I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO E
EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSITIVAS DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO
PELO MÉTODO TOPOLÓGICO DE WAŻEWSKI

Antonio Marcos Vila

Class. -

T

Cutt. -

V 6

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO E
EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSITIVAS DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO
PELO MÉTODO TOPOLÓGICO DE WAŻEWSKI

DEDALUS - Acervo - ICMSC

Antonio Marcos Vila

Class. -	T
Cutt. -	V 695a
Tombo -	21 T824

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Car-
los, da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Doutor
em Ciências (Matemática)

SÃO CARLOS/1983

737001

SUMMARY

Our objective in this work is to consider three problems related to retarded functional differential equations, using ideas and results mainly contained in recent Rybakowski's papers.

First, we are interested in the search of positive solutions for a certain class of retarded functional differential equations. For this, we use an argument closely related to the Ważewski's Principle, but we don't employ Rybakowski's results in a direct way.

Secondly, we investigate the existence of bounded solutions, whose derivatives are of exponential growth at infinity, of retarded functional differential of continuous type as:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a(t)y + b(t)x(t-r) + f(t, x_t, y_t) \end{cases}$$

and for which we don't require the property of uniqueness of solutions.

Third, we study an asymptotic relationship between the solutions of two retarded functional differential equations of Caratheodory type such as:

$$\dot{y} = A(t)y(t) + B(t)y(t-r) + f(t, y_t)$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) + f(t, x_t) + g(t, x_t),$$

where $A(t) = \text{diag}[a_i(t)]_{n \times n}$ and $B(t) = [b_{ij}(t)]_{n \times n}$.

AGRADECIMENTOS

Ao longo do tempo dedicado à realização deste trabalho, contei sempre com uma orientação serena, associada a constantes palavras de encorajamento, do Professor Antonio Fernandes Izê, a quem expresso aqui a minha profunda gratidão.

A amizade e o desprendimento de familiares, colegas e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, constituíram um suporte importante à elaboração do presente trabalho, pelo que, a eles destino também os meus agradecimentos.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

À Vera, Cristiane, Fabiano
e Guilherme

I N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I	
PRELIMINARES	1
§ 1. Fatos Básicos sobre Equações Diferenciais do Tipo Retardado	1
§ 2. O Método Topológico de Ważewski	9
CAPÍTULO II	
PESQUISA DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CERTA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO	21
§ 1. Introdução	21
§ 2. Soluções Positivas para uma Certa Classe de Equações Diferenciais Retardadas	21
§ 3. Exemplo	29
CAPÍTULO III	
COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO DE SEGUNDA ORDEM NÃO-LINEARES	35
§ 1. Introdução	35
§ 2. O Princípio de Ważewski	36
§ 3. Resultado Principal	59
CAPÍTULO IV	
RELAÇÃO ASSINTÓTICA ENTRE SOLUÇÕES DE DUAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO DO TIPO DE CARATHÉODORY	83
§ 1. Introdução	83
§ 2. Resultados Principais	84
BIBLIOGRAFIA	117

INTRODUÇÃO

É um fato bem conhecido que o procedimento conhecido como Princípio ou Método de Ważewski, desde o seu aparecimento em 1947, vem se constituindo em um instrumento matemático de razoável importância na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Seu bom funcionamento em espaços normados de dimensão finita se deve, sobretudo, ao fato de que, nestes espaços, a fronteira de uma bola fechada não é retrato da mesma. No entanto, como esta propriedade não tem correspondente nos espaços de Banach de dimensão infinita, isto faz com que a extensão direta do Método a equações diferenciais nestes espaços tenha aplicação bastante restrita. A consideração deste fato para o caso de equações diferenciais com retardamento do tipo contínuo levou Rybakowski [10] a tentar obter, com sucesso, uma formulação para o Princípio de Ważewski, inspirado no conceito de função de Liapunov tipo-Razumikhin, que funcionasse no espaço $\mathbb{R}^n$ ao invés de no espaço C . Posteriormente, a parte essencial de [10] foi por ele estendida a equações diferenciais com retardamento do tipo de Caratheodory em [11].

O objetivo deste trabalho consiste em utilizar muito das idéias de Rybakowski para abordar alguns problemas relativos às equações diferenciais com retardamento.

O Capítulo I foi dedicado à exposição das noções e resultados básicos relativos às equações diferenciais com retardamento na sua primeira seção, enquanto que, na segunda, abrimos espaço para apresentar a formulação do Princípio de Ważewski, segundo Ribakowski, para equações dos tipos mencionados acima.

No Capítulo II, pesquisamos a existência de soluções

positivas para uma certa classe de equações diferenciais com retardamento do tipo contínuo, mediante um argumento estreitamente ligado ao Princípio de Ważewski, mas sem usar diretamente os resultados de [10]. A inspiração para esta pesquisa procede de um artigo de Hartman e Wintner, [4], no qual os autores abordam o mesmo problema para equações diferenciais ordinárias, mediante argumentos analíticos.

No Capítulo III, investigamos a existência de *soluções limitadas, cujas derivadas tenham ordem exponencial no infinito*, de equações diferenciais com retardamento do tipo contínuo da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a(t)y + b(t)x(t-r) + f(t, x_t, y_t), \end{cases}$$

e para as quais não se exige a propriedade da unicidade de soluções. Este problema foi abordado por Izé em [5] para equações diferenciais ordinárias, com a exigência explícita da propriedade acima. Uma outra particularidade da nossa investigação consiste na utilização do teorema da convergência de Kamke como instrumento para propiciar um maior alcance para o resultado final.

Finalmente, no Capítulo IV, estudamos uma relação assíntótica entre soluções de duas equações diferenciais com retardamento do tipo de Caratheodory. Mais especificamente, dada uma solução $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$, definida no futuro, da equação

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-r) + f(t, y_t),$$

onde $A(t) = \text{diag}[a_1(t), \dots, a_n(t)]$ e $B(t) = [b_{ij}(t)]_{1 \leq i, j \leq n}$, investigamos a existência de soluções $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da equação per

turbada

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) + f(t, x_t) + g(t, x_t)$$

que apresentem a propriedade $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t, \sigma, \psi) - y(t, \sigma_0, \psi_0)] = 0$, mediante os resultados concernentes ao Princípio de Ważewski contidos em [11]. Esta questão foi abordada recentemente em [9], para *equações diferenciais ordinárias do tipo de Caratheodory*, através de uma formulação analítica do Princípio de Ważewski proposta pelos autores e que não exige qualquer retração. No entanto, o procedimento adotado em [9] não pode ser diretamente adaptado para equações diferenciais com retardamento, conforme se assinala em [11]. Tal observação nos serviu de motivação no sentido de utilizar os resultados deste último artigo para o exame do problema mencionado.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

§ 1. Fatos Básicos sobre Equações Diferenciais do Tipo Retardado

Dado um número real $r > 0$, vamos indicar simplesmente com C o espaço $C([-r;0], \mathbb{R}^n)$ das funções contínuas definidas em $[-r;0]$ e com valores no espaço $\mathbb{R}^n$, dotado de uma norma conveniente $||\cdot||$. Se para cada $\psi \in C$, colocarmos

$$||\psi|| = \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)|$$

estaremos definindo uma norma sobre C . Como se sabe, com esta norma, C é um espaço de Banach. Neste espaço, a bola aberta de centro na origem e raio H , com $0 < H < \infty$, será usualmente indicada pelo símbolo C_H . Portanto,

$$C_H = \{\psi \in C \mid ||\psi|| < H\}.$$

Dada uma aplicação contínua $x(\cdot) : [\sigma-r; \sigma+\alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $0 < \alpha \leq +\infty$, então, para qualquer $t \in [\sigma; \sigma+\alpha]$, é usual indicar com x_t o elemento de C definido por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$. Uma relação do tipo

$$(eq. 1.1) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

onde $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação dada, é chamada de *equação diferencial funcional com retardamento finito*. No caso em

que a aplicação $F(t, \psi)$, que comparece no segundo membro da (eq. 1.1), é contínua tem-se uma *equação com retardamento finito do tipo contínuo*, ou simplesmente, *equação com retardamento*.

Suponhamos que $F(t, \psi) : \Omega \subset \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma aplicação contínua. Diz-se que uma função $x(\cdot)$ é *solução da* (eq. 1.1) quando existem $\sigma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tais que:

- (i) $(t, x_t) \in \Omega$, para todo $t \in [\sigma; \sigma + \alpha[$,
- (ii) $x(\cdot) \in C([\sigma - r; \sigma + \alpha[, \mathbb{R}^n)$,
- (iii) $x(\cdot)$ satisfaz $\tilde{a}$ (eq. 1.1) em todo ponto $t \in [\sigma; \sigma + \alpha[$.

Em tal caso, também se diz que:

" $x(\cdot)$ é uma solução da (eq. 1.1) sobre $[\sigma - r; \sigma + \alpha[$."

Na situação acima, diz-se que $\hat{x}(\cdot)$ é uma *continuação* de $x(\cdot)$ caso exista um $\beta > \alpha$ tal que $\hat{x}(\cdot) \in C([\sigma - r; \sigma + \beta[, \mathbb{R}^n)$, $\hat{x}(\cdot)$ coincide com $x(\cdot)$ em $[\sigma - r; \sigma + \alpha[$ e $\hat{x}(\cdot)$ satisfaz $\tilde{a}$ (eq. 1.1) em $[\sigma - r; \sigma + \beta[$. Caso $x(\cdot)$ não admita qualquer continuação, diz-se que ela é *não-continuável*. A existência de uma solução não-continuável para a (eq. 1.1) é garantida pelo Lema de Zorn.

Dado um ponto $(\sigma, \psi) \in \Omega$, a expressão:

"resolver o problema de valor inicial

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, \dot{x}_t) \\ x_\sigma = \psi \end{cases} \quad "$$

significa determinar um intervalo $[\sigma - r; \sigma + \alpha[$, com $\sigma > 0$, e uma solução $x(\cdot)$ da (eq. 1.1) sobre $[\sigma - r; \sigma + \alpha[$ tal que:

(iv) $x(\sigma+\theta) = \psi(\theta)$, para todo $\theta \in [-r;0]$.

Neste caso, é usual dizer que $x(\cdot)$ é uma *solução da* (eq. 1.1) com *valor inicial* ψ em σ . E, para maior clareza, costuma-se indicá-la com a notação $x(\cdot, \sigma, \psi)$.

A seguir, destacamos alguns fatos relativos à (eq. 1.1). Alguns deles dizem respeito à existência e unicidade locais de soluções desta equação. Outros comparecem nesta listagem mais para servir de suporte às considerações ou resultados posteriores. A prova de cada um deles pode ser encontrada em [2].

Lema 1.1

Se $x \in C([\sigma-r; \sigma+\alpha], \mathbb{R}^n)$, então a aplicação $t \rightarrow x_t$ é contínua em $[\sigma; \sigma+\alpha]$.

Para o lema seguinte, introduziremos previamente uma simbologia especial. Assim, dado $(\sigma, \psi) \in \mathbb{R} \times C$, definimos $\tilde{\psi} \in C([\sigma-r; +\infty[, \mathbb{R}^n)$ colocando:

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_\sigma = \psi \\ \tilde{\psi}(\sigma+t) = \psi(0), \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

Agora, dado um subconjunto V de $\mathbb{R} \times C$, indicaremos com $C(V, \mathbb{R}^n)$ a classe de todas as funções *contínuas* $F(t, \psi) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, enquanto que o símbolo $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ será reservado para indicar a subclasse de todas as funções $F(t, \psi)$ que sejam *contínuas e limitadas*: O espaço vetorial $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ torna-se um espaço de Ba nach quando munido da norma:

$$\|F\|_V = \sup_{(t, \psi) \in V} |F(t, \psi)|.$$

Dados dois números reais $\alpha, \beta > 0$, colocaremos ainda:

$$I_\alpha = [0; \alpha]; \quad B_\beta = \{\psi \in C \mid ||\psi|| < \beta\}$$

$$A(\alpha, \beta) = \{y(\cdot) \in C([-r; \alpha], \mathbb{R}^n) \mid y_0 = 0 \text{ e } y_t \in B_\beta, \text{ para todo } t \in I_\alpha\}.$$

Lema 1.2

Suponhamos que Ω seja um aberto em $\mathbb{R} \times C$ e que W seja um subconjunto compacto de Ω . Se $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então:

(a) existe uma vizinhança V de W em Ω tal que $F \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$,

(b) existe uma vizinhança $U \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de F e constantes reais $M, \alpha, \beta > 0$ tais que:

(i) $|f(t, \psi)| < M$, para qualquer $f \in U$ e todo $(t, \psi) \in V$,

(ii) para qualquer $(\sigma^0, \psi^0) \in W$, tem-se que:

$$(\sigma^0 + t, y_t + \tilde{\psi}_{\sigma^0+t}^0) \in V, \text{ para qualquer } y(\cdot) \in$$

$$A(\alpha, \beta) \text{ e todo } t \in I_\alpha.$$

Lema 1.3

Suponhamos dados uma aplicação contínua $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um ponto $(\sigma, \psi) \in \Omega$. Então, achar uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 1.1) é equivalente a resolver a equação integral

$$(eq. 1.3) \begin{cases} x(t) = \psi(0) + \int_{\sigma}^t F(s, x_s) ds \\ x_{\sigma} = \psi \end{cases} \quad t \geq \sigma,$$

Teorema 1.4

Suponhamos que $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma aplicação contínua. Se $(\sigma, \psi) \in \Omega$, então existe um número real $\alpha > 0$ e uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 1.1) no intervalo $[\sigma - r; \sigma + \alpha[$. Além disso, $x(\cdot, \sigma, \psi)$ pode ser considerada como não-continuável.

Teorema 1.5

Suponhamos que $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma aplicação contínua em Ω e lipschitziana relativamente a ψ em cada subconjunto compacto de Ω . Se $(\sigma, \psi) \in \Omega$, então existe uma única solução da (eq. 1.1) passando por (σ, ψ) .

Teorema 1.6

Suponhamos que $F(t, \psi) : [T; +\infty[\times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma aplicação contínua. Se F leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, então toda *solução limitada não-continuável* da (eq. 1.1) está definida no futuro.

Teorema 1.7 (da convergência de Kamke)

Seja $F(t, \psi) : \Omega \subset \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contí-

nua. Seja (F^k) uma seqüência de aplicações contínuas $F^k(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(F^k) \rightarrow F$ quando $k \rightarrow +\infty$, uniformemente em Ω . Suponhamos que (σ^k, ψ^k) seja uma seqüência em Ω , com $(\sigma^k, \psi^k) \rightarrow (\sigma^0, \psi^0) \in \Omega$, quando $k \rightarrow +\infty$. Suponhamos ainda que, para cada índice k , $x^k(\cdot, \sigma^k, \psi^k)$ seja uma solução não-continuável do problema do valor inicial

$$(1.2)_k \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t) \\ x_{\sigma^k} = \psi^k \end{cases}$$

Então, existe uma solução não-continuável $x^0(\cdot, \sigma^0, \psi^0)$ da (eq. 1.1), passando por (σ^0, ψ^0) e uma subsequência $(x^{k_j}(\cdot))$ de $(x^k(\cdot))$ tais que:

"se $x^0(\cdot, \sigma^0, \psi^0)$ está definida em $[\sigma_0 - r; \alpha]$, $\alpha > \sigma_0$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $k_j \geq n_0 \Rightarrow x^{k_j}(\cdot, \sigma^{k_j}, \psi^{k_j})$ está definida em $[\sigma^0 - r + \varepsilon; \alpha]$ e $(x^{k_j}(\cdot)) \rightarrow x^0(\cdot)$ quando $k_j \rightarrow +\infty$, uniformemente em $[\sigma^0 - r + \varepsilon; \alpha]$.

O lema 1.3 estabelece uma equivalência entre o problema do valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t) \\ x_{\sigma} = \psi \end{cases}$$

onde $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, e a equação integral:

$$\begin{cases} x(t) = \psi(0) + \int_{\sigma}^t F(s, x_s) ds, & t \geq \sigma \\ x_{\sigma} = \psi \end{cases}$$

Um exame desta última equação revela que ela tem significado para uma classe mais ampla de funções F , caso não se exija que $x(\cdot)$ tenha derivada contínua para todo $t > \sigma$. Esta observação leva à consideração das chamadas *equações diferenciais com retardamento do tipo de Carathéodory*. Com vistas ao Capítulo IV, destacaremos alguns fatos a respeito de tais equações.

Definição 1.8

Diz-se que uma função $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz à condição de Carathéodory sobre Ω quando:

- (a) $F(t, \psi)$ é mensurável na variável t , para cada ψ fixado, e contínua na variável ψ , para cada t fixado;
- (b) para todo $(t, \psi) \in \Omega$, existe uma vizinhança $V(t, \psi) \subset \Omega$ e uma função Lebesgue-integrável $m(s) : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que:

$$|F(s, \psi)| \leq m(s), \text{ para todo } (s, \psi) \in V(t, \psi).$$

Em particular, se $F(t, \psi)$ é contínua em Ω , então $F(t, \psi)$ satisfaz à condição de Carathéodory sobre Ω .

Uma relação do tipo:

$$(eq. 1.4) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t),$$

onde $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que satisfaz à condição de Carathéodory sobre Ω , é chamada *equação diferencial funcional com retardamento finito do tipo de Carathéodory*, ou simplesmente, equação do tipo de Carathéodory.

Uma aplicação $x(\cdot)$ é solução da (eq. 1.4) num intervalo $[\sigma - r; \sigma + \alpha[$, $\alpha > 0$, quando:

- (i) $(t, x_t) \in \Omega$, para todo $t \in [\sigma; \sigma + \alpha[$,
- (ii) $x(\cdot) \in C([\sigma - r; \sigma + \alpha[, \mathbb{R}^n)$ e $x(\cdot)$ é absolutamente contínua em todo subconjunto compacto de $[\sigma; \sigma + \alpha[$,
- (iii) $x(\cdot)$ satisfaz $\tilde{a}$ (eq. 1.4) quase sempre em $[\sigma; \sigma + \alpha[$.

Teorema 1.9

Suponhamos que $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaça $\tilde{a}$ condição de Carathéodory sobre Ω . Se $(\sigma, \psi) \in \Omega$, então existe um número real $\alpha > 0$ e uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 1.4) no intervalo $[\sigma - r; \sigma + \alpha[$. Além disto, $x(\cdot, \sigma, \psi)$ pode ser considerada como não-continuável.

Teorema 1.10

Suponhamos que $F(t, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaça $\tilde{a}$ condição de Carathéodory sobre Ω . Suponhamos também que, para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, exista uma função Lebesgue-integrável $L(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, tal que:

$$|F(s, \psi_1) - F(s, \psi_2)| \leq L(s) \cdot ||\psi_1 - \psi_2||,$$

quaisquer que sejam $(s, \psi_1), (s, \psi_2) \in K$. Então, dado $(\sigma, \psi) \in \Omega$, existe uma única solução da (eq. 1.4) passando por (σ, ψ) .

§ 2. O Método Topológico de Ważewski

Como se sabe, o chamado Método Topológico de Ważewski ou Princípio de Ważewski, constitui uma extensão importante do Método de Liapunov no que se refere às equações diferenciais ordinárias e, por isto mesmo, desempenha um papel relevante no estudo qualitativo destas equações. Nosso primeiro propósito nesta secção consiste em relembrar este princípio no âmbito das equações diferenciais ordinárias.

Consideremos a equação

$$(eq. 2.1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

onde $f(t, x) : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua. Suponhamos também que esteja satisfeita mais alguma condição que garanta unicidade de soluções para esta equação. Suponhamos ainda que ω seja um aberto de Ω .

Definição 2.1

Diz-se que um ponto $P_0 = (t_0, x_0) \in \partial\omega \cap \Omega$ é:

- (i) um ponto de saída em relação à (eq. 2.1) quando existe ao menos um número real $\epsilon > 0$ tal que a solução $x(t, t_0, x_0)$ da (eq. 2.1) existe em $[t_0 - \epsilon; t_0]$ e $(t, x(t, t_0, x_0)) \in \omega$ para todo $t \in [t_0 - \epsilon; t_0[$.
- (ii) um ponto de saída estrito em relação à (eq. 2.1) quando P_0 é um ponto de saída relativo à (eq. 2.1) e existe ao menos um número real $\epsilon > 0$ tal que a solução $x(t, t_0, x_0)$ da (eq. 2.1) existe em $[t_0; t_0 + \epsilon]$ e $(t, x(t, t_0, x_0)) \in \Omega \setminus \bar{\omega}$ para todo $t \in]t_0; t_0 + \epsilon]$.

Vamos colocar

$$W = \{P_0 = (t_0, x_0) \in \partial\omega \cap \Omega \mid P_0 \text{ é ponto de saída em relação a } \tilde{a} \text{ (eq. 2.1)}\}$$

$$W^* = \{P_0 = (t_0, x_0) \in \partial\omega \cap \Omega \mid P_0 \text{ é ponto de saída estrito em relação a } \tilde{a} \text{ (eq. 2.1)}\}$$

É claro, de acordo com a definição anterior, que $W^* \subset W$.

Teorema 2.2 (Ważewski)

Suponhamos satisfeitas mais as seguintes hipóteses:

(a) $W^* = W$,

(b) existe um conjunto $Z \subset \omega \cup W$ tal que $Z \cap W$ é retrato de W , mas $Z \cap W$ não é retrato de Z .

Nestas condições, existe ao menos um ponto $P_0 = (t_0, x_0) \in Z \cap \omega$ tal que

$$(t, x(t, t_0, x_0)) \in \omega \text{ para todo } t \in [t_0; t^+[,$$

onde com $[t_0; t^+[, t_0 < t^+ \leq +\infty$, estamos indicando o intervalo maximal de existência à direita da solução $x(t, t_0, x_0)$.

Na prática, a utilização do teorema de Ważewski esbarra em uma dificuldade, a saber, a verificação da hipótese (a). A fim de contorná-la, Ważewski introduziu a noção de *conjunto polifacial regular*, o que lhe permitiu estabelecer um teorema que garante a validade da hipótese mencionada.

Definição 2.3

Um conjunto da forma

$$\omega = \{(t, x) \in \Omega \mid \ell^i(t, x) < 0, i = 1, 2, \dots, p; \\ m^j(t, x) < 0, j = 1, 2, \dots, q\},$$

onde $\ell^i(t, x) : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $m^j(t, x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções
 $i=1, 2, \dots, p$ $j=1, 2, \dots, q$

de classe C^1 , é chamado *conjunto polifacial*. Diz-se que ω é *regular em relação a* (eq. 2.1) quando são válidas as condições:

(i) para cada $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ e para todo

$P = (\sigma, x) \in L^i = \{Q \in \partial\omega \mid \ell^i(Q) = 0\}$ tem-se que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \ell^i(t, x(t)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ell^i}{\partial x_k}(t, x(t)) f_k(t, x(t)) \right]_{t=\sigma} > 0 ;$$

(ii) para cada $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ e para todo

$P = (\sigma, x) \in M^j = \{Q \in \partial\omega \mid m^j(Q) = 0\}$ tem-se que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} m^j(t, x(t)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial m^j}{\partial x_k}(t, x(t)) f_k(t, x(t)) \right]_{t=\sigma} < 0.$$

Teorema 2.4

Se $\omega \subset \Omega$ é um conjunto polifacial regular em relação a (eq. 2.1) então $W = W^* = \bigcup_{i=1}^p L^i \setminus \bigcup_{j=1}^q M^j$.

