se apenas para uma das placas.

Ponto de campo nulo à esquerda, carga desloca-se para a direita.

Ponto de campo nulo à direita, carga desloca-se para a esquerda.

(17) Quando o ponto de campo nulo situa-se no interior da carga espacial (a) os campos são positivos e negativos, (b) quando situa-se à esquerda da carga espacial os campos são positivos, (c) quando situa-se à direita os campos são negativos.

Isto para $\rho > 0$, pois para $\rho < 0$ os itens (b) e (c) são o oposto.

- SECÇÃO II -

SIMETRIA DO CONDENSADOR PLANO, EM CIRCUITO ABERTO, COM $V_o \neq 0$ e $\sigma \neq 0$

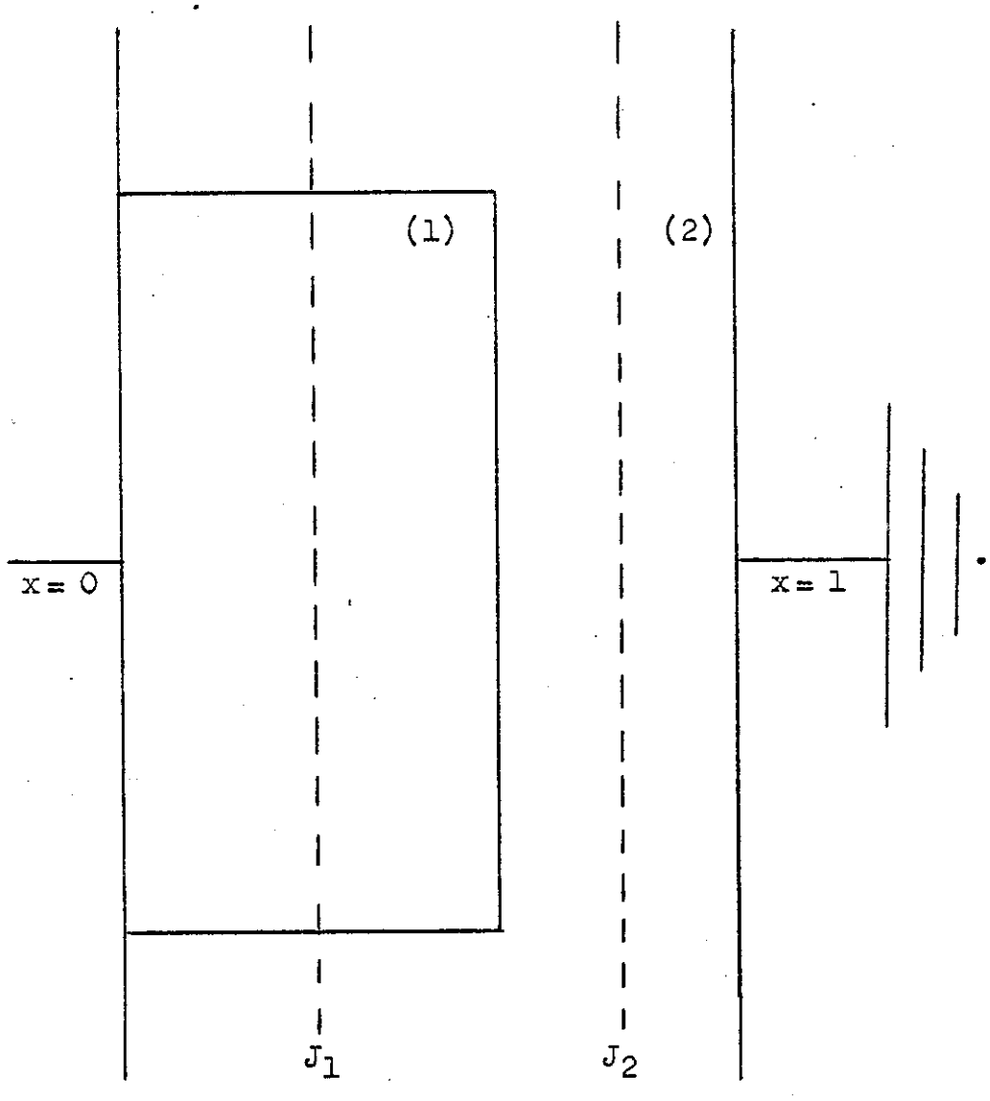

Figura 11

A situação está esquematicamente representada na figura 11.

$$i'(x', t') = \mu\rho'(x',t')\ E'(x',t') + \sigma E'(x',t')$$

é a corrente de condução para este caso, ou, em unidades

reduzidas,

$$i(x,t) = \rho(x,t)\ E(x,t) + \sigma E(x,t)$$

As fórmulas de conversão entre as unidades reduzidas e as não reduzidas são

$$E = \frac{d'}{V'}\ E', \qquad x = \frac{x'}{d'}, \qquad \rho = \frac{d'^2}{\varepsilon V'}\ \rho'$$

$$t = \frac{\mu V'}{d'^2}\ t', \qquad J = \frac{d'^3}{\mu \varepsilon V'^2}\ J' \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{d'^2}{\mu \varepsilon V'}\ \sigma',$$

cuja demonstração é encontrada no apêndice.

- EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE -

Dada a geometria do sistema, tem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0$$

Como $\qquad i(x,t) = \rho(x,t)\ E(x,t) + \sigma E(x,t),$

desta equação vê-se que a condutividade intrínseca σ pode ser desprezada quando $\sigma \ll \rho$ ou $\sigma' \ll \mu\rho'$, resultado que era de se esperar.

Atentar, porém, para o fato de que, em qualquer problema real, sempre se atinge a situação em que a condutividade do material prevalece.

A substituição da expressão de $i(x,t)$ na equação da continuidade leva a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial E}{\partial x} + \sigma \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

e da equação de Poisson

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \rho,$$

obtém-se finalmente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\rho + \sigma) = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

- DETERMINAÇÃO DA DENSIDADE -

Da equação da continuidade

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\rho + \sigma) = 0,$$

tira-se

$$\frac{d\rho}{\rho(\rho + \sigma)} = - dt$$

Integrando, vem

$$\int_{\rho_o}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho(\rho + \sigma)} = - t$$

Utilizando decomposição em frações racionais, obtém-se:

$$\frac{\rho}{\rho + \sigma} = \frac{\rho_o}{\rho_o + \sigma} e^{-\sigma t},$$

de onde após algumas operações simples resulta a expressão da densidade como função do tempo,

$$\rho(t) = \frac{\sigma \rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma + \rho_o(1 - e^{-\sigma t})}, \qquad \text{(II-2)}$$

Verificando-se então que, com a condutividade, a carga espacial decai mais rapidamente.

Este decrescimento mais rápido de $\rho(t)$ é devido à neutralização produzida na carga espacial por cargas, de sinal contrário, oriundas de condutividade.

- CÁLCULO DOS CAMPOS -

Da equação de Poisson na região (2) tem-se

$$\frac{dE_2}{dx} = \rho = 0,$$

concluindo-se portanto que

$E_2 =$ constante em relação a x.

Ainda nesta região, como $\rho(x,t) = 0$, tem-se para a corrente total

$$J_2 = \sigma E_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0$$

Sendo E_2 independente de x, pode-se substituir $\frac{\partial}{\partial t}$ por $\frac{d}{dt}$ obtendo-se

$$\frac{dE_2}{dt} = - \sigma E_2,$$

e daí

$$\frac{dE_2}{E_2} = - \sigma dt,$$

donde resulta

$$E_2 = E_{20}\, e^{-\sigma t}$$

que ainda não é a expressão final de E_2 pois é preciso determinar E_{20}.

Na região (1),

$$\frac{dE_1}{dx} = \rho \neq 0$$

resultando para E_1: $E_1 = \rho x + C$

Devido à continuidade dos campos, tem-se em $x = s$,

$$E_1(s,t) = \rho s + C(t) = E_2 = E_{20}\, e^{-\sigma t}$$

Para $t = 0$, vem que

$$E_{20} = \rho_o s_o + C(0),$$

donde

$$E_2 = \left[\rho_o s_o + C(0)\right] e^{-\sigma t}$$

$C(0)$ obtém-se a partir da condição de contorno

$$\int_0^{s_o} E_1(x,0)\, dx + \int_{s_o}^{1} E_{20}\, dx = 1,$$

a qual, com a substituição das expressões dos campos dá,

$$\int_0^{s_o} (\rho_o x + C(0))\, dx + E_{20}(1 - s_o) = 1$$

Como as integrais são imediatas, prontamente se calcula que

$$C(0) = 1 + q_o\left(\frac{q_o}{2} - 1\right)$$

que substituída em E_{20}, dá para E_2:

$$E_2 = \left(1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2}\right) e^{-\sigma t}, \qquad \text{(II-3)}$$

E_2 decai exponencialmente com o tempo.

E_2 só poderá ser nulo ou negativo para cargas negativas, isto é, $\rho_o < 0$. Para se determinar $E_1(x,t)$ parte-se da expressão da corrente total na região (1),

$$J_1 = \rho E_1(x,t) + \sigma E_1(x,t) + \frac{\partial E_1(x,t)}{\partial t} = 0$$

Com a substituição da expressão de E_1, $E_1(x,t) = \rho x + C(t)$, e após alguns arranjos, obtém-se

$$x \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho(\rho + \sigma) \right] + (\rho + \sigma)\, C + \frac{dC}{dt} = 0,$$

mas, por ser a equação da continuidade,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\rho + \sigma) = 0,$$

e então

$$(\rho + \sigma)\, C + \frac{dC}{dt} = 0$$

Da equação da continuidade se tira

$$(\rho + \sigma)\, dt = - \frac{d\rho}{\rho},$$

a qual, substituída na equação diferencial em C, conduz a

$$\frac{dC}{C} = \frac{d\rho}{\rho},$$

donde $$C(t) = C(0)\, \frac{\rho}{\rho_o}$$

Como a expressão de C(0) é conhecida, ter-se-á para C(t):

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o} \left[1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2} - \rho_o s_o \right]$$

Consequentemente virá para $E_1(x,t)$:

$$E_1(x,t) = \rho x + \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2} - \rho_o s_o\right]$$

ou, em função de E_{20},

$$E_1(x,t) = \rho x + \frac{\rho}{\rho_o}\left[E_{20} - q_o\right], \qquad \text{(II-4)}$$

Verifica-se que $E_1(x,t)$ (guarda a mesma relação de dependência com ρ e x) que E_1 para $\sigma = 0$, mas decai mais rapidamente pois agora ρ decresce exponencialmente com t.

Como em relação a x E_2 é constante e $E_1(x,t)$ é representado por uma reta os gráficos dos campos são análogos aos já vistos na secção anterior, para $\sigma = 0$

- PONTO DE CAMPO NULO -

Igualando a zero a equação (II-4),

$$E_1(x_o,t) = \rho x_o + \frac{\rho}{\rho_o}\left[E_{20} - q_o\right] = 0$$

obtém-se, para expressão do ponto de campo nulo,

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[E_{20} - q_o\right]$$

o ponto de campo nulo é o mesmo que para $\sigma = 0$ em idênticas condições de ρ_o e s_o, o que era de se esperar já que x_o independe de ρ.

Da expressão do ponto de campo nulo resulta para E_{20}:

$$E_{20} = \rho_o(s_o - x_o),$$

e portanto para E_2,

$$E_2 = \rho_o(s_o - x_o)\ e^{-\sigma t}$$

A substituição de $\frac{1}{\rho_o}\left[E_{20} - q_o\right]$ por x_o na expressão de $E_1(x,t)$, equação (II-4), dá:

$$E_1(x,t) = \rho(x - x_o).$$

Quando x_o encontra-se na região (1), região com carga espacial, o ponto de campo nulo tem existência física concreta e quando não ocorre na região (1) não tem sentido físico, não existe, mas o valor matemático encontrado indica justamente isto que ele, x_o, não existe e a sua substituição nas expressões assinala o valor correto que estas devem ter no caso da não existência do ponto de campo nulo. Vamos mostrar isto com um exemplo:

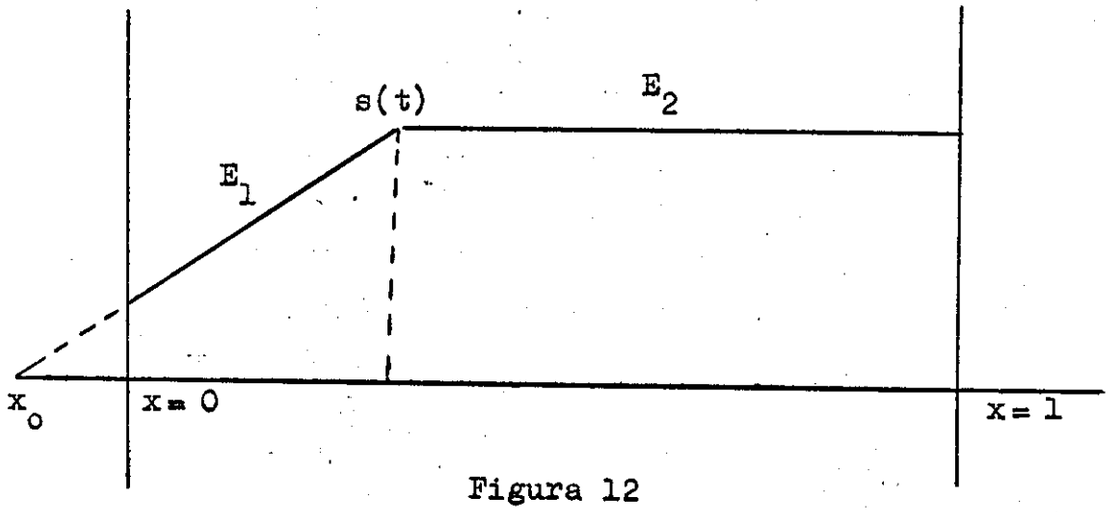

Figura 12

Neste caso os campos são positivos e o ponto de campo nulo negativo, $x_o = -|x_o|$, isto é, a distribuição não tem ponto de campo nulo.

De $$E_1 = \rho(x - x_o)$$

e $$x_o = -|x_o|, \text{ vem que}$$

$$E_1 = \rho(x + |x_o|)$$

Como $\rho > 0$ e x varia no domínio $0 < x < s(t)$, positivo, então vem que

$$E_1 > 0$$

De $$E_2 = \rho_o(s_o - x_o), \text{ vem que}$$

$$E_2 = \rho_o(s_o + |x_o|) > 0.$$

E portanto, E_1, $E_2 > 0$, conclusão correta obtida do conhecimento de que $x_o = -|x_o|$.

O que se quis demonstrar no exemplo acima é que não havendo ponto de campo nulo o valor de x_o não é impróprio para ser substituído nas expressões onde ocorre pois substituído nestas expressões ele, x_o, indica para elas o valor que devem ter quando não há ponto de campo nulo, e mais ressalta o valor que elas devem ter na ausência do ponto de campo nulo segundo este se encontre à direita ou à esquerda da região (1), indicando em cada caso o sinal correto dos campos pois o fato do ponto de campo nulo se encontrar à direita ou à esquerda da região (1) indica campos que podem ter sinais diferentes e a substituição de x_o, nestes casos, nas expressões dos campos, indica o sinal correto destes, o seu sentido exato.

- DESLOCAMENTO DA FRENTE DA CARGA ESPACIAL -

A frente da carga espacial se desloca com uma velocidade dada por (de acordo com o conceito de mobilidade),

$$\frac{ds}{dt} = E_{2s}$$

ou,

$$\frac{ds}{dt} = E_{20}e^{-\sigma t},$$

que integrada resulta em:

$$s = s_o + \frac{E_{20}}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t}), \qquad \text{(II-5)}$$

Como para $\sigma = 0$

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} = t,$$

resulta para s:

$$s = s_o + E_{20}t$$

que coincide com a expressão, já obtida anteriormente, equação (I-4), para s(t) quando $\sigma = 0$.

Para $t = \infty$, resulta da equação (II-5)

$$(s - s_o)_{máx} = \frac{E_{20}}{\sigma}$$

o que significa que a frente da nuvem pode ou não alcançar as placas. Se $\frac{E_{20}}{\sigma} < 1 - s_o$ ou $\frac{E_{20}}{\sigma} < s_o$ a frente da nuvem não alcança as placas, o que ocorrerá, evidentemente, para a situação inversa.

Quando $\sigma = 0$ para que a frente de nuvem não alcan-

çasse as placas era necessário que ela permanecesse imóvel, $s(t) = s_o$, ao passo que, para $\sigma \neq 0$, ela pode se deslocar, $s(t) \neq s_o$, sem no entanto alcançar as placas, bastando para isto que

$$(s - s_o)_{máx} = \frac{E_{20}}{\sigma} < 1 - s_o \quad \text{ou} \quad s_o,$$

pois desde que $E_{20} \neq 0$, $s \neq s_o$.

- CARGA Q QUE SE TRANSFERE PARA A PLACA $x = 0$ -

(a) Carga oriunda só da carga espacial

A corrente de condução em $x = 0$ é dada por

$$i = \rho(t)\ E_1(0,t) + \sigma E_1(0,t)$$

Vamos considerar inicialmente a corrente oriunda só da carga espacial

$$i_1 = \rho(t)\ E_1(0,t)$$

Fazendo-se em $E_1(x,t)$, equação (II-4), $x = 0$, obtém-se

$$E_1(0,t) = \frac{\rho}{\rho_o}\left[E_{20} - q_o\right]$$

Substituindo-se $E_1(0,t)$ em i_1 e explicitando-se o sinal negativo, vem

$$i_1 = -\frac{\rho^2}{\rho_o}\left[q_o - E_{20}\right]$$

Como o sinal negativo indica apenas o sentido da corrente e não o sinal da carga, vamos omití-lo, obtendo-se portanto para Q:

$$Q = \frac{1}{\rho_o}\left[q_o - E_{20}\right]\int_0^t \rho^2\,dt$$

Mas $\rho^2 dt = -\,d\rho - \sigma\rho dt$, relação oriunda da equação da continuidade. Daí obtém-se,

$$\int_0^t \rho^2 dt = \left[\rho_o - \frac{\sigma\rho_o}{(\sigma+\rho_o)e^{\sigma t} - \rho_o}\right] - \sigma\int_0^t \rho dt$$

Entretanto verifica-se facilmente que

$$\int_0^t \rho dt = \int_0^t \frac{\sigma\rho_o\, e^{-\sigma t}}{(\sigma+\rho_o) - \rho_o e^{-\sigma t}}\,dt = L\,\frac{(\sigma+\rho_o) - \rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma}$$

Substituído este resultado na expressão de Q, obtém-se

$$Q = \frac{1}{\rho_o}\left[q_o - E_{20}\right]\left[\rho_o - \frac{\sigma\rho_o}{(\sigma+\rho_o)\,e^{\sigma t} - \rho_o} - \sigma L\,\frac{(\sigma+\rho_o) - \rho_o\, e^{-\sigma t}}{\sigma}\right] \quad \text{(II-6)}$$

Para $\sigma \neq 0$ ou $\sigma = 0$ obtém-se a expressão

$$Q = \frac{1}{\rho_o}\left[q_o - E_{20}\right]\int_0^t \rho^2 dt$$

para a carga que se transfere para a placa $x = 0$.

Daí vê-se que, como

$$\rho_{\sigma\neq 0} < \rho_{\sigma = 0}, \qquad t \geq 0,$$

deve-se ter, obviamente,

$$Q_{\sigma\neq 0} < Q_{\sigma = 0}$$

Com condutividade a corrente, oriunda da carga espacial, para a placa $x = 0$ diminui, embora haja uma compensação proveniente da própria condutividade, $i = \sigma E$, que pode ocasionar, em alguns casos, uma corrente mais intensa para a placa $x = 0$ que na situação em que $\sigma = 0$.

(b) Carga oriunda só da condutividade. A corrente, correspondente à condutividade, tem por expressão,

$$i_2 = \sigma E_1(0,t),$$

na placa $x = 0$.

No item (a) achou-se

$$E_1(0,t) = \frac{\rho}{\rho_o}\left[E_{20} - q_o\right],$$

e portanto

$$i_2 = -\frac{\sigma\rho}{\rho_o}\left[q_o - E_{20}\right]$$

cuja integração resulta em

$$Q_2 = \frac{\sigma}{\rho_o}(q_o - E_{20})\, L\, \frac{(\sigma + \rho_o) - \rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma}, \qquad \text{(II-7)}$$

para a carga que descarrega na placa $x = 0$, proveniente apenas da condutividade e, evidentemente, de mesmo sinal que a carga espacial.

(c) Carga total

A carga total na placa $x = 0$ é proveniente de toda a corrente de condução, $i = (\rho + \sigma)\, E_1(0,t)$, e obtém-se portanto da soma das equações (II-6) e (II-7), resultando

$$Q = \frac{1}{\rho_o}(q_o - E_{20})\left(\rho_o - \frac{\sigma\rho_o}{(\sigma + \rho_o)e^{\sigma t} - \rho_o}\right), \qquad \text{(II-8)}$$

Como o fator $\frac{1}{\rho_o}(q_o - E_{20})$ é exatamente x_o, obtém-se

$$Q = x_o\left(\rho_o - \frac{\sigma\rho_o}{(\sigma + \rho_o)\, e^{\sigma t} - \rho_o}\right), \qquad \text{(II-9)}$$

para expressão de Q em função do ponto de campo nulo.

Q como função de s.

Da expressão de s, eq. (II-5), se tira

$$e^{\sigma t} = \frac{E_{20}}{E_{20} - \sigma(s - s_o)}$$

que substituída na equação (II-9) e após algumas transformações simples dão

$$Q = \frac{x_o(\rho_o + \sigma)(s - s_o)}{s - x_o}, \qquad \text{(II-10)}$$

s em função do ponto de campo nulo.

Da expressão de s(t), equação (II-5), vem, pela substituição de

$$E_{20} = \rho_o(s_o - x_o),$$

$$s = s_o + \frac{1}{\sigma}\rho_o(s_o - x_o)(1 - e^{-\sigma t}), \qquad \text{(II-11)}$$

Densidade como função de s.

Da equação (II-11), se tira

$$e^{-\sigma t} = \frac{\rho_o(s_o - x_o) - \sigma(s - s_o)}{\rho_o(s_o - x_o)}$$

e $$1 - e^{-\sigma t} = \frac{\sigma}{\rho_o} \frac{s - s_o}{s_o - x_o},$$

que substituídas na equação (II-2) resultam em

$$\rho = \frac{\rho_o(s_o - x_o) - \sigma(s - s_o)}{s - x_o}, \qquad \text{(II-12)}$$

- Descarga nas placas -

Da mesma maneira que para o caso em que $\sigma = 0$,

$E_2 = (1 + \frac{\rho_o s_o^2}{2})\, e^{-\sigma t}$ só pode ser $E_2 \gtreqless 0$, para $\rho_o < 0$.

Portanto Q será considerado conforme $E_{20} \gtreqless 0$ ou o que é a mesma coisa, segundo $s_o \lesseqgtr x_o$.

(a) $s_o \lesseqgtr x_o$ e $t = \infty$

Na equação (II-8), tomando-se $t = \infty$, vem $Q_\infty = q_o - E_{20}$

Denominando as situações $s_o \lesseqgtr x_o$, (I), (II) e (III), respectivamente, vem:

(I) Para $s_o < x_o$, $E_{20} > 0$ pois $\rho_o > 0$

$$\therefore$$

$$Q_\infty = -(|q_o| + E_{20})$$

(II) Para $s_o > x_o$, $E_{20} < 0$

$$\therefore$$

$$Q_\infty = -(|q_o| - E_{20})$$

(III) Para $s_o = x_o$, $E_{20} = 0$

$$\therefore$$

$$Q_\infty = q_o$$

As duas primeiras situações não podem ocorrer para $\sigma = 0$ pois, nesta condição, quando $t = \infty$, $E_{20} = 0$. Para $t = \infty$, obtém-se para s,

$$s_\infty - s_o = \frac{\rho_o}{\sigma}(s_o - x_o)$$

verificando-se então que para

$$s_o \lesseqgtr x_o, \text{ vem}$$

$$s_\infty \lesseqgtr s_o$$

isto é, a frente de nuvem se desloca e para $s_o = x_o$, vem

$$s_\infty = s_o$$

a frente da nuvem não se desloca, apenas este último caso tem correspondente na situação em que $\sigma = 0$.

(b) $s_o < x_o$

Como estamos considerando $\rho < 0$ o gráfico dos campos para este caso é o mesmo da figura 8, Seção I.

Neste item será determinado o valor da descarga na placa $x = 0$ durante o tempo em que a frente da nuvem se desloca de s_o até esta placa.

Na equação (II-10) tomando-se $s = 0$, resulta

$$Q = (\sigma + \rho_o)s_o, \qquad \text{ou}$$

$$Q = q_o + \sigma\, s_o,$$

Portanto a carga que descarrega na placa $x = 0$ é superior à carga espacial inicial, este efeito sendo originário da condutividade.

Vamos interpretar qualitativamente este resultado.

A figura 13 representa a frente de nuvem deslocando-se para a placa $x = 0$. Íons positivos e negativos, oriundos da condutividade, são assinalados.

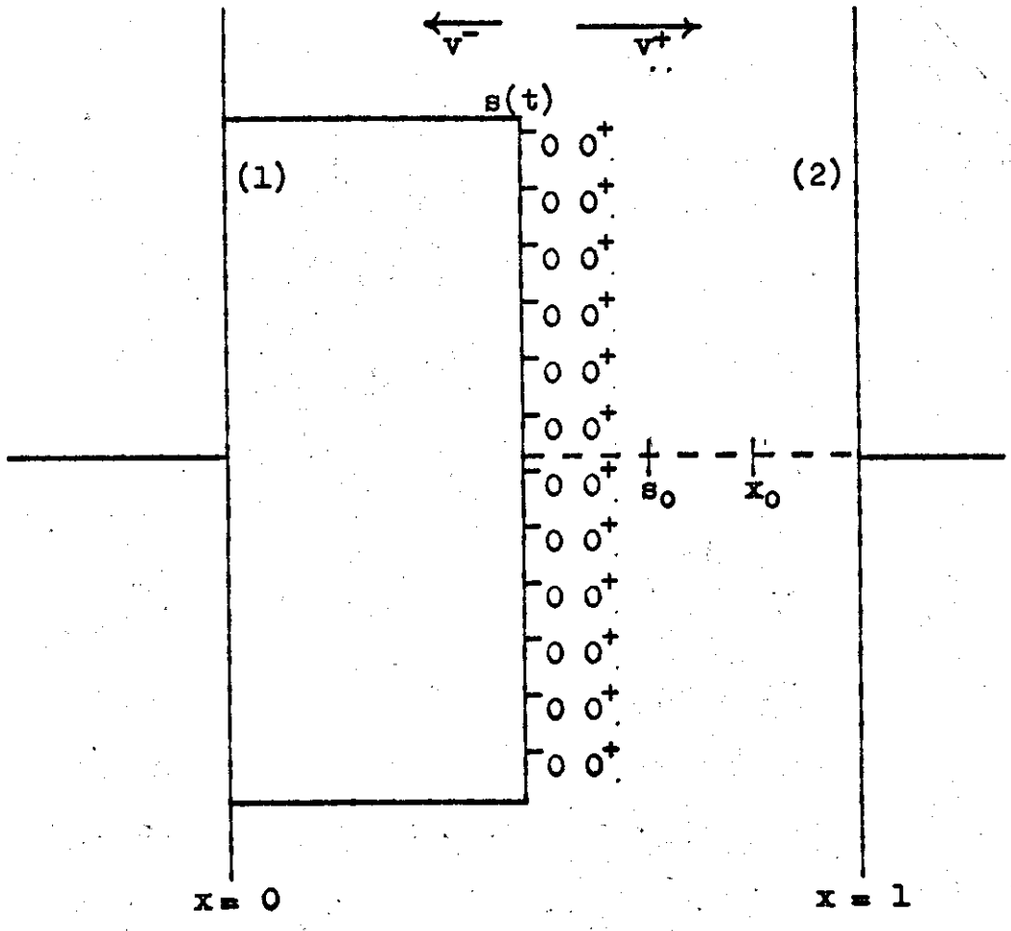

Figura 13

Depto. de Física e Ciência dos Materiais
BIBLIOTECA

Sejam μ, μ^+ e μ^-, respectivamente, as mobilidades de íons da carga espacial e de íons positivos e negativos oriundos da condutividade intrínseca.

