UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

USP / IFQSC / SBI

8-2-000861

ESTUDO DE SISTEMAS DE SPINS A DUAS DIMENSÕES E DE CALIBRE A QUATRO DIMENSÕES COM SIMETRIA Z(N)

FRANCISCO CASTILHO ALCARAZ

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

(Tese apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, para obtenção do título de Doutor em Física)

Orientador:

Prof. Dr. Roland Köberle

SÃO CARLOS

1980

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE _____

FRANCISCO CASTILHO ALCARAZ

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 28 DE Agôsto DE 1980.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. ROLAND KÖBERLE - Orientador

Dr. JORGE ANDRÉ SWIECA

Dr. BERT SCHROER

Dr. SILVIO ROBERTO DE A.SALINAS - ausente

Dr. RICARDO SCHWARTZ SCHOR

Dr. JOSÉ FERNANDO PEREZ

Aos

meus pais

À Meire e

Priscila

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

AGRADECIMENTOS

Queremos agradecer a todos que, de maneira direta ou indireta, colaboraram para que este trabalho pudesse ser realizado e em particular:

Ao Prof. Roland Köberle pelo constante apoio, boa vontade e orientação na realização deste trabalho.

Ao Prof. Jorge André Swieca pelas proveitosas discussões e sugestões que muito nos ajudou no presente trabalho.

Aos colegas Drugo, Gil, Marino e Nelson pelo interesse e estímulo.

À Anna Lucia, Tânia e Ana Maria pelo excelente trabalho de datilografia.

RESUMO

Usando uma transformação de dualidade generalizada, considerações de simetria e supondo que as superfícies críticas sejam contínuas, obtivemos o diagrama de fase para sistemas de spins Z(N) bidimensionais e sistemas com invariança de calibre Z(N) a quatro dimensões.

Caracterizamos as diversas fases dos sistemas de spins pelo valor esperado das potências dos operadores de ordem e desordem. No sistema com invariança de calibre, por outro lado, estas fases foram caracterizadas pelo comportamento do valor esperado das potências das alças de Wilson e de't Hooft.

Obtivemos para ambos os sistemas fases moles em que no caso de spins 2D (calibre 4D) todas as potências dos parâmetros de ordem e desordem (todas as potências das alças de Wilson e 't Hooft) são nulas (exibem decaimento com o perímetro da alça).

Enquanto no sistema com invariança de calibre todas as combinações de decaimento (área ou perímetro) das alças de Wilson e 't Hooft são permitidas, as relações de comutação no sistema de spins proibe a existência de fases em que tanto o parâmetro de ordem como o de desordem são não nulos (exceto quando estes operadores comutam).

Apresentamos por completeza as relações de dualidade para sistemas de calibre Z(N) com campos de Higgs a três dimensões.

ABSTRACT

Using a generalized duality transformation, symetry considerations and assuming that criticality is continuous in the system's parameters, we obtain the phase diagram for two-dimensional Z(N) spin system's and four-dimensional gauge Z(N) system's.

For spins systems we characterize the various phases by the expectation value of powers of the order and disorder operators. For gauge systems, on the other hand, the characterization is via the decay law of powers of Wilson and 't Hooft loops.

We obtain soft phases for both systems, with the folowing, behaviour: for spin systems all powers of order and disorder parameters vanish, whereas for gauge systems all powers of Wilson and 't Hooft loops decay like the perimeter.

Whereas all combinations of area and perimeter decay are allowed for Wilson's and 't Hooft's loops, the Z(N) commutation relations for spin systems forbid the simultaneous non-vanishing of order and disorder parameters (except when these operators commute).

For completness we include the duality relations for three-dimensional gauge plus Higgs Z(N) systems.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II- SISTEMAS DE SPINS BIDIMENSIONAIS COM SIMETRIA GLOBAL Z(N)

II.A - Considerações Gerais 6

II.B - Matriz de Transferência 8

II.B.1 - Matriz de Transferência para o modelo de Ising. 10

II.B.2 - Matriz de Transferência para o modelo Z(N)..... 13

II.C - Formulação para tempos contínuos - Formulação Hamiltoniana 16

II.C.1 - Hamiltoniano do modelo de Ising 17

II.C.2 - Hamiltoniano para Z(N) geral..... 19

II.D - Transformação Dual 22

II.E - Parâmetro de ordem, desordem - Condensação de kinks e desordem 25

II.F - Informações Gerais sobre a superfície crítica 29

II.G - Casos Particulares

II.G.1 - Modelo Potts Escalar 33

II.G.2 - Modelos Potts Vetorial 34

II.G.3 - Modelos Villain 36

II.H - Diagramas de Fase 40

II.H.1 - Z(2) e Z(3) 41

II.H.2 - Z(4) 42

II.H.3 - Z(5) 47

II.H.4 - Z(6) 50

II.H.5 - Z(7) 55

II.H.6 - Fases para N ⩾ 8 58

II.I - Aproximação de Campo Médio 58

CAPÍTULO III - SISTEMAS COM SIMETRIA LOCAL Z(N) A QUATRO DIMENSÕES

III.A - Considerações Gerais 63

III.B - Matriz de Transferência 67

III.C - Formulação para tempo contínuo - Hamiltoniano Z(N) 68

III.D - Transformação Dual 69

III.E - Alça de Wilson, Alça de 't Hooft - Caracterização de fases 72

III.F - Informações Gerais sobre a superfície crítica 76

III.G - Modelos Particulares

III.G.1 - Modelo de Potts-calibre 76

III.G.2 - Modelos de Wilson 78

III.G.3 - Modelo Villain 79

III.H - Diagramas de Fase 82

III.H.1 - Z(2) e Z(3) 82

III.H.2 - Z(4) 83

III.H.3 - Z(5) 85

III.H.4 - Z(6) 85

III.H.5 - Z(7) 87

III.H.6 - Fases para N ⩾ 8 87

III.I - Aproximação de campo médio 88

CAPÍTULO IV - CONCLUSÃO 91

APÊNDICE A 93

APÊNDICE B 96

APÊNDICE C 99

APÊNDICE D 101

REFERÊNCIAS 107

LEGENDA DAS FIGURAS 112

TABELAS 3 e 15 115

FIGURAS 116

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O grande interesse em física teórica pelo estudo de teorias de calibre (gauge) se deve ao fato destas darem origem aos mais promissores modelos para as interações entre as partículas elementares. O protótipo destas teorias é a eletrodinâmica clássica. A simetria de calibre vale tanto para a teoria clássica como para seu análogo quântico (QED).

Existe hoje um modelo que unifica as interações eletromagnéticas e fracas. Este modelo é baseado numa Lagrangeana Yang-Mills[1] para os fotons e mesons vetoriais mediadores das interações. Tal Lagrangeana possui uma simetria de calibre não obeliana, devido à existência de correntes carregadas nas interações fracas.

No caso das interações fortes a teoria mais aceita presentemente é a cromodinâmica quântica[2] (QCD). Nesta teoria as partículas fundamentais são os chamados quarks. Os hadrons são estados ligados dos quarks. Os quarks carregam números quânticos (não observáveis) de cor e de sabor. As interações fortes entre os quarks coloridos são mediadas por um octeto de campos vetoriais coloridos (possuem o número quântico de cor) chamados "gluons" mas que não possuem o número quântico de sabor (insípedos). A QCD é uma teoria renormalizável com simetria de calibre local SU(3) para a cor e simetria global SU(N) (N = 2,3,...) para o sabor.

Por meio de espalhamentos de protons e neutrons de alta energia verificou-se que a pequenas distâncias os quarks devem comportar-se como se fossem livres. Aliado ao fato "experimental" dos quarks não terem sido observados até o presente acredita-se que uma boa teoria para as interações fortes deve satisfa

zer duas exigências:

a) Liberdade assintótica - se regularizamos a teoria com um corte Λ para momentos altos obtemos a constante de acoplamento $g(\Lambda)$ da teoria. Se fizermos Λ ir a infinito $g(\Lambda)$ vai a zero, isto é, a teoria é livre a pequenas distâncias.

b) Confinamento - todos os observáveis físicos (hadrons) são singletos de cor (não coloridos) e não possuem os números quânticos de sabor carregados por um quark isolado; isto é, os quarks devem estar permanentemente confinados.

O primeiro requisito (liberdade assintótica) é satisfeito pela QCD, pois teorias de calibre não abelianas são assintóticamente livres[3]. Desta maneira, teoria de perturbação ordinária[4] pode ser aplicada neste regime fornecendo-nos informações explícitas da física a pequenas distâncias. Contudo, a verificação do confinamento dos quarks envolve o comportamento da QCD para grandes distâncias. Devido às divergências infravermelhas, o problema do confinamento dos quarks é ainda um problema em aberto na teoria quântica de campos.

Em geral, no estudo de teorias de campos renormalizáveis, devido à presença das divergências ultravioletas, é necessária a introdução de um corte Λ para momentos grandes. Uma maneira possível de se introduzir este corte consiste em definir os campos numa rede $(D + 1)$ dimensional (perde-se invariança, por transformações de Lorentz). Existe um mapeamento entre modelos de teorias de campo e de mecânica estatística. O formalismo das integrais funcionais de Feynman é o que mais se presta para estabelecer a conexão com mecânica estatística[6,7], e temos as correspondências:

1 - O número de dimensões do modelo de mecânica estatística é $D + 1$. A teoria de campos (D dimensional) é formulada num espaço Euclidiano com tempo imaginário. Os resultados para tempo real são obtidos por continuação analítica.

2 - A integral de trajetória de Feynman sobre todos os caminhos espa

ço-temporais possíveis corresponde à função de partição da mecânica estatística. A partir destas quantidades, acoplando-se aos campos uma fonte externa, podemos gerar as funções de Green, por exemplo, o propagador na teoria de campos corresponde à função de correlação de dois pontos na mecânica estatística.

3 - Deve ser possível fazer o espaçamento da rede ir a zero mantendo-se as propriedades físicas (recuperando-se a invariança por transformação de Lorentz). Este procedimento é dado pelo grupo de renormalização[6]. Este limite de se fazer o espaçamento da rede ir a zero é obtido no ponto crítico (referente a transição de segunda ordem ou superior) do modelo de mecânica estatística, pois neste ponto o comprimento de correlação diverge (expresso em termos do espaçamento da rede).

Assim, definida a teoria de campos na rede, o problema se torna um problema de mecânica estatística. Em particular os pontos críticos serão de interesse pois eles ditam as propriedades da teoria de campos original.

Teorias de calibre na rede, embora já estudadas anteriormente por Wegner[8] em 1971, foram introduzidas com o intuito de se resolver as questões a) e b) em 1974 por K. Wilson[9]. É simples (ao contrário da teoria no contínuo) estabelecer que teorias de calibre na rede exibem confinamento para acoplamentos fortes[10-13]. Desta maneira, o problema de se obter uma teoria de calibre para as interações fortes consiste no seguinte: provar a existência de liberdade assintótica na rede para acoplamentos fracos e mostrar que a teoria não tem transição de fase, coexistindo na mesma fase liberdade assintótica e confinamento. Resultados por simulação de Monte Carlo sugerem que tal fato ocorra para simetria de calibre SU(2)[14].

Em modelos cuja simetria de calibre é SU(N) o centro do grupo Z(N) desempenha papel importante no mecanismo de confinamento[15-17]. Existem desigualdades que garantem o confinamento em teorias SU(N) caso a teoria Z(N) corresponden

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

te seja confinante[15-17]. Desta forma, como passo preliminar ao estudo de teorias de calibre não abelianas SU(N) é interessante o estudo de teorias mais simples com simetria abeliana Z(N).

Resultados obtidos por relações de recorrências de Migdal[18] mostram relações bastante profundas entre teorias de calibre a quatro dimensões e sistemas de spins bidimensionais. Dentro deste contexto é portanto também importante o estudo de sistemas bidimensionais com simetria global Z(N). Estes são modelos de mecânica estatística extremamente interessantes por serem generalizações do modelo de Ising e englobarem modelos bastante estudados tais como: modelo Potts[19], Villain[20], etc.

Estudaremos e obteremos no presente trabalho os diagramas de fase tanto para sistemas com simetria global Z(N) bidimensionais como para teorias de calibre Z(N) a quatro dimensões.

O conceito de dualidade em mecânica estatística tem sido largamente usado[21-26] desde sua introdução em 1941 por Kramers e Wannier[27]. Tal conceito é importante na aferição das fases e pontos críticos de modelos autoduais. Usaremos para a obtenção dos diagramas de fase dos modelos em estudo, além de considerações de simetria, um conceito generalizado de dualidade.

Implementaremos uma aproximação de campo médio e obteremos, tanto para o sistema de spins Z(N) como para o de calibre Z(N), informações acerca do número de fases dos sistemas.

Utilizaremos, na confecção dos diagramas de fase, a hipótese de serem contínuas as superfícies críticas no espaço de parâmetros. Esta hipótese embora bastante plausível para o sistema de spins[28] é na realidade bastante forte para sistemas com simetria local. Isto se deve ao fato de modelos com simetria global não exibirem transição de fase com parâmetro de ordem local[29,30]. Em adição os resultados obtidos por técnica de Monte Carlo indicam transições de pri

meira ordem para alguns destes modelos[31].

O presente trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo II estudaremos os sistemas bidimensionais com simetria global Z(N). No capítulo III, estudaremos os sistemas a quatro dimensões com simetria local Z(N) e por fim no capítulo IV faremos uma comparação entre os resultados obtidos para os dois sistemas. Por completeza exibimos no apêndice D a nossa autodualidade geral para sistemas tridimensionais com invariança local Z(N) contendo campos de matéria[32-34]

CAPÍTULO II

SISTEMAS DE SPINS BIDIMENSIONAIS COM SIMETRIA GLOBAL Z(N)

II.A - Considerações Gerais

Consideremos a rede quadrada mostrada na figura 1 e denotamos os pontos da rede por pares inteiros

$$n = (n_1, n_2) \tag{II.1}$$

O modelo com simetria global mais simples que se conhece é o modelo de Ising, em que colocamos em cada ponto da rede uma variável "spin" $\sigma(n)$ (variável Z (2)) que pode tomar apenas valores $\sigma(n) = +1$ ("spin" para cima) $\sigma(n) = -1$ ("spin" para baixo). A energia ou ação para este modelo é dada por:

$$A = -J \sum_{n,\mu} \sigma(n)\, \sigma(n+\mu) \tag{II.2}$$

onde μ representa um dos vetores unitários mostrados na figura 1. A constante de acoplamento J é positiva de maneira a favorecer o alinhamento das variáveis.

Vemos claramente que a ação (II.2) possui simetria global Z (2), isto é, A é invariante pela transformação $\sigma \to -\sigma$. Tendo em vista a generalização para Z(N), N > 2 podemos dizer que se girarmos todos os spins de um ângulo $\frac{2\pi}{2}$ a ação não varia.

Este modelo tem sido um dos modelos não triviais mais estudado em Mecânica Estatística desde sua proposição por Ising[35] em 1925. Sua solução exata para o caso bidimensional foi apresentada apenas em 1944 por Onsager[36].

Desde então muitos trabalhos tem sido feitos no sentido de simplificar sua solução [37-39], obter explicitamente as funções de correlações , além de testar aproximações para serem aplicadas em modelos cuja solução exata se desconhece [40].

Para se obter um sistema mais rico é interessante generalizar o modelo de Ising, o que pode ser feito de várias maneiras. Uma delas é considerar variáveis que podem assumir mais que dois valores, por exemplo os modelos Z(N) . Para isto colocamos uma variável S(n) em cada ponto da rede que pode tomar os valores da N ésima raiz da unidade, isto é,

$$S^N = 1 \quad ; \quad S = e^{i\frac{2\pi}{N}\eta} \qquad \eta = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{II.3}$$

Consideraremos neste trabalho a ação ferromagnética mais geral possível [25] com simetria global Z(N) e interação apenas com vizinhos próximos:

$$A = -\sum_{\eta,\mu} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\overline{N}} \frac{J_\alpha}{2} \left[\left(S(n) S^+(n+\mu)\right)^\alpha + \left(S^+(n) S(n+\mu)\right)^\alpha - 2 \right] \right\} \tag{II.4}$$

onde $\overline{N}$ significa o maior inteiro menor ou igual a $\frac{N}{2}$ e "+" é usado para denotar conjugação complexa. A maior potência que aparece nos produtos das variáveis S é $\overline{N}$ porque para potências maiores, devido a (II.3) temos repetições das potências anteriores.

Potts [19] em 1952 propôs o modelo descrito pela ação (modelo Potts):

$$A = -\epsilon \sum_{\eta,\mu} \delta_{S(n), S(n+\mu)} \tag{II.5}$$

onde as variáveis tem energia de interação $-\epsilon$ se alinhadas e zero caso contrário. Pela propriedade

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \left[S(n) S^+(n+\mu) \right]^\alpha = N \delta_{S(n), S(n+\mu)} \tag{II.6}$$

vemos que o modelo Potts é o caso particular da ação geral (II.4) em que

$$J_1 = J_2 = \cdots = \left[\frac{3+(-)^N}{2}\right] J_{\bar{N}} = \frac{2\epsilon}{N}$$

Outro modelo com invariância global Z(N) bastante estudado é o modelo Potts vetorial[41,42], também chamado modelo relógio[43] ("clock model") cuja ação é dada por:

$$A = -\frac{J}{2}\sum_{n,\mu}\left[S(n)S^{+}(n+\mu) + S^{+}(n)S(n+\mu)\right] \qquad (II.7)$$

que é claramente o caso particular em que $J_\alpha = J\,\delta_{\alpha,L}$.

II.B - Matriz de Transferência

Um dos métodos usados na solução de modelos em mecânica estatística é o da matriz de transferência [39]. Decompomos o modelo d - dimensional em (um número muito grande) subsistemas (d-1) dimensionais. O peso estatístico de um determinado estado do modelo pode ser escrito como um produto de fatores, cada qual representando a adição de um subsistema ao modelo.

Nos sistemas bidimensionais em estudo temos em cada ponto da rede quadrada uma variável $S(n_1,n_2)$ que pode tomar N valores. A rede possui M_2 linhas e M_1 colunas ($M_1\,M_2 = M$). Neste caso os subsistemas são formados pelo conjunto de variáveis ao longo de uma coluna. O estado da coluna n_1 é descrito pelo conjunto $\mu^{n_1} \equiv (S(n_1,1), S(n_1,2), \ldots, S(n_1,M_2))$, existindo $(N)^{M_2}$ estados possíveis para cada coluna. Usando-se condições periódicas de contoro, a energia E do sistema pode ser escrita como

$$E = \sum_{n_1=1}^{M_1} E_c(\mu^{n_1}, \mu^{n_1+1})$$

$E_c(\mu^{n_1}, \mu^{n_1+1})$ é a energia referente tanto às interações entre as colunas n_1 e $n_1 + 1$ como às interações dentro da coluna n_1. Ao escrever a função de partição podemos decompor o fator de Boltzmann $\exp(-\beta E)$ em fatores $\exp -\beta E_c(\mu,\mu')$ que chamamos $T(\mu,\mu')$:

$$Z = \sum_{\mu^1} \sum_{\mu^2} \dots \sum_{\mu^{M_2}} T(\mu^1,\mu^2)\, T(\mu^2,\mu^3) \dots T(\mu^{M_2},\mu^1)$$

Podemos pensar que $T(\mu,\mu')$ seja o elemento da matriz quadrada de $(N)^{M_2}$ linhas. Consequentemente podemos escrever Z como um produto de matrizes

$$Z = \sum_{\mu^1} \sum_{\mu^3} \dots \sum_{\mu^{M_2}} T^2(\mu^1,\mu^3)\, T(\mu^3,\mu^4) \dots T(\mu^{M_2},\mu_1)$$
$$= \sum_{\mu^1} T^{M_2}(\mu^1,\mu^1) = \mathrm{Tr}\, T^{M_2}$$

onde T é chamada matriz de transferência. Como o traço de uma matriz é igual à soma de seus autovalores podemos ainda escrever

$$Z = \sum_{i=1}^{(N)^{M_2}} (\Lambda_i)^{M_1}$$

sendo Λ_i os autovalores de T. No limite termodinâmico em que o número de linhas e de colunas vai para infinito $(M_2, M_1 \to \infty)$ apenas o maior autovalor Λ_0 (degenerado no ponto crítico) é relevante ao cálculo da energia livre por partícula

$$f(\beta) = -\lim_{\substack{M_1 \to \infty \\ M_2 \to \infty}} \frac{\beta^{-1}}{M_1 M_2} \ln Z(\beta, M_1, M_2) = \lim_{M_1 \to \infty} -\frac{1}{\beta M_2} \ln \Lambda_0(M_2)$$

Chamando a direção horizontal de direção temporal, podemos pensar que num particular tempo $t = t_0$ os N possíveis valores da variável $S(t_0, i)$ correspondem aos autoestados do operador $\hat{S}(i)$

$$\hat{S}(i)\,|n(i)\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}n(i)}\,|n(i)\rangle$$

O estado da coluna é descrito por um vetor no espaço de Hilbert H, gerado por:

$$|n\rangle = \prod_{i=1}^{M_2} |n(i)\rangle$$

A matriz de transferência será pois um operador $(\hat{T})$ neste espaço H de dimensão $(N)^{M_2}$. Consequentemente o problema de determinar o maior autovalor Λ_0 da matriz T é idêntico ao da determinação da energia do estado fundamental E_0 do Hamiltoniano quântico unidimensional $\hat{H}_s$, definido por:

$$\hat{T} = e^{-\tau \hat{H}_s}$$

onde τ é o espaçamento da rede na direção temporal.

De uma maneira geral, modelos clássicos numa rede d - dimensional são equivalentes a modelos quânticos a (d-1) dimensões.

Obteremos inicialmente, por simplicidade, a matriz de transferência para o modelo Ising.

II.B.1 - Matriz de Transferência para o Modelo de Ising

Consideremos a ação (II.2) definida com acoplamentos diferentes nas direções vertical e horizontal

$$A = -\sum_{j=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{M_2} \left[J_1 \sigma(j,k)\sigma(j,k+1) + J_2 \sigma(j,k)\sigma(j+1,k) \right] \qquad (II.8)$$

e condições periódicas de contorno

$$\sigma(M_1+1,k) = \sigma(1,k) \; ; \; \sigma(j,M_2+1) = \sigma(j,1) \qquad (II.9)$$

Denotando o estado da coluna n_1 como $\mu^{n_1} = (\sigma(n_1,1), \sigma(n_1,2), \ldots, \sigma(n_1,M_2))$ podemos escrever a função de partição

$$Z_1 = \sum_{\mu^1} \sum_{\mu^2} \cdots \sum_{\mu^{M_1}} \prod_{j=1}^{M_1} \exp\left\{\beta \sum_k \left[J_1 \sigma(j,k)\sigma(j,k+1) + J_2 \sigma(j,k)\sigma(j+1,k)\right]\right\} = T_r\left[T^{M_1}\right] \tag{II.10}$$

onde identificamos a matriz de transferência T. O elemento de matriz $T(\mu,\mu')$, sendo μ e μ' configurações de colunas adjacentes, é dado por

$$T(\mu,\mu') = T_2(\mu,\mu)\, T_1(\mu,\mu') \tag{II.11}$$

com

$$T_1(\mu,\mu') = \exp\left\{\beta J_2 \sum_j \sigma_j \sigma'_j\right\} ; \; T_2(\mu,\mu') = \exp\left\{\beta J_1 \sum_j \sigma_j \sigma_{j+1}\right\} \tag{II.12}$$

sendo que T_1 liga as duas colunas enquanto que T_2 envolve interações dentro da própria coluna, de maneira que podemos estender T_2:

$$T_2(\mu,\mu') = \exp\left\{\beta J_1 \sum_j \sigma_j \sigma_{j+1}\right\} \prod_j \delta_{\sigma_j,\sigma'_j} \tag{II.13}$$

Como T_2 é diagonal, podemos considerar $\sigma_i = \pm 1$ como autovalores do operador $\sigma^z_{(i)}$ e trocarmos na expressão (II.13) autovalores por operadores agindo no espaço produto, isto é,

$$\sigma^z_{(i)} = I \otimes I \otimes \ldots \otimes \sigma^z \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

e em cada ponto da rede temos um espaço gerado pelos vetores $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Assim temos:

$$T_2 = \exp\left(\beta J_1 \sum_j \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right) \tag{II.14}$$

Para expressarmos T_1 em termos de operadores, observemos que:

$$e^{\beta J_2 \sigma_j \sigma_j'} = e^{\beta J_2} \delta_{\sigma_j, \sigma_j'} + e^{-\beta J_2} \delta_{\sigma_j, -\sigma_j'} \tag{II.15}$$

Por outro lado, os elementos de matriz dos operadores I e σ^x são dados por:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j | I | \sigma_j' \rangle &= \langle \sigma_j | \sigma_j' \rangle = \delta_{\sigma_j, \sigma_j'} \\ \langle \sigma_j | \sigma_j^x | \sigma_j' \rangle &= \langle \sigma_j | -\sigma_j' \rangle = \delta_{\sigma_j, -\sigma_j'} \end{aligned} \tag{II.16}$$

onde σ^x são operadores que rodam σ^z, ou seja

$$\sigma^x \sigma^z = e^{i\frac{2\pi}{2}} \sigma^z \sigma^x \Rightarrow \{\sigma^x, \sigma^z\} = 0 \tag{II.17}$$

Podemos então escrever

$$e^{\beta J_2 \sigma_j \sigma_j'} = \langle \sigma_j | e^{\beta J_2} I + e^{-\beta J_2} \sigma_j^x | \sigma_j' \rangle \tag{II.18}$$

e vemos então de (II.12) que

$$T_1(\mu, \mu') = \prod_j \langle \sigma_j | e^{\beta J_2} I + e^{-\beta J_2} \sigma_j^x | \sigma_j' \rangle = \langle \mu | T_1 | \mu' \rangle \tag{II.19}$$

com

$$\begin{aligned} T_1 = \left(e^{\beta J_2} I + e^{-\beta J_2} \sigma_1^x\right) \otimes \left(e^{\beta J_2} I + e^{-\beta J_2} \sigma_2^x\right) \otimes \cdots \\ \otimes \left(e^{\beta J_2} I + e^{-\beta J_2} \sigma_N^x\right) = \prod_j \left(e^{\beta J_2} + \sigma_j^x e^{-\beta J_2}\right) \end{aligned} \tag{II.20}$$

como $\sigma_j^{x^2} = 1$ podemos escrever:

$$C e^{\beta J_2^* \sigma_j^x} = C \left[ch \beta J_2^* + \sigma_j^x sh \beta J_2^*\right] = e^{\beta J_2} + \sigma_j^x e^{-\beta J_2} \tag{II.21}$$

donde identificamos

$$\beta J_2^* = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \beta J_2 \quad , \quad G = (2 \operatorname{sh} 2\beta J_2)^{1/2} \tag{II.22}$$

consequentemente podemos escrever

$$T_1 = (2 \operatorname{sh} 2\beta J_2)^{M_2/2} e^{\beta J_2^* \sum_j \sigma_j^x} \tag{II.23}$$

Juntando-se T_1 e T_2 o operador matriz de transferência para o modelo de Ising será então

$$T = (2 \operatorname{sh} 2\beta J_2)^{M_2/2} \exp\left\{\beta J_1 \sum_j \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right\} \exp\left\{\beta J_2^* \sum_j \sigma_j^x\right\} \tag{II.24}$$

II.B.2 - Matriz de Transferência para o Modelo Z(N)

Procedemos de maneira análoga ao que fizemos no modelo de Ising. Sendo μ *e* μ' *as configurações das variáveis Z(N) em colunas adjacentes, obtemos para a ação geral (II.4) (em que as constantes de acoplamento são iguais em ambas as direções) a matriz:*

$$T(\mu,\mu') = T_2(\mu,\mu)\, T_1(\mu,\mu') \tag{II.25}$$

com

$$T_2(\mu,\mu) = \exp\left\{\sum_j \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_\alpha}{2}\left[(S(j)S^+(j+1))^\alpha + (S^+(j)S(j+1))^\alpha - 2\right]\right\} \tag{II.26}$$

$$T_1(\mu,\mu') = \exp\left\{\sum_j \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_\alpha}{2}\left[(S^+_{(j)}S'_{(j)})^\alpha + (S_{(j)}S'^+_{(j)})^\alpha - 2\right]\right\} \qquad (II.27)$$

Como T_2 é diagonal podemos considerar $S(i) = e^{\frac{i\,2\pi}{N}n(i)}$ $n(i) = 0,1\ldots N-1$ como autovalor do operador $\hat{S}(i)$ e trocamos em (II.26) autovalores por operadores que agem no espaço produto, isto é:

$$\hat{S}(i) = I \otimes I \otimes \ldots \otimes \hat{S} \otimes \ldots \otimes I$$

e em cada ponto da rede temos um espaço gerado pelos vetores

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$, e podemos escrever

$$T_2 = \exp\left\{\sum_j \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_\alpha}{2}\left[(\hat{S}_{(j)}\hat{S}^+_{(j+1)})^\alpha + (\hat{S}^+_{(j)}\hat{S}_{(j+1)})^\alpha - 2\right]\right\} \qquad (II.28)$$

onde "+" significa que o hermitiano conjugado do operador deve ser tomado.

Para obtermos uma expressão para T_1 em termos de operadores, observamos que:

$$\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_\alpha}{2}\left[(S^+_j S'_j)^\alpha + (S_j S'^+_j)^\alpha - 2\right]\right\} = \delta_{|n_i-n_j|,0} + \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \beta J_\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{N}\alpha - 1\right)\right\} \times$$
$$\times\, \delta_{|n_i-n_j|,1} + \ldots + \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \beta J_\alpha\left[\cos\frac{2\pi}{N}\alpha(N-1) - 1\right]\right\}\cdot\delta_{|n_i-n_j|,N-1} \qquad (II.29)$$

Assim, necessitamos operadores que generalizem σ^x, isto é, que tenham elementos não nulos entre autoestados diferentes de $\hat{S}(j)$. Tais operadores devem rodar os autoestados de $\hat{S}$, ou seja, sendo $|n\rangle$ um autoestado de $\hat{S}$ com autovalor $\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$ temos:

$$\langle n'|\hat{R}_\alpha|n\rangle = \delta_{n',n+\alpha} \ (\mathrm{mod.}\ N) \qquad (II.30)$$

o que implica

$$\hat{R}_\alpha |n\rangle = |n+\alpha\rangle \ (\mathrm{mod.}N) \ ; \ \hat{R}_{\alpha_1+\alpha_2} = \hat{R}_{\alpha_1}\cdot\hat{R}_{\alpha_2} = \hat{R}_{\alpha_2}\cdot\hat{R}_{\alpha_1} \tag{II.31}$$

e assim

$$\begin{aligned} &\hat{R}_\alpha \hat{R}^+_\alpha = \hat{R}^+_\alpha \hat{R}_\alpha = \hat{R}^N_\alpha = I \\ &\hat{R}_\alpha = \hat{R}_1^\alpha \equiv \hat{R}^\alpha \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{II.32}$$

Na representação em que S é diagonal temos

$$\begin{aligned} &\hat{R}_0 = \hat{R}^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \ \hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \\ &\hat{R}_2 = \hat{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \hat{R}_{N-1} = R^{N-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{II.33}$$

Da definição do operador $\hat{R}$ segue-se que:

$$\begin{aligned} &\hat{S}(i)\hat{R}(i)\,|n(i)\rangle = \hat{S}(i)\,|n(i)+1\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}(n(i)+1)}\,|n(i)+1\rangle \\ &e^{i\frac{2\pi}{N}(n(i)+1)}\,\hat{R}(i)\,|n(i)\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}}\,\hat{R}(i)\,\hat{S}(i)\,|n(i)\rangle \end{aligned} \tag{II.34}$$

ou seja os operadores $\hat{S}(i)$, $\hat{R}(j)$ satisfazem à álgebra:

$$\begin{aligned} &[\hat{S}(i), \hat{S}(j)] = [\hat{R}(i), \hat{R}(j)] = [\hat{S}(i), \hat{R}(j)] = 0 \quad \text{se } i \neq j \\ &\hat{S}(i)\hat{R}(i) = e^{i\frac{2\pi}{N}}\,\hat{R}(i)\,\hat{S}(i) \end{aligned} \tag{II.35}$$

Usando-se (II.29) e (II.30) podemos então escrever T_1 como:

$$T_1 = \prod_j \sum_{\eta=0}^{N-1} \hat{R}^\eta(j) \exp\left\{ \sum_{\alpha=1}^{\overline{N}} \beta J_\alpha \left(\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\eta - 1 \right) \right\} \tag{II.36}$$

É mais conveniente escrever T como exponencial de um operador. Para isto usamos a identidade

$$\sum_{\eta=0}^{N-1} \hat{R}^{\eta} \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \beta J_{\alpha}\left(\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\eta - 1\right)\right\} = \exp\left\{\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_{\alpha}(J_1,\ldots,J_{\bar{N}};N)}{2}\left(\hat{R}^{\alpha} + \hat{R}^{+\alpha}\right)\right\} \qquad (II.37)$$

que é sempre válida devido a (II.32) e o fato das interações serem do tipo cosseno (ferromagnéticas). No apêndice A mostramos como se calculam as funções f_{α} e exibimos os resultados para N = 2, 3, 4 e 5. Pela identidade (II.37) segue-se que

$$T_1 = \prod_j \exp\left[\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_{\alpha}}{2}\left(\hat{R}^{\alpha}(j) + \hat{R}^{+\alpha}(j)\right)\right] \qquad (II.38)$$

Usando-se (II.28) e (II.38) obtemos finalmente a seguinte expressão para T

$$T = \exp\left\{\sum_j \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_{\alpha}}{2}\left[\left(S(j)S^{+}(j+1)\right)^{\alpha} + \left(S^{+}(j)S(j+1)\right)^{\alpha} - 2\right]\right\}$$
$$\times \exp\left\{\sum_j \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{f_{\alpha}}{2}\left[R^{\alpha}(j) + R^{+\alpha}(j)\right]\right\} \times \exp(f_0) \qquad (II.39)$$

onde daqui em diante omitiremos o chapéu dos operadores.

