UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FISICA E QUIMICA DE S. CARLOS

DOIS CASOS DE INTERESSE EM MOVIMENTO DE CARGA ESPACIAL

Raffaele Amazonas Novellino

Dissertação apresentada ao Instituto de Física e Química de S.Carlos para a obtenção do título de Mestre em Física Aplicada.

Orientador:

GUILHERME FONTES LEAL FERREIRA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais
São Carlos - 1983

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

Raffaele Amazonas Novellino

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 20 DE junho DE 1983.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Guilherme F.Leal Ferreira - Orientador

Dr. Luiz Nunes de Oliveira

Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

I N D I C E

PÁG. I - Lista de ilustrações.
II - Resumo
III - Abstract.
1 - Introdução.
2 - Cap. I - A Teoria do Sistema Estacionário
2 - Introdução.
2 - As equações do modelo.
4 - O campo elétrico e as densidades de carga.
5 - A equação característica.
8 - Cap. II - Análise e discussão do Sistema Estacionário.
8 - Introdução.
8 - Os gráficos das densidades de carga e do campo elétrico.
9 - As características com $K \gg 1.0$.
12 - As características com $K \ll 1.0$.
14 - As características com $K \sim 1.0$.
16 - As características quando $j_0 \gg K$.
18 - Conclusão.
29 - Cap. III - A Teoria do Sistema Transiente.
29 - Introdução.
29 - As equações do modelo.
32 - A equação diferencial geral.
33 - Solução até o 1º tempo de trânsito.
36 - Solução para o intervalo $t_1 < t < t_2$.
38 - Solução para o intervalo $t_2 < t < t_3$.
39 - O estado estacionário.
42 - Cap. IV - Análise e discussão do Sistema Transiente.
42 - Introdução.
42 - Os gráficos do campo elétrico na origem.
43 - Os gráficos da carga no interior da amostra.
44 - Os gráficos da corrente total.
49 - Tabela 1.

PÁG. 53 - Cap. V - Alguns Exercícios.
53 - Introdução.
53 - As linhas de fluxo.
55 - A distribuição espacial da densidade de carga.
56 - O 1º tempo de trânsito.
56 - Os modos oscilatórios.
61 - Conclusão.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

pág. 4 FIG. 1 - Esquema elétrico para a injeção de carga sob voltagem externa.

20 FIG; 2 - Distribuição de equilíbrio das densidades de carga.

21 FIG. 3 - Distribuição de equilíbrio do campo elétrico.

22 FIG. 4 - Características j x v com $K > 1$.

23 FIG. 5 - Características j x v com $K \ll 1$.

24 FIG. 6 - Características j x v com $K \ll 1$.

25 FIG. 7 - Detalhes das características j x v com $K \ll 1$.

26 FIG. 8 - Características j x v com $K \sim 1$.

27 FIG. 9 - Características j x v com K próximo da unidade.

28 FIG.10 - Características j x v com $K > 1$.

41 FIG.11 - Gráfico do campo elétrico estacionário em $x = 0$.

50 FIG;12 - Gráficos do campo elétrico em $x = 0$ em função do tempo.

51 Fig.13 - Gráficos da carga em função do tempo.

51 FIG.14 - Gráficos da densidade de corrente em função do tempo, durante t_1.

52 FIG.15 - Gráficos da densidade de corrente em função do tempo.

61 FIG.16 - Distribuição unidimensional arbitrária da densidade de carga.

62 FIG.17A- Distribuição unidimensional transiente da densidade de carga.

63 FIG.17B- Distribuição unidimensional transiente da densidade de carga.

64 FIG;18 - Detalhes das oscilações da corrente.

R E S U M O

Este trabalho apresenta dois problemas distintos. No primeiro, obteve-se a característica da corrente em função da voltagem em um dielétrico sob radiação, supondo-se que só um portador seja móvel, que haja recombinação e injeção da carga móvel através de um eletrodo. Na interface eletrodo-dielétrico foi imposta a condição de densidade de carga constante. No outro problema foi feita uma generalização do problema transiente clássico estudado por Many e Rakavy, usando a mesma condição anterior de densidade de carga constante no eletrodo injetor. Obteve-se soluções analíticas durante o 1º tempo de trânsito e se desenvolveu soluções por computador até o 3º tempo de trânsito. As oscilações amortecidas da corrente em torno do valor estacionário, também mereceram alguma atenção.

A B S T R A C T

Two distinct problems are treated here. In the first one, the relation between current and voltage in a dielectric under radiation is obtained, assuming only one carrier to be mobile, recombination and injection of the mobile charge from the electrode. We have chosen for this last boundary condition a constant charge density at the electrode-dielectric interface. The second problem treated is a generalization of the classic transient problem studied by Many-Rakavy, using the constant charge density boundary condition. Analytic solutions were obtained during the first transit time and computed ones for larger times. Some attention was given to the damped current oscilations approaching the steady state value.

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação apresentaremos os cálculos que realizamos referentes a dois problemas distintos. O primeiro, tratado no regime estacionário, considera a situação em que um dielétrico está sob a ação da radiação e sob voltagem aplicada, tendo um dos portadores móvel e o de sinal oposto fixo, havendo entre eles recombinação. Para que haja um regime permanente quando um dos portadores é fixo, é necessário que o eletrodo apropriado forneça corrente ao dielétrico. A estipulação desta corrente é uma condição de contorno imposta e esta foi escolhida da seguinte maneira: o eletrodo mantém uma densidade de carga constante na interface com o dielétrico. Esta condição parece ser a mais apropriada em problemas de injeção. Apesar deste problema ser relativamente simples - pois é analisado em estado estacionário - a solução é rica em nuanças dependendo dos valores assumidos pelos parâmetros pertinentes. Isto será visto no capítulo II, que mostra os resultados obtidos a partir dos cálculos realizados no capítulo I.

No capítulo III, com a mesma condição de contorno de densidade de carga constante junto ao eletrodo emissor, foi tratado um problema transiente de injeção monopolar de carga que, no fundo, generaliza a solução clássica de Many-Rakavy para eletrodos ôhmicos (densidade de portadores infinita na interface eletrodo-dielétrico) em carga espacial livre. Pode-se obter solução analítica até o 1º tempo de trânsito; para tempos maiores utilizamos métodos computacionais, sendo possível estender a solução até 3 tempos de trânsito. Embora de forma incompleta, procurou-se seguir as oscilações amortecidas da corrente que precedem o estabelecimento do regime estacionário, as quais são mais complexas do que no caso ôhmico - recém mencionado - mas, o tempo reduzido que para isso dispuzemos bem como dificuldades de precisão, não nos permitiram ir muito longe. O capítulo IV exibe os resultados obtidos com os cálculos do capítulo III, enquanto o capítulo V, mostra principalmente o estudo que realizamos sobre as oscilações amortecidas.

CAPITULO I

A TEORIA DO SISTEMA ESTACIONÁRIO

I.a) Introdução.

A teoria apresentada neste capítulo refere-se ao estudo do regime estacionário consequente de injeção monopolar e de irradiação em isolantes sob as seguintes condições: por irradiação são gerados a uma razão constante e uniformemente por todo o volume da amostra, "g" pares de carga, positiva e negativa, por unidades de volume e de tempo enquanto, sob a ação de um campo elétrico externo, um eletrodo mantendo uma densidade de carga "K" constante, injeta carga positiva; supomos nula a mobilidade "μ_-" da carga negativa, isto é, elas permanecem fixas no volume da amostra durante todo o processo e a corrente elétrica é, inteiramente, produto do movimento da carga positiva efetiva pois também consideramos que cargas de sinal oposto podem recombinar-se a uma razão constante "a".

Os objetivos do estudo apresentado nestes dois primeiros capítulos, são a determinação, a análise e a discussão da característica J x V do sistema proposto, cujo esquema elétrico é mostrado na fig. 1.

I.b) As equações do modelo.

Como o problema proposto está no estado estacionário, o seu equacionamento e posterior solução foram obtidos a partir do seguinte sistema de equações:

$$J_+ = \mu_+ \rho'_+ (X)\ E(X), \qquad 1.1$$

$$J_- = 0 \qquad 1.2$$

$$\epsilon \frac{dE(X)}{dX} = \rho'_+(X) - \rho'_-(X) \qquad 1.3$$

$$g - a\,\rho'_+(X)\,\rho'_-(X) = 0 \qquad 1.4$$

$$g - a\,\rho'_+(X)\,\rho'_-(X) = -\frac{dJ_+}{dX} \qquad 1.5$$

onde os subíndices + (mais) e - (menos) identificam o sinal da carga relacionada com a variável.

Essas equações representam, na sequência, a densidade de corrente da carga positiva, a da carga negativa, a equação de Poisson e as equações da continuidade para o fluxo de carga negativa e positiva com os termos de geração e recombinação molecular. A simbologia é a usual e está definida no apêndice A.

É nula a corrente da carga negativa J_-, porque por hipótese, a mobilidade $\mu_- = 0$.

A equação da continuidade para a carga positiva, eq. 1.5, é desnecessária neste contexto porém, em combinação com a 1.4, serve para mostrar que J_+ independe da posição X : $[\, dJ_+/dX \,] = 0$.

Para facilitar a manipulação das equações, escolhemos as variáveis adimensionais

$$x = X/L \quad ; \quad \rho(x) = c\,\rho'(X)$$

$$e(x) = (\epsilon/L)c\,E(X) \quad ; \quad j_o = (\epsilon/\mu_+ L)c^2\,J_+$$

com $c = \sqrt{a/g}$, e reescrevemos o sistema anterior, excluindo as equações 1.2 e 1.5, da forma a seguir:

$$j_o = \rho_+(x)\,e(x), \qquad 1.6$$

$$\frac{de(x)}{dx} = \rho_+(x) - \rho_-(x), \qquad 1.7$$

$$\rho_+(x)\,\rho_-(x) = 1, \qquad 1.8$$

onde a densidade de carga unitária é aquela estabelecida no isolante sob a ação da radiação quando nenhum campo elétrico é aplicado à amostra. Em unidades reais, com os valores de $g = 5 \times 10^{-4}$(C/cm³.s) e $a = 5 \times 10^{13}$(cm³/C.s) usuais na literatura, a densidade de car-

ga $\rho' = \sqrt{g/a}$, estabelecida na condição explicitada acima, é $\rho' = 3 \times 10^{-8}$ (C/cm³).

Impondo uma voltagem V constante aplicada externamente, ficamos com a condição de contorno

$$v = \int_0^1 e(x)\, dx \qquad 1.9$$

onde $v(x=1) = 0$ e a variável adimensional $v = (\epsilon/L^2)c\, V$.

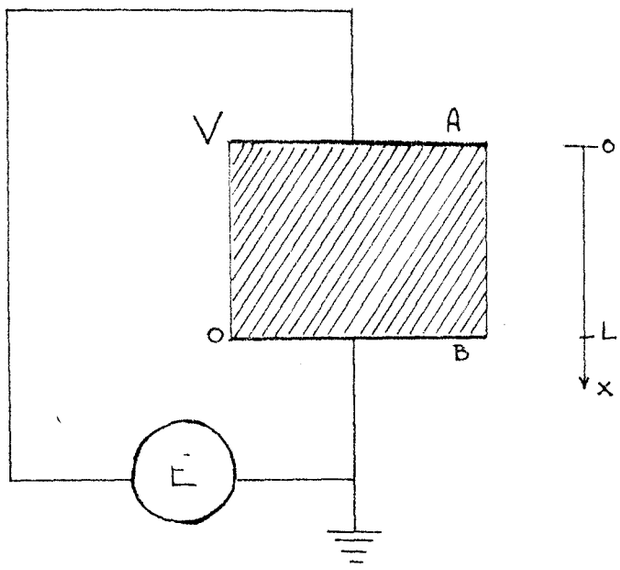


FIG. 1 - Esquema elétrico para a injeção de carga sob voltagem externa. A parte hachuriada é a amostra; o eletrodo A em x = 0, é o injetor de carga positiva e o B, em x = L, é o eletrodo bloqueante para a carga negativa.

1.c) O campo elétrico e as densidades de carga.

Para determinarmos a característica j x v com as equações estipuladas no ítem precedente, precisamos encontrar a dependência do campo elétrico com a variável x no interior do isolante.

Usando a equação de Poisson e o fato de que j_o é constante, eliminamos ρ_- com a equação da continuidade e ρ_+ com a equação da corrente e construimos uma equação diferencial linear de 1ª ordem, para o campo elétrico,

$$\frac{de(x)}{dx} = [\, j_o/e(x)] - [\, e(x)/j_o\,] \qquad 1.10$$

ou

$$\frac{de^2(x)}{dx} + (2/j_o)\, e^2(x) = 2\, j_o,$$

cuja solução, no intervalo $0 \leq x \leq 1$, é

$$e(x) = j_o \sqrt{1 + [(e_o^2/j_o^2) - 1] \exp(-2x/j_o)} \qquad 1.11$$

onde "e_o" é a intensidade do campo em $x = 0$.

Essa expressão é a solução geral para o campo elétrico pois representa uma família de curvas, as soluções particulares, no plano $xe(x)$ como função dos valores de "e_o".

Com o resultado 1.11 voltamos à relação da corrente e obtivemos a distribuição da densidade de carga positiva,

$$\rho_+(x) = j_o/e(x) \qquad 1.12$$

e com a equação da continuidade, $\rho_+(x)\,\rho_-(x) = 1$, encontramos a distribuição da densidade de carga negativa.

1.d) A equação característica.

Conhecida a expressão analítica do campo elétrico, o procedimento normal para a determinação da característica $j \times v$ é através da condição de contorno 1.9. Contudo, para simplificar a álgebra, seguimos outro caminho fazendo a mudança de variável

$$\frac{de(x)}{dx} = \frac{de(x)}{dv}\,\frac{dv}{dx}$$

na equação 1.10 e, como $[dv/dx] = -\,e(x)$, obtivemos a expressão integral no intervalo $0 \leq x \leq 1$,

$$v = -\,j_o \int_{e_o}^{e_1} [\,e^2/(e^2 - j_o^2)]\,de$$

com $v(x=1) = 0$ e onde "e_o" e "e_1" são as intensidades do campo na origem e em $x = 1$, respectivamente.

Nominando $u = e - j_o$, $w = e + j_o$ e desenvolvendo o integrando em frações parciais,

$$\frac{e^2}{(e^2 - j_o^2)} = (w - j_o)/2w + (u + j_o)/2u ,$$

encontramos a equação característica

$$v = - j_o(e_1 - e_o) - j_o^2 \ln(AB)/2 , \qquad 1.13$$

com $A = (e_1 - j_o)/(e_1 + j_o)$ e $B = (e_o + j_o)/(e_o - j_o)$, a qual também gera uma família de soluções particulares no plano jv como função do parâmetro e_o.

Observamos uma indeterminação na eq. 1.13 quando $j_o = e_1 = e_o$. No entanto, pela integral da equação de Poisson, em $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$e_1 - e_o = \int_0^1 [\rho_+(x) - \rho_-(x)] dx = 0,$$

vemos que nessa condição o isolante contém a mesma quantidade de carga positiva e negativa e, de acordo com a equação da continuidade, isso significa que $\rho_+(x) = \rho_-(x) = 1.0$. Como esta condição de carga unitária corresponde à situação em que $j_o = v$ pois os efeitos de carga espacial são nulos, fica levantada a indeterminação.

Para extrair alguma informação útil das soluções do campo elétrico, das densidades de carga e da voltagem, foi necessário especificar o processo de injeção de carga. Neste sentido consideramos o resultado de J. Mort et al (ref.1) os quais, estudando o regime estacionário do fenômeno de injeção de carga em isolantes nas proximidades do eletrodo emissor, concluiram que a densidade de corrente J, em unidades reais, tem a seguinte dependência com o campo elétrico no contato injetor, E_o,

$$J = \mu J_i [E_o/(bv_R + \mu E_o)] \qquad 1.14$$

sendo J_i a corrente devida à carga total emitida pelo eletrodo em $x = 0$, v_R a velocidade de recombinação efetiva associada à corrente de retorno do isolante para o contato injetor, $b \geqslant 1$ um parâmetro adimensional.

Para campo muito forte, acima de 1×10^4 (V/cm) para um contato tipo Cu-CdS à temperatura ambiente (ref.1), a corrente J satura porque o sistema chega a condição em que $\mu E_o \gg b\, v_R$.

No caso de campo fraco, quando se tem $b\, v_R \gg \mu E_o$, a corrente cresce linearmente com o campo,

$$J = \mu k E_o ,$$

com $k = J_i/bv_R$, ou, na forma admensional,

$$j_o = K e_o \qquad 1.15$$

onde $K = \sqrt{a/g}\, k$, é a densidade de carga constante, no eletrodo injetor.

Este é o comportamento que admitimos predominar em $x = 0$, por onde ocorre a injeção de carga positiva.

Usando a relação 1.15, eliminamos "e_o" nas equações do campo elétrico, fazendo $x = 1$, e da voltagem. Dessa forma ficamos com

$$e_1 = j_o \sqrt{1 + [(1/K^2) - 1]\exp(-2/j_o)} \qquad 1.16$$

$$v = -j_o^2 [(e_1/j_o) - (1/K)] - j_o^2 \ln(AZ)/2 \qquad 1.17$$

com $Z = (1 + K)/(1 - K)$ e A como definido após a eq. 1.13.

Estes resultados e mais os referentes às densidades de carga, trabalhados no computador geraram as curvas das figuras de 2 a 10 que representam o comportamento elétrico do regime estacionário estudado, para vários valores da densidade de carga na origem, K, diferentes da unidade:

CAPITULO II

ANÁLISE E DISCUSSÃO DO SISTEMA ESTACIONÁRIO

II.a) Introdução.

Iniciamos este capítulo comentando os gráficos das distribuições unidimensionais das densidades de carga $\rho_+(x)$ e $\rho_-(x)$ e do campo elétrico $e(x)$, mostrados nas figuras 2 e 3.

Em seguida discutimos os resultados apresentados nas figuras de 4 a 10 que são as características $j \times v$, para vários valores da densidade de carga em $x=0$, K. Podemos notar um comportamento linear quer para pequenos como para suficientemente grandes valores da corrente, entre os quais se intercala uma região cujo comportamento depende de como K se situa em relação à unidade, por exemplo: se $K \gg 1.0$, j_o é proporcional a v^2, e se $K \ll 1.0$, então j_o é proporcional a $\sqrt{v}$.

Com a finalidade de compreendermos com maior acuidade a dinâmica envolvida nesses processos, neste capítulo tentamos analisar, discutir e avaliar com mais detalhes esses resultados. Fizemos isso mantendo invariáveis os fatores de geração "g" e de recombinação "a" e, usando K como parâmetro, investigamos o comportamento do sistema nos limites $K \gg 1.0$, $K \ll 1.0$, e $K \sim 1.0$.

II.b) Os gráficos das densidades de carga e do campo elétrico.

Para melhor entedermos as características $j \times v$, construimos com as equações I.11, I.12 e da continuidade, os gráficos das densidades de carga e do campo elétrico mostrados nas figuras 2 e 3, respectivamente. Ambas apresentam tres pontos de duas características $j \times v$ do sistema: uma com $K = 0.1$ e a outra com $K = 10.0$.

A primeira observação na fig. 2, onde a densidade de carga positiva tem numeração par (2, 4 e 6) e a negativa tem numeração ím

par (I, 3 e 5), diz respeito à inversão da carga predominante no interior da amostra: para $K > 1$ (parte A da fig.2) temos $\rho_+ > \rho_-$ e para $K < 1$ (parte B) essa condição é invertida. Além disso, as densidades são recíprocas de acordo com a equação da continuidade, não havendo portanto, simetria na distribuição.

Vemos também que a carga predominante tem maior concentração nas proximidades do eletrodo injetor e decresce ao longo da espessura da amostra. Quanto menor é a corrente j_o mais rápido é o decréscimo. Inversamente, a carga minoritária aumenta no sentido do eletrodo em $x = 1$. Para a curva com $j_o = 0.1$, as duas distribuições quase se tangenciam no limite $\rho_+ = \rho_- = 1.0$ sem nunca assumir esse valor, só possível com $j_o = 0$, conforme a definição da seção I.a. Assim, deduzimos que para pequenos valores da corrente, a região de carga espacial fica comprimida bem próxima da origem enquanto, para correntes muito grandes a distribuição tende a ser constante mantendo o seu valor inicial.