O teorema de Ważewski funciona bem em espaços normados de dimensão finita, sobretudo devido ao fato de quase sempre atribuirmos o papel do conjunto Z a uma *bola fechada, da qual a correspondente fronteira não é retrato*. No entanto, esta propriedade não é válida em espaços de Banach de dimensão infinita. Isto faz com que a extensão direta do Método de Ważewski a processos nestes espaços tenha aplicação restrita. A consideração deste

(3) Seja $A = \{P = (\sigma, x) \in Z \cap \omega \mid \text{existe um } t > \sigma \text{ tal que}$
 $t \in [\sigma, t^+[\text{ e } x(t, \sigma, p(P)) \notin \omega\}$, onde $[\sigma; t^+[[$
indica o intervalo maximal de existência à direita da so-
lução $x(t, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.2). Suponhamos que para to-
do $P = (\sigma, x) \in A$ exista um $t(P) > \sigma$ tal que:

(α) $t(P) \in [\sigma; t^+[[$ e $(t, x(t, \sigma, p(P))) \in \omega$, para todo
 $\sigma \leq t < t(P)$,

(β) $(t(P), x(t(P), \sigma, p(P))) \in W$,

(γ) para qualquer $\delta > 0$, existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, \delta)$, com
 $\bar{t} \in [\sigma; t^+[[$ e $\sigma < \bar{t} \leq \sigma + \delta$, tal que
 $(\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$.

(4) Para todo $P = (\sigma, x) \in W \cap B$ e para qualquer $\delta > 0$ e-
xiste um $\bar{t} = \bar{t}(P, \delta)$, com $\bar{t} \in [\sigma; t^+[[$ e $\sigma < \bar{t} \leq \sigma + \delta$,
tal que $(\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$.

Nestas condições, existe ao menos um ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in Z \cap \omega$
tal que

$(t, x(t, \sigma_0, p(P_0))) \in \omega$, para todo $t \in [\sigma_0, t^+[[$.

Definição 2.6

Seja J um intervalo de $\mathbb{R}$ e U um aberto do $\mathbb{R}^n$. Um con-
junto da forma

$$\omega = \{(t, x) \in J \times U \mid \ell^i(t, x) < 0, \quad m^j(t, x) < 0\},$$

$$i=1, 2, \dots, p \quad j=1, 2, \dots, q$$

onde $\ell^i(t, x) : J \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $m^j(t, x) : J \times U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de
 $i=1, 2, \dots, p$ $j=1, 2, \dots, q$

classe C^1 , é chamado *conjunto polifacial* (dependente do tempo).

Diz-se que ω é *regular em relação à* (eq. 2.2) quando são válidas as

condições:

(i) se $(\sigma, \psi) \in J \times C$ e $(\sigma + \theta, \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$, então $(\sigma, \psi) \in \Omega$,

(ii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, para todo

$P = (\sigma, x) \in L^i = \{Q \in \partial\omega \mid \ell^i(Q) = 0\}$ e para qualquer $\psi \in C$, com $\psi(0) = x$ e $(\sigma + \theta, \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$, tem-se que $(\sigma, \psi) \in \Omega$ e

$$\frac{\partial \ell^i}{\partial t}(P) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ell^i}{\partial x_k}(P) \cdot F_k(\sigma, \psi) > 0,$$

(iii) para cada $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, para todo

$P = (\sigma, x) \in M^j = \{Q \in \partial\omega \mid m^j(Q) = 0\}$ e para qualquer $\psi \in C$, com $\psi(0) = x$ e $(\sigma + \theta, \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$, tem-se que $(\sigma, \psi) \in \Omega$ e

$$\frac{\partial m^j}{\partial t}(P) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial m^j}{\partial x_k}(P) \cdot F_k(\sigma, \psi) < 0.$$

Teorema 2.7

Suponhamos válidas as seguintes hipóteses:

(1') ω é um conjunto polifacial regular em relação a $\tilde{a}$ (eq. 2.2) e

$W = \{P = (\sigma, x) \in \partial\omega \mid m^j(P) < 0, \text{ para cada } j=1, 2, \dots, q\}$.

Z é um subconjunto de $\omega \cup W$ tal que $Z \cap W$ é retrato de W mas $Z \cap W$ não é retrato de Z .

Seja $B = \overline{Z} \cap (Z \cup W)$.

(2') Existe uma aplicação contínua $p : B \rightarrow C$ tal que, para todo $P = (\sigma, x) \in B$, tem-se $(\sigma, p(P)) \in \Omega$. Além disso:

(i) se $P = (\sigma, x) \in A$, então $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0]$,

(ii) se $P = (\sigma, x) \in W \cap B$, então $p(P)(0) = x$ e $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$.

Sob estas condições, tem-se que:

(a) são válidas as hipóteses (3) e (4) do teorema 2.5,

(b) conseqüentemente, existe ao menos um ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in Z \cap \omega$ tal que

$$(t, x(t, \sigma_0, p(P_0))) \in \omega, \text{ para todo } t \in [\sigma_0; t^+].$$

Em [10], Rybakowski também considera o caso em que a (eq. 2.2) *não apresenta unicidade de soluções*. Neste caso, a existência de uma solução $x(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ da (eq. 2.2) que permaneça em ω ao longo de seu intervalo maximal à direita é provada mediante o auxílio do teorema 1.7 e de um teorema de aproximação. Nesta parte introdutória, apresentaremos apenas uma versão mais simples do teorema 4.1 em [10].

Teorema 2.8

Suponhamos válidas as hipóteses abaixo:

(1') ω é um conjunto polifacial regular em relação à (eq. 2.2) e $W = \{P = (\sigma, x) \in \partial\omega \mid m^j(P) < 0, \text{ para cada } j=1, 2, \dots, q\}$.

Z é um subconjunto compacto de $\omega \cup W$ tal que $Z \cap W$ é retrato de W , mas $Z \cap W$ não é retrato de Z ,

(2') existe uma aplicação contínua $p : Z \rightarrow C$ tal que, para todo $P = (\sigma, x) \in Z$, tem-se $(\sigma, p(P)) \in \Omega$. Além disso:

- (i) se $P = (\sigma, x) \in A$, então $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0]$,
- (ii) se $P = (\sigma, x) \in W \cap Z$, então $p(P)(0) = x$ e $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$.

Então, existe ao menos um ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in Z \cap \omega$ e uma solução não-continuável $x^0(\cdot)$ da (eq. 2.2), passando por $(\sigma_0, p(P_0))$ tal que $(t, x^0(t, \sigma_0, p(P_0))) \in \omega$, para todo $t \in [\sigma_0; t^+]$.

Nosso *terceiro e último* propósito consiste em estabelecer para equações do tipo de Carathéodory os equivalentes dos teoremas 2.7 e 2.8, de conformidade com [11]. Para isto, a primeira coisa a notar é que o *teorema* 2.5, embora formulado para equações diferenciais com retardamento do tipo contínuo, *dotadas da propriedade da unicidade de soluções*, vale igualmente para equações do tipo de Carathéodory que possuam esta propriedade; este fato nos isentará de enunciar um teorema análogo ao *teorema* 2.5 para esta última classe de equações diferenciais.

Uma segunda observação a fazer é que o conceito de conjunto polifacial regular deve ser reformulado. Para esta finalidade, começamos por introduzir o símbolo $L_{loc}(J \times \mathbb{R}^n)$ para indicar o conjunto de todas as funções $\ell(t, x) : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde J é um intervalo de $\mathbb{R}$, que são *lipschitzianas relativamente a x , uniformemente em relação a t , localmente em $J \times \mathbb{R}^n$* . Isto significa que, para cada $(t, x) \in J \times \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança $V = V(t, x) \subset J \times \mathbb{R}^n$ e um número real $L = L_V > 0$ tal que:

$$|\ell(s, y) - \ell(s, z)| \leq L \cdot |y - z|, \text{ para quaisquer } (s, y), (s, z) \in V.$$

Por outro lado, usaremos o símbolo $AC_{loc}(J \times \mathbb{R}^n)$ para indicar o conjunto de todas as funções $\ell(t, x) : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que são *ab-*

solatamente contínuas relativamente a t, uniformemente em relação a x, localmente em $J \times \mathbb{R}^n$. Isto significa que, para cada $(t,x) \in J \times \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança $V = V(t,x) \subset J \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo a propriedade: "para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, V) > 0$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^n$ e para qualquer escolha de uma coleção finita de números reais $s_1, \dots, s_k$ em J, com $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, $(s_i, y) \in V$ para cada índice

$$i = 1, 2, \dots, k \text{ e } \sum_{\substack{i=1 \\ i: \text{ímpar}}}^{k-1} |s_{i+1} - s_i| < \delta, \text{ tem-se:}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i: \text{ímpar}}}^{k-1} |\ell(s_{i+1}, y) - \ell(s_i, y)| < \varepsilon.$$

Definição 2.9

Um conjunto da forma:

$$\omega = \{(t,x) \in J \times U \mid \ell^i(t,x) < 0, m^j(t,x) < 0\} \\ i=1,2,\dots,p \quad j=1,2,\dots,q$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\ell^i, m^j \in L_{loc}^{ab}(J \times U) \cap AC_{loc}(J \times U)$, para

$i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$, é chamado *conjunto polifacial* (dependente do tempo) *gerado pelas famílias* $(\ell^i)_{1 \leq i \leq p}$, $(m^j)_{1 \leq j \leq q}$, ou simplesmente,

conjunto polifacial.

Diz-se que ω é *regular* em relação a $\tilde{a}$ (eq. 1.4) quando são válidas as condições:

(a) se $(\sigma, \psi) \in J \times C$ e $(\sigma + \theta, \psi(\theta)) \in \omega$ para todo $\theta \in [-r; 0[$, então $(\sigma, \psi) \in \omega$,

(b) para cada $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, para todo

$P = (\sigma, x) \in L^i = \{Q \in \partial\omega \mid \ell^i(Q) = 0\}$ e para qualquer $\psi \in C$, com $\psi(0) = x$ e $(\sigma + \theta, \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$, existe uma vizinhança $V = V(\sigma, \psi) \subset \Omega$ e um conjunto de medida nula $N = N(\sigma, \psi) \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $(s, \psi) \in V \setminus N \times C$, tem-se que:

$$\dot{\ell}_{(1.4)}^i(s, \psi(0)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\ell^i(s+h, \psi(0)+hF(s, \psi)) - \ell^i(s, \psi(0))] > 0,$$

(c) para cada $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, para todo

$P = (\sigma, x) \in M^j = \{Q \in \partial\omega \mid m^j(Q) = 0\}$ e para qualquer $\psi \in C$, com $\psi(0) = x$ e $(\sigma + \theta, \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$, existe uma vizinhança $V = V(\sigma, \psi) \subset \Omega$ e um conjunto de medida nula $N = N(\sigma, \psi) \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $(s, \psi) \in V \setminus N \times C$, tem-se que:

$$\dot{m}_{(1.4)}^j(s, \psi(0)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [m^j(s+h, \psi(0)+hF(s, \psi)) - m^j(s, \psi(0))] < 0.$$

Teorema 2.10

Suponhamos que através de cada ponto $(\sigma, \psi) \in \Omega$ passe uma *única* solução da (eq. 1.4). Suponhamos também que sejam válidas as seguintes hipóteses:

(1') ω é um conjunto polifacial regular relativamente $\tilde{a}$ (eq. 1.4) e

$$W \equiv \{P = (\sigma, x) \in \partial\omega \mid m^j(P) < 0, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, q\}$$

Z é um subconjunto de $\omega \cup W$ tal que $Z \cap W$ é retrato de W , mas $Z \cap W$ não é retrato de Z .

(2') existe uma aplicação contínua $p : B = \bar{Z} \cap (Z \cup W) \rightarrow C$ tal que, para todo $P = (\sigma, x) \in B$, tem-se $(\sigma, p(P)) \in \Omega$.
Além disso:

- (i) se $P = (\sigma, x) \in A$, então $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0]$,
- (ii) se $P = (\sigma, x) \in W \cap B$, então $p(P)(0) = x$ e $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0[$.

Então, pode-se afirmar que:

- (a) são válidas as hipóteses (3) e (4) do teorema 2.5,
- (b) consequentemente, existe ao menos um ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in Z \cap \omega$ tal que $(t, x(t, \sigma_0, p(P_0))) \in \omega$, para todo $t \in [\sigma_0; t^+]$.

O caso em que a (eq. 1.4) não possui a propriedade da unicidade de soluções comparece em [11] sob a forma abaixo:

Teorema 2.11

Suponhamos que sejam válidas as seguintes hipóteses:

- (1') ω é um conjunto polifacial regular relativamente $\tilde{a}$ (eq. 1.4), gerado por funções ℓ^i, m^j *continuamente diferenciáveis*. Além disso, todos os conjuntos $N(\sigma, \varphi)$ na definição 2.9 podem ser escolhidos como vazios.

$$W = \{P = (\sigma, x) \in \partial\omega \mid m^j(P) < 0, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, q\}.$$

Z é um subconjunto compacto de $\omega \cup W$ tal que $Z \cap W$ é retrato de W , mas $Z \cap W$ não é retrato de Z .

(2') existe uma aplicação contínua $p : Z \rightarrow C$ tal que, para todo $P = (\sigma, x) \in Z$, tem-se $(\sigma, p(P)) \in \Omega$.

Além disso:

- (i) se $P = (\sigma, x) \in A$, então $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0]$,
- (ii) se $P = (\sigma, x) \in W \cap B$, então $p(P)(0) = x$ e $(\sigma + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $\theta \in [-r; 0]$.

Então, existe ao menos um ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in Z \cap \omega$ e uma solução não-continuável $x^0(\cdot)$ da (eq. 1.4), passando por $(\sigma_0, p(P_0))$ tal que $(t, x(t, \sigma_0, p(P_0))) \in \omega$, para todo $t \in [\sigma_0; t^+]$.

CAPÍTULO II

PESQUISA DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CERTA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO

§ 1. Introdução

Nos últimos vinte anos tem crescido muito o interesse pela pesquisa de soluções positivas de equações diferenciais, e equações integrais e, principalmente, equações diferenciais parciais. No que tange às equações diferenciais ordinárias, o interesse por tal pesquisa parece ser mais antigo. Por exemplo, em [4], Hartman e Wintner estudaram a existência de soluções positivas e decrescentes para certas equações diferenciais ordinárias.

Neste capítulo, o nosso propósito consiste em estabelecer a existência de soluções positivas para uma certa classe de equações diferenciais com retardamento. Para a consecução desta tarefa, fazemos uso de um argumento estreitamente ligado ao princípio de Ważewski.

§ 2. Soluções Positivas para uma Certa Classe de Equações Diferenciais Retardadas

Em primeiro lugar, convém esclarecer que a norma do $\mathbb{R}^n$ a ser utilizada neste capítulo é justamente a norma da soma, isto é, $|x| = \sum_{j=1}^n |x_j|$.

No intuito de evitar pontos obscuros, destacaremos desde já a terminologia a ser utilizada, através da seguinte

Definição 2.1

Um vetor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se diz *positivo* quando $x_j \geq 0$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Usaremos a notação $x \geq 0$ para indicar um tal vetor. Caso se tenha $x_j > 0$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$, então se diz que o vetor x é *estritamente positivo* e se escreve $x > 0$. Naturalmente, temos as noções análogas de *vetor negativo* e *vetor estritamente negativo*. Além disso, tudo que foi dito se aplica igualmente a matrizes reais $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.

Consideremos uma equação diferencial do tipo retardado:

$$(eq. 2.1) \quad \dot{x}(t) = -f(t, x_t),$$

onde $f(t, \psi) :]T; +\infty[\times C_H \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $0 < H \leq +\infty$ e $n \geq 2$, é uma aplicação contínua. Admitiremos que a equação acima tem a propriedade da unicidade de soluções.

Teorema 2.2

Admitamos como válidas as seguintes hipóteses:

(h_1) para qualquer $t > T+r$ e qualquer $\psi \in C_H$, com $\psi(\theta_0) = 0$ para algum $\theta_0 \in [-r; 0]$ e $\psi(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in [-r; \theta_0]$, tem-se que $f(t, \psi) = 0$;

(h_2) existe um número real ε_0 , com $0 < \varepsilon_0 < H$, tal que, para qualquer vetor $x \geq 0$ do $\mathbb{R}^n$, com $\sum_{j=1}^n x_j = \varepsilon_0$, e para qualquer $\psi \in C_H$, com $\psi(0) = x$ e $\psi(\theta) \neq 0$, $\psi(\theta) \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) < \varepsilon_0$ para todo $\theta \in [-r; 0]$, tem-se:

(a) $\sum_{j=1}^n f_j(t, \psi) > 0$, para todo $t > T+r$,

(b) para qualquer $\sigma > T+r$, a solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da

(eq. 2.1) está definida no futuro.

(h₃) para qualquer vetor $x \geq 0$ do $\mathbb{R}^n$, com $0 < |x| \leq \varepsilon_0$ e $x_i = 0$ para algum índice i , e para qualquer $\psi \in C_H$, com $\psi(0) = x$ e $\psi(\theta) \neq 0$, $\psi(\theta) \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) \leq \varepsilon_0$ para todo $\theta \in [-r; 0]$, tem-se $f_i(t, \psi) > 0$, para todo $t > T+r$.

Então, para qualquer $\sigma > T+r$, existe uma função $\psi \in C_H$, com $\psi(0) > 0$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(0) = \varepsilon_0$ e $\psi(\theta) \neq 0$, $\psi(\theta) \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) \leq \varepsilon_0$, para todo $\theta \in [-r; 0]$, tal que a solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 2.1) está definida no futuro e seu comportamento se enquadra em uma das seguintes alternativas:

- (I) $x(t, \sigma, \psi) = 0$ para todo $t \geq t_0$ e algum $t_0 \geq \sigma$;
 (II) $x(t, \sigma, \psi) > 0$ e $\sum_{i=1}^n x^i(t, \sigma, \psi) \leq \varepsilon_0$ para todo $t \geq \sigma$.

Prova

Fixemos um $\sigma > T+r$.

Definamos em seguida os conjuntos:

$$\omega = \{ \psi \in C_H \mid \psi(\theta) > 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) < \varepsilon_0, \text{ para todo } \theta \in [-r; 0] \}$$

$$W = \{ \psi \in C_H \mid \psi_i(0) = 0 \text{ para algum } i = 1, 2, \dots, n; \psi(\theta) \neq 0, \psi(\theta) \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } \theta \in [-r; 0] \}$$

$$Z = \{ \psi \in C_H \mid \sum_{j=1}^n \psi_j(0) = \varepsilon_0; \psi(\theta) \neq 0, \psi(\theta) \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } \theta \in [-r; 0] \}$$

$$\omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n x_j < \varepsilon_0\}$$

$$W_0 = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x_0 = \psi(0) \text{ para algum } \psi \in W\}$$

$$Z_0 = \{y_0 \in \mathbb{R}^n \mid y_0 = \psi(0) \text{ para algum } \psi \in Z\}$$

É imediato que $W, Z \subset \partial\omega$, $\psi \equiv 0 \notin W \cup Z$ e que ω é um aberto em C_H .

A respeito dos conjuntos W_0 e Z_0 , pode-se garantir que

(2) W_0 não é retrato de $Z_0 \cup W_0$.

Isto se deve ao fato de $Z_0 \cup W_0$ ser contractível, enquanto o mesmo não acontece com W_0 .

Com base neste resultado, pode-se garantir adicionalmente que:

(3) W não é retrato de $Z \cup W$.

Com efeito, suponhamos que isto seja falso, isto é, que exista uma retração $R : Z \cup W \rightarrow W$. Considerando que as aplicações:

$$A : W \rightarrow W_0, \quad \psi \rightarrow \psi(0)$$

$$B : Z_0 \cup W_0 \rightarrow Z \cup W, \quad x_0 \rightarrow \psi, \text{ onde } \psi(\theta) = x_0, \text{ para todo } \theta \in [-r; 0]$$

são contínuas, resulta que a aplicação

$$H = A.R.B : Z_0 \cup W_0 \rightarrow W_0$$

é contínua, bem como $H/W_0 = \text{id}$. Assim, W_0 é retrato de $Z_0 \cup W_0$, contradizendo a asserção (2).

Examinemos agora como se comporta uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 2.1) originada por uma função $\psi \in W$. Considerando que $\psi_i(0) = 0$, para algum índice i , e recorrendo à função $\ell^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell^i(x) = -x_i$, pode-se escrever:

$$-\frac{d}{dt} \ell^i(x(t, \sigma, \psi)) \big|_{t=\sigma} = -\dot{x}^i(t, \sigma, \psi) \big|_{t=\sigma} = -f_i(\sigma, \psi) > 0.$$

Assim, a função $\ell^i(x(\cdot, \sigma, \psi))$ deve ser estritamente crescente em alguma vizinhança $[\sigma; \sigma + \delta_1[$, o que permite escrever

$$\sigma < t < \sigma + \delta_1 \implies \ell^i(x(t, \sigma, \psi)) > \ell^i(\psi(0)) = 0,$$

isto é,

$$(4) \quad \sigma < t < \sigma + \delta_1 \implies x^i(t, \sigma, \psi) < 0.$$

Tal resultado pode ser interpretado também do seguinte modo:

$$(5) \quad \sigma < t < \sigma + \delta_1 \implies x_t(\sigma, \psi) \notin \bar{W}.$$

Para um exame semelhante em $Z \setminus W$, recorremos à função $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $m(x) = \sum_{j=1}^n x_j - \varepsilon_0$. Dado $\psi \in Z \setminus W$, temos:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} m(x(t, \sigma, \psi)) \big|_{t=\sigma} &= \sum_{j=1}^n \dot{x}^j(t, \sigma, \psi) \big|_{t=\sigma} = \\ &= - \sum_{j=1}^n f_j(\sigma, \psi) < 0. \end{aligned}$$

Isto significa que a função $m(x(\cdot, \sigma, \psi))$ deve ser estritamente decrescente em alguma vizinhança $[\sigma; \sigma + \delta_2[$, o que permite escrever:

$$\sigma < t < \sigma + \delta_2 \implies m(x(t, \sigma, \psi)) < m(\psi(0)) = 0,$$

isto é,

$$\sigma < t < \sigma + \delta_2 \implies \sum_{j=1}^n x^j(t, \sigma, \psi) < \varepsilon_0.$$

Adicionalmente, devido à continuidade da função $x(\cdot, \sigma, \psi)$, pode-se escolher δ_2 de modo que:

$$(6) \quad \sigma < t < \sigma + \delta_2 \implies \sum_{j=1}^n x^j(t, \sigma, \psi) < \varepsilon_0 \text{ e } x(t, \sigma, \psi) > 0.$$

Pode-se traduzir este resultado de uma outra maneira, dizendo-se que

$$(7) \quad \sigma < t < \sigma + \delta_2 \implies x_t(\sigma, \psi) \in \bar{\omega}.$$

Admitamos, a seguir, que:

$$(8) \quad \text{"a alternativa (I) não seja válida, qualquer que seja } \psi \in Z \setminus W."$$

Em prosseguimento, consideremos o conjunto:

$$A = \{\psi \in Z \setminus W \mid \text{existe um } t > \sigma \text{ tal que } x_t(\sigma, \psi) \notin \bar{\omega}\}.$$

Naturalmente, admitiremos que $A \neq \emptyset$, caso contrário nada há para se provar. Dado $\psi \in A$, vamos colocar

$$\tau = \tau(\psi) = \inf\{t > \sigma \mid x_t(\sigma, \psi) \notin \bar{\omega}\}.$$

Então, $x_\tau(\sigma, \psi) \in \partial\omega$ e $x_t(\sigma, \psi) \in \bar{\omega}$, para todo $t \in [\sigma; \tau]$. Além disso, relativamente a $x_\tau(\sigma, \psi)$, podemos, em princípio, individualizar as seguintes situações:

- (i) ou $x^i(\tau, \sigma, \varphi) = 0$, para algum índice i ,
(ii) ou $x^i(\tau, \sigma, \varphi) = 0$, para todo índice $i = 1, 2, \dots, n$,
(iii) ou $\sum_{j=1}^n x^j(\tau, \sigma, \varphi) = \varepsilon_0$.