II.C - Formulação para tempos contínuos - Formulação Hamiltoniana

O problema de se determinar o maior autovalor da matriz de transferência, conforme discutido na seção (II.B), é idêntico ao da determinação do estado fundamental do Hamiltoniano quântico[5,39]

$$\hat{H}_s = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{T} \qquad (II.40)$$

sendo τ , como antes, o espaçamento da rede na direção temporal (horizontal).

De uma maneira geral o operador $\hat{T}$ é composto por produtos de exponenciais de operadores que não comutam (veja eq. II.39). Pelo fato de

$$\exp(\hat{A})\cdot\exp(\hat{B}) = \exp\left(\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\dots\right) \qquad (II.41)$$

$\hat{H}_s$ é em geral complicado. Contudo ao invés da formulação simétrica (acoplamentos iguais na horizontal e vertical) dos modelos Z(N) feita na seção anterior, podemos fazer uma formulação altamente assimétrica[44,45]. Olhamos para o limite de tempo contínuo (limite em que o espaçamento na horizontal vai a zero). Neste limite os termos $[\hat{A}, \hat{B}]$ +... tornam-se desprezíveis e temos o Hamiltoniano (muito mais simples) para tempos contínuos (espaçamento espacial discreto):

$$\lim_{\tau\to 0}\hat{H}_s = \hat{H} \qquad (II.42)$$

Para que a mesma física (para grandes distâncias) do caso discreto seja obtida, o processo de limite para tempos contínuos nos leva a relações altamente anisotrópicas entre os acoplamentos espaciais e temporais.

Obteremos inicialmente, por simplicidade, o Hamiltoniano para o modelo de Ising em seguida o Hamiltoniano para o sistema geral de spins com simetria Z(N).

II.C.1 - Hamiltoniano do modelo de Ising

Partimos da matriz T com acoplamentos J_1 e J_2 nas direções espacial e temporal, respectivamente

$$\hat{T} = (2\operatorname{Sh}2\beta J_2)^{M_2/2}\exp\left\{\beta J_1\sum_j \sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right\}\cdot\exp\left\{\beta J_2^*\sum_j \sigma_j^x\right\} \qquad (II.24)$$

sendo J_2^* dado por (II.22).

Queremos tomar o limite $\tau \to 0$ de maneira que $\hat{H}$ definido por

$$\hat{T} = \exp(-\tau \hat{H}) \tag{II.43}$$

seja finito. Para isto é necessário que simultaneamente $J_2 \to \infty$ e $J_1 \to 0$, ou seja

$$\beta J_1 \sim \tau \quad e$$

$$\beta J_2^* = -\frac{1}{2} \ln(\operatorname{th} \beta J_2) \sim \exp(-2\beta J_2) \sim \tau \tag{II.44}$$

O que nos diz que βJ_1, e $\exp(-2\beta J_2)$ devem ser proporcionais

$$\beta J_1 = \lambda \exp(-2\beta J_2) \tag{II.45}$$

Identificando o espaçamento temporal

$$\tau = \exp(-2\beta J_2) \tag{II .46a}$$

temos

$$\beta J_1 = \lambda \tau \tag{II .46b}$$

Assim de (II.24), (II.43) é o fato de em (II.41) $[\hat{A}, \hat{B}] = \mathcal{O}(\tau^2)$ temos:

$$\hat{H} = -\lambda \sum_j \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \sum_j \sigma_j^x \tag{II.47}$$

que é o Hamiltoniano (tempos contínuos) do modelo de Ising[5,45].

É interessante entender o significado das relações de (II.45) e(II.46) mais intuitivamente[5,45].

Olhemos para a função de correlação para o caso em que $J_1 = J_2$,

$\Gamma(n) = < \sigma^z(n)\ \sigma^z(0) >$. Como a rede é invariante por rotações de $\frac{\pi}{2}$ a função de correlação também será. Mostramos na figura 2a curvas em que $\Gamma(n)$ é constante. Para grande $|\ n\ |$ elas são aproximadamente circulares ($J_1=J_2$). Se fizermos $J_2>J_1$, então correlações na direção temporal serão maiores, de maneira que as curvas $\Gamma(n)$ constante serão elipses com eixo maior na direção temporal, como por exemplo, mostra a Fig. 2b. Mas como queremos ter a mesma física envolvida nas duas formulações devemos compensar a anisotropia $J_2>J_1$ distorcendo a rede, isto é, fazendo $\tau < a$ de maneira que os contornos de $\Gamma(n)$ permaneçam os mesmos, como mostramos na Fig. 2c. Assim, vemos claramente que o processo de se fazer $J_2 \to \infty$, faz com que tenhamos o espaçamento τ na direção temporal indo a zero (tempo contínuo) e a relação de escala $\tau = \exp(-2\beta J_2)$ é a relação que garante que a mesma física (para grandes distâncias) seja extraída das diferentes formulações.

II.C.2 - Hamiltoniano para Z(N) geral

Analogamente ao caso Z(2) partimos da matriz de transferência obtida em (II.39)

$$T = \exp\left\{\beta J_1 \sum_j \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{J_\alpha}{2J_1}\left[(S^+_{(j)} S_{(j+1)})^\alpha + h.c. - 2\right]\right\} \times$$
$$\exp\left\{\sum_i \sum_{\alpha=0}^{N} \frac{f_\alpha}{2}\left[R^\alpha(i) + R^{+\alpha}(i)\right]\right\}$$

sendo agora f_α funções dos acoplamentos na direção temporal (horizontal) K_1, K_2, ..., K_N e que satisfazem (II.37).

É conveniente definir os pesos estatísticos

$$X_\alpha = e^{-\epsilon_\alpha/kT} = \exp\left\{\beta k_1 \sum_{\eta=1}^{N} \frac{K_\eta}{k_1}\left(\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\eta - 1\right)\right\}, \qquad (II.48)$$

$$X_\alpha = X_{N-\alpha} \quad (\text{Mod. } N)$$

onde ϵ_α é a energia de interação de dois spins que fazem entre si um ângulo de $\frac{2\pi}{N}\alpha$. Os f_α $(K_1, K_2, \ldots K_{\bar{N}})$ então satisfazem à equação (veja apêndice A).

$$\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} f_\alpha \cos\frac{2\pi}{N}\eta\alpha = \ln\left\{\sum_{\alpha=0}^{N-1} X_\alpha e^{i\frac{2\pi}{N}\eta\alpha}\right\}; \eta = 0,1,\ldots,\bar{N} \qquad (A.6)$$

Como um dos pares de constantes K_α, J_α é arbitrário para caracterizar um particular modelo, é suficiente fixar as razões

$$K'_\alpha = \frac{K_\alpha}{K_1}, \quad J'_\alpha = \frac{J_\alpha}{J_1} \qquad \alpha = 2,3,\ldots,\bar{N} \qquad (II.49)$$

Para que permaneçamos no mesmo modelo durante o limite $\tau \to 0$, devemos manter K'_α e J'_α constantes enquanto $K_1 \to \infty$ e $J_1 \to 0$. Isto é, devemos ajustar J_1 e K_1 apropriadamente neste limite para obtermos $T = e^{-\tau H}$. É fácil vermos que assim como no modelo de Ising devemos ter:

$$\beta J_1 \sim \tau \qquad (II.50)$$

Contudo a identificação de τ com os f_α não é imediata pelo fato dos f_α serem de ordens diferentes no limite $K_1 \to \infty$. Neste limite temos que $x_\alpha \ll 1$ e consequentemente a equação (A.6) pode ser escrita

$$\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} f_\alpha \cos\frac{2\pi}{N}\eta\alpha = \ln\left\{1 + \sum_{\alpha=1}^{N-1} X_\alpha e^{i\frac{2\pi}{N}\eta\alpha}\right\} \qquad (II.51)$$

$$\simeq \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} (2 - \delta_{\alpha,N/2}) X_\alpha \cos\frac{2\pi}{N}\eta\alpha \qquad \eta = 0,1,\ldots,\bar{N}$$

O que implica que neste limite temos:

$$f_\alpha \simeq (2 - \delta_{\alpha,N/2}) X_\alpha \qquad \alpha = 1,2,\ldots,\bar{N} \qquad (II.52)$$

Devemos então olhar para (II.48) e procurar para dado modelo (conjunto $\{K'_\alpha\}$ fixo) qual $\tilde{\alpha}$ nos dará o maior x_α, isto é:

$$X_{\tilde{\alpha}} = \sup\{X_1, X_2, \ldots, X_{\bar{N}}\}$$

e fazemos a identificação:

$$\tau = (2 - \delta_{\tilde{\alpha}, N/2}) X_{\tilde{\alpha}} \tag{II.53}$$

e assim de (II.50) temos:

$$\beta J_1 = \lambda \tau = \lambda (2 - \delta_{\tilde{\alpha}, N/2}) X_{\tilde{\alpha}} \tag{II.54}$$

desta maneira os f_α ($\alpha \neq \tilde{\alpha}$) serão de ordem superior, isto é; $\mathcal{O}(\tau^{X_{\tilde{\alpha}}/X_\alpha})$ e temos o Hamiltoniano para tempos contínuos

$$H = -\lambda \sum_j \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J'_\alpha}{2} \left[\left(S(j) S^+(j+1) \right)^\alpha + h.c. - 2 \right] - \sum_j \frac{1}{2} \left(R^{\tilde{\alpha}} + R^{+\tilde{\alpha}} \right) \tag{II.55}$$

Onde vemos que o Hamiltoniano só contem uma potência do operador R ao contrário da matriz de transferência que possui todas as potências de R. Esta diferença será importante quando estudarmos as transformações de dualidade (veja seção D).

Para o caso do modelo Potts vetorial em que $J_\alpha = J\delta_{\alpha,1}$ temos de (II.48) que $\tilde{\alpha} = 1$ e o Hamiltoniano é dado por:

$$H = -\lambda \sum_i \frac{1}{2} \left[S(i) S^+(i+1) + h.c - 2 \right] - \frac{1}{2} \sum_i \left(R(i) + R^+(i) \right) \tag{II.56a}$$

com

$$\beta J = \lambda(2-\delta_{N,2})X_1 = \lambda(2-\delta_{N,2})\exp\{k\beta(\cos\tfrac{2\pi}{N}-1)\} \qquad (II.56b)$$

Para o modelo Potts escalar temos:

$$J_1 = J_2 = \cdots = \left[\frac{3-(-)^N}{4}\right]J_{\bar{N}} \; ; \; X_1 = X_2 = \cdots = X_{\bar{N}}$$

de maneira que temos o Hamiltoniano:

$$H = -\lambda\sum_i\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{\alpha,N/2}\right)\left\{\left[\left(S^+(i)S(i+1)\right)^\alpha + h.c-2\right]+\left[R^\alpha(i)+h.c.\right]\right\} \qquad (II.57)$$

II.D - Transformação Dual

Transformações de dualidade em geral, mapeiam um modelo de mecânica estatística em um outro. Existem contudo modelos cuja transformação dual conduz ao mesmo modelo numa temperatura diferente. Estes modelos, entre os quais se inclui o modelo de Ising, são chamados autoduais[21-27] e exibem uma grande simetria entre os comportamento a baixas e altas temperaturas.

Mostraremos nesta seção que nosso modelo com simetria global Z(N) (II.6) é autodual num sentido geral. Para a introdução da transformação dual necessitamos da rede dual à rede direta. A rede dual de uma rede quadrada é também quadrada com pontos localizados nos centros das células da rede direta. Para o nosso caso em que temos um sistema quântico a 1 - dimensão (II.39, II.55) os pontos da rede dual localizam-se nas ligações da rede original (veja fig. 3). Nos pontos da rede dual podemos definir os operadores[25].

$$\sigma(\tilde{i}) = S(i)\,S^{+}(i+1) \quad i = 1,\dots,M_2-1; \quad \sigma(\tilde{M}_2) = S(M_2)$$

$$\rho(\tilde{i}) = \Big[\prod_{j<i} R^{+}(j)\Big]\, R^{+}(i) \qquad i = 1,2,\dots,M_2 \tag{II.58}$$

Os operadores $\sigma(\tilde{i})$ *descrevem os estados de dois operadores* S *vizinhos enquanto que* $\rho(\tilde{i})$ *é um operador não local (chamado operador de desordem*[46]*) que "roda" de* $\frac{2\pi}{N}$ *todos os operadores* $S(j)$ *à esquerda do ponto* $\tilde{i}$ *(veja figura 4).*

Observemos que os operadores duais σ,ρ *satisfazem à mesma álgebra que os operadores* S, R, *isto é:*

$$\sigma^N = \rho^N = 1 \;;\; [\sigma(\tilde{i}), \rho(\tilde{j})] = 0 \quad \text{Se } \tilde{i} \neq \tilde{j} \tag{II.59a}$$

$$\rho(\tilde{i})\,\sigma(\tilde{i}) = e^{i\frac{2\pi}{N}}\,\sigma(\tilde{i})\,\rho(\tilde{i}) \tag{II.59b}$$

Da definição dos operadores duais (II.58) temos:

$$\rho^{+}(\tilde{i})\,\rho(\tilde{i}+1) = R^{+}(i+1) \tag{II.60}$$

assim podemos escrever a matriz de transferência (II.39) ou o Hamiltoniano (II.55) em termos dos operadores duais:

$$T_D = \exp\Big\{\sum_{\tilde{j}}\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_\alpha}{2}\Big[\sigma(\tilde{j})^{\alpha} + \sigma^{+}(\tilde{j})^{\alpha} - 2\Big]$$
$$\times \exp\Big\{\sum_{\tilde{j}}\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2}\Big[\big(\rho(\tilde{j})\,\rho^{+}(\tilde{j}+1)\big)^{\alpha} + h.c.\Big]\Big\} \times \exp(f_0\} \tag{II.61}$$

e
$$H_D = +\lambda \left\{ - \sum_{\tilde{j}=1}^{M_2-1} \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\rho(\tilde{j})\rho^{+}(\tilde{j}+1)\right)^{\tilde{\alpha}} + \left(\rho^{+}(\tilde{j})\rho(\tilde{j}+1)\right)^{\tilde{\alpha}} \right] - \sum_{\tilde{j}=1}^{M_2-1} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2} \left[\sigma(\tilde{j})^{\alpha} + \sigma^{+}(\tilde{j})^{\alpha} - 2 \right] \right\} \qquad (II.62)$$

T_D e H_D são na realidade as representações duais da parte volumétrica de T e H obtidos em (II.39) e (II.55). Teríamos ainda termos de superfície, por exemplo, para o Hamiltoniano teríamos a expressão completa:

$$H = H_D - \lambda \left\{ \frac{1}{2} \left(\rho(\tilde{1})^{\alpha} + \rho^{+}(\tilde{1})^{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\rho^{+}(\tilde{M}_2)\rho(\tilde{M}_2-1) \right)^{\tilde{\alpha}} + h.c. \right] \right\} \qquad (II.63)$$

O efeito físico importante dos termos de superfície é que eles quebram a N - degenerescência do vácuo na região de λ grande[47], mas não afetarão o caráter das transições de fase para uma rede grande. Daqui por diante, como estamos interessados em diagramas de fase, esqueceremos os termos de superfície[37]. Assim de (II.61) e (II.39) vemos que T e T_D tem a mesma forma em termos de operadores S, R e ρ,σ, respectivamente. Podemos então escrever, lembrando de (II.10):

$$Z\left(\{\beta J_\alpha\},\{f_\beta\}\right) = e' Z\left(\{f_\alpha\},\{\beta J_\beta\}\right) \qquad (II.64)$$

sendo e' uma constante irrelevante.

Vemos assim, que a transformação dual $S,R \to \rho,\sigma$ leva pontos do espaço de parâmetros $\{\beta J_\alpha\}$ a pontos $\{f_\alpha\}$ ainda pertencentes ao mesmo espaço. Portanto, a transformação dual de nosso modelo geral Z(N) (II.6) com acoplamentos $\{\beta J_\alpha\}$ nos leva ao mesmo modelo com constantes de acoplamento $\{f_\alpha\}$.

Modelos em mecânica estatística que possuem uma só constante de acoplamento e nos quais a transformação dual corresponde a uma mudança na temperatura são chamados autoduais[27]. Chama-lo-emos modelos autoduais no sentido de

Kramers e Wannier (K-W). Neste sentido o que temos em (II.64) é que a ação geral com simetria global Z(N), definida por (II.6) é autodual num sentido geral. A transformação dual promove simplesmente uma mudança dos acoplamentos originais $\{\beta J_\alpha\}$ para $\{\beta_\alpha\}$. Observemos que $\beta_\alpha(\beta) = \beta J_\alpha$ $\alpha = 1, \ldots, \bar{N}$ pois o modelo retorna ao modelo original ao fazermos uma nova transformação dual.

Vemos contudo que a formulação Hamiltoniana (II.62) não nos fornece tal auto-dualidade geral. Veremos mais adiante, que certos modelos que não são autoduais (no sentido Kramers-Wannier) numa formulação Euclidiana, tornam-se autoduais na formulação Hamiltoniana.

II.E - Parâmetro de ordem, desordem - Condensação de kinks e desordem

Como é bem sabido na literatura[28] modelos com simetria global discreta, como os modelos que estamos tratando aqui, possuem pelo menos duas fases. As suas fases são caracterizadas por parâmetros de ordem e desordem[46,25]. Na fase de baixas temperaturas o sistema está totalmente ordenado. Toda a simetria global está quebrada e o sistema está magnetizado

$$\langle S(i) \rangle \neq 0 \quad [\text{fase de baixas temp.}] \qquad (II.65a)$$

A altas temperaturas toda a simetria global é recuperada e o sistema é não magnetizado.

$$\langle S(i) \rangle = 0 \quad [\text{fase de altas temp.}] \qquad (II.65b)$$

Pelo fato de $\langle S_{(i)} \rangle$ ser não nulo na fase ordenada e nulo na fase desordenada, ele é denominado parâmetro de ordem[46] do sistema.

O valor esperado do operador dual $\rho(\tilde{i})$, conforme definimos em (II.58a)

$$\langle \rho(\tilde{i}) \rangle = \left\langle \left[\sum_{j<i} R^{+}(j) \right] R^{+}(i) \right\rangle \qquad (II.66)$$

é nulo na fase de baixas temperaturas e diferente de zero na fase de altas temperaturas (por isto o chamamos parâmetro de desordem). Podemos ver isto intuitivamente. Observe que na fase de baixas temperaturas, quando aplicamos o operador $\rho(\tilde{i})$ a um estado na representação em que S é diagonal, o efeito é rodar de $\frac{2\pi}{N}$ todos os auto estados de $S(j)$ ("spins") à esquerda do ponto (i) (Veja Fig. 4). Assim, invertemos um número infinito de "spins", obtendo um estado ortogonal ao estado original, isto é:

$$\langle \rho \rangle = 0 \qquad \text{(fase baixa temperatura)} \qquad (II.67)$$

Mas se o sistema é suficientemente desordenado ele não se importa com as condições de contorno. O estado resultante da rotação de infinitos "spins" pode ter uma projeção no estado original, isto é:

$$\langle \rho \rangle \neq 0 \qquad \text{(altas temperaturas)} \qquad (II.68)$$

As configurações de spin criadas pela ação do operador $\rho^{n}(i)$ $(n=1,2..$ $.,\overline{N})$ num estado completamente ordenado $(T = 0;\ S_{(i)} \mid 0 >_{T=0} = \mid 0 >_{T=0}, \forall i)$ chamamos "kinks":

$$|n; \text{kink}\rangle = \rho^{n}(\tilde{i}) |0\rangle_{T=0} \qquad (II.69)$$

Como tais configurações são ortogonais ao estado fundamental (veja

II.67) na fase de baixas temperaturas não temos kinks isolados. À medida que a temperatura cresce a partir de T=0 começam a surgir configurações em que se tem ilhas de spins rodados de $n\,\frac{2\pi}{N}$. Podemos pensar nestas configurações de spins como sendo pares de kink e anti-kink do tipo n distanciados por uma distância igual ao do tamanho da ilha (veja Fig. 5).

Assim, a fase de baixas temperaturas para nossos modelos Z(N) pode ser vista como uma fase em que a simetria global Z(N) é totalmente quebrada. Não existem kinks isolados, apenas pares de kink-anti-kink de todos os tipos, isto é:

$$\text{i)} \qquad \langle S^n \rangle \neq 0 \quad , \langle \rho^n \rangle = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots, \overline{N} \tag{II.70}$$

À medida que a temperatura cresce, a distância entre os pares kink-anti-kink diminui. Na temperatura crítica temos um fenômeno de condensação de kinks, isto é, eles se tornam não massivos e os pares são "ionizados" sem gastar energia.

Para a caracterização das várias fases dos modelos Z(N) é interessante o uso da álgebra dos operadores de ordem e desordem. Usando-se (II.58a), se $i < j$ obtemos:

$$\rho^{\ell}(j)\, S^{m}(i) = e^{i\frac{2\pi}{N}\ell m}\, S^{m}(i)\, \rho^{\ell}(j) \tag{II.71}$$

como consequência, no limite $(i-j) \to \infty$ teremos a relação entre os valores esperados:

$$\langle \rho^{\ell}(j)\, S^{m}(i) \rangle \xrightarrow[|i-j|\to\infty]{} \langle \rho^{\ell}(j) \rangle \langle S^{m}(i) \rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}\ell . m} \langle S^{m}(i) \rangle \langle \rho^{\ell}(j) \rangle \tag{II.72}$$

Como a nossa ação (II.6) é bastante geral, vários tipos de fases po

dem ocorrer dependendo dos acoplamentos $\{J_\alpha\}$.

a) Pode acontecer que o kink do tipo $\ell \neq 1$ $\{\ell = 2,3,\ldots,\overline{N}\}$ e divisor de N possua energia menor do que os outros tipos de kinks. Teremos então uma fase massiva que é um condensado de kinks do tipo ℓ, com pares de kink- anti-kink dos outros tipos. Nesta fase valerá:

$$\langle \rho^\ell \rangle \neq 0 \; ; \langle \rho^n \rangle = 0 \qquad (n,\ell = \text{primos entre si}) \qquad (II.73)$$

Pela Eq. (II.72) vemos que $\langle S^n \rangle = 0$ $n \neq N/\ell$. Como esta fase é massiva devemos ter $\langle S^{N/\ell} \rangle \neq 0$ (caso contrário teríamos excitações não massivas, e esta seria uma fase do tipo (iv) abaixo descrita). Este tipo de fase, é então caracterizada por:

$$ii) \; \langle \rho^\ell \rangle \neq 0 \, , \langle \rho^n \rangle = 0 \qquad (n,\ell = \text{primos entre si}) \qquad (II.74)$$
$$\langle S^{N/\ell} \rangle \neq 0, \; \langle S^m \rangle = 0 \qquad \ell . m \neq N$$

Como a potência mais baixa de S com valor esperado diferente de zero é N/ℓ esta fase possui simetria $Z(N/\ell)$.

b) Mas se ocorrer que o kink do tipo 1 (ou do tipo ℓ em que ℓ e N são primos entre si) tiver menor energia teremos $\langle \rho \rangle \neq 0$. Pela equação (II.72) isto implica $\langle S^n \rangle = 0$ $n = 1, 2, 3, \ldots \overline{N}$, isto é, toda a simetria é recuperada de maneira que devemos ter um condensado de todos os tipos de kinks (esta é a fase típica para altas temperaturas):

$$iii) \quad \langle \rho^n \rangle \neq 0 \qquad n = 1,2,\ldots,\overline{N}$$
$$\langle S^n \rangle = 0 \qquad n = 1,2,\ldots,\overline{N} \qquad (II.75)$$

c) Consideremos agora a situação em que temos uma simetria $Z(N/n)$ (isto é, $< S^m > = 0, m < N/n$ e $< S^{N/n} > \neq 0$) e que $< \rho^n > = < S^\ell > = 0$ com $\ell.n \neq N$. O fato de termos simetria $Z(N/n)$ implica $< S^\ell > = 0$. Pensaríamos deste modo numa fase desordenada com kinks massivos do tipo n ($\ell.n \neq N$) que desordenam a fase de maneira que o sistema não se importa com as condições de contorno. Isto contudo, nos levaria a uma fase do tipo (ii) com $< \rho^n > \neq 0$. Para termos $< S^\ell > = 0$ e $< \rho^n > = 0$ conjecturamos que nesta fase devemos ter excitações de massa zero (os kinks são não massivos). O comprimento de correlação das variáveis ordem ou desordem são infinitos de modo que as funções de correlação das variáveis ordem ou desordem tem decaimento polinomial com a distância. Em síntese; temos a possibilidade:

$$\text{iv)} \quad \left.\begin{array}{ll} \langle S^{N/n} \rangle \neq 0 & \text{simetria } Z(N/n) \\ \langle \rho^n \rangle = \langle S^\ell \rangle = 0 & \text{com } \ell.n \neq N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{fase "mole"} \\ m = 0 \end{array} \qquad (II.76)$$

d) Uma última caracterização que poderíamos ter seria:

$$\text{v)} \quad \langle S^n \rangle \neq 0 \quad ; \langle \rho^\ell \rangle \neq 0 \quad \text{com } \ell.n \neq N \qquad (II.77)$$

mas vemos diretamente de (II.72) que tal fase inexiste a não ser que $\ell.n = N$, neste caso o que teríamos é uma fase do tipo (ii).

II.F - Informações Gerais sobre a superfície crítica

O modelo geral $Z(N)$ tem um espaço de parâmetros $\bar{N}$ dimensional. Cada modelo particular definido por um conjunto $\{J_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \bar{N}$ descreve neste espaço uma trajetória bem definida à medida que a temperatura varia. Tal traje

tória é denominada caminho termodinâmico do particular modelo.

Conforme vimos na seção D (veja Eq. II.64) o nosso modelo geral $Z(N)$ é autodual num sentido geral.[25] A transformação dual leva pontos $\{\beta J_\alpha\}$ do espaço de parâmetros para pontos $\{f_\alpha\}$ ainda contidos no mesmo espaço. O conjunto de pontos invariantes pela transformação dual (pontos fixos) formam uma superfície o qual chamamos superfície autodual. Esta superfície é cortada por caminhos termodinâmicos correspondentes a modelos com acoplamentos J_α. Se os modelos que cortam a superfície autodual tiverem apenas duas fases, como a transformação dual troca a variável ordem por desordem ($< S > \leftrightarrow < \rho >$), os pontos de interseção dos caminhos termodinâmicos do modelo com a superfície autodual são seus pontos críticos. Assim a superfície autodual coincide com a superfície crítica na região do espaço de parâmetros em que esta é cortada por caminhos termodinâmicos correspondentes a modelos que exibem apenas uma única transição de fase. Nesta região a superfície autodual separa fases do tipo i) e iii) (veja secção anterior).

Na região em que sobrevivem os caminhos termodinâmicos que possuem mais que duas fases a superfície crítica não pode ser determinada pela transformação dual. Neste caso ela apenas relaciona os ramos da superfície crítica.

A equação que relaciona os acoplamentos antes e após a transformação dual é dada por (II.37). Esta equação é convenientemente expressa em termos dos pesos estatísticos.

$$X_\alpha = \exp\left\{ \sum_{\eta=1}^{\bar{N}} \beta J_\eta \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha\eta - 1 \right) \right\}; \quad X_\alpha = X_{N-\alpha} \quad (\text{mod. } N) \qquad (II.78a)$$

e

$$\tilde{X}_\alpha = \exp\left\{ \sum_{\eta=1}^{\bar{N}} f_\eta \left(\cos \frac{2\pi}{N} \alpha\eta - 1 \right) \right. , \quad \tilde{X}_\alpha = \tilde{X}_{N-\alpha} \quad (\mathrm{Mod}.N) \tag{II.78b}$$

Como R é cíclica ($R^N=1$) seus auto-valores[48] são $\exp\left(i \frac{2\pi}{N} n\right)$; $n = 0, 1, \ldots, \bar{N}$ (veja apêndice A), de maneira que (II.37) pode ser escrita como:

$$\sum_{\eta=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi}{N}\eta\alpha} X_\eta = \exp\left\{ f_0 + \sum_{\eta=1}^{\bar{N}} f_\eta \cos \frac{2\pi}{N}\eta\alpha \right\} \tag{II.79}$$

$$= \tilde{X}_\alpha \cdot \exp \sum_{\eta=0}^{\bar{N}} f_\eta \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, \bar{N}$$

Como $\tilde{x}_0 = x_0 = 1$, o conjunto de equações que relacionam x_α com $\tilde{x}_\alpha = D(x_\alpha)$ é dado por:

$$\tilde{X}_\alpha = D(X_\alpha) = \left[\sum_{\eta=0}^{N-1} X_\eta \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\eta\alpha\right) \right] \Big/ \left[\sum_{\eta=0}^{N-1} X_\eta \right] \tag{II.80}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \bar{N}$$

Assim os pontos fixos são dados por (II.80) onde fazemos $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha = D(x_\alpha)$. Somando-se as equações (II.80) resulta:

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \tilde{X}_\alpha = \left[\sum_{\eta=0}^{N-1} X_\eta \sum_{\alpha=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\eta\alpha\right) \right] \Big/ \left[\sum_{\eta=0}^{N-1} X_\eta \right]$$

Como $\sum_{\alpha=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\eta\alpha\right) = N\delta_{\eta,0}$ (mod N) obtemos:

$$\left(\sum_{\eta=0}^{N-1} X_\eta \right) \left(\sum_{\alpha=0}^{N-1} \tilde{X}_\alpha \right) = N \tag{II.81}$$

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

Assim, para todo N, o hiperplano.

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} X_\alpha = \sqrt{N} \qquad (II.82)$$

é fixo(em geral diferente da superfície autodual) com respeito à transformação dual. Pontos no hiperplano permanecem no mesmo após a transformação de dualidade. A superfície autodual é a superfície contida no hiperplano ($[\bar{N} - 1]$ dimensional) (II.82) formada pelos pontos que permanecem fixos em relação à transformação de dualidade (que são soluções da equação $x_\alpha = D(x_\alpha)$). Assim, usando-se(II.82) as equações que determinam os pontos fixos tornam-se lineares.

$$\sqrt{N}\, X_\alpha = \sum_{\eta=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\eta\alpha\right) X_\alpha \; ; \; \alpha = 1,2,\ldots,\bar{N} \qquad (II.83a)$$

Pelo fato de $x_\alpha = x_{N-\alpha}$ podemos escrever as equações acima como[49]

$$X_\alpha = \sum_{\eta=0}^{\bar{N}} D_{\alpha\eta} X_\eta \qquad \alpha = 1,2,\ldots,\bar{N} \qquad (II.83b)$$

onde

$$D_{\alpha\eta} = 2N^{-1/2}\cos\left(2\pi\alpha\eta/N\right) \; ; \; \eta \neq 0, N/2$$

$$D_{\alpha,0} = N^{-1/2} \; ; \; D_{\alpha,N/2} = (-)^\alpha N^{-1/2} \qquad (II.83c)$$

Se fizermos uma nova transformação dual retornamos ao modelo original e consequentemente $D^2 = I$. Os autovalores de D serão portanto +1 e -1. Resolver as Eq. (II.83a) é portanto encontrar os autovetores correspondentes ao autovalor +1. É fácil vermos que

$$T_r D = \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} D_{\alpha\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{Se } \bar{N} \text{ par} \\ 0 & \text{Se } \bar{N} \text{ ímpar} \end{cases}$$

como o traço é igual à soma dos autovalores, vemos que o autovalor + 1 de D deve ser($\left[\frac{N}{4}\right] + 1$) degenerado ($\left[\frac{N}{4}\right] \equiv$ maior inteiro menor ou igual a $\frac{N}{4}$). Portanto a superfície autodual é $\left[\frac{N}{4}\right]$ dimensional. Para $4 \leqslant N \leqslant 7$ a superfície será unidimensional, bidimensional para $8 \leqslant N < 12$, etc.

II.G - Casos Particulares

II.G.1 - Modelo Potts Escalar

A ação para este modelo é dada por (II.4). Em termos do nosso modelo geral (II.6) este modelo é o caso particular $J_1 = J_2 = \ldots = \frac{3+(-)^N}{2} J_{\bar{N}} = \frac{2\epsilon}{N}$ ou em termos dos pesos estatísticos definidos em (II.78a)

$$X = X_1 = X_2 = \cdots = X_{\bar{N}} \quad , X = \exp - \beta\epsilon \tag{II.84}$$

Os modelos Potts possuem apenas duas fases para $N \neq 3$[50]. Para $N = 3$ resultados de expansão em série[51,52], grupo de renormalização no espaço real[53-56] e simulação por técnica de Monte Carlo indicam a existência de uma única transição de fase. Quanto às ordens das transições, sabemos que a transição é contínua para $N \leqslant 4$ e de primeira ordem para $N > 4$[57].

Pela transformação dual vemos substituindo (II.84) em (II.80) que os novos parâmetros são:

$$\tilde{X} = \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2 = \cdots = \tilde{X}_{\bar{N}} = \frac{1-X}{1+(N-1)X} \tag{II.85}$$

Como as novas variáveis $\tilde{x}_\alpha$ também são iguais entre si, o modelo Potts vai nele mesmo pela transformação e é então autodual no sentido de K-W para qualquer N. Assim, como a transição de fase é única para estes modelos, o ponto crítico é dado pelo ponto fixo da transformação de dualidade, que pode ser determinado por (II.85) ou (II.82)

$$X_c = (\sqrt{N}+1)^{-1} \; ; \; \beta_c \epsilon = \ln(\sqrt{N}+1) \qquad \text{(II.86)}$$

É interessante observarmos que esta autodualidade se preserva na formulação Hamiltoniana (veja secção C). Temos a partir de (II.57), usando-se as variáveis duais definidas em (II.58a), que:

$$H(S,R;\lambda) = \lambda H(\rho,\sigma;\lambda^{-1}) \qquad \text{(II.87)}$$

em que $\lambda_c = 1$ nos daria o ponto crítico nesta formulação.