Os gráficos do campo elétrico na fig. 3, como esperado, traduzem o comportamento das densidades de carga no interior do isolante. Quando o domínio é da carga positiva, o campo cresce no sentido do eletrodo em $x = 1$ e decresce no mesmo sentido quando prevalece a carga negativa. Para os valores da corrente bem menores que a unidade, $j_o = 0.1$ por exemplo, $e(x)$ cai rapidamente tendendo a esse valor, permanecendo praticamente constante por toda a espessura da amostra. Quando j_o é muito grande, o comportamento do campo elétrico tende ao linear.

Podemos conferir as aproximações feitas nos ítens seguintes comparando-as com as curvas das figuras 2 e 3.

II.c) As características com $K \gg 1.0$

Neste limite consideramos j_o da mesma ordem de grandeza de K ou menor, de tal forma que as equações I.16 e I.17 foram reduzidas a

$$e_1 \simeq j_o \sqrt{\left[1 - \exp(-2/j_o) \right]} \qquad \text{II.1}$$

$$v \simeq - j_o e_1 + (j_o^2/2)\ \ln\left[(j_o + e_1)/(j_o - e_1)\right] \qquad \text{II.2}$$

com a constante $Z = -1$.

Verificamos nessas expressões que o comportamento do sistema ficou independente de K porém, mesmo assim, de acordo com a ordem de grandeza da densidade de corrente j_o, a característica j x v apresenta variações. Portanto, aproveitamos essa dinâmica do sistema para conseguirmos mais detalhes sobre a sua característica. Isto também ocorre nos outros limites analisados. Para este caso, como sugere a eq. II.1, j_o é pequena para valores muito menores que 2 (dois) e é grande quando é muito maior que esse valor.

Para termos noção do que esse valor representa em unidades reais, estimamos a ordem de grandeza da densidade de corrente usando as definições das variáveis admensionais, $J_+ = (\mu\ L/\epsilon)(g/a)\ j_o$. Supondo a mobilidade $\mu = 10$ ($cm^2/V.s$) e a espessura da amostra $L = 5 \times 10^{-3}$(cm), encontramos $J_+ \simeq 4 \times 10^{-5}\ j_o$ (A/cm^2), onde usamos $\epsilon = 4.5 \times 10^{-13}$ (F/cm) e $\sqrt{g/a} = 3 \times 10^{-8}$ (C/cm^3).

Desse modo, temos os comportamentos analisados a seguir.

A) $j_o \ll 2$.

Nesta condição o termo $\exp(-2/j_o)$ é muito menor que a unidade, por isso expandimos a expressão II.1 em série de potências e ficamos com a seguinte expressão para o campo elétrico,

$$e_1 \simeq j_o\left[1 - 0.5\ \exp(-2/j_o)\right]. \qquad \text{II.3}$$

Este resultado foi substituido em II.2 a qual, após uma simplificação no logarítimo, ficou sendo

$$v \simeq - j_o^2\ \left[1 - 0.5\ \exp(-2/j_o)\right] + (j_o^2/2)\ \ln\left[4\ \exp(2/j_o)\right].$$

Com mais alguma manipulação no logarítimo e rearranjando os termos, obtivemos

$$v \simeq j_o - j_o^2\ \left[1 - \ln(2) - 0.5\ \exp(-2/j_o)\right].$$

Abandonando o termo da exponencial em comparação com os

demais e fazendo as contas, encontramos

$$v \simeq j_o - 0.3\ j_o^2 \qquad \text{II.4}$$

ou, aproximadamente,

$$j_o \simeq v + 0.3\ v^2 \qquad \text{II.5}$$

que é a expressão característica para baixa voltagem quando $K \gg 1$.

Para voltagem muito pequena a relação II.5 acusa a existência de regime ôhmico, $j_o \simeq v$. Aliás, este é o comportamento que conseguimos observar na curva 1 da fig.4, a única praticamente independente de K, para $v < 1.0$.

B) $j_o \gg 2$.

Neste caso o comportamento esperado é o de corrente limitada por carga espacial. De fato, como $(2/j_o) \ll 1$ fizemos a expansão $\exp(-2/j_o) \simeq 1 - (2/j_o)$ e obtivemos de II.1 a expressão para o campo elétrico

$$e_1 \simeq \sqrt{2\ j_o}\ . \qquad \text{II.6}$$

Por esta relação notamos que $(e_1/j_o) \ll 1$. Então desenvolvemos a função do logarítimo em II.2, com $w = (e_1/j_o)$,

$$\ln[(1 + w)/(1 - w)] \simeq 2\ [\ w + w^3/3]$$

e substituimos nela para obtermos

$$j_o \simeq (9/8)\ v^2 \qquad \text{II.7}$$

que é a equação característica do sistema quando a corrente é menor ou da ordem de K, conforme comprova a análise exposta no ítem II.d.

Na fig. 4, a única curva que concorda com este resultado é a com $K = 500$. As outras se afastam deste comportamento porque ainda dependem fortemente de K.

Avaliamos a voltagem limite, ou de transição, entre os regimes ditados pelas equações II.5 e II.7, igualando uma a outra e obtivemos $v_t \simeq 1.2$. Esta é a voltagem do ponto de cruzamento das curvas tracejadas no gráfico $\log j_o \times \log v$ da fig. 4.

II.d) As características com $K \ll 1.0$.

Considerando a densidade de carga no eletrodo emissor muito menor que a unidade, a simplificação das equações I.16 e I.17 resultou nas expressões

$$e_1 \simeq j_o \sqrt{1 + \exp(-2/j_o)/K^2}\,, \qquad \text{II.8}$$

$$v \simeq -\, j_o^2 \left[(e_1/j_o) - (1/K)\right] + (j_o^2/2)\ \ell n \left[\frac{(e_1 + j_o)}{(e_1 - j_o)}\right]. \qquad \text{II.9}$$

Desta feita, ao contrário do caso precedente, o comportamento do sistema depende de K. Além disso, para cada valor desse parâmetro, a característica j x v continua apresentando diferenças de acordo com a ordem de grandeza da densidade de corrente.

Para a análise neste limite consideramos que j_o é pequena quando a condição $\exp(-1/j_o) \ll K$ ou $j \ll \left|(\ell n\ K)^{-1}\right|$, for satisfeita e é grande quando cresce para o outro extremo.

C) $j_o \ll \left|(\ell n\ K)^{-1}\right|$.

Levando em conta este limite na expressão do campo elétrico, eq. II.8, encontramos após a expansão em série de potências,

$$e_1 \simeq j_o \left[\, 1 + \exp(-2/j_o)/2\ K^2 \,\right]. \qquad \text{II.10}$$

Para obtermos a característica j x v neste extremo, substituimos este resultado na eq. II.9. Simplificando primeiro a função do logarítimo, ficamos com a relação

$$\ell n\left[\frac{(e_1 + j_o)}{(e_1 - j_o)}\right] \simeq \ell n\left[4K^2 \exp(2/j_o)\left[1 + \exp(-2/j_o)/4K^2\right]\right].$$

Desenvolvendo este resultado e fazendo a aproximação de $\ell n\ (1 + s) \simeq s$, sendo $s = \exp(-2/j_o)/4K^2$ muito menor que a unidade, encontramos

$$\ell n\left[\frac{(e_1 + j_o)}{(e_1 - j_o)}\right] \simeq 2\ \ell n(2K) + (2/j_o) + \exp(-2/j_o)/4K^2.$$

Substituimos esta aproximação e a eq. II.10 na expressão da voltagem e obtivemos

$$v \simeq j_o + j_o^2 \left[(1/K) + \ln(2K) - 3 \exp(-2/j_o)/8K^2\right]$$

onde podemos despresar o termo da exponencial conseguindo assim uma expressão mais simples,

$$v \simeq j_o + R\, j_o^2 \qquad \text{II.11}$$

ou, explicitando a densidade de corrente,

$$j_o \simeq \left[\sqrt{1 + 4R\, v} - 1\right]/2R \qquad \text{II.12}$$

com $R = (1/K) + \ln(2K) > 1.0$.

Este resultado indica que para $v \ll (4R)^{-1}$, isto é, quando a voltagem é pequeníssima, o regime ôhmico $j \simeq v$, independente de K, prevalece no comportamento do sistema. Em unidade de volt, usando os mesmos valores da seção II.c, a expressão numérica da voltagem é $V = 0.15\ v\ (V)$. Supondo por exemplo, $K = 0.1$, ficamos com $R \simeq 8.4$ e $v \ll 0.03$. Então a voltagem da região linear deve ser muito menor que 4.5×10^{-3} (V).

Este comportamento não aparece nas figuras 5, 6 e 7 porque o computador tem uma limitação numérica da ordem de $10^{\pm 39}$ ou $\exp(\pm 89)$, dando para a densidade de corrente o valor mínimo aproximado de 2.2×10^{-2}, que está muito além da região ôhmica encontrada no limite em questão.

Para outros valores de v dentro do limite estabelecido para a corrente, a expressão II.12, dando uma dependência sublinear, j_o proporcional a $\sqrt{v}$, representa bem o comportamento do sistema, como podemos ver pela curva tracejada, com $K = 0.01$, no gráfico log j x log v da fig. 7.

D) $j_o \gg \left|(\ln K)^{-1}\right|$.

Sob esta condição desenvolvemos a eq. II.8 observando que o termo que contém a exponencial prevalece sobre o termo unitário porque além de $K \ll 1$, temos $(2/j_o) \ll 1$. Dessa forma chegamos

à expressão para o compo elétrico,

$$e_1 \simeq (j_o - 1)/K \ . \qquad \text{II.13}$$

Por este resultado deduzimos que (e_1/j_o) é muito maior que a unidade de tal forma que o termo do logarítimo na equação da voltagem, a II.9, é aproximadamente, zero. Assim, combinando a II.13 com a II.9 obtivemos a relação linear

$$j_o \simeq K\ v\ , \qquad \text{II.14}$$

cujo coeficiente é a densidade de carga em $x = 0$.

O resultado II.14 confirma a observação feita nos gráficos das figuras 5 e 6 onde vemos, para $j > 1$, a inclinação bem definida de cada curva, decrescente com K. Medindo com régua e esquadro verificamos que elas coincidem com os respectivos valores desse parâmetro.

Igualando as relações II.11 e II.14 encontramos a voltagem de transição entre os dois regimes,

$$v_t \simeq (1 - K)/(K + K\ \ell n\ 2K)$$

que dá com boa aproximação o limite entre os dois regimes. Por exemplo, para $K = 0.05$ calculamos $\ell og\ v_t \simeq 1.33$, em boa concordância com a curva 4 da fig. 5, como podemos ver no gráfico $\log j_o \times \log v$.

Nas figuras 5 e 6 também estão os gráficos $\log j \times \log v$ das expressões II.12 e II.14, as linhas tracejadas, para $K = 0.05$ e $K = 0.01$.

II.e) As características com $K \sim 1.0$.

Como a condição de carga unitária gera uma indeterminação, já definida, na equação I.13, investigamos o comportamento do sistema quando K se aproxima desse valor tanto pela direita quanto pela esquerda.

Fizemos isso escrevendo $K = 1 + r$, com "r" muito menor que a unidade, e usando $j = K\ e_o$, substituimos na equação I.11 obten-

do, após ligeira simplificação, a seguinte expressão para a distribuição unidimensional do campo elétrico,

$$e(x) \simeq j_o \sqrt{1 - 2r \exp(-2x/j_o)}.$$

Mas, como $2r \exp(-2x/j_o)$ é muito menor que a unidade para quaisquer "x" e "j_o", expandimos a relação anterior em série de potências e obtivemos

$$e(x) \simeq j_o \left[1 - (K - 1) \exp(-2x/j_o) \right] . \qquad \text{II.15}$$

Integrando este resultado no intervalo $0 \leq x \leq 1$, usando a condição de contorno I.9, determinamos a expressão para a voltagem,

$$v \simeq j_o - (K - 1)\left[1 - \exp(-2/j_o)\right] (j_o^2/2) . \qquad \text{II.16}$$

Também aqui o sistema apresenta nuanças segundo a ordem de grandeza de j_o. Assim, para as aproximações usamos as condições de $j_o \ll 2$ e $j_o \gg 2$.

E) $j_o \ll 2.0$.

Neste extremo a simplificação se reduz a abandonar o termo da exponencial em II.16, ficando a seguinte expressão para a voltagem,

$$v \simeq j_o - (K - 1)\, j_o^2/2 . \qquad \text{II.17}$$

Explicitando a densidade de corrente j , encontramos

$$j_o \simeq \left[1 - \sqrt{1 - 2(K - 1)\, v} \right] /(K - 1) \qquad \text{II.18}$$

que representa neste limite, a característica do sistema sob baixa voltagem, $v \leqslant \left| 1/(2K - 2) \right|$.

Qual no ítem II.d, esta última expressão sugere o regime ôhmico $j \simeq v$, independente de K, para voltagem muito baixa, ou seja, quando v é muito menor que $\left|1/(2K - 2)\right|$.

A segunda derivada de II.17, $[d^2 v/dj_o^2] = - (K - 1)$, indica que nesta região há mudança no sentido da curvatura dos gráfi-

cos, conforme K seja maior ou menor que a unidade. Isto tanto é consonante com os resultados II.4 e II.11, quanto com os gráficos das figuras 8 e 9 na faixa de $j_o < 2.0$.

F) $j_o \gg 2.0$.

Considerando a densidade de corrente muito grande, fizemos o desenvolvimento $\exp(-2/j_o) \simeq 1 - (2/j_o)$ e obtivemos da expressão II.16, a característica

$$j_o \simeq v/(2 - K), \qquad \text{II.19}$$

representativa de mais um regime linear que tem como fator de proporcionalidade uma função da densidade de carga em $x = 0$.

Outra vez, com régua e esquadro conferimos este resultado com os gráficos da fig. 8 e vimos que, com exceção da curva 1, com $K = 1.5$ muito distante do limite aqui considerado, os resultados são compatíveis.

Pela mesma razão que a curva 1 da fig. 8, também os gráficos da fig. 9 não concordam com a eq. II.19.

II.f) As características quando $j_o \gg K$.

Deduzimos nas seções II.d, $K \ll 1$, e II.e, $K \sim 1$, e conferimos nos gráficos que quando a densidade de corrente é grande, o sistema apresenta comportamento linear dependente do parâmetro K. Todavia, no limite de $K \gg 1$ esse regime não apareceu.

Observando as curvas com $K = 3$ e 5 na fig.4, notamos para $j_o > 10$, uma tendência no comportamento do sistema para relações subquadráticas. Na tentativa de visualisar melhor esse detalhe construimos os gráficos da fig. 10 para o intervalo $5 \leq j_o \leq 80$, onde verificamos que o sistema tende lentamente para o regime linear em dependência com o valor de K.

Com essa perspectiva re-analisamos as soluções I.16 e I.17, para o campo elétrico e para a voltagem, respectivamente, considerando a densidade de corrente j_o muito grande para qualquer valor do parâmetro K.

Começamos simplificando a expressão para o campo elétrico, desenvolvendo em série a exponencial e aproveitando só os dois primeiros termos,

$$e_1 \simeq j_o \sqrt{1 + \left[(1/K^2) - 1\right]\left[1 - (2/j_o)\right]}$$

$$\simeq (j_o/K) \sqrt{1 + 2(K^2 - 1)/j_o} \qquad \text{II.20}$$

Para continuarmos a análise tivemos que fazer considerações sobre o parâmetro K: $K \ll 1$, $K \sim 1$ e $1 < K \ll j_o$.

As duas primeiras, $K \ll 1$ e $K \sim 1$, levam a resultados idênticos aos já obtidos nas partes D e F, respectivamente.

A última condição, $1 < K \ll j_o$, permitiu fazer uma expansão em série de potências em II.20, resultando em

$$e_1 \simeq (j_o/K)\ \left[1 - (1 - K^2)/j_o\right] \qquad \text{II.21}$$

Com esta relação simplificamos o argumento do logarítimo na eq. I.17,

$$ZA = Z \left[\frac{(e_1 - j_o)}{(e_1 + j_o)}\right] \simeq Z \left[\frac{\left[1 - (1 - K^2)/j_o\right] - K}{\left[1 - (1 - K^2)/j_o\right] + K}\right]$$

$$\simeq Z \left[\frac{(1 - K)\left[1 - (1 + K)/j_o\right]}{(1 + K)\left[1 - (1 - K)/j_o\right]}\right] \simeq \left[\frac{1 - (1 + K)/j_o}{1 - (1 - K)/j_o}\right],$$

após o que fizemos o desenvolvimento

$$\ln (ZA) \simeq \Big[-(1 + K)/j_o - (1 + K)^2/2j_o^2 + (1 - K)/j_o +$$

$$+ (1 - K)^2/2j_o^2\Big]$$

$$\simeq -(2K/j_o)\left[1 + (1/j_o)\right] \simeq -(2K/j_o)\ ,$$

possível porque $j_o \gg K > 1$.

Voltando com essa simplificação e a eq. II.21 à expressão da voltagem, encontramos um resultado idêntico ao II.14,

$$j_o \simeq K\ v\ , \qquad \text{II.22}$$

confirmando a observação feita nos gráficos.

A princípio a eq. II.19, $j_0 \simeq v/(2 - K)$, por não ter a mesma forma das II.14 e 22, parece não ter a mesma dependência em K porém, dentro da aproximação feita de que $K = 1 + \&$, com $\& \rightarrow 0$, temos que $1/(2 - K) \simeq K$.

Portanto, para qualquer valor do parâmetro K e na medida em que a corrente atinge valores muito maiores que ele, o sistema sempre tende ao regime linear com a densidade de carga em $x = 0$ como coeficiente de inclinação.

II.g) Conclusão.

Vimos na análise e discussão anteriores que as características obtidas apresentam, sem exceção, tres regiões distintas na mesma sequência: uma fase ôhmica, isto é, independente do parâmetro K, para corrente muito pequena, seguida de uma região cujo regime apresenta diferenças conforme a ordem de grandeza de K e uma outra fase também linear, para corrente muito grande, dependente de K.

A fase ôhmica está conforme o esperado do comportamento elétrico dos isolantes sob baixa voltagem. Os efeitos da carga espacial ficam praticamente restritos à interface contato injetor-isolante.

A região intermediária apresenta um comportamento ditado pelo tipo de carga predominante no interior do isolante. Quando K é menor que a unidade predomina a carga negativa e a característica é sublinear. Para valores de $K > 1$ há predominância da carga positiva e o regime é superlinear, observando-se até o quadrático, correspondente à corrente limitada por carga espacial.

Compreendemos o comportamento linear dependente de K, ao lembrar que a corrente j_0 é o resultado de duas contribuições: uma devida à carga injetada, j_i, e outra devida àquela gerada pela irradiação, j_g. Quando o sistema está sob alta voltagem a corrente j_g tende ao valor de saturação, $j_g = 1$,- em unidades reduzidas - ficando insignificante diante daquela produzida pela carga injetada $j_i = K\,v$, para qualquer valor de K.

Outro ponto a considerar é o seguinte. Embora neste estu-

do não tenhamos feito qualquer consideração a respeito de armadilhas para as cargas móveis, os resultados encontrados podem incluí-las desde que a ocupação resultante das mesmas seja pequena quando comparada com uma possível ocupação total. Neste caso, a mobilidade μ_m a ser considerada é a mobilidade modulada pelas armadilhas, $\mu_m = \theta\,\mu$, onde $\theta = P\tau/(1 + P\tau)$ e P é a probabilidade de escape por unidade de tempo e τ é o tempo de vida do portador livre. Da mesma forma, o coeficiente de recombinação "a" deve ser multiplicado pelo mesmo fator θ. Tudo isto está mostrado na ref. 2.

Outra situação interessante está na resposta do sistema mediante qualquer alteração no coeficiente de recombinação "a" e/ou na dependência com a razão de criação "g". Vimos que as unidades ficam determinadas a partir de "a" e "g". Por exemplo, a densidade de carga real ρ' é $\rho' = \sqrt{g/a}\,\rho$, sendo ρ a reduzida; em particular, na origem a densidade é $k = \sqrt{g/a}\,K$, onde K é o parâmetro que empregamos para descrever as soluções. Assim, vemos que se "a" adquire o valor de Langevin - o mais usual - isto não leva a nenhum caso especial para o nosso problema. Por outro lado, a densidade real de carga em $x = 0$, k, pode ou não depender da própria radiação. Se k for constante, o parâmetro K irá como o inverso da raiz quadrada de "g" e assim, ao se aumentar o nível de radiação "g", K diminuirá e a característica a ser considerada encaminhar-se-á para a dependência $\sqrt{v}$. Se em vez disso, a carga real k for proporcional a "g", K irá agora como $\sqrt{g}$ e um aumento da radiação resultará em aumento de K, deslocando-se então a característica para a dependência v^2.