No entanto, com base na definição de τ e na condição (6), pode-se garantir que (iii) não pode ocorrer. A situação (ii) também pode ser descartada; isto se explica da seguinte maneira: caso acontecesse tal situação, então a hipótese (h_1) , aliada ao argumento da unicidade (à direita) das soluções da (eq.2.1), implicaria que $x(t, \sigma, \varphi) = 0$ para todo $t \geq \tau$, o que entraria em contradição com a suposição (8). Portanto, por exclusão, deve acontecer unicamente a situação (i). A esta conclusão, convém acrescentar a informação contida em (4), o que coloca em nossas mãos uma visão mais completa do comportamento da solução $x(\cdot, \sigma, \varphi)$, a saber:

$$(9) \quad \begin{aligned} &x^i(\tau, \sigma, \varphi) = 0, \text{ para algum índice } i, \text{ e} \\ &x^i(t, \sigma, \varphi) < 0, \text{ para todo } t \in]\tau; \tau + \delta_1[\text{ e algum } \delta_1 > 0. \end{aligned}$$

Nosso passo seguinte consiste em mostrar que a alternativa (II):

$$\begin{aligned} &\text{"existe } \varphi \in Z \setminus W \text{ tal que } x(t, \sigma, \varphi) > 0 \text{ e} \\ &\sum x^i(t, \sigma, \varphi) \leq \varepsilon_0, \text{ para todo } t \geq \sigma \text{"}, \end{aligned}$$

não pode deixar de ser verdadeira. Com efeito, se ela for falsa, teremos a seguinte situação:

$$(10) \quad \begin{aligned} &\text{"para todo } \varphi \in Z \setminus W, \text{ existe um } \bar{t} = \bar{t}(\sigma, \varphi) > \sigma \text{ tal} \\ &\text{que ou } x^i(\bar{t}, \sigma, \varphi) \leq 0 \text{ para algum índice } i \text{ ou} \\ &\sum_{j=1}^n x^j(\bar{t}, \sigma, \varphi) > \varepsilon_0 \text{"}. \end{aligned}$$

Em particular, se tivermos $x^i(\bar{t}, \sigma, \psi) = 0$ para algum índice i , então, conforme (9), haverá um $\bar{t}^*$ próximo de $\bar{t}$, tal que $x^i(\bar{t}^*, \sigma, \psi) < 0$. Esta observação nos permite reescrever (10) sob a seguinte forma:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \text{" para todo } \psi \in Z \setminus W, \text{ existe um } \bar{t} = \bar{t}(\sigma, \psi) > \sigma \text{ tal} \\ & \text{que } x_{\bar{t}}(\sigma, \psi) \notin \bar{\omega} \text{."}, \end{aligned}$$

o que nos conduz à informação: $A = Z \setminus W$.

Construamos agora a aplicação:

$$G : A \cup W \rightarrow W, \quad G(\psi) = \begin{cases} x_{\bar{t}}(\sigma, \psi), & \text{se } \psi \in A \\ \psi & , \text{ se } \psi \in W \end{cases}$$

Mediante procedimento estabelecido em [10], pode-se mostrar que esta aplicação é contínua. Além disso, como $G|_W = \text{id}$, concluímos que W é retrato de $A \cup W$. Mas, uma vez que:

$$Z \cup W = (Z \setminus W) \cup W = A \cup W,$$

temos, então:

$$W \text{ é retrato de } Z \cup W,$$

fato que contradiz a asserção (3).

Com isto, fica estabelecida a validade da alternativa (II).

§ 3. Exemplo

Consideremos a equação:

$$(eq. 3.1) \quad \dot{x}(t) = - \min_{t-r < s < t} |x(s)| \cdot A(t) \cdot x(t-r),$$

onde $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ é uma função matricial contínua, em um intervalo $]T; +\infty[$ e $A(t) > 0$ para todo $t > T$. Propomo-nos a mostrar que as hipóteses do teorema 2.2 estão satisfeitas relativamente a esta equação.

Numa primeira etapa, estabelecemos o seguinte

Lema 3.2

Para quaisquer funções $\phi, \psi \in C = C([-r; 0], \mathbb{R}^n)$ é válida a desigualdade:

$$\left| \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)| - \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| \right| \leq \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta) - \psi(\theta)|$$

Prova

Suponhamos inicialmente que

$$\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)| - \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| > \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta) - \psi(\theta)|.$$

Então, como $\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)| = |\phi(\theta_1)|$, para algum $\theta_1 \in [-r; 0]$ e

$\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| = |\psi(\theta_2)|$, para algum $\theta_2 \in [-r; 0]$, pode-se es-

crever que

$$|\phi(\theta_1)| - |\psi(\theta_2)| > |\phi(\theta) - \psi(\theta)|, \text{ para todo } \theta \in [-r; 0].$$

Daí

$$|\phi(\theta_1)| - |\psi(\theta_2)| > |\phi(\theta) - \psi(\theta)|, \text{ para todo } \theta \in [-r; 0].$$

Considerando agora que $|\psi(\theta)| \geq |\psi(\theta_1)|$, para todo $\theta \in [-r; 0]$, obtemos:

$$|\psi(\theta)| - |\psi(\theta_2)| > |\psi(\theta)| - |\psi(\theta)|, \text{ para todo } \theta \in [-r; 0].$$

Assim,

$$|\psi(\theta_2)| < |\psi(\theta)|, \text{ para todo } \theta \in [-r; 0],$$

o que conduz a uma contradição para $\theta = \theta_2$.

Nesta situação, é válida a desigualdade:

$$\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| - \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| \leq \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta) - \psi(\theta)|.$$

Suponhamos, a seguir, que

$$\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| - \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| < -\max_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta) - \psi(\theta)|.$$

Isto equivale a escrever que

$$\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| - \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| > \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta) - \psi(\theta)|.$$

Procedendo como na etapa anterior, chega-se a uma contradição para $\theta = \theta_1$, de modo que a desigualdade

$$-\max_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta) - \psi(\theta)| \leq \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| - \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)|$$

é verdadeira. □

Voltando à (eq. 3.1), vamos colocar:

$$f(t, \psi) = \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| \cdot g(t, \psi)$$

$$g(t, \psi) = A(t) \cdot \psi(-r)$$

É claro que a aplicação $f(t, \psi)$ é contínua em $]T; +\infty[\times C$. Tam

bém se pode verificar que $f(t, \psi)$ leva conjuntos limitados de $]T; +\infty[\times C$ em conjuntos limitados do $\mathbb{R}^n$; em consequência, qualquer solução limitada da (eq. 3.1) está definida no futuro.

A aplicação é, ainda, localmente lipschitziana em ψ , uniformemente em relação a t , o que acarreta unicidade de soluções para a (eq. 3.1). Com efeito, dados $t > T$ e $\psi, \psi \in C$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} |g(t, \psi) - g(t, \psi)| &\leq |A(t)| \cdot |\psi(-r) - \psi(-r)| \leq \\ &\leq |A(t)| \cdot \|\psi - \psi\|. \end{aligned}$$

Daí, mediante o uso do lema 3.2, resulta:

$$\begin{aligned} |f(t, \psi) - f(t, \psi)| &= \left| \min_{-r \leq \theta \leq 0} \psi(\theta) \cdot g(t, \psi) - \min_{-r \leq \theta \leq 0} \psi(\theta) \cdot g(t, \psi) \right| \leq \\ &\leq \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| \cdot |g(t, \psi) - g(t, \psi)| + \\ &+ \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta) - \psi(\theta)| \cdot |g(t, \psi)| \leq \\ &\leq |A(t)| \cdot \|\psi - \psi\| \cdot \|\psi\| + \\ &+ \|\psi - \psi\| \cdot |A(t)| \cdot \|\psi\| = \\ &= |A(t)| \cdot (\|\psi\| + \|\psi\|) \cdot \|\psi - \psi\|. \end{aligned}$$

Observemos, a seguir, que se $\psi \in C$ é tal que $\psi(\theta_0) = 0$ para algum $\theta_0 \in [-r; 0]$, então $\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| = 0$. Consequentemente, teremos $f(t, \psi) = 0$, para qualquer $t > T$.

Fixemos $\varepsilon_0 = 1$. Seja $x \geq 0$ um vetor qualquer do espaço $\mathbb{R}^n$, com $\sum_{j=1}^n x_j = 1$. Seja ψ um vetor qualquer de C , com

$\psi(0) = x$ e $\psi(\theta) \neq 0$, $\psi(\theta) \geq 0$ e $\sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) \leq \varepsilon_0$, para todo $\theta \in [-r; 0]$. Então, uma vez que $\min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| > 0$ e

$$g_i(t, \psi) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot \psi_j(-r) > 0, \text{ resulta:}$$

$$\sum_{i=1}^n f_i(t, \psi) > 0, \text{ para todo } t > T.$$

Além do resultado acima, podemos garantir também, que, fixado $\sigma > T+r$, a solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 3.1) está definida no futuro. De fato, caso exista um $\sigma < \alpha < +\infty$ tal que $[\sigma; \alpha[$ seja o intervalo maximal à direita desta solução, então devemos ter:

$$|\dot{x}(t)| \rightarrow +\infty \text{ quando } t \rightarrow \alpha^-$$

No entanto, o membro direito da (eq. 3.1) permanece finito quando $t \rightarrow \alpha^-$, o que contradiz a afirmação anterior.

$$|x(\cdot, \sigma, \psi)|$$

$\alpha-r$

α

t

Enfim, seja $x \geq 0$ um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$, com $|x| \leq 1$ e $x_i = 0$ para algum índice $i = 1, 2, \dots, n$. Seja ψ um vetor qualquer de C , com $\psi(0) = x$ e $\psi(\theta) \neq 0$, $\psi(\theta) \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) \leq \varepsilon_0$ para todo $\theta \in [-r; 0]$. Então:

$$f_i(t, \psi) = \min_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot \psi_j(-r) > 0, \text{ para todo } t > T.$$

Em resumo, todas as hipóteses do teorema 2.2 estão satisfeitas. Nesta situação, fixado um $\sigma > T+r$, podemos garantir a existência de pelo menos um vetor $\psi \in C$, com $\psi(0) > 0$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(0) = 1$ e $\psi(\theta) \neq 0$, $\psi(\theta) \geq 0$ e $\sum_{j=1}^n \psi_j(\theta) \leq 1$, tal que:

"a correspondente solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 3.1) está definida no futuro e seu comportamento se enquadra em uma das seguintes situações:

- (i) ou $x(t, \sigma, \psi) = 0$ para todo $t \geq t_0$ e algum $t_0 \geq \sigma$,
- (ii) ou $x(t, \sigma, \psi) > 0$ e $\sum_{i=1}^n x^i(t, \sigma, \psi) < \epsilon_0$ para todo $t \geq \sigma$."

CAPÍTULO III

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO DE SEGUNDA ORDEM NÃO-LINEARES

§ 1. Introdução

Suponhamos que $a(t), b(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $f(t, \phi, \psi) :]T; +\infty[\times C_H \times C \rightarrow \mathbb{R}$ sejam aplicações contínuas e consideremos a equação diferencial com retardamento de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a(t)y + b(t)x(t-r) + f(t, x_t, y_t). \end{aligned} \quad (\text{eq. 1.1})$$

Nosso propósito aqui consiste em pesquisar que condições adicionais devem ser impostas às aplicações acima de modo a garantir a existência de ao menos uma solução limitada $x(t)$ desta equação, cuja derivada tenha ordem exponencial no infinito.

Este problema foi abordado por Izé em [5], para equações diferenciais ordinárias:

$$(\text{eq. 1.2}) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a(t)y + b(t)x + f(t, x, y), \end{cases}$$

onde, dentre outras hipóteses, entre as quais se inclui a da unicidade de soluções, também se exige que existam $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, com $a < x_0 < 0 < x_1 < b$, tais que:

$$b(t)x_0 + f(t, x_0, 0) < 0 \quad \text{e} \quad b(t)x_1 + f(t, x_1, 0) > 0, \quad \text{para todo } t > T.$$

Em nossa abordagem, mostramos que a utilização do teorema da convergência de Kamke permite a substituição da desigualdade estrita por uma desigualdade ampla na hipótese mencionada anteriormente, relativamente $\tilde{a}$ (eq. 1.1), alargando desta maneira o seu alcance. A não exigência de unicidade de soluções para a (eq. 1.1) constitui outro aspecto de nossa abordagem. No entanto, a incorporação desta característica não pode ser feita através da utilização do teorema 2.8 - Capítulo I. Isto se deve ao fato de que o conjunto polifacial que se utiliza não é regular no sentido da definição 2.6 - Capítulo I. Esta situação obriga a elaboração de uma nova formulação para o teorema de Ważewski. Na realização desta tarefa, seguimos as linhas gerais dos trabalhos [6] e [10].

§ 2. O Princípio de Ważewski

Seja (M, d) um espaço métrico e seja 2^M a coleção de todos os subconjuntos não vazios de M . Dado $S \in 2^M$, o conjunto de todas as coleções $N_\varepsilon(S) = \{U \in 2^M \mid U \subset V_\varepsilon(S)\}$, onde $V_\varepsilon(S)$ representa uma ε -vizinhança do conjunto $S \subset M$, constitui uma base de vizinhanças de S em 2^M , para alguma topologia $\mathcal{T}$ em 2^M . Pois bem, para o que se segue, consideraremos 2^M munido desta topologia.

Dado $S \in 2^M$, usaremos a notação $C_{cc}(S)$ para indicar a coleção de todos os subconjuntos compactos e conexos de S , munida da topologia induzida por $\mathcal{T}$.

Definição 2.1

Diz-se que S é um *retrato multivalente* de M quando existe uma aplicação contínua $\pi: M \rightarrow C_{cc}(S)$ tal que $x \in \pi(x)$, para todo $x \in S$. Neste caso, a aplicação π passa a ser chamada de *retração multivalente* de M sobre S .

É claro que se S é retrato de M no sentido usual, então S é retrato multivalente de M .

Suponhamos dados dois espaços métricos (M_1, d_1) , (M_2, d_2) e uma aplicação contínua $h : M_1 \rightarrow 2^{M_2}$. Os dois próximos lemas comparecem em [5].

Lema 2.2

Suponhamos que S seja um subconjunto compacto de M_1 . Se para cada $x \in S$ tem-se que $h(x)$ é um subconjunto compacto de M_2 , então o conjunto $K = \bigcup_{x \in S} h(x)$ é também um subconjunto compacto de M_2 .

Lema 2.3

Suponhamos que S seja um subconjunto compacto e conexo de M_1 . Se para cada $x \in S$ tem-se que $h(x)$ é um subconjunto compacto e conexo de M_2 , então o conjunto $K = \bigcup_{x \in S} h(x)$ é um subconjunto conexo de M_2 .

A fim de apresentar uma formulação do Princípio de Ważewski relativa ao caso de não-unicidade de soluções, começaremos por considerar uma equação diferencial funcional com retardo

$$(eq. 2.1) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

onde $F(t, \varphi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua sobre o aberto Ω de $\mathbb{R} \times C$.

Teorema 2.4

Suponhamos válidas as seguintes hipóteses:

- (1) ω é um aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, W é um subconjunto de $\partial\omega$ e Z é um subconjunto de $\omega \cup W$. Seja $B = \bar{Z} \cap (Z \cup W)$.

(2) Existe uma aplicação contínua $p : B \rightarrow C$ tal que, para todo $P = (\sigma, x) \in B$, tem-se que $(\sigma, p(P)) \in \Omega$. Além disso, se $P = (\sigma, x) \in W$, então $p(P)(0) = x$.

(3) Seja A o conjunto de todos os pontos $P = (\sigma, x) \in Z \cap \omega$ tais que, para toda solução $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1), e existe um $t > \sigma$, com $t \in [\sigma; t^+]$ e $(t, x(t, \sigma, p(P))) \notin \omega$. Suponhamos que para todo $P = (\sigma, x) \in A$ e para toda solução $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1) exista um $\tau = \tau(P, x(\cdot, \sigma, p(P))) > \sigma$ tal que

(α) $\tau \in [\sigma; t^+]$ e $(t, x(t, \sigma, p(P))) \in \omega$, para $\sigma \leq t < \tau$,

(β) $(\tau, x(\tau, \sigma, p(P))) \in W$,

(γ) para qualquer $\delta > 0$ existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, x(\cdot, \sigma, p(P)), \delta)$, com $\bar{t} \in [\sigma; t^+]$ e $\tau < \bar{t} \leq \tau + \delta$, tal que $(\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$.

(4) Para todo $P = (\sigma, x) \in W \cap B$ e toda solução $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1) e qualquer $\delta > 0$, existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, x(\cdot, \sigma, p(P)), \delta)$, com $\bar{t} \in [\sigma; t^+]$ e $\sigma < \bar{t} \leq \sigma + \delta$, tal que $(\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$.

Nestas condições, tem-se que:

(T_1) Para cada $P = (\sigma, x) \in A$, o conjunto $S(P)$ de todos os pontos $(\tau, x(\tau, \sigma, p(P))) \in W$, correspondentes a todas as soluções $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1), é *compacto*.

(T_2) Para cada $P = (\sigma, x) \in A$, o conjunto $S(P)$ é *conexo*.

(T_3) A aplicação $S : A \cup W \rightarrow 2^{\partial \omega}$, definida por

$$\hat{S}(\sigma, x) = \begin{cases} \text{conjunto dos pontos } (\tau, x(\tau, \sigma, p(P))), \text{ se } P = (\sigma, x) \in A \\ \{P\}, \text{ se } P = (\sigma, x) \in W \end{cases}$$

é contínua.

Prova de (T_1)

Seja $P = (\sigma, x)$ um ponto de A e seja $Q_k = (\tau_k, y_k)$ uma seqüência qualquer em $S(P)$. Para cada índice k , consideremos uma solução não-continuável do problema:

$$\dot{x}(t) = F^k(t, x_t)$$

$$x_\sigma = p(P) \quad ,$$

onde $F^k = F$ para todo índice k , passando por Q_k .

Segundo o teorema 1.7, Capítulo I, existe ao menos uma solução não-continuável $x^0(\cdot, \sigma, p(P))$ do problema:

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

$$x_\sigma = p(P)$$

e uma subsequência de $(x^k(\cdot, \sigma, p(P)))$, que continuaremos a indicar com este mesmo símbolo, tais que:

"se $x^0(\cdot, \sigma, p(P))$ está definida em $[\sigma-r; \alpha]$, $\alpha > \sigma$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que:

$k \geq n_0 \implies x^k(\cdot, \sigma, p(P))$ está definida em $[\sigma-r+\varepsilon; \alpha]$ e
 $(x^k(\cdot)) \rightarrow x^0(\cdot)$ uniformemente em $[\sigma-r+\varepsilon; \alpha]$, quando $k \rightarrow +\infty$."

De acordo com a hipótese (3), existe um $\tau_0 = \tau_0(P, x^0(\cdot))$ tal que

(a) $\tau_0 \in [\sigma; t_0^+]$ e $(t, x^0(t)) \in \omega$ para todo $\sigma \leq t < \tau_0$,

(b) $(t_0, x^0(t_0)) \in W$,

(c) fixado um $\delta > 0$, existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, x^0(\cdot), \delta)$, com

$\bar{t} \in [\sigma; t_0^+]$ e $\tau_0 < \bar{t} \leq \tau_0 + \delta$, tal que $(\bar{t}, x^0(\bar{t})) \notin \omega$.

Assim, decorre dos fatos anteriores que, para todo k suficientemente grande, $x^k(\cdot, \sigma, p(P))$ está definida em $[\sigma - r + \varepsilon; \bar{t}]$ e $(\bar{t}, x^k(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$. Além disso, ainda segundo a hipótese (3), devemos ter: $\sigma < \tau_k < \bar{t}$.

Portanto, uma vez que (τ_k) é uma seqüência limitada, ela deve admitir uma subseqüência convergente, que, por comodidade, continuaremos a indicar com a mesma notação. Adicionalmente, colocaremos $T_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$. Então $\sigma \leq T_0 \leq \bar{t}$.

Afirmamos agora que $T_0 = \tau_0$.

Com efeito, suponhamos $T_0 \neq \tau_0$ e tomemos $\eta = \frac{1}{2}|T_0 - \tau_0|$.

Para este $\eta > 0$ existe um natural k_0 , suficientemente grande, tal que

$$k \geq k_0 \implies \tau_0 + \eta < \tau_k < T_0 + \eta, \text{ caso se tenha } T_0 > \tau_0, \text{ ou}$$

$$\max\{\sigma; T_0 - \eta\} < \tau_k < \tau_0 - \eta \text{ no caso em que } T_0 < \tau_0.$$

Existe também um $T = T(P, x^0(\cdot), \eta)$, com $T \in [\sigma; t_0^+]$ e $\tau_0 < T \leq \tau_0 + \eta$ tal que $(T, x^0(T, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$.

Consideremos o caso $T_0 > \tau_0$. Uma vez que:

$$x^k(T, \sigma, p(P)) \rightarrow x^0(T, \sigma, p(P)) \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

isto acarreta o seguinte fato:

para todo $k \geq k_0$ tem-se $\sigma < T < \tau_k$ e $(T, x^k(T, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$, o qual contradiz claramente a hipótese (3- α) relativa à solução $x^k(\cdot, \sigma, p(P))$ considerada.