Na linguagem, em termos de kinks (veja secção II.E), nestes modelos todos os tipos de kinks custam a mesma energia para serem criados. Estes modelos exibem portanto duas fases. A fase de baixa temperatura, em que toda a simetria é quebrada e somente existem pares kink-anti-kink (fase do tipo i) e a fase de alta temperatura, em que temos um condensado de todos os tipos de kinks e toda a simetria Z(N) é recuperada.

II.G.2 - Modelos Potts vetorial

Tem-se feito vários estudos destes modelos, definidos por (II.7)[41,58]. Eles são interessantes pois constituem a versão com simetria discreta do modelo rotor plano (modelo xy). Para N = 2,3, estes modelos se confundem com os Potts escalares correspondentes, sendo portanto autoduais. Para N = 4, os pesos defini

dos em (II.78a) são:

$$X_1 = \exp(-\beta J) \quad ; X_2 = \exp(-2\beta J) = X_1^2 \tag{II.88a}$$

e os seus duais são

$$\tilde{X}_1 = \frac{(1-X_2)}{1+2X_1+X_2} = \frac{1-X_1}{1+X_1}$$
$$\tilde{X}_2 = \frac{1-2X_1+X_2}{1+2X_1+X_2} = \frac{(1-X_1)^2}{(1+X_1)^2} = \tilde{X}_1^2 \tag{II.88b}$$

Assim, vemos que para N = 4 o modelo Potts vetorial é autodual no sentido K-W. Este fato está relacionado ao cancelamento de f_2 na equação (II.38) (veja A-9 no apêndice A.). Veremos mais adiante que o 4- Potts vetorial nada mais é que um modelo de Ising dobrado (veja secção II.H) e consequentemente autodual. Este modelo exibe uma única transição de fase (pois é um Ising dobrado) com ponto crítico dado pelo ponto fixo da transformação dual. Usando-se (II.88b) ou (II.85) obtemos

$$X_1^c = \sqrt{2} - 1 \quad ; \beta_c J = \ln(\sqrt{2}+1) \tag{II.89}$$

Para $N \geq 5$ não temos mais a autodualidade exibida pelos N anteriores[59] devido ao fato de não ocorrerem cancelamentos dos f_α ($\alpha = 2, \ldots, N$) (veja Apêndice A). Contudo na versão de tempos contínuos (veja secção C) o Hamiltoniano é dado por (II.56a):

$$H = -\lambda \sum_i \frac{1}{2}\left[S(i)\, S^+(i+1) + h.c.\right] - \sum_i \frac{1}{2}\left(R(i) + R^+(i)\right) \tag{II.90a}$$

Usando-se as variáveis duais definidas em (II.58a) temos:

$$H = \lambda\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{\tilde{i}} \frac{1}{2}\left[\rho(\tilde{i})\,\rho^+(\tilde{i}+1) + h.c.\right] - \sum_{\tilde{i}} \frac{1}{2}\left(\sigma(\tilde{i}) + \sigma^+(\tilde{i})\right)\right\} \tag{II.90b}$$

de maneira que:

$$H(S,R;\lambda) = \lambda H(\rho,\sigma;\lambda^{-1}) \qquad (II.90c)$$

O que nos diz que na versão Hamiltoniana o modelo Potts vetorial é autodual para todo N. Elitzur, Pearson e Shigmitsu[58] estudaram estes modelos nesta versão por meio de expansões em série de alta temperatura. Obtiveram que para $N \geqslant 5$ ocorre uma singularidade essencial no "gap de massa" (mass gap). A singularidade ocorre num ponto deslocado do ponto autodual ($\lambda = 1$), o que indica a existência de uma fase intermediária mole do tipo (iii) (veja seção E) para $N \geqslant 5$.

II.G.3 - Modelos Villain

Com o objetivo de se estudar o modelo Potts vetorial, Villain[20] propôs um modelo diferente que se aproxima ao Potts vetorial para temperaturas baixas. Consideraremos neste trabalho uma versão generalizada do modelo Villain. Para defini-lo lembramos que nossa variável $Z(N)$ é $S(i) = e^{i\frac{2\pi}{N}n(i)}$; $n(i) = 0,1,\ldots,N-1$. O modelo Villain consiste em substituir o fator de Gibbs para um dado modelo que possua apenas um dos J_n não nulo (cosseno puro); isto é, $\exp\{\beta\cos(\frac{2\pi}{N}\eta\Delta n)\}$ $\eta = 1,2,\ldots,\bar{N}$, por uma função Gaussiana periódica (veja Fig. 6).

$$\sum_N^V(n,\beta) = \sum_{n(i)=0}^{N-1} \prod_{i,\mu} \exp f\left(n\frac{2\pi}{N}(n(i)-n(i+e_\mu))\right) \qquad (II.91a)$$

$$n = 1,2,\ldots,\bar{N}$$

onde

$$\exp f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta(x-2\pi m)^2\right] \qquad (II.91b)$$

Estes modelos são autoduais no sentido K-W como mostrado no apêndice B, isto é:

$$Z_N^V(n,\beta) = Z_N^V(n,\tilde{\beta})$$

$$\text{onde} \quad \tilde{\beta} = \left(\frac{N}{2\pi n}\right)^2 \frac{1}{\beta} \quad \text{se} \quad \frac{N}{n} = \text{inteiro} \tag{II.92a}$$

Caso $\frac{N}{n}$ não seja inteiro (veja apêndice B) temos que $Z_N^V(1,\beta) = Z_N^V(n,\beta)$ assim $\tilde{\beta} = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\beta}$. Na realidade apenas o estudo de $Z_N^V(1,\beta) = Z_N^V(\beta)$ é relevante pois se $\frac{N}{n}$ = inteiro (veja apêndice B):

$$Z_N^V(n,\beta) = \left(\frac{N}{n}\right)^M Z_{\frac{N}{n}}^V(\beta) \tag{II.92b}$$

O modelo Villain $Z_N^V(\beta)$ tem sido estudado extensivamente. A versão Villain para o modelo xy ($Z_{N\to\infty}^V(\beta)$) estudada por Jose et al[41] exibe as mesmas fases obtidas por Kosterlitz e Thouless[60] para o modelo xy. Além de uma fase massiva para altas temperaturas (fase do tipo (iii) na seção E) uma fase mole para temperaturas baixas (fase do tipo (iv) na seção E).

Elitzur et al[58] mostraram que as funções de correlação para os modelos Z(N) e xy na versão Villain satisfazem a uma espécie de desigualdade de Griffiths.

$$\left\langle \cos\left[\frac{2\pi}{N}\left(n(0)-n(i)\right)\right]\right\rangle_N^V \geq \left\langle \cos\left[\theta(0)-\theta(i)\right]\right\rangle_{N\to\infty}^V \tag{II.93}$$

onde temos do lado esquerdo a função de correlação do modelo Villain para N finito e do lado direito a função de correlação para a versão Villain do modelo x,y. Ambas calculadas na mesma temperatura.

Se o modelo Villain exibe apenas duas fases, como o modelo é autodual no sentido K-W, a temperatura crítica deve ser:

$$T_c = \frac{1}{\beta_c} = \frac{2\pi}{N}$$

Assim, sendo T_k a temperatura crítica para a versão Villain do modelo x,y, se tivermos um modelo Villain com $N > 2\pi/T_k$ então é possível que o sistema se encontre numa temperatura T tal que:

$$\frac{2\pi}{N} < T < T_k$$

Se o modelo exibe apenas duas fases, o modelo estaria em sua fase desordenada (massiva). Nesta mesma temperatura o Villain x,y estaria na sua fase mole, portanto mais correlacionado que $Z_N^V(\beta)$, o que contraria a desigualdade (II.93). Devemos portanto, ter pelo menos uma fase intermediária entre as fases de altas e baixas temperaturas. Pela desigualdade (II.93) esta fase intermediária pode ser uma fase mole desordenada ou uma fase massiva ordenada. Neste último caso o lado esquerdo da desigualdade tende a uma constante quando $(i-0)\to\infty$. Elitzur et al[58] mostram que a segunda possibilidade é impossível provando outra desigualdade (análoga a II.93) envolvendo as funções de correlação das variáveis duais para N finito e $N \to \infty$. Com base ao exposto na seção E podemos entender este fato da seguinte maneira:

Como o modelo Villain é autodual no sentido K-W esta fase intermediária deve ser autodual. Se o modelo se encontrar nesta fase ele permanece nela após a transformação de dualidade. Como a transformação de dualidade troca a variável ordem por desordem e vice-versa ($< S^n > \leftrightarrow < \rho^n >$), esta fase intermediária deve ter os parâmetros de ordem e desordem ($< S^n >$, $< \rho^n >$; $n = 1, \ldots, \bar{N}$) simultaneamente nulos ou não nulos. Como mostramos na seção E, uma fase do tipo(V) em que os parâmetros de ordem e desordem são não nulos simultaneamente ($<S^n> \neq 0$,

$< \rho^n > \neq 0$ com $n^2 \neq N$), não pode existir. Esta fase intermediária é então uma fase do tipo (iv) ($< S^n > 0$, $< \rho^n > = 0$; $n = 1,2,\ldots, \bar{N}$) ou seja (veja seção E) é uma fase mole.

Usando-se como estimativa o valor $T_k = 1,35$ obtido por Jose et al[41] temos que o modelo Villain deve exibir pelo menos uma fase intermediária para $N \geqslant 5$.

Sabemos que o modelo Villain para baixas temperaturas se aproxima do Potts vetorial (cosseno puro)[61]. É interessante determinarmos o caminho termodinâmico do modelo Villain para inferirmos acerca de fases da nossa ação geral (II.6). Para isto precisamos decompor a ação de (II.91a) em termos das potências dos cossenos e obter os parâmetros $\{J_\alpha\}$ ou $\{x_\alpha\}$.

Podemos escrever a função de partição (II.91a) como

$$Z_N^V(n,\beta) = \sum_{n(i)=0}^{N-1} \prod_{i,\mu} \exp f(0) \left\{ 1 . \delta(|n(i)-n(i+e_\mu)|,0) + \frac{\exp f(n\frac{2\pi}{N})}{\exp f(0)} \times \right. \tag{II.94}$$

$$\left. \times \delta(|n(i)-n(i+e_\mu)|,1) + \ldots + \frac{\exp f(n\frac{2\pi}{N}\bar{N})}{\exp f(0)} . \delta(|n(i)-n(i+e_\mu)|,\bar{N}) \right.$$

de modo que identificando os pesos x_α definidos em (II.78a) temos:

$$X_\alpha^V(n,\beta) = \frac{\exp f(n\frac{2\pi}{N}\alpha)}{\exp f(0)} \tag{II.95a}$$

Usando a equação (II.91b) que define $f(n)$ obtemos:

$$X_\alpha^V(n,\beta) = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{2\pi^2}{N^2}\beta(n\alpha - Nm)^2\right]}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi^2\beta m^2)} \tag{II.95b}$$

Observamos aqui que o modelo Villain não é um modelo normal de mecânica estatística já que os acoplamentos $\{J_\alpha\}$ são dependentes da temperatura $\{J_\alpha\} = \{J_\alpha(T)\}$. À medida que a temperatura varia o modelo transiciona para outros mo

delos, e é esta característica que garante sua autodualidade. No caso de Z(2) e Z(3) em que os únicos modelos (um só parâmetro) são os Potts escalares (ou vetoriais), o modelo Villain percorre o mesmo caminho termodinâmico que o modelo Potts correspondente, mas com velocidade diferente.

Observemos de (II.95b) que os pesos do modelo Villain descrito por $Z_N^V(1,\beta)$ satisfazem para todo N

$$x_1^V > x_2^V > \cdots > x_{\overline{N}}^V \qquad (II.96)$$

Consequentemente, pela discussão feita na seção E, podemos caracterizar as fases do modelo. Fase de baixas temperaturas (i), em que não temos kinks isolados, apenas pares de kinks-anti-kinks do mesmo tipo (toda a simetria é quebrada). Fase de altas temperaturas (ii) em que temos um condensado de todos os tipos de kinks (toda a simetria é recuperada). Para $N \geqslant 5$ temos uma fase intermediária que devido a (II.96) e pelas discussões da seção E, não pode ser do tipo (ii), mas sim do tipo (IV). Nesta fase as massas de kinks são nulas (fase mole) acarretando comprimentos de correlação infinitos para variáveis ordem e desordem.

II.H - Diagramas de Fase

Usando-se todas as discussões e informações das seções anteriores construiremos os diagramas de fases para o modelo Z(N) cuja ação é descrita por (II.4). Para isto usamos a hipótese[28,62] plausível de serem contínuas as superfícies críticas no espaço de parâmetros. Ao invés de construirmos os diagramas em termos dos acoplamentos $\{J_\alpha\}$ da ação (II.6) utilizar-nos-emos dos pesos $\{x_\alpha\}$ definidos em (II.78).

II.H.1 - Z(2) e Z(3)

Para N = 2,3 nosso espaço de parâmetros é unidimensional e os modelos mais gerais são os Potts escalares Z(2) (modelo de Ising) e Z(3). Pela superfície fixa (II.82), que nestes casos se confunde com a superfície autodual, teremos para o ponto crítico do modelo Z(2)

$$1 + X = \sqrt{2} \quad ; \quad X = \exp(-2\beta_c J) = \sqrt{2} - 1 \tag{II.97a}$$

e supondo única a temperatura crítica do modelo Z(3) temos:

$$1 + 2X = \sqrt{3} \quad ; \quad X = \exp\left(-\tfrac{3}{2}\beta_c J\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \tag{II.97b}$$

Estes dois modelos possuem duas fases separadas por uma transição de 2ª ordem[57]. Fase de baixas temperaturas (fase do tipo (i), veja seção E) em que a simetria global é quebrada e não temos kinks isolados, apenas pares de kinks-anti-kinks (para estes modelos só existe um tipo de kink, veja seção E) . Esta fase é caracterizada por

$$\langle S \rangle \neq 0 \quad , \langle \rho \rangle = 0 \tag{II.98a}$$

Fase de altas temperaturas (fase do tipo (iii), veja seção E) em que toda a simetria é recuperada e temos um condensado de kinks:

$$\langle S \rangle = 0 \quad , \quad \langle \rho \rangle \neq 0 \tag{II.98b}$$

Ambas as fases são massivas[5,45], isto é, o comprimento de correlação das variáveis ordem e desordem é finito, (as funções de correlação caem exponencialmente) a não ser na temperatura crítica onde o decaimento das funções de cor

relação é polinomial.

II.H.2 - Z(4)

O diagrama para o modelo Z(4) na realidade já é conhecido[63], por ser um caso especial do Modelo 4-Askin-Teller[64].

O espaço de parâmetros neste caso é bidimensional com pesos $\{x_\alpha\}$ (veja Eq. (II.78)) dados por:

$$x_1 = \exp -\beta(J_1 + 2J_2) \quad , \quad x_2 = \exp -2\beta J_1 \tag{II.99a}$$

Neste caso, conforme discussões feitas na seção F, a superfície fixa (II.82) se confunde com a superfície autodual, que é unidimensional. Pela equação (II.82) temos então:

$$1 + 2x_1 + x_2 = \sqrt{4} \qquad \text{(reta autodual)} \tag{II.99b}$$

Na fig. 7 esta reta liga os pontos A e M. Dado os acoplamentos J_1, J_2 de um modelo Z(4) este seguirá o caminho termodinâmico:

$$x_2 = x_1^{\nu} \quad ; \quad \nu = \frac{2}{1 + 2J_2/J_1} \tag{II.100}$$

Assim, (veja seção F) se o modelo exibir uma única transição de fase, o ponto crítico será dado pela interseção de (II.99b) com (II.100), isto é, o ponto crítico $(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)$ satisfaz:

$$\underset{\sim}{x}_1^{\nu} + 2\underset{\sim}{x}_1 - 1 = 0 \quad ; \quad \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{x}_1^{\nu} \tag{II.101}$$

O modelo 4- Potts escalar ($J_1 = 2J_2$) tem $\nu = 1$ de maneira que seu caminho termodinâmico é uma reta que vai de (0,0) a (1,1) (reta (a) na Fig. 7). Como é sabido[50], este modelo exibe uma única transição de fase de 2ª ordem com ponto crítico dado por (conforme Eq. (II.101)):

$$\underset{\sim}{X}_1 = \underset{\sim}{X}_2 = \frac{1}{3} \qquad (II.102)$$

Para o modelo 4 - Potts vetorial ($J_2 = 0$) $\nu = 2$, de modo que seu caminho termodinâmico é a parábola $x_2 = x_1^2$ (curva (b) na Fig. 7). Este modelo exibe uma única transição de fase (2ª ordem), pois como veremos a seguir, este modelo é um modelo de Ising dobrado. Seu ponto crítico é dado pela equação (II.101).

$$\underset{\sim}{X}^2 - 2\underset{\sim}{X} - 1 = 0 \quad , \quad \underset{\sim}{X} = \exp -\beta_c J = \sqrt{2} - 1 \qquad (II.103)$$

Para entendermos melhor o diagrama para a ação geral Z(4) (Eq. II.4) colocamos em cada ponto da rede bidimensional duas variáveis Z(2). A variável Z(4) ($S = \exp\left(i \frac{2\pi}{4} n\right)$, $n = 0,1,2,3$) pode ser posta em termos das variáveis Z(2) (σ, τ ; $\sigma^2 = \tau^2 = 1$) conforme a tabela abaixo:

S	1	$e^{i\pi/2}$	$e^{i\pi}$	$e^{i3\pi/2}$
$\sigma\ \tau$	+ +	- +	- -	+ -

É fácil nos convencermos que

$$S(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \sigma(i) + e^{i\frac{\pi}{4}} \tau(i) \right] \qquad (II.104)$$

A ação geral (II.4) para N = 4 pode então ser escrita:

$$A = -\frac{J_1}{2}\sum_{n,\mu}\left[\sigma(n)\sigma(n+\mu) + \tau(n)\tau(n+\mu)\right] - J_2\sum_{n,\mu}\sigma(n)\tau(n)\sigma(n+\mu)\tau(n+\mu) \qquad (II.105)$$

Vemos claramente, conforme já antecipado, que no caso em que $J_2=0$ (Potts vetorial), temos dois modelos de Ising não interagentes com a mesma constante de acoplamento. A função de partição então satisfaz

$$Z_4(J_2=0) = \left[Z_2(J_1/2)\right]^2 \qquad (II.106)$$

de maneira que temos uma única transição de fase (2ª ordem) com temperatura crítica dada por (II.103).

Consideremos o caso limite em que $J_1=0$ ($x_2=1$); então a ação (II.105) fica:

$$A(J_1=0) = -J_2\sum_{n,\mu}\sigma(n)\tau(n)\sigma(n+\mu)\tau(n+\mu) \qquad (II.107)$$

Esta ação é invariante pela transformação de calibre local de segunda espécie:

$$\begin{Bmatrix}\sigma(n)\\ \tau(n)\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}-\sigma(n)\\ -\tau(n)\end{Bmatrix} \qquad (II.108)$$

Pelo fato que uma simetria local não pode ser espontaneamente quebrada[29], este modelo terá em todas as fases:

$$\langle\sigma\rangle = 0\ ,\ \langle\tau\rangle = 0 \implies \langle s\rangle = 0 \qquad (II.109)$$

Se fizermos em (II.107) a transformação $\sigma(n)\,\tau(n) \to \sigma'(n)$ temos que a função de partição satisfaz

$$Z_4(J_1=0) = 2^M Z_2(J_2) \qquad \text{(II.110)}$$

Assim vemos que este modelo se comporta como um modelo de Ising na variável $\sigma' = S^2$, exibindo uma transição de fase de 2ª ordem em $I_2 = (x_1, x_2) = (\sqrt{2}-1, 1)$ (veja Fig.7). A fase de baixas temperaturas é caracterizada por $\langle \sigma' \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle S^2 \rangle \neq 0$ e a de altas temperaturas $\langle S^2 \rangle = 0$.

No caso limite $J_2 \to \infty$ $(x_1=0)$ as configurações de spin obedecem à condição

$$\sigma(n)\,\sigma(n+\mu) = \tau(n)\,\tau(n+\mu) \qquad \text{(II.111)}$$

pois gastaríamos energia infinita para violá-la. A ação (II.105) fica portanto equivalente a um modelo de Ising.

$$A(J_2\to\infty) \simeq -J_1 \sum_{n,\mu} \sigma(n)\sigma(n+\mu) = -J_1 \sum_{n,\mu} \tau(n)\,\tau(n+\mu) \qquad \text{(II.112)}$$

exibindo uma transição de fase de 2ª ordem em $I_1 = (0, \sqrt{2}-1)$ (veja Fig.7).

A fase de baixa temperatura é caracterizada por $\langle \sigma \rangle \neq 0$, $\langle \tau \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle S \rangle \neq 0$ e a de alta temperatura por $\langle \sigma \rangle = \langle \tau \rangle = 0$ mas de (II.111) $\langle \sigma\tau \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle S \rangle = 0$ $\langle S^2 \rangle \neq 0$.

A nossa hipótese de continuidade da superfície crítica implica que a reta autodual (II.99b) (linha A-M na Fig.7) deve se bifurcar indo para os pontos I_1 e I_2. A bifurcação se dá no ponto P, ponto crítico do modelo de Potts[63], de maneira que temos as fases exibidas na Fig.7. A linha (c) corresponde ao caminho termodinâmico do modelo Villain $Z_4^V(\beta)$ obtido pela equação (II.95b).

Para um modelo geral Z(4) com acoplamentos (J_1, J_2) temos dois tipos de kinks (veja seção E). O modelo seguirá um caminho termodinâmico dado pela equação (II.100). Para baixas temperaturas exibirá uma fase (fase 1 na Figura 7) em que toda a simetria Z(4) é quebrada de modo que não temos kinks isolados somente pares de kink-anti-kink do mesmo tipo (fase do tipo (i) da seção E). Se $J_2 < J_1$ ($x_2 < x_1$) o kink do tipo 1 custa menos energia para ser criado, e pelas discussões da seção E, uma vez ele sendo liberado os outros também o são. À medida que a temperatura aumenta as massas dos kinks diminuem, tornando-se nulas na temperatura crítica. O sistema passa então para a fase de altas temperaturas (fase 2 na fig. 7) onde temos um condensado de kinks e toda a simetria Z(4) é recuperada (fase do tipo (iii) na seção E).

Caso $J_1 < J_2$ então o kink do tipo 2 custa menos energia para ser criado do que do tipo 1. Pelas discussões da seção E, o sistema passará da fase de baixas temperaturas (fase 1 na fig.7), em que temos somente pares kink-anti-kink, para uma fase intermediária (fase 3 na fig.7). Temos nesta fase um condensado de kinks do tipo 2 e pares de kink-anti-kink do tipo 1 de modo que temos uma simetria Z(2) nesta fase (fase do tipo (IV) na seção E). A altas temperaturas toda a simetria Z(4) é recuperada (fase 2 na fig.7) e temos um condensado de todos os tipos de kinks.

Convém salientar que todas as fases exibidas na figura 7 são massivas. Os comprimentos de correlação são todos finitos exceto na superfície crítica. Apresentamos na tabela abaixo, de maneira resumida, a caracterização das fases em termos de parâmetros de ordem e desordem.

Fase 1	Fase 3	Fase 2
$< S > \neq 0$, $< \rho > = 0$	$< S > = < \rho > = 0$	$< S > = 0$, $< \rho > \neq 0$
$< S^2 > \neq 0$, $< \rho^2 > = 0$	$< S^2 > \neq 0$, $< \rho^2 > \neq 0$	$< S^2 > = 0$, $< \rho^2 > \neq 0$
simetria quebrada	simetria Z(2)	simetria Z(4)
$m \neq 0$	$m \neq 0$	$m \neq 0$

Tabela (1) Caracterização das Fases da Fig.7

É interessante observar que na fase 3 apesar de termos $< S > = 0$, $< \rho > = 0$, esta fase não é mole. O fato de $< S >$ e $< \rho >$ serem nulos segue-se da simetria Z(2) desta fase, enquanto que os operadores S e ρ são Z(4) invariantes. Esta fase é uma fase típica do tipo (ii) discutido na seção E e o fato de termos $< S^2 > \neq 0$ simultaneamente com $< \rho^2 > \neq 0$ se deve ao fato de $[S^2, \rho^2] = 0$.

II.H.3 - Z(5)

O espaço de parâmetros neste caso ainda é bidimensional com pesos $\{x_\alpha\}$ (veja equação II.78) dados por:

$$x_1 = \exp -\beta \left[J_1 \left(\cos \frac{2\pi}{5} - 1\right) + J_2 \left(\cos \frac{4\pi}{5} - 1\right) \right] \qquad (II.113a)$$

$$x_2 = \exp -\beta \left[J_1 \left(\cos \frac{4\pi}{5} - 1\right) + J_2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} - 1\right) \right]$$

Conforme discussão feita na seção F a superfície fixa (II.82) se confunde com a superfície autodual e temos:

$$1 + 2x_1 + 2x_2 = \sqrt{5} \qquad \text{(reta autodual)} \qquad (II.113b)$$

Na figura 8 esta reta é representada pela reta A-M. Os modelos com simetria Z(5) com acoplamentos (J_1, J_2) seguirão o caminho termodinâmico:

$$X_2 = X_1^{\nu} \quad \text{com} \quad \nu = \frac{J_1(\cos 4\pi/5 - 1) + J_2(\cos 2\pi/5 - 1)}{J_1(\cos \frac{2\pi}{5} - 1) + J_2(\cos \frac{4\pi}{5} - 1)} \qquad (II.113c)$$

Se os modelos exibem uma única transição de fase, o ponto crítico deve ser dado pela intersecção do caminho termodinâmico com a reta autodual (II.113c). As curvas (a), (b) e (c) na figura 8 representam, respectivamente, os caminhos termodinâmicos dos modelos Potts escalar, Potts vetorial e modelo Villain. Sabemos que o modelo Potts escalar exibe apenas uma transição de fase[50,57] de primeira ordem, para $N \geqslant 5$. Assim, a reta autodual deve ser parte da superfície crítica nas vizinhanças do ponto crítico (ponto P na Fig. 8) do modelo Potts. Conforme discutimos na seção (II.G.3) o modelo Villain (curva (c) na fig. 8) exibe para $N = 5$ além das fases de baixas temperaturas e de altas temperaturas, uma fase intermediária não massiva, isto é, com comprimento de correlação infinito em toda a fase (decaimento polinomial das funções de correlação). Assim, o caminho termodinâmico do modelo Villain deve cortar a superfície crítica em dois pontos. Pela hipótese da superfície crítica ser contínua a reta autodual deve bifurcar-se em algum ponto, dando origem à fase intermediária não massiva. Como os comprimentos de correlação (das variáveis ordem e desordem) são infinitos em toda a fase intermediária, esta fase deve estar circundada por linhas de transição de segunda ordem ou de ordem superior, pois somente transições contínuas exibem comprimentos de correlação infinitos.

Como o modelo Potts exibe uma transição de fase de 1ª ordem e os ramos da bifurcação da reta autodual são linhas de transição de fase contínuas, a bifurcação deve ocorrer em algum ponto E.

Acreditamos que este ponto (veja figura 8) deva ser o ponto em que a linha crítica muda de primeira ordem para ordem superior. Distanciando-se do ponto crítico P do modelo Potts (veja fig. 8) ao longo da reta autodual, o calor latente diminui, o ponto E é o ponto em que o calor latente se anula. Este fato foi confirmado por uma aproximação de campo médio que exibiremos na seção (II.1). Aplicamos esta aproximação de campo médio para modelos que cortam a reta autodual nas imediações do ponto crítico do modelo Potts e observamos sempre uma transição de fase de primeira ordem. Quando nos afastamos ao longo da reta autodual encontramos o ponto E em que o sistema exibe duas transições de fase (veja fig.8). Acreditamos que a matriz S exata com simetria Z(N) obtida por Köberle e Swieca[65] corresponda à este ponto E.

A bifurcação deve ocorrer também em um ponto simétrico com relação à reta $x_2 = x_1$, aparecendo outra fase mole (veja fig. 8), como consequência da simetria

$$Z(x_1,x_2) = Z(x_2,x_1) \qquad (II.114)$$

mostrada no apêndice C.

A caracterização das fases em termos de parâmetros de ordem e desordem apresentamos na tabela abaixo

Fase 1	Fase 3	Fase 2
$< S > \neq 0$, $< \rho > = 0$	$< S > = < \rho > = 0$	$< S > = 0$, $< \rho > \neq 0$
$< S^2 > \neq 0$, $< \rho^2 > = 0$	$< S^2 > = < \rho^2 > = 0$	$< S^2 > = 0$, $< \rho^2 > \neq 0$
Simetria quebrada	Simetria Z(5)	Simetria Z(5)
$m \neq 0$	$m = 0$	$m \neq 0$

Tabela 2. Caracterização das fases exibidas na Fig. 8

II.H.4 - Z(6)

Temos agora um espaço tridimensional de parâmetros para nossa ação geral em que os pesos $\{x_\alpha\}$ definidos pela equação (II.78) são:

$$X_1 = \exp-\beta\left[\frac{J_1}{2} + \frac{3J_2}{2} + 2J_3\right], \quad X_2 = \exp-\beta\left[\frac{3J_1}{2} + \frac{3}{2}J_2\right], \quad X_3 = \exp-2\beta\left[J_1 + J_3\right] \tag{II.115}$$

Conforme obtivemos em (II.82) a superfície fixa é dada por:

$$1 + 2X_1 + 2X_2 + X_3 = \sqrt{6} \tag{II.115a}$$

A superfície autodual conforme discutimos na seção F é $\left[\frac{N}{4}\right]$ dimensional, ou seja, unidimensional para o caso em pauta. Como a superfície autodual está contida na superfície fixa (II.115a) as equações que determinam a superfície autodual tornam-se lineares (veja Eq. II.83). Assim, a superfície autodual deve ser obtida por intersecção de planos, de maneira que no presente caso esta deve ser uma reta. O modelo Potts (veja seção II.G.1) é autodual no sentido K-W, assim esta reta deve conter seu ponto fixo (veja Eq. II.86):

$$\left(X_1^P, X_2^P, X_3^P\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}+1}, \frac{1}{\sqrt{6}+1}, \frac{1}{\sqrt{6}+1}\right) \qquad (II.116)$$

Conforme demonstramos no apêndice B, o modelo Villain é também autodual no sentido K-W, de modo que a reta autodual do modelo Z(6) geral deve conter o ponto de autodualidade do modelo Villain. Usando-se a temperatura de autodualidade $\beta = 6/2\pi$ na equação (II.95b) que nos dá os pesos x_α do modelo Villain, obtemos para o ponto autodual do modelo Villain:

$$\left(X_1^V, X_2^V, X_3^V\right) = \left(.592384840; .123144710; .017966582\right) \qquad (II.117)$$

Como a reta autodual deve passar pelos pontos de autodualidade dos modelos Potts e Villain, a equação da reta dual é:

$$\frac{X_1 - X_1^P}{X_1^V - X_1^P} = \frac{X_2 - X_2^P}{X_2^V - X_2^P} = \frac{X_3 - X_3^P}{X_3^V - X_3^P} \qquad \text{(reta autodual)} \qquad (II.118)$$

Na Figura 9, a reta A-M é a reta autodual. O caminho termodinâmico do modelo Potts é a reta que vai de (0,0,0) a (1,1,1).

Para simplificar a análise do diagrama de fase para o modelo Z(6) geral colocamos em cada ponto da rede uma variável Z(2) ($\sigma = \pm 1$) e uma variável Z(3) ($\Sigma = e^{i\frac{2\pi}{3}n}, n = 0,1,2$). A variável Z(6) ($S = \exp(i\frac{2\pi}{6}n)$; $n = 0,1,\ldots,5$) pode ser expressa em termos das variáveis Z(2) e Z(3) conforme tabela abaixo:

S	1	$e^{i\pi/3}$	$e^{i2\pi/3}$	$e^{i\pi}$	$e^{i4\pi/3}$	$e^{i5\pi/3}$
$\sigma\ \Sigma$	$+1$	$-e^{i4\pi/3}$	$+e^{i2\pi/3}$	-1	$+e^{i4\pi/3}$	$-e^{i2\pi/3}$

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFOSC
FISICA

Onde vemos facilmente que:

$$S(n) = \sigma(n)\,\Sigma(n) \qquad (II.119a)$$

Podemos então escrever a ação geral (II.4) para N = 6:

$$A = -\frac{J_1}{2}\sum_{n,\mu}\sigma(n)\sigma(n+\mu)\left[\Sigma(n)\Sigma^{+}(n+\mu)+c.c.\right] \qquad (II.119b)$$
$$-J_2/2\sum_{n,\mu}\left(\Sigma(n)\Sigma^{+}(n+\mu)+c.c.\right) - J_3\sum_{n,\mu}\sigma(n)\sigma(n+\mu)$$

Consideremos os seguintes casos limites:

a) $J_1 = J_3 = 0$ $(x_1 = x_2,\ x_3 = 1)$ *e a ação (II.119b) fica análoga a um modelo Potts Z(3) com ponto crítico* $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}+1}, 1\right)$

b) $J_1 = J_2 = 0$ $(x_1 = x_3,\ x_2 = 1)$ *e a ação (II.119b) torna-se análoga a um modelo de Ising com ponto crítico dado por:* $I_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$

c) $J_3 \to \infty$ $(x_1 = x_3 = 0)$, *as variáveis Z(2) se congelam* $(\sigma(i) = 1)$, *pois custa energia infinita para virar um dado* $\sigma(i)$, *de maneira que a ação fica análoga à de um modelo Z(3):*

$$A(J_3 \to \infty) = -\frac{(J_1+J_2)}{2}\sum_{n,\mu}\left(\Sigma(n)\Sigma^{+}(n+\mu)+c.c.\right)$$

e temos então o ponto crítico (veja Eq. (II.97b)): $P_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}+1}, 0\right)$

d) $J_2 \to \infty$ $(x_1 = x_2 = 0)$, *as variáveis Z(3) se congelam* $(\Sigma(i) = 1)$ *e temos um modelo Z(2):*

$$A(J_2 \to \infty) = -(J_1+J_3)\sum_{n,\mu}\sigma(n)\sigma(n+\mu)$$

tendo o ponto crítico (veja Eq,(II.97a)) $I_1 = (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}+1})$.