Se v^+ e v^- representam as velocidades dos íons da condutividade em relação à frente de nuvem, deve-se ter

$$v^+ = (\mu^+ + \mu)\ E_1(s,t)$$

$$v^- = (\mu^- - \mu)\ E_1(s,t)$$

Sendo q^+ e q^- os íons da condutividade na região (1), tem-se então que

$$q^+ + q^- = 0,$$

já que estes surgem aos pares.

Admitindo-se de uma forma geral, a saída de cargas positivas e negativas da região (1), através da fronteira s(t), resultará que as quantidades destas cargas na região (1) após um certo tempo t são

$$q^+ - \Delta^+ \quad e \quad q^- + \Delta^-, \quad com \quad \Delta^+, \Delta^- > 0.$$

Sendo evidentemente $\Delta^+ > \Delta^-$ pois há uma evasão maior de cargas positivas em virtude destas se deslocarem em sentido oposto à frente de nuvem enquanto que as negativas o fazem no mesmo sentido.

É fácil verificar que para $\mu^- \geq \mu$ os íons negativos da condutividade não saem da região (1).

A carga total na região (1) em um certo t, é então

$$q_o + q^+ - \Delta^+ + q^- + \Delta^- = q_o - \Delta^+ + \Delta^-$$

mas, $$- \Delta^+ + \Delta^- = - \Delta$$

A carga livre nesta região é finalmente

$$q_o - \Delta = - (|q_o| + \Delta)$$

E portanto a descarga na placa $x = 0$ é maior que a carga espacial inicial q_o. Sendo t o tempo em que a frente da nuvem transportou-se para a placa $x = 0$, Δ corresponde ao $|\sigma| s_o$ deduzido.

Este estudo qualitativo também explica a expressão obtida para Q_∞ nos casos (I) e (III) do item (a).

No caso (III) não há qualquer evasão de íons da região (1) pois como $E_1(s,t) = E_1(x_o,t) = 0$, em virtude de $s(t) = s_o = x_o$, tem-se

$$v^+ = v^- = 0 \quad \text{e portanto}$$

$$\Delta^+ = \Delta^- = 0$$

e a carga livre atimgindo a placa em $t = \infty$, é

$$q_o + q^+ + q^- = q_o$$

(c) $s_o > x_o$

Neste caso a frente da nuvem desloca-se para a placa $x = 1$, o que se verifica facilmente de

$$\frac{ds}{dt} = \rho_o(s_o - x_o)e^{-\sigma t} > 0$$

A descarga se efetua então através das duas placas.

Na placa $x = 0$ a expressão da descarga é obtida fazendo-se, na equação (II-9), $t = \infty$, obtendo-se então

$$Q_1 = q_{10} = \rho_o \, x_o$$

Na placa $x = 1$ a descarga só tem início a partir do tempo t_1 em que $s = 1$.

A descarga até um tempo $t > t_1$, será dada por

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t} (\rho + \sigma) \, E_1(1,t) \, dt,$$

pois depois que a frente de nuvem atingiu a placa $x=1$ os campos em toda a região do dielétrico estarão na região (1) e portanto o campo na placa $x = 1$ será representado por $E_1(1,t)$ para qualquer $t > t_1$.

Em função do ponto de campo nulo, tem-se que

$$E_1(1,t) = \rho(1 - x_o)$$

$$\therefore$$

virá para Q_2

$$Q_2 = (1 - x_o)\left[\int_{t_1}^{t} \rho^2 dt + \sigma \int_{t_1}^{t} \rho dt\right]$$

da equação da continuidade extrai-se

$\rho^2 dt = - d\rho - \sigma\rho\, dt$, e daí

$$Q_2 = (1 - x_o)\left[\rho(t_1) - \rho(t)\right]$$

A descarga para esta placa se completa em $t = \infty$, sendo portanto

$$Q_2 = (1 - x_o)\ \rho(t_1)$$

Tomando-se na equação (II-12), $s = 1$, obtém-se $\rho(t_1)$, vindo então para Q_2:

$$Q_2 = \rho_o(s_o - x_o) - \sigma(1 - s_o)$$

Este é o valor da descarga na placa $x = 1$.

A descarga nas duas placas será

$$Q = Q_1 + Q_2 = \rho_o x_o + \rho_o(s_o - x_o) - \sigma(1 - s_o)$$

$$= q_o - \sigma(1 - s_o),$$

inferior à carga espacial inicial.

Este resultado pode ser interpretado qualitativamente à luz de evasão ou penetração de íons nas regiões (1) e (2) como foi feito no item (b).

- TEMPO DE DESCARGA -

Quando $(s - s_o)_{máx} \leq 1 - s_o$ ou s_o, a descarga se realiza em $t = \infty$. Nestes casos a frente de nuvem se detém antes, ou, sobre as placas. Mas quando isto ocorre

já não há mais carga espacial no dielétrico pois $\rho(\infty) = 0$ e a descarga se efetuou.

Quando $(s - s_o)_{máx} > 1 - s_o$ ou s_o, a frente da nuvem alcança as placas em um tempo finito.

Como para $(s - s_o)_{máx} > s_o$ a frente da nuvem atinge a placa $x = 0$ (caso $s_o > x_o$); neste caso a descarga se efetua quando isto ocorre e portanto esta descarga ocorre em tempo finito.

Para $(s - s_o)_{máx} > 1 - s_o$, a frente da nuvem espacial atinge a placa $x = 1$ em um tempo finito, mas com isto a descarga não se completou, pois há carga espacial entre as placas.

Se t_1 é o tempo que a frente da nuvem leva para alcançar a placa $x = 1$, para qualquer $t > t_1$, a carga espacial no dielétrico é obtida de

$$q = \rho(t) \cdot 1 = \rho(t), \qquad t > t_1$$

Como $q(t) = 0$ quando $\rho(t) = 0$ e isto só se verifica para $t = \infty$ conclui-se que a descarga se completa, neste caso, em $t = \infty$.

Portanto só em um caso a descarga se realiza em um tempo finito: quando a frente da nuvem se dirige para a placa $x = 0 (s_o < x_o)$ e com a condição de que $(s - s_o)_{máx} > s_o$. Evidentemente $t = \infty$ para $\sigma \neq 0$ é de ordem menor que $t = \infty$ para $\sigma = 0$ pois no caso em que $\sigma \neq 0$ a densidade decai mais

rapidamente que quando $\sigma = 0$.

- Potencial -

A diferença de potencial entre as placas obtém-se de

$$V(t) = \int_0^s E_1(x,t)\,dx + \int_s^1 E_2(t)\,dx$$

Substituindo-se as expressões dos campos, equações (II-4) e (II-3), obtém-se

$$V(t) = \frac{\rho s^2}{2} - \rho s\, s_o + E_{20}\left[\frac{\rho s}{\rho_o} + e^{-\sigma t}(1-s)\right]$$

O potencial é um observável, podendo ser obtido experimentalmente.

Para $s_o = x_o$, $E_{20} = 0$ e $s(t) = s_o$ $\therefore$ $V(s_o = x_o) = -\frac{\rho_o s_o^2}{2}$, independe do tempo.

Verifica-se facilmente que:

$$V(0) = 1 \quad \text{e} \quad V(\infty) = 0$$

Já se viu que

$$V(s_o = x_o) = -\frac{\rho_o s_o^2}{2}$$

Mas $E_{20} = 1 = \frac{\rho_o s_o^2}{2} = 0$, donde $-\frac{\rho_o s_o^2}{2} = 1$ $\therefore$ $V(s_o = x_o) = 1$

- RESUMO DOS RESULTADOS -

(1) A distribuição em caixa ainda é solução para qualquer tempo.

(2) A densidade de carga decai mais rapidamente quando há condutividade.

(3) A frente da nuvem espacial evolue com uma velocidade que decai exponencialmente com o tempo.

(4) O decaimento da carga espacial no dielétrico se efetua por duas vias: (a) descarga nas placas, (b) neutralização da carga espacial por cargas de sinal oposto oriundas da condutividade.

(5) O decaimento da densidade se verifica por três vias: (a) descarga nas placas, (b) neutralização de transportadores por íons de sinal oposto provenientes da condutividade, (c) variação do volume da carga espacial à proporção que a frente da nuvem se desloca.

(6) O campo na região sem carga espacial decai exponencialmente com o tempo.

(7) O campo na região com carga espacial guarda a mesma relação de dependência com ρ e x que o campo correspondente, no caso em que $\sigma = 0$, mas decai mais rapidamente que este devido a ρ.

(8) O ponto de campo nulo é constante no tempo.

(9) O teorema de Lindmayer também se verifica para circuito aberto pois, de $x_o = Cte$, vem, necessariamente,

$$J = - a\rho(x_o,t) \frac{dx_o}{dt} = 0.$$

(10) O ponto de campo nulo só existe quando encontrado na região da carga espacial.

(11) Generaliza-se o conceito de ponto de campo nulo considerando-se "ponto de campo nulo" aquele encontrado fora da região da carga espacial, sendo que este, na realidade, indica apenas a não existência de ponto de campo nulo na distribuição. A sua utilização nas expressões onde ocorre é correta.

(12) A carga que se transfere para as placas, proveniente só da carga espacial, é sempre inferior à que se transfere, no mesmo tempo e em idênticas condições iniciais, quando $\sigma = 0$.

(13) A descarga se realiza pela placa $x = 0$ quando $s_o = x_o$ e $s_o < x_o$ e pelas duas placas quando $s_o > x_o$.

(14) Quando a descarga se realiza pelas duas placas esta tem início na placa $x = 0$, a partir de $t = 0$ e, na placa $x = 1$, a partir do chamado tempo de trânsito, que é o tempo que a frente da nuvem leva para atingir esta placa.

(15) A frente da nuvem pode se deter antes de alcançar as placas, o que não ocorre quando $\sigma = 0$, em que a frente da nuvem sempre atinge as placas.

(16) Quando a frente da nuvem se detém antes de alcançar a placa $x = 1$ não há descarga de carga espacial por esta placa, verificando-se descarga só das cargas oriundas da condutividade.

(17) A descarga total nas placas pode ser maior, igual ou menor que a carga espacial inicial, q_o, conforme $s_o < x_o$, $s_o = x_o$ e $s_o > x_o$, respectivamente: $q_o + \sigma s_o$, q_o e $q_o - \sigma(1 - s_o)$.

(18) A descarga se verifica em tempo finito apenas quando $s_o < x_o$, na condição de que $|(s - s_o)_{máx}| = \frac{E_{2\Omega}}{\sigma} > s_o$ Em todas as outras situações a descarga se efetua em $t = \infty$.

- SECÇÃO III -

SIMETRIA DO CONDENSADOR PLANO, EM CIRCUITO ABERTO COM $\sigma \neq 0$.

Prova de que a distribuição em caixa (box charge distribution) é solução exata.

Faz-se esta prova por meio da comparação entre as expressões de $\frac{dq}{dt}$ obtidas através de dois processos distintos: uma das expressões proveniente da equação da continuidade e a outra oriunda do modelo da caixa.

1º Processo: $\frac{dq}{dt}$ retirada da equação da continuidade.

Integrando a equação da continuidade: $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0$, vem

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho\, dx = \int_1^0 \frac{\partial i}{\partial x}\, dx = \int_1^0 di = i(0,t) - i(1,t).$$

Como $\int_0^1 \rho\, dx = q =$ carga espacial entre as placas, resulta:

$$\frac{dq}{dt} = i(0,t) - i(1,t).$$

Sendo

$i(x,t) = \rho E(x,t) + \sigma E(x,t)$, tem-se para $x=0$ e $x=1$,

$$i(0,t) = \rho(0,t)\, E(0,t) + \sigma E(0,t)$$

$$i(1,t) = \rho(1,t)\, E(1,t) + \sigma E(1,t)\ ,$$

porém $\rho(1,t) = 0$, e, consequentemente

$$i(1,t) = \sigma E(1,t),$$

obtendo-se então para $\frac{dq}{dt}$,

$$\frac{dq}{dt} = \left[\rho(0,t) + \sigma\right] E(0,t) - \sigma E(1,t)$$

Mas, estando o ponto $x = 0$ na região (1), deve-se ter

$$E(0,t) = E_1(0,t),$$

e, estando o ponto $x=1$ na fronteira entre as regiões (1) e (2), ocorre que deve ser

$$E(1,t) = E_2(t),$$

e como $\rho(0,t) = \rho(t) = \rho$

resulta então para a expressão de $\frac{dq}{dt}$ calculada a partir da equação da continuidade:

$$\frac{dq}{dt} = \left[\rho + \sigma\right] E_1(0,t) - \sigma E_2(t), \qquad \text{(I)}$$

<u>2º Processo</u>: Determinação de $\frac{dq}{dt}$ por meio do modelo da caixa.

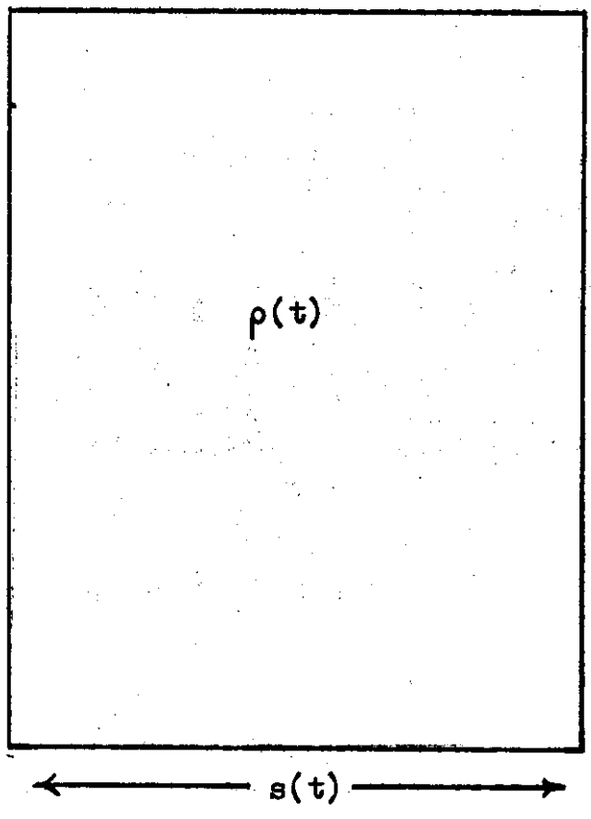

Figura 14

A carga pelo modelo de caixa é obtida de

$$q(t) = \rho(t).s(t),$$

pois, como já foi estabelecido, por este modelo, a carga espacial é considerada de concentração constante até uma posição s(t) e zero além.

Derivando q(t), vem,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\rho}{dt} s + \rho \frac{ds}{dt}$$

Da equação da continuidade, eq. (II-1), tem-se

$$\frac{d\rho}{dt} = -(\rho + \sigma)\rho , \qquad (a)$$

por outro lado

$$\frac{ds}{dt} = E_2(t) \qquad (b)$$

substituindo-se (a) e (b) na expressão de $\frac{dq}{dt}$, vem,

$$\frac{dq}{dt} = \rho E_2(t) - (\rho + \sigma)q, \qquad (II)$$

Esta é a expressão de $\frac{dq}{dt}$ obtida através do modelo da caixa.

Para demonstrar que (II) e (I) se equivalem, basta substituir em (II) a expressão de $E_2(t)$ em função de $E_1(0,t)$.

Sabe-se que $E_1(x,t) = \rho x + C(t)$

donde, para $x=0$, vem

$$E_1(0,t) = C(t), \text{ e de}$$

$$E_2(t) = \rho(t)\ s(t) + C(t)$$

por substituição de $C(t)$, resulta:

$$E_2(t) = \rho s + E_1(0,t).$$

As expressões de $E_1(x,t)$ e $E_2(t)$ utilizadas acima ocorrem no parágrafo "Calculo dos campos", da Secção II.

Substituindo-se a expressão de $E_2(t)$ em (II), obtém-se:

Da expressão de $E_2(t)$, tira-se,

$$q = E_2(t) - E_1(0,t).$$

substituída esta expressão de q em (II), vem

$$\frac{dq}{dt} = \rho E_2 - (\rho + \sigma)\,(E_2 - E_1(0,t)),$$

resultando finalmente

$$\frac{dq}{dt} = (\rho + \sigma)\,E_1(0,t) - \sigma\,E_2(t), \qquad \text{(II)}$$

Mas esta é igual à expressão obtida a partir da equação da continuidade. Portanto a expressão de $\frac{dq}{dt}$ obtida através do modelo de caixa é correta e assim se conclui que este modelo é exato.

- SECÇÃO IV -

- SIMETRIA DO CONDENSADOR PLANO COM $V_o \neq 0$, $\sigma \neq 0$ -

- CARGA ESPACIAL FLUTUANTE -

É conveniente obter soluções em termos de distância, tempo, campo, densidade de carga e de corrente, condutividade, sem dimensões x, t, E, ρ, J e σ, respectivamente, definidas como se segue:

$$E = \frac{d'}{V'_o} E', \quad x = \frac{x'}{d}, \quad \rho = \frac{d'^2}{\varepsilon V'_o} \rho',$$

$$J = \frac{d^3}{\mu \varepsilon V'_o} J', \quad t = \frac{\mu V'_o}{d^2} t' \quad e \quad \sigma = \frac{d'^2}{\mu \varepsilon V'_o} \sigma'$$

onde V_o representa o valor inicial da voltagem.

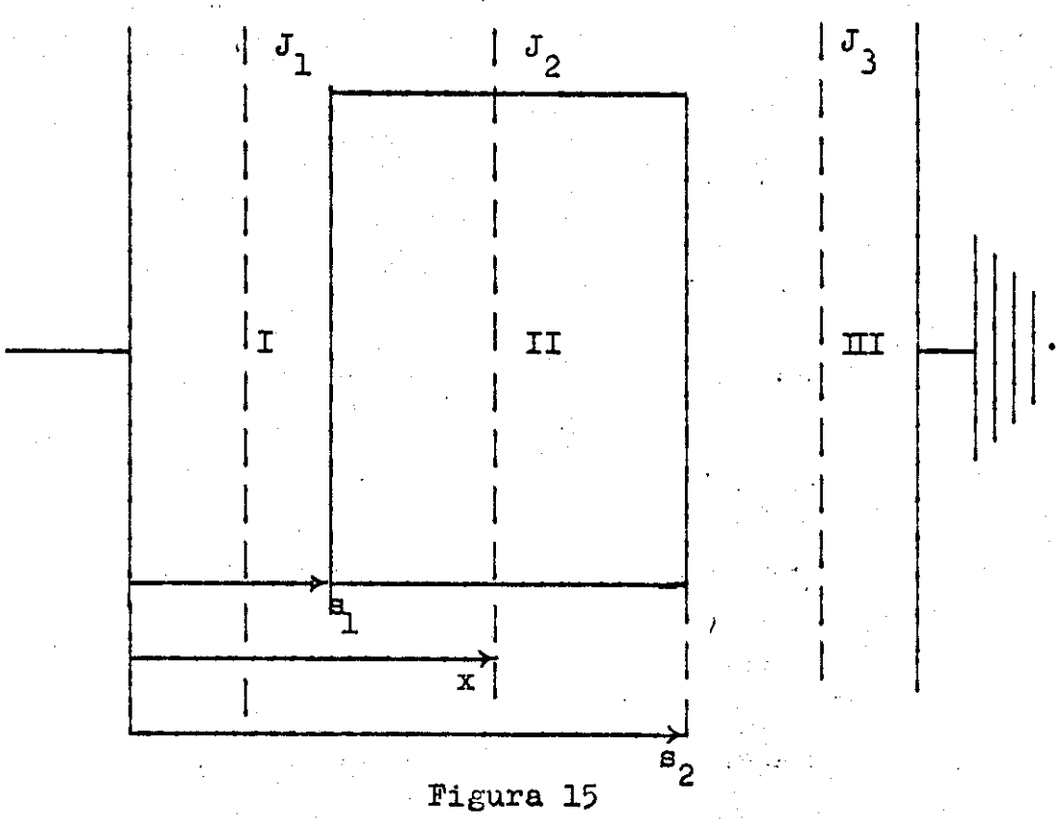

Figura 15

Tendo em conta a figura 15 e sendo o circuito aberto,

ter-se-á: $J_i = \rho_i + \sigma E_i + \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0, \qquad i = 1,2,3,$

onde o índice indica a região considerada.

$$\rho_i(t) = 0, \qquad i = 1,3,$$

donde

$$J_i = \sigma E_i + \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0, \qquad i = 1,3,$$

e

$$J_i = \sigma E_i + \rho_i E_i + \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0 \quad i = 2,$$

Pela equação de Poisson:

$$\frac{dE_2}{dx} = \rho_2, \quad \frac{dE_i}{dx} = 0 \qquad i = 1,3$$

Integrando resulta

$$E_2 = \rho_2 x + C(t), \quad e$$

$$E_i = Cte \text{ no espaço}, \qquad i = 1,3$$

De

$$\sigma E_i + \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0, \text{ segue-se}$$

$$\frac{dE_i}{E_i} = - \sigma dt,$$

de integração imediata dando para E_i:

$$E_i = E_{io}\, e^{-\sigma t}, \qquad i = 1,3$$

Vê-se que os campos na região sem carga, decaem exponencialmente com o tempo e sem condutividade, manter-se-iam constantes.

Em unidades reduzidas $V_o = 1$, e portanto empregando-se a condição de contorno $\int_0^1 E_i dx = V$ em $t = 0$, obtém-se,

$$\int_0^{s_{10}} E_{10} dx + \int_{s_{10}}^{s_{20}} E_{20} dx + \int_{s_{20}}^{1} E_{30} dx = 1$$

Com a substituição das expressões dos campos, vem

$$\int_0^{s_{10}} (\rho_o s_{10} + C(0))\, dx + \int_{s_{10}}^{s_{20}} (\rho x + C(0))\, dx +$$

$$+ \int_{s_{20}}^{1} (\rho_o s_{20} + C(0))\, dx = 1$$

Efetuados os cálculos chega-se a

$$C(0) = 1 + \frac{\rho_o}{2} \left[s_{20}^2 - s_{10}^2 - 2 s_{20} \right]$$

Sendo

$$E_{10} = \rho_o s_{10} + C(0)$$

obtendo-se com a substituição de $C(0)$,

$$E_{10} = \frac{2\rho_o\, s_{10}}{2} + 1 + \frac{\rho_o}{2} (s_{20}^2 - s_{10}^2 - 2 s_{20})$$

ou

$$E_{10} = 1 + \frac{\rho_o}{2} (s_{20} - s_{10})(s_{20} + S_{10} - 2), \qquad \text{(IV-1)}$$

Para E_{30}, tem-se, semelhantemente,

$$E_{30} = \rho_o s_{20} + C(0),$$

e

$$E_{30} = 1 + \frac{\rho_o}{2}\,(s_{20}^2 - s_{10}^2), \qquad \text{(IV-2)}$$

Cálculo de $E_2(x,t)$

$$E_2 = \rho_2 x + C(t)$$

A determinação de E_2 exige o conhecimento de $C(t)$.

Na região 2 tem-se:

$$\rho_2\, E_2 + \sigma E_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0,$$

e pela substituição da expressão de E_2,

$$\rho_2(\rho_2 x + C) + \sigma(\rho_2 x + C) + \frac{d}{d}\,(\rho_2 x + C) = 0.$$

Efetuando os produtos indicados e arrumando os termos de forma conveniente, resulta:

$$x(\rho_2^2 + \frac{d\rho_2}{dt} + \sigma\rho_2) + (\rho_2 + \sigma)\, C + \frac{dC}{dt} = 0, \quad \text{mas}$$

$\rho_2^2 + \frac{d\rho_2}{dt} + \sigma\,\rho_2 = 0$ por ser a equação da continuidade,

donde $$(\rho_2 + \sigma)C + \frac{dC}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{dC}{C} = -\,(\rho_2 + \sigma)\, dt.$$

Da equação da continuidade tira-se

$$(\rho_2 + \sigma)\, dt = -\,\frac{d\rho_2}{\rho_2},$$

resultando portanto para a equação em C:

$$\frac{dC}{C} = \frac{d\rho_2}{\rho_2}$$

cuja integração leva a

$$C = \frac{\rho_2}{\rho_{20}} C(0), \qquad e$$

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + \frac{\rho_o}{2}\left\{(s_{20}^2 - s_{10}^2) - 2\, s_{20}\right\}\right]$$

Para E_2 vem então:

$$E_2(x,t) = \rho x + \frac{\rho}{\rho_o}\left[1 + \frac{\rho_o}{2}\left\{(s_{20}^2 - s_{10}^2) - 2\, s_{20}\right\}\right] \quad ,(IV-3)$$

$\rho_2 = \rho$, $\rho_{20} = \rho_o$ já que a única região com carga espacial é a região 2.

- PONTO DE CAMPO NULO -

Igualando a zero a equação (IV-3) obtém-se prontamente para a expressão do ponto de campo nulo:

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[1 + \frac{\rho_o}{2}\left\{(s_{20}^2 - s_{10}^2) - 2\, s_{20}\right\}\right]$$

ou

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[1 + \frac{\rho_o}{2}(s_{20}^2 - s_{10}^2) - \rho_o\, s_{20}\right], \qquad (IV-4)$$

Constata-se então que o ponto de campo nulo é constante no tempo.

Vamos colocar esta expressão sob uma outra forma.

Das expressões de E_{10} e E_{30}, equações (IV-1) e (IV-2), verifica-se facilmente que:

$$E_{30} - E_{10} = \rho_o(s_{20} - s_{10}), \qquad \text{(IV-5)}$$

de onde se tira também

$$E_{30} - \rho_o\, s_{20} = E_{10} - \rho_o\, s_{10} \qquad \text{(IV-6)}$$

Por outro lado da observação de x_o, equação (IV-4) e de E_{30}, verifica-se facilmente que

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[E_{30} - \rho_o\, s_{20}\right], \qquad \text{(IV-7)}$$

e da relação (IV-6), conclui-se que se pode escrever a expressão de x_o da seguinte forma:

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[E_{10} - \rho_o\, s_{10}\right] \qquad \text{(IV-8)}$$

- GRÁFICO DOS CAMPOS -

Suponhamos inicialmente $\rho_o > 0$.

Tomando a expressão de E_{10}, equação (IV-1),

$$E_{10} = 1 + \frac{\rho_o}{2}(s_{20} - s_{10})(s_{20} + s_{10} - 2),$$

se $\rho_o > 0$, e sendo $s_{20} > s_{10}$, tem-se $\rho_o(s_{20} - s_{10}) > 0$.