Examinemos agora o caso $T_0 < \tau_0$. Como ω é um aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

é

$$(t, x^0(t)) \in \omega, \text{ para cada } t \in [\sigma; \tau_0],$$

chega-se à conclusão que:

para todo $k \geq k_0$ tem-se $\sigma < \tau_k < \tau_0$ e $(\tau_k, x^k(\tau_k, \sigma, p(P))) \in \omega$,
o que contradiz o fato de:

$$(\tau_k, x^k(\tau_k, \sigma, p(P))) = (\tau_k, y_k) \in \partial\omega.$$

A próxima etapa consiste em verificar a convergência:
 $x^k(\tau_k, \sigma, p(P)) \rightarrow x^0(\tau_0, \sigma, p(P))$ quando $k \rightarrow +\infty$. Para isto, vamos
nos servir da desigualdade:

$$(I) \quad |x^k(\tau_k) - x^0(\tau_0)| \leq |x^k(\tau_k) - x^k(\tau_0)| + |x^k(\tau_0) - x^0(\tau_0)|$$

Segundo o lema 1.1 - Capítulo I, o conjunto

$$W^0 = \{(t, x_t^0) \mid t \in [\sigma; \bar{t}]\} \subset \Omega$$

é compacto. Logo, de acordo com o lema 1.2 - Capítulo I, pode-se
afirmar que:

(i) existe uma vizinhança V^0 de W^0 em Ω tal que

$$F \in C^0(V^0, \mathbb{R}^n),$$

(ii) existe uma vizinhança $U \subset C^0(V^0, \mathbb{R}^n)$ e uma constante real

$M > 1$ tal que $|G(t, \psi)| < M$, para qualquer $G \in U$ e todo
 $(t, \psi) \in V^0$.

Considerando agora o ponto $(\tau_0, x_{\tau_0}^0) \in W^0 \subset V^0$, observamos que
deve existir um número real η , com $0 < \eta < \frac{1}{2}(\tau_0 - \sigma)$, tal que:

$$\tau_0 - \eta < t < \tau_0 + \eta \quad \text{e} \quad \psi \in B_\eta(x_{\tau_0}^0) \implies (t, \psi) \in V^0.$$

Tomemos um ε em $\mathbb{R}$, com $0 < \varepsilon < M\eta$. Como $(\tau_k) \rightarrow \tau_0$ quando
 $k \rightarrow +\infty$, então existe um natural $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tal que:

$$k \geq N_1 \implies \tau_0 - \frac{\varepsilon}{M} < \tau_k < \tau_0 + \frac{\varepsilon}{M}.$$

Por outro lado, em vista de um resultado anterior, existe um na-
tural $N_2 \geq N_1$ tal que:

$x^k(\cdot, \sigma, p(P))$ está definida em $[\sigma - r + \frac{\varepsilon}{M}; \bar{t}]$ e
 $x^k(\cdot) \rightarrow x^0(\cdot)$ uniformemente em $[\sigma - r + \frac{\varepsilon}{M}; \bar{t}]$ quando
 $k \rightarrow +\infty$.

Deste modo, temos que:

para cada $t \in [\sigma + \frac{\varepsilon}{M}; \bar{t}]$, $(x_t^k) \rightarrow x_t^0$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Em vista deste fato, existe um natural $N_3 \geq N_2$ tal que:

$$k \geq N_3 \implies x_t^k \in B_{\varepsilon/M}(x_t^0), \text{ para cada } t \in [\sigma + \frac{\varepsilon}{M}; \bar{t}].$$

Em particular, é válida a implicação:

$$(II) \quad k \geq N_3 \implies x_t^k \in B_{\varepsilon/M}(x_t^0) \text{ para cada } t \in]\tau_0 - \frac{\varepsilon}{M}; \tau_0 + \frac{\varepsilon}{M}[$$

$$|x^k(\tau_0) - x^0(\tau_0)| < \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon$$

Assim, temos que $(t, x_t^k) \in V^0$ e $|F(t, x_t^k)| < M$, para cada
 $t \in]\tau_0 - \frac{\varepsilon}{M}; \tau_0 + \frac{\varepsilon}{M}[$.

Enfim, notando que $x^k(\tau_k) - x^k(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_k} F(s, x_s^k) ds$ pode-se escrever

$$(III) \quad k \geq N_3 \implies |x^k(\tau_k) - x^k(\tau_0)| < M|\tau_k - \tau_0| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Daí, segue-se pelas desigualdades (I) a (III) que:

$$k \geq N_3 \implies |\tau_k - \tau_0| < \varepsilon \quad e$$

$$|y_k - x^0(\tau_0)| = |x^k(\tau_k, \sigma, p(P)) - x^0(\tau_0, \sigma, p(P))| < 2\varepsilon.$$

Este resultado permite afirmar que a seqüência $((\tau_k, y_k))$ em
 $S(P)$ possui ao menos uma subsequência convergente; deste modo
 $S(P)$ é compacto. $\square$

Prova de (T₂)

Vamos supor que $S(P)$ seja desconexo. Como $S(P)$ é compacto, pode-se supor que $S(P) = S_1 \cup S_2$, onde os conjuntos S_1 e S_2 são não-vazios, disjuntos e compactos. Em consequência, devem existir soluções $y(\cdot, \sigma, p(P))$, $z(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1) que interceptam W nas componentes S_1 e S_2 , respectivamente. Além disso, segundo a hipótese (3), existem números reais $\tau_1, \tau_2 > \sigma$ tais que

- (α) $\tau_1 \in [\sigma; t_y^+]$ e
 $(t, y(t, \sigma, p(P))) \in \omega$,
 para todo $\sigma \leq t < \tau_1$;
 $\tau_2 \in [\sigma; t_z^+]$ e
 $(t, z(t, \sigma, p(P))) \in \omega$,
 para todo $\sigma \leq t < \tau_2$,

- (β) $(\tau_1, y(\tau_1)) \in S_1 \subset W$ e $(\tau_2, z(\tau_2)) \in S_2 \subset W$,

- (γ) fixado um $\delta > 0$, existem $\bar{\tau}_1 \in [\sigma; t_y^+]$ e $\bar{\tau}_2 \in [\sigma; t_z^+]$,
 com $\tau_1 < \bar{\tau}_1 \leq \tau_1 + \delta$, $\tau_2 < \bar{\tau}_2 \leq \tau_2 + \delta$, tais que:

$$(\bar{\tau}_1, y(\bar{\tau}_1)), (\bar{\tau}_2, z(\bar{\tau}_2)) \notin \bar{\omega}.$$

Agora, segundo o lema 1.1 em [1], existe ao menos uma seqüência de aplicações $F^k(t, \varphi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, cada uma das quais é localmente lipschitziana, tal que $(F^k) \rightarrow F$ uniformemente em Ω quando $k \rightarrow +\infty$. Vamos nos servir desta seqüência para construir duas outras seqüências de aplicações $G^k(t, \varphi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H^k(t, \varphi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ do seguinte modo:

$$G^k(t, \psi) = \begin{cases} F^k(t, \psi) + F(\sigma, p(P)) - F^k(\sigma, p(P)), & \text{se } t < \sigma \\ F^k(t, \psi) + F(t, y_t) - F^k(t, y_t), & \text{se } \sigma \leq t \leq \bar{t}_1 \\ F^k(t, \psi) + F(\bar{t}_1, y_{\bar{t}_1}) - F^k(\bar{t}_1, y_{\bar{t}_1}), & \text{se } t > \bar{t}_1 \end{cases}$$

$$H^k(t, \psi) = \begin{cases} F^k(t, \psi) + F(\sigma, p(P)) - F^k(\sigma, p(P)), & \text{se } t < \sigma \\ F^k(t, \psi) + F(t, z_t) - F^k(t, z_t), & \text{se } \sigma \leq t \leq \bar{t}_2 \\ F^k(t, \psi) + F(\bar{t}_2, z_{\bar{t}_2}) - F^k(\bar{t}_2, z_{\bar{t}_2}), & \text{se } t > \bar{t}_2 \end{cases}$$

Pode-se verificar que estas duas novas seqüências satisfazem:

- (i) para cada índice k , as aplicações $G^k(t, \psi)$ e $H^k(t, \psi)$ são contínuas em Ω e lipschitzianas relativamente a ψ em cada subconjunto compacto de Ω ,
- (ii) $(G^k) \rightarrow F$ e $(H^k) \rightarrow F$ uniformemente em Ω quando $k \rightarrow +\infty$,
- (iii) para todo $t \in [\sigma, \bar{t}_1]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t, \sigma, p(P)) &= F(t, y_t) = F^k(t, y_t) - F(t, y_t) + F^k(t, y_t) \\ &= G^k(t, y_t), \text{ para todo índice } k, \end{aligned}$$

$$y_\sigma = p(P).$$

Nesta situação, a função $y(\cdot, \sigma, p(P))$ é solução única de cada problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = G^k(t, x_t) \\ x_\sigma = p(P) \end{cases}$$

no intervalo $[\sigma; \bar{t}_1]$,

(iv) analogamente, a função $z(\cdot, \sigma, p(P))$ é solução única de cada problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = H^k(t, x_t) \\ x_\sigma = p(P) \end{cases}$$

no intervalo $[\sigma; \bar{t}_2]$.

A partir das seqüências (G^k) e (H^k) vamos definir mais uma seqüência de aplicações, a saber:

$$\begin{aligned} F^k(t, \psi; s) &: \Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ F^k(t, \psi; s) &= s.H^k(t, \psi) + (1-s)G^k(t, \psi). \end{aligned}$$

Nota-se imediatamente que

- (a) para cada $s \in [0; 1]$, $(F^k(t, \psi; s)) \rightarrow F(t, \psi)$ uniformemente em Ω quando $k \rightarrow +\infty$;
- (b) para cada índice k , a aplicação F^k é contínua em $\Omega \times [0; 1]$ e lipschitziana relativamente a ψ em cada subconjunto compacto de $\Omega \times [0; 1]$. Conseqüentemente, para cada $s \in [0; 1]$, cada problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t; s) \\ x_\sigma = p(P) \end{cases}$$

tem uma única solução $x^k(\cdot, \sigma, p(P); s)$, a qual depende continuamente de t e de s .

- (c) como $F^k(t, \psi; 0) = G^k(t, \psi)$ para todo $(t, \psi) \in \Omega$, resulta que a função $y(\cdot, \sigma, p(P))$ é solução única de cada problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t; 0) \\ x_\sigma = p(P) \end{cases}$$

no intervalo $[\sigma; \bar{t}_1]$.

(d) como $F^k(t, \varphi; 1) = H^k(t, \varphi)$ para todo $(t, \varphi) \in \Omega$, resulta que a função $z(\cdot, \sigma, p(P))$ é solução única de cada problema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t; 1) \\ x_\sigma = p(P) \end{cases}$$

no intervalo $[\sigma; \bar{t}_2]$.

Agora, afirmamos que, para cada índice k , a seguinte proposição é verdadeira:

(IV) "Existe ao menos um $s_k \in]0; 1[$ tal que
 $(t, x^k(t, \sigma, p(P); s_k)) \in \bar{\omega}$, para todo $t \in [\sigma; t^+["$,

onde com $[\sigma; t^+["$ estamos indicando o intervalo maximal de existência (à direita) da solução única $x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_k)$ do problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t; s_k) \\ x_\sigma = p(P). \end{cases}$$

Com efeito, suponhamos que isto não aconteça. Isto significa que, para todo $s \in]0; 1[$, o gráfico da solução $x^k(\cdot, \sigma, p(P); s)$ do problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t; s) \\ x_\sigma = p(P) \end{cases}$$

deixa $\bar{\omega}$. Tem sentido, então, definir o conjunto

$$K_k(s) = \{(t, x^k(t, \sigma, p(P); s)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \lambda_k(s) \leq t \leq \gamma_k(s)\},$$

onde

$$(t, x^k(t, \sigma, p(P); s)) \subset \omega,$$

$$\text{para } \sigma \leq t < \lambda_k(s),$$

$$(\lambda_k(s), x^k(\lambda_k(s), \sigma, p(P); s)) \in \partial\omega,$$

$$\gamma_k(s) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid (u, x^k(u, \sigma, p(P); s)) \in \overline{\omega}, \text{ para } \lambda_k(s) \leq u \leq t\}.$$

No sentido da definição anterior é também possível considerar os conjuntos $K_k(0)$ e $K_k(1)$. Assim

$$K_k(0) = \{(\tau_1, y(\tau_1, \sigma, p(P)))\},$$

$$K_k(1) = \{(\tau_2, z(\tau_2, \sigma, p(P)))\}.$$

Em prosseguimento, convém ressaltar que, para cada $s \in [0;1]$, o conjunto $K_k(s)$ é compacto e conexo. Por outro lado, a dependência contínua de $x^k(\cdot, \sigma, p(P); s)$ em relação ao parâmetro s garante a continuidade da aplicação:

$$s \in [0;1] \rightarrow K_k(s) \in 2^{\overline{\omega}}.$$

Assim, de conformidade com o lema 2.3, pode-se afirmar que o conjunto $K_k = \bigcup_{s \in [0;1]} K_k(s) \subset \overline{\omega}$ é compacto e conexo.

Adicionalmente, convém assinalar que $K_k \cap S_i \neq \emptyset$, $i=1,2$.

Agora, como S_1 e S_2 são disjuntos e compactos, devemos ter que

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \text{dist}(S_1, S_2) > 0.$$

Como K_k é conexo e intercepta tanto S_1 como S_2 , deve existir um ponto $Q_k \in K_k$ tal que

$$\text{dist}(Q_k, S_i) \geq \frac{\Delta}{3}, \quad i = 1, 2.$$

Mas Q_k deve estar em algum $K_k(s)$; por conveniência, chamá-lo-emos de $K_k(s_k)$. Deste modo, Q_k deve ser da forma

$$Q_k = (t_k, x^k(t_k, \sigma, p(P); s_k)), \text{ com } \lambda_k(s_k) \leq t_k \leq \gamma_k(s_k).$$

A seguir, "variando-se" o índice k , obtemos uma sequência (s_k) em $[0;1]$, a qual admitirá ao menos uma subsequência convergente, que continuaremos a indicar com a mesma notação (s_k) . Colocaremos

$$s_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} s_k.$$

Chegamos, assim, à seguinte situação:

$$F^k(t, \psi; s_0) \rightarrow F(t, \psi) \text{ uniformemente em } \Omega \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

$x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_0)$ é solução única do problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t, s_0) \\ x_\sigma = p(P). \end{cases}$$

Logo, segundo o teorema 1.7 - Capítulo I, existe ao menos uma solução não-continuável $x^0(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1), passando por $(\sigma, p(P))$, e uma subsequência de $(x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_0))$, que continuaremos a indicar com esta mesma notação, tal que:

"se $x^0(\cdot, \sigma, p(P))$ está definida em $[\sigma-r; \alpha]$, com $\alpha > \sigma$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que:

$$k \geq n_0 \implies x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_0) \text{ está definida em } [\sigma-r+\varepsilon; \alpha] \text{ e}$$

$$x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_0) \rightarrow x^0(\cdot, \sigma, p(P)) \text{ uniformemente em } [\sigma-r+\varepsilon; \alpha], \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Além disso, segundo a hipótese (3), existe um $\tau_0 = \tau_0(P, x^0(\cdot)) > \sigma$ tal que

(α) $\tau_0 \in [\sigma; t_0^+]$ e $(t, x^0(t)) \in \omega$ para todo $\sigma \leq t < \tau_0$,

(β) $(\tau_0, x^0(\tau_0)) \in W$,

(γ) fixado um $\delta > 0$, existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, x^0(\cdot), \delta)$, com

$\bar{t} \in [\sigma; t_0^+]$ e $\tau_0 < \bar{t} \leq \tau_0 + \delta$ tal que $(\bar{t}, x^0(\bar{t})) \notin \bar{\omega}$.

A condição (β) acima implica que $(\tau_0, x^0(\tau_0, \sigma, p(P))) \in S(P)$, o que acarreta o seguinte fato:

(V) $\text{dist}((\tau_0, x^0(\tau_0)), S_1) = 0$ ou $\text{dist}((\tau_0, x^0(\tau_0)), S_2) = 0$.

Nosso próximo passo consiste em extrair uma subsequência de (t_k) , convergente para τ_0 . Inicialmente, observamos que, em decorrência da condição (γ) acima, tem-se:

$(\bar{t}, x^k(\bar{t}, \sigma, p(P); s_0)) \notin \bar{\omega}$, para todo k suficientemente grande.

A dependência contínua de $x^k(\cdot, \sigma, p(P), \cdot)$ em relação ao parâmetro s e o fato de $(s_k) \rightarrow s_0$ quando $k \rightarrow +\infty$, acarretam também:

$(\bar{t}, x^k(\bar{t}, \sigma, p(P); s_k)) \notin \bar{\omega}$, para todo k suficientemente grande.

Isto permite concluir que $\sigma \leq t_k < \bar{t}$, para todo índice k suficientemente grande, de modo que (t_k) é uma sequência limitada. Ela admite, então, ao menos uma subsequência convergente, que continuaremos a indicar com a mesma notação. Colocaremos

$$t_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} t_k.$$

Usando agora procedimento análogo ao empregado na prova de (T_1) pode-se verificar que

$$(x^k(t_k, \sigma, p(P); s_k)) \rightarrow x^0(t_0, \sigma, p(P)) \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Daí, considerando-se que $(t_k, x^k(t_k, \sigma, p(P); s_k)) = Q_k \in \bar{\omega}$ e $(t_k, x^k(t_k, \sigma, p(P); s_k)) \rightarrow (t_0, x^0(t_0, \sigma, p(P)))$ quando $k \rightarrow +\infty$, pode-se concluir que $(t_0, x^0(t_0)) \in \bar{\omega}$.

Por outro lado, o fato de $(t, x^k(t, \sigma, p(P); s_k)) \in \bar{\omega}$, para todo $\sigma \leq t \leq t_k$, implica ainda que $(t, x^0(t)) \in \bar{\omega}$, para todo $\sigma \leq t \leq t_0$.

Em prosseguimento, notamos que o ponto $(t_0, x^0(t_0))$ deve estar na fronteira de ω . De fato, se este ponto estiver em ω , então a solução $x^0(\cdot, \sigma, p(P))$ deve "levar algum tempo" até atingir $\partial\omega$, isto é, deve existir um $\eta > 0$ tal que:

$$(t, x^0(t, \sigma, p(P))) \in \omega,$$

para todo $t_0 \leq t < t_0 + \eta$.

Logo, para todo índice k suficientemente grande, isto acarretará:

$$(t, x^k(t, \sigma, p(P); s_k)) \in \omega, \text{ para todo } \sigma \leq t \leq t_k < t_0 + \eta.$$

Mas isto contradiz o fato de $(\lambda_k(s_k), x^k(\lambda_k(s_k), \sigma, p(P); s_k)) \in \partial\omega$, com $\sigma < \lambda_k(s_k) \leq t_k$, o que comprova a observação feita.

Destas considerações segue-se que

$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \tau_0.$$

Em vista deste resultado é lícito escrever que:

$$\text{dist}((\tau_0, x^0(\tau_0)), S_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}((\tau_k, x^0(\tau_k)), S_1) \geq \frac{\Delta}{3} > 0,$$

o que contradiz (V). Nesta situação, para cada índice k , a asserção (IV) é verdadeira.

Mais uma vez, convém efetuar uma pequena pausa para obter uma visão geral que indique o caminho a seguir. Assim, estamos com:

$$F^k(t, \psi; s_k) \rightarrow F(t, \psi) \quad \text{uniformemente em } \Omega \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty;$$

para cada índice k , $x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_k)$ é uma solução não-continuável do problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F^k(t, x_t; s_k) \\ x_\sigma = p(P) \end{cases}$$

Então, segundo o teorema 1.7 - Capítulo I, existe ao menos uma solução não-continuável $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1), passando pelo ponto $(\sigma, p(P))$, e uma subsequência de $(x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_k))$, que continuaremos a indicar com a mesma notação, tal que:

"se $x(\cdot, \sigma, p(P))$ está definida em $[\sigma-r; \alpha]$, com $\alpha > \sigma$, então, para todo $\epsilon > 0$, existe um natural $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que:

$$\begin{aligned} k \geq n_0 &\implies x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_k) \text{ está definida em } [\sigma-r+\epsilon; \alpha] \quad \text{e} \\ &(x^k(\cdot, \sigma, p(P); s_k)) \rightarrow x(\cdot, \sigma, p(P)) \quad \text{uniformemente em} \\ &[\sigma-r+\epsilon; \alpha], \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Além disso, segundo a hipótese (3), existe um $\tau = \tau(P, x(\cdot, \sigma, p(P))) > \sigma$ tal que

$$(A) \quad \tau \in [\sigma; t^+[\quad \text{e} \quad (t, x(t, \sigma, p(P))) \in \omega \quad \text{para todo } \sigma \leq t < \tau,$$

$$(B) \quad (t, x(t, \sigma, p(P))) \in W,$$

$$(C) \quad \text{fixado um } \delta > 0, \text{ existe um } \bar{t} = \bar{t}(P, x(\cdot), \delta), \text{ com}$$

$$\bar{t} \in [\sigma; t^+[\quad \text{e} \quad \tau < \bar{t} \leq \tau + \delta \quad \text{tal que} \quad (\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \omega.$$

Daí, para todo índice k suficientemente grande, deveremos ter

$$(\bar{t}, x^k(\bar{t}, \sigma, p(P); s_k)) \notin \bar{\omega},$$

resultado que contradiz a asserção (IV), com validade já comprovada. Tal contradição proveio do fato de haveremos suposto $S(P)$ desconexo. $\square$

Prova de (T_3)

De conformidade com as proposições (T_1) e (T_2) , já provadas, para cada ponto $P = (\sigma, x) \in A$, o conjunto $S(P) \subset W$ é compacto e conexo. Quanto a cada ponto $P = (\sigma, x) \in W \cap B$, a hipótese (4) permite que se coloque $S(P) = \{P\}$. Assim, pode-se dizer que:

$$P = (\sigma, x) \in A \cup (W \cap B) \implies S(P) \in C_{cc}(W).$$

Suponhamos agora que a aplicação $S : A \cup (W \cap B) \rightarrow 2^{\partial\omega}$, $P = (\sigma, x) \mapsto S(P)$, seja descontínua em algum ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in A$. Neste caso, existe um $\varepsilon > 0$ e uma seqüência $P_k = (\sigma_k, x_k)$ em A , com $(P_k) \rightarrow P_0$ e $S(P_k) \notin N_\varepsilon(S(P_0))$ para todo índice k . Isto significa que

$$S(P_k) \notin V_\varepsilon(S(P_0)), \text{ para todo índice } k.$$

Conseqüentemente, para cada índice k existe um ponto $Q_k = (t_k, \xi_k)$ que está em $S(P_k)$, mas não na ε -vizinhança $V_\varepsilon(S(P_0))$, de modo que $\text{dist}(Q_k, S(P_0)) \geq \varepsilon$.

A seguir, para cada índice k , consideremos uma solução não-continuada $x^k(\cdot, \sigma_k, p(P_k))$ do problema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t) \\ x_{\sigma_k} = p(P_k) \end{cases},$$

passando pelo ponto $Q_k = (t_k, \xi_k)$.