Existe uma superfície especial (que contém os pontos, I_1, I_2, P_1 e P_2) em que a análise do diagrama de fase tridimensional do modelo em questão é simplificada. Esta superfície corresponde à região do diagrama em que temos um modelo Z(2) e um Z(3) desacoplados. Ela é obtida fazendo-se $J_1=0$ de maneira que os pontos nesta superfície satisfazem à equação:

$$X_1 = X_2 . X_3 \tag{II.120}$$

A ação (II.119b) restrita a esta superfície é dada por

$$A = -\frac{J_2}{2}\sum_{n,\mu}\left(\Sigma(n)\Sigma^{+}(n+\mu) + c.c.\right) - J_3\sum_{n,\mu}\sigma(n)\sigma(n+\mu) \tag{II.121}$$

Consequentemente a função de partição para o modelo Z(6), nesta superfície, nada mais é do que o produto entre as funções de partição de um modelo Z(2) e de um modelo Z(3).

$$Z_6(J_1=0) = 2^M Z_3(J_2) . 3^M Z_2(J_3) \tag{II.122}$$

onde M é o número de pontos da rede. Vemos então que nesta superfície temos duas linhas críticas. Uma linha ($x_3 = \sqrt{2} - 1$) correspondente à transição do modelo Z(2) e outra linha ($x_2 = 1/(\sqrt{3}+1)$) correspondente à transição do modelo Z(3). Mostramos na figura 10 a projeção da superfície (II.120) no plano $x_1 = 0$. Nesta superfície como os modelo Z(2) e Z(3) estão desacoplados temos:

$$\langle S \rangle = \langle \sigma \rangle \langle \Sigma \rangle \Big|_{J_1=0} \tag{II.123}$$

Conforme mostra a Fig. 10, na fase 4 os modelos Z(2) e Z(3) estão ordenados, isto é, $<\sigma> \neq 0$, $<\Sigma> \neq 0$ de maneira que de (II.123) $<S> \neq 0$. Na fase 5 ambos os modelos estão desordenados, isto é, $<\sigma> = 0$, $<\Sigma> = 0$ o que implica $<S> = <S^2> = <S^3> = 0$, e a fase tem simetria Z(6). Na fase 1 o modelo de Ising desordena-se enquanto o modelo Z(3) permanece ordenado, isto é, $<\sigma> = 0$, $<\Sigma> \neq 0$ de maneira que de (II.123) $<S> = 0$, $<S^2> \neq 0$, $<S^3> = 0$, e a fase tem simetria Z(2). Na fase 2 o modelo Z(3) desordenou-se enquanto o modelo de Ising continua ordenado, isto é, $<\sigma> \neq 0$, $<\Sigma> = 0$ de modo que $<S> = 0$, $<S^2> = 0$, $<S^3> \neq 0$ e a fase tem simetria Z(3).

Pela transformação de dualidade desenvolvida neste trabalho (veja seções D e F) a transformação dual leva pontos da região 5 para 4 e vice-versa, e pontos da região 1 para 2 e vice-versa. Como a transformação dual troca variáveis ordem e desordem ($<\sigma^n> \leftrightarrow <\rho^n>$) temos que na fase 4: $<\rho> = <\rho^2> = <\rho^3> = 0$; fase 5: $<\rho> \neq 0$, $<\rho^2> \neq 0$, $<\rho^3> \neq 0$, fase 1: $<\rho> = 0$, $<\rho^2> = 0$, $<\rho^3> \neq 0$ e fase 2: $<\rho> = 0$, $<\rho^2> \neq 0$, $<\rho^3> = 0$.

É interessante observarmos que os comprimentos de correlação são finitos em todas estas fases (a não ser na superfície crítica) pois tanto Z(2) como Z(3) não possuem fases moles.

Na Fig. 9 a linha curva que vai de (0,0,0) a (1,1,1) é o caminho termodinâmico do modelo Villain. Conforme discutimos na seção (II.G.3) o modelo Villain exibe além das fases de baixas temperaturas (fase 5 e a de altas temperaturas (fase 4) uma fase intermediária mole (comprimentos de correlação infinitos em toda a fase). Repetindo ipsis literis a discussão feita para Z(5), acreditamos que deve haver uma bifurcação da reta autodual no ponto E onde o calor latente se anula. Novamente este fato é confirmado por uma aproximação de campo médio que exporemos na seção (II.I).

Na linguagem de kinks, as diversas fases da Fig. 9 podem ser entendi

das de maneira simples. Conforme discutimos na seção E temos para o caso N =6 , três tipos de kinks. Na fase 4, que é a fase de baixas temperaturas (fase do tipo (i) na seção E) não temos kinks isolados, somente pares de kink-anti-kink (do mesmo tipo) de modo que toda a simetria é quebrada. Na fase 5, que é a fase de altas temperaturas (fase do tipo (iii) na seção E), temos um condensado de todos os tipos de kinks, de maneira que o sistema possui toda a simetria Z(6). Na fase 1 ($x_3 > x_1, x_2$) temos um condensado do tipo 3 e os outros kinks aparecem somente aos pares, de maneira que a simetria é Z(2) (fase do tipo (ii) na Seção E). Na fase 2 ($x_2 > x_1, x_3$) temos um condensado de kinks do tipo 2, os outros kinks aparecendo somente aos pares, e a simetria da fase é Z(3) (fase (ii) na seção E). A fase não massiva 3 pode ser vista como uma fase em que temos um condensado de kinks não massivos (fase do tipo (iv) na Seção E).

Apresentamos na tabela 3, de maneira resumida, a caracterização das fases do modelo Z(6) geral (veja Fig. 9).

II.H.5 - Z(7)

O espaço de parâmetros para nossa ação geral é ainda tridimensional com os pesos x_α (veja Eq. II.78) dados por:

$$X_1 = \exp -\beta\left[a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3\right], \quad X_2 = \exp -\beta\left[a_2 J_1 + a_3 J_2 + a_1 J_3\right]$$

e

$$X_3 = \exp -\beta\left[a_3 J_1 + a_1 J_2 + a_2 J_3\right] \qquad (II.124a)$$

sendo

$$a_j = \left(\cos\frac{2\pi}{7} j - 1\right); \quad j = 1,2,3. \qquad (II.124b)$$

A equação da superfície fixa (II.82) é neste caso

$$1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \sqrt{7} \qquad \text{(II.125)}$$

A superfície autodual, conforme discutimos na seção F é $\left[\frac{N}{4}\right]$ dimensional sendo portanto unidimensional para este caso. Como a curva autodual está contida na superfície fixa (II.125), as equações que determinam a curva autodual tornam-se lineares (veja Eq. II.83). A curva autodual é obtida por intersecção de planos, sendo portanto uma reta.

De maneira análoga ao que vimos no caso N = 6, como o modelo Potts e Villain são autoduais no sentido K-W, a reta autodual deve passar pelos pontos de autodualidade destes modelos.

O ponto de autodualidade do modelo Potts é dado por (veja Eq. II.86):

$$\left(x_1^P, x_2^P, x_3^P\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{7}+1}, \frac{1}{\sqrt{7}+1}, \frac{1}{\sqrt{7}+1}\right) \qquad \text{(II.126)}$$

O ponto de autodualidade do modelo Villain é obtido colocando-se $T = 2\pi/7$ na equação (II.95b):

$$\left(x_1^V, x_2^V, x_3^V\right) = \left(.638394530; .166108331; .018372794\right) \qquad \text{(II.127)}$$

Assim como a reta autodual passa pelos pontos dados (II.127) e (II.126), temos que sua equação é:

$$\frac{x_1 - x_1^P}{x_1^V - x_1^P} = \frac{x_2 - x_2^P}{x_2^V - x_2^P} = \frac{x_3 - x_3^P}{x_3^V - x_3^P} \qquad \text{(reta autodual)} \qquad \text{(II.128)}$$

Na Fig. 11 a reta A_1-M_1 representa a reta (II.128). O caminho termodinâmico do modelo Potts é a reta que vai de (0,0,0) a (1,1,1). O modelo Potts possui uma única transição, sendo esta de 1ª ordem (veja seção II.G.1). O caminho termodinâmico do modelo Villain é representado na Fig.11 pela linha curva que vai de (0,0,0) a (1,1,1).

Na seção (II.G.3) vimos que o modelo Villain exibe uma fase intermediária não massiva. De maneira análoga ao discutido nos casos N = 5,6 concluímos que a reta autodual deve bifurcar-se no ponto E_1, onde a transição muda de ordem (o calor latente vai a zero), dando origem à fase não massiva. Este fato, como nos casos N = 5,6 foi confirmado pela aproximação de campo médio que exporemos na seção (II.I).

O fato da Fig. 11 exibir bifurcações nos pontos E_2, E_3 além do ponto E_1 (dando origem a fases não massivas) é consequência da simetria cíclica do modelo Z(7) (veja apêndice C):

$$Z(x_1,x_2,x_3) = Z(x_3,x_1,x_2) = Z(x_2,x_3,x_1) \qquad \text{(II.129)}$$

Como N = 7 é um número primo, assim como no caso Z(5), não haverá fases com subsimetrias. Em síntese, temos a fase de baixas temperaturas, altas temperaturas e a fase não massiva. Apresentamos na tabela 4 abaixo a caracterização destas três fases em termos dos parâmetros de ordem e desordem.

Tabela 4. Caracterização das fases do modelo Z(7)

Fase Baixas Temp.	Fase Intermediária	Fase Altas Temp.
$\langle S\rangle \neq 0$, $\langle S^2\rangle \neq 0$, $\langle S^3\rangle \neq 0$	$\langle S\rangle = \langle S^2\rangle = \langle S^3\rangle = 0$	$\langle S\rangle = \langle S^2\rangle = \langle S^2\rangle = 0$
$\langle\rho\rangle = \langle\rho^2\rangle = \langle\rho^3\rangle = 0$	$\langle\rho\rangle = \langle\rho^2\rangle = \langle\rho^3\rangle = 0$	$\langle\rho\rangle \neq 0, \langle\rho^2\rangle \neq 0, \langle\rho^3\rangle \neq 0$
Simetria quebrada $m \neq 0$	Simetria Z(7) $m = 0$	Simetria Z(7) $m \neq 0$

II.H.6 - Fases para N > 8

Para N > 8 o espaço de parâmetros é de dimensão (N dimensional) maior que três. Considerações acerca de fases podem contudo serem feitas com base ao estudado nos modelos com N menores.

No caso de N ser primo, como não temos subsimetrias, o sistema exibirá somente três tipos de fases: 1 - fase de baixas temperaturas (nenhuma simetria), 2 - fase de altas temperaturas (simetria Z(N)) e 3 - fase mole (simetria Z(N) com excitações de massa nula).

Para o caso de N não primo, decompomo-lo em fatores primos, e suponhamos que cada fator ocorra uma única vez. Para cada fator $\ell < 5$, temos além das fases 1,2,3 acima mencionadas, um outro tipo de fase com simetria $Z(\ell)$. Fase esta que corresponde a um condensado de kinks massivos do tipo N/ℓ. Para cada fator primo $m \geq 5$, aparecerão dois outros tipos de fase com simetria Z(m). Ambos correspondendo a um condensado de kinks do tipo N/m, sendo em uma delas os kinks massivos e na outra não massivos.

Em geral o diagrama de fase é bastante complicado quando na decomposição de N em fatores primos, estes aparecem com potências maiores que 1.

No limite $N \to \infty$ a simetria Z(N) torna-se contínua (U(1)) e pelo teorema de Mermin & Wagner[66] ela não pode ser quebrada espontaneamente a duas dimensões. Assim, as fases com subsimetrias desaparecem no limite $N \to \infty$, persistindo apenas a fase de alta temperatura e a fase mole, pois esta fase não é associada a uma quebra de simetria global [5,45].

II.I - Aproximação de campo médio

Uma das simplificações possíveis no entendimento de modelos de mecânica estatística consiste na aproximação de campo médio [67] ou campo molecular.

Nesta aproximação, as interações sentidas por determinada variável são simuladas por uma interação com um campo efetivo (médio), determinado de maneira a minimizar a energia livre do sistema. Pelo fato da aproximação de campo médio desprezar flutuações, ela é tanto melhor quanto maior a dimensão (ou número de vizinhos próximos) do sistema.

Consideremos a função de partição correspondente à ação geral (II.6),

$$Z = \sum_{S_1, S_2, \ldots, S_M} \exp\left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m \left[(S_i^+ S_j)^m + (S_i S_j^+)^m \right] \right\} \qquad (II.130)$$

sendo M o número de pontos da rede.

Um dado S_i interage com $\sum_{j(i)} S_j^{+m}$, onde $j(i)$ denota os 2d vizinhos ao ponto i. Poderíamos considerar a média $\frac{1}{2d} \sum_{j(i)} S_j^m$ como um campo efetivo agente no ponto i. De maneira equivalente podemos obter a aproximação de campo médio usando a desigualdade de Peierls[68] da exponencial.

Para isto consideramos a medida

$$D_1(S_i) = \prod_{i=1}^{M} \exp\left[\frac{H}{2} (S_i + S_i^*) \right] \Big/ \left[\prod_{i=1}^{M} \sum_{S_i} \exp\left[\frac{H}{2} (S_i + S_i^*) \right] \right] \qquad (II.131)$$

onde vemos que todas as variáveis estão desacopladas, e interagem com um campo efetivo H (campo médio), que deve ser determinado.

Usando-se a medida acima para o cálculo de médias, temos a desigualdade de Peierls[68].

$$\langle \exp B \rangle \geq \exp \langle B \rangle$$

Podemos então escrever

$$\left\langle \exp\left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{\langle i,j\rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m \left[(S_i^+ S_j)^m + c.c. \right] - \sum_i \frac{H}{2} (S_i + S_i^+) \right\} \right\rangle \geq$$

$$\exp\left\{ \left\langle \frac{\beta}{2} \sum_{\langle i,j\rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m \left[(S_i^+ S_j)^m + c.c. \right] - \sum_i \frac{H}{2} (S_i + S_i^+) \right\rangle \right\} \tag{II.132}$$

donde obtemos que:

$$e^{-M\beta f_N} \geq \exp\left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{\langle i,j\rangle} \sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m \langle (S_i^+ S_j)^m + c.c. \rangle - \sum_i \frac{H}{2} \langle S_i + c.c. \rangle \right\} \tag{II.133}$$

$$\times \left[\sum_{S_i} \exp \frac{H}{2} (S_i + S_i^+) \right]^M$$

sendo f_N *a energia livre por ponto da rede para o modelo* $Z(N)$.

Definindo-se

$$\mathcal{F}_N(H) = \ln \left\{ \sum_{S_i} \exp \frac{H}{2} (S_i + S_i^+) \right\} =$$

$$= \ln \left\{ \sum_{n_i=0}^{N-1} \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right) \right\} \tag{II.134}$$

e as médias

$$\frac{1}{2} \langle (S_i S_j^+)^m + c.c. \rangle = \frac{\sum_{n_i, n_j} \cos \frac{2\pi}{N} m (n_i - n_j) \exp \left[H \left(\cos \frac{2\pi}{N} n_i + \cos \frac{2\pi}{N} n_j \right) \right]}{\sum_{n_i, n_j} \exp \left[H \left(\cos \frac{2\pi}{N} n_i + \cos \frac{2\pi}{N} n_j \right) \right]}$$

pelo fato de

$$\sum_{n_i=0}^{N-1} \operatorname{Sen} \frac{2\pi}{N} m n_i \exp \left(H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right) = 0 \tag{II.135}$$

obteremos que

$$\frac{1}{2} \langle (S_i S_j^+)^m + c.c. \rangle = \left[\frac{\sum_{n_i=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi}{N} m n_i \exp \left[H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right]}{\sum_{n_i=0}^{N-1} \exp \left[H \cos \frac{2\pi}{N} n_i \right]} \right] \equiv t_m^2(H)$$

$$\frac{1}{2} \langle S_i + S_i^+ \rangle \equiv t_1(H)$$

Tomando-se o logarítmo de (II.132) e tendo em vista que temos M pontos na rede e Md ligações de vizinhos próximos, teremos:

$$-\beta f_N \geq G_N(\beta,H) \equiv \mathcal{F}_N(H) + \beta d \sum_{m=1}^{\bar{N}} t_m^2(H) - H t_1(H) \qquad (II.136)$$

Até agora H pode assumir qualquer valor. Devido à desigualdade acima, a aproximação de campo médio consiste em considerar a energia livre como sendo o máximo de G_N (β, H), isto é:

$$-\beta f_N \simeq \mathrm{Sup}\left\{ G_N(\beta,H) \right\} \qquad (II.137)$$

Assim, para cada temperatura, o campo efetivo H é determinado de maneira a maximizar G_N (β, H) e a energia livre será dada pelo valor do máximo de G_N (β, H). Para temperaturas altas o máximo de G_N (H) dar-se-á para o campo efetivo nulo. À medida que a temperatura diminui o campo médio torna-se não nulo numa certa temperatura T_c, ocorrendo assim uma transição de fase. Se o campo efetivo torna-se não nulo continuamente a transição é de 2ª ou ordem superior (veja Fig. 12). Caso o campo efetivo se torne não nulo de maneira descontínua, temos então uma transição de 1ª ordem (veja Fig. 12), pois esta descontinuidade acarretará descontinuidade nas derivadas da energia livre e consequentemente haverá calor latente.

Aplicando a aproximação de campo médio para os modelos Potts escalar[69], obtivemos uma transição de primeira ordem para todo N exceto N = 2 onde a transição é contínua. Verificamos que a medida que N aumenta a temperatura crítica se aproxima do valor exato dado pela Eq. (II.86). Para N ≥ 5 aplicamos nossa aproximação para modelos que cruzam a reta autodual. Para modelos que a cruzam nas vizinhanças do ponto crítico P do modelo Potts obtivemos apenas uma única transição de fase de 1ª ordem. À medida que nos afastamos do modelo Potts, is

to é, tomando modelos que cruzam a reta autodual em pontos mais distantes do ponto crítico P, o calor latente da transição diminui. Para modelos que cruzam a reta autodual, abaixo de certo ponto E, a aproximação de campo médio, começa a exibir além da transição de primeira ordem, outra transição de 2ª ordem (ou de ordem superior) à temperatura $\beta.d = 1.0$ (para todo $N \geqslant 5$) (veja Fig. 12). Este resultado está em concordância com a conjectura da existência de um ponto de bifurcação da reta autodual, aparecendo uma fase intermediária. O fato de uma das transições ser de 1ª ordem e não contínua (veja seção J) deve-se ao fato da aproximação de campo médio desprezar flutuações[67,70]. O modelo Potts vetorial, como cruza a reta autodual num ponto abaixo do ponto E, exibirá duas transições, uma de 2ª ordem à temperatura $\beta_c.d = 1.0$ (para todo $N \neq 3$) e outra de 1ª ordem a uma temperatura bem mais baixa (para $N \geqslant 5$).

Poderíamos ao invés de usar a medida (II.131) em nossa aproximação de campo médio usar a medida:

$$D_2(S_i) = \frac{\prod_{i=1}^{M} \exp \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m (S_i^m + S_i^{+m})}{\prod_{i=1}^{M} \sum_{S_i} \exp \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m (S_i^m + S_i^{+m})} \qquad \text{(II.138)}$$

que de certa forma parece se aproximar mais de (II.130). Mas esta medida não mudaria nossos resultados anteriores. O único efeito seria tornar os máximos de $G_N(H)$ mais pronunciados.

CAPÍTULO III

SISTEMAS COM SIMETRIA LOCAL Z(N) A QUATRO DIMENSÕES

III.A - Considerações Gerais

O modelo mais simples com simetria local é o modelo de Ising com simetria de calibre ("gauge") que neste trabalho chamaremos simplesmente de modelo Ising-calibre. Este modelo foi inventado em 1971 por F.Wegner [8] que inspirado no rotor plano bidimensional desejava formular modelos que exibissem diagramas de fase não triviais sem magnetização espontânea (sem parâmetro de ordem local). Wegner percebeu que um grupo de invariancia local proibia a ocorrência de magnetização espontânea pois uma simetria local não pode ser quebrada espontaneamente. Este fato foi provado mais tarde por Elitzur [29] na formulação Euclidiana e por Lll sher [30] na formulação Hamiltoniana. O trabalho de Wegner, embora pouco citado é um dos mais significantes no estudo de teorias de calibre na rede.

Consideremos uma rede hipercúbica quadrimensional, indexamos as ligações como (r, μ) ou $(r+\mu, -\mu)$. Colocamos spins $(\sigma(r,\mu)=\pm 1)$ em cada ligação da rede. Definimos a transformação de calibre $G(r)$ como a operação que aplicada no ponto r inverte todos os spins que emanam deste ponto (veja Fig.13) A ação do modelo Ising-calibre é dada pela soma do produto de spins ao redor de quadrados primitivos ou "plaquetas" da rede (veja Fig. 14)

$$A = -J \sum_{r,\mu\nu} \sigma(r;\mu)\sigma(r+\mu;\nu)\sigma(r+\mu+\nu;-\mu)\sigma(r+\nu,-\nu) \qquad (III.1)$$

A invariança local da ação é evidente. Ao aplicarmos $G(r)$ um número par de spins (0 ou 2) são invertidos (veja Fig. 14) de tal modo que a ação é invariante pela transformação local de calibre. Em geral qualquer produto de $\sigma(r,\mu)$ ao longo de uma curva fechada tem invariança por transformação local de calibre [7].

Pelo teorema de Elitzur [29], conforme mencionado acima, o sistema descrito pela ação (III.1) não possui um parâmetro de ordem local (como a magnetização no modelo Ising global). Wegner [8] para estudar as fases da teoria Ising-calibre, inventou e estudou a função de correlação invariante por transformação de calibre. Esta função consiste no produto das ligações que formam uma curva fechada (veja Fig. 15a):

$$\prod_{\ell \in C} \sigma(\ell) = W(C) \qquad \text{(III.2)}$$

A função de correlação acima é conhecida na literatura como alça de Wilson [9] (Wilson loop) apesar do pioneirismo de Wegner. Wegner [8] mostrou que para altas temperaturas temos

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp\left(-A(C)\right) \qquad \text{(III.3a)}$$

onde por $A(C)$ subentende-se a área mínima delimitada por C, enquanto para baixas temperaturas temos

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp\left(-P(C)\right) \qquad \text{(III.3b)}$$

onde $P(C)$ é o perímetro da curva C.

Assim vemos que para temperaturas altas a função de correlação cai rapidamente conforme se aumenta o tamanho da alça enquanto que para baixas tem

peraturas a função de correlação cai mais devagar. Portanto a alça de Wilson tem comportamento distinto nas duas fases.

A alça de Wilson tem uma interpretação física interessante. Consideremos uma alça formando um retângulo de lado R numa direção espacial e lado T na direção temporal (veja Fig. 15b). A energia potencial necessária para separar duas cargas externas estáticas à uma distância R é dada por (veja Kogut[5]) :

$$V(R) = - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(C) \rangle \qquad (III.4)$$

Assim a lei de área significa que:

$$V(R) \sim R \qquad (III.5)$$

isto é, gasta-se energia infinita para separar as cargas, este fato é o que se chama por confinamento. A lei perímetro em contrapartida nos dá:

$$V(R) \sim \text{const.} \qquad (III.5b)$$

O que nos diz que as cargas externas podem ser facilmente separadas nesta fase.

Da mesma maneira que no modelo de Ising global, generalizações do modelo Ising-calibre para modelos com simetria de calibre Z(N) foram estudadas[26]. Colocamos em cada ligação da rede quadrimensional uma variável Z(N):

$$S(r;\mu) = S(r+\mu;-\mu) = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\eta(r,\mu)\right) \quad \eta(r,\mu) = 0,1,\dots,N-1 \qquad (III.6)$$

A transformação de calibre G(r) consiste em rodar de $\frac{2\pi}{N}$ ($-\frac{2\pi}{N}$) as

ligações que emanam do ponto r, paralelas (antiparalelas) aos vetores da base.

O termo mais simples com esta simetria, analogamente ao caso Z(2) consiste na "plaqueta" definida como o produto orientado das ligações num quadrado elementar (veja Fig. 14):

$$A_P = S(r;\mu)\, S(r+\mu;\nu)\, S^{+}(r+\mu+\nu;-\mu)\, S^{+}(r+\nu;-\nu) \qquad \text{(III.7)}$$

A ação mais simples com simetria local Z(N) é a chamada ação de Wilson [9].

$$A = -\frac{J}{2}\sum_{P}\left(A_P + A_P^{+}\right) \qquad \text{(III.8)}$$

onde $\sum_P$ significa soma sobre as plaquetas. Sistemas descritos pela ação (III.8) tem sido estudados intensivamente tanto na forma Euclidiana [24,59] como na forma Hamiltoniana [42,47].

Propomos neste trabalho, da mesma maneira que no caso de simetria global Z(N) (veja Eq. II.4), a ação mais geral possível do tipo ferromagnética com invariança local Z(N) [26]:

$$A = -\sum_{P}\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}}\frac{J_\alpha}{2}\left\{A_P^{\alpha} + A_P^{+\alpha} - 2\right\} \qquad \text{(III.9)}$$

A ação de Wilson (III.8) consiste no caso particular $J_\alpha = J\,\delta_{\alpha,1}$. A ação para o modelo Potts-calibre [71,72] é definida por

$$A = -\epsilon\sum_{r;\mu\nu}\delta_{A_P,1} \qquad \text{(III.10)}$$

Pelo fato de $(A_P)^N = 1$ e de (II.6) esta ação consiste no caso particular em que $J_1 = J_2 = \ldots = \left(\frac{3+(-)^N}{2}\right) J_{\bar{N}} = \frac{2\,\varepsilon}{N}$

III.B - Matriz de Transferência

Chamemos uma das direções da rede quadri-dimensional de direção temporal (por exemplo a direção $\hat{4}$). Como a ação geral (III.9) é invariante por transformação de calibre, é fácil ver que qualquer configuração das variáveis Z(N) é equivalente por transformação de calibre a uma configuração em que todas as variáveis na direção temporal assumem valor 1. Pelo fato do nosso interesse residir no cálculo de médias de funções invariantes pela transformação de calibre, podemos ao invés de calcularmos com todas as configurações, escolher o calibre temporal:

$$S(r;\hat{4}) = 1 \tag{III.11}$$

Assim a ação geral (III.9) será composta de plaquetas espaciais e plaquetas espaço-temporais:

$$A = -\sum_{x_4=-\frac{L}{2}}^{L/2} \sum_{x_1,x_2,x_3} \left\{ \sum_i \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2} \left[\left(S(x_1,x_2,x_3,x_4;\hat{i}) S^+(x_1,x_2,x_3,x_4+1;\hat{i}) \right)^\alpha + c.c. - 2 \right] + \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2} \left[\left(S(r;\hat{i}) S(r+\hat{i};\hat{j}) S^+(r+\hat{j};\hat{i}) S^+(r;\hat{j}) \right)^\alpha + c.c. - 2 \right] \right\} \tag{III.12}$$

onde L é o número de espaçamentos da rede na direção temporal. Usando as condições periódicas de contorno na direção temporal, obtemos de maneira análoga ao caso do sistema de spins a matriz de transferência

$$T = \prod_r \prod_{\substack{i,j \\ i<j}} \exp\left\{ \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_\alpha}{2} \left[\left(S(r;\hat{i}) S(r+\hat{i};\hat{j}) S^+(r+\hat{j};\hat{i}) S^+(r;\hat{j}) \right)^\alpha + h.c. - 2 \right] \right\} \times \prod_r \prod_i \exp\left\{ \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2} \left[R^\alpha(r;\hat{i}) + h.c. \right] \right\} \tag{III.13}$$

Onde agora $S(r;\hat{i})$ e $R(r;\hat{i})$ são operadores definidos nas ligações, sendo $R(r;\hat{i})$ operadores que rodam os operadores $S(r;\hat{i})$; isto é, satisfazem à ál-

gebra:

$$S^N = R^N = 1 \quad ; \quad T_r(S) = T_r(R) = 0$$
$$R^\alpha \cdot R^\beta = R^{\alpha+\beta} \quad (\mathrm{mod}\cdot N) \qquad \text{(III.14)}$$
$$RS = \begin{cases} e^{2\pi i/N} SR & \text{(para R e S na mesma ligação)} \\ SR & \text{(caso contrário)} \end{cases}$$

As funções f_α (J_α) satisfazem à equação (veja II.37):

$$\sum_{\eta=0}^{N-1} R^\eta \exp\left\{ \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \beta J_\alpha \left(\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\eta - 1\right)\right\} = \exp\left\{ \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2}\left(R^\alpha + R^{+\alpha}\right)\right\} \qquad \text{(III.15)}$$

e mostramos no apêndice A como se calculam as funções f_α e exibimos os resultados para N=2,3,4 e 5.

III.C - Formulação para Tempo Contínuo - Hamiltoniano Z(N)

De maneira análoga ao que fizemos seção (II.C) podemos obter o limite para tempos contínuos da ação geral (III.9), o que resulta no seguinte Hamiltoniano:

$$H = -\lambda \sum_{r;\mu\nu} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2} \left[\left(S(r;\mu) S(r+\mu;\nu) S^+(r+\mu+\nu;-\mu) S^+(r;\nu) \right)^\alpha + h.c - 2 \right] \qquad \text{(III.16)}$$
$$- \sum_{r;\mu} \frac{1}{2} \left[R^{\tilde{\alpha}}(r;\mu) + R^{+\tilde{\alpha}}(r;\mu) \right]$$

onde as plaquetas agora são puramente espaciais (sistema quântico tridimensional). Do mesmo modo que em (II.55) $\tilde{\alpha}$ é definido por $X_{\tilde{\alpha}} = \mathrm{Sup}\{ X_\alpha \}$ com os pesos X_α dados por (II.48).

Convém salientar que o Hamiltoniano possui apenas uma potência do operador R em contraposição com a matriz de transferência que exibe todas as potências de R. Esta diferença será importante no estudo das transformações de

dualidade (veja seção (III.D). Alguns casos particulares de (III.16) são interessantes. O Hamiltoniano correspondente à ação de Wilson [47] será dado por:

$$H = -\lambda \sum_{r,\mu\nu} \left[S(r;\mu) S(r+\mu;\nu) S^{+}(r+\mu+\nu;-\mu) S^{+}(r;\nu) + h.c - 2 \right] - \sum_{r,\mu} \frac{1}{2} \left[R(r;\mu) + h.c. \right] \tag{III.17}$$

e para o modelo Potts-calibre [71] teremos:

$$H = -\lambda \sum_{r;\mu\nu} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{\alpha,N/2}\right) \left\{ \left[\left(S(r;\mu) S(r+\mu;\nu) S^{+}(r+\mu+\nu;-\mu) S^{+}(r;\nu) \right)^{\alpha} + h.c - 2 \right] + \frac{1}{2} \left[R^{\alpha}(r;\mu) + h.c. \right] \right\} \tag{III.18}$$

III.D - Transformação Dual

Reparemos que o calibre temporal $S(r,\hat{4}) = 1$ não fixa completamente uma configuração representativa de uma escolha de calibre. Para ver isto procederemos da seguinte maneira. Fazemos uma transformação de calibre numa linha de pontos na direção X_4 (temporal). Como cada ligação na direção temporal é uma vez rodada de $\frac{+2\pi}{N}$ e outra de $\frac{-2\pi}{N} \Rightarrow S(r,\hat{4}) = 1$. Contudo as ligações espaciais, que emanam da linha de pontos, mudaram pelo fato de terem sido rodadas uma única vez (veja Fig. 16).

Restringindo-nos ao subespaço invariante por transformações de calibre, isto é,

$$G(r) \mid \rangle = \mid \rangle \tag{III.19}$$

podemos a fim de eliminar operadores dependentes, usar a identidade

$$G(r) = R(r;\hat{1}) R^{+}(r;-\hat{1}) R(r;\hat{2}) R^{+}(r;-\hat{2}) R(r;\hat{3}) R^{+}(r;-\hat{3}) = 1 \tag{III.20}$$

Escolhemos $R(r,\hat{3})$ como dependente e obtemos:

$$R^{+}(x_1,x_2,x_3;\hat{3}) = \prod_{n\geq 0}\prod_{i=1}^{2} R(x_1,x_2,x_3-n;\hat{i})\,R^{+}(x_1,x_2,x_3-n;-\hat{i}) \qquad (III.21)$$

Assim, sendo $R(r,\hat{3})$ dependente, todos os termos da matriz de transferência (ou Hamiltoniano) comutam com $S(r,\hat{3})$. Podemos consequentemente fixar completamente as configurações representativas de calibre, escolhendo o calibre axial:

$$S(r;\hat{3}) = 1 \qquad (III.22)$$

Desta maneira os operadores independentes serão $\{S(r,\hat{1});\ S(r,\hat{2})\ ;\ R(r,\hat{1});\ R(r,\hat{2})\}$.