Como as grandezas reduzidas $s_o = \frac{s'_o}{d}$ são menores que 1, tem-se que sendo $s_{10} < 1$ e $s_{20} < 1$, que $s_{20} + s_{10} < 2$

$\therefore\ s_{20} + s_{10} - 2 < 0$, e portanto que

$\frac{\rho_o}{2}(s_{20} - s_{10})(s_{20} + s_{10} - 2) < 0$, e,

$$E_{10} = 1 - \frac{\rho_o}{2}(s_{20} - s_{10})(2 - s_{10} - s_{20})$$

$E_{10} > 0$, se

$$1 > \frac{\rho_o}{2}(s_{20} - s_{10})(2 - s_{10} - s_{20}).$$

Vamos considerar só este caso pois os outros comportam análise semelhante.

Consideremos agora E_{30}, equação (IV-2),

$$E_{30} = 1 + \frac{\rho_o}{2}(s_{20}^2 - s_{10}^2).$$

Para $\rho_o > 0$, $E_{30} > 0$ sempre.

Por outro lado da equação (IV-5) verifica-se que, para $\rho_o > 0$, $E_{30} > E_{10}$.

Da equação (IV-8),

$$x_o = -\frac{1}{\rho_o}(E_{10} - \rho_o s_{10}) \text{ tira-se } x_o = s_{10} - \frac{E_{10}}{\rho_o}$$

De $E_{10} > 0$, $\rho_o > 0$ vem que $x_o < s_{10}$, o que significa que o ponto de campo nulo está à esquerda da carga flutuante.

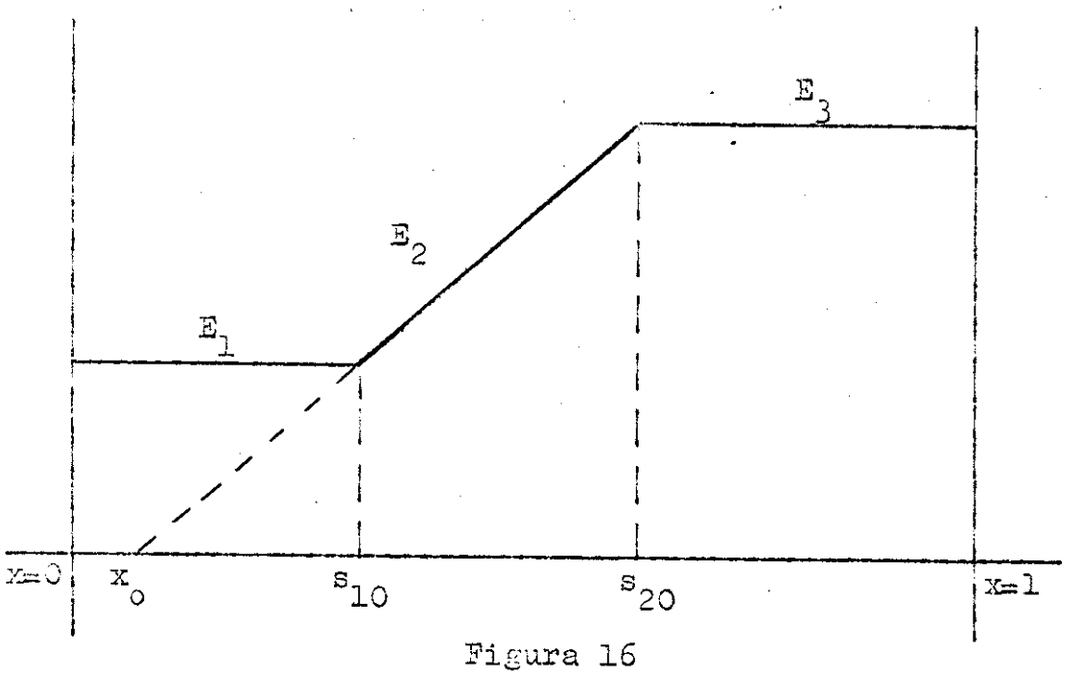

Figura 16

A figura 16 representa graficamente os campos nas condições $E_{10} > 0$ e $\rho_o > 0$.

Vamos supor agora $\rho_o < 0$.

Da equação (IV-5),

$$E_{30} - E_{10} = \rho_o(s_{20} - s_{10})$$

verifica-se que, desde que $s_{20} > s_{10}$, $E_{30} < E_{10}$

Da expressão de E_{10}, $E_{10} = 1 - \frac{\rho_o}{2}(s_{20} - s_{10})(2 - s_{10} - s_{20})$

sendo $\rho_o < 0$, $\rho_o = -|\rho_o|$, vem

$$E_{10} = 1 + \frac{|\rho_o|}{2}(s_{20} - s_{10})(2 - s_{10} - s_{20}), \text{ isto é,}$$

$$E_{10} > 0 \quad \text{sempre.}$$

Da expressão de E_{30},

$$E_{30} = 1 + \frac{\rho_o}{2}(s_{20}^2 - s_{10}^2)$$

para $\rho_o < 0$, vem

$$E_{30} = 1 - \frac{|\rho_o|}{2}(s_{20}^2 - s_{10}^2)$$

De onde se verifica que $E_{30} > 0$ se $1 > \frac{|\rho_o|}{2}(s_{20}^2 - s_{10}^2)$.

Vamos considerar apenas este caso, pois $E_3 < 0$ corresponde a uma carga espacial deslocando-se para as duas placas e aqui estamos analisando apenas o caso em que a nuvem se dirige, como um todo, apenas para uma das placas.

Da equação (IV-7), $x_o = -\frac{1}{\rho_o}\left[E_{30} - \rho_o\, s_{20}\right]$

vem,

$$x_o = s_{20} - \frac{E_{30}}{\rho_o}$$

Como estamos considerando a situação em que $E_{30} > 0$ e $\rho_o < 0$, tem-se que x_o, neste caso é

$$x_o = s_{20} + \frac{E_{30}}{|\rho_o|} > s_{20}$$

O ponto de campo nulo encontra-se à direita da carga flutuante.

De acordo com as condições $E_{30} > 0$ e $\rho_o < 0$ o gráfico dos campos está representado na figura 17.

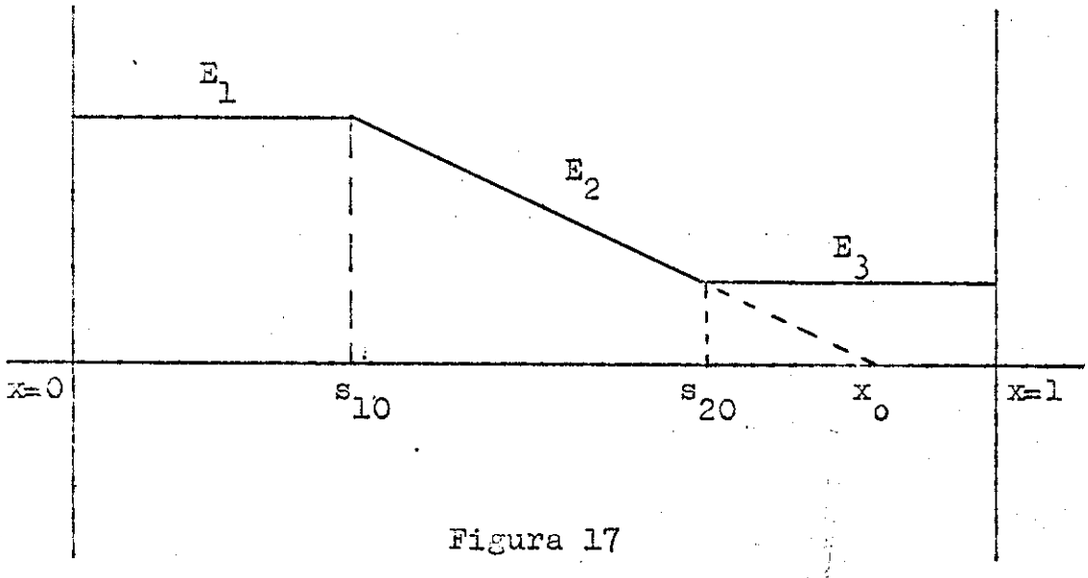

Figura 17

Neste caso a carga espacial se desloca para a esquerda, isto é, no sentido de x=1 para x=0, pois é negativa.

DEPENDENCIA DA DIMENSÃO s, DA CARGA ESPACIAL FLUTUANTE COM O TEMPO

As velocidades das superfícies anterior e posterior de nuvem espacial são obtidas de

$\frac{ds_2}{dt} = E_3(s_2,t)$ e $\frac{ds_1}{dt} = E_1(s_1,t)$ onde pela substituição

das expressões de E_3 e E_1, vem

$$\frac{ds_2}{dt} = E_{30}e^{-\sigma t} \quad , \quad \frac{ds_1}{dt} = E_{10}e^{-\sigma t}$$

a integração das duas expressões nos leva a:

$$s_2 = s_{20} + \frac{E_{30}}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t}) \ , \quad \text{e,} \qquad \text{(IV-9)}$$

$$s_1 = s_{10} + \frac{E_{10}}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t}) \ , \qquad \text{(IV-10)}$$

Que são as equações de movimento das faces da nuvem espacial.

Seja $$s = s_2 - s_1$$

a dimensão da caixa ao longo da linha perpendicular às placas do condensador.

De acordo com as equações (IV-9) e (IV-10) tem-se para s:

$$s = s_o + (E_{30} - E_{10})\frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} \ , \qquad \text{(IV-11)}$$

sendo

$$s_o = s_{20} - s_{10}$$

Da equação (IV-5),

$$E_{30} - E_{10} = \rho_o(s_{20} - s_{10})$$

obtém-se para s,

$$s = s_o + \rho_o(s_{20} - s_{10})\frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} \qquad \text{(IV-12)}$$

Como $$s_{20} - s_{10} = s_o \quad \therefore$$

$$s = s_o(1 + \rho_o \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma})$$

ou,

$$s = s_o + q_o \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma}, \qquad \text{(IV-13)}$$

Para $q_o > 0$, $s > s_o$ a camada espacial se alarga com o tempo.

Para $q_o < 0$ a camada espacial também se alarga com o tempo pois como se verifica da figura 17 a carga espacial se desloca para a esquerda e aqui portanto deve-se ter

$$s = s_1 - s_2 \quad \text{e} \quad s_o = s_{10} - s_{20},$$

donde se conclui que os três termos da equação acima são negativos quando $q_o < 0$ e portanto a equação é a mesma do caso em que $q_o > 0$ bastando então multiplicá-la por -1. Já que uma mesma equação corresponde aos casos $\rho_o \gtrless 0$, equação em s, os resultados são os mesmos para ambos os casos e a carga espacial se alarga para $q_o \gtrless 0$.

$$s - s_o = q_o \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma}$$

Como,

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} = t$$

vem que,

$$(s - s_o)_{\sigma \to 0} = q_o t,$$

Isto é, quando $\sigma = 0$ a carga espacial se alarga uniformemente com o tempo, o que seria de se esperar pois as faces da nuvem, neste caso, se deslocam com movimento uniforme.

EXPRESSÃO DA CARGA ESPACIAL ENQUANTO SE DESLOCA ENTRE AS PLACAS

A expressão da carga espacial em um tempo qualquer t menor que o tempo t_1 que a sua frente leva para alcançar a placa $x = 1$, é:

$$q(t) = \rho(t)\ s(t)$$

Das expressões de $\rho(t)$, equação (II-2) e $s(t)$, equação (IV-13), vem para $q(t)$,

donde se obtém:

$$q(t) = q_o e^{-\sigma t}$$

E portanto, quando entre as placas, a carga espacial flutuante decai exponencialmente com o tempo.

As cargas de nome contrário à carga espacial, imobilizadas pela condutividade intrínseca, deslocam-se em sentido contrário ao da carga espacial e contribuem para a sua neutralização e daí a queda que a condutividade produz no valor da carga espacial.

Para tempos maiores que t_1 (já definido no início deste parágrafo), a expressão de $q(t)$ é dada por,

$$q(t) = \rho(t)(1 - s_1(t), \qquad t > t_1$$

pois $\qquad s_2(t) = 1 = Cte$

Quando $s_1(t_2) = 1 \qquad \therefore \qquad q(t_2) = 0.$

DETERMINAÇÃO DA CARGA QUE SE TRANSFERE PARA A PLACA x=1 (DESCARGA NAS PLACAS)

Das equações (IV-9) e (IV-10) obtém-se para os tempos t_1 e t_2 que as faces anterior e posterior da nuvem le

vam para alcançar a placa $x = 1$

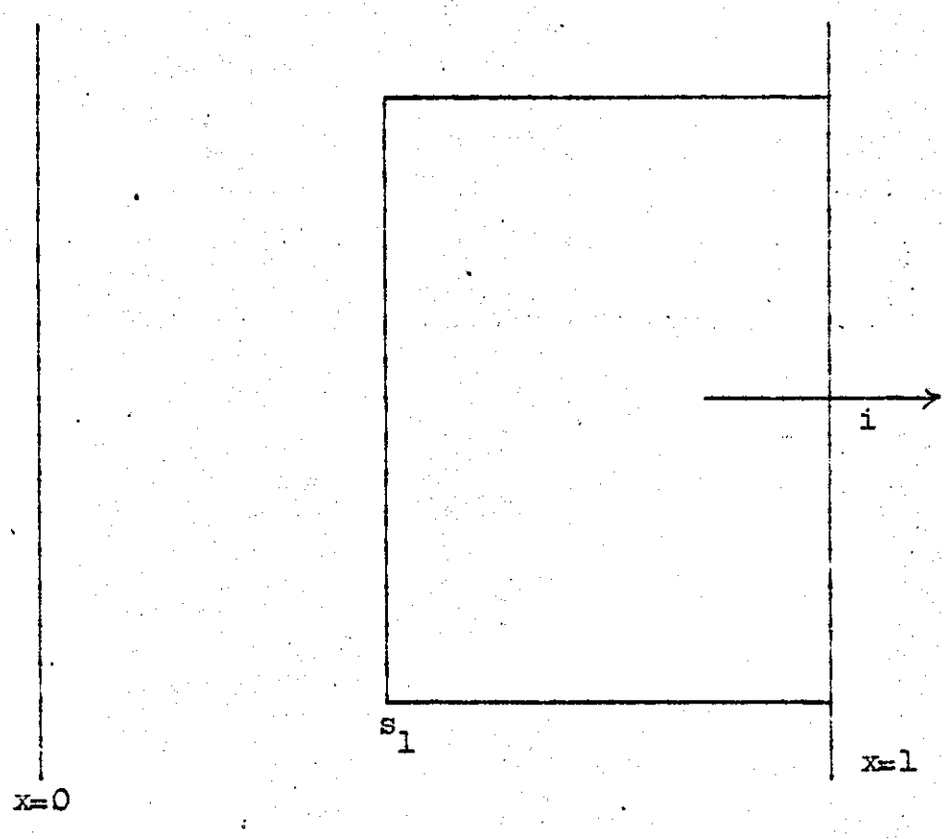

Figura 18

$$t_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{E_{30}}{E_{30} - \sigma(1 - s_{20})} \text{ , e}$$

$$t_2 = \frac{1}{\sigma} \frac{E_{10}}{E_{10} - \sigma(1 - s_{10})}$$

Sendo $E_2(x,t)$ o campo na região da carga espacial, tem-se para a corrente que escoa pela placa $x=1$, já que a partir de $t = t_1$ o campo na placa $x = 1$ é dado por $E_2(x,t)$,

$$i = (\rho + \sigma)\, E_2(1,t)$$

De acordo com a equação (IV-3), tem-se para $E_2(1,t)$

$$E_2(1,t) = \left[1 + \frac{1}{\rho_o} \left[1 + \frac{\rho_o}{2} (s_{20}^2 - s_{10}^2 - 2 s_{20}) \right] \right] \rho$$

Representando o 1º fator da expressão acima por "a", com o fim de reduzí-la, vem

$$E_2(1,t) = a\rho$$

Tem-se então para i:

$$i = a(\rho^2 + \sigma \rho)$$

A carga que escoa pela placa x= 1, a partir de $t = t_1$ obtém-se então de

$$Q = a \left[\int \rho^2 dt + \sigma \int \rho dt \right]_{t_1}^{t}$$

Da equação de continuidade, equação (II-1), tira-se

$$\rho^2 dt = - d\rho - \sigma \rho dt$$

que substituída na expressão acima dará para Q:

$$Q = a \left(- \int d\rho\right)_{t_1}^{t} \quad , \quad \text{ou}$$

$$Q = a \left(\rho(t_1) - \rho(t)\right)$$

Sendo t_2 o tempo que a face posterior da nuvem leva para atingir a placa x=1

$Q = a(\rho(t_1) - \rho(t_2))$, representa o escoamento de toda a carga contida no volume da carga espacial.

Sendo, para este caso,

$$\rho(t) = \frac{\sigma \rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma + \rho_o (1 - e^{-\sigma t})}$$, e substituindo-se $e^{-\sigma t_1}$ e

$(1 - e^{-\sigma t_1})$ por suas expressões retiradas da equação (IV-9) quando nesta se faz $s_2 = 1$, vem

$$\rho(t_1) = \frac{\sigma \rho_o \dfrac{E_{30} - \sigma(1 - s_{20})}{E_{30}}}{\sigma + \rho_o \dfrac{\sigma(1 - s_{20})}{E_{30}}}$$

que após algumas simplificações dá:

$$\rho(t_1) = \frac{\rho_o \left[E_{30} - \sigma(1 - s_{20})\right]}{E_{30} + \rho_o (1 - s_{20})}$$

analogamente tem-se para $\rho(t_2)$:

$$\rho(t_2) = \frac{\rho_o \left[E_{10} - \sigma(1 - s_{10})\right]}{E_{10} + \rho_o (1 - s_{10})}$$

Para a, tem-se

$$a = 1 + \frac{1}{\rho_o} \left[1 + \frac{\rho_o}{2} (s_{20}^2 - s_{10}^2 - 2\, s_{20})\right] = 1 + \frac{1}{\rho_o} \left[E_{30} - \rho_o s_{20}\right] =$$

$$= \frac{E_{30} + \rho_o (1 - s_{20})}{\rho_o}$$

Desenvolvendo $\rho(t_1) - \rho(t_2)$, vem,

$$\rho(t_1)-\rho(t_2)=\frac{\rho_o\left[E_{30}-\sigma(1-s_{20})\right]}{E_{30}+\rho_o(1-s_{20})}-\frac{\rho_o\left[E_{10}-\sigma(1-s_{10})\right]}{E_{10}+\rho_o(1-s_{10})}=$$

$$=\frac{\rho_o\left[E_{10}+\rho_o(1-s_{10})\right]\left[E_{30}-\sigma(1-s_{20})\right]-\left[E_{30}+\rho_o(1-s_{20})\right]\left[E_{10}-\sigma(1-s_{10})\right]}{\left[E_{30}+\rho_o(1-s_{20})\right]\left[E_{10}+\rho_o(1-s_{10})\right]}$$

Efetuando-se as operações indicadas e realizando-se algumas reduções chega-se a:

$$\rho(t_1)-\rho(t_2)=$$

$$=\frac{\rho_o-\sigma E_{10}(1-s_{20})+\rho_o E_{30}(1-s_{10})+\sigma E_{30}(1-s_{10})-\rho_o E_{10}(1-s_{20})}{\left[E_{30}+\rho_o(1-s_{20})\right]\cdot\left[E_{10}+\rho_o(1-s_{10})\right]}$$

Portanto vem para Q:

$$Q=a(\rho(t_1)-\rho(t_2))=$$

$$\frac{\left[E_{30}+\rho_o\ (1-s_{20})\right]}{\rho_o}\ .$$

$$.\ \frac{\rho_o-\sigma E_{10}(1-s_{20})+\rho_o E_{30}(1-s_{10})+\sigma E_{30}(1-s_{10})-\rho_o E_{10}(1-s_{20})}{\left[E_{30}+\rho_o(1-s_{20})\right]\left[E_{10}+\rho_o(1-s_{10})\right]},$$

resultando

$$Q=\frac{\rho_o E_{30}(1-s_{10})-\rho_o E_{10}(1-s_{20})+\sigma E_{30}(1-s_{10})-\sigma E_{10}(1-s_{20})}{E_{10}+\rho_o(1-s_{10})}$$

Tomando-se os dois primeiros termos do numerador

$$\rho_o E_{30}(1 - s_{10}) - \rho_o E_{10}(1 - s_{20})$$

e utilizando-se a relação

$E_{30} - E_{10} = q_o$, equação (IV-5) e a substituição $E_{30} = E_{10} + q_o$, chega-se facilmente a

$$\rho_o E_{30}(1 - s_{10}) - \rho_o E_{10}(1 - s_{20}) = q_o \left[E_{10} + \rho_o(1 - s_{10})\right]$$

Analogamente prova-se que os dois últimos termos do numerador se transformam em

$$\sigma E_{30}(1-s_{10}) - \sigma E_{10}(1 - s_{20}) = \sigma(s_{20}-s_{10})\left[E_{10} + \rho_o(1-s_{10})\right]$$

efetuando nestes as mesmas substituições indicadas para os dois primeiros termos do numerador.

Obtém-se então para Q,

$$Q = \frac{q_o\left[E_{10}+\rho_o(1-s_{10})\right] + \sigma(s_{20}-s_{10})\left[E_{10}+\rho_o(1-s_{10})\right]}{\left[E_{10} + \rho_o(1 - s_{10})\right]}$$ e finalmente

$$Q = q_o + \sigma(s_{20} - s_{10}),$$

é a expressão da descarga na placa x=1.

Caso em que $E_{30} < 0$

Agora será considerada a situação em que $E_3 < 0$. Como para este caso já foi estabelecido que $E_1 > 0$, sempre, o

gráfico dos campos tem os contornos indicados na figura 19.

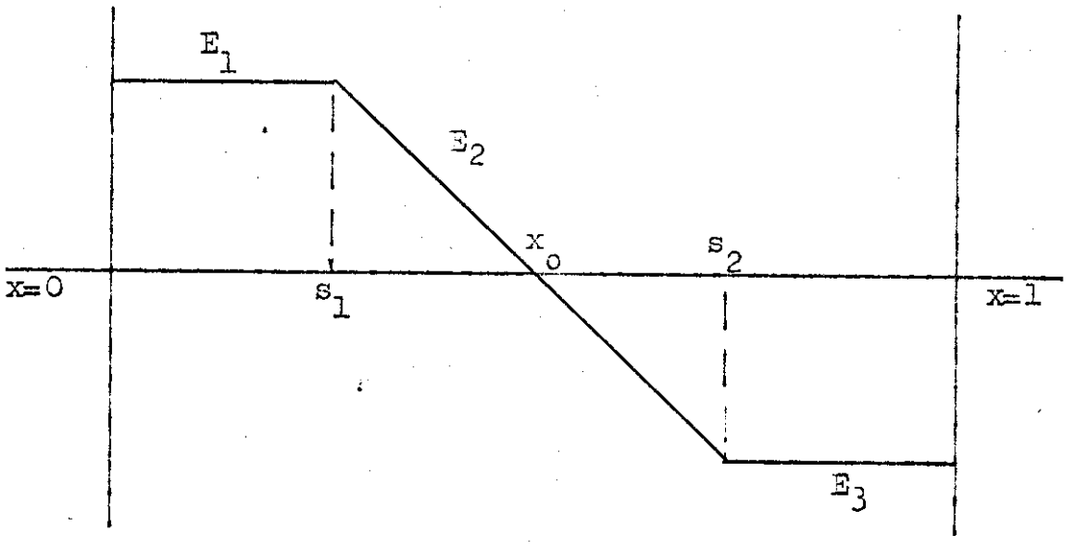

Figura 19

Dado que $\rho < 0$, as forças nos transportadores são opostas aos campos donde se conclui que as frentes s_1 e s_2 movem-se, respectivamente, para as placas x=0 e x=1, e, consequentemente, a carga flutuante se alarga.

Vamos obter, em seguida, a expressão da descarga nas placas.

Na secção II foi estabelecido que, quando $s_o > x_o$, a descarga na placa x=1 da carga espacial q_{20}, situada na região (x_o, s_o) e cuja frente se desloca para aquela placa, tem por expressão

$$q_{20} - \sigma (1 - s_o)$$

Generalizando, podemos concluir que toda a carga situada entre um ponto de campo nulo x_o, e uma frente de nuvem s_o, descarrega na placa oposta à frente de nuvem

segundo a expressão acima.

Ora, observando a figura 19 verificamos que ocorrem duas situações semelhantes àquela descrita acima:

(a) a carga q_{10} em (s_o, x_o) que, de acordo com a expressão acima, descarrega, na placa x=0, com o valor $q_{10} - \sigma s_{10}$, e

(b) a carga q_{20} em (x_o, s_{20}) que descarrega na placa x=1, segundo $q_{20} - \sigma(1 - s_{20})$.

A descarga nas duas placas tem então o valor

$$Q = q_{10} + q_{20} - \sigma s_{10} - \sigma(1 - s_{20})$$

Sendo $q_{10} + q_{20} = q_o$, carga espacial inicial em (s_{10}, s_{20}), vem

$$Q = q_o - \sigma(1 - s_{10} - s_{20})$$

Definindo a assimetria como

$$X(t) = (1 - s_2) - s_1 = 1 - s_1 - s_2 \text{ ; vem que}$$

$1 - s_{10} - s_{20} = X(0)$ é a assimetria em t = 0, ou assimetria inicial.

Portanto pode-se escrever para a expressão da descarga nas placas

$$Q = q_o - \sigma X(0)$$

Quando a assimetria inicial é nula,

$$X(0) = 0, \quad \text{ou}$$

$$s_{10} + s_{20} = 1, \quad \text{vem que}$$

$$Q = q_o,$$

concluindo-se então, que, quando a assimetria inicial é nula, a descarga nas placas é igual à carga espacial inicial.