Segundo o teorema 1.7 - Capítulo I, existe uma solução não-continuável $x(\cdot, \sigma_0, p(P_0))$ do problema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t) \\ x_{\sigma_0} = p(P_0) \end{cases}$$

e uma subsequência de $(x^k(\cdot, \sigma_k, p(P_k)))$, que continuaremos a indicar com a mesma notação, tal que:

"se $x(\cdot, \sigma_0, p(P_0))$ está definida em $[\sigma-r; \alpha]$, com $\alpha > \sigma$, então, para todo $\eta > 0$, existe um natural $k_0 = k_0(\eta)$ tal que

$$k \geq k_0 \implies x^k(\cdot, \sigma_k, p(P_k)) \text{ está definida em } [\sigma-r+\eta; \alpha] \quad \text{e}$$

$$(x^k(\cdot, \sigma_k, p(P_k))) \rightarrow x(\cdot, \sigma_0, p(P_0)) \text{ uniformemente em } [\sigma-r+\eta; \alpha], \text{ quando } k \rightarrow +\infty."$$

Além disso, segundo a hipótese (3), existe um $\tau = \tau(P_0, x(\cdot)) > \sigma$, tal que

(α) $\tau \in [\sigma; t^+]$ e $(t, x(t)) \in \omega$ para todo $\sigma \leq t < \tau$,

(β) $(\tau, x(\tau)) \in W$,

(γ) fixado um $\delta > 0$, existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, x(\cdot), \delta)$, com $\bar{t} \in [\sigma; t^+]$ e $\tau < \bar{t} \leq \tau + \delta$, tal que $(\bar{t}; x(\bar{t})) \notin \bar{\omega}$.

Da propriedade (γ) e da convergência imediatamente anterior a ela segue-se que:

$(\bar{t}, x^k(\bar{t}, \sigma_k, p(P_k))) \notin \bar{\omega}$, para todo índice k suficientemente grande.

Isto permite concluir que $\sigma \leq t_k < \bar{t}$, para todo índice k suficientemente grande, de modo que (t_k) é uma seqüência limitada. Portanto, ela admite ao menos uma subsequência convergente, que continuaremos a indicar com a mesma notação. Colocaremos:

$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$$

Usando agora procedimento análogo ao empregado na prova de (T_1) pode-se verificar que:

$$(x^k(t_k, \sigma_k, p(P_k))) \rightarrow x(t_0, \sigma_0, p(P_0)) \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Como se viu na prova de (T_2) , a conjugação deste resultado com o fato de $(t_k, x^k(t_k, \sigma_k, p(P_k))) = (t_k, \xi_k) \in S(P) \subset \partial\omega$, para cada índice k , implica que $(t_0, x(t_0, \sigma_0, p(P_0))) \in \partial\omega$, de modo que:

$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \tau.$$

Então, uma vez que $(t_0, x(t_0, \sigma_0, p(P_0))) \in S(P_0)$, devemos ter

$$\text{dist}((t_0, x(t_0, \sigma_0, p(P_0))), S(P_0)) = 0.$$

No entanto, também é lícito escrever que:

$$\text{dist}((t_0, x(t_0, \sigma_0, p(P_0))), S(P_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(Q_k, S(P_0)) \geq \varepsilon > 0,$$

contradizendo o resultado acima. Tal contradição proveio do fato de havermos suposto que a aplicação S não era contínua no conjunto $\bar{A}$.

Teorema 2.5

Suponhamos válidas as seguintes hipóteses:

- (1) ω é um aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e W é um subconjunto de $\partial\omega$.
 Z é um subconjunto de $\omega \cup W$ tal que $Z \cap W$ é retrato multivalente de W , mas $Z \cap W$ não é um retrato multivalente de Z .
 Seja $B = \overline{Z} \cap (Z \cup W)$.
- (2) Existe uma aplicação contínua $p : B \rightarrow C$ tal que, para todo $P = (\sigma, x) \in B$, tem-se que $(\sigma, p(P)) \in \Omega$. Além disso, se $P = (\sigma, x) \in W$, então $p(P)(0) = x$.
- (3) Seja A o conjunto de todos os pontos $P = (\sigma, x) \in Z \cap \omega$ tais que, para toda solução $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1), existe um $t > \sigma$, com $t \in [\sigma; t^+]$ e $(t, x(t, \sigma, p(P))) \notin \omega$. Suponhamos que para todo $P = (\sigma, x) \in A$ e para toda solução $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1) exista um $\tau = \tau(P, x(\cdot, \sigma, p(P))) > \sigma$ tal que:
- (α) $\tau \in [\sigma; t^+]$ e $(t, x(t, \sigma, p(P))) \in \omega$, para $\sigma \leq t < \tau$,
 - (β) $(\tau, x(\tau, \sigma, p(P))) \in W$,
 - (γ) para qualquer $\delta > 0$ existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, x(\cdot, \sigma, p(P)), \delta)$, com $\bar{t} \in [\sigma; t^+]$ e $\sigma < \bar{t} \leq \tau + \delta$, tal que $(\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$.
- (4) Para todo $P = (\sigma, x) \in W \cap B$ e toda solução $x(\cdot, \sigma, p(P))$ da (eq. 2.1) e qualquer $\delta > 0$, existe um $\bar{t} = \bar{t}(P, x(\cdot, \sigma, p(P)), \delta)$, com $\bar{t} \in [\sigma; t^+]$ e $\sigma < \bar{t} \leq \sigma + \delta$, tal que $(\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma, p(P))) \notin \bar{\omega}$.

Nestas condições, existe ao menos um ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in Z \cap \omega$ e uma solução $x(\cdot, \sigma_0, p(P_0))$ da (eq. 2.1) tal que:

$$(t, x(t, \sigma_0, p(P_0))) \in \omega, \text{ para todo } t \in [\sigma_0; t^+].$$

Prova

Suponhamos que a tese seja falsa, isto é, que:

"para todo ponto $P_0 = (\sigma_0, x_0) \in Z \cap \omega$ e para qualquer solução $x(\cdot, \sigma_0, p(P_0))$ da (eq. 2.1), existe um $\bar{t} > \sigma_0$, com $\bar{t} \in [\sigma_0; t^+]$, tal que $(\bar{t}, x(\bar{t}, \sigma_0, p(P_0))) \notin \omega$." Isto implica que $Z \cap \omega \subset A$, de modo que se tem, então: $A = Z \cap \omega$.

Daí, pode-se escrever que $Z = A \cup (W \cap B)$.

Segundo a hipótese (1), $Z \cap W$ é retrato multivalente de W . Logo, existe uma aplicação $\pi : W \rightarrow C_{cc}(Z \cap W)$, contínua, e tal que $P \in \pi(P)$, para todo $P \in Z \cap W$.

Por outro lado, o teorema 2.4 assegura que a aplicação:

$$S : A \cup (W \cap B) = Z \rightarrow 2^{\partial \omega}, \quad P \rightarrow S(P)$$

também é contínua. Pois bem, a partir das duas aplicações consideradas, construiremos uma terceira, colocando:

$$h : Z \cup W \rightarrow 2^{Z \cap W}, \quad P \rightarrow h(P) = \bigcup_{Q \in S(P)} \pi(Q)$$

A próxima tarefa consiste em mostrar que esta última aplicação é contínua em $Z \cup W$. Para isto, consideremos um ponto genérico $P_0 \in Z \cup W$ e uma ε -vizinhança fundamental $N_\varepsilon(h(P_0))$. Sendo Q_0 um ponto qualquer de $S(P_0)$, temos:

$$\pi(Q_0) \subset h(P_0) \subset V_\varepsilon(h(P_0)),$$

de modo que

$$V_\varepsilon(\pi(Q_0)) \subset V_\varepsilon(h(P_0)) \quad e$$

$$N_\varepsilon(\pi(Q_0)) \subset N_\varepsilon(h(P_0)).$$

Agora, a continuidade da retração π permite afirmar que existe ao menos um real $\eta = \eta(Q_0) > 0$, tal que

$$\pi(Q) \in N_{\epsilon}(\pi(Q_0)), \text{ para todo } Q \in B_{\eta}(Q_0) \cap W.$$

Segue-se que

$$\pi(Q) \in N_{\epsilon}(h(P_0)),$$

para todo $Q \in B_{\eta}(Q_0) \cap W$.

Mas, $S(P_0)$ é conjunto compacto, de modo que deve existir pontos $Q_1, \dots, Q_k \in S(P_0)$ e números reais $\eta_i > 0$, $i=1, 2, \dots, k$, tais que

$$S(P_0) \subset \left(\bigcup_{i=1}^k B_{\eta_i}(Q_i) \right) \cap W.$$

Nesta situação, é possível encontrar uma ϵ_1 -vizinhança $V_{\epsilon_1}(S(P_0))$ tal que $V_{\epsilon_1}(S(P_0)) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\eta_i}(Q_i)$.

Da continuidade da aplicação S em P_0 decorre que existe ao menos um real $\delta = \delta(P_0) > 0$ tal que

$$S(P) \in N_{\epsilon_1}(S(P_0)), \text{ para todo } P \in B_{\delta}(P_0) \cap Z.$$

Isto implica que

$$S(P) \subset V_{\epsilon_1}(S(P_0)) \cap W, \text{ para todo } P \in B_{\delta}(P_0) \cap Z,$$

e também

$$S(P) \subset \left(\bigcup_{i=1}^k B_{\eta_i}(Q_i) \right) \cap W.$$

Assim, vemos que se $Q \in S(P)$, então $Q \in B_{\eta_i}(Q_i) \cap W$ para al gum $1 \leq i \leq k$, o que acarreta

$$\pi(Q) \subset V_\varepsilon(h(P_0)).$$

Segue-se daí que

$$\bigcup_{Q \in S(P)} \pi(Q) = h(P) \subset V_\varepsilon(h(P_0)).$$

Em resumo, acabamos de verificar que é válida a propriedade:

"para todo $P \in B_\delta(P_0) \cap Z \cup W$ tem-se que $h(P) = \bigcup_{Q \in S(P)} \pi(Q) \in N_\varepsilon(h(P_0))$ ",

a qual constitui a expressão da continuidade da aplicação h em P_0 .

Afirmamos, a seguir, que para todo $P \in Z \cup W$, devemos ter $h(P) \in C_{cc}(Z \cap W)$. Com efeito:

se $P \in W$, então $S(P) = \{P\} \subset W$ é compacto e conexo;

se $P = (\sigma, x) \in Z \cap \omega = A$, então $S(P) \subset C_{cc}(W)$ ".

Daí a continuidade da retração $\pi : W \rightarrow C_{cc}(Z \cap W)$ e o lema 2.3 permitem assegurar que:

$$\bigcup_{Q \in S(P)} \pi(Q) = h(P) \in C_{cc}(Z \cap W)$$

Em vista desta observação, a aplicação h ficará melhor descrita, se colocarmos $h : Z \cup W \rightarrow C_{cc}(Z \cap W)$, $P \mapsto h(P) = \bigcup_{Q \in S(P)} \pi(Q)$.

Para finalizar, pretendemos mostrar que vale a propriedade: " $P \in Z \cap W \implies P \in h(P)$." Em primeiro lugar, temos da definição da aplicação S que:

$$P \in Z \cap W \implies P \in S(P) = \{P\}.$$

Por outro lado, através da retração $\pi : W \rightarrow C_{cc}(Z \cap W)$, temos que $P \in \pi(P)$. Assim, considerando-se que

$$h(P) = \bigcup_{Q \in S(P)} \pi(Q) = \pi(P),$$

obviamente teremos $P \in h(P)$.

As considerações anteriores nos mostram que a aplicação $h/Z : Z \rightarrow C_{cc}(Z \cap W)$, $P \mapsto h(P) = \bigcup_{Q \in S(P)} \pi(Q)$ é uma retração multivalente, resultado que contradiz a hipótese (1).

Pois bem, desta contradição decorre a validade da tese.

§ 3. Resultado Principal

O lema abaixo está contido no trabalho de Izé [5]. Uma vez que ele é fundamental para a consecução do objetivo proposto, achamos conveniente acrescentar também a correspondente prova.

Lema 3.1

Suponhamos que $a(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) > 1 + \varepsilon$, para algum número real $\varepsilon \geq 0$.

Então, dado qualquer número real $N > 0$, a equação diferencial escalar:

$$(eq: 3.1) \quad \dot{\xi}(t) - [a(t) - 1 - \varepsilon]\xi(t) + Na(t) = 0$$

tem pelo menos uma solução $\xi(t)$, definida em um intervalo $[T_1, +\infty[$, com $N \leq \xi(t) \leq (K+1)N$ para algum $K > 0$ e todo $t \geq T_1$.

Prova

Uma vez escolhidos $c \in]1+\epsilon; \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t)[$
e $\epsilon' = \frac{1}{2}[c-(1+\epsilon)]$, a hipótese $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) > 1+\epsilon$
garante que deve existir um $T_1 > T$ tal que

$$a(t) > c - \epsilon', \quad \text{para todo } t \geq T_1.$$

Assim: $a(t) - 1 - \epsilon > \epsilon'$, para todo $t \geq T_1$.

Segue-se deste fato que $\int_{T_1}^{+\infty} [a(s) - 1 - \epsilon] ds = +\infty$, o qual, por sua vez, acarreta

$$e^{-\int_{T_1}^{+\infty} [a(s) - 1 - \epsilon] ds} = 0.$$

Vamos usar este resultado para comprovar que:

"para cada $t \geq T_1$, a integral imprópria

$$\int_t^{+\infty} (1+\epsilon)e^{-\int_{T_1}^u [a(s) - 1 - \epsilon] ds} du \stackrel{\text{def}}{=} I_1(t)$$

converge".

Com efeito, é possível encontrar um número real $K > 0$, suficientemente grande, de modo que $K\epsilon' > 1+\epsilon$. Daí

$$K[a(u) - 1 - \epsilon] > K\epsilon' > 1 + \epsilon, \quad \text{para todo } u \geq T_1.$$

Assim, para todo $t \geq T_1$, pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
 0 < I_1(t) &< \int_t^{+\infty} K[a(u)-1-\epsilon]e^{-\int_{T_1}^u [a(s)-1-\epsilon]ds} du = \\
 &= K[-e^{-\int_{T_1}^u [a(s)-1-\epsilon]ds}]_t^{+\infty} = Ke^{-\int_{T_1}^u [a(s)-1-\epsilon]ds},
 \end{aligned}$$

resultado que garante a convergência de $I_1(t)$.

A próxima tarefa é semelhante à anterior; ela consiste em verificar que

"para cada $t \geq T_1$, a integral imprópria

$$\int_t^{+\infty} a(u)e^{-\int_{T_1}^u [a(s)-1-\epsilon]ds} du \stackrel{\text{def}}{=} I_2(t)$$

converge".

De fato, considerando-se que:

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= \int_t^{+\infty} e^{(1+\epsilon)(u-T_1)} a(u)e^{-\int_{T_1}^u a(s)ds} du = \\
 &= -\int_t^{+\infty} e^{(1+\epsilon)(u-T_1)} \frac{d}{du} \left(e^{-\int_{T_1}^u a(s)ds} \right) du,
 \end{aligned}$$

uma integração por partes conduz a:

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= e^{-\int_{T_1}^t [a(s)-1-\varepsilon]ds} + \int_t^{+\infty} (1+\varepsilon)e^{-\int_{T_1}^u [a(s)-1-\varepsilon]ds} du \\
 &= e^{-\int_{T_1}^t [a(s)-1-\varepsilon]ds} + I_1(t) .
 \end{aligned}$$

Então, uma vez que $I_1(t)$ converge, o mesmo acontece com $I_2(t)$. Além disso, pode-se observar que

$$0 < I_2(t) < (K+1)e^{-\int_{T_1}^t [a(s)-1-\varepsilon]ds}, \text{ para todo } t \geq T_1.$$

Tendo por base a convergência da integral $I_2(t)$, é perfeitamente lícito afirmar que:

$$\xi(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\int_{T_1}^t [a(s)-1-\varepsilon]ds} \int_t^{+\infty} N a(u) e^{-\int_{T_1}^u [a(s)-1-\varepsilon]ds} du$$

está bem definido, para cada $t \geq T_1$. Tem sentido, pois, considerar a aplicação $\xi(\cdot) : [T_1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, a qual, como se pode verificar, é solução da (eq. 3.1) no intervalo $[T_1; +\infty[$.

Finalmente, levando-se em conta que:

$$\begin{aligned}
 \xi(t) &= N e^{\int_{T_1}^t [a(s)-1-\varepsilon]ds} \cdot I_2(t) = \\
 &= N + N e^{\int_{T_1}^t [a(s)-1-\varepsilon]ds} \cdot I_1(t) ,
 \end{aligned}$$

bem como:

$$0 < I_1(t) < Ke^{-\int_{T_1}^t [a(s)-1-\varepsilon]ds}, \quad \text{para todo } t \geq T_1,$$

obtemos

$$N < \xi(t) < N + NK, \quad \text{para todo } t \geq T_1. \quad \square$$

Teorema 3.2

Suponhamos que $a(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $b(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $f(t, \phi, \psi) :]T; +\infty[\times C_H \times C \rightarrow \mathbb{R}$, com $0 < H < +\infty$, sejam funções contínuas. Suponhamos também que sejam válidas as seguintes hipóteses:

$$(h_1) \quad |b(t)| \leq a(t), \quad \text{para todo } t > T,$$

$$(h_2) \quad \text{existe um número real } \varepsilon \geq 0, \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) > 1 + \varepsilon,$$

$$(h_3) \quad \text{existe um número real } M > 0 \text{ tal que } |f(t, \phi, \psi)| \leq Me^{\varepsilon t}, \\ \text{para todo } (t, \phi, \psi) \in]T; +\infty[\times C_H \times C,$$

$$(h_4) \quad \text{existem números reais } x_1 \text{ e } x_2, \text{ com } -H < x_1 < 0 < x_2 < H, \\ \text{tais que:}$$

$$\begin{aligned} & - \text{para qualquer } (\phi, \psi) \in C_H \times C, \text{ com } \phi(0) = x_1, \\ & \quad x_1 < \phi(\theta) < x_2, \text{ para } \theta \in [-r; 0[\text{ e } \psi(0) = 0, \text{ tem-se} \\ & \quad f(t, \phi, \psi) \leq -\lambda a(t), \text{ para todo } t > T, \text{ onde } \lambda = \max\{|x_1|, x_2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \text{para qualquer } (\phi, \psi) \in C_H \times C, \text{ com } \phi(0) = x_2, \\ & \quad x_1 < \phi(\theta) < x_2, \text{ para } \theta \in [-r; 0[\text{ e } \psi(0) = 0, \text{ tem-se} \\ & \quad f(t, \phi, \psi) \geq \lambda a(t), \text{ para todo } t > T. \end{aligned}$$

Nestas condições, existem números reais $\sigma_0 > \max\{0, T\}$, $B > 0$ e uma solução $x(\cdot)$ da (eq. 1.1), definida em $[\sigma_0; +\infty[$, tais que

$$(a) \quad x_1 \leq x(t) \leq x_2 ,$$

$$(b) \quad |\dot{x}(t)| \leq B e^{\epsilon t} ,$$

para todo $t \geq \sigma_0$.

Prova

Tomemos em $\mathbb{R}$ uma seqüência (ϵ_n) , com $0 < \epsilon_n < 1$ para cada índice n , e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$. A seguir, para cada um desses índices, definamos as seguintes funções:

$$a_n(t) = a(t) + \epsilon_n e^{-\epsilon t} , \quad t > T ,$$

$$b_n(t) = b(t) + \epsilon_n e^{-\epsilon t} , \quad t > T ,$$

$$\begin{aligned} f_n(t, \varphi, \psi) = f(t, \varphi, \psi) + \frac{\varphi(0) - x_1}{x_2 - x_1} [\varphi(0) + \lambda] \epsilon_n e^{-\epsilon t} + \\ + \frac{x_2 - \varphi(0)}{x_2 - x_1} [\varphi(0) - \lambda] \epsilon_n e^{-\epsilon t} , \end{aligned}$$

para $t > T$, $\varphi \in C_H$ e $\psi \in C$.

Pode-se observar que:

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} a_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) > 1 + \epsilon ,$$

$$(ii) \quad |b_n(t)| \leq a_n(t) , \quad \text{para todo } t > T ,$$

(iii) para qualquer $(\varphi, \psi) \in C_H \times C$, com $\varphi(0) = x_1$ e $\psi(0) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_n(t, \varphi, \psi) = f(t, \varphi, \psi) + [x_1 - \lambda] \epsilon_n e^{-\epsilon t} \leq \\ \leq -\lambda a(t) - \lambda \epsilon_n e^{-\epsilon t} + x_1 \epsilon_n e^{-\epsilon t} < -\lambda a_n(t) , \end{aligned}$$

para todo $t > T$.

(iv) para qualquer $(\varphi, \psi) \in C_H \times C$, com $\varphi(0) = x_2$ e $\psi(0) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_n(t, \varphi, \psi) &= f(t, \varphi, \psi) + [x_2 + \lambda] \varepsilon_n e^{-\varepsilon t} \geq \\ &\geq \lambda a(t) + \lambda \varepsilon_n e^{-\varepsilon t} + x_2 \varepsilon_n e^{-\varepsilon t} > \lambda a_n(t), \end{aligned}$$

para todo $t > T$.

(v) para todo $t \in]T; +\infty[\cap [0; +\infty]$ e qualquer $(\varphi, \psi) \in C_H \times C$, tem-se

$$\begin{aligned} |f_n(t, \varphi, \psi)| &= \\ &= \left| f(t, \varphi, \psi) + \frac{2\lambda + x_2 - x_1}{x_2 - x_1} \varepsilon_n e^{-\varepsilon t} \cdot \varphi(0) - \frac{\lambda(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} \varepsilon_n e^{-\varepsilon t} \right| \leq \\ &\leq M e^{\varepsilon t} + \frac{2\lambda + x_2 - x_1}{x_2 - x_1} H e^{\varepsilon t} + \frac{\lambda(|x_1| + x_2)}{x_2 - x_1} e^{\varepsilon t} \end{aligned}$$

Este resultado acarreta, pois, a existência de um número real $M_0 > 0$ tal que:

$$|f_n(t, \varphi, \psi)| \leq M_0 e^{\varepsilon t}, \quad \text{para todo } t \in]T; +\infty[\cap [0; +\infty[\text{ e}$$

para qualquer $(\varphi, \psi) \in C_H \times C$.