Embora não muito fácil de se realizar, o levantamento experimental de características para vários níveis de radiação poderia informar sobre a dependência da densidade k com a mesma.

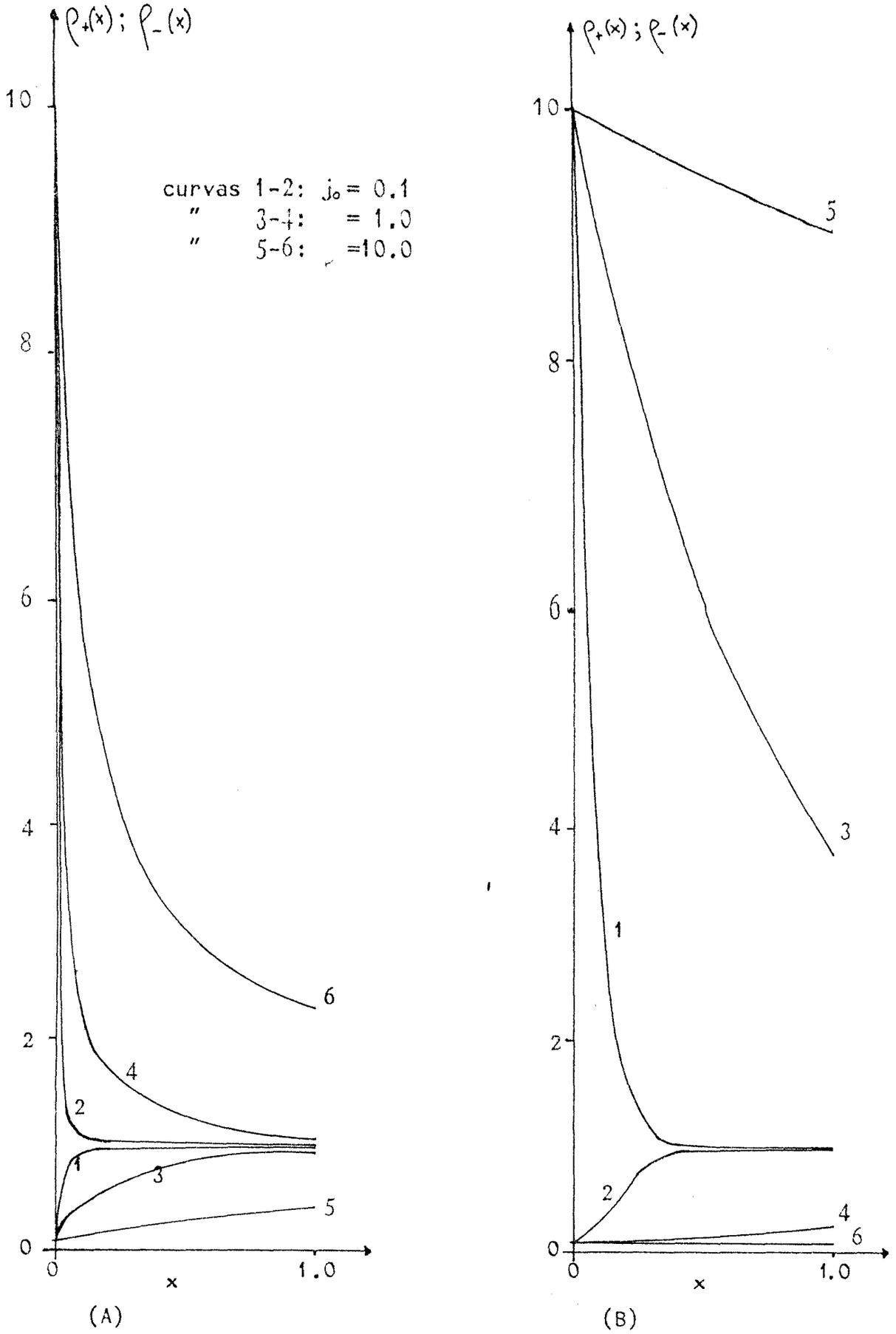


FIG. 2 - Distribuição de equilíbrio, unidimensional, das densidades de carga positiva - numeração par - e negativa - numeração ímpar - no interior do isolante. A parte (A) corresponde a K=10 e a parte (B) a K=0.1 . Os valores da corrente estão listados na figura.

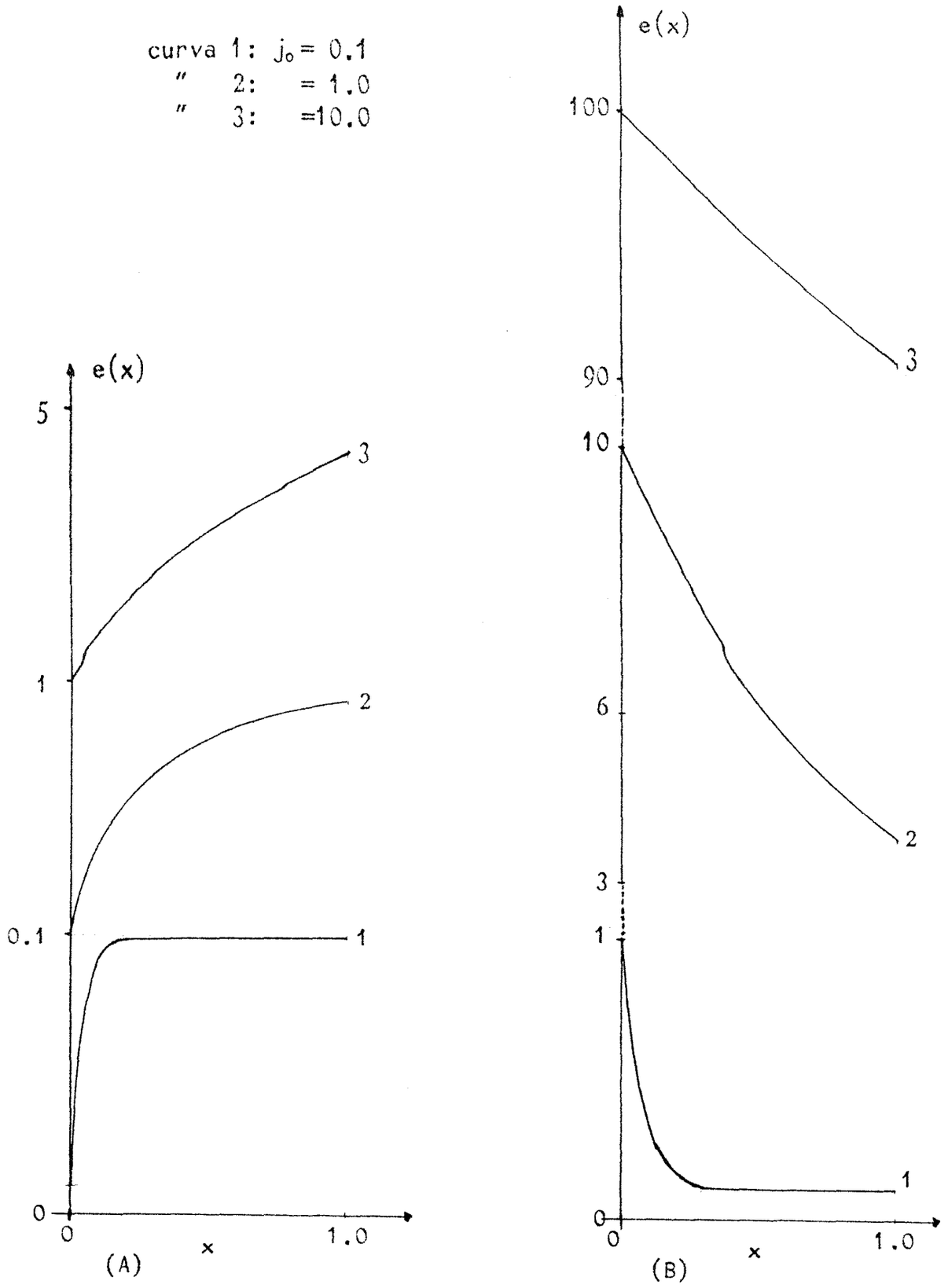


FIG. 3 - Distribuição de equilíbrio, em uma dimensão, do campo elétrico no interior do isolante, com dois valores de K: K = 10 - parte (A) - e K = 0.1 - parte (B). Os valores da corrente estão listados na figura.

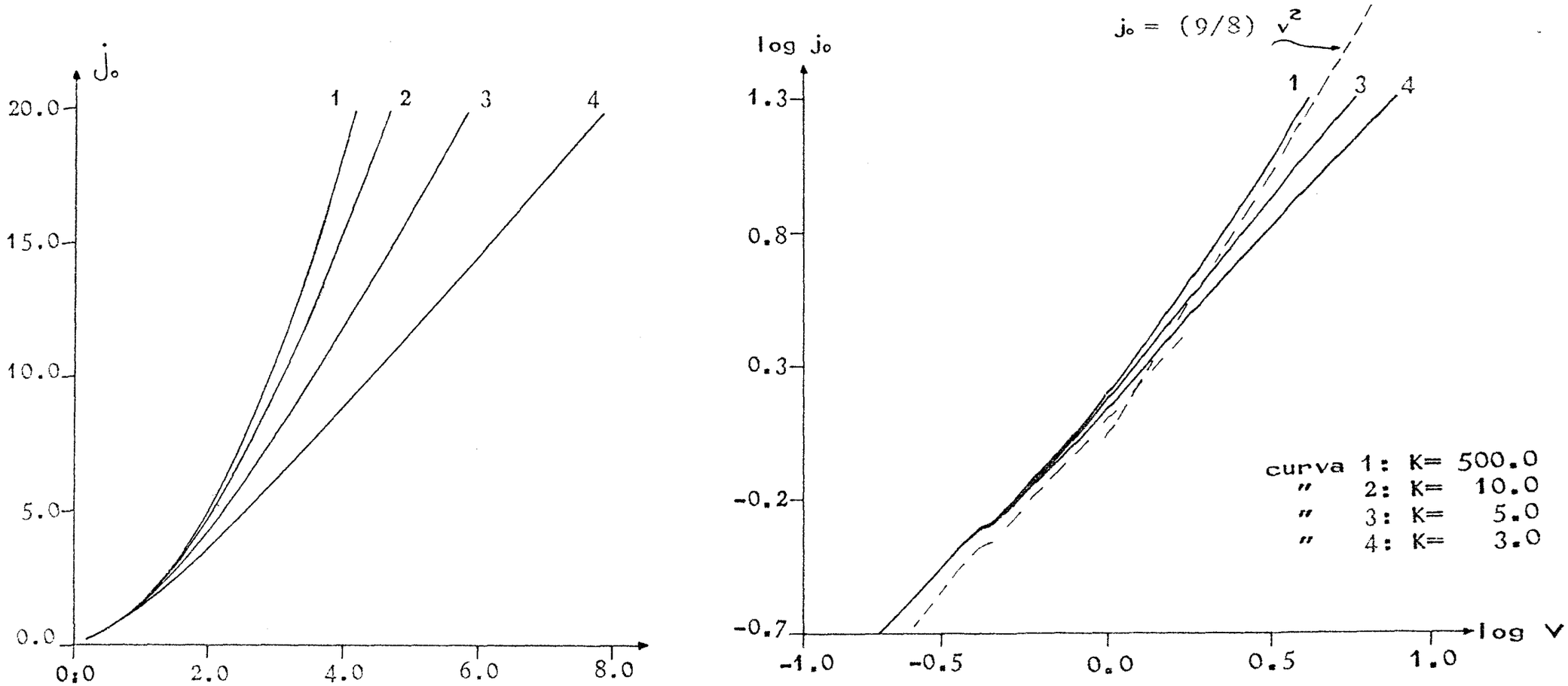


FIG. 4 - Características j x v com os valores de K maiores que a unidade, enumerados na figura. As curvas tracejadas foram geradas com as equações 11.5 e 7. Os gráficos da direita são em logXlog.

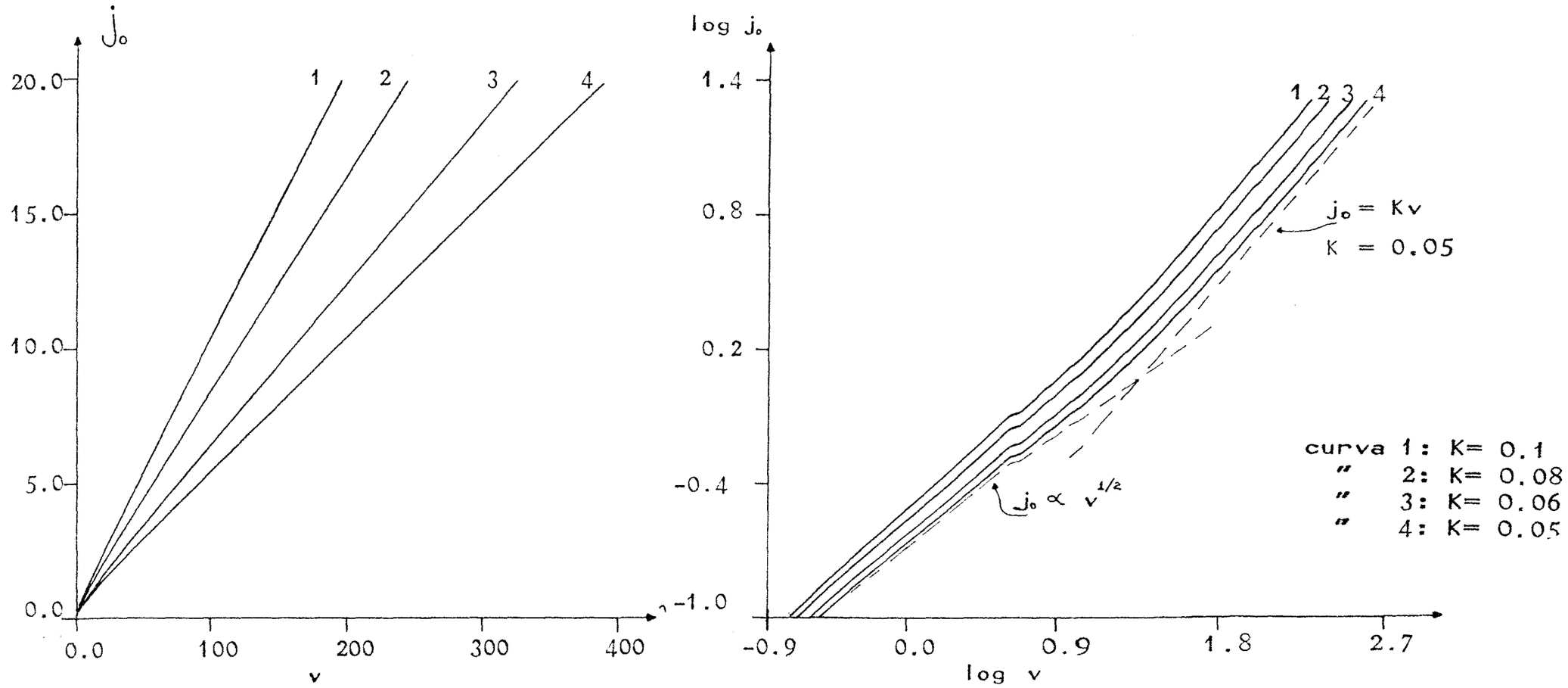


FIG. 5 - Características j x v com $K \ll 1$. As curvas tracejadas foram obtidas com as equações II.12 e 14 com K = 0.05. Os gráficos da direita são em logXlog.

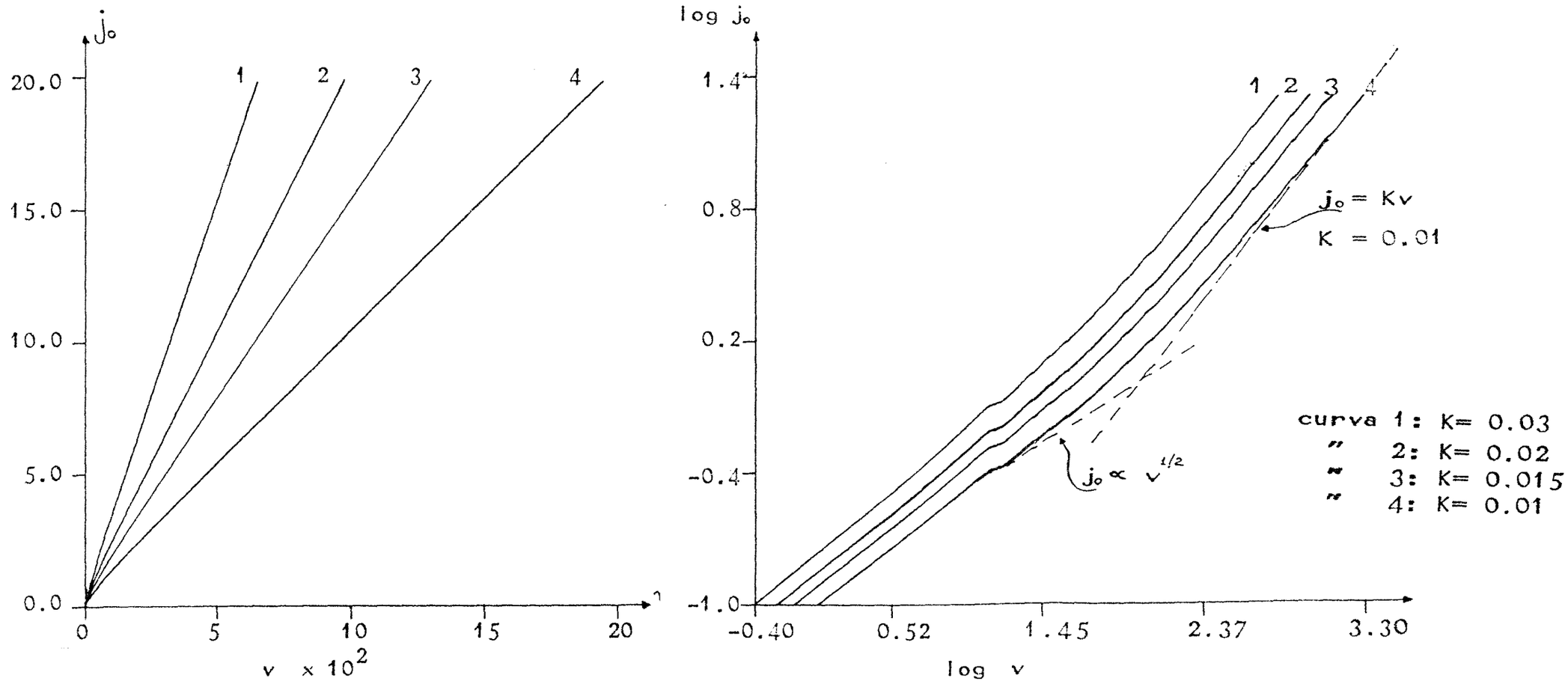
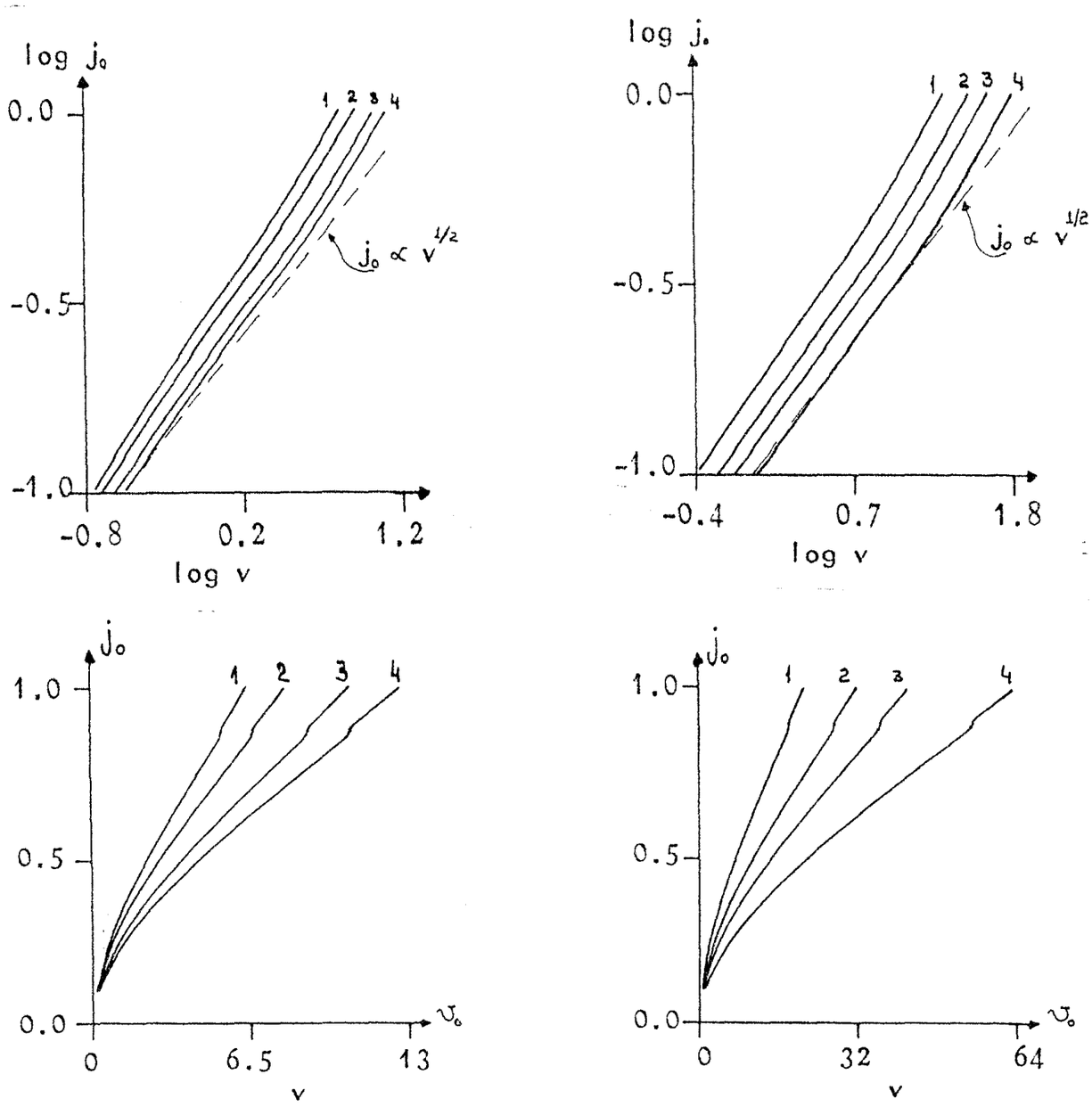


FIG. 6 - Características j x v com $K \ll 1$. As curvas tracejadas foram geradas com as equações 11.12 e 14 com K = 0.01. Os gráficos da direita são em logXlog.



curva 1: K= 0.1
" 2: K= 0.08
" 3: K= 0.06
" 4: K= 0.05

curva 1: K= 0.03
" 2: K= 0.02
" 3: k= 0.015
" 4: K= 0.01

FIG. 7 - Detalhes das características j x v com $K \ll 1$ para $j < 1$. As tracejadas foram obtidas com a eq.II.12 com K = 0.05 e 0.01. Os gráficos do alto são em logXlog.