Para efetuarmos a transformação dual associamos à rede original uma rede dual obtida unindo-se os centros dos cubos da rede original, isto é, (veja Fig. 17).

$$r \longrightarrow \tilde{r} = r + \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \qquad (III.23)$$

Podemos associar ao produto de operadores formando a plaqueta (2-simplex) uma variável numa ligação (3-2 simplex) da rede dual (veja Fig. 17):

$$\sigma(\tilde{r};\hat{i}) = S(r+\hat{i};\hat{j})\,S(r+\hat{i}+\hat{j};\hat{k})\,S^{+}(r+\hat{i}+\hat{k};\hat{j})\,S^{+}(r+\hat{i};\hat{k}) \qquad (III.24)$$

sendo i,j,k permutações cíclicas de $1,2,3$.

Definimos o operador de desordem não local na rede dual:

$$\rho(\tilde{r};\hat{1}) = \prod_{n\geq 0} R^{+}(x_1+1,x_2,x_3-n;\hat{2})$$
$$\rho(\tilde{r};\hat{2}) = \prod_{n\geq 0} R(x_1,x_2+1,x_3-n;\hat{1}) \qquad (III.25)$$

No setor em que trabalhamos ($G(r) = 1$) temos a identidade (III.21). Deste modo podemos associar ao operador R, localizado numa ligação (1-simplex) da rede original, uma plaqueta (3-1 simplex) da rede dual (veja Fig. 18).

$$R^{+}(r;\hat{3}) = \rho(\tilde{r}-\hat{1}-\hat{2};\hat{1})\,\rho(\tilde{r}-\hat{2};\hat{2})\,\rho^{+}(\tilde{r};-\hat{1})\,\rho^{+}(\tilde{r}-\hat{1};-\hat{2}) \tag{III.26}$$

As expressões análogas para $R^{+}(r,1)$ e $R^{+}(r,\hat{2})$ são no calibre axial para as variáveis duais $\rho(\tilde{r},\hat{3}) = 1$:

$$\begin{aligned} R^{+}(r;\hat{1}) &= \rho(\tilde{r}-\hat{3};-\hat{2})\,\rho^{+}(\tilde{r}-\hat{2};\hat{2}) \\ R^{+}(r;\hat{2}) &= \rho^{+}(\tilde{r}-\hat{3};-\hat{1})\,\rho(\tilde{r}-\hat{1};\hat{1}) \end{aligned} \tag{III.27}$$

de maneira que podemos escrever a matriz de transferência (III.13) e o Hamiltoniano (III.16) em termos da variáveis duais:

$$\begin{aligned} T_D = &\prod_{\tilde{r}}\prod_{i} \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{\beta J_\alpha}{2}\left[(\sigma(\tilde{r};\hat{i}))^{\alpha} + h.c - 2\right]\right\} \\ &\times \prod_{\tilde{r}}\prod_{\substack{i,j\\ i<j}} \exp\left\{\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2}\left[\left(\rho(\tilde{r};\hat{i})\,\rho(\tilde{r}+\hat{i};\hat{j})\,\rho^{+}(\tilde{r}+\hat{j};\hat{i})\,\rho^{+}(\tilde{r};\hat{j})\right)^{\alpha} + h.c.-2\right]\right\} \end{aligned} \tag{III.28}$$

$$\begin{aligned} H_D = -\lambda\Bigg\{ &\frac{1}{2\lambda}\sum_{\tilde{r};\mu\nu}\left[\left(\rho(\tilde{r};\hat{\mu})\,\rho(\tilde{r}+\mu;\nu)\,\rho^{+}(\tilde{r}+\nu;\mu)\,\rho^{+}(\tilde{r};\nu)\right)^{\tilde{\alpha}} + h.c\right] \\ &+ \sum_{\tilde{r},\mu}\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2}\left[(\sigma(\tilde{r},\mu))^{\alpha} + h.c - 2\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{III.29}$$

A menos dos termos de superfície [47], que analogamente ao caso de spins são irrelevantes quando o objetivo é o estudo dos diagramas de fase.

É facil vermos que os operadores duais (III.24), (III.25) e (III.27) satisfazem à mesma álgebra que os operadores originais, isto é:

$$\rho^N(\tilde{r};\mu)=1 \quad , \quad \sigma^N(\tilde{r};\mu)=1$$

$$\rho(\tilde{r};\mu)\sigma(\tilde{r}';\mu')=\begin{cases} e^{i\frac{2\pi}{N}}\sigma(\tilde{r}';\mu')\rho(\tilde{r};\mu) & \text{se } \begin{matrix} r=r' \\ \mu=\mu' \end{matrix} \\ \sigma(\tilde{r}';\mu')\,\rho(\tilde{r};\mu) & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (III.30)$$

Assim como (T e TD) possuem a mesma forma em termos dos operadores (S, R) e (ρ, σ) respectivamente, podemos escrever lembrando de (II.10):

$$Z(\{\beta J_\alpha\},\{f_\beta\})=e'Z(\{f_\alpha\},\{\beta J_\beta\}) \qquad (III.31)$$

onde e' é uma constante irrelevante.

Vemos então que a transformação dual $S,R \to \rho, \sigma$ leva pontos do espaço de parâmetros $\{\beta J_\alpha\}$ a pontos $\{f_\alpha\}$ pertencentes ainda ao mesmo espaço. Consequentemente a transformação dual simplesmente muda as constantes de acoplamento da ação geral (III.9). Como no caso de spins a 2 dimensões a ação (III.9) é autodual em um sentido geral.

Contudo na formulação Hamiltoniana não temos em geral esta autodualidade. Entretanto, conforme veremos mais adiante, existem modelos que apesar de não serem autoduais no sentido K-W (veja seção II.D) numa formulação Euclidiana, tornam-se autoduais na formulação Hamiltoniana.

III.E - Alça de Wilson, Alça de 't Hooft - Caracterização de fases

Conforme discutimos em III.A os modelos com simetria local não exibem parâmetro de ordem local, pelo fato da simetria local não poder ser quebra espontaneamente [29,30]. Podemos contudo caracterizar as várias fases dos modelos pelo comportamento de funções de correlação invariantes por transformação de calibre. Uma destas funções de correlação é a alça de Wilson, definida pelo

produto orientado (veja Fig. 19) dos operadores $S(r,\mu)$ ao longo de um contorno C.

$$W(C) = \prod_{\substack{\text{orient} \\ \ell \in C}} S(\ell) \qquad \text{(III.32a)}$$

Por um produto orientado deve se entender o seguinte: se a direção do contorno em determinada ligação ℓ for paralela (antiparalela) aos vetores básicos colocamos $S(\ell)$ $(S^{+}(\ell))$ na formação de $W(c)$.

De maneira análoga, introduzimos a alça de 't Hooft, formada pelo produto orientado dos operadores $\rho(\tilde{r}, \mu)$ ao longo de um contorno fechado $\tilde{C}$ na rede dual.

$$\tilde{W}(\tilde{C}) = \prod_{\substack{\text{orient} \\ \tilde{\ell} \in \tilde{C}}} \rho(\tilde{\ell}) \qquad \text{(III.32b)}$$

A importância destes operadores pode ser entendida mais facilmente na linguagem de supercondutores. Nielsen e Olesen [73] observaram que um supercondutor (relativístico) é um exemplo de um sistema de monopolos magnéticos permanentemente confinados. Se pusermos um par de monopolos magnéticos em tal sistema eles ligar-se-ão por tubos de fluxos magnéticos, devido ao efeito Meissner[74].

Na QCD os quarks estão acoplados de maneira minimal ao campo de gauge[24] e devem portanto ser considerados como partículas elétricas e não magnéticas. Portanto a alça de Wilson é relacionada com a energia potencial necessária para separar um par de cargas elétricas externas (Veja Eq. (III.4)), e o decaimento área (perímetro) implica no confinamento (não confinamento) das cargas elétricas. Na situação oposta (situação dual) teremos um supercondutor magnético[75] em que as cargas elétricas estão permanentemente confinadas. A alça de 't Hooft [76], (Eq. (III.32b)) estará relacionada com a energia potencial necessária para separar um par de monopolos magnéticos externos (veja Eq. III.4). O

decaimento com a área (perímetro) da alça de 't Hooft implica no confinamento (não confinamento) das cargas magnéticas.

Para a caracterização das fases do nosso modelo descrito pela ação geral (III.9) precisamos olhar para o valor esperado de potências da alça de Wilson e de 't Hooft. O valor esperado $\langle W^n(c)\rangle$ ($\langle \tilde{W}^n(\tilde{c})\rangle$) relaciona-se com a energia potencial necessária para manter afastadas um conjunto de N cargas elétricas (magnéticas) externas de suas antipartículas.

Por meio de expansões de baixa (alta) temperatura na rede direta (dual) podemos caracterizar a fase de baixa temperatura para a nossa ação geral (III.9). Teremos um decaimento com o perímetro para todas as potências da alça de Wilson, enquanto que o decaimento é com a área para todas as potências da alça de 't Hooft. Em síntese, temos a fase do tipo (i):

$$\text{(i)} \quad \langle W^n(c)\rangle \sim e^{-P(c)} \; ; \; \langle \tilde{W}^n(\tilde{c})\rangle \sim e^{-A(\tilde{c})} \qquad n=1,2,\cdots,N \qquad \text{(III.33a)}$$

Que é chamada fase supercondutora elétrica. Todos os múltiplos da carga magnética são confinados enquanto que todos os múltiplos da carga elétrica são não confinados. Dizemos que temos, nesta fase, um condensado de cargas elétricas.

Como nosso modelo é autodual, e como a transformação de dualidade troca os operadores ordem e desordem ($S \leftrightarrow P$), a alça de Wilson e de 't Hooft trocam de comportamento por esta transformação. A fase dual à fase (i) é a fase de altas temperaturas, em que o decaimento é com a área (perímetro) para todas as potências da alça de Wilson ('t Hooft), isto é, temos a fase do tipo (ii)

$$\text{ii)} \quad \langle W^n(c)\rangle \sim e^{-A(c)} \; ; \; \langle \tilde{W}^n(\tilde{c})\rangle \sim e^{-P(\tilde{c})} \qquad n=1,2,\cdots,N \qquad \text{(III.33b)}$$

Que é a chamada fase supercondutora magnética [5,45]. Todos os múltiplos da carga elétrica são confinados enquanto que os múltiplos da carga magnética são não confinados. Dizemos que temos, nesta fase, um condensado de cargas magnéticas.

Pelo fato de nossa ação (III.9) ser suficientemente geral teremos fases em que tanto as cargas elétricas fundamentais como as magnéticas estão confinadas mas um múltiplo n (n divisor de N) de cargas elétricas e $\frac{N}{n}$ de cargas magnéticas são não confinadas; isto é, teremos uma fase do tipo (iii):

$$\text{iii)}\quad \begin{array}{l} \langle W(c)\rangle \sim e^{-A(c)} \;;\; \langle \tilde{W}(\tilde{c})\rangle \sim e^{-A(\tilde{c})} \\ \langle W^{n}(c)\rangle \sim e^{-P(c)} \;;\; \langle \tilde{W}^{N/n}(\tilde{c})\rangle \sim e^{-P(\tilde{c})} \end{array} \qquad \text{(III.33c)}$$

Temos portanto um condensado de n cargas elétricas e $\frac{N}{n}$ cargas magnéticas o que ocasiona o confinamento das cargas elétricas e magnéticas fundamentais.

Uma última fase possível de ocorrer é uma em que temos o decaimento perímetro tanto para o valor esperado da potência n da alça de Wilson como para o valor esperado da potência ℓ da alça de 't Hooft, com $n.\ell \neq N$; isto é, a fase do tipo (IV):

$$\text{IV)}\quad \langle W^{n}(c)\rangle \sim e^{-P(c)} \;;\; \langle \tilde{W}^{\ell}(\tilde{c})\rangle \sim e^{-P(\tilde{c})} \qquad n.\ell \neq N \qquad \text{(III.33d)}$$

É facil nos convencermos que as alças de Wilson e de 't Hooft em virtude de (III.14), (III.25) e (III.30) satisfazem à álgebra:

$$W^{n}(c)\,\tilde{W}^{\ell}(\tilde{c}) = \tilde{W}^{\ell}(\tilde{c})\,W^{n}(c)\,\exp\left\{\left[\frac{i2\pi\,\ell.n}{N}\right]V(c,\tilde{c})\right\} \qquad \text{(III.34)}$$

onde $V(c,\tilde{c})$ é o número de vezes (com sinal apropriado) que os contornos c e $\tilde{c}$ se interceptam.

G. 't Hooft [76] argumentou que em virtude de (III.34) a fase do tipo

(IV) ocorre somente se o sistema exibir partículas de massa nula. Esta fase corresponde à versão na rede da PQED (Eletrodinâmica quântica periódica) com simetria Z(N) de calibre e com o foton não massivo.

III.F - Informações Gerais sobre a Superfície Crítica

Conforme vimos na seção (III.D) nosso modelo geral (III.9) é autodual num sentido geral. O conjunto de pontos invariantes pela transformação dual formam a superfície autodual (veja seção IIF). Esta superfície é cortada por caminhos termodinâmicos de modelos com acoplamentos $\{J_\alpha\}$. A superfície autodual deve coincidir com a superfície crítica na região em que é cortada por modelos que exibam apenas duas fases. Isto se deve ao fato de, pela transformação dual, os comportamentos das alças de Wilson de 't Hooft se inverterem.

A equação que rege a transformação de dualidade do sistema com simetria local é a mesma que rege a transformação para o caso com simetria global (veja III.15) e (II.37)). A superfície fixa (veja seção (II F)) é dada pela equação (II.82) e a superfície autodual $\left[\frac{N}{4}\right]$ dimensional é obtida resolvendo-se as equações (II.83a).

III.G - Modelos Particulares

III.G.1 - Modelo de Potts-calibre

Este modelo é o caso particular da ação (III.9) em que temos $J_1=J_2=\ldots=\left[\frac{3+(-)^N}{2}\right]J_{\frac{}{N}}=\frac{2\varepsilon}{N}$ ou em termos das variáveis definidas em (II.78a)

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_N \quad ; \quad X = \exp -\beta\epsilon \qquad \text{(III.35a)}$$

Pouco se conhece sobre estes modelos. Para N=2,3 eles são idênticos aos modelos descritos pela ação de Wilson (Eq. III.8) e os resultados "experimentais" de simulação por técnicas de Monte Carlo[31] indicam que tais modelos exibem uma única transição de fase de 1a. ordem.

Resultados [72] de expansão $\frac{1}{N}$ indicam que os modelos Potts exibem transição de fase de primeira ordem para todo $N > 1$.

Pela transformação dual temos: $(X_\alpha \to \tilde{X}_\alpha)$.

$$\tilde{\chi} = \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2 = \cdots = \tilde{X}_N = \frac{1-X}{1+(N-1)X} \qquad \text{(III.35b)}$$

E vemos que a igualdade original (III.35a) se preserva após a transformação dual. Assim estes modelos são autoduais no sentido (K-W) (veja seção II C). Consequentemente supondo que a transição seja única [72], faremos esta suposição para delinearmos o diagrama de fase, está será dada por (II.82):

$$X_c = (\sqrt{N}+1)^{-1} \quad ; \quad \beta_c \epsilon = \ln(\sqrt{N}+1) \qquad \text{(III.35c)}$$

É interessante observarmos que os modelos Potts, como no caso de spins Z(N) bidimensionais, são autoduais no sentido K-W também na formulação Hamiltoniana. Usando-se as variáveis duais definidas em (III.24) e (III.25) em (III.18) obteremos:

$$H_P(S,R;\lambda) = \lambda H_P(\rho,\sigma;\lambda^{-1}) \qquad \text{(III.36)}$$

e $\lambda_c = 1$ nos daria o ponto crítico na formulação Hamiltoniana.

Estes modelos (veja seção III.E) possuem duas fases. Para baixas temperaturas exibem uma fase supercondutora elétrica (fase do tipo (i)) e para altas temperaturas exibem uma fase supercondutora magnética (fase do tipo (ii)).

III.G.2 - Modelos de Wilson

Estes modelos, definidos pela equação (III.8), tem sido largamente estudados tanto na forma Euclidiana [24] como na forma Hamiltoniana [47,58]. Correspondem ao caso particular da ação geral (III.9) em que $J_\alpha = J\delta_{\alpha,1}$. Para N= 2,3 os modelos de Wilson confundem-se com os Potts-calibre, sendo portanto autoduais no sentido K-W, da mesma maneira que no caso de spins (veja II.88a-b). Para N = 4 $X_2 = X_1^2 \leftrightarrow \tilde{X}_2 = \tilde{X}_1^2$ o modelo é ainda autodual [59] no sentido K-W. A temperatura crítica, se supusermos uma única transição de fase, é dada pela Eq. (II.82).

$$X_1^c = \sqrt{2} - 1 \quad ; \beta_c J = \ln(\sqrt{2}+1) \tag{III.37}$$

Para N ⩾ 5 os modelos não são mais autoduais no sentido K-W (veja apêndice A). Contudo na versão para tempos contínuos (veja Eq. III.17) de maneira análoga ao caso de spins, o modelo é autodual para todo N, isto é

$$H_W(S,R;\lambda) = \lambda H_W(\rho,\sigma;\lambda^{-1}) \tag{III.38}$$

Resultados foram obtidos para estes modelos por simulação Monte Carlo [31]. Para N < 4 exibem uma única transição de fase de primeira ordem. Contudo para N ⩾ 5 além das fases de altas e baixas temperaturas o sistema possui uma fase intermediária separada por transições de fase de 2a. ordem (ou ordem superior). Pela nossa transformação dual, se esta fase intermediária existir, ela deve ser autodual (os pontos no espaço de parâmetros pertencentes a esta fase, permanecem nela após a transformação de dualidade). Consequentemente as alças de Wilson e de 't Hooft exibem o mesmo tipo de decaimento. Pelas discussões feitas na seção (III.E) esta é uma fase do tipo (IV) em que as duas alças caem com o perímetro da alça. Temos então, nesta fase intermediária, excitações de massa nula (foton

não massivo).

III.G.3 - Modelo Villain

O modelo Villain [20] (Gaussiano periódico), para teorias de calibre, foi estudado por diversos autores [24,77]. Este modelo foi introduzido como uma maneira de ter à mão um modelo mais simples que se aproxima ao de Wilson para temperaturas baixas.

Lembrando-se que em cada ligação da rede quadri-dimensional temos uma variável $Z(N)$: $S(r;\mu) = \exp\left[i\frac{2\pi}{N}n(r;\mu)\right]$, a função de partição para o modelo Villain é dada por:

$$\sum_N^V(\beta) = \sum_{n(r;\mu)=0}^{N-1} \prod_{r;\mu\nu} \exp f\left(\frac{2\pi}{N}n_{\mu\nu}\right) \qquad \text{(III.39a)}$$

onde

$$\exp f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x-2\pi m)^2\right] \qquad \text{(III.39b)}$$

e

$$n_{\mu\nu} = n(r;\mu) + n(r+\mu;\nu) - n(r+\nu;\mu) - n(r;\nu) \qquad \text{(III.39c)}$$

Modelos generalizados Villain podem ser definidos de maneira análoga aos definidos na seção (II.G.3). Contudo, como no caso de spins, eles não trazem nenhuma informação adicional àquela prestada pelo modelo definido pelas Eqs. (III 39 a-c).

Por meio de cálculos inteiramente análogos aos realizados no apêndice B mostra-se que o modelo Villain é autodual [77] no sentido K-W, isto é:

$$Z_N^V(\beta) = Z_N^V(\tilde{\beta}) \quad ; \quad \tilde{\beta} = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\beta} \qquad (III.40)$$

O modelo Villain com simetria de calibre U(1) é obtido tomando-se o limite $N \to \infty$ do modelo $Z_N^V(\beta)$. Este modelo exibe duas fases[4,45]. A altas temperaturas possui uma fase massiva supercondutora magnética. A baixas temperaturas possui uma fase mole com decaimento tipo perímetro para as alças de Wilson e de 't Hooft e forças Coulombianas de longo alcance entre cargas externas (versão discreta da PQED).

Elitzur et al [42] mostraram que os valores esperados da alça de Wilson para os modelos Villain com simetria de Calibre Z(N) e U(1) satisfazem à desigualdade:

$$\langle W(C)\rangle_N^V \geq \langle W(C)\rangle_{U(1)}^V \qquad (III.41)$$

Onde do lado esquerdo temos o valor esperado da alça de Wilson para o modelo (III.39) enquanto do lado direito temos a mesma média para o modelo U(1), ambas calculadas na mesma temperatura.

Como o modelo Villain Z(N) é autodual, se este modelo exibir apenas duas fases a temperatura crítica deve ser

$$T_c = \frac{1}{\beta_c} = \frac{2\pi}{N}$$

Sendo Tg a temperatura crítica para a versão Villain da teoria U (1) temos que se $T < Tg$ o valor esperado da alça de Wilson para a teoria U(1) terá um decaimento com o perímetro da alça. Pela desigualdade (III.41) obtemos então, que para todo Z(N) na versão Villain, a alça de Wilson terá um decaimento com o

perímetro para $T < Tg$. Consideremos um modelo com simetria local $Z(N)$ com $N > 2\pi/Tg$. É possível então encontrar este modelo numa temperatura T tal que:

$$\frac{2\pi}{N} < T < T_g$$

Se este modelo exibe apenas duas fases ($Tc = \frac{2\pi}{N}$) então ele deve estar na fase em que $W(c)$ cai com a área (pois $T > \frac{2\pi}{N}$). Contudo como $T < Tg$ a desigualdade (III.41) nos diz de $W(c)$ deve cair com o perímetro da alça. Concluimos então que para $N > 2\pi/Tg$ os modelos Villain devem exibir pelo menos três fases.

Pela desigualdade (III.41) tal fase intermediária deve ter um decaimento com o perímetro da alça para $W(c)$. Pela autodualidade do modelo Villain esta fase intermediária deve ser autodual, o que implicaria que $\tilde{W}(\tilde{c})$ deva ter também um decaimento com o perímetro da alça. Conforme discutimos na seção (III E) uma fase em que tanto $W(c)$ como $\tilde{W}(\tilde{c})$ decaem com o perímetro da alça, somente é possível se a fase for mole. Assim a fase intermediária deve ser uma fase com fotons não massivos, que seria a versão discreta para uma PQED com simetria $Z(N)$.

Usando-se a estimativa [78,79] grosseira $Tg \simeq 1.9$, obteremos para $N > 3$ pelo menos três fases. Contudo os resultados por simulação de Monte Carlo[31], nos revelam apenas duas fases para o modelo de Wilson com $N = 4$. Pelo fato dos caminhos termodinâmicos dos modelos de Wilson e Villain serem próximos, acreditamos que a fase intermediária surja a partir de $N = 5$. Usaremos esta estimativa quando esquematizarmos os diagramas de fase para os modelo $Z(N)$ com simetria local[25].

Para temperaturas baixas o modelo Villain se aproxima do modelo descrito pela ação de Wilson[61]. Da mesma maneira que no caso de spins, é interessante determinarmos o caminho termodinâmico do modelo Villain para inferirmos a

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FISICA

cerca das fases da ação geral III.9. Por meio de um procedimento análogo ao que fizemos na seção (II.G.3) obtemos que os pesos $X_\alpha^N(\beta)$ (veja Eq. II.78a) que definem o caminho termodinâmico do modelo Villain são dados por:

$$X_\alpha^V(\beta) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{2\pi^2\beta}{N^2}(\alpha - Nm)^2\right] \Big/ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp -2\pi^2\beta m^2 \qquad \text{(III.42)}$$

III.H - Diagramas de Fase

Usando-se todas as informações das seções anteriores construiremos os diagramas de fase para a ação geral (III.9) de modelos com simetria local Z(N). Da mesma maneira que fizemos no capítulo II usaremos a hipótese de continuidade da superfície crítica na confecção dos diagramas de fase. Esta hipótese é um tanto forte para o caso de simetrias locais, pois existem modelos que possuem transição de 1a. ordem[31] sem um parâmetro de ordem local.

III.H.1 - Z(2) e Z(3)

Para N = 2,3 nossa ação geral (III.9) coincide com a ação de Wilson, pois existe apenas uma constante de acoplamento. Cálculos de Monte Carlo[31] e argumentos heurísticos indicam que temos neste caso duas fases massivas (uma fase em que as cargas magnéticas estão confinadas e outra em que as cargas elétricas estão confinadas) separadas por uma transição de primeira ordem. Usando-se ' nossa dualidade, obtemos pela Eq. (II.82) as temperaturas críticas:

$$\begin{aligned} N=2 &: \quad 1+x_1 = \sqrt{2} \quad ; \quad \beta J_1^c = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \\ N=3 &: \quad 1+2x_1 = \sqrt{3} \quad ; \quad \beta J_1^c = \frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{3}) \end{aligned} \qquad \text{(III.43)}$$

Na fase de baixas (altas) temperaturas o valor esperado da alça de Wilson tem um decaimento com o perímetro (área mínima) da alça e comportamento oposto para o valor esperado da alça de 't Hooft.

III.H.2 - Z(4)

Para N = 4 nosso espaço de parâmetros é bidimensional com a linha autodual dada por:

$$1 + 2X_1 + X_2 = \sqrt{4} \quad ; \; X_1 = \exp -\beta(J_1 + 2J_2) \qquad (III.44)$$
$$X_2 = \exp -\beta J_1$$

Se um dado modelo (X_1, X_2) sofre apenas uma transição de fase, o ponto crítico é obtido pela intersecção da Eq. (III.44) com o caminho termodinâmico Γ do modelo.

A fim de desenharmos o diagrama de fase é interessante olharmos para casos limites, da mesma maneira que fizemos no caso de spins. A variável Z(4) colocada nas ligações da rede pode ser escrita como o produto de duas variáveis Z(2) colocadas na mesma ligação (veja Eq. II.104).

$$S(r;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ e^{-\frac{i\pi}{4}}\sigma(r;\mu) + e^{\frac{i\pi}{4}}\tau(r;\mu)\right\} \; ; \; \sigma^2 = \tau^2 = 1 \qquad (III.45)$$

Em termos das variáveis Z(2) a ação é escrita:

$$A_4 = -\frac{J_1}{4}\sum_{\square}\Big\{\big[\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4) + \sigma(1)\tau(2)\sigma(3)\tau(4)$$
$$-\sigma(1)\tau(2)\tau(3)\sigma(4) - \sigma(1)\sigma(2)\tau(3)\tau(4)\big] + [\sigma \leftrightarrow \tau]\Big\} \qquad (III.46)$$
$$-J_2\sum_{\square}\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\,\tau(1)\tau(2)\tau(3)\tau(4)$$

É evidente que para $J_1 \to 0$ $(X_2 \to 1)$ temos um modelo Z(2) local para a variável $S^2 = \sigma\tau$ com temperatura crítica $X_1^c = \sqrt{2}-1$. Neste limite $\langle W^2(c)\rangle$ muda o decaimento com a área para perímetro na transição.

O modelo obtido pela transformação dual deste modelo $J_2 \to \infty$ $(X_1 = 0)$ deve ser um modelo do tipo Z(2) local com ponto crítico $X_2^c = \sqrt{2}-1$. Pela nossa hi

pótese de continuidade da superfície crítica prolongamos estes dois pontos críticos para o interior do diagrama de fase. A estabilidade destes pontos, quando nos afastamos das linhas $X_1 = 0$ e $X_2 = 1$, bem como a caracterização das fases mostradas abaixo, podem ser testadas por expansão de altas e baixas temperaturas (isto pode ser feito para qualquer N). Expansões $1/_N$ indicam [72] que todos modelos Potts-calibre (veja seção (III.G.1)) exibem uma transição de fase de primeira ordem. Usaremos a hipótese desta transição ser única (localizada em $X_1^c = X_2^c = \ldots = X_N^c = (\sqrt{N}+1)^{-1}$) na confecção dos diagramas de fase. "Experiências" de simulação por técnicas de Monte Carlo nos mostram uma única transição de primeira ordem para o modelo de Wilson Z(4). Concluimos que uma bifurcação deve ocorrer e localizamos esta bifurcação no ponto crítico do modelo de Potts em analogia com o caso de spins. O diagrama de fase para o modelo Z(4) geral que conjecturamos é o mostrado na Fig. 7, onde as fases são caracterizadas por:

Fase 1: $\langle W^n(c)\rangle \sim e^{-P}$
$\langle \tilde{W}^n(\tilde{c})\rangle \sim e^{-A}$ $\qquad$ $n=1,2$ (confinamento magnético)

Fase 2: $\langle W^n(c)\rangle \sim e^{-A}$
$\langle \tilde{W}^n(\tilde{c})\rangle \sim e^{-P}$ $\qquad$ $n=1,2$ (confinamento elétrico)

Fase 3: $\langle W(c)\rangle \sim e^{-A}$ $\qquad$ (cargas fundamentais confinadas)
$\langle W^2(c)\rangle \sim e^{-P}$
$\langle \tilde{W}(\tilde{c})\rangle \sim e^{-A}$ $\qquad$ Não existem partículas de massa nula
$\langle \tilde{W}^2(\tilde{c})\rangle \sim e^{-P}$

Pelo fato de $[W^2, \tilde{W}^2] = 0$ o argumento de 't Hooft em favor de uma fase mole ($m=0$) não se aplica à fase 3. De fato seria bastante difícil imaginar uma fase mole limitada por linhas críticas referentes a transições de primeira ordem. Em transições de primeira ordem não existem efeitos de grande alcance, o que fatalmente existe numa fase com excitações não massivas. Na fase 3 as cargas elétricas e magnéticas fundamentais são confinadas, enquanto que estados criados

por S^2 e ρ^2 aparecem assintoticamente.

III.H.3 - Z(5)

Para N = 5 temos um espaço de parâmetros bidimensional com a linha autodual:

$$1 + 2X_1 + 2X_2 = \sqrt{5}$$

Como no caso de spins, a existência de 3 fases no modelo Villain (veja seção (III.G.3)) implica que a reta autodual deve bifurcar-se no ponto E diferente do ponto crítico do modelo Potts. Devido ao seu caráter não massivo esta fase deve estar circundada por linhas de transição de fase de segunda ordem ou ordem superior, enquanto em $\overline{EP}$ a transição é de primeira ordem. Mostramos o diagrama de fase na Fig. 8, onde as fases são caracterizadas da seguinte forma:

Fase 1: $W^n(c) \sim e^{-P}$, $\langle \tilde{W}^k(\tilde{c}) \rangle \sim e^{-A}$ $\quad m \neq 0$

Fase 2: $W^n(c) \sim e^{-A}$, $\langle \tilde{W}^k(\tilde{c}) \rangle \sim e^{-P}$ $\quad m \neq 0$

Fase 3: $W^n(c) \sim e^{-P}$, $\langle \tilde{W}^k(\tilde{c}) \rangle \sim e^{-P}$ $\quad m = 0$

$n,k = 1,2$

III.H.4 - Z(6)

Z(6) é um exemplo bastante instrutivo para analisar possíveis situações que podem ocorrer para um Z(N) geral. O espaço de parâmetros é tridimensional com:

$$X_1 = \exp -\beta\left[\frac{J_1}{2} + \frac{3}{2}J_2 + 2J_3\right] , \; X_2 = \exp -\frac{3}{2}\beta\left[J_1 + J_2\right] \qquad \text{(III.47)}$$

$$\text{e} \qquad X_3 = \exp -2\beta(J_1 + J_3)$$

A reta autodual passa pelos pontos críticos do modelo Potts-calibre e Villain (veja Fig. 9).

Como no caso do modelo com simetria global escrevemos a variável Z(6) situada na ligação em termos do produto de uma variável Z(2) por uma Z(3) ambas situadas na mesma ligação:

$$S(r;\mu) = \sigma(r;\mu)\,\Sigma(r;\mu) \quad ; \quad \sigma^2(r;\mu) = \Sigma^3(r;\mu) = 1$$

A ação geral Z(6) toma então a seguinte forma:

$$A_6 = -\sum_{P} \left\{ \frac{J_1}{2}\,\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\left[\Sigma(1)\Sigma(2)\Sigma^{+}(3)\Sigma^{+}(4) + c.c.\right] + \frac{J_2}{2}\left[\Sigma(1)\Sigma(2)\Sigma^{+}(3)\Sigma^{+}(4) + c.c.\right] + J_3\,\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4) \right\} \qquad (III.48)$$

O mesmo desacoplamento que tínhamos no caso de spins temos agora na superfície $X_1 = X_2X_3$ $(J_1 = 0)$. Nesta superfície temos um modelo Z(2) e outro Z(3) desacoplados. Mostramos a projeção desta superfície no plano $X_1 = 0$ na figura 10. As linhas críticas I_1-I_2 e P_1-P_2 correspondem neste caso a linhas de transição de primeira ordem dos modelos Z(2) e Z(3). Em termos do valor esperado das alças de Wilson e 't Hooft das variáveis Z(2) e Z(3) as fases nesta superfície (veja Fig. 10) são caracterizadas conforme tabela abaixo:

Fases	1	2	4	5
$\langle \prod_{\ell\in C} \sigma(\ell) \rangle$	e^{-A}	e^{-P}	e^{-P}	e^{-A}
$\langle \prod_{\ell\in C} \Sigma(\ell) \rangle$	e^{-P}	e^{-A}	e^{-P}	e^{-A}

Nesta superfície o valor esperado da alça de Wilson em termos das variáveis Z(6) pode ser escrita como o produto dos valores esperados das alças de Wilson para as variáveis Z(2) e Z(3), i. ē:

$$\left\langle \prod_{\ell\in C} S(\ell) \right\rangle = \left\langle \prod_{\ell\in C} \sigma(\ell) \right\rangle \left\langle \prod_{\ell\in C} \Sigma(\ell) \right\rangle \Big|_{J_1=0} \qquad (III.48')$$

Por meio da tabela acima e da relação (III.48')podemos caracterizar '

as fases em termos das variáveis originais, conforme mostramos na tabela 5. De maneira análoga ao caso de spins, por informação do modelo Villain que exibe uma fase intermediária, a reta autodual deve bifurcar-se no ponto E (veja Fig. 9) dando origem a uma fase mole, cuja caracterização é mostrada na tabela 5.