Pois bem, aproveitaremos as funções $a_n(t)$, $b_n(t)$ e $f_n(t, \varphi, \psi)$ na construção dos sistemas:

$$(eq. 1.1)_n \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_n(t)y + b_n(t)x(t-r) + f_n(t, x_t, y_t) . \end{cases}$$

Paralelamente, definiremos as seguintes funções:

$$h_1^n(P) = h_1^n(t, x, y) = y - \xi_n(t) e^{\varepsilon t} + x,$$

$$h_2^n(P) = y - \xi_n(t) e^{\varepsilon t} - x,$$

$$h_3^n(P) = -y - \xi_n(t) e^{\varepsilon t} - x,$$

$$h_4^n(P) = -y - \xi_n(t) e^{\varepsilon t} + x,$$

$$h_5^n(P) = x - x_2,$$

$$h_6^n(P) = -x + x_1$$

$$h_7^n(P) = \tau_1 - t,$$

plano $t = \sigma$

onde τ_1 é um "instante" a ser escolhido convenientemente em $]T; +\infty[\cap [0; +\infty[$ e $\xi_n(t) : [\tau_1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, estritamente positiva, também a ser escolhida adequadamente. Através dessas funções, definiremos o conjunto:

$$\omega^n = \{P = (\sigma, x, y) \in]T; +\infty[\times \mathbb{R}^2 \mid h_i^n(P) < 0, \text{ para cada } i=1,2,\dots,7\},$$

o qual será um subconjunto aberto do $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Agora, seja $P = (\sigma, x, y)$ um ponto qualquer de $\partial\omega$, com $\sigma > \tau_1 + r$ e $h_i^n(P) = 0$, para algum $i = 1, 2, \dots, 6$. Uma vez escolhidos ϕ em C_H e ψ em C , com $\phi(0) = x$, $\psi(0) = y$ e $(\sigma + \theta, \phi(\theta), \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $-r \leq \theta < 0$, desejamos examinar o sinal da derivada

$$(1) \quad \frac{d}{dt} h_i^n(t, x(t, \sigma, \phi, \psi), y(t, \sigma, \phi, \psi))_{t=\sigma},$$

onde com $(x(\cdot, \sigma, \phi, \psi), y(\cdot, \sigma, \phi, \psi))$ estamos indicando uma solução qualquer do sistema (eq. 1.1)_n, definida em $[\sigma; +\infty[$ e passando

por (σ, ψ, ψ) . Por economia de notação, vamos preferir indicar a derivada (1) simplesmente pelo símbolo:

$$\frac{d}{dt}h_i^n(P), \quad \text{onde } P = (\sigma, x, y) = (\sigma, \psi(0), \psi(0)).$$

No caso em que esta derivada for nula, passaremos ao exame da derivada segunda

$$\frac{d^2}{dt^2}h_i^n(P)$$

caso tenha sentido considerá-la.

Suponhamos inicialmente que $P = (\sigma, x, y) \in \partial\omega$ seja tal que $h_1^n(P) = 0$. Temos, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h_1^n(P) &= [\dot{y} + \dot{x} - \dot{\xi}_n(t)e^{\varepsilon t} - \varepsilon\xi_n(t)e^{\varepsilon t}]_{t=\sigma} = \\ &= [b_n(t)x(t-r) + a_n(t)y(t) + f_n(t, x_t, y_t) + y(t) - \dot{\xi}_n(t)e^{\varepsilon t} - \varepsilon\xi_n(t)e^{\varepsilon t}]_{t=\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h_1^n(P) &= b_n(\sigma)\psi(-r) + a_n(\sigma)\psi(0) + \\ &+ f_n(\sigma, \psi, \psi) + \psi(0) - \dot{\xi}_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma} - \varepsilon\xi_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma} \end{aligned}$$

Considerando ainda que $\psi(0) = -\psi(0) + \xi_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h_1^n(P) &= b_n(\sigma)\psi(-r) - a_n(\sigma)\psi(0) + a_n(\sigma)\xi_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma} + \\ &+ f_n(\sigma, \psi, \psi) - \psi(0) + \xi_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma} - \dot{\xi}_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma} - \varepsilon\xi_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma}. \end{aligned}$$

Daí

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} h_1^n(P) &> b_n(\sigma) \psi(-r) - a_n(\sigma) \psi(0) + a_n(\sigma) \xi_n(\sigma) e^{\epsilon \sigma} + \\ &+ f_n(\sigma, \psi, \psi) - \psi(0) - \dot{\xi}_n(\sigma) e^{\epsilon \sigma} - \epsilon \xi_n(\sigma) e^{\epsilon \sigma} \end{aligned}$$

Pode-se prosseguir trabalhando sobre esta desigualdade desde que se note os seguintes fatos:

$$(1.^o) \quad f_n(\sigma, \psi, \psi) \geq -M_o e^{\epsilon \sigma},$$

$$(2.^o) \quad \begin{aligned} b_n(\sigma) \psi(-r) &\geq -|b_n(\sigma)| |\psi(-r)| \geq -a_n(\sigma) |\psi(-r)| > -a_n(\sigma) \lambda \geq \\ &\geq -a_n(\sigma) \lambda e^{\epsilon \sigma}, \end{aligned}$$

uma vez que $(\sigma+\theta, \psi(\theta), \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $-r \leq \theta < 0$,

$$(3.^o) \quad 0 \leq \psi(0) \leq x_2 \leq \lambda \leq \lambda e^{\epsilon \sigma}. \text{ Impondo-se adicionalmente que } \xi_n(t) \text{ deva satisfazer a condi\c{c}\~ao}$$

$$\xi_n(t) \geq \lambda, \text{ para todo } t \geq \tau_1,$$

isto permitirá escrever que $0 \leq \psi(0) \leq \xi_n(\sigma) e^{\epsilon \sigma}$.

Levando estes resultados para a desigualdade (2), obtemos

$$(3) \quad \frac{d}{dt} h_1^n(P) > [-\dot{\xi}_n(\sigma) + (a_n(\sigma) - 1 - \epsilon) \xi_n(\sigma) - 2\lambda a_n(\sigma) - M_o] e^{\epsilon \sigma}$$

Procedendo-se analogamente nos casos $j=2,3,4$ verifica-se que

$$h_j^n(P) = 0 \text{ implica:}$$

$$j=2,3,4$$

$$\frac{d}{dt} h_j^n(P) > [-\dot{\xi}_n(\sigma) + (a_n(\sigma) - 1 - \epsilon) \xi_n(\sigma) - 2\lambda a_n(\sigma) - M_o] e^{\epsilon \sigma}$$

Logo, a fim de que se tenha $\frac{d}{dt}h_i^n(P) > 0$ para cada $i=1,2,3,4$ deve ser válida a desigualdade diferencial

$$\dot{\xi}_n(\sigma) - (a_n(\sigma)-1-\varepsilon)\xi_n(\sigma) + (M_0 + 2\lambda a_n(\sigma)) < 0.$$

Mas, segundo o lema 3.1, uma vez escolhido $c \in \mathbb{R}$, com

$$1+\varepsilon < c < \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} a_n(t),$$

e $\varepsilon' = \frac{1}{2}[c-(1+\varepsilon)]$, deve existir um real $\tau_1 \in]T; +\infty[\cap [0; +\infty[$ tal que

$$t \geq \tau_1 \implies a_n(t) > a(t) > c-\varepsilon' = 1+\varepsilon+\varepsilon' > 1+\varepsilon.$$

Por outro lado, pode-se escolher um número real $\rho > 0$, suficientemente grande, de modo a se ter $\rho(1+\varepsilon) > M_0$. Daí

$$t \geq \tau_1 \implies \rho a_n(t) > \rho(1+\varepsilon) > M_0.$$

Em vista desta observação é válida a desigualdade:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) - [a_n(t)-1-\varepsilon]\xi_n(t) + M_0 + 2\lambda a_n(t) &< \\ &< \dot{\xi}_n(t) - [a_n(t)-1-\varepsilon]\xi_n(t) + N a_n(t), \end{aligned}$$

onde $N = \rho+2\lambda$, para todo $t \geq \tau_1$.

Nesta situação, qualquer solução $\xi_n(t)$ da equação diferencial escalar

$$(eq.3.1) \quad \dot{\xi} - [a_n(t)-1-\varepsilon]\xi + N a_n(t) = 0,$$

definida no intervalo $[\tau_1; +\infty[$, faz com que $\frac{d}{dt}h_i^n(P) > 0$, para $i=1,2,3,4$. Ora, o lema 3.1 garante que a (eq. 3.1) acima possui ao menos uma solução $\xi_n(t)$, definida em $[\tau_1; +\infty[$, satisfazendo à condição:

$$N < \xi_n(t) < (K+1)N, \quad \text{para todo } t \geq \tau_1,$$

onde $K > 0$, como se recorda, é um número real escolhido de modo a satisfazer $K\varepsilon' > 1+\varepsilon$. Em particular, convém notar que

$$\xi_n(t) > \lambda, \quad \text{para todo } t \geq \tau_1.$$

Deste modo, tem sentido lançar mão da solução $\xi_n(t)$ da (eq. 3.1) com a finalidade de se construir as funções $h_i^n(t, x, y)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. De posse destas funções, definiremos os conjuntos:

$$W_i^n = \{P = (\sigma, x, y) \in \partial\omega \mid \sigma > \tau_1 + r \text{ e } h_i^n(P) = 0\} \\ i=1, 2, 3, 4.$$

Em prosseguimento, suponhamos que $P = (\sigma, x, y) \in \partial\omega$ seja tal que $h_5^n(P) = 0$. Uma vez que

$$\frac{d}{dt}h_5^n(P) = [\dot{x}(t)]_{t=\sigma} = [y(t)]_{t=\sigma} = \psi(0),$$

então

$$\psi(0) > 0 \implies \frac{d}{dt}h_5^n(P) > 0,$$

$$\psi(0) < 0 \implies \frac{d}{dt}h_5^n(P) < 0.$$

Suponhamos agora que $\psi(0) = 0$. Então

$$\frac{d}{dt}h_5^n(P) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}h_5^n(P) &= [\ddot{y}(t)]_{t=\sigma} = [a_n(t)\psi(0) + b_n(t)\psi(-r) + f_n(t, \psi, \psi)]_{t=\sigma} = \\ &= b_n(\sigma)\psi(-r) + f_n(\sigma, \psi, \psi). \end{aligned}$$

Dai, vem

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}h_5^n(P) &\geq -|b_n(\sigma)| |\psi(-r)| + f_n(\sigma, \psi, \psi) > \\ &> -a_n(\sigma)\lambda + f_n(\sigma, \psi, \psi) > 0. \end{aligned}$$

Com base nas considerações desta etapa, definiremos o conjunto:

$$W_5^n = \{P = (\sigma, x, y) \in \partial\omega \mid \sigma > \tau_1 + r, x = x_2, 0 \leq y < -x_2 + \xi_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma}\}.$$

Por último, suponhamos que

$P = (\sigma, x, y) \in \partial\omega$ seja tal

que $h_6^n(P) = 0$. Considerando

que

$$\frac{d}{dt}h_6^n(P) = [-\dot{x}(t)]_{t=\sigma} = [-y(t)]_{t=\sigma} = -\psi(0),$$

temos

$$\psi(0) > 0 \implies \frac{d}{dt}h_6^n(P) < 0,$$

$$\psi(0) < 0 \implies \frac{d}{dt}h_6^n(P) > 0$$

plano $t = \sigma_0$

Suponhamos agora que $\psi(0) = 0$. Então

$$\frac{d}{dt}h_6^n(P) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}h_6^n(P) = [-\dot{y}(t)]_{t=\sigma} = -b_n(\sigma)\psi(-r) - f_n(\sigma, \psi, \psi).$$

Daí, vem

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}h_6^n(P) &\geq -|b_n(\sigma)| |\psi(-r)| - f_n(\sigma, \psi, \psi) > \\ &> -a_n(\sigma)\lambda - f_n(\sigma, \psi, \psi) > 0. \end{aligned}$$

Como no caso anterior, aproveitamos as considerações acima para definir

$$W_6^n = \{P = (\sigma, x, y) \in \partial\omega \mid \sigma > \tau_1 + r, x = x_1, -x_1 - \xi_n(\sigma)e^{\varepsilon\sigma} < y \leq 0\}.$$

finalmente, juntaremos os conjuntos W_i^n para obter

$$W^n = \bigcup_{i=1}^6 W_i^n$$

Vamos fixar números reais $\sigma_0 > \tau_1 + r$ e $x_0 \neq 0$ em $]x_1; x_2[$. A seguir, vamos tomar um segmento Z^n no plano $t = \sigma_0$, paralelo ao eixo Oy , passando pelo ponto $(\sigma_0, x_0, 0)$ e com extremidades sobre W^n .

Então, $Z^n \cap W^n$ é retrato multivalente de W^n , uma vez que é retrato no sentido usual. No entanto, $Z^n \cap W^n$ não é retrato multivalente de Z^n pelo fato deste último ser conexo, enquanto o primeiro é desconexo. Vamos construir também a seguinte aplicação

$$p^n : Z^n \rightarrow C_H \times C, \quad P = (\sigma_0, x_0, y) \rightarrow p^n(P) = (\psi, \psi),$$

onde $\psi(\theta) = x_0$,

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \frac{y}{\xi_n(\sigma_0) e^{\varepsilon \sigma_0}} \xi_n(\sigma_0 + \theta) e^{\varepsilon(\sigma_0 + \theta)} e^\theta = \\ &= \frac{y}{\xi_n(\sigma_0)} \xi_n(\sigma_0 + \theta) e^{(\varepsilon + 1)\theta} \end{aligned}$$

para $-r \leq \theta \leq 0$. Ela é claramente contínua sobre Z^n . Além disso, para todo $P = (\sigma_0, x_0, y) \in Z^n \cap W^n$, temos:

$$(x(\sigma_0, \sigma_0, p^n(P)), y(\sigma_0, \sigma_0, p^n(P))) = (x_0, \psi(0)) = (x_0, y).$$

Agora, seja A o conjunto de todos os pontos $P = (\sigma_0, x_0, y) \in Z^n \cap W^n$ tais que, para toda solução $(x(\cdot, \sigma_0, p^n(P)), y(\cdot, \sigma_0, p^n(P)))$ da (eq. 1.1)_n, existe um $t > \sigma$, com $t \in [\sigma; t^+[$ e

$$(t, x(t, \sigma_0, p^n(P)), y(t, \sigma_0, p^n(P))) \notin \omega^n.$$

Para cada $P = (\sigma_0, x_0, y) \in A$ e cada solução $(x(\cdot, \sigma_0, p^n(P)), y(\cdot, \sigma_0, p^n(P)))$ da (eq. 1.1)_n, pode-se definir

$$t(P) = \inf \{t \geq \sigma_0 \mid (t, x(t, \sigma_0, p^n(P)), y(t, \sigma_0, p^n(P))) \notin \omega^n\},$$

e observar relativamente ao mesmo as propriedades abaixo:

$$\sigma_0 < t(P) < +\infty,$$

$$Q = (t(P), x(t(P), \sigma_0, p^n(P)), y(t(P), \sigma_0, p^n(P))) \in \partial\omega,$$

$$(4) \quad (t, x(t, \sigma_0, p^n(P)), y(t, \sigma_0, p^n(P))) \in \omega, \text{ para todo } t \in [\sigma_0; t(P)[.$$

Esta última torna evidente que a hipótese (3.α) do teorema 2.5 está plenamente satisfeita.

Mostraremos, a seguir, que o ponto Q acima mencionado está, de fato, em W^n . Com efeito, suponhamos que isto seja falso. Logo, deve acontecer apenas uma dentre as seguintes situações:

$$\text{ou } x(t(P), \sigma_0, p^n(P)) = x_2 \text{ e } x_2 - \xi_n(t(P))e^{\varepsilon t(P)} < y(t(P), \sigma_0, p^n(P)) < 0,$$

$$\text{ou } x(t(P), \sigma_0, p^n(P)) = x_1 \text{ e } 0 < y(t(P), \sigma_0, p^n(P)) < -x_1 - \xi_n(t(P))e^{\varepsilon t(P)}.$$

No primeiro caso, já se viu que

$$\frac{d}{ds} h_5^n(s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P)))_{s=t(P)} < 0.$$

Logo, a função $h_5^n(\cdot, x(\cdot, \sigma_0, p^n(P)), y(\cdot, \sigma_0, p^n(P)))$ deve ser estritamente decrescente em uma vizinhança $]t(P) - \delta; t(P) + \delta[$, de modo que:

$$t(P) - \delta < s < t(P) \implies h_5^n(s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) > 0,$$

isto é,

$$x(s, \sigma_0, p^n(P)) > x_2.$$

Observe-se, no entanto, que isto contradiz (4).

O exame do segundo caso é análogo ao do primeiro, conduzindo também à contradição de (4). Conclui-se daí que o ponto Q está realmente em W^n . Com isto, fica comprovada a validade da hipótese (3.β) do teorema 2.5.

Uma vez estabelecido que $Q \in W^n$, suponhamos que se tenha $Q \in W_i^n$, para algum $i = 1, 2, 3, 4$. Considerando que $\frac{d}{ds} h_i^n(Q) > 0$, então a função $h_i^n(\cdot, x(\cdot, \sigma_0, p^n(P)), y(\cdot, \sigma_0, p^n(P)))$ deve ser estritamente crescente em alguma vizinhança $]t(P) - \delta_i; t(P) + \delta_i[$, de modo que:

$$t(P) < s < t(P) + \delta_i \implies h_i^n(s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) > h_i^n(Q) = 0.$$

Isto significa que

$$t(P) < s < t(P) + \delta_i \implies (s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) \notin \bar{W}^n.$$

Façamos agora a suposição $Q \in W_5^n$. Evidentemente, aqui necessitamos distinguir duas situações, a saber:

$$(1.^o) \ x(t(P), \sigma_0, p^n(P)) = x_2 \text{ e } 0 < y(t(P), \sigma_0, p^n(P)) < -x_2 + \xi_n(t(P)) e^{\varepsilon t(P)}$$

$$(2.^o) \ x(t(P), \sigma_0, p^n(P)) = x_2 \text{ e } y(t(P), \sigma_0, p^n(P)) = 0.$$

No primeiro caso, temos que $\frac{d}{ds} h_5^n(Q) > 0$. Logo, mediante consideração análoga à anterior, conclui-se pela existência de um

$\delta_5 > 0$ tal que $t(P) < s < t(P) + \delta_5 \implies (s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) \notin \bar{\omega}^n$.

No segundo caso, estamos com $\frac{d}{ds} h_5^n(Q) = 0$ e $\frac{d^2}{ds^2} h_5^n(Q) > 0$.

Portanto, a função $h_5^n(\cdot, x(\cdot, \sigma_0, p^n(P)), y(\cdot, \sigma_0, p^n(P)))$ deve ter um mínimo local em $s = t(P)$. Logo, deve existir um $\delta_5 > 0$ tal que

$$t(P) < s < t(P) + \delta_5 \implies h_5^n(s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) > h_5^n(Q) = 0,$$

isto é,

$$(s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) \notin \bar{\omega}^n.$$

Finalmente, suponhamos que $Q \in W_6^n$. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, verifica-se que deve existir um $\delta_6 > 0$ tal que

$$t(P) < s < t(P) + \delta_6 \implies (s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) \notin \bar{\omega}^n.$$

Pois bem, todas estas conclusões evidenciam que a hipótese (3.γ) do teorema 2.5 está plenamente satisfeita.

Em prosseguimento, consideremos um ponto genérico $P = (\sigma_0, x_0, y)$ de $W^n \cap Z^n$ e uma solução qualquer $(x(\cdot, \sigma_0, p^n(P)), y(\cdot, \sigma_0, p^n(P)))$ da (eq. 1.1)_n. Então, $h_i^n(P) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, 6$. Agora, mediante um raciocínio análogo ao da etapa anterior, pode-se concluir pela existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\sigma_0 < s < \sigma_0 + \delta \implies (s, x(s, \sigma_0, p^n(P)), y(s, \sigma_0, p^n(P))) \notin \bar{\omega}^n,$$

o que garante a validade da hipótese (4) do teorema 2.5.

Dado que todas as hipóteses do teorema 2.5 estão satisfeitas, pode-se afirmar então que:

"existe ao menos um ponto $P^n = (\sigma_0, x_0, y_n) \in Z^n \cap \omega^n$ e uma solução $(x^n(\cdot, \sigma_0, p^n(P^n)), y^n(\cdot, \sigma_0, p^n(P^n)))$ da (eq. 1.1) $_n$ tal que: $(t, x^n(t, \sigma_0, p^n(P^n)), y^n(t, \sigma_0, p^n(P^n))) \in \omega^n$, para todo $t \in [\sigma_0; t^+["$.

Em vista da definição do conjunto ω^n , esta propriedade implica que:

$$(5) \quad \begin{aligned} x_1 &< x^n(t, \sigma_0, p^n(P^n)) < x_2 \quad \text{e} \\ |\dot{x}^n(t, \sigma_0, p^n(P^n))| &= |y^n(t, \sigma_0, p^n(P^n))| < \xi_n(t) e^{\varepsilon t}, \end{aligned}$$

para todo $t \geq \sigma_0$.

Vamos retornar à equação diferencial escalar:

$$(eq. 3.1) \quad \dot{u} = [a(t) - 1 - \varepsilon]u - Na(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t, u),$$

bem como considerar as equações diferenciais

$$(eq. 3.1)_n \quad \dot{u} = [a_n(t) - 1 - \varepsilon]u - Na_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_n(t, u).$$

Já se verificou anteriormente que, para cada índice n , esta última equação admite ao menos uma solução $\xi_n(t)$ no intervalo $[\tau_1; +\infty[$, satisfazendo à condição

$$N < \xi_n(t) < (K+1)N, \quad \text{para todo } t \geq \tau_1.$$

Em particular, tem-se obviamente que $N < \xi_n(\tau_1) < (K+1)N$; logo, a seqüência $(\xi_n(\tau_1))$ deve possuir ao menos uma subsequência convergente $(\xi_{n_k}(\tau_1))$. Por outro lado, pode-se verificar que

$$|g_{n_k}(t, u) - g(t, u)| \leq \varepsilon_{n_k} |u - N| e^{-\varepsilon t}$$

Assim, para todo ponto (t, u) do conjunto

$$U = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in]T; +\infty[\cap [0; +\infty[, N < u < (K+2)N\},$$

tem-se que

$$|g_{n_k}(t, u) - g(t, u)| < KN\varepsilon_{n_k},$$

resultado que pode ser traduzido como

$$(g_{n_k}) \rightarrow g \text{ uniformemente em } U \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

As informações obtidas nesta etapa permitem a utilização do teorema 1.7 - Capítulo I; logo, é possível garantir que

"existe ao menos uma solução $\xi(t)$ da (eq. 3.1) no intervalo $[\tau_1; +\infty[$ tal que $(\xi_{n_k}(\cdot)) \rightarrow \xi(\cdot)$ uniformemente em $[\tau_1; \alpha]$ quando $k \rightarrow +\infty$, para qualquer $\alpha > \tau_1$. Além disso, temos que $N \leq \xi(t) \leq (K+1)N$, para todo $t \geq \tau_1$." (6)

Retornando à conclusão (5), notamos que:

$$|y_{n_k}| = |y^{n_k}(\sigma_0, \sigma_0, p^{n_k}(P^{n_k}))| < \xi_{n_k}(\sigma_0) e^{\varepsilon \sigma_0} < (K+1)N e^{\varepsilon \sigma_0}, \text{ para cada } k.$$

Logo, a sequência de vetores $P^{n_k} = (\sigma_0, x_0, y_{n_k}) \in \mathbb{R}^3$ é limitada, de modo que ela admite uma subsequência convergente, que continuaremos a indicar com a mesma notação (P^{n_k}) . Colocaremos:

$$P^0 = (\sigma_0, x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} P^{n_k}.$$

Nesta altura, propomo-nos a mostrar o seguinte fato:

"a seqüência $p^{n_k}(p^{n_k}) = (\varphi_{n_k}, \psi_{n_k})$ em $C_H \times C$, definida por

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi_{n_k}(\theta) &= x_0 \\ \psi_{n_k}(\theta) &= \beta_{n_k} \xi_{n_k}(\sigma_0 + \theta) e^{(\varepsilon+1)\theta}, \end{aligned} \quad -r \leq \theta \leq 0$$

onde $\beta_{n_k} = (\xi_{n_k}(\sigma_0))^{-1} \cdot y_{n_k}$, converge no espaço $C_H \times C$,

o qual será considerado como munido da norma $||(\varphi, \psi)|| = ||\varphi|| + ||\psi||$.