Obtenção da expressão da descarga da carga flutuante, que se desloca para a placa x=1, $q_o + \sigma(s_{20} - s_{10})$, por um segundo processo

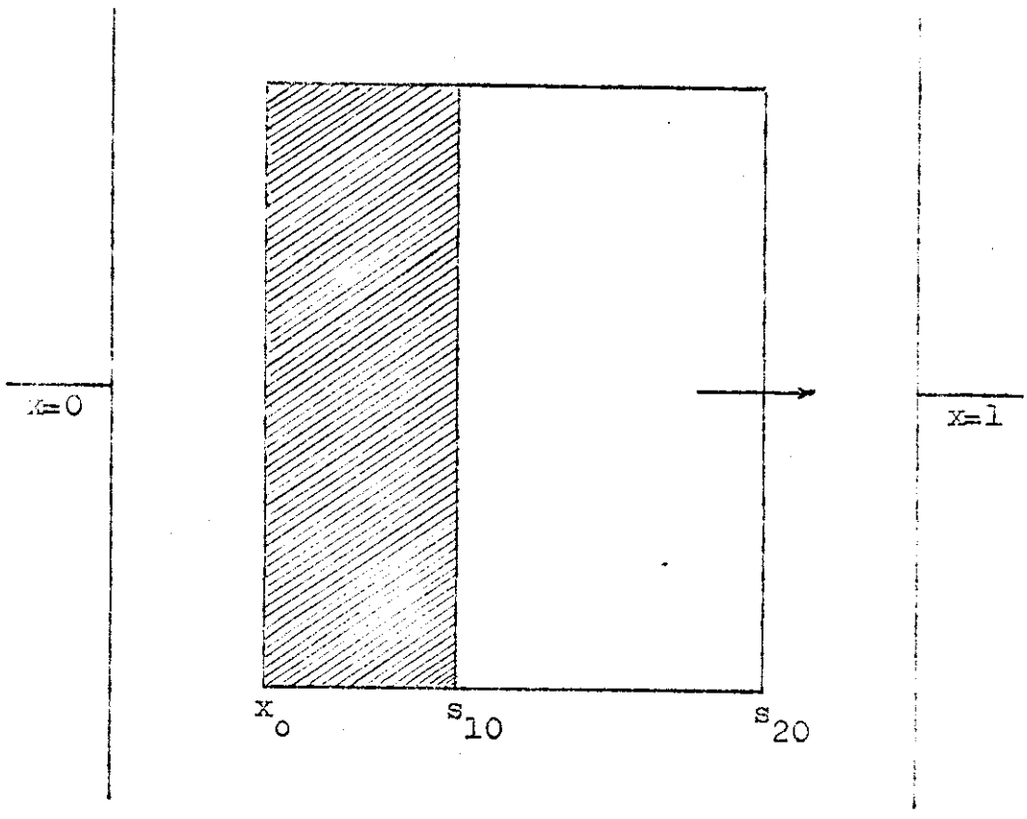

Figura 20

Como sabemos, quando a carga flutuante orienta-se para a direita, o ponto de campo nulo encontra-se à sua esquerda, isto é,

$$x_o < s_{10}$$

Suponhamos, por artifício, que a carga espacial se estenda até o ponto de campo nulo, x_o, e seja q_{20} a carga espacial na região (x_o, s_{20}), e, portanto, de acordo com o que foi aceito no parágrafo anterior, pode-se escrever para a descarga na placa $x = 1$, desta carga,

$$Q_2 = q_{20} - \sigma(1 - s_{20})$$

Na região (x_o, s_{10}) temos a carga (fictícia), q_{10}, cuja descarga na placa $x = 1$, por motivos já justificados no item antecedente é:

$$Q_1 = q_{10} - \sigma(1 - s_{10})$$

A descarga da carga da região (s_{10}, s_{20}) é então:

$$Q = Q_1 - Q_2 = q_2 - q_1 - \sigma(1 - s_{20}) + \sigma(1 - s_{10})$$

Como

$q_{20} - q_{10} = q_0$ = carga espacial inicial na região (s_{10}, s_{20}),

tem-se finalmente

$$Q = q_o + \sigma(s_{20} - s_{10})$$

O que confirma esta expressão já obtida por outros meios.

- RESUMO DOS RESULTADOS -

(1) A distribuição em caixa é solução do problema, a densidade de carga variando de acordo com a relação

$$\frac{\sigma \rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma + \rho_o (1 - e^{-\sigma t})}$$

(2) Os campos nas regiões sem carga decaem exponencialmente com o tempo.

(3) O campo na carga flutuante, em cada instante é linear em x, e em cada ponto, proporcional à densidade.

(4) O ponto de campo nulo independe do tempo.

(5) (a) Quando o ponto de campo nulo situa-se no interior da carga flutuante as fronteiras (s_1 e s_2) movem-se para as duas placas.

(b) Quando o ponto de campo nulo situa-se à esquerda da carga flutuante, esta desloca-se para a direita.

(c) Quando o ponto de campo nulo situa-se à direita da carga flutuante, esta move-se para a esquerda

(6) A carga flutuante pode se deter antes de alcançar as placas desde que $s_{2_{máx}} < 1$, ou, $s_{1_{máx}} > 0$, ou ainda estas duas condições simultaneamente, quando a carga

se move para as duas placas. Neste caso não há descarga pois para $t=\infty$, $\rho=0$

(7) A descarga, quando toda a carga flutuante se desloca para uma das placas, se realiza em um tempo finito, quando o ponto de campo nulo situa-se fora da carga espacial, isto é, $s_{10}, s_{20} > x_o$ ou $x_o > s_{10}, s_{20}$ e além disso que $s_{2_{máx}} > 1$ e $s_{1_{máx}} < 0$.

(8) A descarga, quando o ponto de campo nulo está no interior da carga flutuante, realiza-se pelas duas placas, para $s_{2_{máx}} > 1$ e $s_{1_{máx}} < 0$, em $t=\infty$.

(9) A carga flutuante sempre se alarga

(10) Quando entre as placas a carga flutuante decai apenas devido a neutralizações e só quando atinge as placas passa a decair também por transferência de transportadores para as mesmas.

(11) Para $s_{10}, s_{20} > x_o$ a descarga realiza-se pela placa $x=1$, com valor $q_o + \sigma(s_{20} - s_{10}) > q_o$.

Para $s_{10} < x_o < s_{20}$ a descarga realiza-se pelas duas placas, com valor $q_o - \sigma X(0)$ que pode ser $> q_o$ ou $< q_o$ dependendo do sinal de $X(0)$.

Para $s_{10} = x_o$ e $s_{20} > x_o$, a descarga realiza-se pela

placa $x = 1$ com valor $q_o - \sigma(1 - s_{20})$. A descarga na placa $x = 0$, obtém-se substituindo-se s_{20} por s_{10} nas expressões acima,

(12) A descarga é igual à carga espacial inicial apenas no caso $s_{10} < x_o < s_{20}$, quando se tem $X(0) = 0$.

(13) Quando toda a carga espacial se desloca para uma das placas a superfície que se desloca mais rapidamente é a superfície anterior (leading edge).

(14) Os campos E_1 e E_3 nunca podem ser iguais. O campo E_2, que une estes dois campos, é linear em x e portanto quanto maior a carga maior a diferença entre E_1 e E_3, a sua igualdade só sendo possível para $q_o = 0$, o que é um absurdo.

(15) O teorema de Lindmayer também verifica-se para a carga flutuante em circuito aberto, pois, de $x_o =$ Cte, resulta $J = 0$.

- SECÇÃO V -

SIMETRIA DO CONDENSADOR ESFÉRICO. CONDIÇÃO DE CURTO-CIRCUITO COM $\sigma = 0$

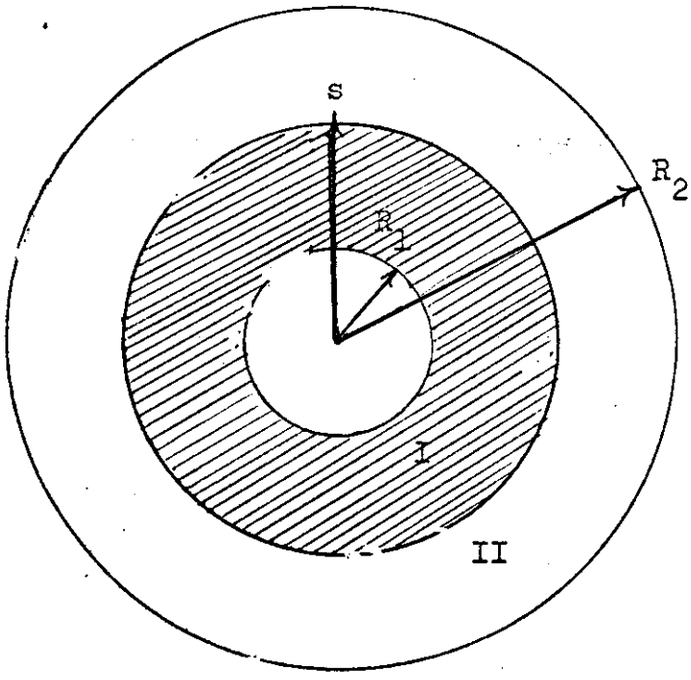

Figura 21

Seja o condensador esférico, de raios R_1 e R_2, representado esquematicamente na figura 21. Este condensador está cheio de um material dielétrico no qual há uma distribuição de carga uniforme, estendendo-se de R_1 à s_o, inicialmente. Nesta secção não serão consideradas unidades reduzidas por razões que serão justificadas mais adiante.

Seja a equação de Poisson

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Em coordenadas esféridas, quando E depende só de r, tem-se

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Como a distribuição tem simetria esférica o campo so tem

componente r, e portanto

$$E_r = E, \quad \text{donde}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Integrando esta expressão na região em que $\rho \neq 0$ e admitindo-se que ρ não dependa de r (o que provar-se-á ser correto na secção V), obtém-se

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon} + \frac{C_1}{r^2}$$

Na região II $\rho = 0$, donde

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E_2) = 0$$

cuja integração dá

$$E_2 = \frac{C_2}{r^2}$$

Em $r = s$, dada a continuidade dos campos, vem

$$E_{1s} = E_{2s}$$

ou

$$\frac{\rho s}{3\varepsilon} + \frac{C_1}{s^2} = \frac{C_2}{s^2},$$

donde

$$C_2 - C_1 = \frac{\rho s^3}{3\varepsilon},$$

que combinada à equação

$$\int_{R_1}^{s} E_1 dr + \int_{s}^{R_2} E_2 dr = 0,$$

permite obter C_1 e C_2.

$$\int_{R_1}^{s} \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon} + \frac{C_1}{r^2} \right) dr + \int_{s}^{R_2} \frac{C_2}{r^2}\, dr = 0$$

As integrais são diretas e o resultado é

$$\frac{\rho}{6\varepsilon} (s^2 - R_1^2) - C_1 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{R_1} \right) - C_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{s} \right) = 0.$$

A substituição de C_2 em função de C_1 dá

$$\frac{\rho s^2}{6\varepsilon} - \frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon} + \frac{C_2 - C_1}{s} + \frac{C_1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \left(C_1 + \frac{\rho s^3}{3\varepsilon} \right) = 0.$$

Com a substituição de $C_2 - C_1$ por $\frac{\rho s^3}{3\varepsilon}$ e após algumas reduções resulta finalmente

$$C_1 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon} + \frac{\rho s^3}{3\varepsilon R_2} - \frac{\rho s^2}{2\varepsilon} \right).$$

Tem-se então para a expressão de $E_1(r,t)$,

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon} + \frac{1}{r^2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon} + \frac{\rho s^3}{3\varepsilon R_2} - \frac{\rho s^2}{2\varepsilon} \right), \qquad \text{(V-1)}$$

O campo E_2 com a substituição de C_2 em função de C_1, torna-se

$E_2 = \frac{\rho s^3}{3\varepsilon r^2} + \frac{C_1}{r^2}$, e com a substituição de C_1 tem-se finalmente

$$E_2 = \frac{\rho s^3}{3\varepsilon r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon} + \frac{\rho s^3}{3\varepsilon R_2} - \frac{\rho s^2}{2\varepsilon} \right) \qquad \text{(V-2)}$$

- PONTO DE CAMPO NULO -

Igualando a zero a expressão de $E_1(r,t)$, vem

$$\frac{\rho r_o}{3\varepsilon} + \frac{1}{r_o^2}\,\frac{R_1 R_2}{R_2-R_1}\left(\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon} + \frac{\rho s^3}{3\varepsilon R_2} - \frac{\rho s^2}{2\varepsilon}\right) = 0,$$

e daí

$$r_o = \left[\frac{3R_1R_2}{R_2-R_1}\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3R_2} - \frac{R_1^2}{6}\right)\right]^{1/3}, \qquad \text{(V-3)}$$

Verifica-se que, neste caso, r_o depende do tempo pois $s = s(t)$.

Como a condição $\int_{R_1}^{R_2} E dr = 0$ implica campos positivos e negativos conclui-se que a condição de curto-circuito impõe a existência de um ponto de campo nulo entre R_1 e R_2 e que portanto

$$R_1 < r_o < R_2$$

O ponto de campo nulo só tem existência concreta dentro da região da carga espacial, região (1), pois o campo E_2 não se anula no espaço entre as placas e portanto

$$R_1 < r_o < s(t).$$

Isto mostra que $E_1(r,t)$ tem um sinal em (R_1, r_o) e o sinal oposto em $(r_o s(t))$. Da expressão de E_1 em função do ponto de campo nulo

$$E_1 = \frac{\rho}{3r^2}(r^3 - r_o^3) \qquad \text{(V-4)}$$

verifica-se que para $R_1 \leq r < r_o$

$$E_1 < 0,$$

e para $s \geq r > r_o$

$$E_1 > 0.$$

Como E_2 é contínuo com E_1 e não se anula em $s \leq r \leq R_2$, conclui-se que

$$E_2 > 0$$

O que se poderia verificar também da expressão de E_2 em função de r_o

$$E_2 = \frac{\rho}{3r^2}(s^3 - r_o^3) \qquad \text{(V-5)}$$

pois para $r_o < s$, $E_2 > 0$.

- GRÁFICO DOS CAMPOS -

De $R_1 < r_o < s$ e $E_2 > 0$ pode-se obter um gráfico aproximado dos campos o qual vem representado na figura 22.

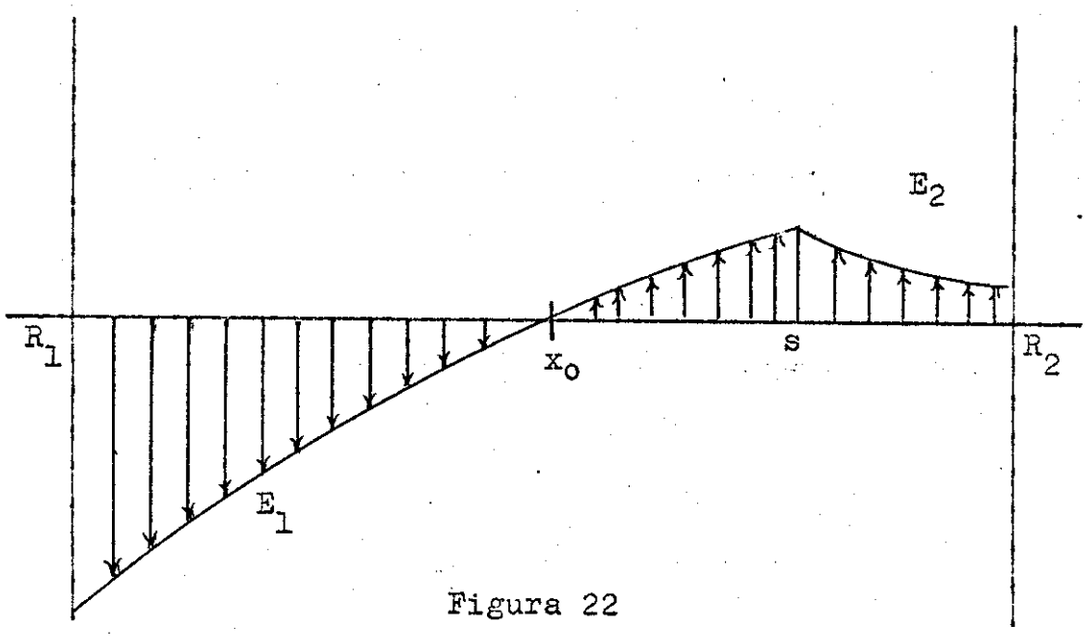

Figura 22

- DESLOCAMENTO DA FRENTE DA CARGA ESPACIAL -

Na equação (V-2), fazendo-se algumas reduções e fatorações chega-se a

$$E_2 = \frac{\rho R_2}{6\,\varepsilon\, r^2 (R_2 - R_1)} (s - R_1)^2 \,(2s + R_1), \text{ onde para } r = s,$$

vem para velocidade da frente da nuvem,

$$\frac{ds}{dt} = E_2(s) = \frac{\rho R_2}{6\,\varepsilon\, s^2 (R_2 - R_1)} (s - R_1)^2 \,(2s + R_1) > 0 \quad \text{para}$$

$\rho > 0$. A frente da nuvem portanto desloca-se para a placa R_2. Efetuando uma separação de variáveis vem,

$$\frac{6\varepsilon (R_2 - R_1)\; s^2 ds}{\mu R_2 (s - R_1)^2 (2s + R_1)} = \rho\, dt$$

Integrando

$$\int_{s_o}^{s} \frac{s^2 ds}{(2s^3 - 3R_1 s^2 + R_1^3)} = \frac{\mu R_2}{6\,\varepsilon\,(R_2 - R_1)} \int_{\rho_o}^{\rho} \rho\, dt,$$

chega-se, por decomposição em frações racionais, a

$$\frac{R_1}{3}\left[\frac{s - s_o}{(s - R_1)(s_o - R_1)}\right] + L\left(\frac{s - R_1}{s_o - R_1}\right)^{4/9} \left(\frac{2s + R_1}{2s_o + R_1}\right)^{1/18}$$

$$= \frac{\mu R_2}{6\,\varepsilon\,(R_2 - R_1)} \int_{\rho_o}^{\rho} \rho\, dt$$

Da equação da continuidade e notando que ρ só é função do tempo, tem-se

$$\rho dt = - \frac{\varepsilon d\rho}{\mu\rho} ,$$

cuja integração fornece a variação temporal da densidade de carga, idêntica àquela obtida em problemas planos. O mesmo resultado obter-se-á em simetria cilíndrica.

Da substituição, resulta

$$\frac{R_1(s - s_o)}{3(s - R_1)(s_o - R_1)} + L \left[\left(\frac{s - R_1}{s_o - R_1} \right)^{4/9} \left(\frac{2s + R_1}{2s_o + R_1} \right)^{1/18} \right]$$

$$= - \frac{R_2}{6(R_2 - R_1)} L \frac{\rho}{\rho_o} ,$$

que pode ser posta na forma

$$\frac{e^{\frac{R_1(s_o - s)}{3(s - R_1)(s_o - R_1)}}}{\left(\frac{s - R_1}{s_o - R_1} \right)^{4/9} \left(\frac{2s + R_1}{2s_o + R_1} \right)^{1/18}} = \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\frac{R_2}{6(R_2 - R_1)}},$$

ou, explicitando a dependência de ρ em t,

$$\frac{e^{\frac{R_1(s - s_o)}{3(s - R_1(s_o - R_1)}}}{\left(\frac{s - R_1}{s_o - R_1} \right)^{4/9} \left(\frac{2s + R_1}{2s_o + R_1} \right)^{1/18}} = \left(1 + \frac{\mu\rho_o t}{\varepsilon} \right)^{- \frac{R_2}{6(R_2 - R_1)}}$$

Esta expressão é suficientemente complexa para que se ten

to alguma interpretação.

Permite porém achar-se o comportamento da distribuição de cargas no caso do eletrodo puntual, isto é, aquele no qual $R_1 \to 0$. Aqui se justifica o não se ter empregado unidades reduzidas pois de

$R_{1_{red}} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} R_1$ e $R_{2_{red}} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} R_2$, verifica-se que

para $R_1 \to 0$, obter-se-ia $R_{1_{red}} = 1$ e $R_{2_{red}} = \infty$, sendo

que o valor obtido para R_2 reduzido, $R_{2_{red}}$, é que desaconselhou a substituição de unidades comuns por reduzidas.

Para $R_1 \to 0$, obtém-se então para a expressão de s,

$$\frac{s}{s_o} = \sqrt[3]{1 + \frac{\mu \rho_o t}{\varepsilon}} \qquad \text{(V-6)}$$

Resultado interessante pois mostra independência em relação ao eletrodo externo.

Sob esta condição, $R_1 \to 0$, os campos e o ponto de campo nulo, equações (V-1), (V-2) e (V-3), tornam-se:

Para $r \to 0$ $\therefore$ $r \to R_1 \to 0$, e $\frac{\rho r}{3\varepsilon} \to 0$, portanto

$$\frac{\rho s^2}{\varepsilon r^2} \left(\frac{s}{3R_2} - \frac{1}{2} \right) R_1 = \frac{\rho s^2}{\varepsilon R_1^2} \left(\frac{s}{3R_2} - \frac{1}{2} \right) R_1 =$$

$R_1 \to 0, r \to R_1$

$$= \frac{\rho s^2}{\varepsilon R_1} \left(\frac{s}{3R_2} - \frac{1}{2} \right) \to \infty \leftarrow \text{em } (0, r_o).$$

Para $r \neq 0$, vem com $E_1 \to 0$,

$$E_1(r,t) = \frac{\rho r}{3\varepsilon}$$

Como no domínio de E_2, $r \neq 0$, vem

$$E_2 = \frac{\rho s^3}{3r^2\varepsilon}\ ,$$ e portanto

tem-se para os campos

$$\underset{R_1 \to 0}{E_1(R_1,t)} \to \infty, \qquad 0 < r < r_o$$

$$\underset{R_1 \to 0}{E_1(r,t)} = \frac{\rho r}{3\varepsilon}\ , \qquad r_o < r \leq s$$

$$\underset{R_1 \to 0}{E_2} = \frac{\rho s^3}{3\varepsilon r^2} \qquad s < r \leq R_2$$

- PONTO DE CAMPO NULO -

Para o ponto de campo nulo obtém-se

$$r_o = \left[3R_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{3R_2} \right) s^2 \right]^{1/3}$$

que para $R_1 \to 0$, dá $r_o \to 0$, mas r_o jamais pode ser zero, pois a condição de curto-circuito implica a existência de campos de sinais opostos e r_o é a fronteira entre estes campos, e se $r_o = 0$ isto significaria campos de um só sinal na distribuição o que seria contrário à condi-

ção de curto-circuito. Portanto r_o não pode se anular mas pode tender para zero enquanto o campo na região $(0,r_o)$ cresce ilimitadamente de forma a compensar o potencial na região (r_o, R_2).

O gráfico dos campos neste caso é o representado na figura 23.

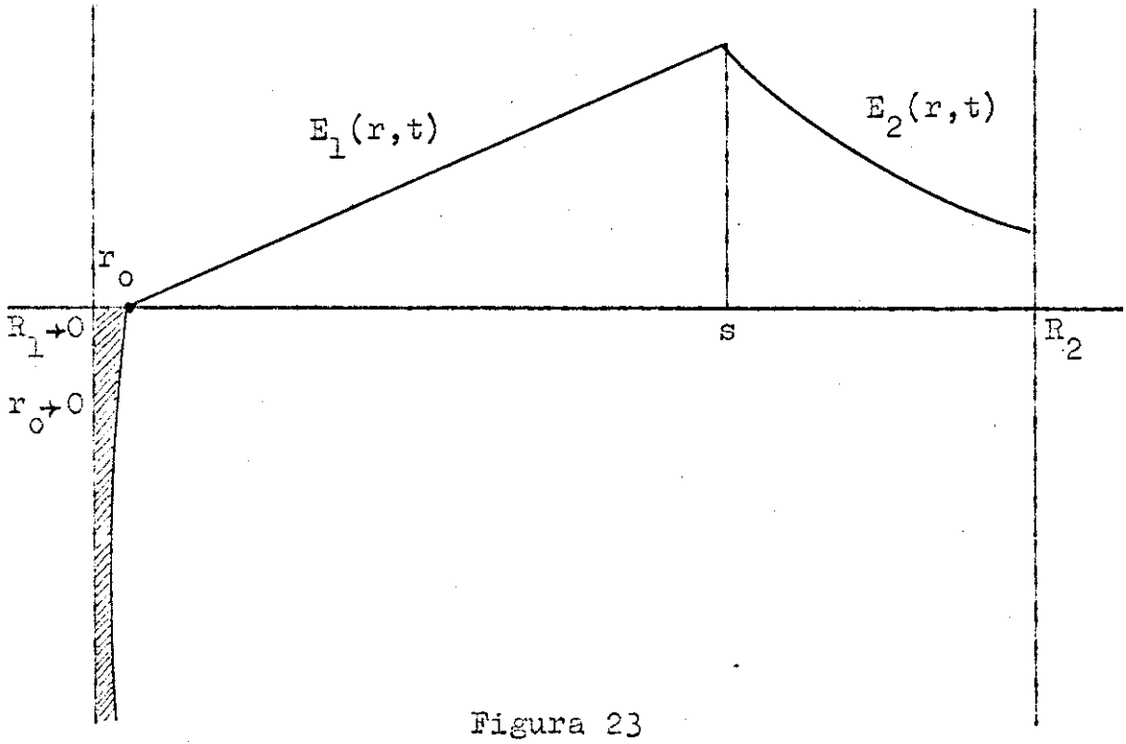

Figura 23

Como já se viu

$$E(R_1,t) \to \infty,$$
$$R_1 \to 0$$

o que leva a concluir que a nuvem não destaca da placa R_1, a qual, neste caso, resume-se a um ponto.

Não ocorre também descarga pela placa R_1, em virtude de não haver carga na região $(0,r_o)$, pois em virtude de $r_o \to 0$ e ρ ser finito a carga nesta região seria

$$\lim_{x_o \to 0} \rho \cdot \frac{4\pi r_o^3}{3} = 0$$

e portanto o escoamento das cargas só poderá se verificar pela placa R_2 pois para ela se dirige a frente da nuvem.

Este escoamento só tem início quando a frente da nuvem alcança a placa R_2 e o instante em que isto se verifica pode ser obtido da equação (V-6), fazendo-se na mesma $s = R_2$, obtendo-se então, para este tempo,

$$t_{s_o} = \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{R_2^3 - s_o^3}{s_o^3}\right)$$

a partir do instante em que a frente da nuvem alcança a placa R_2 o campo em todo o dielétrico é o da região (1), $E_1(r,t)$.

A corrente de condução em $r = R_2$ é:

$$i = \mu\rho E_1(R_2,t), \qquad t \geq t_{s_o}$$

A carga que escoa até um instante $t > t_{s_o}$ pela placa R_2 obtém-se de

$$q = \int_{t_{s_o}}^{t} \mu\rho E_1(R_2,t)\,dt,$$

onde pela substituição da expressão de $E_1(R_2,t)$ vem,

$$q = \frac{\mu R_2}{3\varepsilon} \int_{t_{s_o}}^{t} \rho^2 dt$$

Ora $\rho = \dfrac{\rho_o}{1 + \dfrac{\mu\rho_o t}{\varepsilon}}$ a mesma densidade no condensador plano, para $\sigma = 0$, pois ρ independe de geometrias.

Portanto, vem para q:

$$q = \frac{\mu\rho_o^2 R_2}{3\varepsilon} \int_{t_{s_o}}^{t} \left(1 + \frac{\mu\rho_o t}{\varepsilon}\right)^{-2} dt,$$

cuja integração é imediata, resultando

$$q = 0, \qquad t \leq t_{s_o}$$

$$q = \frac{\rho_o R_2}{3} \left(\frac{1}{\rho_o t_{s_o} + 1} - \frac{1}{1 + \rho_o t}\right), \quad t \geq t_{s_o}$$

Como a carga no dielétrico não destaca da placa R_1, enche portanto todo o dielétrico quando $t \geq t_{s_o}$, ocupando então um volume constante $\frac{4\pi R_2^3}{3}$

A carga no dielétrico, para $t \geq t_{s_o}$ tem por expressão

$$q(t) = \rho(t) \cdot \frac{4\pi R_2^3}{3}$$

e só se tem $q(t) = 0$ quando $\rho(t) = 0$ e como isto só ocorre para $t = \infty$, conclui-se, consequentemente, que o escoamento de toda a carga espacial pela placa R_2, a partir de $t = t_{s_o}$, só se completará em $t = \infty$.

E portanto, na expressão de q, para $t \geq t_{s_o}$, fazendo-se $t = \infty$, vem

$$q_\infty = \frac{\rho_o R_2}{3} \frac{1}{1 + \rho_o t_{s_o}}$$

Substituindo-se nesta expressão o fator

$$t_{s_o} = \frac{R_2^3 - s_o^3}{\rho_o s_o^3},$$

e depois efetuando-se algumas reduções, resulta,

$$q_\infty = \frac{\rho_o s_o^3}{3 R_2^2}$$

Sendo esta carga a que descarrega por unidade de área pois resulta da integração da densidade de corrente, conclui-se que a descarga por toda a área da placa, $4\pi R_2^2$, deve ser,

$$Q_\infty = 4\pi R_2^2 \, q_\infty \, , \quad \text{ou}$$

$$Q_\infty = \frac{4\pi s_o^3}{3} \rho_o = q_o = \text{carga espacial inicial}$$

Toda a carga descarrega então pela placa R_2, o que significa que não há descarga pela placa R_1 o que está correto pois em $(0, r_o)$ não há carga desde que $r_o \to 0$.