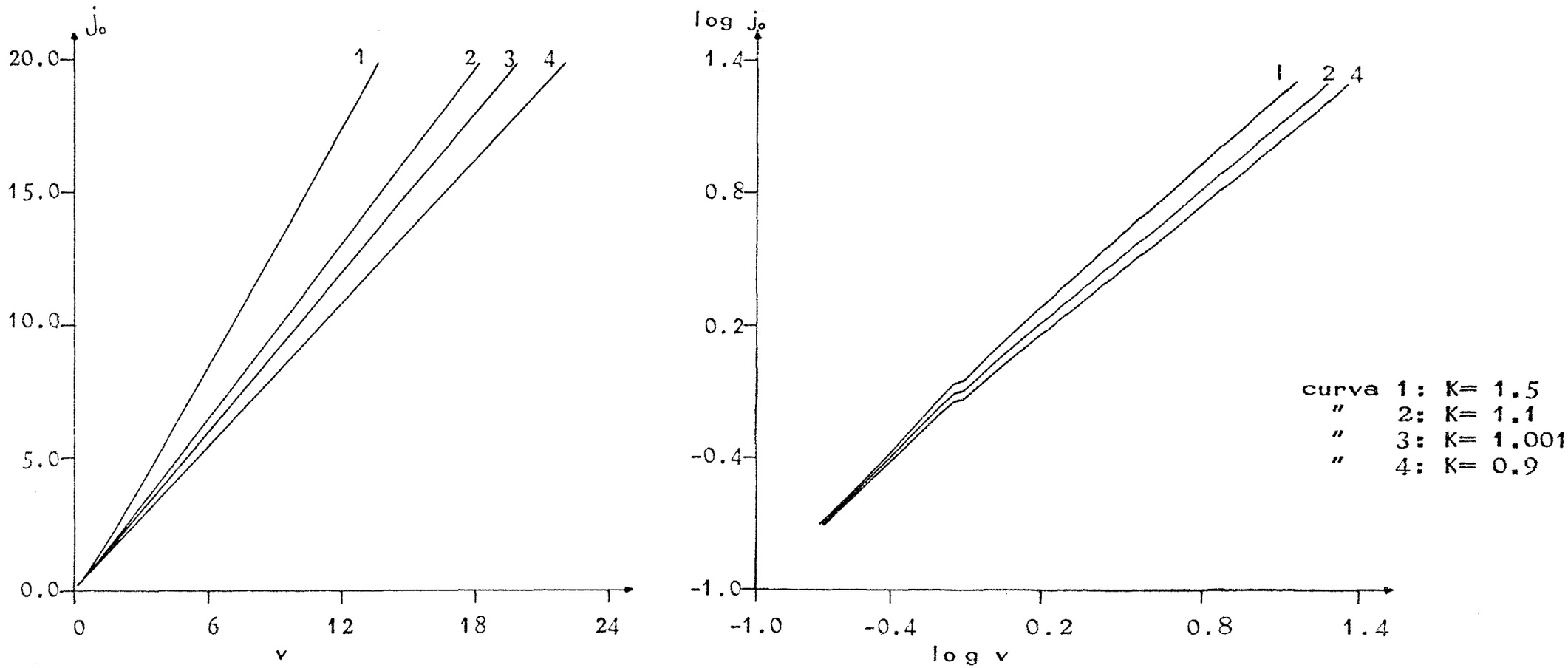


FIG. 8 - Características j x v com K ~ 1. Os gráficos da direita são em logXlog.

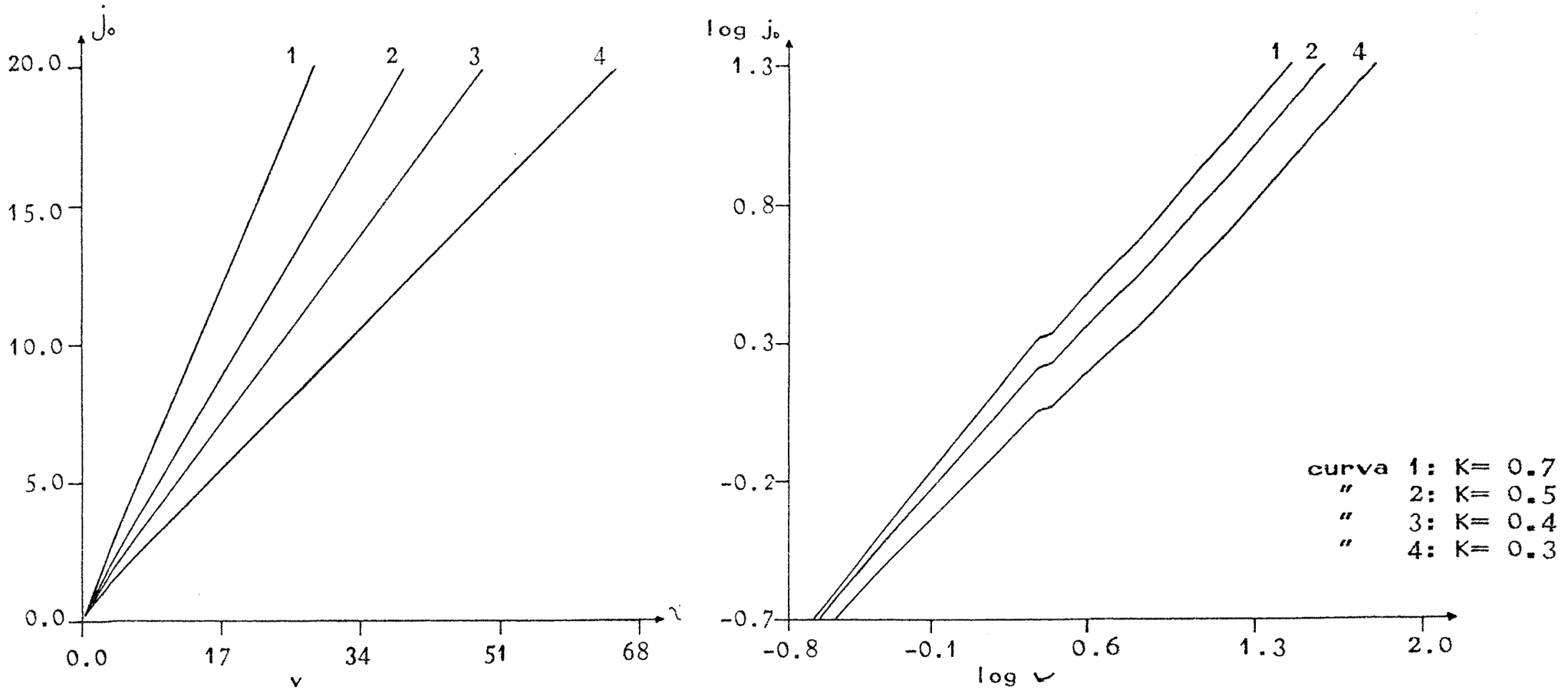


FIG. 9 - Características j x v com K próximo da unidade.
Os gráficos da direita são em logXlog.

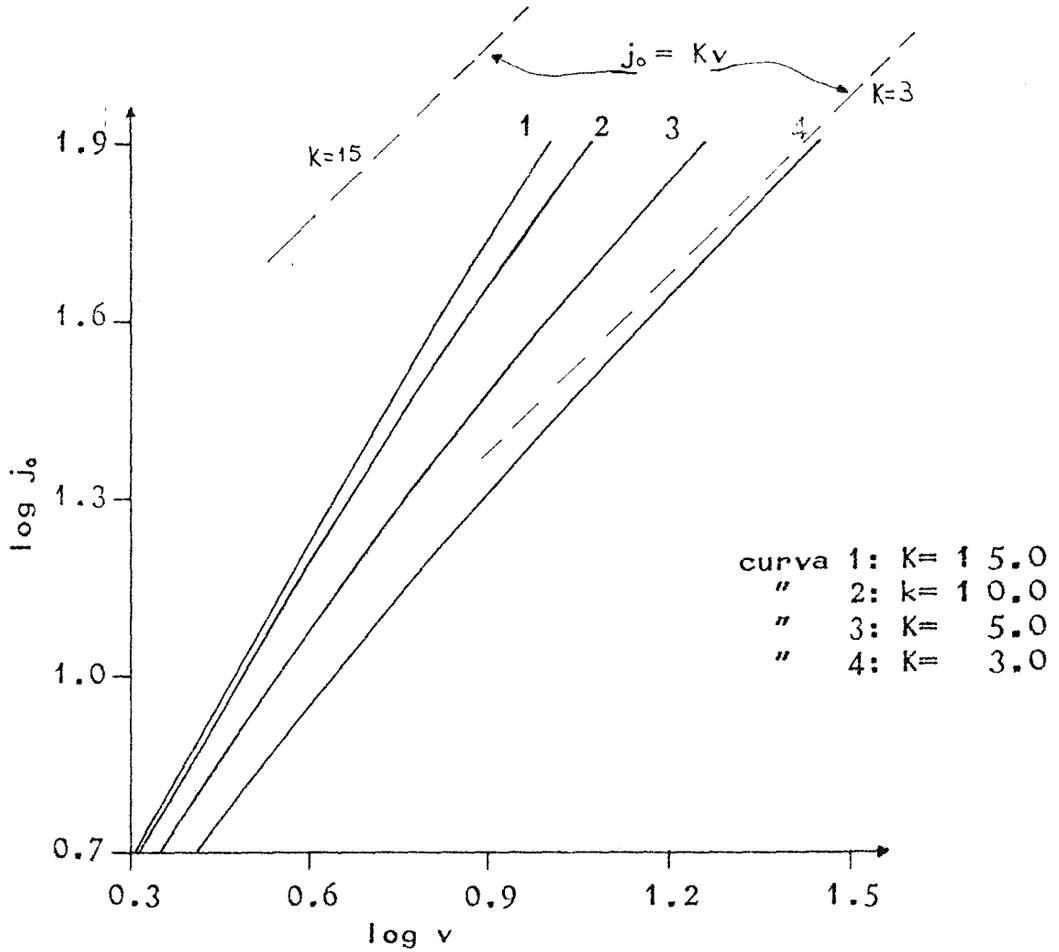


FIG.10 - Características j x v com $K > 1$ e $5 \leq j_o \leq 80$, em logXlog.

CAPITULO III

A TEORIA DO SISTEMA TRANSIENTE

III.a) Introdução.

A partir deste capítulo estudamos o comportamento elétrico de um isolante perfeito, da fase transiente à estacionária, considerando só os efeitos devido a carga espacial livre, injetada por ação de campo elétrico externo.

Supomos uma amostra de isolante de espessura L, constante dielétrica ϵ e faces metalizadas de tal forma que, sob uma tensão V constante, só o eletrodo em $x = 0$ emita carga, a qual condicionamos ser de sinal positivo (fig. 1).

Também neste problema admitimos a possibilidade de se manter constante a densidade de carga ρ_0, no eletrodo injetor. Dessa forma, equacionamos o problema e obtivemos solução analítica para o primeiro tempo de trânsito. O acompanhamento do processo de injeção em tempos posteriores foi feito por integração numérica.

No 4º capítulo comentamos os resultados gráficos da teoria desenvolvida neste terceiro e no capítulo V, apresentamos alguns exercícios relacionados com a fase transiente até o 1º tempo de trânsito e com as oscilações amortecidas da corrente um pouco antes de estacionar.

III.b) As equações do modelo.

De acordo com as proposições feitas na introdução , consideramos as seguintes equações unidimensionais,

$$J(t') = \mu\, \rho'(X,t')\, E\,(X,t') + \epsilon \frac{\partial E(X,t')}{\partial t'} \qquad \text{III.1}$$

$$\epsilon \frac{\partial E(X,t')}{\partial X} = \rho'(X,t') \qquad \text{III.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}[\,\mu\,\rho'(X,t')\;E(X,t')\;] = -\,\frac{\partial\,\rho'(X,t')}{\partial\,t'} \qquad \text{III.3}$$

representando, na ordem, a densidade de corrente total e as equações de Poisson e da continuidade.

Outra relação importante é a da densidade de carga livre em uma linha de fluxo, $\rho'[X(t'),t']$. Ela pode ser deduzida a partir da diferencial total (ref.3),

$$d\rho'[X(t'),t'] = \frac{\partial\rho'}{\partial X}\,dX + \frac{\partial\rho'}{\partial t'}\,dt'$$

e da expressão da velocidade dos portadores ao longo dessa linha de fluxo,

$$[dX(t')/dt'] = \mu\;E\;[X(t'),t'].$$

Com a ajuda das equações de Poisson e da continuidade ficamos com

$$\frac{d\rho'[X(t'),t']}{dt'} = -\frac{\mu}{\epsilon}\rho'\;[X(t'),t']$$

e após integrá-la no intervalo $t'_e < t'' < t'$, encontramos

$$\rho'\;[X(t'),t'] = \rho'_o \,/\, [\,1 + (\mu\,\rho'_o/\epsilon)(t' - t'_e)] \qquad \text{III.4}$$

onde ρ'_o é a densidade constante de carga em $x = 0$ e t'_e é o tempo de emissão do plano de carga que caracteriza uma linha de fluxo.

Imaginando que toda a carga injetada está distribuida em muitos planos paralelos, perpendiculares à direção de deslocamento, linha de fluxo é a equação de movimento temporal de cada um desses planos. Many e Rakavy (ref. 3) já observaram a não dependência explícita com a posição X da densidade de carga em uma linha de fluxo. Depois, Nunes de Oliveira e Leal Ferreira (ref. 4) mostraram isso com maior clareza.

Este problema tem como condição inicial $E(X,0) = V/L$, e condição de contorno,

$$V = \int_0^L E(X,t')\;dX.$$

Escrevemos as equações e condições anteriores na forma adimensional,

$$j(t) = \rho(x,t)\, e(x,t) + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} , \qquad \text{III.5}$$

$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial x} = \rho(x,t) , \qquad \text{III.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(x,t)\, e(x,t)\right] = - \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} , \qquad \text{III.7}$$

$$\rho(x,t) = \rho_o \left[1 + \rho_o (t - t_e)\right]^{-1} , \qquad \text{III.8}$$

$$e(x,0) = 1.0 \quad , \quad \int_0^1 e(x,t)\, dx = 1.0 , \qquad \text{III.9}$$

com as variáveis adimensionais definidas a seguir,

$$x = X/L \quad ; \quad t = t'/t_o \quad ; \quad e(x,t) = E(X,t')/(V/L)$$

$$\rho(x,t) = \rho'(X,t')/(C_o V/L) \; ; \; j(t) = J(t')/(C_o V/t_o),$$

onde a densidade de carga unitária é a máxima que o isolante pode conduzir em $t = 0$. Nessas definições temos $t_o = L^2/\mu V$, o tempo de trânsito de carga livre entre os eletrodos, e $C_o = \epsilon/L$, a capacitância geométrica da amostra, por unidade de área.

O conjunto de relações utilizado neste trabalho compõe-se das expressões III.5, em $x = 1$, e III.8, das condições III.9, da densidade de corrente em $x = 0$,

$$j(t) = \rho_o e_o(t) + [de_o(t)/dt] , \qquad \text{III.10}$$

e, qual S.Z. Weisz et al (ref.5), da forma integral por toda a espessura da amostra, $0 \leq x \leq 1$, das equações da corrente, de Poisson e da continuidade, respectivamente,

$$j(t) = \left[e_1^2(t) - e_o^2(t)\right]/2 \qquad \text{III.11}$$

$$e_1(t) - e_o(t) = q(t) \qquad \text{III.12}$$

$$\rho_1(t)\ e_1(t) - \rho_o e_o(t) = -[dq(t)/dt] \qquad \text{III.13}$$

usando a condição de contorno em III.9 para obtermos a expressão III.11. Os subíndices 0(zero) e 1(um) referem-se aos eletrodos em $x = 0$ em $x = 1$, conforme a fig. 1. A nova variável $q(t) = Q(t)/C_oV$, é a carga por unidade de área contida na amostra no tempo t.

III.c) A equação diferencial geral.

Com as equações apresentadas no parágrafo anterior foi possível equacionar o problema em termos da variável $q(t)$.

Para isso, combinamos as expressões III.12 e III.13 para eliminar $e_1(t)$, e obtivemos

$$[dq(t)/dt] + \rho_1(t)\ q(t) = [\rho_o - \rho_1(t)]\ e_o(t).$$

Depois de igualar as relações III.10 e III.11 eliminamos também $e_1(t)$ com a ajuda da III.12, e chegamos a

$$[de_o(t)/dt] = [q(t) - \rho_o]\ e_o(t) + q^2(t)/2.$$

Derivamos a expressão obtida por primeiro, com respeito ao tempo e, na expressão assim obtida, substituimos $de_o(t)/dt$ e $e_o(t)$ tirados das relações anteriores. Tudo isso, após a ordenação dos termos, resultou na equação diferencial de 2ª ordem, não linear,

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \left[f(\rho_1) + \rho_o - q(t)\right] \frac{dq(t)}{dt} + f(\rho_1)\ \rho_o\ q(t) - h(\rho_1)\ q^2(t) = 0 \qquad \text{III.14}$$

com $f(\rho_1) = \rho_1(t) - \dfrac{d}{dt}\left[\ln[\rho_o - \rho_1(t)]\right]$

e $h(\rho_1) = [\rho_o + \rho_1(t)]/2.$

Quando admitimos o valor infinito para ρ_o esta equação é reduzida àquela de Many e Rakavy (ref.3),

$$[dq(t)/dt] + \rho_1(t)\ q(t) = q^2(t)/2,$$

pois nessa condição o campo na origem é nulo, $e_o(t) = 0$, implicando na igualdade $q(t) = e_1(t)$, segundo a relação III.12.