Para isto, tomaremos $\varphi_0 \in C_H$ e $\psi_0 \in C$, definidos por

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta) &= x_0 \\ \psi_0(\theta) &= \beta_0 \xi(\sigma_0 + \theta) e^{(\varepsilon+1)\theta}, \end{aligned} \quad -r \leq \theta \leq 0$$

onde $\beta_0 = (\xi(\sigma_0))^{-1} \cdot y_0$.

A primeira coisa a observar é que as convergências

$$(\xi_{n_k}(\sigma_0)) \rightarrow \xi(\sigma_0) \quad \text{e} \quad (y_{n_k}) \rightarrow y_0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty$$

implicam $(\beta_{n_k}) \rightarrow \beta_0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Daí, pode-se dizer que, para algum $c > 0$, devemos ter

$$|\beta_{n_k}| \leq c, \quad \text{para todo índice } k.$$

Por outro lado, para cada $\theta \in [-r; 0]$, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} |\psi_{n_k}(\theta) - \psi_0(\theta)| &= e^{(\varepsilon+1)\theta} |\beta_{n_k} \xi_{n_k}(\sigma_0 + \theta) - \beta_0 \xi(\sigma_0 + \theta)| \leq \\ &\leq |\beta_{n_k} \xi_{n_k}(\sigma_0 + \theta) - \beta_{n_k} \xi(\sigma_0 + \theta)| + |\beta_{n_k} \xi_{n_k}(\sigma_0 + \theta) - \beta_0 \xi(\sigma_0 + \theta)| \leq \\ &\leq |\beta_{n_k}| |\xi_{n_k}(\sigma_0 + \theta) - \xi(\sigma_0 + \theta)| + |\beta_{n_k} - \beta_0| |\xi(\sigma_0 + \theta)| < \\ &< c |\xi_{n_k}(\sigma_0 + \theta) - \xi(\sigma_0 + \theta)| + (K+1)N |\beta_{n_k} - \beta_0| \end{aligned}$$

Logo, a partir desta desigualdade, da convergência uniforme em (6) e do fato de $(\beta_{n_k}) \rightarrow \beta_0$ quando $k \rightarrow +\infty$, pode-se garantir que

$$\psi_{n_k}(\cdot) \rightarrow \psi_0(\cdot) \text{ uniformemente em } [-r; 0], \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

$$||(\psi_{n_k}, \psi_{n_k}) - (\psi_0, \psi_0)|| = ||\psi_{n_k} - \psi_0|| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Em prosseguimento, construiremos um aberto em $R \times C_H \times C$, colocando:

$$\Omega = \{(t, \psi, \psi) \in \mathbb{R} \times C_H \times C \mid t > \tau_1, ||\psi|| < (K+2)Ne^{\varepsilon t}\}.$$

Não é difícil verificar que este conjunto está ligado a cada segmento Z^n no seguinte sentido

"dado qualquer ponto $P = (\sigma_0, x_0, y) \in Z^n$, tem-se que $(\sigma_0, p^n(P)) \in \Omega$. De fato, considerando que $p^n(P) = (\psi, \psi)$, onde:

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= x_0, \\ \psi(\theta) &= \frac{y}{\xi_n(\sigma_0)e^{\varepsilon\sigma_0}} \xi_n(\sigma_0 + \theta)e^{\varepsilon(\sigma_0 + \theta)} e^\theta, \end{aligned} \quad -r \leq \theta \leq 0$$

temos:

$$|\psi(\theta)| \leq \xi_n(\sigma_0 + \theta)e^{\varepsilon(\sigma_0 + \theta)} \leq \xi_n(\sigma_0 + \theta)e^{\varepsilon\sigma_0} < (K+1)Ne^{\varepsilon\sigma_0}, \text{ para } -r \leq \theta \leq 0.$$

Daí: $||\psi|| = \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| < (K+1)Ne^{\varepsilon\sigma_0}$. Isto aliado ao fato

de que $||\psi|| = |x_0| < H$, garante que $(\sigma_0, p^n(P)) \in \Omega$.

Uma outra particularidade do conjunto Ω é que:

"para cada índice k , a solução $(x^{n_k}(\cdot, \sigma_0, p^{n_k}(P^{n_k})), y^{n_k}(\cdot, \sigma_0, p^{n_k}(P^{n_k})))$ da (eq. 1.1) _{n_k} , que aparece em (5), permanece em Ω , ao longo do intervalo $[\sigma_0; +\infty[$."

Com efeito, isto se deve as desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \left| x_t^{n_k}(\sigma_0, p^{n_k}(P^{n_k})) \right| \right| &= \max_{-r \leq \theta \leq 0} \left| x^{n_k}(t+\theta, \sigma_0, p^{n_k}(P^{n_k})) \right| < \lambda < H, \\ \left| \left| y_t^{n_k}(\sigma_0, p^{n_k}(P^{n_k})) \right| \right| &= \max_{-r \leq \theta \leq 0} \left| y^{n_k}(t+\theta, \sigma_0, p^{n_k}(P^{n_k})) \right| < \\ &< (K+1)Ne^{\varepsilon t}, \quad \text{para } t \geq \sigma_0. \end{aligned}$$

Numa penúltima etapa, mostraremos que
"a seqüência de aplicações $(F^{n_k}(t, \phi, \psi))$ definida por:

$$F^{n_k}(t, \phi, \psi) = \begin{bmatrix} \psi(0) \\ a_{n_k}(t)\psi(0) + b_{n_k}(t)\phi(-r) + f_{n_k}(t, \phi, \psi) \end{bmatrix}$$

(9)

para $t > T$, $\phi \in C_H$ e $\psi \in C$, converge uniformemente em Ω , para a aplicação:

$$F(t, \phi, \psi) = \begin{bmatrix} \psi(0) \\ a(t)\psi(0) + b(t)\phi(-r) + f(t, \phi, \psi) \end{bmatrix}."$$

Para isto, basta notar que:

$$\begin{aligned} &\left| F^{n_k}(t, \phi, \psi) - F(t, \phi, \psi) \right| = \\ &= \left| \varepsilon_{n_k} e^{-\varepsilon t} \psi(0) + \varepsilon_{n_k} e^{-\varepsilon t} \phi(-r) + \frac{\psi(0) - x_1}{x_2 - x_1} \varepsilon_{n_k} e^{-\varepsilon t} [\psi(0) + \lambda] + \right. \\ &+ \left. \frac{x_2 - \psi(0)}{x_2 - x_1} \varepsilon_{n_k} e^{-\varepsilon t} [\psi(0) + \lambda] \right| \leq \\ &\leq \varepsilon_{n_k} e^{-\varepsilon t} \|\psi\| + \varepsilon_{n_k} e^{-\varepsilon t} \left(1 + \frac{2\lambda + (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \right) \|\phi\| + \\ &+ \varepsilon_{n_k} e^{-\varepsilon t} \frac{\lambda(|x_1| + x_2)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Daí, para todo $(t, \phi, \psi) \in \Omega$, tem-se

$$\begin{aligned} & |F^{n_k}(t, \phi, \psi) - F(t, \phi, \psi)| < \\ & < \varepsilon_{n_k}^{(K+1)N+2} \varepsilon_{n_k} \left(1 + \frac{\lambda}{x_2 - x_1}\right) H + \varepsilon_{n_k} \frac{\lambda(|x_1| + x_2)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Desta desigualdade decorre que $(F^{n_k}) \rightarrow F$ uniformemente em Ω quando $k \rightarrow +\infty$.

Para finalizar, notamos que as conclusões (5) a (9) com provam que todas as hipóteses do teorema 1.7 - Capítulo I, aplicado às equações

$$(eq. 1.1) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a(t)y + b(t)x(t-r) + f(t, x_t, y_t) \end{cases}$$

$$(eq. 1.1)_n \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_n(t)y + b_n(t)x(t-r) + f_n(t, x_t, y_t) \end{cases},$$

estão plenamente satisfeitas. Logo, segundo este teorema, existe ao menos uma solução $(x^0(t), y^0(t))$ da (eq. 1.1), passando por $(\sigma_0, \phi_0, \psi_0)$, tal que

"para cada número real $\eta > 0$, existe um natural $k_0 = k_0(\eta)$ tal que:

$$k \geq k_0 \implies (x^{n_k}(\cdot, \sigma_0, p^{n_k}(p^{n_k})), y^{n_k}(\cdot, \sigma_0, p^{n_k}(p^{n_k}))) \rightarrow (x^0(\cdot), y^0(\cdot))$$

uniformemente em $[\sigma_0 - r + \eta; \alpha]$ quando $k \rightarrow +\infty$, para todo $\alpha > \sigma_0$."

Pois bem, aliando-se este resultado à conclusão (5), pode-se en
tão garantir que

$$x_1 \leq x^0(t) \leq x_2 \quad e$$

$$|\dot{x}^0(t)| = |y^0(t)| \leq (K+1)Ne^{\varepsilon t},$$

para todo $t \geq \sigma_0$.

□

Corolário 3.3

Suponhamos que $a(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $b(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $f(t, \phi, \psi) : [T; +\infty[\times C_H \times C \rightarrow \mathbb{R}$, com $0 < H < +\infty$, sejam funções contínuas. Suponhamos também que sejam válidas as hipóteses (h_1) , (h_2) , (h_3) com $\varepsilon = 0$, e (h_4) do teorema anterior. Então, existem números reais $\sigma_0 > \max\{0, T\}$, $B > 0$ e uma solução $x(t)$ da (eq. 1.1), definida em $[\sigma_0; +\infty[$, tais que:

$$(a) \quad x_1 \leq x(t) \leq x_2,$$

$$(b) \quad |\dot{x}(t)| \leq B,$$

para todo $t \geq \sigma_0$.

CAPÍTULO IV

RELAÇÃO ASSINTÓTICA ENTRE SOLUÇÕES DE DUAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO DO TIPO DE CARATHÉODORY

§ 1. Introdução

Suponhamos que $a_i(t), b_{ij}(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$, sejam funções localmente integráveis. Suponhamos também que $f(t, \varphi), g(t, \varphi) :]T; +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ sejam aplicações que levam conjuntos limitados em conjuntos limitados e que satisfaçam a condição de Carathéodory em $]T; +\infty[\times \Omega$, onde Ω é um aberto do espaço C . Neste capítulo, o nosso objetivo consiste em examinar a questão:

"dada uma solução $y(\cdot, \sigma_0, \varphi_0)$, definida no futuro, da equação

$$(eq. 1.1) \quad \dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + B(t)y(t-r) + f(t, y_t),$$

onde $A(t) = \text{diag}[a_1(t), \dots, a_n(t)]$, $B(t) = [b_{ij}(t)]$, para $t > T$, existe ao menos uma solução $x(\cdot, \sigma, \varphi)$ da equação perturbada:

$$(eq. 1.2) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) + f(t, x_t) + g(t, x_t),$$

também definida no futuro, tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t, \sigma, \varphi) - y(t, \sigma_0, \varphi_0)] = 0$?

Esta questão foi abordada recentemente em [9] para equações diferenciais ordinárias do tipo de Carathéodory, mediante uma formulação analítica do Princípio de Ważewski. No artigo citado, tal formulação, que não exige qualquer retração, é denominada "método anti-Liapunov", devido ao fato de a caracterização dos pontos-fronteira do conjunto ω como pontos de saída

ser feita através de funções quase-do tipo de Liapunov.

O procedimento adotado em [9] não pode ser adaptado para equações diferenciais com retardamento, como assinala Rybakowski em [11]. No entanto, através de uma reformulação adequada do conceito de conjunto polifacial regular para equações com retardamento do tipo de Carathéodory e do estabelecimento dos resultados pertinentes, como se encontra em [11], é possível obter resultados semelhantes aos de [9], para este tipo de equação.

§ 2 . Resultados Principais

Neste parágrafo, procuramos estabelecer alguns resultados relativos à questão proposta. Para isto, desenvolvemos previamente alguns lemas, cada um dos quais tem por finalidade garantir a existência de pelo menos uma solução da desigualdade diferencial escalar:

$$(2.1) \quad \dot{z} + G(s)z + H(s) < 0,$$

com uma determinada propriedade. Suas origens remontam aos trabalhos de Smydtowna [14], Onuchic [7] e Staikos [12],[13].

Lema 2.1

Suponhamos que $G(s)$ e $H(s)$ sejam funções reais localmente integráveis sobre um intervalo $[\alpha; +\infty[$, satisfazendo adicionalmente às condições:

(I) $G(s) < 0$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$ e $H(s) \geq 0$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$,

$$(II) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{H(s)}{G(s)} = 0$$

Então, existe ao menos uma solução $z(s)$ da desigualdade (2.1), definida em um intervalo $[\alpha_0; +\infty[$ tal que:

(a) $z(s) > 0$, para todo $s \geq \alpha_0$,

(b) $\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = 0$

Prova

Consideremos uma função $\varepsilon(s) : [\alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, contínua, estritamente positiva e com $\lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon(s) = 0$ e definamos:

$$\tilde{H}(s) = H(s) - \varepsilon(s)G(s), \quad \text{para } s \geq \alpha.$$

Notamos imediatamente que:

$$(II') \quad \tilde{H}(s) > H(s) \quad \text{quase sempre em } [\alpha; +\infty[\quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{H}(s)}{G(s)} = 0.$$

Por outro lado, do fato de ser válida a desigualdade:

$$\dot{z} + G(s)z + H(s) < \dot{z} + G(s)z + \tilde{H}(s), \quad \text{q.s. em } [\alpha; +\infty[,$$

resulta que toda solução da equação diferencial escalar:

$$(eq. 2.2) \quad \dot{z} + G(s)z + \tilde{H}(s) = 0$$

é também solução da desigualdade (2.1).

Ora, a propriedade (II') garante que, dado um número real $K_0 > 0$, existe um número real $\alpha_0 \geq \alpha$ tal que:

$$\tilde{H}(s) \leq -K_0 G(s), \quad \text{q.s. em } [\alpha_0; +\infty[$$

Isto permite escrever que:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_s^\tau \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du \leq \\ &\leq -K_0 \int_s^\tau G(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du = -K_0 \int_s^\tau \frac{d}{du} e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du = \\ &= K_0 \left[e^{\int_{\alpha_0}^s G(v) dv} - e^{\int_{\alpha_0}^\tau G(v) dv} \right] \end{aligned}$$

para $\tau \geq s \geq \alpha_0$.

Em particular, tem-se que:

$$0 < \int_{\alpha_0}^\tau \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du \leq K_0 \left[1 - e^{\int_{\alpha_0}^\tau G(v) dv} \right] \leq K_0, \quad \text{para } \tau \geq \alpha_0.$$

Este resultado mostra que a função $\tau \mapsto \int_{\alpha_0}^\tau \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du$

é limitada q.s. em $[\alpha_0; +\infty[$. Considerando que ela é também crescente neste intervalo, pode-se afirmar que a integral imprópria:

$$\int_{\alpha_0}^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_0}^\tau \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du$$

converge. Este fato acarreta as seguintes conseqüências:

$$(i) \text{ para } s \geq \alpha_0, \quad \text{a integral } \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du$$

converge,

$$(ii) \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty,$$

$$(iii) \text{ para cada } s \geq \alpha_0, \quad z(s) = e^{-\int_{\alpha_0}^s G(u) du} \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du$$

está bem definido.

A função $z(s) : [\alpha_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, goza ainda das propriedades:

$$(iv) \quad z(s) \text{ é solução da (eq. 2.2) no intervalo } [\alpha_0; +\infty[,$$

$$(v) \quad z(s) > 0, \quad \text{para todo } s \geq \alpha_0.$$

Resta-nos mostrar que $\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = 0$. Para isto supo

nhamos primeiramente que a integral $\int_{\alpha_0}^{+\infty} G(u) du$ convirja.

Em conseqüência, a função $s \mapsto e^{-\int_{\alpha_0}^s G(u) du}$ é limitada em $[\alpha_0; +\infty[$.

Acrescentando a propriedade (ii) a este resultado, podemos en
tão assêgurar que: $\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = 0$.

Suponhamos agora que a integral $\int_{\alpha_0}^{+\infty} G(u) du$ divirja. Neste caso,

devemos ter que:

$$\int_{\alpha_0}^{+\infty} G(u) du \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_0}^s G(u) du = -\infty,$$

o que implica:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} e^{\int_{\alpha_0}^s G(u) du} = 0.$$

Daí, a utilização da regra de L'Hospital conduz a:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} z(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha_0}^u G(v) dv} du}{e^{\int_{\alpha_0}^s G(u) du}} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{-\tilde{H}(s) e^{\int_{\alpha_0}^s G(v) dv}}{G(s) e^{\int_{\alpha_0}^s G(v) dv}} = 0$$

□

Lema 2.2

Suponhamos que $G(s)$ e $H(s)$ sejam funções reais localmente integráveis sobre um intervalo $[\alpha; +\infty[$, satisfazendo a dicionalmente às condições:

(I) $H(s) \geq 0$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$,

(II) $\int_{\cdot}^{+\infty} H(s) ds$ converge,

(III) existe um número real K tal que $\int_u^v G(s) ds \leq K$, para quaisquer $v \geq u \geq \alpha$.

Então, existe ao menos uma solução $z(s)$ da desigualdade (2.1), definida em $[\alpha; +\infty[$, tal que:

(a) $z(s) > 0$, para todo $s \geq \alpha$,

(b) $\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = 0$.

Prova

Como no lema anterior, começamos por escolher uma função $\varepsilon(s) : [\alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, contínua, estritamente positiva e tal que $\int_+^{\infty} \varepsilon(s) ds$ seja convergente. Daí, definimos uma nova função $\tilde{H}(\cdot)$, colocando:

$$\tilde{H}(s) = H(s) + \varepsilon(s), \text{ para } s \geq \alpha.$$

Observa-se imediatamente que:

(II') $\tilde{H}(s) > H(s)$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$, $\int_+^{\infty} \tilde{H}(s) ds$ converge.

A utilização da hipótese (III) permite escrever que:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_\alpha^u G(v) dv} du \leq \\ &\leq e^K \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) du, \text{ para todo } s \geq \alpha, \end{aligned}$$

evidenciando-se, assim, a convergência da integral imprópria

$$\int_+^{\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_\alpha^u G(v) dv} du.$$

Uma consequência deste fato é que, para todo $s \geq \alpha$,

$$z(s) = e^{-\int_{\alpha}^s G(u) du} \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha}^u G(v) dv} du$$

está bem definido. Adicionalmente, pode-se verificar que a função $z(s) : [\alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, goza das propriedades:

- (i) $z(s)$ é solução da (eq. 2.2) em $[\alpha; +\infty[$,
- (ii) $z(s) > 0$, para todo $s \geq \alpha$

Finalmente, notando-se que:

$$\begin{aligned} z(s) &= \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_s^u G(v) dv} du \leq \\ &\leq e^K \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) du, \text{ para todo } s \geq \alpha, \end{aligned}$$

e que $\int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) du \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$, pode-se garantir que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = 0.$$

□

Corolário 2.3

Suponhamos que $G(s)$, $H_1(s)$ e $H_2(s)$ sejam funções reais localmente integráveis sobre um intervalo $[\alpha; +\infty[$, satisfazendo adicionalmente às condições:

- (I) $G(s) < 0$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$ e $H_1(s), H_2(s) \geq 0$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$,

$$(II) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{H_1(s)}{G(s)} = 0,$$

$$(II') \quad \int_0^{+\infty} H_2(s) ds \quad \text{é convergente.}$$

Então, existe ao menos uma solução $z(s)$ da desigualdade:

$$(2.3) \quad \dot{z} + G(s)z + [H_1(s) + H_2(s)] < 0$$

em um intervalo $[\alpha_0; +\infty[$, tal que:

$$(a) \quad z(s) > 0, \quad \text{para todo } s \geq \alpha_0,$$

$$(b) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = 0.$$

Prova

As hipóteses (I) e (II) garantem que existe ao menos uma solução $z_1(s)$ da desigualdade $\dot{z} + G(s)z + H_1(s) < 0$, definida em um intervalo $[\alpha_0; +\infty[$, satisfazendo (a) e (b). A hipótese (I) garante também a validade da hipótese (III) do lema 2.2.

A associação deste último fato à hipótese (II'), permite afirmar que existe uma solução $z_2(s)$ da desigualdade $\dot{z} + G(s)z + H_2(s) < 0$, definida em $[\alpha; +\infty[$, satisfazendo (a) e (b). Daí, a função $z(s) = z_1(s) + z_2(s)$ é uma solução da desigualdade (2.3) no intervalo $[\alpha_0; +\infty[$, que possui as propriedades (a) e (b).

Lema 2.4

Suponhamos que $G(s)$ e $H(s)$ sejam funções reais localmente integráveis sobre um intervalo $[\alpha; +\infty[$, satisfazendo a adicionalmente às condições:

(I) $H(s) \geq 0$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$,

(II) $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{H(s)}{J(s)} ds$ é convergente, sendo $J(s) = e^{-\int_{\alpha}^s G(u) du}$.

Então, existe ao menos uma solução $z(s)$ da desigualdade (2.1), definida em $[\alpha; +\infty[$, tal que:

(a) $z(s) > 0$, para todo $s \geq \alpha$;

(b) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{z(s)}{J(s)} = 0$.

Prova

Consideremos uma função $\epsilon(s) : [\alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, contínua, estritamente positiva e tal que $\int_{\alpha}^{+\infty} \epsilon(s) ds$ seja convergente.

Daí, definamos a função:

$$\tilde{H}(s) = H(s) + \epsilon(s).J(s), \text{ para } s \geq \alpha,$$

relativamente à qual se pode destacar a propriedade:

(II') $\tilde{H}(s) > H(s)$ quase sempre em $[\alpha; +\infty[$ e

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\tilde{H}(u)}{J(u)} du = \int_{\alpha}^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha}^u G(v) dv} du \text{ converge.}$$

Em vista desta propriedade, tem-se que:

$$z(s) = e^{-\int_{\alpha}^s G(u) du} \int_s^{+\infty} \tilde{H}(u) e^{\int_{\alpha}^u G(v) dv} du$$

está bem definido, para cada $s \geq \alpha$. Além disso, a função $z(s) : [\alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, goza das propriedades:

- (i) $z(s)$ é solução da (eq. 2.2) em $[\alpha; +\infty[$,
- (ii) $z(s) > 0$, para todo $s \geq \alpha$,
- (iii) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{z(s)}{J(s)} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_s^{+\infty} \frac{\tilde{H}(u)}{J(u)} du = 0$.