- RESUMO DOS RESULTADOS -

(1) A distribuição em caixa é solução do problema, a densidade de carga variando de acordo com a relação

$$\frac{\rho_o}{1 + \rho_o t}$$

(2) A densidade de carga, ρ, independe de geometrias. É a mesma nos condensadores planos, esféricos ou cilíndricos desde que as condições físicas sejam as mesmas.

(3) O ponto de campo nulo depende do tempo.

(4) O campo na região sem cargas, para $t = Cte$, decai com $1/r^2$ e para $r = C^{te}$ é função de ρ e s e portanto do tempo.

(5) A frente da nuvem só pode deslocar-se para a placa R_2 pois o campo na região sem cargas é sempre positivo.

(6) A descarga se verifica pelas duas placas, pois $E_1(R_1,t) < 0$ e $E_1(R_2,t) > 0$. Na placa R_1, a partir de $t = 0$, e na placa R_2 a partir do tempo de trânsito que é o tempo que a frente de nuvem leva para alcançar esta placa.

(7) A descarga só se completa em $t = \infty$.

(8) O ponto de campo nulo só tem existência concreta quando ocorre na região de carga espacial; no nosso caso isto significa $R_1 \leq r_o \leq s(t)$.

(9) A condição de curto-circuito implica na existência de um ponto de campo nulo na distribuição de cargas.

- CASO PARTICULAR EM QUE $R_1 \to 0$ -

Neste caso os resultados são os mesmos do caso geral com exceção do item 3 porque para $R_1 \to 0$, $r_o \to 0$, e do item 6 porque agora a descarga se verifica apenas por uma das placas, a placa externa.

Outra distinção entre os dois casos é que na placa $R_1 \to 0$ há agora um campo de altíssima intensidade $E_1(R_1,t) \to \infty$.

- SECÇÃO VI -

SIMETRIA DO CONDENSADOR ESFÉRICO. CONDIÇÃO DE CIRCUITO ABERTO COM $V_0 \neq 0$ e $\sigma \neq 0$

As grandezas utilizadas são reduzidas e as demonstrações de sua obtenção são deixadas para o apêndice

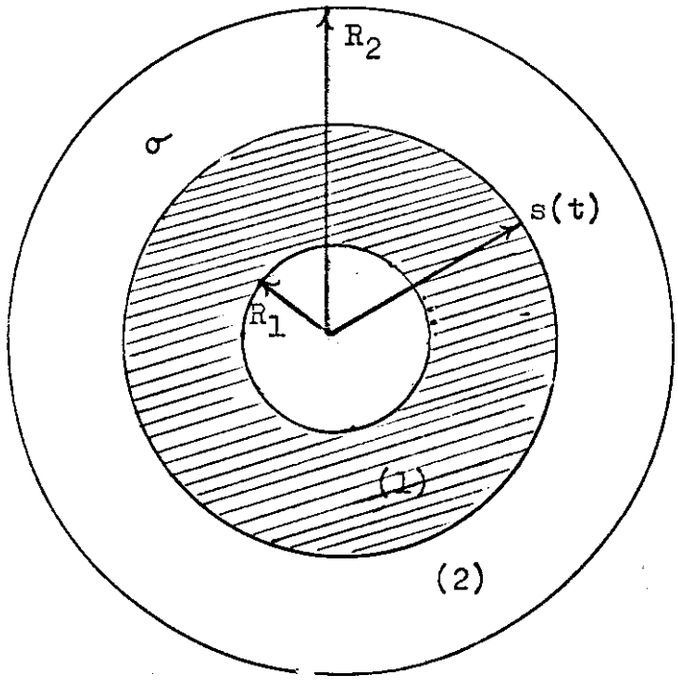

Figura 24

Em virtude de ser o circuito aberto, então $J = 0$. Em (2), vem

$$J_2 = \rho E_2 + \sigma E_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0,$$

como esta é a região sem cargas,

$$\rho = 0 \qquad \therefore$$

$$\sigma E_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0,$$

esta é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes cuja solução é

$$E_2 = E_{20}\, e^{-\sigma t}$$

Da equação de Poisson,

$$V.E_2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E_2) = 0,$$

verifica-se que

$$r^2E_2 = \text{constante em relação à } r.$$

Na região com carga espacial,

$$V.\vec{E}_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E_1) = \rho$$

integrada esta expressão, obtém-se

$$r^2E_1 = \frac{\rho r^3}{3} + C,$$

onde por um procedimento análogo ao empregado quando $\sigma = 0$ chega-se a

$$E_2 = \frac{\rho s^3}{3r^2} + \frac{C}{r^2}$$

Para $t = 0$, tem-se

$$E_{20} = \frac{\rho_o s_o^3}{3r^2} + \frac{C(0)}{r^2}$$

que substituída em $E_2 = E_{20}\, e^{-\sigma t}$, dá

$$E_2 = \left(\frac{\rho_o s_o^3}{3r^2} + \frac{C(0)}{r^2}\right) e^{-\sigma t}$$

A obtenção de $C(0)$ realiza-se da seguinte forma: empregando-se a condição de contorno

$$\int_{R_1}^{R_2} E\,(r,0)\,dr = V_o = 1,$$

em $t = 0$, obtém-se

$$\int_{R_1}^{s_o}\left(\frac{\rho_o r}{3} + \frac{C(0)}{r^2}\right) dr + \int_{s_o}^{R_2}\left(\frac{\rho_o s_o^3}{3r^2} + \frac{C(0)}{r^2}\right) dr = 1,$$

cuja integração dá para C(0):

$$C(0) = \left[1 + \frac{\rho_o s_o^3}{3R_2} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} + \frac{\rho_o R_1^2}{6} \right]$$, e consequentemente vem que

$$E_2 = \left[\frac{\rho_o s_o^3}{3r^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{\rho_o s_o^3}{3R_2} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} + \frac{\rho_o R_1^2}{6}\right) \right] e^{-\sigma t} \quad \text{(VI-1)}$$

E_2 decai com $1/r^2$ e exponencialmente com t.

- OBTENÇÃO DA DENSIDADE -

Da equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \vec{E} + \sigma \vec{E}) = 0,$$ admitida a exatidão da distribuição em caixa, $\rho(r,t) = \rho(t)$, vem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho + \sigma)\ \nabla.\ \vec{E} = 0,$$

e da equação de Poisson, $\nabla.\vec{E} = \rho$, obtém-se

$$\frac{d\rho}{dt} + (\rho + \sigma)\ \rho = 0$$

Esta equação já foi obtida no caso do condensador plano obtendo-se

$$\rho = \frac{\sigma \rho_o\ e^{-\sigma t}}{\sigma + \rho_o (1 - e^{-\sigma t})} \qquad \text{(VI-1')}$$

- CÁLCULO DE $E_1(r,t)$ -

Em (1), tem-se

$$J_1 = \rho E_1 + \sigma E_1 + \frac{\partial E_1}{\partial t} = 0, \text{ e}$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3} + \frac{C(t)}{r^2}$$

A equação $J_1 = 0$ quer o condensador seja plano ou curvilíneo, quer $\sigma = 0$ ou $\sigma \neq 0$, leva sempre à relação:

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o} C(0),$$

onde por substituição de C(0) obtém-se,

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o} \left[1 + \frac{\rho_o s_o^3}{3R_2} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} + \frac{\rho_o R_1^2}{6} \right] , \quad e,$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3} + \frac{\rho}{\rho_o r^2} \left[1 + \frac{\rho_o s_o^3}{3R_2} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} + \frac{\rho_o R_1^2}{6} \right] \qquad \text{(VI-2)}$$

- CÁLCULO DE s(t) -

Para se determinar s(t) utiliza-se a relação

$$\frac{ds}{dt} = E_2(s),$$

oriunda do conceito de mobilidade.

Fazendo na equação (VI-1), $r = s$, vem para a relação acima,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s^2} \left[\frac{\rho_o s_o^3}{3} + C(0) \right] e^{-\sigma t}$$

Verifica-se então que a velocidade de deslocamento da frente da nuvem decai exponencialmente com o tempo.

Integrando

$$\int_{s_o}^{s} s^2 ds = \left(\frac{\rho_o s_o^3}{3} + C(0) \right) \int_0^t e^{-\sigma t} dt ,$$

resulta

$$s^3 = s_0^3 + \frac{3}{\sigma}\left(\frac{\rho_o s_o^3}{3} + C(0)\right)\left(1 - e^{-\sigma t}\right)$$

$$s = \left[s_o^3 + \frac{3}{\sigma}\left(\frac{\rho_o s_o^3}{3} + C(0)\right)\left(1 - e^{-\sigma t}\right)\right]^{1/3} \qquad \text{(VI-3)}$$

Para $t = \infty$, $s_{máx} = \left[s_o^3 + \frac{3}{\sigma}\left(\frac{\rho_o s_o^3}{3} + C(0)\right)\right]^{1/3}$

Vê-se que $s_{máx}$ é, em princípio, sempre finito, diversamente do caso em que $\sigma = 0$ em que $s_{máx}$ é infinito, a não ser para $s_o = r_o$.

- CÁLCULO DO PONTO DE CAMPO NULO -

Obtém-se o ponto de campo nulo de forma usual, resultando

$$r_o = \left[\frac{3}{\rho_o}\left(\frac{\rho_o s_o^2}{2} - \frac{\rho_o R_1^2}{6} - \frac{\rho_o s_o^3}{3R_2} - 1\right)\right]^{1/3} \qquad \text{(VI-4)}$$

Verificou-se então que r_o independe do tempo, resultado este obtido até agora em todas as geometrias sob condição de circuito aberto.

Das relações (VI-1) e (VI-2), equações de $E_2(r,t)$ e $E_1(r,t)$ e da equação (VI-4), expressão de r_o, é fácil achar-se E_1 e E_2 como função do raio de campo nulo.

$$E_1 = \frac{\rho}{3r^2}\left(r^3 - r_o^3\right), \qquad \text{(VI-5)}$$

Com a obtenção de C(0) em função de r_o,

$$C(0) = -\frac{\rho_o r_o^3}{3}, \quad \text{vem}$$

para E_2,

$$E_2 = \frac{\rho_o}{3r^2}(s_o^3 - r_o^3)\, e^{-\sigma t} \qquad \text{(VI-6)}$$

A condição de existência do raio de campo nulo é que r_o esteja situado nos limites da carga espacial, isto é, no caso de circuito aberto,

$$R_1 \leq r_o \leq s_o$$

isto para carga que não destaca da placa R_1, pois quando a carga destaca esta condição toma a forma

$$s_{10} \leq r_o \leq s_{20}$$

Isto para circuito aberto, em que r_o = Cte no tempo. Em curto-circuito como r_o depende de t, se deslocando então, a condição de existência é:

$$R_1 \leq r_o(t) \leq s(t)$$

para carga que não destaca da placa R_1 e

$$s_1(t) \leq r_o(t) \leq s_2(t)$$

para carga flutuante.

- Sinais dos campos -

(a) Para $0 < r_o < R_1$, verifica-se da equação (VI-5) que $E_1(r,t) > 0$ e como E_2 é contínuo com E_1 e não muda de sinal, também $E_2 > 0$ e os campos são positivos.

(b) Para $R_1 < r_o < s_o$, conclui-se, pela equação (VI-5) que para $(R_1 r_o)$, $E_1 < 0$, para (r_o, s), $E_1 > 0$ e como além de s, tem-se E_2, tem-se para este $E_2 > 0$. Os campos são negativos até r_o e positivos além.

(c) Para $r_o > s$, como $E_1(r,t)$ só existe no intervalo (R_1, s), tem-se que $E_1 < 0$ e por consequência $E_2 < 0$, isto é, os campos são negativos.

(d) Para $r_o < 0$, $r_o = -|r_o|$ $\therefore$ $E_1 = \frac{\rho}{3r^2}(r^3 + |r_o|^3) > 0$ e $E_2 = \frac{\rho_o}{3r^2}(s_o^3 + |r_o|^3) > 0$, os campos são positivos. Fisicamente o ponto de campo nulo não existe nos casos (a), (c) e (d).

Para r_o imaginário teríamos também E_1 e E_2 imaginários

Da relação (VI-3), vem

$$s = \left[s_o^3 + \frac{\rho_o}{\sigma}(s_o^3 - r_o^3)(1 - e^{-\sigma t} \right]^{1/3} , \qquad \text{(VI-7)}$$

Para $t = \infty$, vem

$$s_{máx} = \left[s_o^3 + \frac{\rho_o}{\sigma}(s_o^3 - r_o^3) \right]^{1/3}$$

Verifica-se que, para $s_o = r_o$,

$$s_{máx} = s_o = Cte$$

e a frente da nuvem não se desloca, o que ocorre também pa

ra o caso em que $\sigma = 0$.

Para $s_o \gtrless r_o$, $s_{máx} \neq s_o$ e finito diferentemente de $\sigma = 0$ em que, nas mesmas condições, $s_{máx} \neq s_o$ porém infinito.

Isto significa que para $\sigma = 0$, quando $s_o \geq r_o$, a frente da nuvem sempre alcança as placas ao passo que nas mesmas condições, $s_o \geq r_o$, para $\sigma \neq 0$ como $s_{máx}$ é finito pode-se ter $s_{máx} > R_2$ ou $s_{máx} < R_1$ e a frente da nuvem alcança as placas mas pode também ocorrer que $s_{máx} < R_2$ ou $s_{máx} > R_1$ não alcançando, neste caso, a frente da nuvem, as placas.

Isto ocorre devido à condutividade que mobiliza cargas de sinal contrário ao da carga espacial contribuindo para neutralização da mesma, em escala tanto maior quanto maior é σ.

Para $s_{máx} < R_2$ e $s_{máx} > R_1$ a nuvem se detém antes de alcançar as placas, mas neste instante não há mais cargas no dielétrico pois para $t = \infty$, $\rho = 0$.

- CARGA QUE ESCOA PELA PLACA R_1 -

Sendo E_{R_1} o campo na placa interna, a corrente de condução nesta placa é

$$i_{R_1} = \rho E_{R_1} + \sigma E_{R_1}$$

Da expressão da corrente total em R_1,

$$J_{R_1} = i_{R_1} + \frac{\partial E_{R_1}}{\partial t} = 0$$

vem

$$i_{R_1} = \frac{\partial E_{R_1}}{\partial t}.$$

Para que haja corrente para a placa interna i_{R_1} deve ser negativa, portanto

$$- \left| i_{R_1} \right| = - \frac{\partial E_{R_1}}{\partial t}$$

integrando, vem

$$\int_0^t \left| i_{R_1} \right| \, dt = \int_0^t dE_{R_1} = \left[E_1(R_1, t) - E_1(R_1, 0 \right]$$

$$Q_{R_1} = E_1(R_1, t) - E_1(R_1 0)$$

Q_{R_1} é a carga que escoa por unidade de área da placa interna, por provir da integração de uma densidade de corrente.

Da equação (VI - 4), podemos achar

$$Q_{R_1} = \frac{\rho}{3R_1^2} (R_1^3 - r_o^3) - \frac{\rho_o}{3R_1^2} (R_1^3 - r_o^3), \text{ e finalmente}$$

$$Q_{R_1} = \frac{(r_o^3 - R_1^3)}{3R_1^2} (\rho_o - \rho)$$

ou, em função do tempo

$$Q_{R_1} = \frac{(r_o^3 - R_1^3)}{3R_1^2} \left[\rho_o - \frac{\sigma \rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma + \rho_o (1 - e^{-\sigma t})} \right] , \qquad \text{(VI-8)}$$

Consideremos novamente a corrente de condução

$$i_{R_1} = (\rho + \sigma) \; E_{R_1}$$

Fazendo $r = R_1$ na equação (VI-4) e substituindo na relação acima, vem

$$i_{R_1} = \frac{(R_1^3 - r_o^3)}{3R_1^2} \rho \; (\rho + \sigma), \quad \text{ou}$$

$$i_{R_1} = - \frac{(r_o^3 - R_1^3)}{3R_1^2} \rho (\rho + \sigma)$$

Para que a placa R_1 receba cargas é necessário apenas que $i_{R_1} < 0$, o que ocorre para $r_o > R_1$, isto é, que o ponto de campo nulo esteja situado em qualquer posição além da armadura interna.

DESCARGA NAS PLACAS NAS SITUAÇÕES EM QUE

$$s_o = r_o, \; s_o < r_o \quad \text{e} \quad s_o > r_o$$

(a) $s_o = r_o$

Neste caso o escoamento se verifica sob a condição $s_o = r_o$, isto é, com o ponto de campo nulo coincidindo com a frente inicial de nuvem.

Quando $s_o = r_o$, verifica-se da equação (VI-7)

$$s = \left[s_o^3 + \frac{\rho_o}{\sigma} (s_o^3 - r_o^3)(1 - e^{-\sigma t}) \right]^{1/3} ,$$

que $s(t) = s_o$ = constante no tempo e portanto a frente da nuvem não se desloca e consequentemente o volume ocupado pela carga espacial será sempre o mesmo e a carga, neste volume constante, só se reduzirá a zero quando a densidade se reduzir a zero o que só se verifica para $t = \infty$, o que se pode concluir facilmente da observação da equação (VI-1').

Da equação (VI-8), equação de Q_{R_1}, para $s_o = r_o$ como o escoamento total pela placa interna se verifica em $t = \infty$, chega-se a

$$Q_{R_1} = \frac{\rho_o (s_o^3 - R_1^3)}{3R_1^2}$$

a carga escoada por toda a área da placa será

$$Q = 4\pi R_1^2 \, Q_{R_1} , \quad e,$$

$$Q = \frac{4\pi}{3} (s_o^3 - R_1^3) \, \rho_o = q_o$$

E toda a carga espacial escoa pela placa interna.

(b) $s_o < r_o$

Neste caso a frente da nuvem caminha para a placa R_1, o que se vê de

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho_o}{3r^2} (s_o^3 - r_o^3) e^{-\sigma t} < 0$$

Após algumas modificações em Q_{R_1} vem

$$Q_{R_1} = \frac{(r_o^3 - R_1^3)}{3R_1^2} \left[\frac{\rho_o(\sigma + \rho_o)(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma + \rho_o(1 - e^{-\sigma t})} \right]$$

Agora será determinada a carga que a placa interna recebe enquanto a frente da nuvem se desloca até $s = R_1$.

Seja t_{R_1} o tempo em que isto se verifica.

Da expressão de s se tira

$$1 - e^{-\sigma t_{R_1}} = \frac{\sigma}{\rho_o} \frac{R_1^3 - s_o^3}{s_o^3 - r_o^3}$$

que substituída em Q_{R_1} e após algumas reduções conduz a:

$$Q_{R_1} = \frac{(\sigma + \rho_o)(s_o^3 - R_1^3)}{3R_1^2}$$

Para toda a placa, por razões já expostas, resulta,

$$Q = \frac{4\pi}{3} (s_o^3 - R_1^3)(\sigma + \rho_o), \text{ ou, desdobrando,}$$

$$Q = \frac{4\pi}{3} (s_o^3 - R_1^3)\, \rho_o + \frac{4\pi}{3} (s_o^3 - R_1^3)\, \sigma$$

Constata-se então que, no caso $s_o < r_o$, descarrega pela placa R_1 mais carga que a carga espacial inicial, fenômeno este explicado de forma análoga àquele observado no condensador plano, na secção II, e que consistia em considerar que o excesso de cargas de mesmo sinal que a car

ga espacial provinha da evasão das cargas de sinal contrário ao da carga espacial, do volume desta $(R_1, s(t))$, e como estas cargas oriundas da condutividade são em quantidades iguais havia um "gancho" de cargas do mesmo sinal da carga espacial no volume desta $(R_1, s(t))$, que se contraía e daí a carga total escoada ser maior que a carga espacial.

(c) $s_o > r_o$

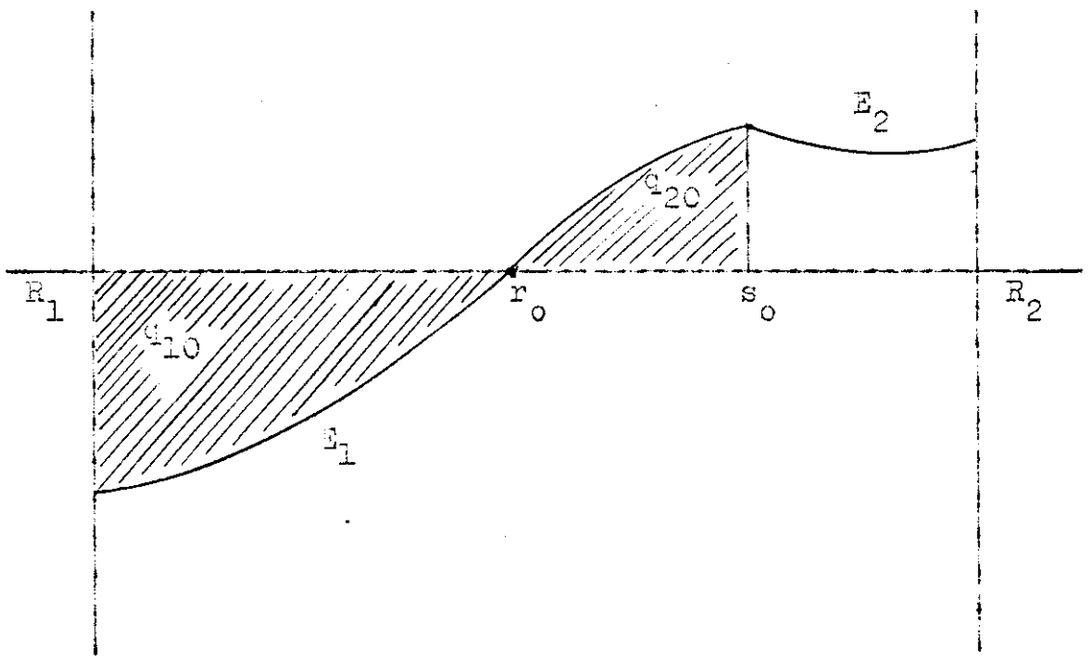

Figura 25

Nestas condições a frente da carga espacial se desloca para a placa R_2 o que se constata de

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho_o}{3r^2} (s_o^3 - r_o^3) e^{-\sigma t} > 0$$

A descarga se verificará então pelas duas placas, pois o campo na placa R_1 é negativo, $E_1(R_1 t) < 0$.

Sejam q_{10} e q_{20} as cargas situadas em (R_1, r_o) e (r_o, s_o), respectivamente. Então $q_{10} + q_{20} = q_o =$ carga espacial inicial.

Do item (a), caso em que $s_o = r_o$, sabe-se que a descarga, na placa R_1, da carga localizada entre o ponto de campo nulo, r_o, e esta placa, é igual à carga situada nesta região, (r_o, R_1), e como, na situação atual, q_{10} é a carga nesta região, a descarga em R_1 é igual a q_{10}.

Vamos determinar a descarga da carga q_{20} na placa R_2.

Suponhamos que uma carga espacial fictícia ocupa a região (r_o, R_2) e seja Q_{20} esta carga, em $t = 0$.

Seja Q_{10} a carga espacial, também fictícia, inicialmente em (s_o, R_2).

Portanto, $$Q_{20} - Q_{10} = q_{20}$$

Como a fronteira da carga Q_{10} marcha para a placa R_2 tem-se que a sua descarga obedece a um processo semelhante ao do caso $s_o < r_o$; item b, e portanto pode-se escrever para a sua descarga, na placa R_2, Q_2,

$$Q_2 = Q_{10} + \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - s_o^3)\sigma .$$

O escoamento de Q_{20} situado na região (r_o, R_2) obedece a um processo análogo ao analisado no item (a), caso $s_o = r_o$, e a sua descarga na placa R_2, é então Q_{20}.

Desta descarga retirando-se a descarga de Q_{10}, que é fictícia, obtém-se a descarga da carga na região (r_o, s_o), q_{20}, que é real, daí se q_2 é a descarga de q_{20} na placa R_2, vem que,

$$q_2 = Q_{20} - Q_2$$

$$q_2 = Q_{20} - Q_{10} - \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - s_o^3)\,\sigma, \quad \text{e}$$

$$q_2 = q_{20} - \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - s_o^3)\,\sigma$$

Somando-se q_2 com a descarga na placa R_1, q_{10}, vem para a descarga total, nas duas placas,

$$q = q_{10} + q_{20} - \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - s_o^3)\,\sigma, \quad \text{ou}$$

$$q = q_o - \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - s_o^3)\,\sigma$$

Como $q_o = \frac{4\pi}{3}(s_o^3 - R_1^3)\,\rho_o$ = carga espacial inicial, obtém-se finalmente,

$$q = \frac{4\pi}{3}(s_o^3 - R_1^3)\rho_o - \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - s_o^3)\,\sigma$$

Este resultado, obtido por artifício coincide exatamente com o obtido através de cálculos, ou, mais precisamente do cálculo da carga que escoa pela placa R_2.

$$Q = \int_{t_{R_2}}^{t} \rho E_1(R_2, t)\,dt$$

t_{R_2} = tempo de trânsito

Do exame de

$$q = \frac{4\pi}{3}(s_o^3 - R_1^3)\,\rho_o - \frac{4\pi}{3}\,\sigma\,(R_2^3 - s_o^3),$$ verifica-se

que, neste caso, $s_o > r_o$, a carga total é menor que a carga espacial inicial, devido à condutividade que neutraliza parte da carga espacial.

Esta ocorrência tem explicação semelhante ao caso correspondente do condensador plano com condutividade, secção II, através do conceito de mobilidade das cargas oriundas da condutividade e da evasão ou penetração destas cargas no volume da carga espacial

- TEMPO DE DESCARGA -

Para $s_o = r_o$ a descarga se completa em $t = \infty$, pela placa R_1.

Quando $s_o < r_o$, diversamente do caso em que $\sigma = 0$ no qual o escoamento verifica-se sempre em tempo finito, podem ocorrer duas situações: escoamento em tempo infinito se $s_{máx} > R_1$ e deslocamento em tempo finito se $s_{máx} < R_1$.

O escoamento aqui também se verifica só pela placa R_1.

Quando $s_o > r_o$, distintamente da situação em que $\sigma = o$, quando a frente da nuvem sempre alcança a placa R_2, podem ocorrer dois casos: a frente da nuvem alcança a placa R_2 se $s_{máx} > R_2$ e não a atinge se $s_{máx} < R_2$.

Na condição $s_{máx} < R_2$ o escoamento se completa em $t=\infty$ sem que a frente da nuvem alcança a placa R_2. Neste caso a transferência de cargas se realiza pelas duas placas.

Quando $s_{máx} > R_2$ a frente da nuvem alcança a placa R_2 em tempo finito, mas a descarga só se completa em tempo infinito pois as cargas no dielétrico tendo por expressão: $q(t) = \rho(t) \cdot V$, como $V = Cte$, só virão a se anular para $\rho(t) = 0$, o que só se verifica para $t=\infty$.

- RESUMO DOS RESULTADOS -

(1) A distribuição em caixa ainda é solução para qualquer tempo.

(2) A densidade de carga independendo da geometria do condensador é a mesma do condensador plano na condição $\sigma \neq 0$.

(3) O ponto de campo nulo é independente do tempo e tem a mesma expressão que a do caso em que $\sigma = 0$.