Embora equacionando o problema, a expressão III.14 contém uma incógnita, $\rho_1(t)$, e seria inútil se não fosse possível obter subsídios adicionais que permitissem determinar a densidade de carga em $x = 1$. A função conhecida de $\rho_1(t)$ é a dada pela equação III.8 que não a define explicitamente devido a dependência com o tempo de emissão t_e, parâmetro característico para cada linha de fluxo. Assim, passamos a considerar na análise a própria dinâmica do processo de injeção a fim de extrairmos a informação necessária para estabelecer a expressão analítica para a densidade de carga $\rho_1(t)$.

Isso é feito na seções seguintes.

III.d) Solução até o 1º tempo de trânsito t_1: $0 < t < t_1$.

A observação da fase inicial do processo de injeção faz notar que entre o início da injeção, em $t = 0$, e o instante da chegada da carga emitida em $x = 0$, ao eletrodo em $x = 1$, há um lapso de tempo característico t_1, definido como o primeiro tempo de trânsito, durante o qual a densidade de carga em $x = 1$, de mesmo sinal da injetada, é nula. Na linguagem das linhas de fluxo isso significa que aquela linha com densidade $\rho(x,t)$ dada por III.8, relacionada ao primeiro plano de carga do pacote emitido em $x=0$, no tempo de emissão $t_e = 0$, alcançará o eletrodo em $x = 1$, após transcorrido um tempo igual a t_1.

Esse fato traz a informação que define a expressão para a densidade de carga em $x = 1$, $\rho_1(t) = 0$, durante o intervalo de tempo $0 < t < t_1$. Considerando isso na equação III.14, ficamos com a equação

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + [\rho_o - q(t)]\ \frac{dq(t)}{dt} - (\rho_o/2)\ q^2(t) = 0 \qquad \text{III.15}$$

bastante simplificada porém, ainda de 2ª ordem e não linear.

Felizmente, com a mudança de variável (ref.9)

$$u(t) = \frac{dq(t)}{dt} - q^2(t)/2 \qquad \text{III.16}$$

ela é transformada em uma equação diferencial de 1ª ordem em $u(t)$, linear,

$$\frac{du(t)}{dt} + \rho_0 u(t) = 0$$

cuja solução geral é do tipo

$$u(t) = c \exp(-\rho_0 t). \qquad \text{III.17}$$

Com a condição inicial $e_1(0) = e_0(0) = 1$ e as relações III.12 e III.13, com $\rho_1(t) = 0$, ficamos com $q(0) = 0$ e $[dq/dt]_{t=0} = \rho_0$. Fazendo $t = 0$ em III.16 verificamos que $u(0) = \rho_0$ e assim através de III.17, determinamos a constante $c = \rho_0$.

Voltando à relação III.16 obtivemos uma equação bem mais simples,

$$\frac{dq(t)}{dt} - q^2(t)/2 = \rho_0 \exp(-\rho_0 t) \qquad \text{III.18}$$

que é do tipo da equação diferencial de Ricatti que tem como um dos procedimentos de resolução, a mudança de variável

$$q(t) = -2 \frac{d}{dt} \ln [\, v(t)] \;, \qquad \text{III.19}$$

que a transforma numa equação diferencial de 2ª ordem, linear:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + (\rho_0/2) \exp(-\rho_0 t)\, v(t) = 0.$$

Neste estágio, no lugar de usar o método de Frobenius para encontrar as soluções desta equação, preferimos definir outra variável independente,

$$y(t) = (2/\rho_0) \exp(-\rho_0 t) \qquad \text{III.20}$$

com a qual obtivemos a equação diferencial,

$$\frac{d^2 v(y)}{dy^2} + (1/y)\ \frac{dv(y)}{dy} + (1/4y)\ v(y) = 0\ , \qquad \text{III.21}$$

que é um caso particular da equação de Bessel (ref.8)

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (1/z)\ \frac{dU}{dz} + (1/4z)\left[1 - (m^2/z)\right]\ U = 0\ ,$$

em que o parâmetro "m", que define a ordem das funções de Bessel, é nulo.

A solução geral desse tipo de equação é uma combinação linear das funções de Bessel de ordem "m", $B_m\ (z^{1/2})$, linearmente independentes.

No caso particular de $m = 0$, a solução é

$$v(y) = A'\ J_o(y^{1/2}) + A''\ Y_o(y^{1/2})\ , \qquad \text{III.22}$$

onde J_o e Y_o são as funções de Bessel de ordem zero, de 1ª e 2ª espécies, respectivamente.

Obtivemos a expressão para a carga $q(t)$ através da relação III.19, escrevendo com a ajuda de III.20,

$$\frac{d}{dt}\left[\ \ell n\ v(t)\right] = -\ (\rho_o/2)\ \sqrt{y}\ \ \frac{d}{d\sqrt{y}}\left[\ \ln\ v(y)\right].$$

Usamos também a relação válida para as funções de Bessel,

$$\frac{d}{d\sqrt{y}}\left[\ y^{-m/2}\ \ B_m(y^{1/2})\right] = -\ y^{-m/2}\ \ B_{m+1}(y^{1/2}),$$

ou, no caso de $m = 0$, $\left[dB_o/d\sqrt{y}\ \right] = -\ B_1$, (ref. 7).

Dessa maneira, encontramos a solução da eq. III.15 adequada às nossas condições iniciais:

$$q(t) = -\ \rho_o\ \sqrt{y}\ \left[\frac{A\ J_1(y^{1/2}) + Y_1(y^{1/2})}{A\ J_o(y^{1/2}) + Y_o(y^{1/2})}\right] \qquad \text{III.23}$$

sendo a constante $A = - Y_1(y^{1/2})/J_1(y^{1/2})$, obtida com a condição inicial $q(y_o) = 0$ onde $y_o = y(t=0) = (2/\rho_o)$. Os gráficos gerados por essa equação estão na fig. 13 e são comentados no próximo capítulo.

Conhecido o comportamento temporal da carga $q(t)$, escrevemos, com as relações III.10-13 e usando também a eq. III.18, as expressões para o campo elétrico em $x = 0$ e em $x = 1$ e para a densidade de corrente $j(t)$, válidas no intervalo $0 < t < t_1$:

$$e_o(t) = q^2(t)/2\rho_o + \exp(-\rho_o t) , \qquad \text{III.24}$$

$$e_1(t) = [\, 1 + q(t)/2\rho_o \,]\, q(t) + \exp(-\rho_o t) , \qquad \text{III.25}$$

$$j(t) = [\, q^2(t)/\rho_o + q(t) + 2\exp(-\rho_o t)]\, q(t)/2 , \qquad \text{III.26}$$

Quando $\rho_o \rightarrow \infty$, com $t > 0$, estas tres últimas equações são reduzidas a $e_o(t) = 0$, $e_1(t) = q(t)$ e $j(t) = q^2(t)/2$. Neste limite a variável $y(t)$ tende a zero e por isto as funções de Bessel podem ser aproximadas, segundo a ref. 8, pelas relações

$$J_1 \rightarrow \sqrt{y}/2 , \quad J_o \rightarrow 1 ,$$

$$Y_1 \rightarrow -2/\pi\sqrt{y} , \quad Y_o \rightarrow \ln y/\pi .$$

Com estas aproximações e a solução III.23, reproduzimos o resultado de Many e Rakavy (ref.3) para $t < t_1$:

$$q(t) = 2/(2 - t).$$

A expressão que determina o tempo de trânsito t_1, está deduzida no capítulo V.

III.e) Solução para o intervalo $t_1 < t < t_2$.

Enquanto o primeiro plano da carga injetada no tempo de emissão $t_e = 0$, flui para o eletrodo em $x = 1$, outras cargas con-

tinuam sendo emitidas pelo eletrodo na origem em quantidade controlada pela capacitância C da amostra, pela densidade de carga disponível à injeção ρ_0, e pelas cargas injetadas em tempos anteriores. Definimos o tempo t_2 como o necessário para escoar, através da amostra, toda a carga injetada no intervalo $0 < t_e < t_1$.

Many e Rakavy, no caso de $\rho_0 = \infty$, consideraram a emissão em $x = 0$ e $t_e = 0$, de um pacote de carga com uma quantidade $q = 1.0$, a máxima que o isolante é capaz de conduzir no instante inicial, que se espalha durante a sua passagem pela amostra, reagrupando a carga uniformemente em muitos planos, e definiram t_2 como o tempo de chegada ao eletrodo em $x = 1$, do último plano desse pacote. Dessa forma, eles conseguiram outra informação adicional sobre ρ_1, fazendo $t_e = 0$ na expressão III.8 (ref.3).

Na condição de ρ_0 finita, a densidade de carga em $x = 1$ para $t > t_1$, depende do tempo de emissão t_e o qual é uma constante para cada linha de fluxo porém, na cinética do processo de injeção é uma função do tempo, ou seja, $t_e(t)$ caracteriza aquela linha de fluxo que chega em $x = 1$ no tempo t.

Para superar essa dificuldade na determinação de uma expressão analítica para $\rho_1(t)$, estabelecemos uma relação entre $t_e(t)$ e t, como o fizeram Nunes de Oliveira e Leal Ferreira (ref.4).

Partimos da diferencial total do campo elétrico,

$$de(x,t) = \frac{\partial e(x,t)}{\partial x} dx + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} dt$$

e, com as equações de Poisson e da velocidade dos portadores nas linhas de fluxo, $[dx(t)/dt] = e\,[x(t),t]$, chegamos à expressão

$$\frac{de[x(t),t]}{dt} = j\,(t)\ ,$$

cuja integral no intervalo $t_e < t' < t$, é

$$e[x(t),t] - e_0[t_e(t)] = \int_{t_e}^{t} j(t')\,dt' \ .$$

Derivamos este resultado com relação a t, no ponto $x = 1$, e obtivemos

$$\left[j(t_e) - \frac{de_o(t_e)}{dt_e}\right] \frac{dt_e}{dt} = j(t) - \frac{de_1(t)}{dt}$$

e, usando as equações III.5, em $x = 1$, e III.10, com $t = t_e$, encontramos uma razão entre as correntes de condução em $x = 1$ e na origem, para a mesma linha de fluxo:

$$\frac{dt_e}{dt} = \rho_1(t)\ e_1(t)/\rho_o e_o(t_e)\ . \qquad \text{III.27}$$

Por não havermos imposto nenhuma restrição temporal em sua dedução, esta relação é válida para quaisquer tempos t e t_e, inclusive para $t < t_1$ quando ela é nula porque $t_e = 0$.

No intervalo de observação agora considerado, pela própria definição de t_2, o tempo de emissão t_e está entre 0(zero) e t_1 de tal forma que o campo elétrico na origem no instante da emissão, $e_o(t_e)$, é dado pela solução analítica do 1º tempo de trânsito, a eq. III.24.

A relação III.27 com as equações da densidade de corrente em x=1 e em x=0, III.5 e 10, mais a densidade de carga em uma linha de fluxo, III.8, e a integral da equação da corrente, III.11, foram levadas ao computador e geraram as curvas soluções no intervalo $t_1 < t < t_2$.

III.f) Solução para o intervalo $t_2 < t < t_3$.

Como vimos no parágrafo precedente, o acompanhamento do processo de injeção em tempos maiores que t_1, fica condicionado, pela falta de solução analítica da eq. III.14, ao conhecimento do comportamento do campo elétrico em $x = 0$, $e_o(t_e)$, em tempos anteriores àquele da observação.

Quando $e_o(t_e)$ é expresso analiticamente, como no ítem anterior, o resultado numérico tem boa precisão. No entanto, esta é muito prejudicada quando $e_o(t_e)$ já é o resultado de integração numérica. Neste caso o intervalo de tempo entre dois valores consecutivos de $e_o(t_e)$ é diferente do acréscimo de integração usado no

tempo presente t, isto é, no tempo em que estamos analisando o fenômeno. A fim de maximizar a precisão dos resultados é necessário selecionar entre os dados de $e_o(t_e)$ arquivados na memória do computador, aquele valor que melhor se ajuste ao tempo t_e calculado durante a integração da eq. III.27.

Foi isto o que fizemos para obter as curvas soluções no intervalo $t_2 < t < t_3$, onde t_3 é o tempo necessário para escoar através da amostra, toda a carga injetada durante o intervalo $t_1 < t_e < t_2$. Minimizamos em parte a imprecisão diminuindo substancialmente o acréscimo de integração porém, não vimos necessidade de irmos mais adiante devido ao grande volume de memória ocupada pois a precisão deveria ir além dos décimos milésimos, como podemos ver pela fig.18 no gráfico com $\rho_o = 2.5$.

Dessa forma, conseguimos acompanhar o desenvolvimento do sistema até o tempo t_3, adequando a integração das equações III.5, 8, 10, 11 e 27, as mesmas utilizadas no ítem anterior, às condições e limitações referentes a este intervalo.

III.g) O estado estacionário

Com as equações da corrente total e de Poisson na condição estacionária,

$$j_o = \rho(x)\, e(x) \quad \text{e} \quad de(x)/dx = \rho(x),$$

cancelamos a densidade de carga $\rho(x)$ e obtivemos, após a integração no intervalo $0 \leq x' \leq x$, a expressão para o campo elétrico estacionário,

$$e(x) = \left[2\, j_o x + e_o^{\circ 2} \right]^{1/2}$$

onde $e_o^{\circ} = e(0)$ é o campo estacionário na origem.

Com a condição de contorno

$$\int_0^1 e(x)\, dx = 1 ,$$

conseguimos a relação

$$\left[3\, j_o + e_o^{\circ 3} \right]^2 = \left[2\, j_o + e_o^{\circ 2} \right]^3$$

de onde tiramos a densidade de corrente estacionária, j_o, como a solução positiva da equação de 2º gráu,

$$j_o^2 + (3/2)(e_o^{\circ 2} - 3/4)\, j_o + (3/4)(e_o^{\circ} - 1)\, e_o^{\circ 3} = 0.$$

Esta equação pode ser resolvida normalmente dando j_o como função do campo em $x = 0$. Contudo, para manter a uniformidade na nossa parametrização, preferimos reescrevê-la, usando a relação $j_o = \rho_o e_o^{\circ}$, na seguinte forma,

$$e_o^{\circ 3} + (2\rho_o - 1)\, e_o^{\circ 2} + (4/3)\, \rho_o^2\, e_o^{\circ} - (3/2)\, \rho_o = 0, \qquad \text{III.28}$$

a qual, após transformada em equação diferencial de 1ª ordem em função de ρ_o e levada ao computador, gerou o gráfico da fig. 11. A partir da solução $e_o^{\circ}(\rho_o)$, a corrente é obtida pondo-se $j_o = \rho_o e_o^{\circ}(\rho_o)$.

A equação diferencial construida a partir de III.28 é

$$\frac{de_o^{\circ}}{d\rho_o} = \left[\frac{9/2 - 2\,(3\, e_o^{\circ} + 4\, \rho_o)\, e_o^{\circ}}{4\, \rho_o^2 + 3\,(3\, e_o^{\circ} + 4\rho_o - 2)\, e_o^{\circ}} \right]$$

e foi integrada com a condição $e_o^{\circ}(\rho_o = 0) = 1.0$.

O valor estacionário da carga q_o, pode ser obtido da equação geral III.14 anulando-se todos os termos com variação temporal. Fizemos assim e obtivemos

$$q_o = 2\, \rho_o \rho_1^{\circ} / (\rho_1^{\circ} + \rho_o) = 2\, \rho^* \qquad \text{III.29}$$

onde ρ^* é uma espécie de densidade de carga efetiva.

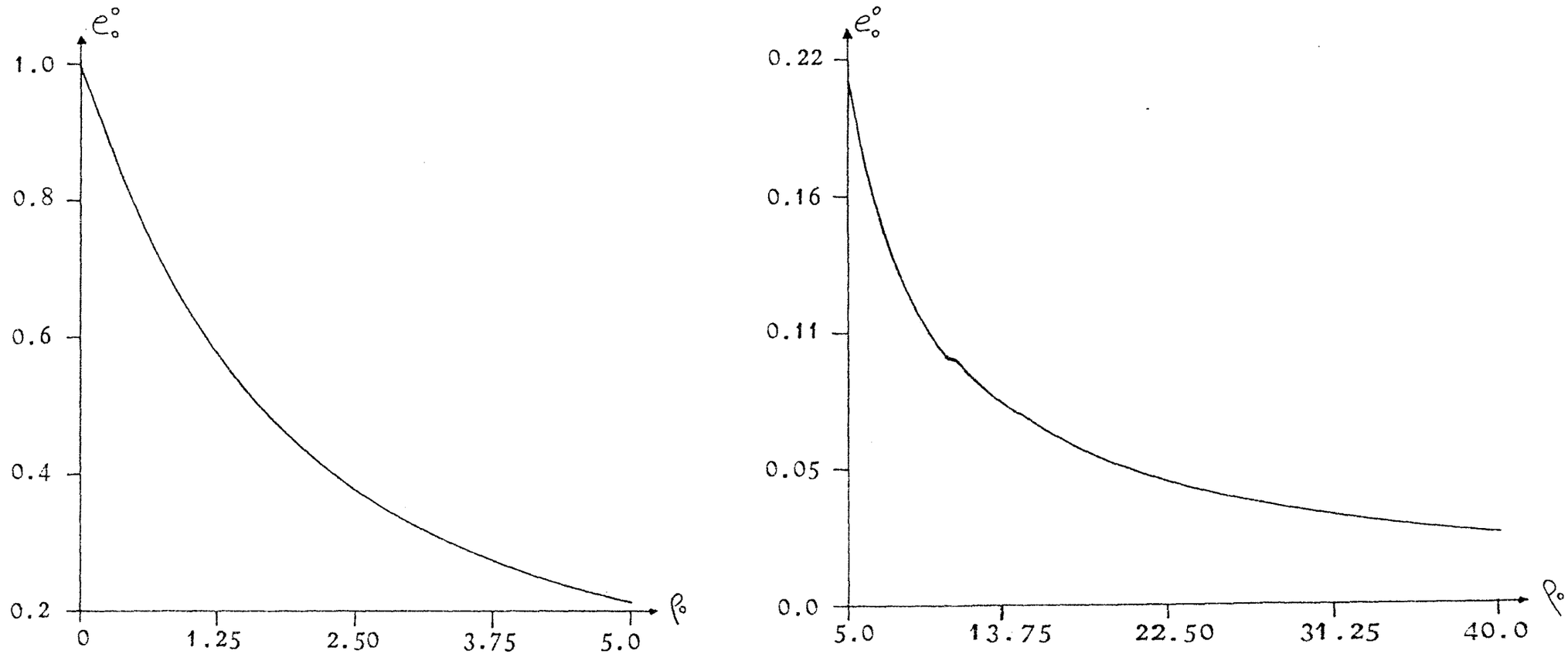


FIG.11 - Gráficos do campo elétrico estacionário em $x = 0$, e_o^o, em função da densidade de carga em $x = 0$, ρ_o.

CAPITULO IV

ANÁLISE E DISCUSSÃO DO SISTEMA TRANSIENTE

IV.a) Introdução

Com as soluções analíticas para o primeiro tempo de trânsito "t_1", mais a integração numérica descrita nos ítens III.d e III.e, construimos os gráficos das figuras de 12 a 15, usando como parâmetro a densidade de carga em $x=0$, ρ_0. Neste capítulo fazemos a análise e a discussão desses resultados dando ênfase às curvas da fig. 15, o comportamento temporal da densidade de corrente $j(t)$, que são basicamente o objetivo deste estudo.

Comentamos ainda os gráficos do campo elétrico na origem, do momento inicial à fase estacionária (fig. 12) e os da carga $q(t)$ contida na amostra durante o 1º tempo de trânsito "t_1"(fig.13).

Para auxiliar na observação dos gráficos, agrupamos na tabela 1 alguns dados de interesse concernentes às variáveis analisadas.

IV.b) Os gráficos do campo elétrico na origem, $e_0(t)$.

Os gráficos da fig. 12 mostram o comportamento do campo elétrico na origem em função do tempo, para alguns valores da densidade de carga em $x=0$, ρ_0. Elas foram obtidas com a eq. III.24 até o 1º tempo de trânsito "t_1", e com o processo discutido nas seções III.d e III.e até o tempo "t_3".