Na linguagem de "supercondutores" podemos dizer o seguinte. Na fase 4 (fase 5) temos um condensado de todos tipos de cargas elétricas (magnéticas) que confinam os monopolos magnéticos (elétricos). Na fase 1 (fase 2) o condensado consiste de duplas (trincas) de cargas elétricas e trincas (duplas) de monopolos magnéticos, pelo fato de $\langle W^2(c)\rangle$ ($\langle W^3(c)\rangle$) e $\langle \tilde{W}^3(\tilde{c})\rangle$ ($\langle \tilde{W}^2(\tilde{c})\rangle$) decairem com o perímetro da alça. Estes condensados confinam as outras cargas. Para saber se o mecanismo dinâmico é realmente confinamento ou desbotamento[80] se deve olhar para a função de correlação a pequenas distâncias ou acoplar números quânticos adicionais cujo aparecimento em estados assintóticos possa ser verificado. Na Fig. 10 mostramos de modo pictório os condensados, onde as bolas vazias (cheias) representam as cargas elétricas (magnéticas).

III.H.5 - Z(7)

Para este caso temos ainda um espaço de parâmetros tridimensional e a superfície autodual é a reta que passa pelos pontos críticos do modelo Potts-calibre e do modelo Villain. De maneira análoga ao exposto no modelo Z(5), temos três tipos de fase. Uma fase supercondutora elétrica (baixas temperaturas), uma fase supercondutora magnética (altas temperaturas) e uma fase mole (com excitações não massivas) que é a versão discreta da PQED com simetria Z(7). O diagrama de fase é essencialmente o desenhado na Fig. 11.

III.H.6 - Fases para $N \geqslant 8$

As mesmas considerações feitas na seção (II.H.6) para o caso de spins se aplicam para o caso de teorias de calibre a 4 dimensões.

Para N primo temos três tipos de fases: 1 - fase supercondutora elétrica (baixas temperaturas), 2 - fase supercondutora magnética (altas temperaturas) e 3 - fase não massiva ("PQED" - Z(N)).

Para o caso de N não primo, decompomo-lo em fatores primos, e suponhamos que cada fator ocorra uma única vez. Para cada fator $\ell < 5$, temos além das fases 1,2,3 acima, um outro tipo de fase correspondendo a um condensado de ℓ cargas elétricas e N/ℓ cargas magnéticas. Para cada fator primo $m \geqslant 5$ aparecerão dois outros tipos de fase; uma fase massiva que é um condensado de m cargas elétricas e N/m cargas magnéticas e a outra não massiva (PQED-Z(m)).

No limite de $N \to \infty$ as fases caracterizadas por condensados de cargas elétricas desaparecem. Temos apenas a fase massiva supercondutora magnética e a fase não massiva que é a versão discreta da PQED.

III.I - Aproximação de Campo Médio

A aproximação de campo médio, em geral, (veja seção (II.I)) reduz os cálculos de um sistema de muitos corpos para os de 1 corpo. Isto é feito pela introdução de um campo efetivo H associado ao parâmetro de ordem local do sistema. Como teorias de calibre não exibem parâmetro de ordem local[29,30], a aplicação da aproximação de campo médio é problemática neste caso.

Consideremos a função de partição para a ação geral (III.9)

$$Z = e^{-M\beta f_N} = \sum_{S(r;\mu)} \prod_{r,\mu} \exp\left\{ \sum_{p} \frac{\beta}{2} \left[\sum_{m=1}^{\bar{N}} J_m \left(A_p^{\alpha} + c.c. \right) \right] \right\} \qquad (III.49)$$

onde M é o número de pontos da rede.

Da mesma maneira que fizemos no caso de spins (veja seção (II.K)) in

troduzimos a aproximação de campo medio via desigualdade de Peierls[68].

$$\langle \exp B \rangle \geq \exp \langle B \rangle \qquad (III.50)$$

O problema reside na escolha, dentre as medidas que desacople o sistema, aquela que mais se aproxima da situação física real.

Como a física envolvida é invariante por transformações de calibre, uma escolha natural é usar a medida invariante por transformação de calibre:

$$D_1[S(r;\mu)] = \frac{\exp\left\{\frac{H}{2}\sum_{P^*}\left[S(1)S(2)S^+(3)S^+(4)+c.c.\right]\right\}}{\prod_{r,\mu}\sum_{S(r;\mu)}\exp\left\{\frac{H}{2}\sum_{P^*}\left[S(1)S(2)S^+(3)S^+(4)+c.c.\right]\right\}} \qquad (III.51)$$

Onde P^* denota o subconjunto das plaquetas tal que cada variável $S(r,\mu)$ pertença apenas a uma plaqueta. Desta maneira as plaquetas P^* são não correlacionadas. Na Figura (20) mostramos o subconjunto P^* para o caso $d = 3$.

Se aplicamos a medida D_1 $(S(r,\mu))$ na desigualdade (III.50) a aproximação de campo médio resultante exibirá apenas uma única fase. Isto está de acordo com o fato de uma simetria local não poder ser quebrada espontaneamente[29].

Poderíamos usar uma aproximação de campo médio análoga à usada por Balian et al[12] e Drouffe et al[81], que seria considerar uma medida que viola invariança de calibre para todos os pontos da rede:

$$D_2[S(r;\mu)] = \frac{\prod_{r,\mu}\exp\left[\frac{H}{2}\left(S(r;\mu)+S^+(r;\mu)\right)\right]}{\prod_{r,\mu}\sum_{S(r;\mu)}\exp\left[\frac{H}{2}\left(S(r;\mu)+S^+(r;\mu)\right)\right]} \qquad (III.52)$$

Procedendo de maneira análoga ao caso de spins (veja seção (II.I)) obteríamos uma única transição de fase, sendo esta de primeira ordem para todo N. Na Fig.(21) mostramos um resultado típico para o modelo de Wilson Z(6) $(J_2 = J_3 = 0)$.

Em face a este dilema escolhemos uma situação intermediária. Introduzi

mos uma medida que quebra invariança de calibre em apenas metade dos pontos da rede:

$$D_3[S(r;\mu)] = \frac{\prod_{P^*} \exp\left\{\frac{H}{2}\left[S(1)S^+(4) + S(2)S^+(3) + c.c.\right]\right\}}{\prod_{r;\mu} \sum_{S(r,\mu)} \exp \sum_{P^*} \frac{H}{2}\left[S(1)S^+(4) + S(2)S^+(3) + c.c.\right]} \qquad (III.53)$$

Procedendo de maneira análoga ao caso de spins, e lembrando que o número de plaquetas P^* é $Md/_4$ obtemos:

$$-\beta f_N = \mathrm{Sup}\left\{G_N(\beta,H)\right\} \qquad (III.54a)$$

onde

$$G_N(\beta,H) = \frac{d}{2}\left\{\ln N + f_N(H) - H t_1(H) + \frac{\beta}{2}\sum_{\alpha=1}^{\overline{N}} J_\alpha t_\alpha^2(H)\right\} \qquad (III.54b)$$

sendo $F_n(H)$ e $t_\alpha(H)$ definidas em (II.125) e (II.126). Vemos que (III.54b) possui as mesmas características que (II.127). Consequentemente a medida (III.53) nos fornece uma aproximação de campo médio, para as teorias com simetria local Z(N), que exibe o mesmo número de fases que a teoria com simetria global Z(N) correspondente.

Pelo fato desta última medida possuir ainda invariança local em metade dos pontos da rede e pela relação bastante profunda[18] entre sistemas de spins a duas dimensões e sistemas com simetria de calibre a quatro dimensões acreditamos que esta última medida nos dá uma aproximação melhor à situação física real.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÃO

Obtivemos em nosso trabalho diagramas bastante plausíveis para sistemas bidimensionais de spins com simetra global Z(N) e para sistemas quadridimensionais com invariança de calibre Z(N). Os diagramas de fase obtidos para ambos os sistemas são similares, diferindo em essência apenas nas ordens das transições, o que vem enfatizar a relação profunda, já salientada por diversos autores[18], entre os dois sistemas.

Enquanto a caracterização das fases para o sistema de spins se dá por meio das potências dos parâmetros de ordem e de desordem, no sistema com simetria local as fases são caracterizadas pelos valores esperados das potências das alças de Wilson e de 't Hooft, existindo a correspondência grosseira:

$$< S^n > \neq 0 \leftrightarrow < w^n(c)> \sim e^{-P}$$

$$< S^n > = 0 \leftrightarrow < w^n(c)> \sim e^{-A}$$

$$< \rho^n > \neq 0 \leftrightarrow < \tilde{w}^n(\tilde{c})> \sim e^{-P}$$

$$< \rho^n > = 0 \leftrightarrow < \tilde{w}^n(\tilde{c})> \sim e^{-A}$$

A correspondência acima é errada em detalhes importantes. Embora não seja possível encontrarmos fases no sistema de spin em que $< S^n > \neq 0$, $<\rho^\ell > \neq 0$ com $n.\ell \neq N$ temos fases para o sistema com invariança local em que $<W^n(c)>\sim e^{-A}$, $<\tilde{W}^\ell(\tilde{c})> \sim e^{-A}$ com $n.\ell \neq N$. Enquanto as fases não massivas para o sistema de spins são caracterizadas por $<S^n> = <\rho^\ell> = 0$ com $n.\ell \neq N$, as fases não massivas para os sistemas com invariança local são caracterizadas por $<w^n(c)> \sim e^{-P}$, $<\tilde{W}^\ell(c)>\sim e^{-P}$.

Para $N \geqslant 5$ tanto o sistema com invariança global com o sistema com invariança local Z(N) exibe pelo menos uma fase não massiva, com correlações infinitas, sendo portanto delimitada por linhas críticas referentes a transições de

2a. ordem (ou ordem superior).

Implementamos uma aproximação de campo médio para os dois tipo de sistemas que confirmou a existência da fase intermediária (não massiva) para $N \geq 5$, que se origina no ponto de bifurcação E da superfície autodual.

Para $N \geq 5$ primo temos três tipos de fases para o sistema com simetria global (local). 1- Fase de baixas temperaturas $\langle S^n \rangle \neq 0$, $\langle \rho^n \rangle = 0$ (condensado de todos os múltiplos da carga elétrica), 2- Fase de altas temperaturas $\langle S^n \rangle = 0, \langle \rho^n \rangle \neq 0$ (condensado de todos os múltiplos de monopolos magnéticos) e 3- Fase mole $\langle S^n \rangle = 0$ $\langle \rho^n \rangle = 0$ (fase PQED - Z(N)). Para um $N > 5$ não primo decompo-mo-lo em fatores primos, e suponhamos que cada fator ocorra uma única vez. Para cada fator primo $\ell < 5$ além das fases 1,2,3 o sistema com invariança global (local) exibe um outro tipo de fase com simetria $Z(\ell)$ (condensado de ℓ cargas elétricas e N/ℓ cargas magnéticas). Para cada fator primo $m > 5$ surgirão outros dois tipos de fase; uma fase massiva com simetria $Z(m)$ (condensado de m cargas elétricas e N/m cargas magnéticas) e outra fase não massiva com simetria $Z(m)$ (PQED-Z(m)).

Seria interessante, em estudos futuros da teoria de calibre geral Z(N), entender os mecanismos reais que resultam nos decaimentos tipo área para as potências das alças de Wilson e de 't Hooft nas diversas fases. Acreditamos que isto possa ser feito acoplando-se números quânticos adicionais cuja emergência possa ser verificada.

Pouco se sabe sobre o diagrama de fase de teorias de calibre Z(N) quando acoplamos campos de matéria. Consequentemente é interessante o estudo das diversas fases da teoria geral Z(N) de calibre com campos de matéria (veja apêndice D).

APÊNDICE A

Neste apêndice mostraremos como se calculam as funções $f_\alpha(J_1, J_2, \ldots, J_{\bar{N}}; \beta; N)$ que satisfazem à equação:

$$\sum_{\eta=0}^{N-1} R^\eta \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \beta J_\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\eta - 1\right)\right\} = \exp\left\{\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2}\left(R^\alpha + R^{+\alpha}\right)\right\} \tag{A.1}$$

onde R (na representação que S é diagonal) é a matriz cíclica N X N:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

Yoneya[59] resolveu uma equação similar a (A.1) usando um método elegante e artificioso, mas que é pouco adequado para $N \geqslant 5$. O método que apresentamos aqui é bastante simples e toda a dificuldade se resume em calcular as raízes de um sistema de $\bar{N}$ equações lineares.

Por simplicidade definimos as variáveis:

$$\chi_\alpha \equiv \exp\left\{\sum_{\eta=1}^{\bar{N}} \beta J_\eta\left(\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\eta - 1\right)\right\} \; ; \; \chi_\alpha = \chi_{N-\alpha} \; (\mathrm{Mod.}\, N) \tag{A.3}$$

Assim (A.1) pode ser posta na forma:

$$\sum_{\eta=0}^{N-1} R^\eta \chi_\eta = \exp\left\{\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2}\left(R^\alpha + R^{+\alpha}\right)\right\} \tag{A.4}$$

Observemos que a matriz R é cíclica, tendo então autovalores $\lambda_\eta = e^{i\frac{2\pi}{N}\eta}$ $\eta = 0, 1, \ldots, N-1$. Assim temos imediatamente que:

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi}{N}\eta\alpha} X_\alpha = \exp\left\{\sum_{\alpha=0}^{\overline{N}} f_\alpha \cos\frac{2\pi}{N}\alpha\eta\right\} \; ; \; \eta = 0,1,\ldots, N-1 \tag{A.5}$$

ou seja, os f_α *são dados pela solução do sistema de equações lineares:*

$$\sum_{\alpha=0}^{\overline{N}} f_\alpha \cos\frac{2\pi}{N}\eta\alpha = \ln\left\{\sum_{\alpha=0}^{N-1} X_\alpha e^{\frac{i2\pi}{N}\eta\alpha}\right\} \; , \; \eta = 0,1,2,\ldots \overline{N} \tag{A.6}$$

Os resultados para $N = 2$ *são:*

$$f_0 = \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-4\beta J}\right) \; ; \; f_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{th}\,\beta J\right) \tag{A.7}$$

Para $N = 3$*:*

$$f_0 = \frac{1}{3}\ln\left[\left(1 + 2e^{-\frac{3}{2}\beta J}\right)\left(1 - e^{-\frac{3}{2}\beta J_1}\right)^2\right]$$

$$f_1 = \frac{2}{3}\ln\left[\frac{\left(1 + 2e^{-\frac{3}{2}\beta J}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{3}{2}\beta J}\right)}\right] \tag{A.8}$$

Para $N = 4$*:*

$$f_0 = \frac{1}{2}\ln\left[\left(1 + 2e^{-\beta(J_1+2J_2)} + e^{-2\beta J_1}\right)\left(1 - e^{-2\beta J_1}\right)\left(1 - 2e^{-\beta(J_1+2J_2)} + e^{-2\beta J_1}\right)\right]$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1 + 2e^{-\beta(J_1+2J_2)} + e^{-2\beta J_1}}{1 - 2e^{-\beta(J_1+2J_2)} + e^{-2\beta J_1}}\right] \tag{A.9}$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\left(1 + 2e^{-\beta(J_1+2J_2)} + e^{-2\beta J_1}\right)^{1/2}\left(1 - e^{-2\beta(J_1+2J_2)} + e^{-2\beta J_1}\right)^{1/2}}{1 - e^{-2\beta J_1}}\right]$$

observemos que se $J_2 = 0$ (Modelo Potts vetorial) temos $f_2=0$, este fato está relacionado com a auto-dualidade do modelo (veja seção II.G.2)

Para N = 5 temos:

$$f_0 = \frac{b-a}{(a-1)^2-(b-1)^2} \ln\left[\frac{(x_0+2x_1a+2x_2b)(x_0+2x_1b+2x_2a)}{(x_0+2x_1+2x_2)^2}\right] + \ln(x_0+2x_1+2x_2) \tag{A.10}$$

$$f_1 = \frac{(a-1)\ln\left[\frac{x_0+2x_1a+2x_2b}{x_0+2x_1+2x_2}\right] - (b-1)\ln\left[\frac{x_0+2x_1b+2x_2a}{x_0+2x_1+2x_2}\right]}{(a-1)^2-(b-1)^2}$$

$$f_2 = \frac{(a-1)\ln\left[\frac{x_0+2x_1b+2x_2a}{x_0+2x_1+2x_2}\right] - (b-1)\ln\left[\frac{x_0+2x_1a+2x_1b}{x_0+2x_1+2x_2}\right]}{(a-1)^2-(b-1)^2}$$

onde

$$a = \cos\frac{2\pi}{5}, \quad b = \cos\frac{4\pi}{5}; \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \exp\beta\left[J_1(a-1)+J_2(b-1)\right]$$

$$x_2 = \exp\beta\left[J_1(b-1)+J_2(a-1)\right] \tag{A.11}$$

Notemos que o modelo Potts vetorial não é mais autodual para N = 5 já que $f_2 \neq 0$ mesmo para $J_2=0$.

SERVIÇO DE BIBLIOTECA ... USP

APÊNDICE B

Mostraremos neste apêndice a auto-dualidade dos modelos Villain cuja função de partição é definida por:

$$Z_N^V(n;\beta) = \sum_{n_i=0}^{N-1} \prod_{i,\mu} \exp f\left(n\frac{2\pi}{N}(n_i - n_{i+e_\mu})\right) \quad n=1,2,\dots,\overline{N} \tag{B.1}$$

onde

$$\exp f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x-2\pi m)^2\right] \tag{B.2}$$

A função em (B.2) tem a seguinte representação de Fourier

$$\exp f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\ell^2}{2\beta}\right) . \exp(i\ell x) \tag{B.3}$$

Assim definimos em cada ligação uma variável $\ell_\mu(i)$ e temos:

$$Z_N^V(n,\beta) = \sum_{n(i)=0}^{N-1} \prod_{i,\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \sum_{\ell_\mu(i)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\ell_\mu^2(i)}{2\beta}\right) \times \tag{B.4}$$

$$\times \exp\left[i\ell_\mu(i)\frac{2\pi}{N}n(n_i - n_{i+e_\mu})\right]$$

evidenciando-se a dependência em $n(i)$ teremos:

$$Z_N^V(n,\beta) = \sum_{n(i)=0}^{N-1} \prod_{i,\mu} \sum_{\ell_\mu(i)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\beta}\sum \ell_\mu^2(i)\right) \times \tag{B.5}$$

$$\times \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N} n\, n(i) \left[\ell_1(i) - \ell_{-1}(i) + \ell_2(i) - \ell_{-2}(i)\right]\right\}$$

somando-se sobre $n(i)$ temos a restrição ($\nabla_\mu \ell_\mu(i) = \sum_\mu \left(\ell_\mu(i) - \ell_{-\mu}(i)\right)$)

$$\delta_{\nabla_\mu \ell_\mu, \frac{N}{n} m} \tag{B.6}$$

onde, como ℓ é inteiro, $\frac{N}{n} m$ deve ser inteiro. Se $\frac{N}{n}$ = inteiro, então $m = -\infty$, ..., -1, 0, $1, \ldots \infty$, mas se $\frac{N}{n} \neq$ inteiro, então $m = -\infty \ldots -n$, 0, $n, \ldots \infty$.

Supondo $\frac{N}{n}$ inteiro, a condição (B.6) pode ser resolvida definindo-se variáveis duais $\ell(\tilde{i})$ (ligada aos pontos da rede dual) e $m_\nu(\tilde{i})$ (ligada às ligações da rede dual) tal que:

$$\ell_\mu(i) = \epsilon_{\nu\mu} \left[\nabla \ell(\tilde{i}) + \frac{N}{n} m_\nu(\tilde{i}) \right]$$

$$\text{com} \quad \ell_\mu(i) = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \text{e} \quad m_\nu = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty \tag{B.7}$$

de maneira que podemos escrever

$$Z_N^V(n,\beta) = \sum_{\ell(\tilde{i})=0}^{N-1} \prod_{\tilde{i},\mu} \sum_{m_\mu(\tilde{i})=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\beta} \left(\nabla_\mu \ell(\tilde{i}) + \frac{N}{n} m_\mu(\tilde{i}) \right)^2 \right] \tag{B.8}$$

$$= \sum_{\ell(\tilde{i})=0}^{N-1} \prod_{\tilde{i},\mu} \sum_{m_\mu(\tilde{i})=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{\beta n^2 (2\pi)^2} \right) \left(n \frac{2\pi}{N} \left(\ell(\tilde{i}) - \ell(\tilde{i}+e_\mu) \right) + 2\pi m_\mu(\tilde{i}) \right)^2 \right]$$

Comparando esta expressão com (B.1) e (B.2) vemos que a função de partição após a transformação dual tem a mesma forma original com temperatura $\tilde{\beta}$:

$$Z_N^V(n,\beta) = Z_N^V(n,\tilde{\beta}) \tag{B.9a}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{N^2}{\beta (2\pi n)^2} \quad , \quad \frac{N}{n} = \text{inteiro} \tag{B.9b}$$

sendo portanto auto-dual o modelo Villain com $\frac{N}{n}$ inteiro.

Para o caso $\frac{N}{n} \neq$ inteiro, a condição (B.6) seria resolvida por:

$$\ell_\mu(i) = \epsilon_{\nu\mu} \left[\nabla_\nu \ell(\tilde{i}) + N m_\nu(\tilde{i}) \right] \tag{B.10}$$

e obteríamos:

$$Z_N^V(n,\beta) = Z_N^V(1,\tilde{\beta}) \quad \text{onde} \quad \tilde{\beta} = \frac{N^2}{\beta(2\pi)^2} \tag{B.11}$$

mas de (B.9) temos que ($\frac{N}{T}$ = inteiro):

$$Z_N^V(1,\tilde{\beta}) = Z_N^V(1,\beta) \tag{B.12}$$

ou seja, se $\frac{N}{n}$ não for inteiro temos:

$$Z_N^V(n,\beta) = Z_N^V(1,\beta) \equiv Z_N^V(\beta) \qquad (\frac{N}{n} \neq \text{inteiro}) \tag{B.13}$$

De (B.1) e (B.2) pela periodicidade de exp $f(x)$ temos no caso de ($\frac{N}{n}$) inteiro:

$$Z_N^V(n,\beta) = \left(\frac{N}{n}\right)^M Z_{\frac{N}{n}}^V(\beta) \qquad (\frac{N}{n} = \text{inteiro}) \tag{B.14}$$

sendo M o número de pontos da rede. Vemos assim, de (B.13) e (B.14) que se conhecermos o comportamento de Z_N^V (1, β) = Z_N^V (β) todos os outros modelos Villain serão conhecidos.

APÊNDICE C

SIMETRIA "CÍCLICA" PARA Z(N) GLOBAL COM N PRIMO

Consideremos a função de partição correspondente à ação global (II.6), sendo N primo ($\bar{N} = \frac{N-1}{2}$):

$$Z_N(\beta; J_1, J_2, \ldots, J_{\bar{N}}) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_M} \exp \sum_{\langle i,j \rangle} \beta \left\{ J_1 \cos \frac{2\pi}{N}(n_i - n_j) + \right. \tag{C.1}$$

$$\left. J_2 \cos \frac{4\pi}{N}(n_i - n_j) + \ldots + J_{\bar{N}} \cos \frac{2\pi}{N} \bar{N}(n_i - n_j) \right\}$$

onde M é o número de pontos da rede e $n_i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Consideremos a seguinte mudança de variável:

$$n_i = \begin{cases} 2n'_i & \text{se } n_i \text{ for par} \\ 2n'_i - N & \text{se } n_i \text{ for ímpar} \end{cases} \tag{C.2}$$

assim n''_i *assume os valores conforme a tabela abaixo:*

n_i	0	1	2	3	4	5	6	...	N-1
n'_i	0	$\frac{N+1}{2}$	1	$\frac{N+3}{2}$	2	$\frac{N+5}{2}$	3	...	$\frac{N-1}{2}$

É fácil observarmos que, para k inteiro:

$$\cos k\frac{2\pi}{N}(n_i - n_j) = \cos \frac{4\pi k}{N}(n'_i - n'_j)$$

assim temos:

$$Z_N(\beta; J_1, J_2, \ldots, J_{\bar{N}}) = \sum_{n'_1, \ldots, n'_M} \exp \sum_{\langle i,j \rangle} \beta \Big\{ J_1 \cos \frac{4\pi}{N}(n'_i - n'_j) + J_2 \cos \frac{8\pi}{N}(n'_i - n'_j) + \ldots + J_{\bar{N}} \cos \frac{4\pi}{N}\bar{N}(n'_i - n'_j) \Big\} \tag{C.3}$$

mas

$$\cos\left\{\frac{4\pi}{N}(\bar{N} - m)\Delta n\right\} = \cos\left\{\frac{2\pi}{N}(1 + 2m)\Delta n\right\}$$

de maneira que

$$Z_N(\beta; J_1, J_2, \ldots, J_{\bar{N}}) = Z_N(J_2, J_4, J_6, \ldots, J_{\frac{N-1}{2}}, J_{\frac{N-3}{2}}, \ldots, J_5, J_3, J_1) \tag{C.4}$$

em particular, temos a simetria cíclica para Z(5) *e* Z(7)

$$Z_5(J_1, J_2) = Z_5(J_2, J_1) \tag{C.5}$$

$$Z_7(J_1, J_2, J_3) = Z_7(J_2, J_3, J_1) = Z_7(J_3, J_1, J_2) \tag{C.6}$$

Para $N \geq 11$ *temos simetrias adicionais à exibida em* (C.4) *que podem ser obtidas escolhendo-se outras transformações diferentes de* (C.2).

APÊNDICE D

DUALIDADE PARA TEORIA DE GAUGE COM CAMPO DE MATÉRIA EM TRÊS DIMENSÕES

Como em três dimensões a transformação de dualidade leva a plaqueta (2-simplex) à uma ligação (1-simplex) temos que adicionar campos de matéria (campos de Higgs) $\phi(r)$ definidos em pontos da rede a fim de obter um modelo autodual. A ação "ferromagnética" mais geral com simetria local $Z(N)$ é dada por (veja II.6 e III.9):

$$A = -\sum_{P}\sum_{\alpha=1}^{\overline{N}} \frac{J_\alpha}{2}\left[(A_p)^\alpha + c.c. - 2\right] - \sum_{r,i}\sum_{\alpha=1}^{\overline{N}} \frac{k_\alpha}{2}\left[\left(\phi^+(r)\, S(r;\hat{i})\, \phi(r+\hat{i})\right)^\alpha + c.c. - 2\right] \tag{D.1}$$

Onde Ap são as variáveis plaquetas definidas em (III.7) e $\phi(r)$ são campos de matéria que satisfazem:

$$\left[\phi(r)\right]^N = 1$$

Chamamos a direção 3 na rede de ligação temporal e escolhendo o calibre temporal

$$S(r;\hat{3}) = 1 \tag{D.2}$$

por procedimento análogo ao realizado nas seções (II.B e (III.B) obtemos a matriz de transferência:

$$T = \prod_{r,i} \exp\left\{\beta \sum_{i<j\leq 2} \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2}\left[\left(S(r;\hat{i})S(r+\hat{i};\hat{j})S^{+}(r+\hat{j};\hat{i})S^{+}(r;\hat{j})\right)^{\alpha} + h.c. - 2\right]\right.$$

$$\left. + \beta \sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{k_\alpha}{2}\left[\left(\phi^{+}(r)S(r;\hat{i})\phi(r+\hat{i})\right)^{\alpha} + h.c. - 2\right]\right\} \times \tag{D.2}$$

$$\times \prod_{r} \exp\left\{\beta \sum_{i=1}^{2} \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2}\left(R^{\alpha}(r;\hat{i}) + h.c\right) + \beta \sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{g_\alpha}{2}\left[B^{\alpha}(r) + h.c.\right]\right\}$$

Onde agora $S(r,\hat{i})$ e $R(r;\hat{i})$ são operadores que satisfazem à algebra (III.14) e $\phi(r)$ e $B(r)$ são operadores que satisfazem o mesmo tipo de álgebra que (III.14) isto é;

$$[\phi(r), \phi(r')] = [B(r), B(r')] = 0$$

$$\phi(r)B(r') = \begin{cases} B(r)\phi(r)e^{i\frac{2\pi}{N}} & \text{se } r = r' \\ B(r')\phi(r) & \text{se } r \neq r' \end{cases} \tag{D.3}$$

As funções f_α que aparecem em (D.2) são definidas em (III.15) e g_α são definidas de maneira análoga por

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} B^{\alpha} \exp\left\{\beta \sum_{\eta=1}^{\bar{N}} k_\eta \left[\cos\frac{2\pi}{N}\eta\alpha - 1\right]\right\} = \exp\left\{\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{g_\alpha}{2}\left[B^{\alpha} + c.c.\right]\right\} \tag{D.4}$$

A ação geral D.1 é invariante pela transformação $G(r)$ que quando aplicada ao ponto r roda a variável $\phi(r)$ de $\frac{2\pi}{N}$ e roda de $\frac{2\pi}{N}$ $\left(\frac{-2\pi}{N}\right)$ as variáveis $S(r,\mu)$ que emanam do ponto r em direções paralelas (antiparalelas) aos vetores da base. Em termos de operadores temos:

$$G(r) = R(r;\hat{1})R^{+}(r;-\hat{1})R(r;\hat{2})R^{+}(r;-\hat{2})B(r) \tag{D.5}$$

Se nos restringirmos ao subespaço invariante por transformação de calibre ($G|> = |>$) , podemos usar a identidade $G(r) = 1$. Neste subespaço temos então:

$$R(x,y;\hat{2}) = \prod_{n\geq 0} R^{+}(x,y-n;\hat{1})\, R(x,y-n;-\hat{1})\, B^{+}(x,y-n) \qquad (D.6)$$

Assim como $R(r, \hat{1})$ é dependente então não existirá termo na matriz de transferência que não comute com $S(r,\hat{1})$ de maneira que podemos fixar o gauge axial:

$$S(r;\hat{2}) = 1 \qquad (D.7)$$

de maneira que no subespaço em questão os operadores independentes são $\{S(r,\hat{1}),$ $R(r,\hat{1}),\ \phi(r),\ B(r)\}$

Para efetuarmos a transformação dual definimos operadores na rede dual $(\tilde{r} = r + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. O operador dual à plaqueta (2-simplex) é o operador definido nos pontos da rede dual

$$\mu_1(\tilde{r}) = S(r;\hat{1})\, S(r+\hat{1};\hat{2})\, S^{+}(r+\hat{2};\hat{1})\, S^{+}(r;\hat{2}) \qquad (D.8)$$

e os operadores duais aos operadores S definidos nas ligações da rede original são

$$\begin{aligned} \mu_1(\tilde{r};\hat{2}) &= \phi^{+}(r+\hat{2})\, S(r+\hat{2};\hat{1})\, \phi(r+\hat{1}+\hat{2}) \\ \mu_1(\tilde{r};\hat{1}) &= \phi^{+}(r+\hat{1})\, S(r+\hat{1};\hat{2})\, \phi(r+\hat{1}+\hat{2}) \end{aligned} \qquad (D.9)$$

que vivem nas ligações da rede dual. Os operadores de desordem são dados por

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

$$\mu_3(\tilde{r}) = \prod_{n\geq 0} R(x, y-n; \hat{1})$$

$$\mu_3(\tilde{r}; \hat{1}) = \prod_{n\geq 0} B(x+\hat{1}, y-n) \qquad (D.10)$$

Usando-se (D.10) em (D.6) obtemos

$$R(r; \hat{2}) = \mu_3^+(\tilde{r})\, \mu_3^+(\tilde{r}-\hat{1}; \hat{1})\, \mu_3(\tilde{r}-\hat{1}) \qquad (D.11)$$

e para termos uma expressão análoga

$$R(r; \hat{1}) = \mu_3(\tilde{r})\, \mu_3(\tilde{r}-\hat{2}; \hat{2})\, \mu_3^+(\tilde{r}-\hat{2}) \qquad (D.12)$$

devemos estar no calibre axial das variáveis duais (como deveria ser pela Eq.D. 7)

$$\mu_3(r; \hat{2}) = 1 \qquad (D.13)$$

Usando-se D.10 e D.12 é fácil verificar que

$$B^+(r) = \mu_3(\tilde{r}-\hat{1}-\hat{2}; +\hat{1})\, \mu_3(\tilde{r}-\hat{2}; \hat{2})\, \mu_3^+(\tilde{r}-\hat{1}; \hat{1})\, \mu_3^+(\tilde{r}-\hat{1}-\hat{2}) \qquad (D.14)$$

Em termos dos operadores duais a matriz de transferência (D.2) pode ser escrita

$$T = \prod_{\tilde{r}} \exp\beta\left\{\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{J_\alpha}{2}\left(\mu_1^\alpha(\tilde{r}) + h.c. - 2\right) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{\bar{N}} \frac{k_\alpha}{2}\left(\mu_1^\alpha(\tilde{r};\hat{i}) + h.c. - 2\right)\right\}$$

$$\times \prod_{\tilde{r},i} \exp\beta\left\{\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{f_\alpha}{2}\left[\left(\mu_3^+(\tilde{r})\mu_3(\tilde{r};\hat{i})\mu_3(\tilde{r}+i)\right)^\alpha + h.c.\right]\right. \tag{D.15}$$

$$\left. + \sum_{i<j\leq 2}\sum_{\alpha=0}^{\bar{N}} \frac{g_\alpha}{2}\left[\left(\mu_3(\tilde{r};\hat{i})\mu_3(\tilde{r}+\hat{i};\hat{j})\mu_3^+(r+\hat{j};\hat{i})\mu_3^+(\tilde{r};\hat{j})\right)^\alpha + h.c.\right]\right\}$$

É fácil verificar que os operadores duais satisfazem à mesma álgebra que os operadores originais, e comparando-se (D.2) e (D.15) temos a relação de autodualidade

$$Z\left(\{J_\alpha\},\{k_\alpha\},\{f_\alpha\},\{g_\alpha\}\right) = e' Z\left(\{g_\alpha\},\{f_\alpha\},\{k_\alpha\},\{J_\alpha\}\right) \tag{D.16}$$

onde e' é uma constante irrelevante.