(4) O campo na região sem cargas varia com r segundo $\frac{1}{r^2}$ e ainda decai exponencialmente com o tempo.

(5) A velocidade da frente da nuvem decai exponencialmente com o tempo.

(6) Nos casos $s_o = r_o$ e $s_o < r_o$ o escoamento se verifica pela placa R_1 e quando $s_o > r_o$ pelas duas placas.

(7) A descarga se completa em $t = \infty$ em todas as situações, com apenas a exceção do caso em que sendo $s_o < r_o$ tem-se $s_{máx} < R_1$.

(8) Apenas no caso em que $s_o = r_o$, a carga total escoada iguala à carga espacial inicial pois nas outras condições ora é maior ora menor de acordo com as suas combinações com as cargas oriundas de condutividade.

(9) O escoamento oriundo só da carga espacial é sempre inferior à carga espacial inicial.

(10) Quando $0 < r_o < R_1$ os campos são positivos. Quando $R_1 < r_o$ os campos podem ser positivos e negativos se $r_1 \leq r_o \leq s_o$, e só negativos se $r_o > s_o$.
Quando $r_o < 0$, os campos são só positivos.

- SECÇÃO VII -

Demonstração de que o modelo da caixa é solução exata para o condensador em simetria esférica

Esta demonstração faz-se por meio da confrontação entre as expressões de $\frac{dq}{dt}$ obtidas utilizando-se dois processos diversos.

1º Processo: Desenvolvimento pela equação da continuidade que é uma expressão geral, independente de modelos.

Pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i} = 0,$$

vem

$$\frac{d\rho}{dt} = - \nabla \cdot \vec{i}, \quad \text{ou}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 i)$$

Integrando, vem

$$\frac{d}{dt} \int_{R_1}^{R_2} \rho dv = \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 i) dv$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \rho dv = q = \text{carga espacial contida no dielétrico.}$$

$$\frac{dq}{dt} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 i) \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\frac{dq}{dt} = 4\pi \int_{R_2}^{R_1} d(r^2 i), \text{ portanto } \frac{dq}{dt} = 4\pi \left[r^2 i\right]_{R_2}^{R_1}, \qquad \text{e}$$

$$\frac{dq}{dt} = 4\pi \left[R_1^2 i(r_1,t) - R_2^2 i(R_2,t)\right].$$

As correntes de condução nos pontos R_1 e R_2 são:

$$i(R_1,t) = \rho(R_1,t)\ E_1(R_1,t) + \sigma\ E_1(R_1,t),$$

$$i(R_2,t) = \rho(R_2,t)\ E_2(R_2,t) + \sigma\ E_2(R_2,t),$$

Como $\rho(R_2,t) = 0$, vem que

$$i(R_2,t) = \sigma\ E_2(R_2,t)$$

E portanto após substituição das expressões das correntes de condução, tem-se para $\frac{dq}{dt}$

$$\frac{dq}{dt} = 4\pi R_1^2(\rho + \sigma)\ E_1(R_1,t) - 4\pi R_2^2 \sigma\ E_2(R_2,t), \qquad \text{(A)}$$

Esta expressão obtida partindo-se da equação da continuidade será denominada expressão (A) para que seja facilitada a sua localização quando se fizer necessário o seu confronto, com a expressão obtida pelo 2º processo.

$\frac{dq}{dt}$ será determinada pelo modelo da caixa (caixa esférica, neste caso).

$$q(t) = \rho(t)\ .\ V(t).$$

Esta é a expressão da carga contida no dielétrico em

um tempo qualquer, pelo modelo da caixa, isto é, $\rho(r,t) = \rho(t)$.

Como a distribuição é esférica tem-se para V,

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}\,(s^3(t) - R_1^3)$$

Derivando a expressão de q(t), tem-se

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,V + \rho\,\frac{dV}{dt}$$

$\frac{d\rho}{dt}$ obtém-se da equação da continuidade, $\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\rho+\sigma)$.

E como $\frac{dV}{dt} = 4\pi s^2\,\frac{ds}{dt}$, vem então para $\frac{dq}{dt}$:

$$\frac{dq}{dt} = -\rho(\rho+\sigma)\,V + 4\pi\rho s^2\,\frac{ds}{dt}\,.$$

Mas $\frac{ds}{dt} = E_2(s)$, e daí que $\frac{dq}{dt} = -\rho(\rho+\sigma)\,V + 4\pi qsE_2(s)$ (B)

(B) será então a denominação desta expressão obtida pelo modelo da caixa.

Vamos provar que (A) e (B) se equivalem e para tanto será demonstrado que (B) se reduz a (A).

Sejam as expressões de E_1 e E_2,

$$E_1 = \frac{\rho r}{3} + \frac{C(t)}{r^2}\,,$$

$$E_2 = \frac{\rho s^3}{3r^2} + \frac{C(t)}{r^2}$$

Para $r = R_1$, tem-se para E_1,

$$E_1(R_1,t) = \frac{\rho R_1}{3} + \frac{C(t)}{R_1^2}\,, \text{ e}$$

$$\frac{C(t)}{r^2} = \frac{R_1^2\ E_1(R_1,t)}{r^2} - \frac{\rho R_1^3}{3r^2} \quad ,$$

donde virá para E_2:

$$E_2 = \frac{\rho s^3}{3r^2} + \frac{R_1^2\ E_1(R_1,t)}{r^2} - \frac{\rho R_1^3}{3r^2}$$

Para $r = s$, vem

$$s^2\ E_2(s) = \frac{\rho s^3}{3} - \frac{\rho R_1^3}{3} + R_1^2\ E_1(R_1,t)$$

$$s^2\ E_2(s) = \frac{\rho}{3}\ (s^3 - R_1^3) + R_1^2\ E_1\ (R_1,t)$$

Como

$$\frac{\rho}{3}\ (s^3 - R_1^3) = \frac{q}{4\pi}\ , \text{ vem}$$

$$s^2\ E_2(s) = \frac{q}{4\pi} + R_1^2\ E_1(R_1,t)$$

que substituída em dq/dt, dá:

$$\frac{dq}{dt} = -\ \rho(\rho+\sigma)\ V + 4\pi\rho\ \left[\frac{q}{4\pi} + R_1^2 E_1(R_1,t)\right]$$

$$\frac{dq}{dt} = -\ \rho q - \sigma q + \rho q + 4\pi\rho R_1^2 E_1(R_1,t) \quad \text{e daí,}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\ \sigma q + 4\pi\rho\ R_1^2\ E_1(R_1,t)$$

Pelo teorema de Gauss:

$$q = \int_s \vec{E},\ d\vec{s} = \int_V V,\ \vec{E}\ dV \quad \therefore$$

$$q = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\ \frac{d}{dr}\ (r^2 E)\ .\ 4\pi\ r^2 dr, \qquad \text{ou}$$

$$q = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} d(r^2 E), \quad \text{donde}$$

$$q = 4\pi \left[R_2^2 \, E_2(R_2,t) - R_1^2 \, E_1(R_1,t) \right]$$

cuja substituição em $\frac{dq}{dt}$ dá como resultado,

$$\frac{dq}{dt} = -4\pi \sigma \, R_2^2 \, E_2(R_2,t) + 4\pi \, \sigma R_1^2 \, E_1(R_1,t) +$$

$$+ 4\pi \, \rho \, R_1^2 \, E_1(R_1,t), \quad \text{ou}$$

$$\frac{dq}{dt} = 4\pi (\rho + \sigma) \, R_1^2 \, E_1(R_1,t) - 4\pi \, \sigma \, R_2^2 \, E_2(R_2,t)$$

Mas esta é justamente a expressão (A) e obtida aqui a partir da expressão (B). (A) e (B) portanto se equivalem o que significa que o modelo de caixa é exato, pois (A) provém de uma expressão independente de modelos e é tanto mais exato quanto esta equivalência foi obtida sem aproximações.

- SECÇÃO VIII -

SIMETRIA DO CONDENSADOR CILÍNDRICO
CONDIÇÃO DE CIRCUITO ABERTO COM $V_o \neq 0$ e $\sigma \neq 0$

Em (2), região livre de cargas, tem-se $\rho(r,t) = 0$, e pela condição de circuito aberto, a densidade de corrente nesta região, deve ser

$$J_2 = \sigma E_2(r,t) + \frac{\partial E_2(r,t)}{\partial t} = 0$$

donde por separação de variáveis, vem

$$\frac{dE_2}{E_2} = -\sigma dt,$$

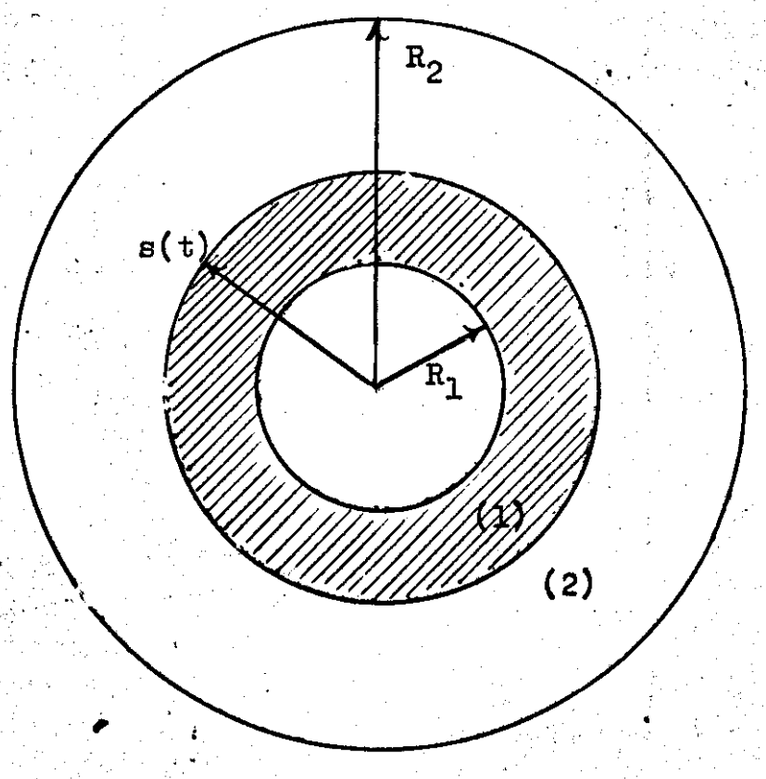

Figura 26

integrando, obtém-se

$$E_2 = E_{20}\, e^{-\sigma t}$$

Ainda nesta região, tem-se para a equação de Poisson

$$\nabla . \vec{E}_2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_2) = 0, \qquad e$$

$$rE_2 = \text{constante em } r.$$

Na camada ocupada pela carga espacial,

$$\rho(r,t) \neq 0$$

e da equação de Poisson para esta região,

$$\nabla . \vec{E}_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_1) = \rho, \qquad \text{vem}$$

$$r\ E_1 = \frac{\rho r^2}{2} + C$$

Devido à continuidade dos campos na fronteira, $r = s$, entre as regiões (1) e (2), tem-se

$$sE_1(s) = sE_2(s), \qquad e$$

$$sE_1(s) = \frac{\rho s^2}{2} + C = sE_2(s) = rE_2$$

em virtude de ser rE_2 independente de r.

Resultando portanto para E_1 e E_2:

$$E_1 = \frac{\rho r}{2} + \frac{C}{r}$$

$$E_2 = \frac{\rho s^2}{2r} + \frac{C}{r}$$

Para $t = 0$, tem-se para E_{20}

$$E_{20} = \frac{\rho_o s_o^2}{2r} + \frac{C(0)}{r},$$

portanto

$$E_2 = \frac{\rho_o s_o^2}{2r} + \frac{C(0)}{r} \quad e^{-\sigma t}$$

Da condição de contorno

$$\int_{R_1}^{s_o} E_1(r,0)\,dr + \int_{s_o}^{R_2} E_2(r,0)\,dr = 1,$$

obtém-se C(0).

Com a substituição das expressões dos campos, vem

$$\int_{R_1}^{s_o} \left(\frac{\rho_o r}{2} + \frac{C(0)}{r}\right) dr + \int_{s_o}^{R_2} \left(\frac{\rho_o s_o^2}{2r} + \frac{C(0)}{r}\right) dr = 1,$$

donde

$$C(0) = R_1 \left[1 - \frac{\rho_o s_o^2}{4} + \frac{\rho_o R_1^2}{4} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} L \frac{R_2}{S_o}\right],$$

vindo para E_2,

$$E_2 = \frac{1}{r}\left[\frac{\rho_o s_o^2}{2} + R_1\left(1 - \frac{\rho_o s_o^2}{4} + \frac{\rho_o R_1^2}{4} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} L \frac{R_2}{s_o}\right)\right] \cdot e^{-\sigma t}, \quad \text{(VIII-1)}$$

Determinação de $E_1(r,t)$

Na obtenção de C(t) parte-se de

$$J_1 = \rho E_1 + \sigma E_1 + \frac{\partial E_1}{\partial t} = 0,$$

utilizando-se ainda

$$E_1 = \frac{\rho r}{2} + \frac{C(t)}{r}$$

e a equação da continuidade

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\rho + \sigma) = 0$$

Chega-se então da mesma forma que no condensador plano, secção II, a

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o} C(0) \qquad \therefore$$

$$C(t) = \frac{\rho R_1}{\rho_o}\left[1 - \frac{\rho_o s_o^2}{4} + \frac{\rho_o R_1^2}{4} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} L \frac{R_2}{s_o}\right]$$

e daí obtém-se para C(t)

$$E_1 = \frac{\rho r}{2} + \frac{\rho R_1}{\rho_o r}\left[1 - \frac{\rho_o s_o^2}{4} + \frac{\rho_o R_1^2}{4} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} L \frac{R_2}{s_o}\right], \qquad \text{(VIII-2)}$$

- RAIO DE CAMPO NULO -

Igualando-se a zero a equação (VIII-2), vem para o raio de campo nulo, r_o,

$$r_o = \left[-\frac{2R_1}{\rho_o}\left(1 - \frac{\rho_o s_o^2}{4} + \frac{\rho_o R_1^2}{4} - \frac{\rho_o s_o^2}{2} L \frac{R_2}{s_2}\right)\right]^{1/2}, \qquad \text{(VIII-3)}$$

A expressão de r_o confirma mais uma vez que sob a condição de circuito aberto r_o independe do tempo qualquer que seja a geometria utilizada.

Campos em função do raio de campo nulo

E_1 em função de r_o.

Seja $\qquad E_1 = \frac{\rho r}{2} + \frac{C(t)}{r}$:

Para $r = r_o$, vem

$$\frac{\rho r_o}{2} + \frac{C(t)}{r_o} = 0,$$

donde se tira

$$C(t) = -\frac{\rho r_o^2}{2}$$

Vindo portanto para E_1, $E_1 = \frac{\rho}{2r}(r^2 - r_o^2)$, (VIII-4)

E_2 como função de r_o

De $r_o^2 = \frac{2}{\rho} C(t)$,

e $C(t) = \frac{\rho}{\rho_o} C(0)$, vem

$$r_o^2 = -2\frac{C(0)}{\rho_o},$$

e daí

$$C(0) = -\frac{\rho_o r_o^2}{2},$$ donde resulta para E_2,

$$E_2 = \frac{\rho_o}{2r}(s_o^2 - r_o^2)e^{-\sigma t}, \qquad \text{(VIII -5)}$$

Sinais dos campos, $\rho > 0$

(a) Para $0 < r_o < R_1$, da equação (VIII-4) conclui-se que $E_1(r,t) > 0$, pois $E_1(r,t)$ tem validade só no intervalo (R_1, s), sendo $s \geq R_1$.

Como E_2 é contínuo com $E_1(r,t)$ e não se anula no intervalo (R_1, R_2), ou melhor, (s, R_2) resulta que $E_2 > 0$ e os campos são positivos.

(b) Para $R_1 < r_o < s_o$, entre R_1 e r_o, $E_1 < 0$, e entre r_o e s, $E_1 > 0$ e por consequência como além de s tem-se E_2, $E_2 > 0$.

Os campos são negativos até r_o e positivos de r_o até R_2.

(c) Para $r_o > s_o$

Como a frente de nuvem neste caso desloca-se para a placa interna, placa R_1, tem-se que $s < s_o$ e $r_o > s$. Para este caso $E_1(r,t) < 0$ pois o intervalo de existência de E_1 é (R_1,s) e $r_o > s$. Por razões já expostas, também $E_2 < 0$. Os campos são negativos.

(d) Nos casos (a), (b) e (c) r_o foi considerado real e positivo, mas como r_o é igual a uma raiz quadrada pode-se considerar o caso em que seja imaginário puro. Para esta condição vem $r_o = ib$, que substituído na equação (VIII-4), dá para $E_1(r,t)$:

$$E_1 = \frac{\rho}{2r}(r^2 + b^2) > 0, \text{ e para } E_2,$$

$$E_2 > 0.$$

Os campos são então positivos para r_o imaginário.

Nos itens (a) e (d) a carga destaca da placa R_1 e nos itens (b) e (c) a carga não destaca pois os campos na placa R_1 são negativos. Apenas no item (b) ocorre a existência concreta do ponto de campo nulo, nos outros

itens (a), (c) e (d) ele ocorre matematicamente mas não fisicamente.

- CÁLCULO DE s(t) -

Seja a relação de definição da mobilidade, em unidades reduzidas,

$$\frac{ds}{dt} = E_2(s)$$

Tomando-se na equação (VIII-5), r = s, obtém-se $E_2(s)$, resultando para a relação acima a expressão

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho_o}{2s}\,(s_o^2 - r_o^2)\;e^{-\sigma t}$$

Em igualdade de condições a velocidade da frente da nuvem decai mais rapidamente nos casos curvilíneos,

$\frac{1}{s^2}\,e^{-\sigma t}$ (esférico) e $\frac{1}{s}\,e^{-\sigma t}$ (cilíndrico), que nos planos, $e^{-\sigma t}$

Integrando $\frac{ds}{dt}$ vem

$$\int_{s_o}^{s} s\,ds = \frac{\rho_o}{2}\,(s_o^2 - r_o^2)\int_o^t e^{-\sigma t}\,dt$$

e finalmente

$$s = \left[s_o^2 + \frac{\rho_o}{\sigma}\,(s_o^2 - r_o^2)(1 - e^{-\sigma t})\right]^{1/2} \qquad \text{(VIII-6)}$$

- CÁLCULO DA CARGA QUE SE TRANSFERE PARA A PLACA R. -

Da expressão da corrente total em circuito aberto,

$$i_c + \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

se tira

$$i_c = - \frac{\partial E}{\partial t}$$

Para que ocorra corrente para a placa R_1 deve-se ter

$$i_c = - |i_c| < 0, \quad \text{e daí}$$

$$|i| = \frac{\partial E}{\partial t}$$

cuja integração dá, considerando-se a corrente na placa interna, isto é, $r = R_1$,

$$Q_{R_1} = \int_0^t |i_c| dt = E_1(R_1, t) - E_1(R_1, 0)$$

Com a substituição da equação (VIII-4), do campo $E_1(r,t)$ para $r = R_1$ e, $t = 0, t = t$, vem

$$Q_{R_1} = \frac{1}{2R_1} (R_1^2 - r_o^2)(\rho - \rho_o) \qquad \text{(VIII-7)}$$

Esta é então a expressão da carga que se transfere para a placa R_1 em um tempo qualquer t.

- DESCARGA NAS PLACAS -

(a) $s_o > r_o$

De $s^2 = s_o^2 + \frac{\rho_o}{\sigma} (s_o^2 - r_o^2)(1 - e^{-\sigma t})$,

verifica-se que, como

$\frac{\rho_o}{\sigma} > 0$, $1 - e^{-\sigma t} > 0$, para $t > 0$, quando se tem $s_o > r_o$, vem

$$s(t) > s_o,$$

concluindo-se portanto que, neste caso, a frente da nuvem caminha para a placa externa.

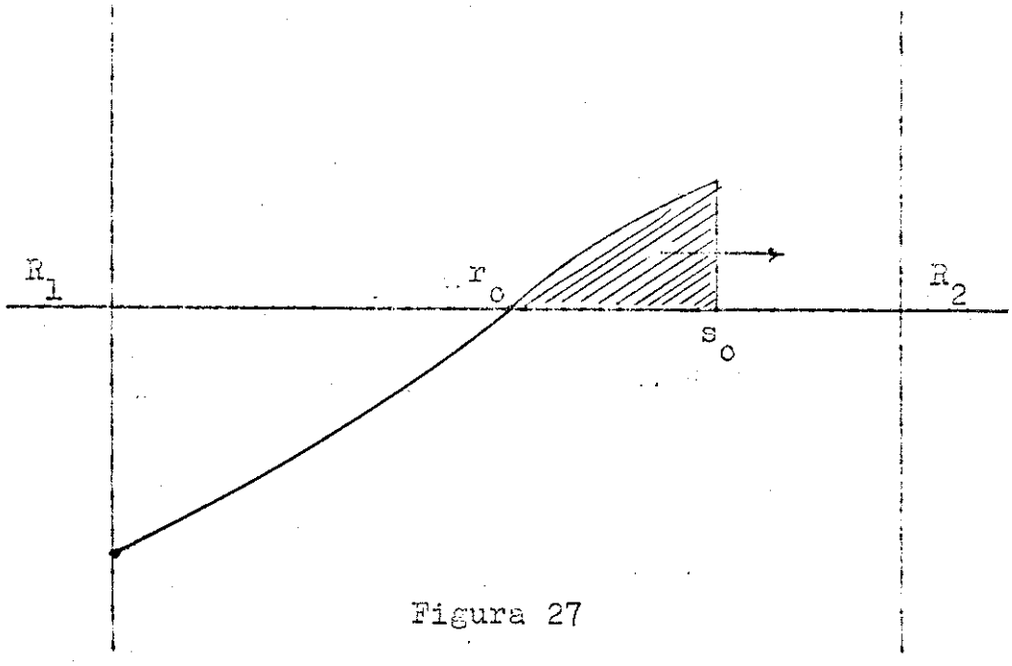

Figura 27

(1) Cálculo da descarga na placa R_2

Agora será determinada a descarga pela placa R_2, da carga inicialmente situada entre r_o e s_o e cuja frente dirige-se para R_2.

Seja t_{R_2} o tempo que a frente da nuvem leva para alcançar a placa R_2.

O campo em R_2 após t_{R_2}, é

$$E_1(R_2,t) = \frac{\rho}{2R_2}\,(R_2^2 - r_o^2),$$

pois a distribuição dos campos no dielétrico para $t \geq t_{R_2}$ é a mesma de $E_1(r,t)$ o que pode ser provado calculando-se os campos dentro das novas condições de contorno.

A descarga na armadura R_2 entre t_{R_2} e t, é,

$$q = \int_{t_{R_2}}^{t} (\rho + \sigma)\ E_1(R_2,t)dt$$

Com a substituição da expressão de $E_1(R_2,t)$, vem

$$q = \frac{R_2^2 - r_o^2}{2R_2} \left[\int_{t_{R_2}}^{t} \rho^2 dt + \sigma \int_{t_{R_2}}^{t} \rho dt \right]$$

Da equação da continuidade vem

$$\rho^2 dt = - \sigma\rho\, dt - d\rho$$

cuja substituição na expressão de q e consequente integração resulta em,

$$q = \frac{R_2^2 - r_o^2}{2R_2} \left[\rho(t_{R_2}) - \rho(t) \right], t \geq t_{R_2}$$

Para $t \geq t_{R_2}$ o volume ocupado pela carga espacial, a partir de r_o, é sempre o mesmo, $V(t) = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - r_o^3) =$ = Cte, daí que de

$$Q(t) = \rho(t)\ .\ V(t)$$

carga entre r_o e R_2, verificar-se que $Q(t) = 0$, só se $\rho(t) = 0$ o que ocorre para $t = \infty$. Então a des-

carga pela placa R_2 se efetua em $t=\infty$, e a sua expressão é então,

$$q = \frac{R_2^2 - r_o^2}{2R_2}\,\rho(t_{R_2}), \quad t=\infty$$

Na equação (VIII-6) expressão de $s(t)$, façamos $s = R_2$ e $t = t_{R_2}$, obtendo-se

$$1 - e^{-\sigma t_{R_2}} = \frac{\sigma}{\rho_o}\,\frac{R_2^2 - s_o^2}{s_o^2 - r_o^2} \quad \text{e}$$

$$\sigma\rho_o e^{-t_{R_2}} = \sigma\rho_o - \sigma^2\,\frac{R_2^2 - s_o^2}{s_o^2 - r_o^2}$$

cuja substituição na expressão da densidade, equação (II-2), dá:

$$\rho(t_{R_2}) = \frac{\rho_o(s_o^2 - r_o^2) - \sigma\,(R_2^2 - s_o^2)}{R_2^2 - r_o^2}$$

resultando portanto para a descarga pela placa R_2,

$$q = \frac{1}{2R_2}\left[\rho_o(s_o^2 - r_o^2) - \sigma\,(R_2^2 - s_o^2)\right]$$

Como esta é descarga por unidade de área, pois vem da integração de uma densidade de corrente tem-se que, para a descarga por toda a área da armadura externa, de altura h, a expressão acima deve ser multiplicada por $2\pi R_2 h$. Obtém-se então para a descarga por toda a área da armadura R_2,

$$Q_2 = \pi (s_o^2 - r_o^2) h \rho_o - \pi (R_2^2 - s_o^2) h \sigma \qquad (1)$$

-Teorema alfa-

Este resultado pode ser generalizado sob a forma de um enunciado geral: "A descarga, de uma carga espacial localizada entre um ponto de campo nulo, r_o, e a frente de nuvem original, s_o, na placa R, para onde a frente s(t) se dirige é igual à:

$$Q = q'_o - V(s_o, R) \cdot \sigma$$

onde q'_o = carga inicial em (r_o, s_o),

$V(s_o, R)$ = volume entre s_o e a placa R, e, σ = condutividade intrínseca".

Vamos chamar este teorema de teorema α (alfa).

(2) Cálculo da descarga na armadura R_1

A carga que vai descarregar na placa R_1 é aquela situada na região (R_1, r_o) e a esta podemos aplicar o teorema α desde que consideremos a superfície da carga espacial junto à placa R_1 como uma frente de nuvem, que no tempo t=0, representaremos por $s'_o = R_1$.

Aplicando agora o teorema α, teremos que a descarga pela placa R_1 da carga situada em $(s'_o = R_1, r_o)$ é

$$Q_1 = q_{10} - V(s'_o = R_1, R_1) \cdot \sigma$$

sendo q_{10} a carga espacial original em (R_1, r_o).

Como $V(s'_o = R_1, R_1) = 0$, vem que

$$Q_1 = q_{10} = \pi(r_o^2 - R_1^2)h\rho_o, \qquad (2)$$

é a carga que descarrega na placa R_1, e é toda a carga espacial da região (R_1, r_o). Para a descarga total nas duas placas vem, somando as expressões(1) e (2),

$$Q = Q_1 + Q_2 = \pi(s_o^2 - R_1^2)h\rho_o - \pi(R_2^2 - s_o^2)h\sigma$$

A descarga total é então menor que a carga espacial inicial.

A explicação deste resultado é a mesma que foi utilizada para explicar resultado semelhante no condensador plano em condições comparáveis, isto é, $s_o > r_o$, $\sigma \neq 0$.

(b) $s_o = r_o$

Neste caso, pela equação (VIII-6), expressão de $s(t)$, verifica-se que: $s(t) = s_o =$ constante.