Iniciando com o valor $e_0(0) = 1.0$, quando o isolante ainda está livre de carga espacial, o campo na origem diminui tão rapidamente quanto maior é a corrente de deslocamento em $x=0$, $de_0(t)/dt$, como podemos ver pela eq. III.10,

$$\rho_0 e_0(t) = j(t) - de_0(t)/dt .$$

Aliás, durante o 1º tempo de trânsito, $e_0(t)$ é dado pela

diferença das correntes de deslocamento em $x=1$ e em $x=0$ pois nesse intervalo, a densidade de corrente é dada por $j(t) = de_1(t)/dt$. A densidade de carga na origem ρ_0, é quem determina o valor inicial de $de_0(t)/dt$, porque em $t=0$ temos $j(0)=0$ e $e_0(0)=1.0$. A menos de oscilações, esse comportamento decrescente continua até que, após o 1º tempo de trânsito, o sistema estacione sem nenhuma descontinuidade, nem mesmo na primeira derivada, como podemos comprovar novamente pela eq. III.10, válida para qualquer tempo, pois $j(t)$ e $e_0(t)$ são funções contínuas.

Para $\rho_0 \leq 1.0$, o decaimento é relativamente lento e $e_0(t)$ atinge suavemente o valor estacionário, o qual, quanto menor é ρ_0, mais próximo fica do valor inicial.

Quando ρ_0 é maior que a unidade, $e_0(t)$ decresce bruscamente e oscila antes do primeiro tempo de trânsito. Essa oscilação indica que a taxa de emissão de carga $[dq(t)/dt] = \rho_0 e_0(t)$, obtida da equação III.13 com $\rho_1 = 0$, passa por um mínimo quando $e_0(t)$ é mínimo. Como é sabido, quando $\rho_0 = \infty$ temos que $e_0(t) = 0$ para qualquer tempo. É este o valor limite para o qual tendem as curvas de $e_0(t)$ conforme ρ_0 aumenta.

IV.c) Os gráficos da carga no interior da amostra durante o 1º tempo de trânsito.

Na figura 13 estão os gráficos do comportamento temporal da carga por unidade de área $q(t)$, injetada no isolante no intervalo de tempo $0 < t < t_1$, tendo ρ_0 como parâmetro. As curvas 1 e 2 são os resultados da integração numérica das equações III.5, em $x=1$, e III.10-12 e as curvas 3, 4 e 5 foram geradas com a eq. III.23. Como em $t = 0$ a amostra não contém carga espacial, todos os gráficos com ρ_0 finito têm valor inicial nulo, de acordo com a eq. III.12,

$$q(t) = e_1(t) - e_0(t)$$

visto que $e_1(0) = e_0(0) = 1.0$. A seguir a carga cresce conforme a velocidade da frente de carga, $[dx(t)/dt] = e_1(t)$, e a taxa de emissão, $[dq(t)/dt] = \rho_0 e_0(t)$ (eq. III.13 com $\rho_1 = 0$), a qual é proporcio

-nal a ρ_0 e se comporta como o campo $e_0(t)$, como vemos.

Para ρ_0 pequena é esperado que $q(t)$ apresente comportamento linear como resulta da eq. III.13 supondo $e_0(t)$ constante, isto é, quando é constante a corrente de condução em $x=0$: $q(t)=\rho_0 e_0 t$. Pelos gráficos da fig. 13 vemos que a curva com $\rho_0=0.5$ já é quase linear e mesmo a de $\rho_0=1.0$ não se afasta muito desse comportamento. Isso nos dá alguma noção de quão pequena deve ser ρ_0 para que os efeitos de carga espacial sejam desprezíveis.

Para os valores de ρ_0 maiores que a unidade aparece uma saliência que está ligada à grande quantidade de carga injetada enquanto o campo $e_0(t)$ ainda tem valor perto da unidade, quando maior é a taxa de emissão. Essa saliência cresce com ρ_0 até o valor limite $q(0) = 1.0$ em $t = 0$, quando $\rho_0 = \infty$. Este comportamento confirma o fato já conhecido de que mesmo quando a carga na origem é infinita, a máxima que o isolante absorve em $t = 0$, é $Q_0 = C_0 V$, onde $C_0 = \epsilon/L$ é a capacitância geométrica da amostra, por unidade de área. Em $t = t_1$ a amostra contém a maior quantidade possível de carga, de acordo com o valor de ρ_0, pois durante o intervalo de tempo $0 < t < t_1$ as condições para a injeção são as mais favoráveis. Por outro lado, como observamos na fig. 13, a taxa de emissão $dq(t)/dt$, diminui consideravelmente durante o tempo t_1, ou seja, a corrente de condução na origem decresce porquanto o campo $e_0(t)$ decai no tempo. Verificamos, por exemplo para $\rho_0 = 20$, que a carga injetada até $t \simeq 0.15$ é cerca de 60% de toda aquela injetada durante o tempo $t_1 \simeq 0.8$. Observamos ainda que para $\rho_0 < 1.0$, a taxa $dq(t)/dt$ é sempre decrescente porém, para $\rho_0 > 1.0$, ela decresce até quando o campo $e_0(t)$ passa pelo primeiro mínimo, voltando a crescer até o tempo t_1, quando a carga $q(t)$ chega ao seu valor máximo.

IV.d) Os gráficos da corrente total

Estão registrados na fig. 15 os gráficos da corrente $j(t)$, da fase transiente à estacionária, com alguns valores de ρ_0. A parte dessas curvas até o 1º tempo de trânsito, foi gerada pela equação III.26 enquanto o restante foi feito por integração numérica da mes-

ma maneira que os anteriores.

Como em $t = 0$ temos $q(0) = 0$, as curvas de $j(t)$ também têm valor inicial nulo, aumentando posteriormenteaté o valor máximo em $t = t_1$, onde há uma descontinuidade na derivada de $j(t)$, evidenciada pela cúspide, seguida de uma fase anterior à estacionária, com característica distinta conforme ρ_0 seja maior ou menor que a unidade.

Para $\rho_0 < 1.0$, a fase transiente fica praticamente restrita ao 1º tempo de trânsito onde, da mesma maneira que a carga $q(t)$, a corrente deve apresentar um comportamento linear de acordo com o esperado pela teoria de campo alto. A observação das curvas com $\rho_0 < 1$ nos faz concluir que isso só é verdade quando $\rho_0 \leq 0.1$. Logo após t_1 o sistema atinge rapidamente o regime estacionário. Isto ocorre porque com ρ_0 pequena, também é pequena a taxa de injeção de carga durante o tempo t_1 e em consequência, a quantidade de carga injetada é praticamente igual àquela que o isolante é capaz de conduzir no estado estacionário.

Comprovamos o que está dito no parágrafo anterior tanto por comparação dos valores de $j(t_1)$ e $j_0 = j(t = \infty)$ relacionados na tabela 1, quanto pelo cálculo das inclinações da curva $j(t)$ na vizinhança de t_1, que passamos a expor. As inclinações diferem pela descontinuidade da densidade de carga em $x = 1.0$, a qual de zero passa a um valor finito, como a dedução a seguir mostra:

A densidade de corrente para qualquer tempo é dada por

$$j(t) = \rho_1(t)\, e_1(t) + \frac{de_1}{dt}(t) = \rho_0 e_0(t) + \frac{de_0}{dt}(t)$$

$$= \left[e_1^2(t) - e_0^2(t)\right]/2$$

de acordo com as equações III.5, em $x = 1.0$, III.10 e III.11.

Derivamos a última igualdade,

$$\frac{dj}{dt}(t) = e_1(t)\,\frac{de_1}{dt}(t) - e_0(t)\,\frac{de_0}{dt}(t) \quad ,$$

e substituimos as derivadas do campo elétrico nesta relação, pelas respectivas expressões obtidas das outras duas igualdades anterio-

res. Isso feito, encontramos

$$\frac{dj(t)}{dt} = [e_1(t) - e_o(t)]\, j(t) + \rho_o e_o^2(t) - \rho_1(t) e_1^2(t)$$

ou, também,

$$\frac{dj(t)}{dt} = [e_1(t) - e_o(t)][e_1^2(t) - e_o^2(t)]/2 +$$

$$+ \rho_o e_o(t) - \rho_1(t)\, e_1(t) \qquad \text{IV.1}$$

onde usamos $j(t) = [e_1^2(t) - e_o^2(t)]/2$.

A expressão anterior é válida para qualquer tempo contudo, quando $t < t_1$ sabemos que $\rho_1(t)$ é nula. Assim, ficamos com a inclinação da curva de $j(t)$ para $t < t_1$

$$\left.\frac{dj(t)}{dt}\right|_{t<t_1} = [e_1(t) - e_o(t)][e_1^2(t) - e_o^2(t)]/2 +$$

$$+ \rho_o e_o(t), \qquad \text{IV.2}$$

de tal forma que em $t = t_1 \pm \&$, com $\& \rightarrow 0$, obtivemos de IV.1,

$$\lim_{\& \rightarrow 0} \left[\left.\frac{dj(t)}{dt}\right|_{t_1+\&} - \left.\frac{dj(t)}{dt}\right|_{t_1-\&} \right] = - p_1(t_1)\, e_1^2(t_1) \qquad \text{IV.3}$$

sendo $\rho_1(t_1) = \rho_o [1 + \rho_o t_1]^{-1}$.

A relação IV.3 indica que a descontinuidade na inclinação das curvas de $j(t)$ observada nos gráficos da fig. 15 em $t = t_1$, é proporcional a $\rho_1(t_1)$, isto é, a descontinuidade da densidade de carga reflete-se na da inclinação da corrente em $t = t_1$. Convém dizer que se considerássemos os efeitos da corrente de difusão, a descontinuidade em pauta continuaria existindo, sendo somente suavizada.

Usando as relações IV.2 e IV.3 e os valores da tabela 1, calculamos as inclinações em $t = t_1$ da curva com $\rho_o = 0.1$ e encontra-

mos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left.\frac{dj}{dt}\right|_{t_1-\varepsilon} \simeq 9.96 \times 10^{-2} \text{ e } \lim_{\varepsilon \to 0} \left.\frac{dj}{dt}\right|_{t_1+\varepsilon} \simeq -1.5 \times 10^{-4}.$$

Este segundo resultado confirma a observação de que para $\rho_0 < 0.1$, o sistema estaciona logo após t_1.

Da eq. IV.2 vemos também que para ρ_0 finito, a inclinação inicial da corrente é dada pelo valor de ρ_0, pois $e_1(0) = e_0(0) = 1.0$. No caso limite de $\rho_0 = \infty$, "e_0" é sempre nulo, $e_1(0) = 1.0$ e a inclinação em $t=0$ é 0.5.

Para $\rho_0 > 1.0$ observamos imediatamente tres características nas curvas: o aparecimento de uma saliência durante o primeiro tempo de trânsito, o aumento da cúspide e a oscilação após t_1.

A saliência, conforme o comentário relativo à fig. 13, tem como causa a alta taxa de injeção de carga $[dq(t)/dt]$, nos primeiros instantes porquanto, de acordo com as equações III.10 e III.13, a densidade de corrente durante o 1º tempo de trânsito, quando $\rho_1 = 0$, é dada por

$$j(t) = \frac{dq(t)}{dt} + \frac{de_0(t)}{dt}, \qquad \text{IV.4}$$

sendo que a corrente de deslocamento na origem é negativa, como vimos nos gráficos da fig. 12. Essa saliência tende para o valor limite $j(0) = 0.5$ quando $\rho_0 = \infty$, o qual, segundo Many e Rakavy(ref.3), é o valor médio da densidade de corrente em $t = 0$. Ilustramos este fato com as curvas da fig. 14 com $\rho_0 = 20$ e 500, obtidas por integração numérica das equações III.5, em $x = 1.0$ e com $\rho_1 = 0$, III.10 e III.11.

Conforme podemos ver pela expressão IV.4, outra consequência da alta taxa de injeção de carga nos momentos iniciais, quando $e_0(t)$ ainda é grande, é o pico cada vez mais alto que a corrente $j(t)$ atinge em $t = t_1$. Isso porque $[dq(t)/dt]$ nunca é nula ou negativa, significando que a corrente é sempre crescente nesse intervalo de tempo. Naturalmente esse processo também tem um limite superior quando $\rho_0 = \infty$ e, com $t_1 = 0.787$, $j(t_1) \simeq 1.36$.

As oscilações da densidade de corrente após o 1º tempo de trânsito, ficam mais evidentes quanto maior é a densidade de carga disponível à injeção, ρ_0. Essas oscilações podem ser compreendidas da

seguinte forma: quando a frente de carga chega ao eletrodo em x=1, inicia-se o processo de escoamento da carga contida no isolante cuja taxa é maior do que a de emissão, pois o campo em $x = 1$ é maior do que em $x = 0$. Essa diferença é dada pela eq. III.13

$$\frac{dq(t)}{dt} = \rho_0 e_0(t) - \rho_1(t)\, e_1(t),$$

e é menor que zero para tempos imediatamente após t_1, isto é, a corrente de condução em $x = 1$ é maior do que na origem, $\rho_1 e_1 > \rho_0 e_0$. Para exemplificar, calculamos o valor de $[dq(t)/dt]$ em $t = t_1$ para a curva com $\rho_0 = 12$, usando os dados da tabela 1, e encontramos $\rho_0 e_0 \simeq 1.15$, $\rho_1 e_1 \simeq 1.82$ e $[dq/dt] \simeq -0.67$.

Enquanto prevalece essa diferença a favor da taxa de escoamento, diminui a densidade de carga no interior do isolante. Evidentemente, isso não acontece de forma instantânea mas, se propaga por toda a espessura da amostra como uma onda longitudinal, no sentido do eletrodo emissor. Quando a informação do decréscimo na densidade de carga chega em $x = 0$, a taxa de emissão, $\rho_0 e_0(t)$, que havia sido reduzida durante o tempo t_1, torna a aumentar gradativamente, refletindo a onda no sentido do eletrodo em $x = 1$, comunicando o acréscimo na densidade de carga. Naturalmente, como a carga está saindo continuamente da amostra, o sistema não consegue restaurar a situação existente em $t = t_1$ e encaminha-se com a dissipação dessa onda de fluxo e refluxo da densidade de carga, à sua configuração de equilíbrio.

É por isso que a corrente diminui até um mínimo com uma certa amplitude abaixo do valor de equilíbrio, onde $[dq/dt] = 0$, cresce a seguir atingindo um máximo acima desse ponto com amplitude bem menor que a anterior, depois volta a decrescer e assim, prossegue em movimento oscilatório amortecido até que se estabeleça o regime estacionário.

A fig. 17 mostra os detalhes ampliados dessas oscilações para ρ_0 finita, antes e depois do tempo t_2, sobre as quais apresentamos um estudo teórico no capítulo V. Embora essas curvas estejam prejudicadas pela falta de precisão, ilustram bem as oscilações amortecidas da corrente em torno do valor estacionário (linha tracejada), até mesmo para tempos maiores que aqueles apresentados por Nunes de Oliveira e Leal Ferreira (ref.4), no caso de $\rho_0 = \infty$.

ρ_0	t_1	$e_0(t_1)$	$e_1(t_1)$	$j(t_1)$	j_0	$\rho_1(t_1)$	$q(t_1)$	t_2	t_3
0.1	0.984	0.952	1.047	0.095	0.095	0.091	0.095	1.984	2.984
0.5	0.940	0.784	1.188	0.396	0.393	0.340	0.404	1.95[illegible]	2.960
1.0	0.905	0.630	1.301	0.648	0.633	0.525	0.671	1.944	2.983
2.5	0.855	0.361	1.465	1.008	0.940	0.797	1.104	1.971	3.084
5.0	0.825	0.200	1.554	1.188	1.061	0.976	1.354	2.008	3.196
7.5	0.813	0.142	1.587	1.250	1.094	1.057	1.445	2.026	3.250
12.0	0.803	0.096	1.611	1.294	1.112	1.128	1.515	2.044	3.304

Tabela 1 : Alguns valores de interesse das grandezas pertinentes ao problema transiente.

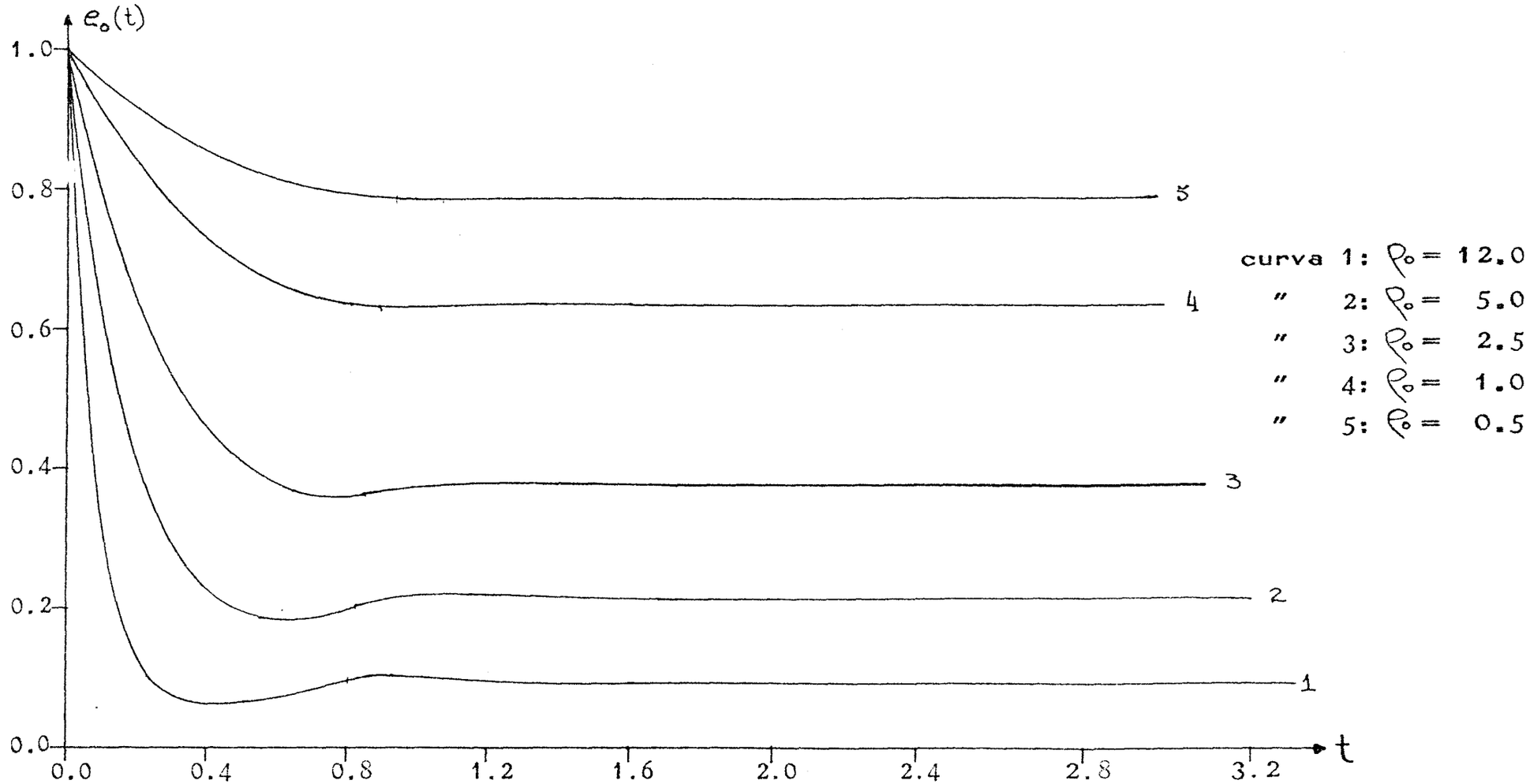
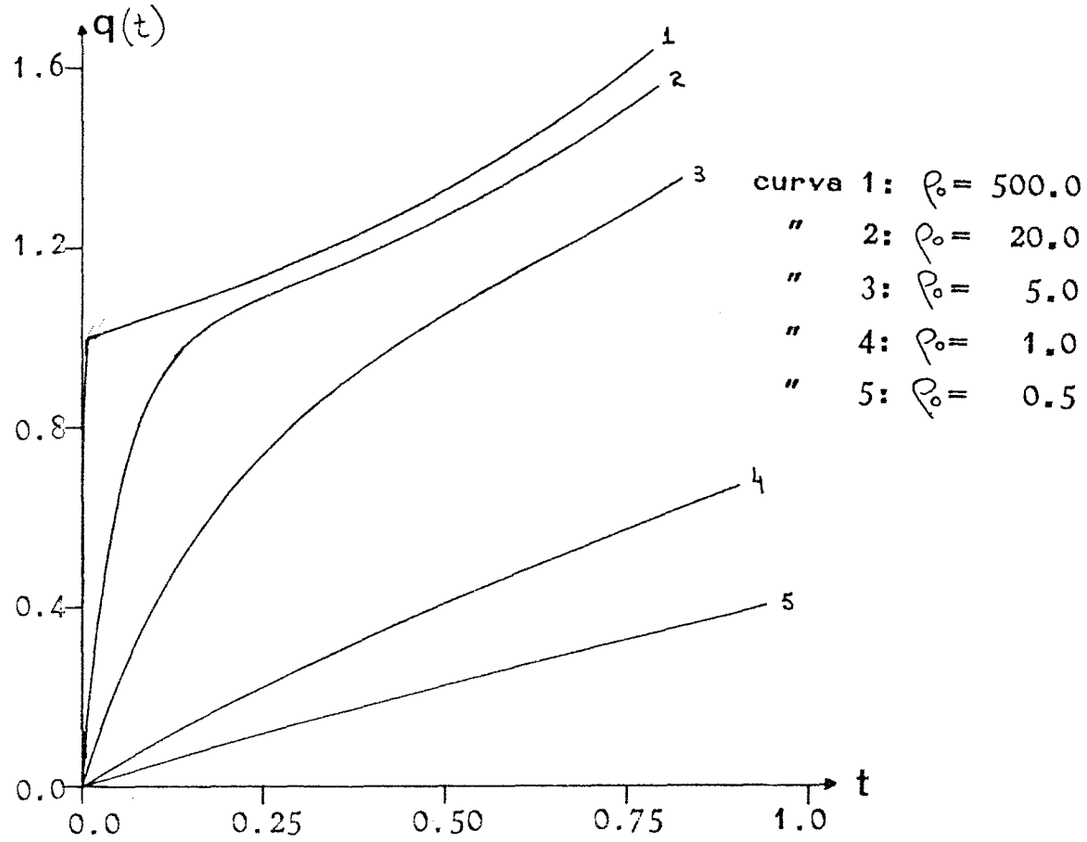


FIG.12 - Gráficos do campo elétrico em $x=0$, $e_o(t)$, em função do tempo t, durante 3 tempos de trânsito.