Nossa transformação de dualidade D: J_α, $K_\alpha \to g_\alpha$, f_α torna-se simples em termos das variáveis

$$X_\alpha \equiv \exp\sum_{\delta=1}^{\bar{N}} \beta J_\delta\left[\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\delta - 1\right], \quad X_{N-\alpha} = X_\alpha \quad (\mathrm{mod}.N)$$

$$Y_\alpha \equiv \exp\sum_{\delta=1}^{\bar{N}} \beta k_\delta\left[\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\delta - 1\right], \quad Y_{N-\alpha} = Y_\alpha \quad (\mathrm{mod}.N) \tag{D.17}$$

diagonalizando-se as matrizes cíclicas R e B (veja apêndice A), obtemos de (III.15) e (D.4)

$$\tilde{X}_\alpha \equiv \exp\sum_{\delta=0}^{\bar{N}} \beta f_\delta\left[\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\delta - 1\right] = \frac{\sum_{\delta=0}^{N-1} Y_\delta \exp(2\pi i\alpha\delta/N)}{\sum_{\delta=0}^{N-1} Y_\delta} \tag{D.18}$$

$$\tilde{Y}_\alpha \equiv \exp\sum_{\delta=0}^{\bar{N}} \beta g_\delta\left[\cos\frac{2\pi}{N}\alpha\delta - 1\right] = \frac{\sum_{\delta=0}^{N-1} X_\delta \exp(i2\pi\alpha\delta/N)}{\sum_{\delta=0}^{N-1} X_\delta} \tag{D.19}$$

Onde vemos que pela transformação de dualidade os campos de gauge e de matéria são trocados.

Somando-se sobre α em (D.18) e (D.19) obtemos

$$N = \left(\sum_{\alpha=0}^{N-1} \tilde{X}_\alpha\right)\left(\sum_{\alpha=0}^{N-1} Y_\alpha\right) = \left(\sum_{\alpha=0}^{N-1} \tilde{Y}_\alpha\right)\left(\sum_{\alpha=0}^{N-1} X_\alpha\right) \qquad (D.20)$$

que nos mostra que a superfície

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} Y_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} X_n\right) = N$$

é uma superfície fixa pela transformação dual, isto é, pontos nesta superfície permanecem nela após a transformação dual.

Para obtermos a superfície autodual (veja seção I.F) devemos resolver a equação (D.18) ou (D.19) para $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha$ e $\tilde{y}_\alpha = y_\alpha$.

REFERÊNCIAS

1 - ABERS, E.S. and LEE, B.W 1973 Phys. Reports 9c.

2 - FRITZSH, H., GELL-MAN, M. and LEUTWYLER, H. 1973 Phys. Lett 47B 365.

3 - GROSS, D. and WILCZEK, F. 1973 Phys. Rev. Lett. 30 1343 and POLITZER, H.D. ibid., 1346.

4 - REYA, E. 1979 "Perturbative Quantum chromodynamics" Desy Preprint 79/88.

5 - KOGUT, J.B. 1979 Rev. Mod. Phys. B 142 315.

6 - KADANOFF, L.P. 1977 Rev. Mod. Phys. 49 267.

7 - ENTING, I.G. 1979 Ann. of Phys. 123 141.

8 - WEGNER, F. 1971 J. Math. Phys. 12 2259.

9 - WILSON, K.G. 1974 Phys. Rev. D14 2455.

10- WILSON, K.G. 1975 Phys. Rev. D10 2445.

11- KOGUT, J. and SUSSKIND, L. 1975 Phys. Rev. D11 395.

12- BALIAN, R., DROUFFE, J. and ITZYKSON 1975 Phys. Rev. D11 2098.

13- OSTERWALDER, K and SEILER, E. 1978 Ann. Phys. 110 440.

14- REBBI, C. 1979 "Phase structure of Non-Abelian Lattice Gauge theories" - Preprint BNL 27203.

15- MACK, G. and PETKOVA, V.B. 1978 "Comparison of lattice gauge theories with gauge groups Z_2 and SU(2)" Desy Preprint 78/68.

16- FRÖHLICH, J. 1979 Phys. Lett. 83B 195.

17- MACK, G. 1980 "Properties of lattice gauge models at low temperatures" - Desy Preprint 80/03.

18- MIGDAL, A.A. 1975 Zh. Eksp. Teor. Fiz. 69 810, 69 1457.

19- POTTS, R.B. 1952 Proc. Camb. Soc. 48 106.

20- VILLAIN, J. 1975 P. Phys. (Paris) 36 581.

21- MITTAG, L. and STEPHEN, M.J. 1971 J. Math. Phys. 12 441.

22- DOMANY, E. and RIEDEL, E.K. 1979 Phys. Rev. B19 5817.

23- KORTHALS ALTES, C.P. 1978 Nucl. Phys. B142 315.

24- UKAWA, A., WINDEY, P. and GUTH, A.H. 1979 "Dual variables for lattice gauge theories and the phase structure of Z(N) systems" Preprint Princeton/ Cornell.

25- ALCARAZ, F.C. and KÖBERLE, R. 1980 J. Phys. A (a ser publicado).

26- ALCARAZ, F.C. and KÖBERLE, R. 1980 "The phases of two-dimensional spin and four-dimensional gauge systems with Z(N) sysmmetry" Preprint UFSCar/ IFQSC.

27- KRAMERS, H.A. and WANNIER, G.H. 1941 Phys. Rev. 60 252.

28- FRÖHLICH, J. and LIEB, E.H. 1979 Comm. Math. Phys. 60 233.

29- ELITZUR, S. 1975 Phys. Rev. D12 3978.

30- LÜSCHER, M. 1977 Comm. Math. Phys. 54 283.

31- CREUTZ, M., JACOBS, L. and REBBI, C. 1979 Phys. Rev. D20 1915.

32- FRADKIN, E.S. and SHENKER, S.H. 1979 Phys. Rev. D19 3682.

33- MARRA, R. and MIRACLE-SOLE, S. 1979 Comm. Math. Phys. 67 233.

34- CREUTZ, M., 1979 "Phase diagrams for coupled spin-gauge systems" Preprint BNL.

35- ISING, E. 1925 Z. Phys 31 253.

36- ONSAGER, L. 1944 Phys. Rev. 65 117.

37- SCHULTZ, T.D., MATTIS, D.C. and LIEB, E.H. 1964 Rev. Mod. Phys. 36 859.

38- PFEUTY, P. 1970 Ann. of Phys. 57 79.

39- KASTELEYN, P.W. 1975 Fundamental Problems in Statistical Mechanics North-Holland Pu. Co. Amsterdam.

40- HAMER, C.J. and KOGUT, J.B. 1979 Phys. Rev. B 20 3859.

41- JOSE, J.V., KADONOFF, L.P., KIRKPATRICK, S. and NELSON, D.R. 1977 Phys.Rev. B16 1217.

42- ELITZUR, E. PEARSON, R.B. and SHIGEMITSU, J. 1979 Phys. Rev. D19 3698.

43- KADANOFF, L.P. and FRADKIN, E. 1979 "Disorder variables and para-fernions in two-dimensional statistical mechanics" Preprint Urbana/Chicago.

44- KOGUT, J. and SUSSKIND, L. 1975 Phys. Rev. D11 395.

45- FRADKIN, E.S. and SUSSKIND, L 1978 Phys. Rev. D17 2637.

46- KADANOFF, L.P. and CEVA, H. 1971 Phys. Rev. B3 3918.

47- HORN, D., WEINSTEIN, M. and YANKIELOWICZ, S. 1979 Phys. Rev. D19 3715.

48- WU, F.Y. and WANG, Y.K. 1976 J. Math. Phys. 17 439.

49- CARDY, J.L. 1980 J. Phys. A 13 1507.

50- HINTERMANN, A., KUNZ, H. and WU, F.Y. 1978 J. Stat. Phys. 19 623.

51- ENTING, I.G. 1974 J. Phys. A 7 2181.

52- STRALEY, J.P. and FISHER, M.E. 1973 J. Phys. A 6 1310.

53- KADANOFF, L.P. 1975 Ann. Phys. 100 359.

54- DEN NIJS, M.P. and KNOPS, H.J.F. 1978 Physica 93A 441.

55- NIENHUIS, B., BERKER, A.N., RIEDEL, E.K. and SCHICK, M. 1979 Phys. Rev. - Lett. 43 737.

56- REBBI, C. and SWENDSEN, R.H. 1979 "Monte Carlo renormalization group - studies of q-state Potts models in two dimensions" Preprint BNL 27203.

57- BAXTER, R.J. 1973 J. Phys. C6 L445.

58- ELITZUR, E., PEARSON, R.B. and SHIGEMITSU, J. 1979 Phys. Rev. D19 3698.

59- YONEYA, T. 1978 Nucl. Phys. B144 195.

60- KOSTERLITZ, J.M. and THOULESS, D.J. 1973 J. Phys. C6 1181.

61- BELLISSARD, J. and DE ANGELIS, G.F. 1979 "Gaussion limit of compact spin systems" Marseille Preprint 79/PE 1123.

62- LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M. 1958 Statistical Physics Pergamon Press Ltd.

63- WU, F.Y. and LIN, K.Y. 1974 J. Phys. C7 L181; 1976 J. Math. Phys. 17 439.

64- ASKIN, J. and TELLER, E. 1943 Phys. Rev. 64 178.

65- KÜBERLE, R. and SWIECA, J.A. 1979 Phys. Lett. 86B 2.

66- MERMIN, N.D and WAGNER, H. 1966 Phys. Rev. Lett. 17 1133.

67- SMART, J.S. 1966 Effective field theories of magnetism W.B. Sounders Co. London.

68- PEIERLS, R.E. 1938 Phys. Rev. 54 918.

69- MITTAG, L. and STEPHEN, M.J. 1974 J. Phys. A 9 L109.

70- MA, S.K. 1976 Modern theory of critical phenomena W.A. Benjamin Inc.

71- KOGUT, J.B. 1980 Phys. Rev. D 21 2316.

72- PEARSON, R., SHIGEMITSU, J., SINCLAIR, D.K. and KOGUT, J.B. 1980 University of Illinois Preprint.

73- NIELSEN, H.B. and OLESEN, P. 1973 Nucl. Phys. B61 45.

74- ZIMAN, J.M. 1965 Principles of the theory of solids Cambridge Univ.Press.

75- MANDELSTAM, S. 1976 Phys. Rep. 23C 245.

76- 't HOOFT, G. 1978 Nucl. Phys. B138; 1979 "A property of electric and magnetic flux in non-abelian gauge theories" Utrecht Preprint.

77- ZAMOLODCHIKOV, A.B. 1978 Dubna report nº E17 11305.

78- BANKS, T., KOGUT, J.B. and MEYERSON, R. 1977 Nucl. Phys. B129 493.

79- SAVIT, R. 1977 Phys. Rev. Lett. 39 55; 1978 Phys. Rev. B17 1340.

80- ROTHE, K., ROTHE, H. and SWIECA, J.A. 1979 Phys. Rev. D19 3020.

81- DROUFFE, J.M. and ITZYKSON, C. 1978 Phys. Rep. 38 133.

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFOSC
FÍSICA

LEGENDA DAS FIGURAS

1 - Os vetores unitários na rede quadrada bidimensional.

2 - Curvas onde $\Gamma(n)$ é constante.

2a - Quando os acoplamentos na direção espacial e temporal são iguais $(J=k)$.

2b - Quando o acoplamento na direção temporal é maior que na direção espacial $(k > J)$.

2c - Mesmo que (2b) mas com o espaçamento na direção temporal menor qu na direção espacial $(\tau < a)$.

3 - Transformação dual na rede espacial unidimensional.

4 - Representação do vácuo a $T=0$ $(|\ >_{T=0})$ e do kink.

5 - A ilha de spins rodados pode ser pensada como um par de kink e anti-kink.

6 - Função gaussiana periódica $f(x)$, usada na definição do modelo Villain.

7 - Diagrama esquemático do modelo Z(4). A linha A-M é a reta autodual. As curvas a, b e c representam os caminhos termodinâmicos do modelo Potts escalar $(J_1 = 2J_2)$, Potts vetorial $(J_2 = 0)$ e modelo Villain respectivamente. P é o ponto crítico do modelo 4-Potts e I_1, J_2 e I_3 são pontos críticos de modelos de Ising.

8 - Diagrama esquemático do modelo Z(5). A reta A-M é a reta autodual. As curvas a, b e c representam os caminhos termodinâmicos do modelo Potts escalar $(J_1 = J_2)$, Potts vetorial $(J_2=0)$ e modelo Villain respectivamente. P é o ponto crítico do modelo 5-Potts e E_1, E_2 são os pontos de bifurcação da reta autodual onde se originam as fases moles.

9 - Diagrama esquemático do modelo Z(6). A reta A-M é a reta autodual. A linha

reta e a curva que vão de (0,0,0) a (1,1,1) são respectivamente os caminhos termodinâmicos do modelo 6-Potts e Villain. P é o ponto crítico do 6-Potts ; I_1 e I_2 são pontos críticos de modelos de Ising e P_1 e P_2 são pontos críticos de modelos 3-Potts. No ponto E se origina a fase não massiva.

10- Projeção da superfície em que estão desacoplados os modelos Z(2) e Z(3) no plano $x_1=0$.

11- Diagrama esquemático do modelo Z(7). As retas A_1-M_1, A_2-M_2 e A_3-M_3 são retas autoduais. A linha reta e a curva que vão de (0,0,0) a (1,1,1) são respectivamente os caminhos termodinâmicos do modelo 7-Potts e do Villain. P é o ponto crítico do modelo 7-Potts e E_1,E_2, E_3 são os pontos de bifurcação onde se originam as fase moles.

12- O máximo da função $G_5(H)$ nos dá para cada β a energia livre por partícula (- βf) na aproximação de campo médio. As curvas correspondem a J_1 =1 e J_2 = .45. As curvas de (a) a (g) correspondem a βd igual a .90, .99, 1.01 , 1.02, 1.026, 1.028 e 1.030 respectivamente. Uma transição de segunda ordem ocorre em $\beta_1 d \sim 1.000$ e outra de primeira ordem em $\beta_2 d \sim 1.028$.

13- Transformação local na teoria Ising-calibre em três dimensões.

14- Plaqueta de spins.

15- Alça de Wilson no caso Z(2):

15a - Alça geral

15b - Alça espaço-temporal retangular

16- Transformação de gauge em que são mudadas apenas as ligações espaciais.

17- Rede dual em três dimensões.

18- Representação da plaqueta das variáveis duais.

19- Produto orientado das variáveis S formando a alça Wilson para o modelo Z(N).

20- Conjunto $\{\mathcal{P}^*\}$ de plaquetas para o caso tridimensional. Cada ligação pertence somente a uma plaqueta.

21- $G_6(H)$ em função do campo efetivo para o modelo de Wilson $Z(6)$ $(J_2=J_3=0)$ com a medida(III.52). As curvas de (a) a (e) correspondem a $\beta J_1(d-1)$ igual a 1.0, 1.3, 1.4, 1.6 e 1.7 respectivamente. Vemos que o modelo exibe uma transição de primeira ordem para $\beta_c J_1(d-1) \sim 1.6$.

Tabela 3 - Caracterização das fases da Fig. 9 para o modelo com simetria global Z(6)

Fase	$< S >$	$< S^2 >$	$< S^3 >$	$< \rho >$	$< \rho^2 >$	$< \rho^3 >$	m	Simetria
4	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	
5	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Z(6)
1	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Z(2)
2	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	Z(3)
3	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Z(6)

Tabela 15 - Caracterização das fases da Fig. 9 para o modelo com simetria local Z(6)

Fase	$< w(c) >$	$< w^2(c) >$	$< w^3(c) >$	$< \tilde{w}(\tilde{c}) >$	$< \tilde{w}^2(\tilde{c}) >$	$< \tilde{w}^3(\tilde{c}) >$	Massa	Condensado
4	e^{-P}	e^{-P}	e^{-P}	e^{-A}	e^{-A}	e^{-A}	$= 0$	e
5	e^{-A}	e^{-A}	e^{-A}	e^{-P}	e^{-P}	e^{-P}	$= 0$	m
1	e^{-A}	e^{-P}	e^{-A}	e^{-A}	e^{-A}	e^{-P}	$= 0$	2e, 3m
2	e^{-A}	e^{-A}	e^{-P}	e^{-A}	e^{-P}	e^{-A}	$= 0$	3e, 2m
3	e^{-P}	e^{-P}	e^{-P}	e^{-P}	e^{-P}	e^{-P}	$= 0$	