E portanto a frente da nuvem não se desloca e o volume $V(t)$ ocupado pela carga espacial será sempre o mesmo, em qualquer instante, e portanto se

$$q(t) = \rho(t) \cdot V(0)$$

representa a carga em cada instante no dielétrico, verifica-se que sendo $V(0) =$ Cte, $q(t)$ só se anulará quando $\rho(t)$ o fizer, e como

$$\rho(t) = \frac{\sigma \rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma + \rho_o(1 - e^{-\sigma t})}$$

só se anula para $t=\infty$, então se conclui que, para $s_o = r_o$, a carga escoa pela placa R_1 em $t=\infty$.

Como $s(t) = s_o = r_o$ a carga espacial se encontra entre o ponto de campo nulo, r_o, e a placa R_1, e então, a este caso, podemos aplicar o teorema α desde que, como no item (2) do caso $s_o > r_o$, consideremos a frente de nuvem desta distribuição, não inicialmente em $s_o = r_o =$ Cte e sim na placa R_1, chamando-a $s'_o = R_1$, e então tem-se que por aplicação do teorema α, a descarga na placa R_1 deve ser:

$$Q = q_o - V(s'_o = R_1, R_1) \cdot \sigma,$$

como

$$V(s'_o = R_1, R_1) = 0, \quad \text{vem}$$

$$Q = q_o = \frac{4\pi}{3}(r_o^3 - R_1^3),$$

isto é, toda a carga espacial inicial descarrega pela placa R_1.

Este resultado coincide com o obtido através de cálculo.

(c) $s_o < r_o$

Da expressão de s, equação (VIII-6)

$$s^2 = s_o^2 + \frac{\rho_o}{\sigma}(s_o^2 - r_o^2)(1 - e^{-\sigma t}),$$

verifica-se que, como

$\frac{\rho_o}{\sigma} > 0$, $1 - e^{-\sigma t} > 0$ para $t > 0$, quando $s_o < r_o$, tem-se

$$s(t) < s_o,$$

concluindo-se portanto que, neste caso, a frente da nuvem caminha para a placa interna.

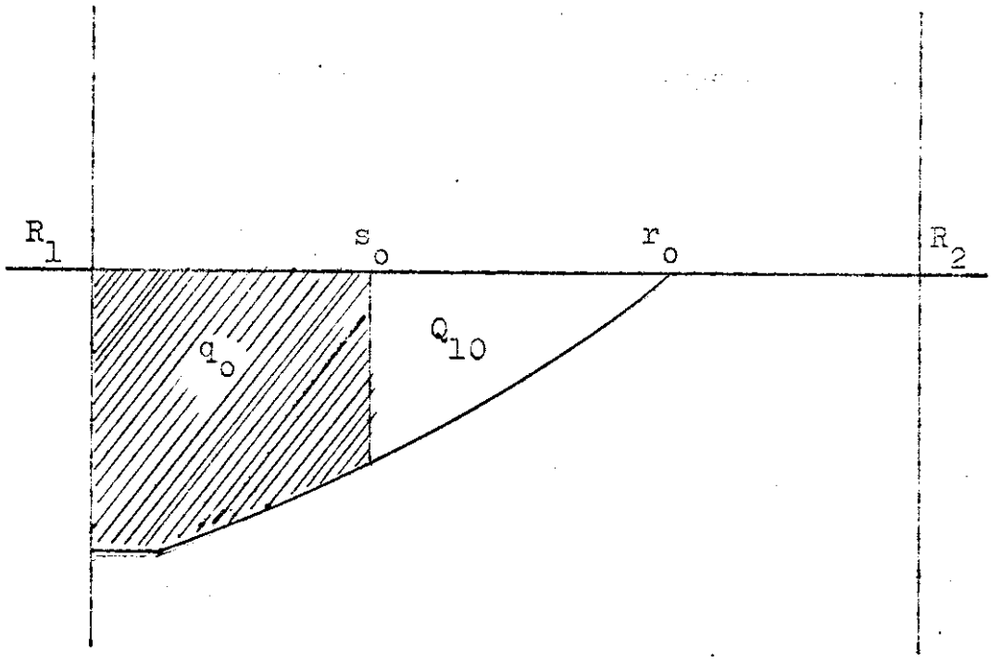

Figura 28

Cálculo da descarga pela placa R_1

Nesta situação vamos considerar uma carga espacial inicial fictícia, ocupando o volume (r_o, R_1), Q_{20}, e uma outra também fictícia, ocupando o volume (r_o, s_o), Q_{10}.

Portanto se q_o é a carga espacial inicial em (R_1, s_o), tem-se

$$q_o = Q_{20} - Q_{10}$$

Como já se viu pela aplicação do teorema α ao item (2) do caso em que $s_o > r_o$ e ao caso $s_o = r_o$, a descarga de uma carga que vai do ponto de campo nulo até uma placa, por esta placa, é igual a esta carga, mesmo com $\sigma \neq 0$.

Portanto como Q_{20} preenche estas características, ocupa o volume (r_o, R_1), a sua descarga na placa R_1, é Q_{20}.

Como a carga Q_{10} encerra um ponto de campo nulo, melhor, tem sua origem em um ponto de campo nulo, r_o, e a sua frente se encaminha para a placa R_1, então a sua descarga nesta placa segundo o teorema α, é:

$$Q_1 = Q_{10} - V(s_o, R_1) \cdot \sigma$$

Como esta descarga é fictícia e está incluída na descarga oriunda da carga da região (R_1, r_o), Q_{20}, a descarga devido à região onde existe realmente uma carga espacial inicial, (R_1, s_o), deve ser

$$Q = Q_{20} - Q_1, \quad \text{ou}$$

$$Q = Q_{20} - Q_{10} + V(s_o, R_1) \cdot \sigma \quad \text{e}$$

$$Q = q_o + V(s_o, R_1) \cdot \sigma$$

Como $$V(s_o, R_1) = \pi(s_o^2 - R_1^2)h, \text{ donde}$$

$$Q = \pi(s_o^2 - R_1^2)h\rho_o + \pi(s_o^2 - R_1^2)h\sigma$$

Este resultado concorda com aquele obtido por desenvolvimento matemático. Da observação de Q verifica-se que o primeiro termo representa a carga espacial inicial e o segundo, a descarga, pela placa R_1 de cargas, do mesmo sinal que a carga espacial, oriundas da condutividade.

A explicação deste efeito é inteiramente análoga à que foi arquitetada para o caso do condensador plano, quando $s_o < r_o$ e $\sigma \neq 0$.

- TEMPO DE DESCARGA -

Os resultados considerados aqui são os mesmos que já foram obtidos para os casos em que $\sigma \neq 0$ nos condensadores plano e esférico, isto é, a descarga se completa pa-

ra um tempo finito apenas quando $s_{máx} > R_1$ e $s_o < r_o$ e em todas as outras situações se completa em $t=\infty$

Dado que todas as consequências que seriam aqui analisadas já foram abordadas anteriormente, encerramos aqui este parágrafo.

Observação: O teorema α deduzido com elementos do condensador cilíndrico é válido para condensadores esféricos e planos. Independe portanto de geometrias. As propriedades aqui obtidas o são em circuito aberto.

- RESUMO DOS RESULTADOS -

(1) A distribuição em caixa ainda é solução para qualquer tempo.

(2) A densidade de carga é a mesma do condensador plano para o caso em que $\sigma \neq 0$.

(3) O ponto de campo nulo independe do tempo.

(4) A velocidade da frente de nuvem decai exponencialmente com o tempo.

(5) O campo na região sem cargas decai com $1/r$ e exponencialmente com o tempo.

(6) As descargas se verificam pela placa R_1 para $s_o = r_o$ e $s_o < r_o$ e pelas duas placas quando $s_o > r_o$.

(7) A descarga se completa em tempo finito para $s_{máx} > R_1$ em $s_o < r_o$ e em $t=\infty$ em todas as outras situações.

(8) Quando o ponto de campo nulo é real os campos podem ser negativos e positivos ou só positivos ou só negativos. Quando o ponto de campo nulo é imaginário os campos são só positivos.

Resultados para $\rho > 0$.

(9) Os campos decaem mais rapidamente que no caso em que $\sigma = 0$, devido à condutividade.

(10) Em igualdade de condições iniciais $r_o(\sigma = 0)$ e $r_o(\sigma \neq 0)$ são iguais.

- SECÇÃO IX -

CARGA ESPACIAL EM DIELÉTRICO INFINITO SIMETRIA ESFÉRICA COM $\sigma \neq 0$

Como a distribuição é esfericamente simétrica, tem-se em R_1

$$E_{R_I} = 0$$

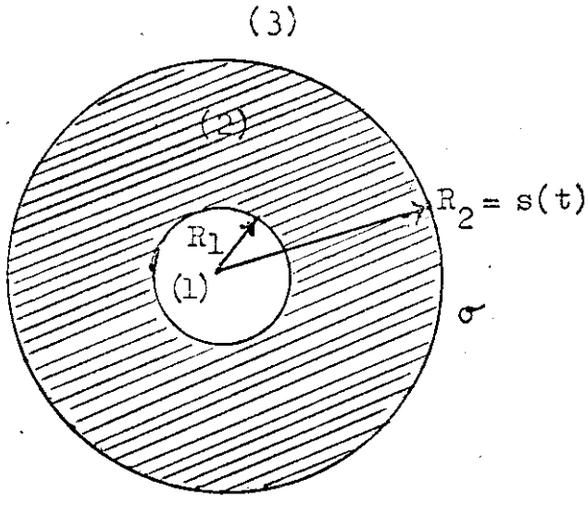

Figura 29

Quando a carga se expande tem-se movimento de cargas, mas como este deslocamento não forma circuito fechado tem-se obviamente um caso de circuito aberto e, portanto, no ponto R_1, tem-se

$$J(R_1 t) = (\rho + \sigma)\ E_{R_1} + \frac{\partial E_{R_1}}{\partial t} = 0,$$

isto em virtude de $E_{R_1} = 0$ e portanto em qualquer t.

Como a corrente total só depende de t e não de r, em

qualquer outro ponto deve-se ter

$$J(r,t) = 0$$

Na região (3), $(\rho + \sigma)\, E_3 + \dfrac{\partial E_3}{\partial t} = 0$

Em (3), $r > s(t)$ $\therefore$ $\rho(r,t) = 0$, donde

$$\sigma E_3 + \frac{\partial E_3}{\partial t} = 0$$

Nesta mesma região

$$\nabla . \vec{E}_3 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_3) = 0$$

$$\therefore$$

$$r^2 E_3 = \text{constante em } r.$$

Consideremos a expressão

$$\sigma E_3 + \frac{\partial E_3}{\partial t} = 0,$$

multiplicando ambos membros por r^2 obtém-se,

$$\sigma (r^2 E_3) + \frac{\partial (r^2 E_3)}{\partial t} = 0$$

$r^2 E_3$ independe de r e portanto em $\dfrac{\partial (r^2 E_3)}{\partial t}$ podemos substituir $\dfrac{\partial}{\partial t}$ por $\dfrac{d}{dt}$, portanto

$$\sigma (r^2 E_3) + \frac{d (r^2 E_3)}{dt} = 0,$$

daí tira-se facilmente

$$r^2 E_3 = (r^2 E_3)_o \, e^{-\sigma t}$$

Na região (2):

$$J_2 = \rho E_2 + \sigma E_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0$$

Ainda nesta região, tem-se para a equação de Poisson:

$$\nabla . \vec{E}_2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_2) = \rho,$$

que integrada dá

$$r^2 E_2 = \frac{\rho r^3}{3} + C$$

em r = s tem-se

$$s^2 E_3(s) = s^2 E_2(s)$$

$$\therefore$$

$$s^2 E_3(s) = \frac{\rho s^3}{3} + C$$

Sendo $r^2 E_3$ independente de r, vem

$$r^2 E_3 = s^2 E_3(s) = \frac{\rho s^3}{3} + C$$

Em t=0,

$$(r^2 E_3)_o = \frac{\rho_o s_o^3}{3} + C(0), \quad \text{e}$$

substituindo em

$$(r^2 E_3) = (r^2 E_3)_o \; e^{-\sigma t}$$

tem-se

$$r^2 E_3 = (\frac{\rho_o s_o^3}{3} + C(0)) \; e^{-\sigma t}$$

$$E_3 = (\frac{\rho_o s_o^3}{3r^2} + \frac{C(0)}{r^2}) e^{-\sigma t}$$

Na região (2), de

$$r^2 E_2 = \frac{\rho r^3}{3} + C$$

$$\therefore$$

$$E_2 = \frac{\rho r}{3} + \frac{C}{r^2}$$

Ainda na região (2), tem-se

$$J_2 = \rho E_2 + \sigma E_2 + \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0,$$

que depois da substituição pela expressão de E_2 e de arranjos nos termos, conduz

$$\frac{r}{3}\left(\rho^2 + \sigma\rho + \frac{d\rho}{dt}\right) + \frac{(\rho+\sigma)C}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{dC}{dt} = 0.$$

O coeficiente de $\frac{r}{3}$ é nulo por ser a equação da continuidade, e daí

$$(\rho + \sigma)C + \frac{dC}{dt} = 0$$

Esta expressão já foi resolvida para o caso dos condensadores planos e curvilíneos dando

$$C(t) = \frac{\rho}{\rho_o} C(0),$$

portanto em $E_2 = \frac{\rho r}{3} + \frac{C(t)}{r^2}$, tem-se

$$E_2 = \frac{\rho r}{3} + \frac{1}{r^2}\frac{\rho}{\rho_o} C(0)$$

Mas,

$$E_2(R_1, t) = E_1(R_1, t) = 0$$

portanto para $r = R_1$, vem

$$\frac{\rho R_1}{3} + \frac{1}{R_1^2}\ \frac{\rho}{\rho_o}\ C(0) = 0$$

$$\therefore$$

$$C(0) = -\frac{\rho_o R_1^3}{3}\ , \text{ e}$$

$$C(t) = -\frac{\rho R_1^3}{3}$$

Daí vem para E_2 e E_3,

$$E_2 = \frac{\rho}{3r^2}\ (r^3 - R_1^3), \qquad R_1 \leq r \leq s$$

$$E_3 = \frac{\rho_o}{3r^2}\ (s_o^3 - R_1^3)e^{-\sigma t}, \qquad r \geq s$$

Deslocamento $s = s(t)$

De $$\frac{ds}{dt} = E_3(s),$$

vem

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho_o}{3s^2}\ (s_o^3 - R_1^3)e^{-\sigma t}, \quad \text{daí}$$

$$s^2 ds = \frac{\rho_o}{3}\ (s_o^3 - R_1^3)e^{-\sigma t}\ dt,$$

cuja integral é

$$s = \left[s_o^3 + \frac{\rho_o}{\sigma}\ (s_o^3 - R_1^3)(1 - e^{-\sigma t}) \right]^{1/3}$$

Para $t = \infty$, vem

$$s_\infty = \left[s_o^3 + \frac{\rho_o}{\sigma} \left(s_o^3 - R_1^3 \right) \right]^{1/3}$$

A frente da nuvem neste caso é limitada, mesmo porque para $t=\infty$ já não há mais carga espacial, o que se pode verificar de

$$E_2(s) = \frac{\rho}{3s^2}(s^3 - R_1^3) = E_3(s) = \frac{\rho_o}{3s^2}\,(s_o^3 - R_1^3)\,e^{-\sigma t}$$

$$\therefore$$

$$\rho(s^3 - R_1^3) = \rho_o(s_o^3 - R_1^3)\,e^{-\sigma t}, \quad \text{e}$$

$$\frac{4\pi}{3}\,\rho\,(s^3 - R_1^3) = \frac{4\pi}{3}\,\rho_o(s_o^3 - R_1^3)\,e^{-\sigma t},$$

como

$$\frac{4\pi}{3}\,\rho_o(s_o^3 - R_1^3) = q_o = \text{carga espacial inicial}$$

$$\frac{4\pi}{3}\,\rho(s^3 - R_1^3) = q = \text{carga espacial no instante } t.$$

e portanto

$$q = q_o\,e^{-\sigma t},$$

e para $t=\infty$, $q=0$, quer dizer toda a carga espacial foi neutralizada por cargas oriundas da condutividade.

Para $\sigma = 0$

$$q = q_o$$

e a carga espacial se conserva.

Observação:

A diferença básica entre uma distribuição esfericamente simétrica em dielétrico infinito e uma segunda distribuição, também esfericamente simétrica, agora em dielétrico finito, limitado por armaduras esféricas de raios R_1 e R_2, submetidas a uma diferença de potencial V_o é que o campo na placa R_1, no primeiro caso, infinito, é sempre nulo, $E_{R_1} = 0$, e o campo E_{R_1} no dielétrico finito, é de uma maneira geral diferente de zero, $E_{R_1} \neq 0$.

Mas como, no caso finito, o campo é função de condições iniciais, inclusive do potencial V_o, que podem ser modificadas de forma a obter-se um valor predeterminado, é sempre possível ajustar-se V_o de tal forma a obter-se $E_{R_1} = 0$.

Obtido $E_{R_1} = 0$ no caso do dielétrico finito, limitado por placas, em circuito aberto, verifica-se então que todos os resultados obtidos, campos, deslocamentos, são iguais aos do caso infinito.

Pode-se então concluir que o caso da distribuição esfericamente simétrica em dielétrico infinito é um caso particular da distribuição esfericamente simétrica em dielétrico finito, em circuito aberto, desde que o campo na placa R_1 seja anulado, $E_{R_1} = 0$.

- RESUMO DOS RESULTADOS -

(1) A distribuição em caixa é solução exata do problema.

(2) A densidade decai como $\rho(t) = \dfrac{\sigma\rho_o e^{-\sigma t}}{\sigma + \rho_o(1 - e^{-\sigma t})}$

(3) Na região $(0,R_1)$ o campo é sempre nulo

(4) Na região (s, ∞) o campo varia com $1/r^2$ e decai exponencialmente com o tempo.

(5) A frente da carga, superfície s, tem um deslocamento limitado, pois para $t=\infty$ ela tem raio s_∞, finito.

(6) Em $t=\infty$ toda a carga espacial é extinta por neutralizações provocadas por cargas de sinal contrário oriundas da condutividade e que se movem em sentido contrário ao da nuvem espacial.

(7) Da carga espacial inicial apenas a superfície exterior, s(t), se expande, a superfície interna, de raio R_1 ficando imobilizada.

(8) Este é um caso natural de circuito aberto.

(9) O ponto de campo nulo é constante e igual a R_1, $r_o = R_1$. A região interna à R_1 é também um volume de campo nulo.

(10) A carga espacial decai exponencialmente com o tempo. Para $\sigma = 0$ ela se conservaria constante e s_∞ seria ilimitado.

- APENDICE -

Com a finalidade de eliminar das expressões certas constantes são utilizadas unidades reduzidas.

Representadas as unidades reduzidas por E, x, ρ, etc... tem-se

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \rho, \qquad e$$

$$J = \rho E + \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \vec{i} = 0, \quad \int_0^1 E dx = 1.$$

As relações entre as unidades reduzidas e as não reduzidas, representadas por E', ρ', x', etc... são representadas pelas relações:

$$E = aE', \qquad x = bx'$$

$$\rho = c\rho', \qquad t = ft', \qquad e$$

$$J = \ell J'$$

Substituindo estas relações nas equações reduzidas, por exemplo, em

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \rho$$

Obtém-se

$$\frac{a}{b}\frac{\partial E}{\partial x} = c\rho,$$

como

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \text{ vem}$$

$$\frac{a}{b}\frac{\rho}{\varepsilon} = c\rho, \quad \text{e daí}$$

$$a = \varepsilon bc$$

Com substituições semelhantes nas outras relações obtém-se um sistema de 4 equações a 5 incognitas:

$a = \varepsilon bc$, $\frac{ac}{\ell} = \mu$, $\frac{a}{f\ell} = \varepsilon$ e $abV = 1$

Arbitrando $b = \frac{1}{d}$, que satisfaz o segundo limite da integral reduzida, isto é,

$$\int_0^1 E\,dx = 1,$$

verifica-se que, como x varia de 0 a 1, tomando-se $x = \frac{x'}{d}$ quando x' variar de 0 a d, x há de variar de 0 a 1, portanto $b = \frac{1}{d}$ é uma relação consequente com a transformação de x' em x.

Resolvendo agora as quatro equações, encontramos para as relações entre as unidades reduzidas e as não reduzidas:

$$E = \frac{d}{V_o} E'$$

$$x = \frac{x'}{d}, \qquad t = \frac{\mu V_o}{d^2} t'$$

$$\rho = \frac{d^2}{\varepsilon V_o} \rho' \quad \text{e} \quad J = \frac{d^3}{\varepsilon \mu V_o^2} J'$$

Vamos considerar agora a situação no condensador plano em que $\sigma \neq 0$. As fórmulas que permitem obter as expressões de conversão entre as unidades reduzidas e as não reduzidas são

$$\varepsilon \frac{\partial E'}{\partial x'} = \rho' \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = \rho$$

$$\mu\rho' E' + \sigma E' + \varepsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} = J' \qquad J = \rho E + \sigma E + \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\int_0^d E'\,dx' = V' \qquad \int_0^1 E\,dx = 1$$

Tomamos μ e ε como constantes características do dielétrico, mas sempre diferentes de zero, pois os termos em que elas aparecem são sempre considerados, isto é, $\mu\rho E$ e $\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$.

Portanto, em geral

$$\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} \neq 0, \qquad \varepsilon \neq 0$$

Decorre daí que o máximo que se pode fazer é tomar unidades para μ e ε tais que estes apareçam com o valor 1 mas não 0 pois eles são constantes que não podem ser nulas.

Já com σ não pode ocorrer o mesmo pois estão em consideração dielétricos que podem ou não ter condutividade, isto é, σ pode ou não ser nulo.

Se fizéssemos $\sigma = 1$, teríamos reduzido σ a um valor definitivamente diferente de zero e ao serem estabelecidas as equações em função das unidades reduzidas para um $\sigma = 1$, teríamos obtido grandezas E_1, E_2, s, etc... a partir das quais não seria possível obter o caso particular $\sigma = 0$.

Portanto para se evitar isto toma-se $\sigma \neq 1$ possibilitando obter-se diretamente o caso particular $\sigma = 0$.

Substituindo-se as relações

$$E = aE', \qquad x = bx', \qquad \rho = c\rho'$$
$$t = ft', \qquad J = \ell J', \qquad \sigma = m\sigma' ,$$

nas equações reduzidas, obtém-se 5 equações porém arbitrando-se $b = \frac{1}{d}$ tem-se um sistema de 5 equações e 5 incognitas que solucionado dá as expressões de a, c, f, ℓ e m, obtendo-se então a partir daí as fórmulas de conversão:

$$E = \frac{d}{V'} E', \qquad x = \frac{x'}{d}, \qquad \rho = \frac{d^2}{\varepsilon V'} \rho'$$

$$t = \frac{\mu V'}{d^2}\, t' \quad , \quad J = \frac{d^3}{\mu \varepsilon V'^2} J', \quad \sigma = \frac{d^2}{\mu \varepsilon V'} \sigma'$$

- SIMETRIA DO CONDENSADOR ESFÉRICO -

Serão consideradas agora as unidades reduzidas na simetria do condensador esférico no caso em que $V \neq 0$ e $\sigma = 0$.

No condensador esférico muda apenas a forma da equação de Poisson,

$$\nabla . \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr'} (r'^2 E') = \frac{\rho'}{\varepsilon} ,$$

ficando as outras equações com a mesma forma:

$$J' = \mu \rho' E' + \varepsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad e \quad \int_{R'_1}^{R'_2} E' dr' = V' .$$

Substituindo-se as relações

$$E = aE' , \qquad r = br' , \qquad \rho = c\rho'$$

$$t = ft' \quad e \quad J = \ell J' ,$$

nas equações reduzidas

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) = \rho , \qquad J = \rho E + \frac{\partial E}{\partial t} \quad e \quad \int_{R_1}^{R_2} E\, dr = 1$$

resultam as relações

$$a = \varepsilon bc , \quad \frac{ac}{\ell} = \mu , \quad \frac{a}{f\ell} = \varepsilon \quad e \quad abV = 1$$

Observando $\int_{R'_1}^{R'_2} E'\, dr' = V'$ e $\int_{R_1}^{R_2} E\, dr = 1$

verificamos que não há nenhuma imposição para a escolha

de b como no caso do condensador plano $\int_0^d E'dx' = V'$ e $\int_0^1 Edx = 1$, mas pode-se arbitrar um b que envolva a capacitância do condensador esférico

$$C = \frac{4\pi\,\varepsilon\,R_1R_2}{R_2 - R_1} \quad ,$$

tomando $b = \frac{R_2 - R_1}{R_1\ \ R_2} = \frac{4\pi\varepsilon}{C}$ onde $\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$ tem a dimensão de um comprimento.

Arbitrado b fica-se com um sistema de quatro equações com quatro incognitas que resolvido dá as expressões de a, c, f e ℓ obtendo-se para as relações de conversão entre as unidades reduzidas e as comuns:

$$E = \frac{R_1'\ R_2'}{(R_2' - R_1')V'}\,E', \qquad r = \frac{R_2' - R_1'}{R_1'\,R_2'}$$

$$\rho = \frac{(R_1'R_2')^2}{\varepsilon(R_2' - R_1')^2V'}\,\rho', \qquad t = \frac{\mu(R_2' - R_1')^2V'}{(R_1'\,R_2')^2}\,t'$$

$$J = \frac{(R_1'\,R_2')^3}{\mu\,\varepsilon(R_2' - R_1')^3V'^2}\,J'$$

Vamos considerar agora a simetria do condensador esférico nas condições $V \neq 0$ e $\sigma \neq 0$.

As relações entre as unidades reduzidas e as não reduzidas para este caso são

$$E = aE', \qquad r = br', \qquad \rho = c\rho'$$

$$t = ft', \qquad J = \ell J' \quad e \quad \sigma = m\sigma'$$

No item anterior verificou-se que da relação entre as equações reduzidas e as não reduzidas surgiam as relações

$$a = \varepsilon bc, \quad \frac{ac}{\ell} = \mu, \quad \frac{a}{f\ell} = \varepsilon \quad e \quad abV = 1$$

Agora para o caso em que $\sigma \neq 0$ só se tem um termo a mais, em J' ou J que é $\sigma' E'$ ou σE e da relação entre os coeficientes destes termos quando se reduz J para J' vem a nova relação

$$\frac{am}{\ell} = 1,$$

ficando-se portanto com cinco equações e 6 incognitas.

As expressões de a, b, c, f e ℓ já foram determinadas no item anterior, caso em que $\sigma = 0$ e portanto não há necessidade de se calcular a, b, c, f e ℓ neste caso de $\sigma \neq 0$ já que são os mesmos de $\sigma = 0$.

Basta apenas calcular $m = \frac{\ell}{a}$. A partir portanto das expressões conhecidas de ℓ e a chega-se facilmente a

$$m = \frac{(R_1' \; R_2')^2}{\mu \, \varepsilon \, (R_2' - R_1')^2 V'}$$

As relações de conversão são as mesmas do item anterior ($\sigma = 0$) com apenas mais uma:

$$\sigma = \frac{(R_1' \; R_2')^2}{\mu \, \varepsilon \, (R_2' - R_1')^2 V'}$$

Agora serão consideradas as unidades para a simetria do condensador esférico quando $V = 0$ e $\sigma = 0$.

Neste caso verifica-se que

$$\int_{R_1'}^{R_2'} E' \, dr' = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = 0$$

não conduzem a uma nova relação e que portanto dispõe-se apenas de 3 relações ligando a, b, c, f e ℓ e que portanto é necessário se arbitrar a expressão de duas destas variáveis.