FIG;13 - Gráficos da carga q(t) em função do tempo t, durante o 1º tempo de trânsito com os valores de ρ_0 indicados na figura.

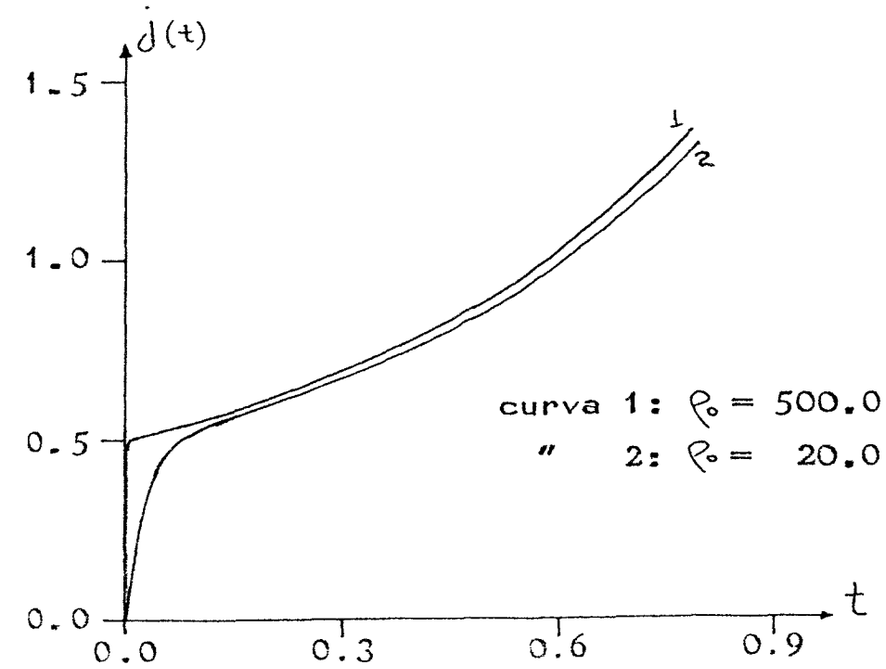


FIG.14 - Gráficos da densidade de corrente j(t) em função do tempo t, durante o 1º tempo de trânsito com os valores de p enumerados na figura.

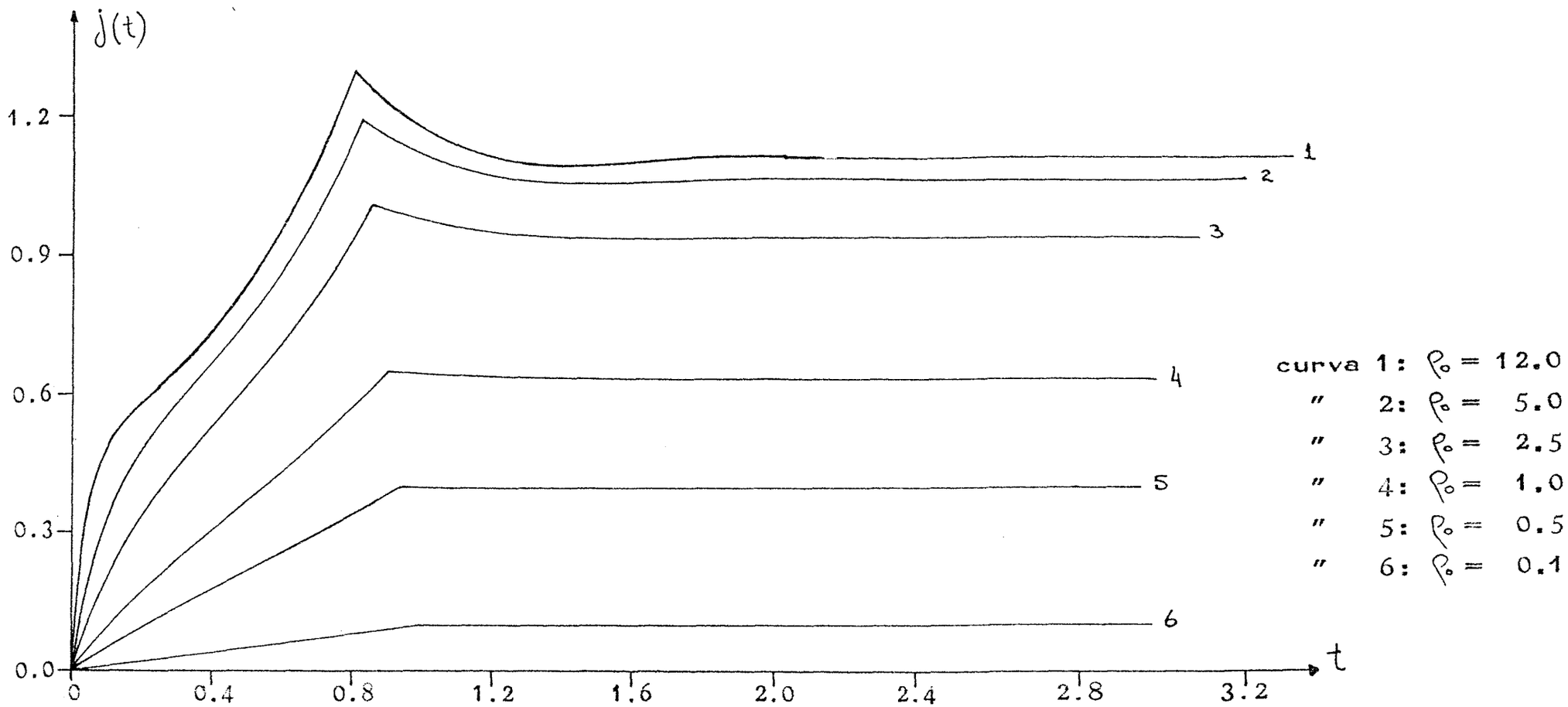


FIG.15 - Gráficos da densidade de corrente $j(t)$ em função do tempo t, durante 3 tempos de trânsito com os valores ρ_0 indicados na figura.

CAPITULO V

ALGUNS EXERCÍCIOS

V.a) Introdução

Mais como exercício complementar do estudo da corrente transiente em isolantes perfeitos, do que por qualquer possível novidade advinda das soluções encontradas, tratamos neste último capítulo de quatro tópicos: as linhas de fluxo, a distribuição espacial da densidade de carga, o primeiro tempo de trânsito t_1 e os modos de oscilação da corrente $j(t)$ em torno do valor estacionário.

V.b) As linhas de fluxo.

A dependência temporal do deslocamento dos planos de carga no isolante é obtida com a integração da equação diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = e[x(t),t] \qquad \text{V.1}$$

contanto que a expressão para o campo elétrico para as linhas de fluxo seja conhecida.

No problema aqui estudado temos solução analítica para o campo no intervalo $0 < t < t_1$, dada pelas equações III.24 e 25 porém, válida somente nos extremos do isolante, em $x = 0$ e em $x = 1$. Determinamos o seu comportamento espacial em uma linha de fluxo, calculando-o, como fizeram Nunes de Oliveira e Leal Ferreira (ref.4), para um plano arbitrário de carga na posição x conforme mostra a fig. 16.

Integrando a equação de Poisson no intervalo $x \leq x' \leq 1$,

$$e_1(t) - e\,[x(t),t] = \int_x^1 \rho^*(x',t)\,dx' = q^*(t) \qquad \text{V.2}$$

onde ρ^* é a densidade da carga contida na região $x \leq x' \leq s$, eles impuseram que enquanto $t < t_1$, a carga q^* é constante, ou seja, a corrente de condução em $x = 1$, é nula.

Desse modo, escreveram

$$e[x(t),t] = e_1(t) + C \qquad \text{V.3}$$

isto é, o campo em qualquer linha de fluxo difere por uma constante daquele em $x = 1$, desde que a corrente de condução seja nula neste ponto.

Como a integral da equação de Poisson por toda a espessura da amostra, $0 \leq x \leq 1$, resulta em $e_1(t) = q(t) + e_o(t)$, com a condição inicial $e[x(t_e),t_e] = e_o(t_e)$, determinamos que $C = -q(t_e)$, consonante com a eq. V.2 pois q^* foi emitida em tempos anteriores ao da emissão do plano na posição x.

As relações V.1 e V.3 resultaram na seguinte expressão para as linhas de fluxo,

$$x(t) = \int_{t_e}^{t} [\, e_o(t) + q(t) - q(t_e)]\, dt \qquad \text{V.4}$$

com $x(t_e) = 0$ e $t_e < t < t_1$.

Fizemos esta integral usando as relações III.13, com $\rho_1 = 0$, $\rho_o e_o(t) = [dq(t)/dt]$ e III.19, $q(t) = -2 \frac{d}{dt} [\ln v(t)]$, e encontramos

$$x(t) = [q(t)/\rho_o] - 2 \ln [\, v(t)/v(t_e)] - [\, t - t_e + (1/\rho_o)]\, q(t_e) \qquad \text{V.5}$$

sendo $\dfrac{v(t)}{v(t_e)} = \dfrac{A\ J_o(y^{1/2}) + Y_o(y^{1/2})}{A\ J_o(y_e^{1/2}) + Y_o(y_e^{1/2})}$, conforme a expressão III.22

com $y_e = (2/\rho_o) \exp(-\rho_o t_e)$.

Quando $\rho_o \rightarrow \infty$, a solução V.5 reproduz aquela da ref.4,

$$x(t) = -2 \ln \left[(2 - t)/(2 - t_e)\right] - 2(t - t_e)/(2 - t_e),$$

pois $A \simeq (2\rho_o/\pi)$, $[v(t)/v(t_e)] \simeq (2 - t)/(2 - t_e)$ e $q(t_e) \simeq 2/(2 - t_e)$, de acordo com as funções de Bessel para $y \longrightarrow 0$ escritas após a eq. III.26.

Notamos que quando $t_e = 0$, a constante $q(t_e)$ só não é nula no limite de $\rho_o = \infty$, conforme mostra a fig. 13.

V.c) A distribuição espacial da densidade de carga.

Ainda são Nunes de Oliveira e Leal Ferreira (ref.4) os que constroem uma expressão para a distribuição espacial da densidade de carga no isolante. Nós fizemos o mesmo combinando a relação III.8,

$$\rho[x(t),t] = \left[t - t_e + (1/\rho_o) \right]^{-1},$$

com a eq. V.5 e encontramos

$$x(\rho,t) = [q(t)/\rho_o] - 2 \ln [v(t)/v(\rho)] - [q(t_e)/\rho(x,t)] \qquad \text{V.6}$$

onde substituimos $t_e = t + (1/\rho_o) - [1/\rho(x,t)]$.

Este resultado dá o perfil espacial da densidade de carga emitida no intervalo $0 \leq t_e < t_1$. Na fig. 17 estão os gráficos da eq. V.6 para $\rho_o = 1.0$, 2.5, 7.5 e 12.0 mostrando alguns instantâneos do avanço da distribuição em direção ao eletrodo em $x = 1$.

Comparando as curvas de $\rho_o = 1.0$ e 2.5 com as de $\rho_o = 7.5$ e 12.0 vemos que nestas a distribuição apresenta uma queda abrupta ainda nas proximidades da origem e, conforme a frente de carga se desloca em direção ao eletrodo em $x = 1$, tende a um valor constante, o que não se observa nas duas primeiras onde a distribuição lentamente sempre decresce. Ora, vimos no cap. IV, na discussão da fig.13, que nos instantes iniciais do processo de injeção a quantidade de carga injetada é muito grande e é maior quanto maior for ρ_o. Esta informação mais a observação feita aqui parecem indicar a formação de um pacote de carga que durante o seu trânsito através da amostra, sofre maior ou menor espalhamento de acordo com a quantidade de carga nele presente.

V.d) O primeiro tempo de trânsito t_1.

Sendo, por definição, o tempo durante o qual a primeira frente de carga injetada atravessa toda a amostra, determinamos a expressão para t_1 fazendo $t_e = 0$ e $x = 1$ na equação V.5 e ficamos com a relação transcendental

$$\rho_0 = q(t_1) - 2\,\rho_0 \ln\left[v(t_1)/v(0)\right] \qquad \text{V.7}$$

que inclui o caso particular de $\rho_0 = \infty$, $t_1 = 2\left[1 - \exp(-1/2)\right] \simeq 0.787$, segundo a ref. 3.

V.e) Os modos oscilatórios.

Já foi observado o comportamento oscilatório amortecido da corrente em isolantes enquanto o sistema tende ao equilíbrio eletrodinâmico. Muito interessante é a análise feita por Schilling e Schachter (ref.6) sobre os resultados teóricos de Many e Rakavy (ref.3). Usufruindo essa idéia, calculamos os modos de oscilação da corrente total para este problema, partindo das equações III.5 e 10,

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} + \rho(x,t)\right] e(x,t) = j(t)\,, \\ &\left[\frac{d}{dt} + \rho_0\right] e_0(t) = j(t) \end{aligned}\right\} \text{V.8}$$

e da perturbação do sistema em torno do equilíbrio, que pode ser expressa pela expansão das variáveis do problema em série de potências de um parâmetro "h" arbitrário, definido no intervalo de zero a um (1),

$$\left.\begin{aligned} j(t) &= j_0 + h\, j^{(1)}(t) + h^2\, j^{(2)}(t) + \ldots \\ e(x,t) &= e\,(x) + h\, e^{(1)}(x,t) + h^2\, e^{(2)}(x,t) + \ldots \\ \rho(x,t) &= \rho\,(x) + h\, \rho^{(1)}(x,t) + h^2\, \rho^{(2)}(x,t) + \ldots \\ e_0(t) &= e_0^0 + h\, e^{(1)}(t) + h^2\, e^{(2)}(t) + \ldots \end{aligned}\right\} \text{V.9}$$

onde os sobreíndices (n) significam ordem de perturbação.

Essa expansão é feita supondo que as séries sejam convergentes, embora este detalhe fique obscuro do ponto de vista matemático.

Com os sistemas V.8 e V.9 montamos as relações até a perturbação de 1ª ordem, que é a de interesse:

$$h^0: \quad j_0 = \rho(x)\, e(x) = \rho_0 e_0 \qquad \text{V.10}$$

$$h^1: \quad \frac{\partial e^{(1)}(x,t)}{\partial t} + \rho(x)\, e^{(1)}(x,t) + \rho^{(1)}(x,t)\, e(x) =$$

$$= \frac{de_0^{(1)}(t)}{dt} + \rho_0 e_0^{(1)}(t) = j^{(1)}(t)\,. \qquad \text{V.11}$$

A equação de Poisson e as condições iniciais e de contorno tomam as seguintes formas:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial e^{(n)}(x,t)}{\partial x} = \rho^{(n)}(x,t) \\ &e^{(n)}(x,0) = e_0^{(n)}(0) = \delta_{o,n} \\ &e^{(n)}(0,t) = e_0^{(n)}(t) \\ &\int_0^1 e^{(n)}(x,t)\, dx = \delta_{o,n} \end{aligned}\right\} \text{V.12}$$

sendo $\delta_{o,n}$ a delta de Kronecker e $n = 0, 1, 2, \ldots$

Enquanto as relações V.10 representam o próprio estado estacionário do sistema, o que já é conhecido, as V.11 contém as informações sobre o seu comportamento transiente um pouco antes de atingir o equilíbrio.

Substituindo $\rho^{(1)}(x,t)$ da equação de Poisson na primeira expressão de V.11, ficamos com uma equação diferencial parcial de 1ª ordem, linear e não homogênea,

$$\frac{\partial e^{(1)}(x,t)}{\partial t} + e(x)\, \frac{\partial e^{(1)}(x,t)}{\partial x} + \rho(x)\, e^{(1)}(x,t) = j^{(1)}(t)\,,$$

cuja solução formal nem tentamos calcular.

Por estarmos interessados nas frequências de oscilação do sistema seguimos os mesmos passos da ref. 6, supondo na vizinhança do equilíbrio, um comportamento temporal do tipo amortecido,

$$\left.\begin{aligned} j^{(1)}(t) &= j^{(1)} \exp(-wt) \\ e^{(1)}(x,t) &= e^{(1)}(x) \exp(-wt) \\ e_0^{(1)}(t) &= e_0^{(1)} \exp(-wt) \end{aligned}\right\} \quad V.13$$

com o parâmetro adimensional $w = t_0 w'$, com $t_0 = L^2/\mu V$ e onde w' é a frequência de oscilação do sistema.

Assim, transformamos V.11 em

$$\frac{de^{(1)}(x)}{dx} + [\, j_0/e\,(x) - w\,] \frac{e^{(1)}(x)}{e\,(x)} = j^{(1)}/e\,(x)\,,$$

$$j^{(1)} = (\rho_0 - w)\, e_0^{(1)}\,. \qquad V.14$$

Fazendo a mudança de variável $e\,(x) = \left[\, 2\, j_0 x + e_0^2 \,\right]^{1/2}$, a equação diferencial de V.14 ficou sendo

$$\frac{de^{(1)}(x)}{de} + [\, 1/e - w/j_0\,]\; e^{(1)}(x) = j^{(1)}/j_0\,,$$

cuja solução é

$$e^{(1)}(x) = (C/e\,) \exp[(w/j_0)\, e\,] - (j_0 j^{(1)}/w^2 e\,)[1 + (w/j_0)\, e\,] \qquad V.15$$

onde $C = \dfrac{\rho_0\, j_0\, j^{(1)}}{(\rho_0 - w)\, w^2} \exp(-w/\rho_0)$ foi determinada com a condição de contorno $e^{(1)}(0) = e_0^{(1)}$.

Quando fazemos $\rho_0 \rightarrow \infty$ em V.15, reproduzimos a equação da ref. 6:

$$e^{(1)}(x) = (3\, j^{(1)}/4w^2)\; x^{-1/2} \Big[\exp[(4w/3)\, x^{1/2}\,] - [1 + (4w/3)\, x^{1/2}\,]\Big].$$

Para determinarmos os modos característicos "w" do sistema, precisamos encontrar a equação modal usando a condição de contorno $\int_0^1 e^{(1)}(x)\, dx = 0$, pois aqui $n = 1$, com a mudança de variável anterior, $dx = (e\ /j_o)\ de$.