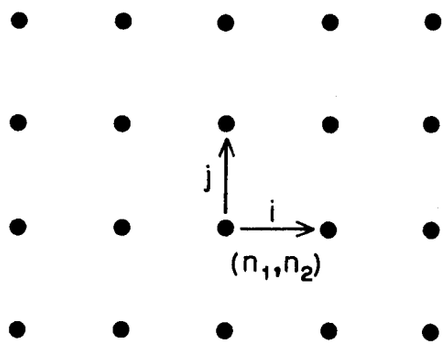

FIG. 1

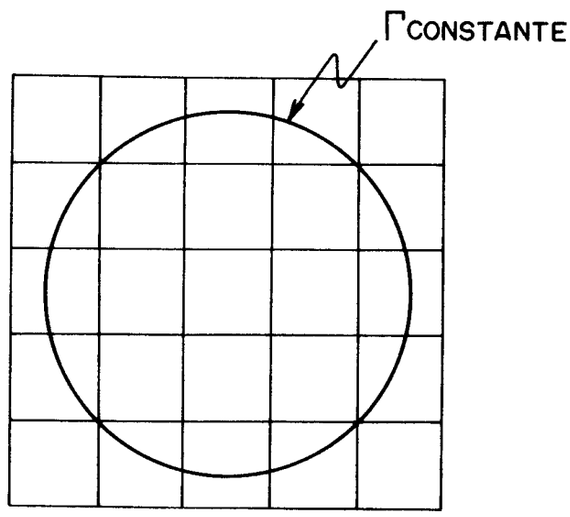

FIG. 2a

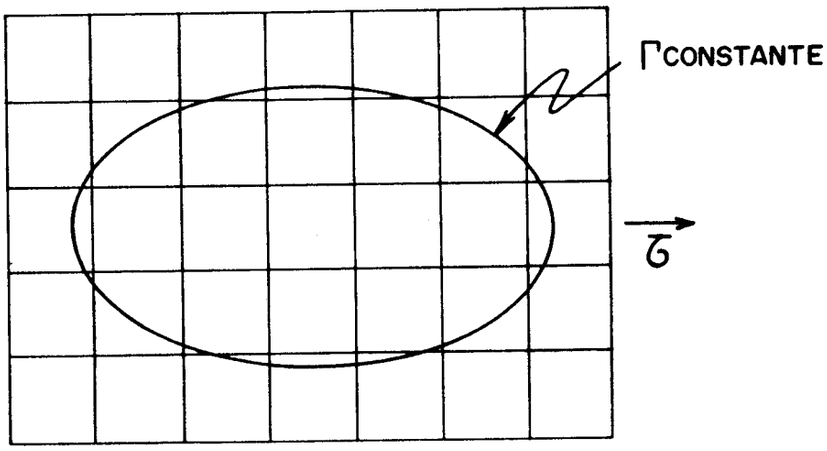

FIG. 2 b

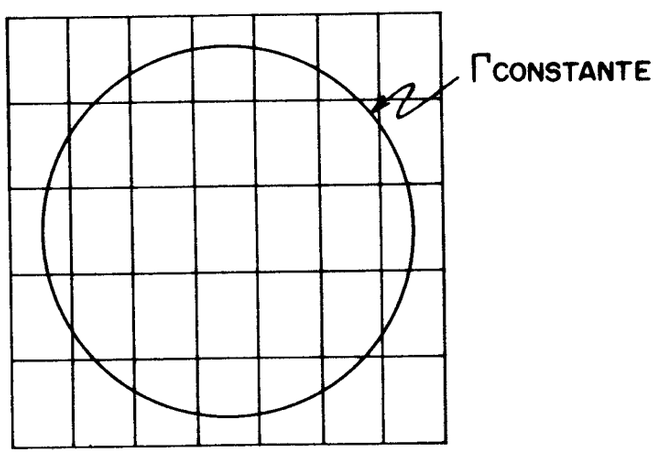

FIG. 2 c

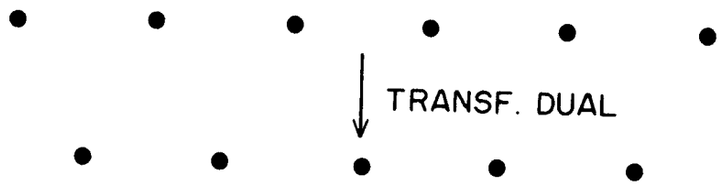

FIG. 3

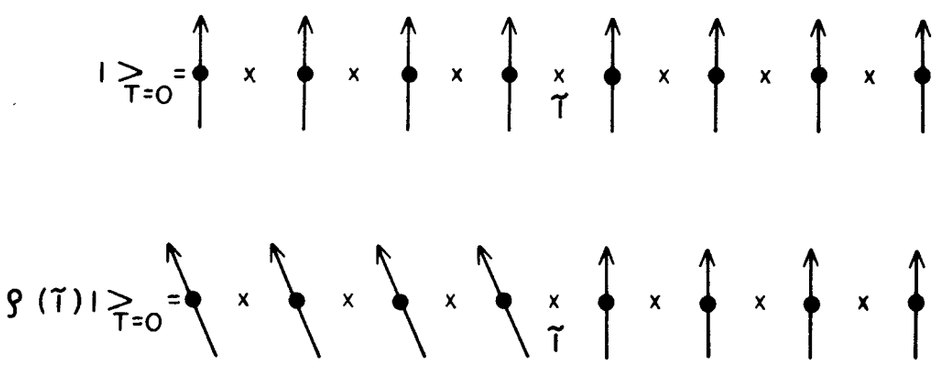

FIG. 4

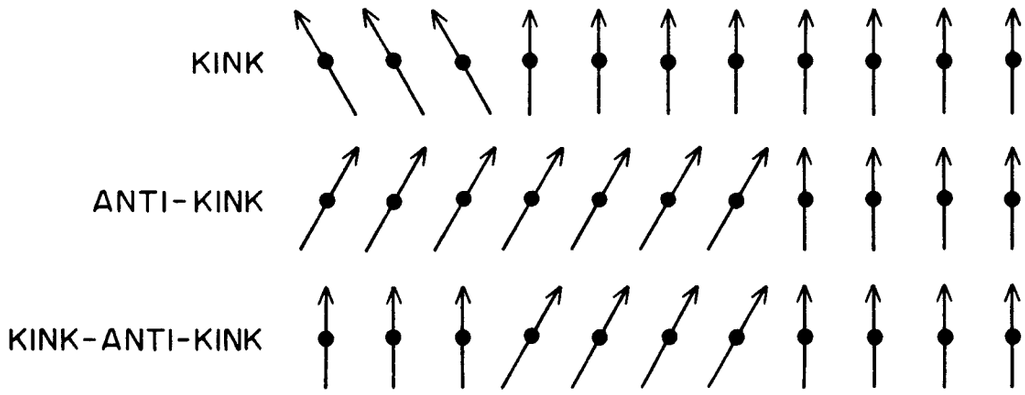

FIG. 5

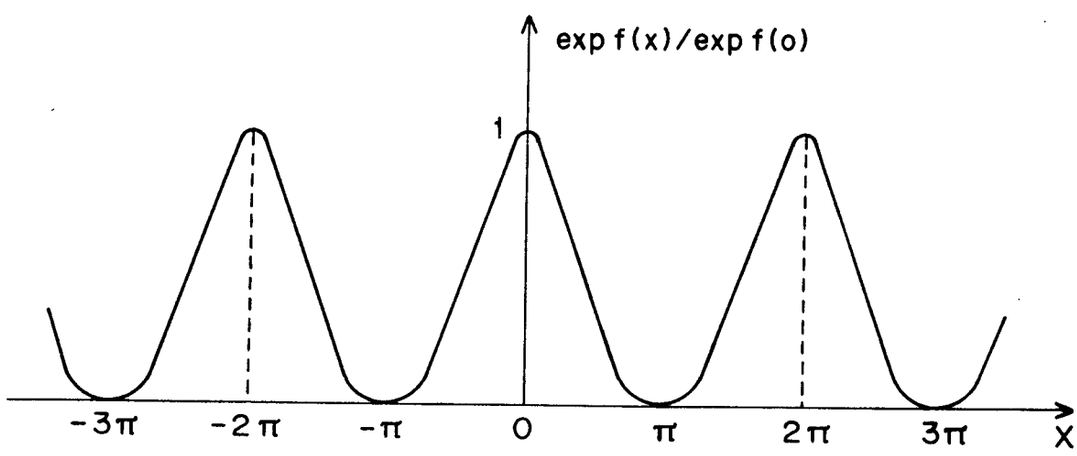

FIG. 6

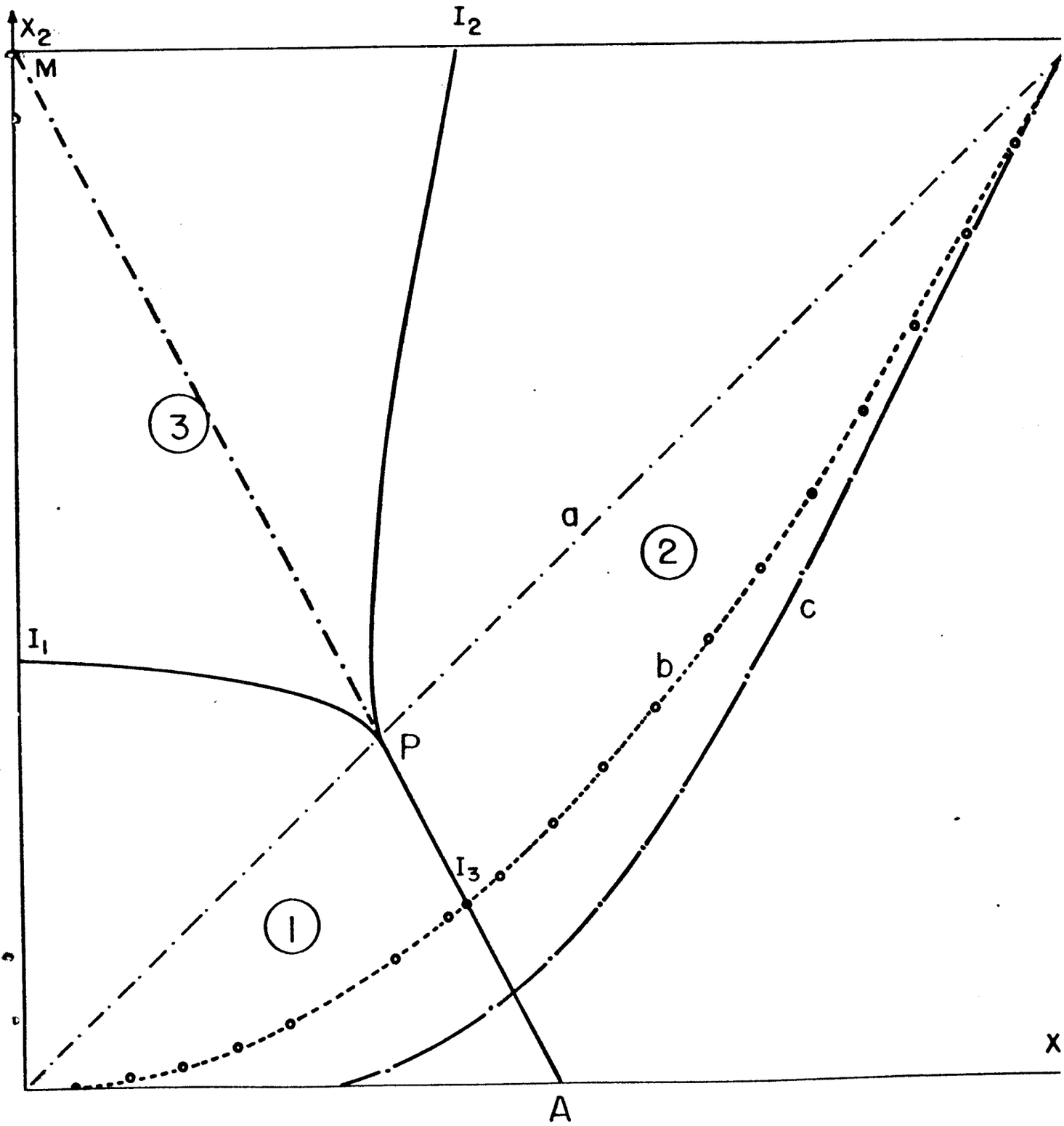

FIG. 7

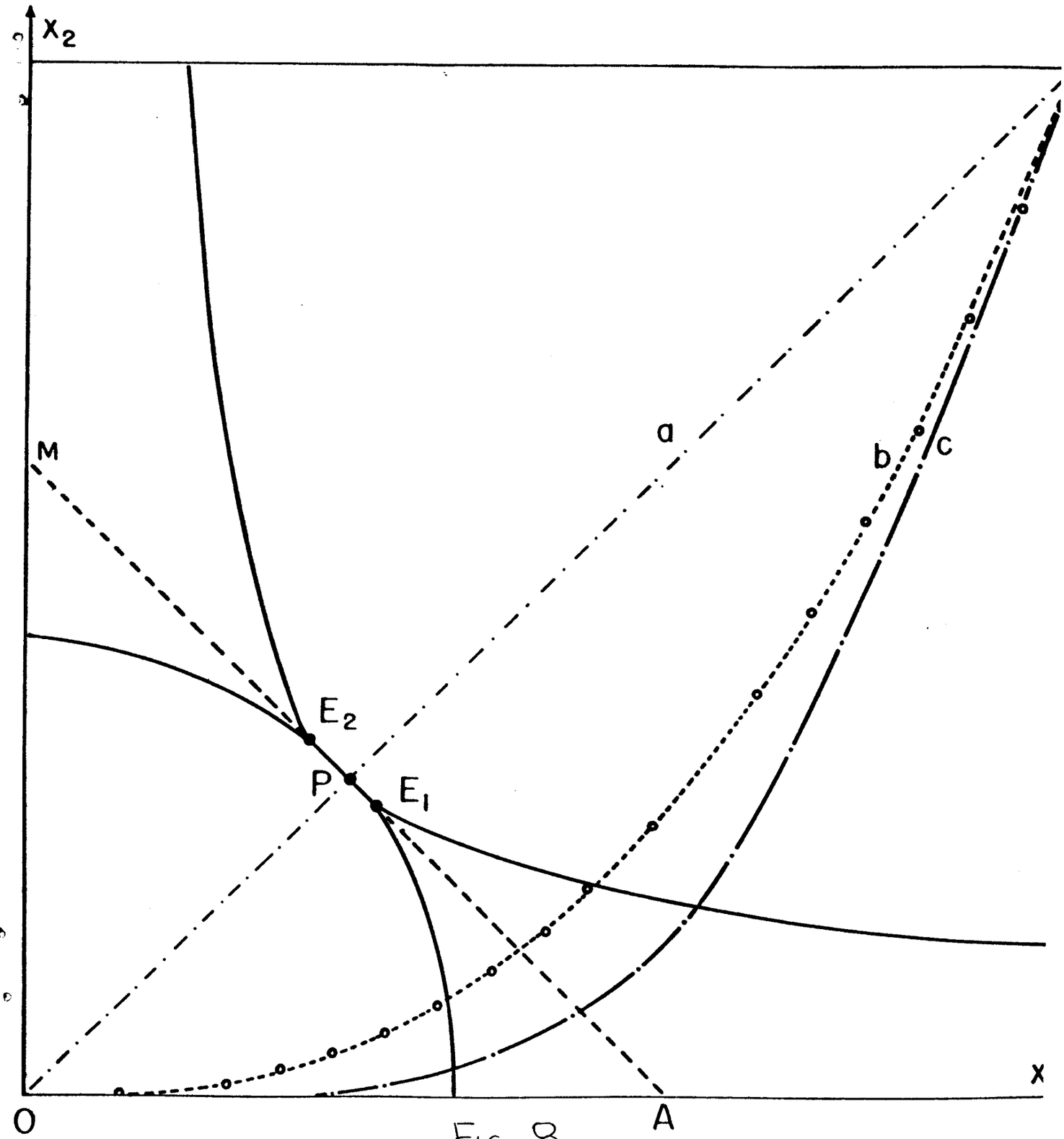

FIG. 8

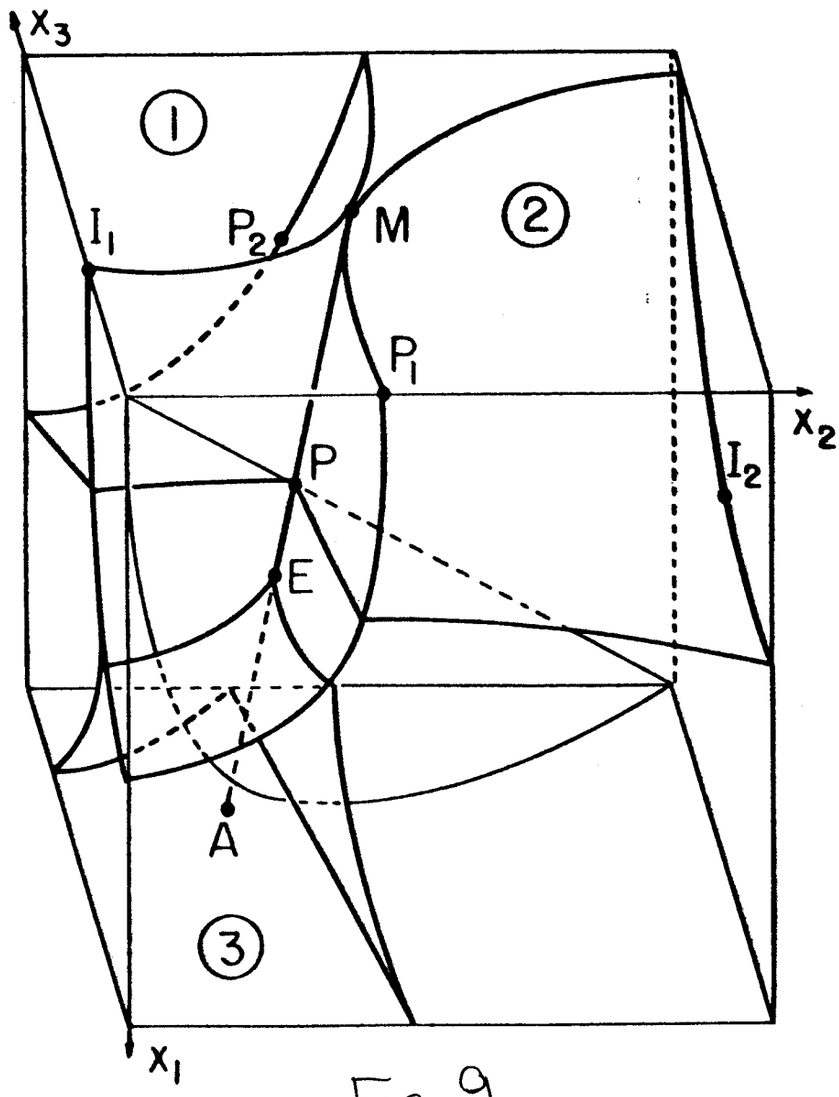

FIG. 9

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

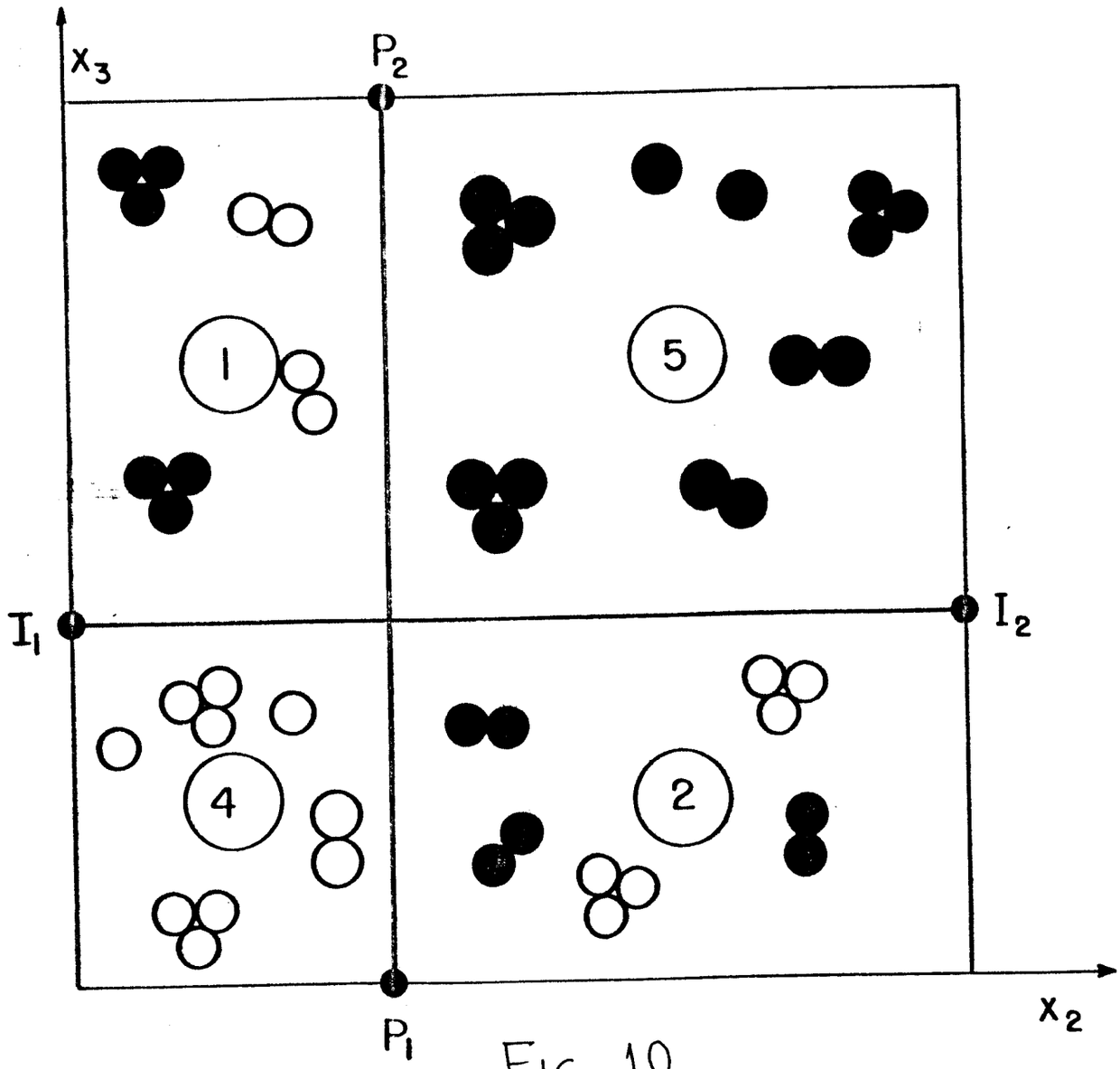

FIG. 10

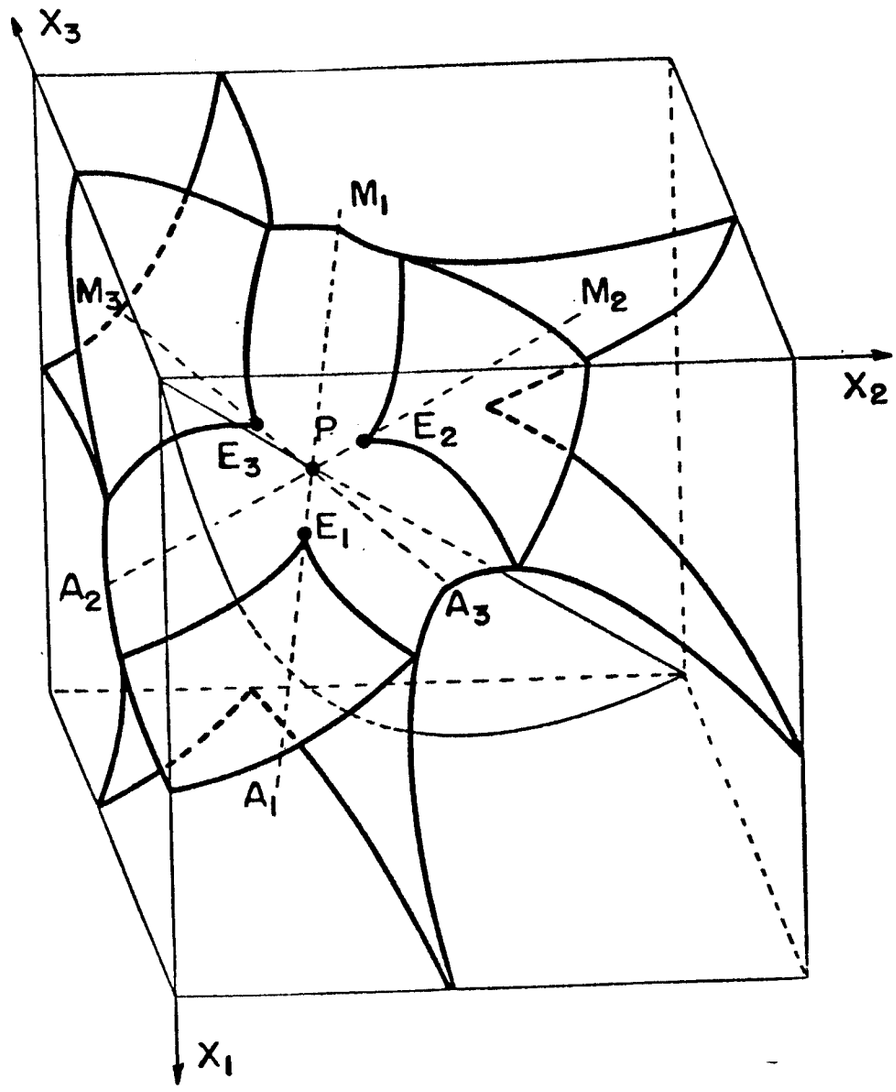

FIG. 11

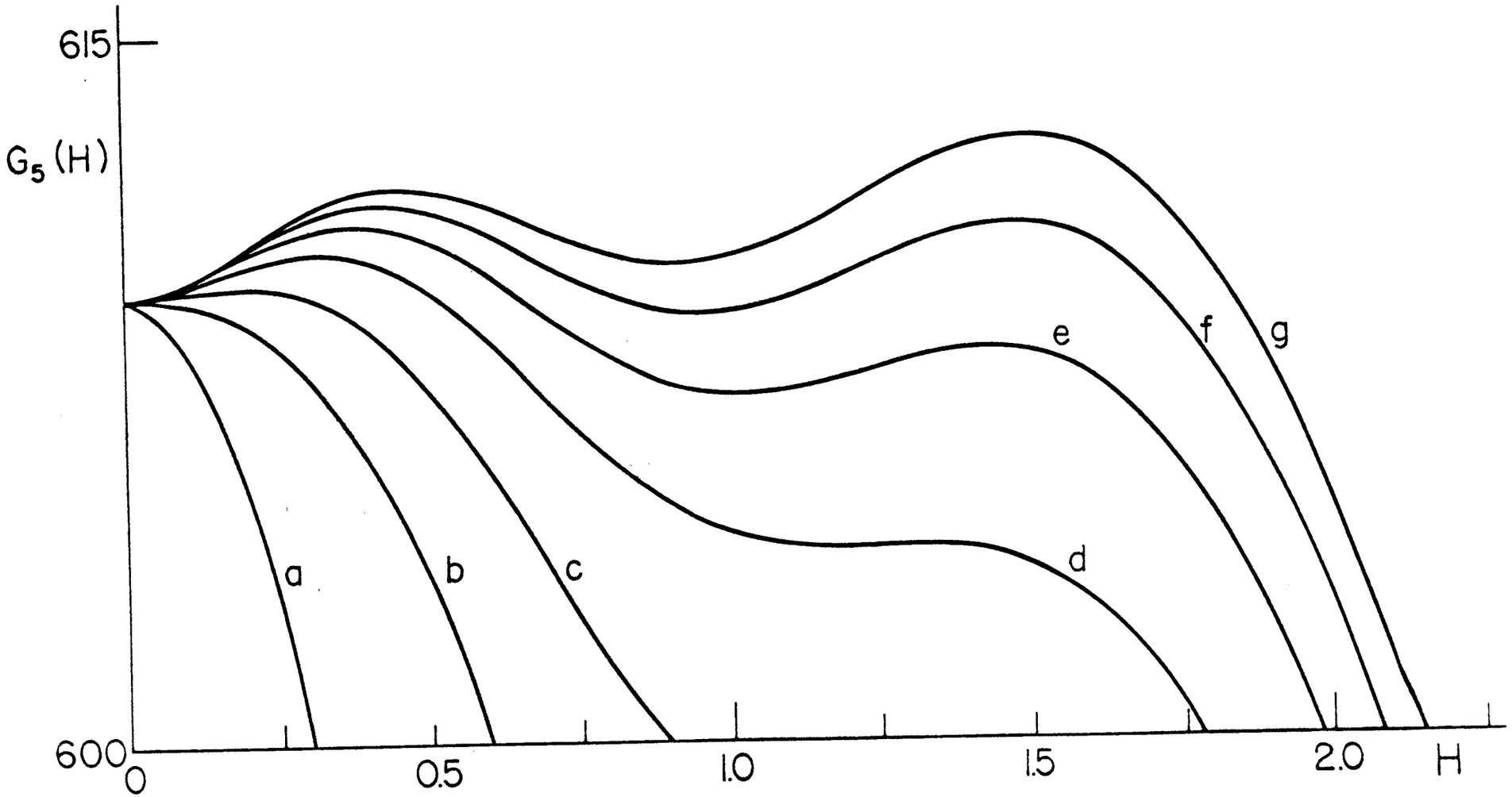

FIG. 12

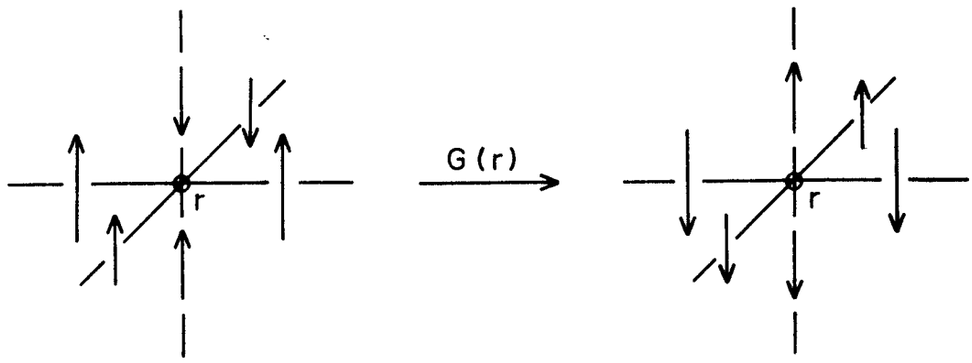

FIG. 13

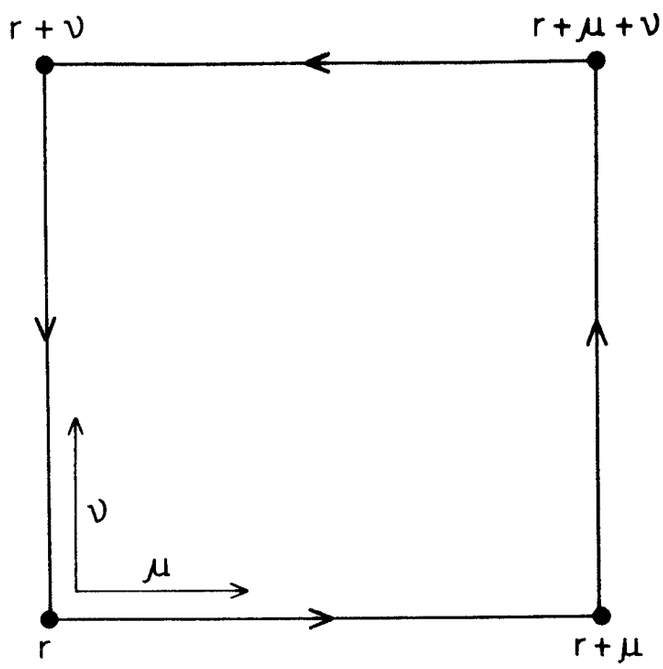

FIG. 14

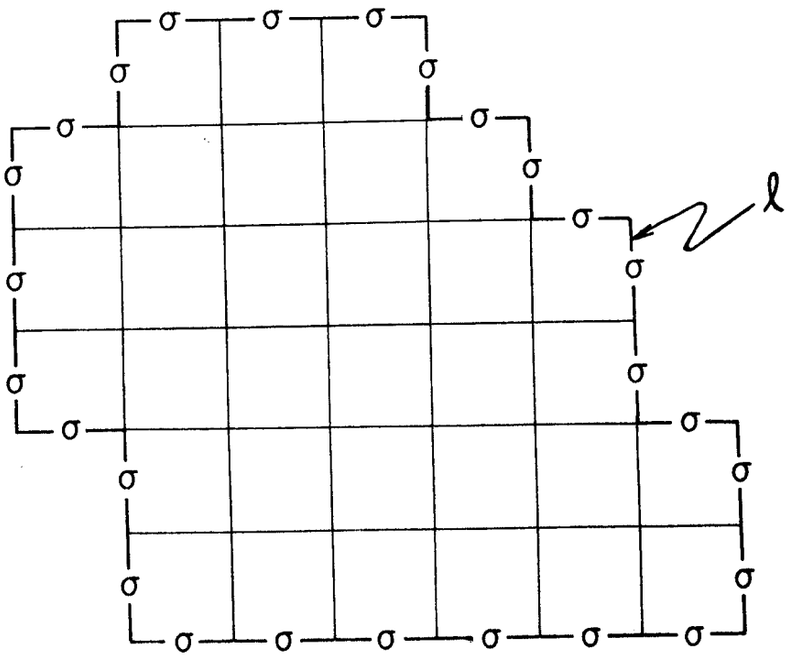

FIG. 15a

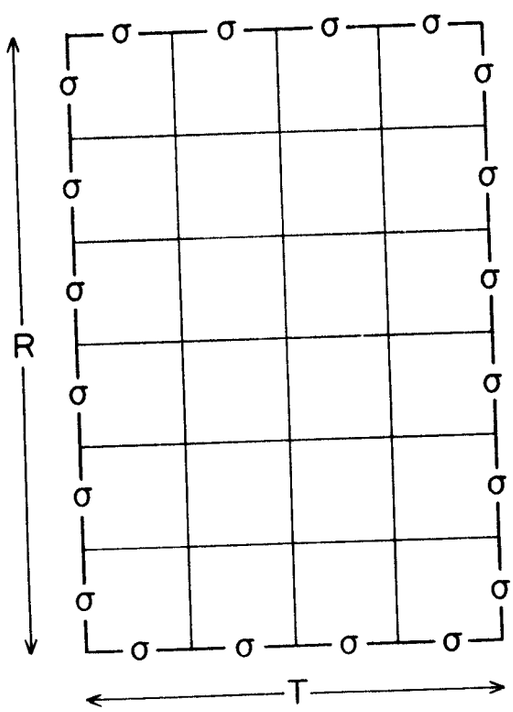

FIG. 15 b

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA

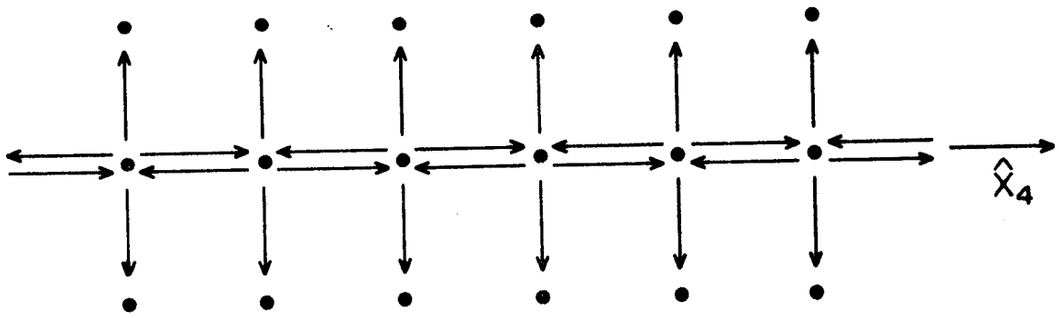

FIG. 16

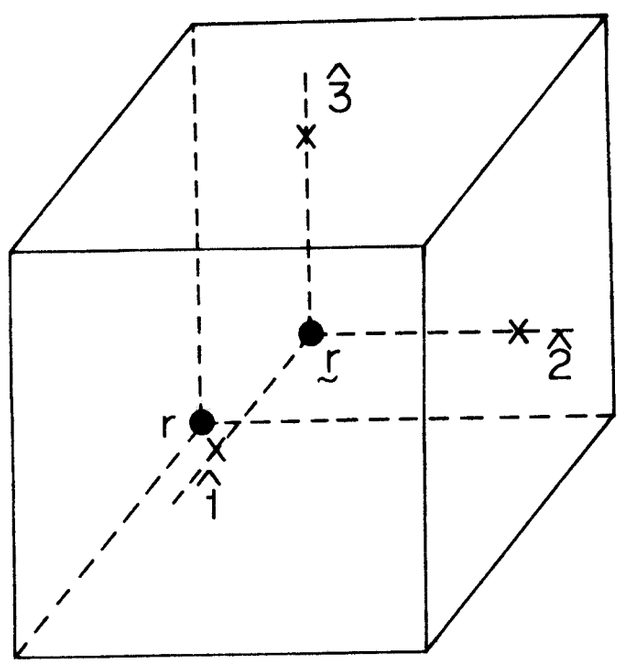

FIG. 17

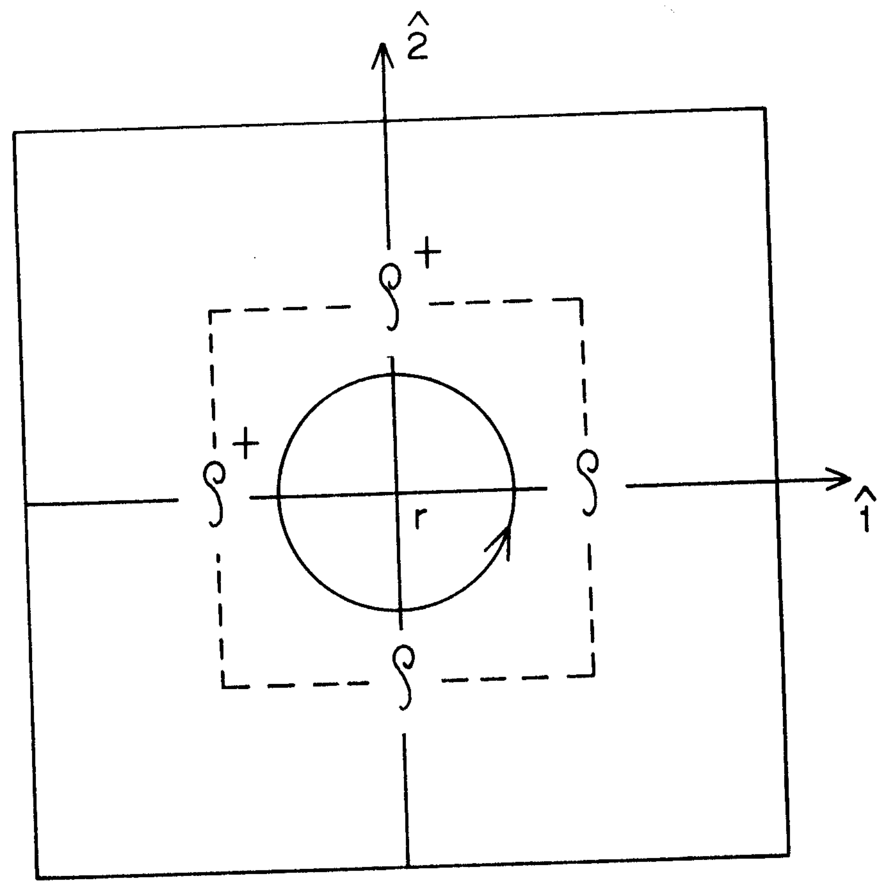

FIG. 18

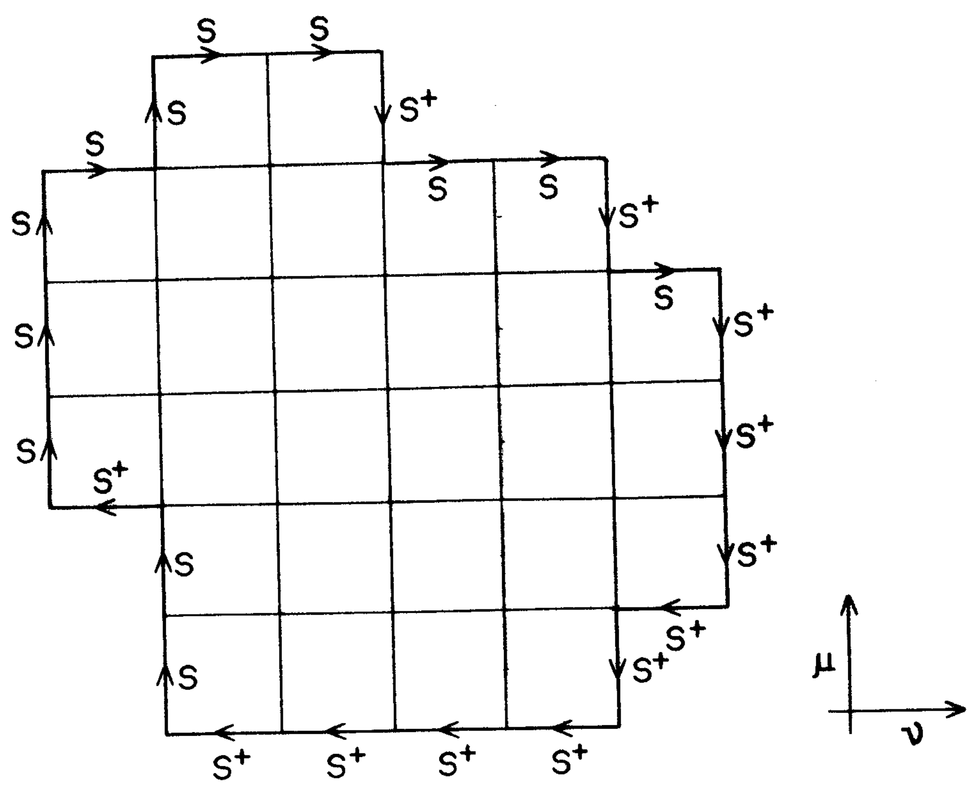

FIG. 19

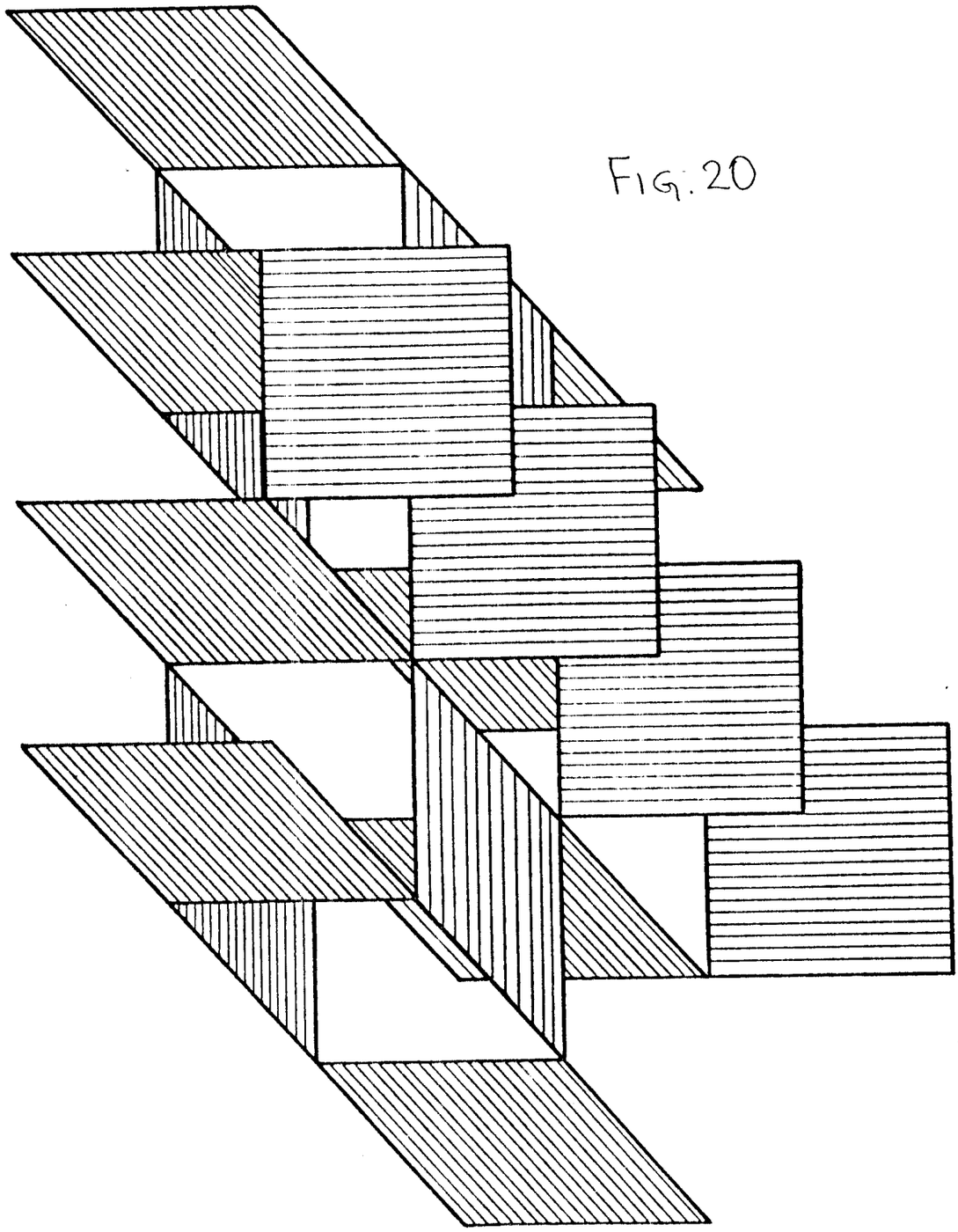

FIG. 20

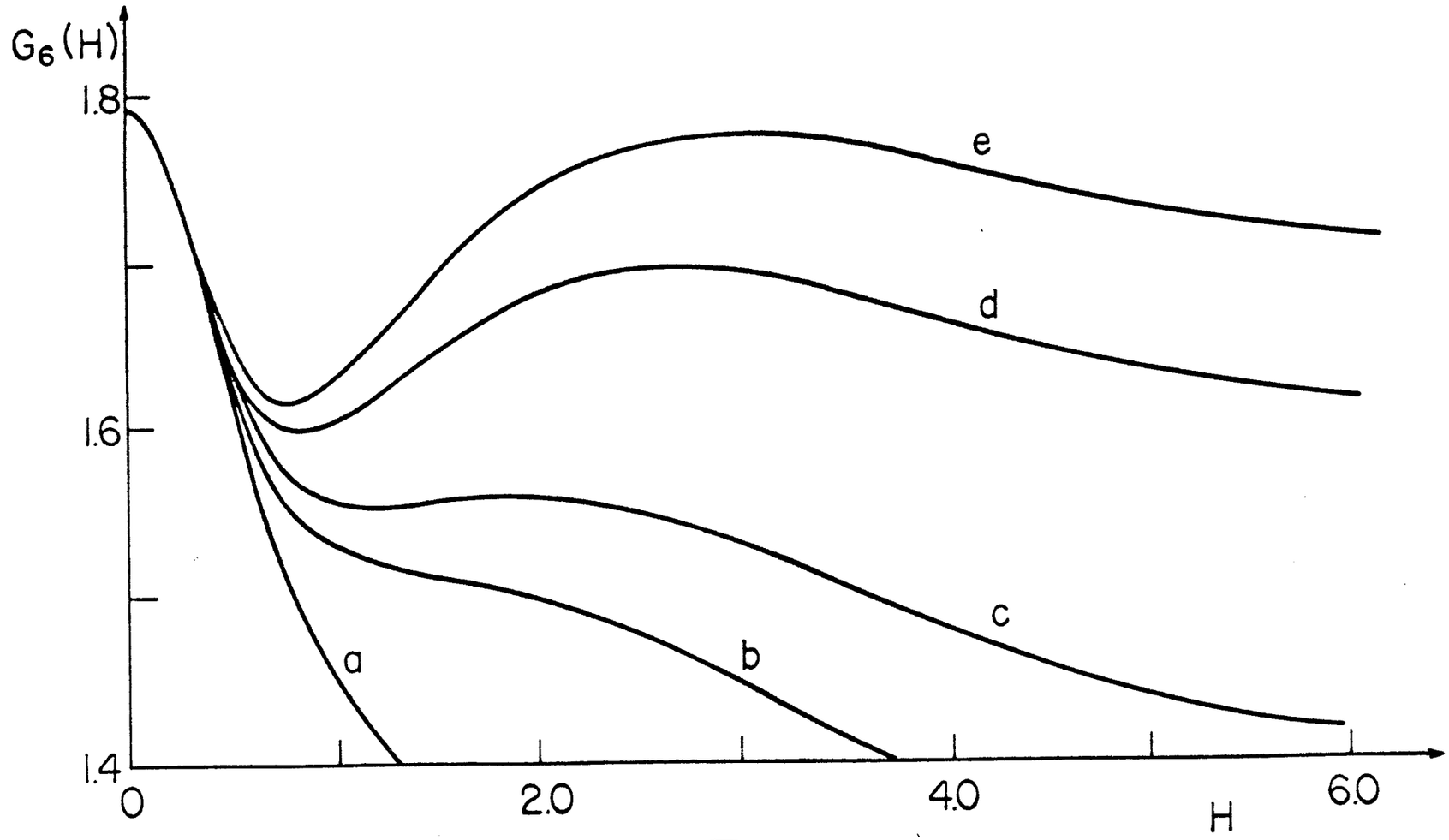

FIG. 21

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO - IFQSC
FÍSICA