Estas três relações como é fácil verificar, são

$$a = \varepsilon bc, \qquad \frac{ac}{\ell} = \mu \qquad e \qquad \frac{a}{f\ell} = \varepsilon$$

Como trata-se de um condensador esférico vamos arbitrar b da mesma forma que já feito nos casos anteriores de condensador esférico, isto é, $b = \dfrac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$

Como neste caso não se tem a relação $abV = 1$, em virtude de ser $V = 0$ é necessário arbitrar mais um fator de conversão.

Arbitra-se c, tomando-se

$$c = \frac{1}{\rho_o}$$

obtendo-se

$$\rho = \frac{\rho'}{\rho_o}$$

Agora com um sistema de três equações a três incognitas, obtém-se a, f e ℓ e daí as relações de conversão:

$$E = \frac{\varepsilon(R'_2 - R'_1)}{\rho_o R'_1 \; R'_2} E', \quad r = \frac{R'_2 - R'_1}{R'_1 \; R'_2} r', \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_o}$$

$$t = \frac{\mu\rho_o}{\varepsilon} t' \qquad e \qquad J = \frac{\varepsilon(R'_2 - R'_1)}{\mu\rho_o^2 \; R'_1 \; R'_2} J'.$$

- SIMETRIA DO CONDENSADOR CILÍNDRICO -

Para o condensador cilíndrico, no cálculo dos fatores de conversão, seguem-se processos semelhantes aos já abordados nos itens anteriores e por isto não os desenvolveremos aqui, apenas apresentando os resultados, isto é, as fórmulas de conversão entre as unidades reduzidas e as não reduzidas.

O fator de conversão arbitrado para b em $r = br'$ foi

$$b = \frac{1}{R_1 L \frac{R_2}{R_1}}$$

Fórmulas de conversão para o caso em que $\sigma \neq 0$ e $V \neq 0$.

$$E = \frac{R_1' \; L \frac{R_2'}{R_1'}}{V'} E', \qquad r = \frac{r'}{R_1' L \frac{R_2'}{R_1'}}$$

$$\rho = \frac{\left(R_1' \, L \frac{R_2'}{R_1'}\right)^2}{\varepsilon V'} \rho', \qquad t = \frac{\mu V'}{\left(R_1' L \frac{R_2'}{R_1'}\right)^2} t'$$

$$J = \frac{\left(R_1' \, L \frac{R_2'}{R_1'}\right)^3}{\mu \varepsilon V'^2} J' \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\left(R_1' \, L \frac{R_2'}{R_1'}\right)^2}{\mu \varepsilon V'} \sigma'$$

Para a situação em que $\sigma = 0$, as fórmulas de conversão a empregar são as cinco primeiras relacionadas acima.

Prova de que o campo, no dielétrico, após a frente de nuvem ter alcançado a placa x=1, tem a mesma expressão que o campo $E_1(x,t)$, da região com carga espacial.

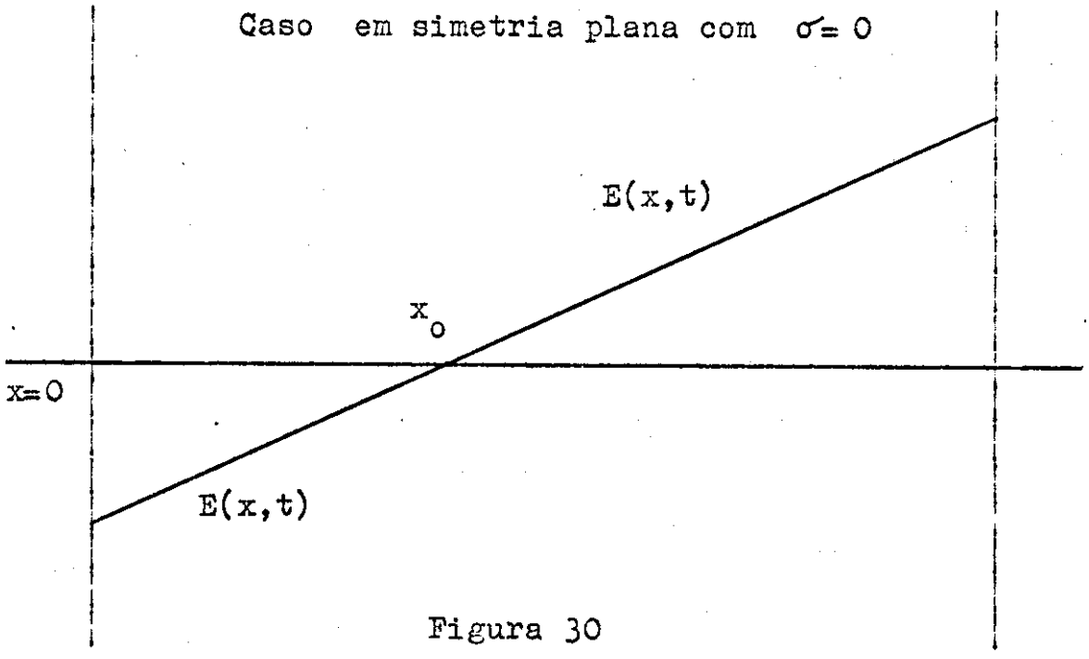

Figura 30

Antes que a frente da nuvem alcance a placa x=1, tem-se dois campos $E_1(x,t)$ na região com carga espacial e $E_2(x,t)$ na região sem cargas. Depois que a frente da nuvem alcança a placa x=1, tem-se novas condições de contorno. Vamos calcular o campo de acordo com estas atuais condições de fronteira.

Como a carga espacial ocupa todo o dielétrico tem-se então para todo o espaço do dielétrico,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \rho,$$

portanto

$$E = \rho x + C$$

Seja $t = t_1$ o tempo que a frente da nuvem levou para alcançar a placa x = 1.

Neste instante, t_1, temos a transição entre uma dis-

Depto. de Física e Ciência dos Materiais
BIBLIOTECA

tribuição (campos $E_1(x,t)$ e $E_2(x,t)$ e a outra, $E(x,t)$, e portanto é lícito escrever-se

$$\int_0^1 (\rho(t_1)x + C(t_1))\, dx = V(t_1) \qquad (I)$$

Sendo o $V(t_1)$ calculado a partir da distribuição inicial ($E_1(x,t)$, $E_2(x,t)$).

Da expressão de $V(t)$

$$V(t) = \frac{\rho s^2}{2} - \rho x_o s + \rho_o(s_o - x_o)(1 - s).$$

Para $t = t_1$, $s = 1$, vem então,

$$V(t_1) = \frac{\rho(t_1)}{2} - \rho(t_1)x_o \qquad (II)$$

Substituindo-se (II) em (I) e efetuando-se as integrações, resulta para $C(t_1)$,

$$C(t_1) = - x_o\rho(t_1)$$

Em circuito aberto tem-se, para a densidade de corrente,

$$\rho E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Com a substituição da expressão do campo, vem,

$$\rho(\rho x + C) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho x + C) = 0$$

e após algumas reduções,

$$x(\rho^2 + \frac{\partial \rho}{\partial t}) + \rho C + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

$\rho^2 + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, equação da continuidade, donde,

$$\rho C + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Da equação da continuidade, vem

$$\rho dt = - \frac{d\rho}{\rho} ,$$

e da equação diferencial em C, tem-se,

$$\frac{\partial C}{C} = - \rho dt$$

donde por comparação das duas últimas expressões,resulta

$$\frac{dC}{C} = \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\int_{C(t_1)}^{C(t)} \frac{dC}{C} = \int_{\rho(t_1)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\rho}, \quad \text{e daí,}$$

$$C(t) = C(t_1) \frac{\rho(t)}{\rho(t_1)}$$

como $C(t_1) = - x_o \rho(t_1)$, vem

$$C(t) = - x_o \rho(t)$$

Como este x_o é ponto de campo nulo da distribuição anterior pois origina-se da expressão de V(t) calculada com os campos E_1 e E_2 da distribuição inicial, a sua expressão é conhecida, sendo

$$x_o = - \frac{1}{\rho_o} \left[1 + q_o (\frac{s_o}{2} - 1) \right]$$

resultado encontrado na secção I.

Portanto tem-se para C(t), $C(t) = \frac{\rho}{\rho_o} \left[1 + q_o (\frac{s_o}{2} - 1) \right]$,vindo

então para $E(x,t)$, campo no dielétrico depois que a frente da nuvem alcançou a placa $x=L$,

$$E(x,t) = \rho x + \frac{\rho}{\rho_0}\left[1 + \alpha_0\left(\frac{s_0}{2} - 1\right)\right], \quad t \geq t_1 .$$ Mas esta expressão é exatamente igual à expressão de $E_1(x,t)$, campo na região onde havia carga espacial, na distribuição inicial.

Portanto $E(x,t) = E_1(x,t)$, $t \geq t_1$,

Densidade - Vamos considerar a densidade depois que a frente da nuvem alcança a placa $x = L$.

Da equação da continuidade,

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i} = 0$, sendo a corrente de condução

$$\vec{i} = \rho \vec{E}_1(x,t), \text{ tem-se}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{E}_1 = 0,$$ e da equação de Poisson,

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \rho,$$

vem,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 = 0,$$

Nesta equação como se sabe, chega-se a

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\rho_0 t}{\varepsilon}}$$

E portanto depois que a frente da nuvem alcança a placa $x=L$ a densidade obedece a um "decay" análogo ao que obedecia antes que a frente da nuvem alcançasse esta placa. Estes resultados também podem ser obtidos quando $\sigma \neq 0$ e outras simetrias e para cargas flutuantes, bastando para isto calcular os campos e a densidade segundo as novas condições de contorno.

- CONCLUSÃO -

(a) Para comparação, com o caso sobre a carga flutuante, vamos considerar um trabalho de I.P. Batra, K. Keiji Kanazawa, B.H. Schechtman, e H.Seki publicado no Journal of Applied Physics, 42, 3, (1971)

Neste trabalho intitulado "Charge-Carrier Dynamics following pulsed photo-injection é considerada uma carga flutuante em condensador plano sendo esta carga depositada em um dos eletrodos por fotoinjeção.

Considera-se em $t = 0$, a carga depositada sob a forma de uma camada tão fina que apresentava apenas densidade superficial, sobre a placa adjacente, tendo portanto, neste instante, densidade volumétrica nula, podendo-se portanto escrever, para $t = 0$, $n(x,0) = 0$, $x > 0$, sendo $n(x,t)$ o número de transportadores por unidade de volume.

Isto é, no volume do dielétrico não há ainda uma distribuição volumétrica de carga espacial.

Esta condição faz com que o campo à frente da carga espacial seja,

$$E_3 = \frac{V_o}{L}$$

À proporção que a frente da nuvem fôr avançando, como o campo na região à frente da carga é constante, terá ainda por expressão V_o/L. O campo é constante no tempo pois o circuito é aberto.

Para o campo $E_1(x,t)$, atrás da carga, tem-se, de Poisson,

$$\int_0^L \frac{\partial E_1(x,t)}{\partial x}\, dx = \frac{4\pi q}{K} \int_0^L n(x,t)\, dx$$

$$E_1(L,t) - E(0,t) = \frac{4\pi}{K} Q_o, \quad \text{e daí } E_1(0,t) = (1-\rho_o)V_o/L,$$

$$\text{com } \rho_o = \frac{4\pi L Q_o}{K V_o}$$

Como os campos nas regiões sem carga são constantes no espaço e no tempo, tem-se que em qualter t, o campo atrás da carga espacial é, $E_1(x,t) = (1-\rho_o)V_o/L$.

Por condição de contorno $\int_0^L E_0 dx = V_0$, obtém-se E_2, obtendo-se assim para os campos: (1) $E_1(x,t) = (1-\rho_0)V_0/L$, (2) $E_2(x,t) = V_0/L$, (3) $E_3(x,t) = x/\mu t$.

Dadas as hipóteses iniciais: $n(x,0)=0$, $t=0$, os campos apresentam expressões bastante simples, o que torna também simples as expressões das variáveis externas $V(t)$ e $V(\dot{t})$ e as internas $n(x,t)$ e $J_c(x,t)$.

No nosso trabalho, não foram feitas hipóteses simplificadoras, como tomar em $t=0$, a carga espacial com volume nulo, isto é, sob forma de estreita camada no eletrodo de deposição. As condições iniciais foram de ordem mais geral uma vez que para $t=0$, $(s_{20}-s_{10}) \neq 0$, e esta localização inicial era qualquer no espaço entre as placas, não sendo necessariamente junto ao eletrodo de deposição, quer dizer, não tivemos obrigatoriamente $s_{10}=0$.

Batra não considerou a condutividade intrínseca, σ ao passo que esta constante foi levada em conta nos nossos cálculos. A densidade no artigo citado é aceita como especialmente uniforme ao passo que neste trabalho demonstra-se que a densidade dependente apenas do tempo é um modelo correto.

Na nossa análise foi dada ênfase ao conceito de plano de campo nulo. Ainda foram estudadas as descargas nas placas com a nuvem se orientando para uma ou outra placa ou simultaneamente para as duas placas. Além dos processos de cálculo propriamente ditos foram usados cálculos de descargas por meio de artifícios.

Batra considerou duas zonas no tempo determinando as expressões das variáveis nestas duas zonas: uma que vai de $t=0$ até $t=t_T$, tempo em que a frente da nuvem alcança a placa L e de $t=t_T$ até $t=t_P$ que é a 2ª zona no tempo e representa o tempo que a parte posterior da nuvem (trailing edge) leva para alcançar a placa L. Batra analisou as variáveis externas (experimentalmente acessíveis) $V(t)$ e $V(\dot{t})$, especialmente $V(\dot{t})$, que através de

$$\frac{K}{4\pi L}\frac{dV(t)}{dt} + L^{-1}\int_0^L J_c(x,t)\,dx = 0 = J(t)$$

verifica-se ser um observável proporcional ao valor médio espacial, da densidade de corrente de condução sobre a amostra.

Dentro das condições do problema que analisamos as ex

pressões dos campos surgiram bem mais complexas e a expressão dos tempos de trânsito também, daí não ter sido possivel apresentar expressões simples para V(t) em função de t_T e t_F como Batra determinou.

Os limites da carga flutuante, nas condições do problema analisado por Batra

$x_1(t) = 1 - \rho_o)\mu V_o/L\, t$ e $x_2 = \frac{\mu V_o}{L} t$ eram expressões de movimentos uniformes lineares em t, enquanto que as expressões, obtidas dentro das nossas condições iniciais,

$s_1 = s_{10} + \frac{E_{10}}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t})$, $s_2 = s_{20} + \frac{E_{30}}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t})$ eram mais complexas, apresentando frentes que se moviam com velocidades que decaiam exponencialmente com t.

Para $\sigma \to 0$ e $s_{10} = s_{20} = 0$, obtém-se $s_1 = E_1 t$ e $s_2 = E_{30}\, t$ que são eqs. de movimento uniforme tais como as de Batra.

Batra obteve para os campos expressões bastante simples, $((1 - \rho_o)\, V_o/L,\ x/_{ut},\ V_o/L)$ enquanto que na nossa análise os campos obtidos foram:

$$E_1 = \left\{ 1 + \frac{\rho_o}{2}(s_{20} - s_{10})\left[(s_{10} + s_{20}) - 2\right]\right\} e^{-\sigma t},$$

$$E_3 = \left\{ 1 + \frac{\rho_o}{2}(s_{20}^2 - s_{10}^2)\right\} e^{-\sigma t} \quad \text{e}$$

$$E_2 = ox + \frac{\rho}{\rho_o}\left\{ 1 + \frac{\rho_o}{2}\left[(s_{20}^2 - s_{1o}^2) - 2s_{20}\right]\right\},$$ mais complicados. Não fizemos uma análise de V(t) dada a complexidade que a expressão

$$V(t) = \int_0^{s_1} E_1 dx \int_{s_1}^{s_2} E_2 dx \int_{s_2}^{L} E_3 dx$$ apresentou depois de integrada, e com a substituição de s_1 e s_2 pelas suas expressões.

(b) Wintle

Vamos agora considerar o trabalho de H.J.Wintle, denominado "Decay of Excess Charge in Dieletrics Having Shorted Electrodes" publicado no Journal of Applied Physics, 42, 12, novembro de 1971.

Neste trabalho Wintle considera uma distribuição de carga espacial junto a um dos eletrodos, em condição de curto-circuito. As correntes de difusão são ignoradas e a carga injetada é considerada móvel, porém parcialmente "trapped" em um nível de "trapping" simples de concentração P_t e energia E_t. É suposto também um "trapping" raso e rápido assim havendo em todas as posições um quase equilíbrio entre as cargas livres e "trapped".

Considera-se uma variação de temperatura durante o processo.

Este trabalho aplica-se a qualquer distribuição inicial de carga, não somente a uma lâmina de carga localizada junto a um dos eletrodos como é o caso do trabalho, já citado, do Batra.

Neste trabalho de Wintle supõe-se que a concentração de cargas é uniforme no tempo, até $y(t)$.

Segundo palavras textuais do artigo: "observa-se, contudo, que em uma boa aproximação, a carga espacial é essencialmente de concentração constante até uma posição $y(t)$, e zero além".

Então, também como no artigo do Batra, considerado no item (a), supõe-se a densidade constante em relação à x, uniforme no espaço dependendo apenas do tempo, mas sem qualquer demonstração de que este modelo seja correto sem quaisquer provas de que ele leve a soluções exatas enquanto que no trabalho ora apresentado demonstra-se que a suposição de que a densidade é função apenas do tempo, modelo denominado "box charge distribution" é correta, levando a soluções exatas, semquaisquer aproximações.

Como consequência o campo é linear em x, na região de cargas, e constante além, o que se verifica da equação de Poisson $\partial E/\partial x = \rho$. Wintle tomou uma carga que não destaca pois $E(0,t) < 0$ em todo o desenvolvimento do trabalho.

Passando as unidades de comuns para reduzidas segundo uma escolha de acordo com a forma obtida pelas

expressões, como se vê do tempo reduzido

$$d\tau = -\frac{\mu E_{oo}}{d(1+\theta^{-1})}\,dt\ ,\quad \text{onde } \theta = \frac{P}{P_t}\ ,\ P \text{ e } P_t \text{ concentrações}$$

de cargas livre e trapped" simplificou as expressões das grandezas radicalmente, como no caso da corrente total

$$\phi(\tau) = \tau\,\frac{\partial\tau}{\partial\chi} + \frac{\partial\tau}{\partial\tau}$$

onde τ é o campo reduzido e χ, a distância reduzida

Da velocidade reduzida

$$\frac{\partial n}{\partial\tau} = \tau_n$$

surgiu uma equação diferencial de onde foi determinada a expressão de n, expressão reduzida da frente de nuvem, obtendo-se para a equação reduzida do deslocamento

$$e^{2/n} = \frac{e^{2/n_o}}{\left\{1 + 2\tau\left[n_o(2-n_o)\right]^{-1}\right\}}$$

e da corrente total, $\phi = -2\tau_d\ (1-n)/n^2$. Para n=1, ϕ=0. Quando n=1, a frente de carga espacial alcança a placa x=L, e como ϕ=0, verifica-se que a corrente total se anula. Como se demonstra que a corrente para as placas, a partir de n=1, é igual, está justificado o fato de no exterior não ocorrer corrente (net current).

Wintle calculou a fração f da carga inicial que é detectada no circuito externo e também a razão g da carga perdida, para a carga inicial. Conclui que a perda é bem grande devido à corrente de deslocamento que se opõe à corrente de condução.

Neste trabalho consideramos uma condição de curto-circuito, mas em condensador esférico, sem "trapping", em temperatura constante.

Os campos, devido à curvatura, já não são mais lineares, nem constantes, mas a densidade é a mesma do caso plano equivalente, isto é, aquele em que σ= 0.

Verificou-se que a descarga ocorria nas duas placas e a frente da nuvem deslocava-se sempre para a segunda

placa. Como não foi possível determinar uma expressão explícita para s(t), e para que o problema apresentasse solução simples tomou-se o caso em que $R_1 \to 0$ Todos os resultados desta simplificação encontram-se na secção IV.

(c) Vamos considerar agora o trabalho de G.F.L. Ferreira e B.Gross, intitulado: "Currents and Charges in Radio electrets".

O trabalho de G.F.L. Ferreira e B.Gross discute a corrente de descarga produzida pelo "detrapping" dos transportadores de carga de uma distribuição de carga monopolar localizada profundamente no dielétrico.

t_0 é o tempo que uma ou outra frente da carga levam para alcançar primeiro o eletrodo correspondente.

Considerando a mobilidade função da temperatura e esta função do tempo,

$$\mu(T(t)),$$

determina-se um tempo reduzido τ, que inclua as variações de temperatura, definido por,

$$\frac{1}{\tau(T(t))} = \frac{q\mu(T(t))}{\varepsilon ad}$$

Encontrando-se $J(t) = J_0(1/\tau)\exp\int_0^t ds/\tau$, $0 \leq t \leq t_0$, com

$J_0 = a\varepsilon(E_d(0) - q/2\varepsilon)$ prova-se então que a dependência no tempo e na temperatura, da corrente, cresce no intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_0$ e é independente da forma da distribuição da carga espacial. Obtém-se depois de algumas considerações

$$J(t) = \frac{J_0}{\tau_0} \exp\left(\frac{U}{K}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right) \exp\left(\int_0^t \frac{ds}{\tau_0}\right) \exp\frac{U}{K}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right).$$

Esta é a corrente transiente inicial produzida pela liberação térmica dos eletrons das armadilhas supondo não "retrapping" ou "retrapping" rápido em um nível de "trapping" simples. Desde que a corrente total J(t) é conhecida, é possível escrever a solução

completa do nosso problema, isto é, encontrar também $\rho(x,t)$

Isto é obtido pelo método das características aplicado à continuidade e à equação de Poisson, as quais formam um sistema de equações diferenciais parciais, dando como solução

$$x(t) = \frac{\mu(T_o)}{\varepsilon} \int_0^{t'} dt' \int_0^{t'} J(t'')dt'' + \mu(T_o)E(x_o)t + x_o, \text{ e,}$$

$$\rho(t) = \frac{\rho(x_o)}{1 + \frac{\mu(T_o)}{\varepsilon}\rho(x_o)t} .$$

(d) Consideremos o artigo "Theory of Transient Space--Charge-Limited Currents in Solids in the presence of Trapping", de A, Many e G. Rakavy, na Phys. Rev. 126, 6, (1967).

Neste trabalho o problema das SCLC transientes em cristais condutores e isolantes foi tratado matematicamente. Com um certo número de hipóteses simplificadores foram deduzidas soluções dependentes do tempo para a corrente e a distribuição de carga espacial.

As hipóteses simplificadoras feitas por Many e Rakavy foram: desprezar a contribuição de difusão e supor o enchimento dos níveis de trapping em qualquer tempo pequenos comparados aos níveis vazios, em equilíbrio térmico. Soluções analíticas exatas são dadas para os dois casos limites: não "trapping" e "fast trapping".

As equações de fluxo são: lei da condução, equação da continuidade, equação de Poisson e um sistema relacionando as cargas livres e os transportadores "trapped". Fazendo a redução das unidades de acordo com as fórmulas:

$$x = \frac{x'}{L}, \quad t = \frac{t'}{t_o}, \quad \tau = \frac{T_t}{t_o}, \quad \varepsilon = \frac{E}{V_o/L}, \quad \rho = qn/KV_o/4\pi L^2) \text{ e}$$

$$j_c = J_c/(K\mu V_o/4\pi L^2)$$

obtém-se as equações reduzidas,

$$j_c(x,t) = \rho(x,t) \quad \varepsilon(x,t),$$

$$\partial j_c(x,t)/\partial x = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(x,t) + \rho_t(x,t)\right]$$

$$\partial \varepsilon\,(x,t)/\partial x = \rho(x,t) + \rho_t(x,t) - \rho_o - \rho_{t_o}$$

$$\partial \rho_t(x,t)/\partial t = \frac{1}{\tau}\left[\rho(x,t) - \theta_o \rho_t(x,t)\right]$$

Qualquer método conveniente para o fluxo uni-dimensional de um fluido compressível em hidrodinâmica pode ser aplicado ao fluxo da carga espacial. Este é o método das características. A equação das linhas de fluxo dos transportadores, $x(t)$, é, em unidades reduzidas,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon(x,t).$$

Após uma combinação desta com as equações básicas chega-se a

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho(x(t),t)}{dt} = -\rho(\rho + \rho_t - \rho_o - \rho_{t_o}) - \dfrac{1}{\tau}(\rho - \theta_o \rho_t), \text{ e,} \\[2ex] \dfrac{d\varepsilon\,(x(t),t)}{dt} = j(t) + (\rho_t - \rho_{t_o} - \rho_o)\ \varepsilon(x(t),t) \end{cases}$$

E da solução destas equações diferenciais vem a solução dos problemas propostos, por exemplo, para "no trapping",

$$\tau \to \infty,$$

e as equações tornam-se

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\rho - \rho_o), \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = j(t) - \rho_o \varepsilon$$

Como para um cristal isolante $\rho_o = 0$, vem $\rho(t) = \rho_a\left[1 + \rho_a(t - t_a)\right]^{-1}$

Na secção sobre carga flutuante verificou-se que esta decaia exponencialmente com o tempo segundo expressão, $q(t) = q_o e^{-\sigma t}$, quando entre as placas.

No artigo de Many-Rakavy constata-se que um pulso de transportadores, oticamente gerados, tem por expressão

$$\Delta\varrho = \Delta\rho_a e^{-\rho_o(t - t_a)}$$

em um cristal condutor sendo ρ_o ligado à condutividade deste $\rho_o = \rho_o(\sigma)$ e t_a um tempo inicial.

A expressão de Many-Rakavy é então uma confirmação do nosso resultado de que a condutividade opera na carga flutuante um "decay" exponencial com o tempo.

O pulso de transportadores apresenta dispersão porém resultado do qual discordamos pois pelo modelo de caixa o pulso deveria diminuir para $\sigma = 0$, porém conservando as dimensões de uma caixa retangular.

BIBLIOGRAFIA

[1] MANY,S. e RAKAVY, G. - Theory of Transient Space--Charge-Limited Currents in Solids in the Presence of Trapping. Phys. Rev., 126(6), 1967

BATRA, I.P., KANAZAWA, K.K. and SEKI, H. J. Appl. Phys., 41, 3416, 1970.

BATRA, I.P., KANAZAWA, K.K., SCHECHTMAN, B. H. e SEKI, H. - Charge Carrier Dynamics following pulsed photo-injection. J. of Applied Physics, 42(3), 1971.

WINTLE, H.J. - Decay of Excess Charge in Dielectrics Having Shorted Electrodes. J. of Applied Physics, 42(12), novembro 1971

FERREIRA, G.F.L. e GROSS,B. - Currents and Charges in Radioelectrets. Deptº de Física, Instituto de Física e Química, USP, São Carlos, SP.

PERLMAN, M.M. and CRESWELL, R.A., J.Appl.Phys. 42, 531, 1971.

BUCCI,C., FIESCHI, R. and GUIDI, G., Phys. Rev.148, 816, 1966.

LINDMAYER, J., J. Appl. Phys., 36, 196, 1965.

CASERTA,G., RISPOLI,B. and SERRA,A., Phys. Status Solidi, 35, 237, 1969.

WEISZ, S.Z., COBAS,A., TRESTER,S. and MANY,A., J. Appl. Phys., 39, 2296, 1968.