Dessa maneira, após a integração, ficamos com

$$(j_o/w^3)\left\{ \frac{\rho_o}{(\rho_o - w)}\left[1 - \exp\left[(w/j_o)(e_1^o - e_o^o)\right]\right] + (w/j_o)(e_1^o - e_o^o) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,(w/j_o)^2 \left[(e_1^o - e_o^o)^2 - 2\, e_o^o\, (e_1^o - e_o^o)\right]\right\} = 0. \qquad \text{V.16}$$

Denominando $W = (q_o/j_o)\ w$, e lembrando que $q_o = e_1^o - e_o^o$ fizemos a mudança de variável em V.16 que tomou a seguinte forma:

$$\frac{1}{(1 - AW)\ W^3}\left[2(1 - \exp W) + 2\ W + (1 - 4A)\ W^2 - (1 - 2A)\ A\ W^3\right] = 0\ , \qquad \text{V.17}$$

sendo $A = e_o^o/q_o$. Neste resultado observamos que $W \neq 0,\ (1/A)$.

Como as raízes da eq. V.17 dão os modos de oscilação do sistema, a reescrevemos

$$2\ (1 - \exp W) = (1 - 2A)A\ W^3 - (1 - 4A)\ W^2 - 2\ W \qquad \text{V.18}$$

e verificamos por método gráfico, que a única raiz real, $W = 0$, é proibida. Procuramos, então, as soluções complexas escrevendo

$$W = W_r + i\ W_i$$

e substituimos em V.18 com o que obtivemos as equações

$$(1 - 2A)A\ W_r^3 - (1 - 4A)\ W_r^2 - \left[2 + 3(1 - 2A)A\ W_i^2\right] W_r =$$

$$= 2\left[1 - \cos(W_i)\ \exp(W_r)\right] - (1 - 4A)\ W_i^2 \qquad \text{V.19}$$

$$3(1 - 2A)\, W_r^2 - 2(1 - 4A)\, W_r =$$

$$= -2\,\frac{\operatorname{sen}(W_i)}{W_i}\,\exp(W_r) + W_i^2 + 2\,. \qquad \text{V.20}$$

Com o computador determinamos as soluções simultâneas destas duas equações para o modo principal de oscilação, para alguns valores do parâmetro ρ_0:

ρ_0	W_r	W_i
1.0	3.06	3.05
7.5	3.43	7.37
10.0	3.47	7.61
12.0	3.50	7.74
20.0	3.59	8.00
∞	3.85	8.40

Os valores com $\rho_0 = \infty$ concordam com aqueles obtidos por Schilling e Schachter (ref.6).

Embora sem muita precisão, conforme o comentário no último ítem do cap. III, a fig. 18 mostra detalhes das oscilações da corrente em torno do valor de equilíbrio para alguns valores de ρ_0. Através de dois deles, $\rho_0 = 7.5$ e 12.0, conferimos os resultados obtidos com as equações V.19 e 20 da seguinte forma:

Usando as relações para a frequência de oscilação $W_i = 2\pi/\tau$, e para o coeficiente de amortecimento $W_r = \ln(j_1/j_2)/(t_2 - t_1)$, onde τ é o período de oscilação, j_1 e j_2 são os valores da corrente nos tempos t_1 e t_2 quaisquer, medimos com régua e esquadro, os valores de τ, j_1, j_2, t_1 e t_2 em cópias ampliadas dos gráficos da fig. 18. Naqueles com $\rho_0 = 7.5$ e 12.0 encontramos boa concordância com os valores calculados acima, principalmente para W_i.

Um fato interessante está na observação de que a frequência de oscilação W_i cresce no sentido das curvas com maior ρ_0, significando, é claro, que o período de oscilação diminui. Como o 1º tempo de trânsito decresce no mesmo sentido, ou seja, maior ρ_0 menor o 1º tempo de trânsito, isso confirma a assertiva de Many e Ra-

kavy de que o período de oscilação é da mesma ordem do 1º tempo de trânsito.(ref.3)

V.f) Conclusão.

A imposição de densidade de carga constante no eletrodo injetor permitiu-nos equacionar e desenvolver uma solução analítica para o 1º tempo de trânsito e, através de métodos numéricos, acompanhar o processo de injeção monopolar até o 3º tempo de trânsito.

A não ser a obtenção da solução analítica, os resultados encontrados não revelam fatos novos além do que já é conhecido e esperado. A novidade talvez esteja em se ter à mão um estudo basicamente completo sobre o fenômeno transiente de carga livre em isolantes pois, como vimos no cap. IV, foi possível obter gráficos que mostram como o sistema se comporta desde a fase linear, com $\rho_0 < 1$, até àquele regime que já se aproxima do caso Many-Rakavy.

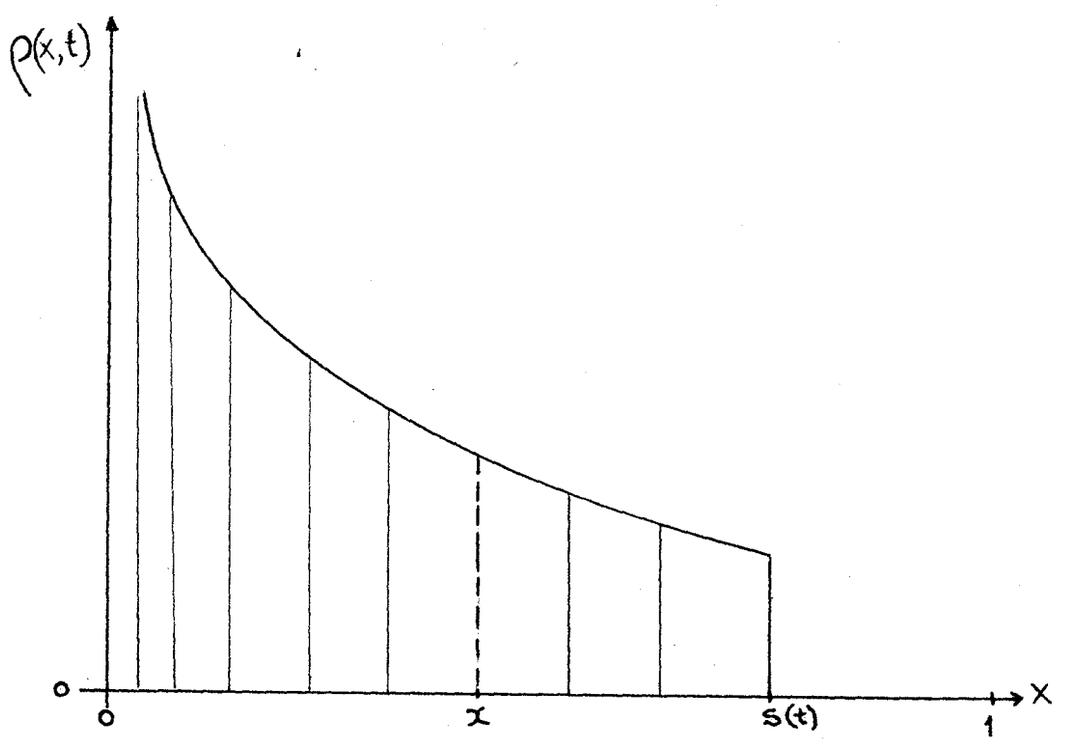


FIG.16 - Distribuição unidimensional arbitrária da densidade de carga em $0 \leq x \leq 1$, para um tempo $t < t_1$. A frente $s(t)$ é o primeiro plano de carga e o plano em x é o de interesse.

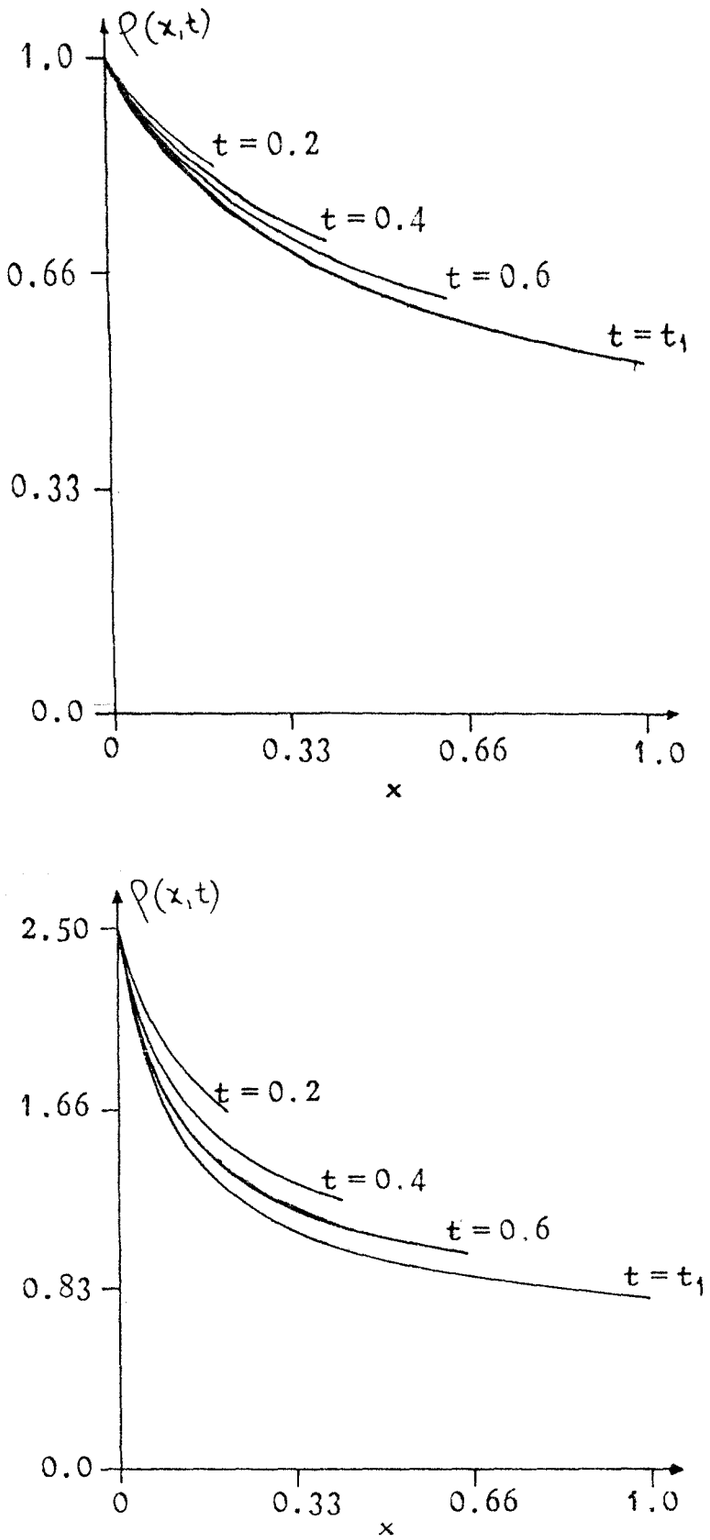
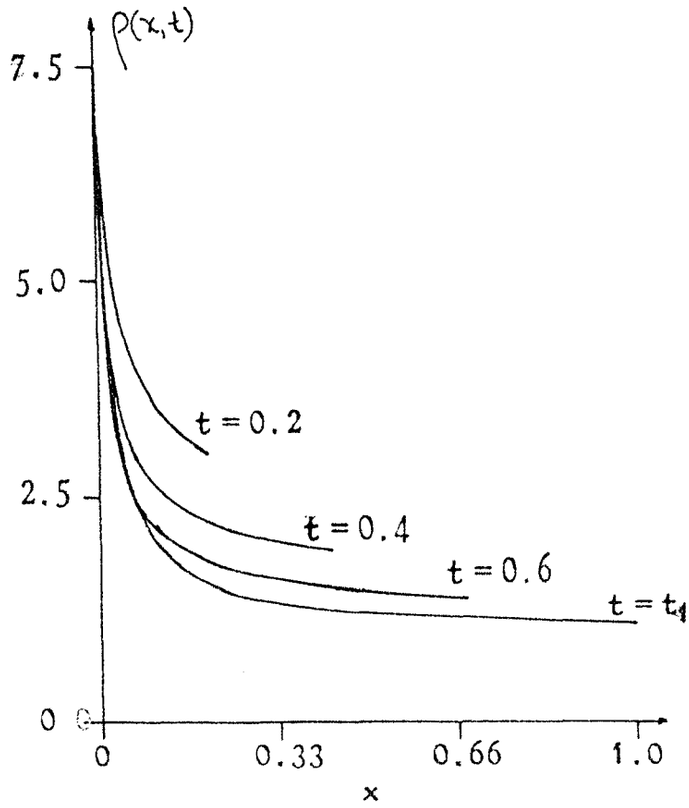


FIG.17A - Distribuição unidimensional transiente da densidade de carga no interior do isolante para $t < t_1$ e com $\rho_0 = 1.0$ (no alto) e $\rho_0 = 2.5$ (embaixo).



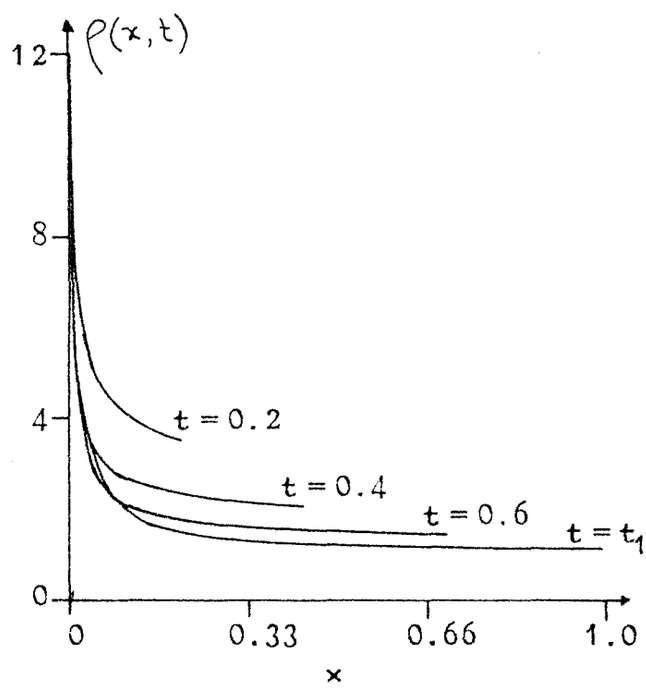


FIG. 17B- Distribuição unidimensional transiente da densidade de carga no interior do isolante para $t < t_1$ e com $\rho_0 = 7.5$ (no alto) e $\rho_0 = 12$ (embaixo).

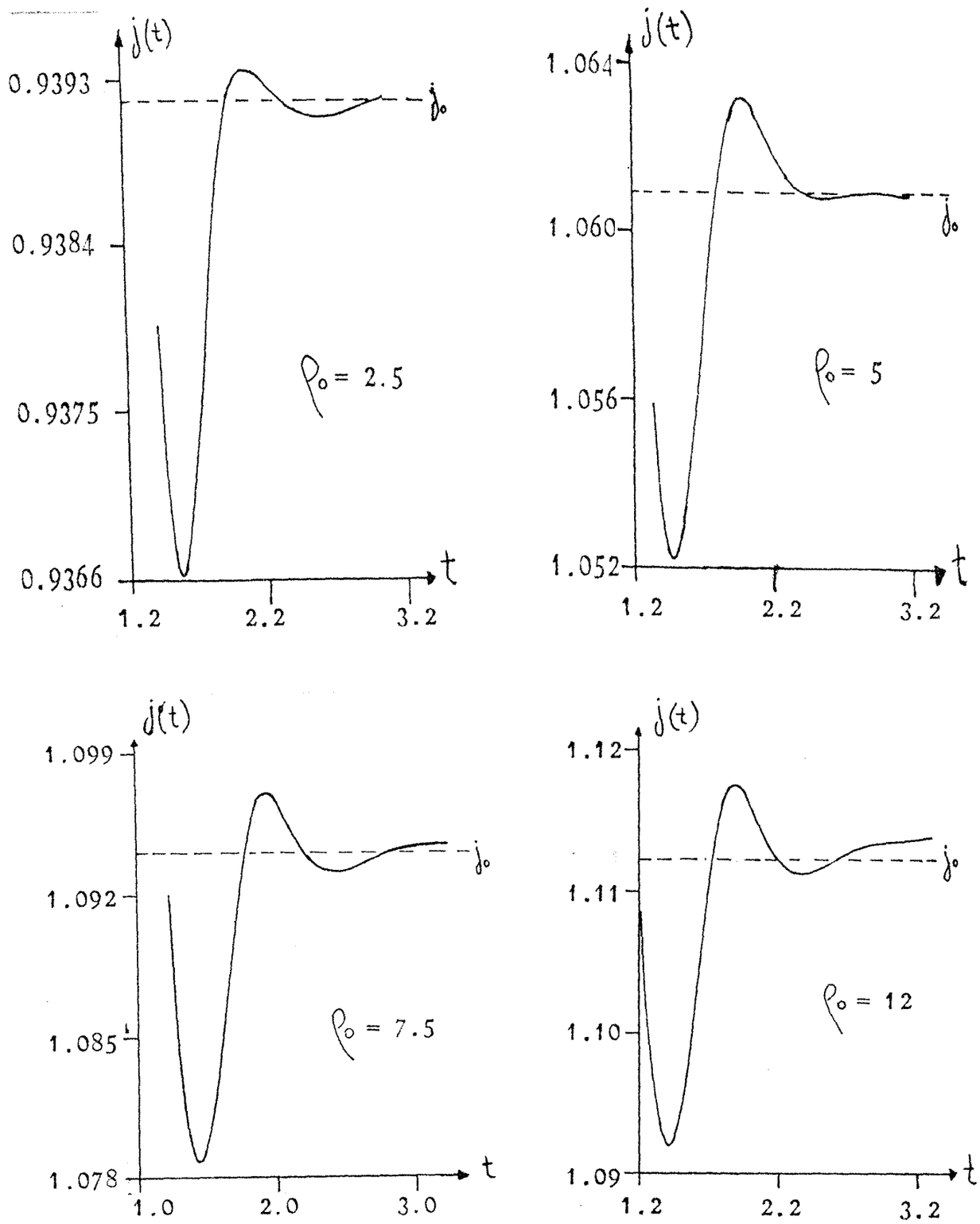


FIG. 18 - Detalhes das oscilações da corrente antes e depois do tempo t_2, com ρ_0 indicado em cada gráfico. A linha tracejada representa a corrente estacionária.

APÊNDICE A

Definição dos símbolos usados neste trabalho:

J = densidade de corrente em unidades reais.

j = " " admensional.

j_o = " " " estacionária.

E = campo elétrico em unidades reais.

e = " " admensional.

e_1 = " " " em $x = 1$.

e_o = " " " em $x = 0$.

$\overset{o}{e}_1$ = " " " estacionário em $x = 1$.

$\overset{o}{e}_o$ = " " " " $x = 0$.

p' = densidade de carga em unidades reais.

p = " " admensional

p_1 = " " " em $x = 1$.

p_o = " " " em $x = 0$.

$\overset{o}{p}_1$ = " " " estacionária em $x = 1$.

t' = tempo em unidades reais

t = " admensional

t_o = tempo de trânsito de carga livre.

t_e = " da emissão da carga pelo eletrodo.

X = posição linear em unidades reais.

x = " " admensional.

L = espessura da amostra.

μ = mobilidade dos portadores de carga.

ϵ = permissividade do material

C_o = capacitância geométrica por unidade de área.

V = voltagem aplicada em unidades reais.

v = " " admensional

(cont. apêndice)

Q = carga por área em unidades reais

q = " " admensional

q_0 = " " " estacionária

w' = frequência de oscilação em unidades reais

w = " " admensional

k = densidade de carga em $x = 0$ em unidades reais

K = " " " admensional

g = razão de geração de pares de carga

a = coeficiente de recombinação

R E F E R Ê N C I A S

1 - J.Mort, F.W.Schmidlin e A.I.Lakatos

J.of Appl. Phys. 42, 5761 (1971)

2 - B. Gross, R. M. Faria e G. F. Leal Ferreira

J.of Appl. Phys. 52, 571 (1981)

3 - A. Many e G. Rakavy

Phys. Rev. 126, 1980 (1962)

4 - L. Nunes de Oliveira e G. F. Leal Ferreira

J. of Electrostatics 1, 371 (1975)

5 - S. Z. Weisz, A. Cobas, S. Trester e A. Many

J. of Appl. Phys. 39, 2296 (1968)

6 - R. B. Schilling e H. Schachter

J. of Appl. Phys. 38, 1643 (1967)

7 - J. Mathws e R. L. Walker

Mathematical Methods of Physics

2ª Edição, W. A. Benjamin, Inc.

8 - I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik

Table of Integrals, Series and Products

9 - Harold T. Davis

Introduction to Nonlinear Differential

and Integrals equations.

Dover Publications, Inc.