Para os próximos resultados, admitiremos que as funções $a_i(t), b_{ij}(t) :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $f(t, \psi), g(t, \psi) :]T; +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ possuem as propriedades mencionadas no § 1.

Teorema 2.5

Suponhamos que a (eq. 1.2) admita uma única solução a através de cada ponto $(\sigma, \psi) \in]T; +\infty[\times \Omega$ e que $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ seja uma dada solução da (eq. 1.1), definida em $[\sigma_0; +\infty[$. Suponhamos também que sejam válidas as seguintes hipóteses:

(h_1) existe um número real $k_0 = k_0(y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)) > 0$ e aplicações

localmente integráveis $\lambda, \rho :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que:

"para todo $(s, \psi) \in]\max\{\sigma_0, T\}; +\infty[\times \Omega$, com $\|\psi\| \leq \frac{3}{2} k_0$,

tem-se:

$$|f_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi) - f_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0))| \leq \lambda_i(s),$$

$i=1,2,\dots,n.$

$$|g_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi)| \leq \rho_i(s)$$

(h₂) para cada $i = 1, 2, \dots, n$ tem-se $\text{Re}a_i(t) > 0$, q.s. em $[T; +\infty[$, para todo $t > T$.

$$(h_3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^n |b_{ij}(t)|}{\text{Re}a_i(t)} = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(h_4) \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \int_u^v \text{Re}a_i(s) ds \geq K, \quad \text{para } v \geq u > T,$$

$$(h_5) \quad \text{a integral} \quad \int_{\cdot}^{+\infty} [\lambda_i(s) + \rho_i(s)] ds \quad \text{converge.}$$

Então, existe ao menos uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 1.2), definida no futuro, tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t, \sigma, \psi) - y(t, \sigma_0, \psi_0)] = 0$.

Prova

Começaremos por definir $n+1$ aplicações, colocando:

$$\ell^i(t, x) : [\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell^i(t, x) = |x_i - y^i(t)|^{2-\xi_i(t)^2}, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$m(t, x) : [\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad m(t, x) = \tau_0 - t,$$

onde:

(a) $y^i(\cdot)$ é uma notação simplificada para a i -ésima função coordenada $y^i(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ da solução $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ da (eq. 1.1),

(b) $\tau_0 > \sigma_0 + r$ é um número real a ser escolhido convenientemente,

(c) para cada índice $i = 1, 2, \dots, n$, $\xi_i(\cdot) : [\tau_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função a ser escolhida de modo a satisfazer determinadas condições. Dentre elas, citamos desde já:

(c₁) $0 < \xi_i(t) \leq \min\{1, k_0\}$, para todo $t \geq \tau_0$,

(c₂) $\xi_i(\cdot)$ é absolutamente contínua em todo subconjunto com pacto de $[\tau_0; +\infty[$.

Obviamente, temos que $m(t, x) \in L_{loc}([\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n) \cap AC_{loc}([\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n)$.

Em virtude de (c₂), cada função $\ell^i(t, x)$ deve apresentar também esta propriedade.

A partir destas aplicações, definiremos o conjunto polifacial

$$\omega = \{(t, x) \in [\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n \mid \ell^i(t, x) < 0 \text{ e } m(t, x) < 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Nosso próximo passo consiste em mostrar que, através de uma escolha adequada de τ_0 e das funções $\xi_i(\cdot)$, para $i=1, 2, \dots, n$, o conjunto ω acima é regular relativamente $\tilde{a}$ (eq. 1.2) no sentido da definição 2.9 - Capítulo I.

Em primeiro lugar, nota-se imediatamente que

$$\dot{m}_{(1.2)}(s, \psi(0)) = -1 < 0, \text{ para todo } s \geq \tau_0 \text{ e } \psi \in \Omega.$$

Agora, seja $P = (t, x)$ um ponto de $\partial\omega$ tal que $\ell^i(P) = 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$. Seja ψ um elemento qualquer do espaço $\tilde{C}$, com $\psi(0) = x$ e $(t+\theta, \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $-r \leq \theta < 0$.

Isto significa que:

$$|\psi_i(0) - y^i(t)| = \xi_i(t) \quad \text{e} \quad |\psi_i(0) - y^i(t+\theta)| < \xi_i(t+\theta), \quad \text{para todo } -r \leq \theta < 0.$$

Em prosseguimento, pode-se afirmar que existe um conjunto de me dida nula N em $[\tau_0; +\infty[$ tal que, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existem:

$$\dot{y}^i(s), \dot{\xi}_i(s), \quad \text{para todo } s \in [\tau_0; +\infty[\setminus N.$$

Com efeito, isto se deve ao fato de as funções $y^i(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ e $\xi_i(\cdot)$ serem deriváveis quase sempre, a primeira sobre $[\sigma_0; +\infty[$, ao passo que a segunda sobre $[\tau_0; +\infty[$.

Vamos considerar também uma vizinhança $U(t, \psi) =]t-\delta; t+\delta[\times B_R(\psi)$ em $\mathbb{R} \times C$, onde $0 < \delta < r$ e $R > 0$ serão escolhidos adequadamente mais adiante. Então, para todo $(s, \psi) \in U(t, \psi) \setminus N \times C$, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) &= \\ &= 2\operatorname{Re}\{ \overline{[\psi_i(0) - y^i(s)]} [a_i(s)\psi_i(0) + \\ &+ \sum_{j=1}^n b_{ij}(s)\psi_j(-r) + f_i(s, \psi) + \\ &+ g_i(s, \psi) - \dot{y}^i(s)] - 2\xi_i(s)\dot{\xi}_i(s) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) = \\
& = \operatorname{Re}\{\overline{[\psi_i(0) - y^i(s)]} [a_i(s)(\psi_i(0) - y^i(s)) + \\
& + \sum_{j=1}^n b_{ij}(s)(\psi_j(-r) - y_s^j(s-r)) + \\
& + (f_i(s, \psi) - f_i(s, y_s)) + g_i(s, \psi)] - \xi_i(s) \dot{\xi}_i(s)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) = \\
& = \operatorname{Re} a_i(s) |\psi_i(0) - y^i(s)|^2 + \\
& + \operatorname{Re}\{\overline{[\psi_i(0) - y^i(s)]} \sum_{j=1}^n b_{ij}(s)(\psi_j(-r) - y_s^j(-r))\} + \\
& + \operatorname{Re}[(f_i(s, \psi) - f_i(s, y_s)) \overline{(\psi_i(0) - y^i(s))}] + \\
& + \operatorname{Re}[g_i(s, \psi) \overline{(\psi_i(0) - y^i(s))}] - \xi_i(s) \dot{\xi}_i(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) \geq - \xi_i(s) \dot{\xi}_i(s) + \\
& + \operatorname{Re} a_i(s) |\psi_i(0) - y^i(s)|^2 - \\
& - \sum_{j=1}^n |b_{ij}(s)| |\psi_j(-r) - y_s^j(-r)| |\psi_i(0) - y^i(s)| - \\
(1) \quad & - |f_i(s, \psi) - f_i(s, y_s)| |\psi_i(0) - y^i(s)| - \\
& - |g_i(s, \psi)| |\psi_i(0) - y^i(s)|.
\end{aligned}$$

Surge agora a tarefa de majorar e minorar os fatores

$|\psi_j(0) - y^j(s)|, |\psi_j(-r) - y_s^j(-r)|$ em termos das funções $\xi_j(\cdot)$.

Para isto, basta examinarmos o caso real. A figura esboçada ao lado pode servir de guia. Ela nos sugere que tais limitações podem ser obtidas desde que seja possível encontrar $\delta > 0$ e $R > 0$ de tal modo

que aquela parte de $\partial\omega$ correspondente a uma j -ésima coordenada e aos intervalos $]t-\delta; t+\delta[$, $]t-r-\delta; t-r+\delta[$, ou melhor, os conjuntos $\{(s, \alpha_j(s)) \mid t-\delta < s < t+\delta\}$, $\{(s-r, \alpha_j(s-r)) \mid t-\delta < s < t+\delta\}$

onde $\alpha_j(s) \stackrel{\text{def}}{=} y_j^i(s) + \xi_j(s)$, estejam contidos nas "caixas":

$$]t-\delta; t+\delta[\times]\psi_j(0) - R; \psi_j(0) + R[,$$

$$]t-r-\delta; t-r+\delta[\times]\alpha_j(t-r)-R; \alpha_j(t-r)+R[.$$

Uma vez encontrados $\delta > 0$, $R > 0$ que sirvam para todas as coordenadas, teremos:

$$(2) \quad \xi_i(s) - 2R < |\psi_i(0) - y_i^i(s)| < \xi_i(s) + 2R$$

$$|\psi_j(-r) - y_s^j(-r)| < \xi_j(s-r) + 2R ,$$

para $j = 1, 2, \dots, n$.

Pois bem, vamos fixar um $0 < \delta_0 < t-r-\tau_0$. Como cada função $\xi_j(\cdot)$ é absolutamente contínua no intervalo $[t-r-\delta_0; t+\delta_0]$, então existe e é estritamente positivo o mínimo

$$\min_{t-r-\delta_0 \leq u \leq t+\delta_0} \xi_j(u)$$

Assim, é lícito escolher:

$$R = \frac{1}{4} \min_{1 \leq j \leq n} [t-r-\delta_0 \min_{0 \leq u \leq t+\delta_0} \xi_j(u)]$$

A continuidade uniforme das funções:

$$\alpha_j(s) \stackrel{\text{def}}{=} y_j^j(s) + \xi_j(s), \quad \beta_j(s) \stackrel{\text{def}}{=} y_j^j(s) - \xi_j(s), \quad j=1,2,\dots,n,$$

no intervalo $[t-r-\delta_0; t+\delta_0]$ garante que, para o $R > 0$ acima existe ao menos um $0 < \delta < \delta_0$ tal que:

$$\begin{aligned} & |\alpha_j(s) - \alpha_j(t)| < R, \\ & |\beta_j(s) - \beta_j(t)| < R, \\ (3) \quad t-\delta < s < t+\delta & \Rightarrow \quad j=1,2,\dots,n \\ & |\alpha_j(s+\theta) - \alpha_j(t+\theta)| < R, \\ & \quad \quad \quad -r \leq \theta < 0 \\ & |\beta_j(s+\theta) - \beta_j(t+\theta)| < R. \end{aligned}$$

De (2) e (3) se conclue que:

"para todo $(s, \psi) \in U(t, \psi) =]t-\delta; t+\delta[\times B_R(\psi)$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\xi_i(s) < |\psi_i(0) - y^i(s)| < \frac{3}{2}\xi_i(s), \\ (4) \quad & |\psi_j(\theta) - y^j(s+\theta)| < \xi_j(s+\theta) + \frac{1}{2}\xi_i(s) \leq \\ & \leq 1 + \frac{1}{2}\xi_i(s) \leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \dots, n$ e $-r \leq \theta \leq 0$."

Segue-se de (1) e (4) que:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) \geq -\xi_i(s) \dot{\xi}_i(s) + \\
 & + \frac{1}{4} \operatorname{Re} a_i(s) (\xi_i(s))^2 - \frac{9}{4} \sum_{j=1}^n |b_{ij}(s)| \xi_i(s) - \\
 & - \frac{3}{2} |f_i(s, \psi) - f_i(s, y_s)| \xi_i(s) - \frac{3}{2} |g_i(s, \psi)| \xi_i(s) \\
 (5) \quad & -\frac{1}{2} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) \geq -\xi_i(s) [\dot{\xi}_i(s) - \frac{1}{4} \operatorname{Re} a_i(s) \xi_i(s) + \\
 & + \frac{9}{4} \sum_{j=1}^n |b_{ij}(s)| + \frac{3}{2} |f_i(s, \psi) - f_i(s, y_s)| + \frac{3}{2} |g_i(s, \psi)|]
 \end{aligned}$$

A fim de continuar trabalhando sobre esta desigualdade, convém retornar a (4) para observar que:

$$|\psi_j(\theta) - y_s^j(\theta)| \leq \frac{3}{2} k_0, \quad \text{para } j=1, 2, \dots, n \text{ e } -r \leq \theta \leq 0.$$

Consideremos $\mathbb{C}^n$ como munido da norma $|x| = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|$.

O resultado acima pode, então, ser traduzido como:

$$|\psi(\theta) - y_s(\theta)| \leq \frac{3}{2} k_0, \quad \text{para } -r \leq \theta \leq 0,$$

ou ainda:

$$||\psi - y_s|| \leq \frac{3}{2} k_0.$$

Daí, a hipótese (h_1) permite escrever:

$$\begin{aligned}
 & |f_i(s, \psi) - f_i(s, y_s)| = \\
 & = |f_i(s, y_s + (\psi - y_s)) - f_i(s, y_s)| \leq \lambda_i(s)
 \end{aligned}$$

$$|g_i(s, \psi)| = |g_i(s, y_s + (\psi - y_s))| \leq \rho_i(s)$$

Com isto, a desigualdade (5) se reduz a :

$$\frac{1}{2} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) \geq -\xi_i(s) [\dot{\xi}_i(s) + G(s) \cdot \xi_i(s) + H_1(s) + H_2(s)],$$

onde:

$$G(s) = -\frac{1}{4} \text{Re} a_i(s), \quad H_1(s) = -\frac{9}{4} \sum_{j=1}^n |b_{ij}(s)|, \quad H_2(s) = \frac{3}{2} [\lambda_i(s) + \rho_i(s)].$$

Portanto, a fim de que tenhamos $\dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) > 0$, deve ser válida a desigualdade diferencial:

$$\dot{\xi}_i(s) + G(s) \cdot \xi_i(s) + H_1(s) + H_2(s) < 0.$$

Ora, de acordo com o corolário 2.3, as hipóteses (h_1) a (h_4) garantem a existência de ao menos uma solução $\xi_i(s)$ desta desigualdade, definida em um intervalo $[T_0; +\infty[$, com $T_0 \geq \sigma_0$, satisfazendo:

$$(a) \quad \xi_i(s) > 0, \quad \text{para todo } s \geq T_0,$$

$$(b) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \xi_i(s) = 0$$

Além disso, em virtude de (b), é possível escolher um $\tau_0 > T_0 + r$, suficientemente grande, comum a todas as funções $\xi_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tal que $0 < \xi_i(s) \leq \min\{1, k_0\}$, para $s \geq \tau_0$.

Pois bem, a adoção das funções $\xi_i(\cdot)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, e do número real τ_0 na construção das funções $\ell^i(t, x)$ e $m(t, x)$ tornam o conjunto ω regular relativamente $\tilde{a}$ (eq. 1.2), no sentido da definição 2.9 - Capítulo I.

Vamos considerar, a seguir, os conjuntos:

$$W = \{P = (t, x) \in \partial\omega \mid t > \tau_0\}$$

$$Z = \{P = (t, x) \in \bar{\omega} \mid t = \tau_1 > \tau_0 + r, |x_i - y_i^1(\tau_1)| \leq \xi_i(\tau_1), \text{ para } i=1, 2, \dots, n\},$$

relativamente aos quais se pode observar que Z é homeomorfo a uma bola fechada no espaço $\mathbb{R}^{2n}$, enquanto que $Z \cap W$ é homeomorfo $\tilde{a}$ correspondente fronteira desta bola. Nesta situação, pode-se garantir que " $Z \cap W$ não é retrato de Z ". Por outro lado, é perfeitamente possível construir a aplicação:

$$R : W \rightarrow Z \cap W, \quad P = (t, x) \rightarrow (\tilde{t}, \tilde{x}), \quad \text{onde:}$$

$$\tilde{t} = \tau_1 \quad \text{e} \quad \tilde{x}_i = y_i(\tau_1) + (x_i - y_i(t)) \frac{\xi_i(\tau_1)}{\xi_i(t)},$$

a qual apresenta as seguintes propriedades:

(i) R é contínua em W ,

(ii) se $(t, x) \in Z \cap W$, então $\tilde{t} = t = \tau_1$ e $\tilde{x}_i = x_i$, isto é:

$$R|_{Z \cap W} = \text{id}.$$

Em vista desta observação, conclue-se que " $Z \cap W$ é retrato de W ".

Agora, construiremos uma aplicação $p : Z \rightarrow C$ da seguinte maneira: a cada $P = (\tau_1, x) \in Z$, vamos associar uma aplicação $\tilde{p}(P) : [-r; 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$, definida por:

$$p(P)_i(\theta) = y^i(\tau_1 + \theta) + \frac{x_i - y^i(\tau_1)}{\xi_i(\tau_1)} \xi_i(\tau_1 + \theta)$$

$$i=1,2,\dots,n$$

Devido ao fato de as funções $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ e $\xi(\cdot) = (\xi_1(\cdot), \dots, \xi_n(\cdot))$ serem absolutamente contínuas em $[\tau_1 - r; \tau_1]$, resulta que cada aplicação $p(P) : [-r; 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$ é contínua. Além disso, um exame da aplicação $p : Z \rightarrow \mathbb{C}$ mostra que a mesma também é contínua.

Seja $P = (\tau_1, x)$ um ponto qualquer do conjunto:

$$A = \{Q = (\tau_1, y) \in Z \cap \omega \mid \text{existe um } t > \sigma \text{ tal que } (t, x(t, \tau_1, p(Q))) \notin \omega\}.$$

Para cada índice $i = 1, 2, \dots, n$ e todo $\theta \in [-r; 0]$, tem-se:

$$\begin{aligned} |p(P)_i(\theta) - y^i(\tau_1 + \theta)| &= |y^i(\tau_1 + \theta) + \\ &+ \frac{x_i - y^i(\tau_1)}{\xi_i(\tau_1)} \xi_i(\tau_1 + \theta) - y^i(\tau_1 + \theta)| = \\ &= |x_i - y^i(\tau_1)| \frac{\xi_i(\tau_1 + \theta)}{\xi_i(\tau_1)} < \xi_i(\tau_1 + \theta) \end{aligned}$$

Associando a este resultado o fato de $\tau_1 + \theta > \tau_0$ para todo $\theta \in [-r; 0]$, concluímos que $(\tau_1 + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $-r \leq \theta < 0$.

Por outro lado, se $P = (\tau_1, x) \in Z \cap W$, verifica-se analogamente que $(\tau_1 + \theta, p(P)(\theta)) \in \omega$, para todo $-r \leq \theta < 0$. Adicionalmente, vê-se que $p(P)(0) = x$.

Todos estes resultados comprovam que as hipóteses do Teorema 2.10 - Capítulo I estão plenamente satisfeitas. Nesta si-

tuação, pode-se afirmar que existe ao menos um ponto

$P_0 = (\tau_1, x_0) \in Z \cap \omega$ tal que $(t, x(t, \tau_1, p(P_0))) \in \omega$ para todo $t \geq \tau_1$. Isto significa que, para cada índice $i = 1, 2, \dots, n$, devemos ter:

$$|x^i(t, \tau_1, p(P_0)) - y^i(t, \sigma_0, \psi_0)| < \xi_i(t),$$

para todo $t \geq \tau_1$.

Finalmente, lembrando que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_i(t) = 0$, pode-se, então, afirmar que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t, \tau_1, p(P_0)) - y(t, \sigma_0, \psi_0)] = 0.$$

□

Teorema 2.6

Suponhamos que a (eq. 1.2) admita uma única solução através de cada ponto $(\sigma, \psi) \in]T; +\infty[\times \Omega$ e que $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ seja uma dada solução da (eq. 1.1), definida em $[\sigma_0; +\infty[$. Suponhamos também que sejam válidas as seguintes hipóteses:

(h₁) existe um número real $k_0 = k_0(y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)) > 0$ e aplicações localmente integráveis $\lambda, \rho :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$, tais que:

"para todo $(s, \psi) \in]\max\{\sigma_0, T\}; +\infty[\times \Omega$, com $||\psi|| \leq 1 + \frac{k_0}{2} J(s)$,

$$\text{onde } J(s) = \max_{i=1,2,\dots,n} J_i(s) \text{ e } J_i(s) = e^{\frac{9}{4} \int_{\sigma_0}^s |\text{Rea}_i(u)| du},$$

tem-se:

$$|f_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi) - f_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0))| \leq \lambda_i(s),$$

$$i=1,2,\dots,n.$$

$$|g_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi)| \leq \rho_i(s)."$$

(h₂) para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$, as integrais impróprias

$$\int_0^{+\infty} \frac{|b_{ij}(s)|}{J_i(s)} ds, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\lambda_i(s) + \rho_i(s)}{J_i(s)} ds$$

são convergentes.

Então, existe ao menos uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 1.2),

definida no futuro, tal que: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^i(t, \sigma, \psi) - y^i(t, \sigma_0, \psi_0)}{J_i(t)} = 0$,

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Prova

Procedendo como no teorema anterior, definimos:

$$\ell^i(t, x) = [\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\ell^i(t, x) = |x_i - y^i(t)|^2 - \xi_i(t)^2, \quad i=1,2,\dots,n.$$

$$m(t, x) : [\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad m(t, x) = \tau_0 - t,$$

onde:

(a') $y^i(\cdot)$ é uma notação simplificada para a i -ésima função coordenada $y^i(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ da solução $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ da (eq. 1.1).

(b') $\tau_0 > \sigma_0 + r$ é um número real a ser escolhido convenientemente,

(c') para cada índice $i = 1, 2, \dots, n$, $\xi_i(\cdot) : [\tau_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função a ser escolhida de modo a satisfazer determinadas condições. Dentre elas, citamos desde já:

(c'_1) $0 < \xi_i(t) \leq \min\{1, k_0 J_i(t)\}$, para todo $t \geq \tau_0$, onde:

$$J_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{9}{4} \int_{\sigma_0}^t |\operatorname{Re} a_i(u)| du},$$

(c'_2) $\xi_i(\cdot)$ é absolutamente contínua em todo subconjunto compacto de $[\tau_0; +\infty[$.

Definimos também o conjunto polifacial:

$$\omega = \{(t, x) \in [\tau_0; +\infty[\times \mathbb{C}^n \mid \ell^i(t, x) < 0 \text{ e } m(t, x) < 0, \text{ para } i=1, 2, \dots, n\}.$$

Mais uma vez, tem-se pela frente a tarefa de mostrar que, através de uma escolha adequada de τ_0 e das funções $\xi_i(\cdot)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, o conjunto ω é regular relativamente a (eq.1.2) no sentido da definição 2.9 - Capítulo I

É imediato que $\dot{m}_{(1.2)}(s, \psi(0)) = -1 < 0$, para todo $s \geq \tau_0$ e $\psi \in \Omega$. Agora, seja $P = (t, x)$ um ponto qualquer de $\partial\omega$, com $\ell^i(P) = 0$, para algum $i = 1, 2, \dots, n$. Seja ψ um elemento qualquer do espaço C , com $\psi(0) = x$ e $(t+\theta, \psi(\theta)) \in \omega$, para todo $-r \leq \theta < 0$. Isto significa que:

$$|\psi_i(0) - y^i(t)| = \xi_i(t) \text{ e } |\psi_i(\theta) - y^i(t+\theta)| < \xi_i(t+\theta), \text{ para todo } -r \leq \theta < 0.$$

Uma vez $y^i(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ e $\xi_i(\cdot)$ são absolutamente contínuas em todo subconjunto compacto de $[\sigma_0; +\infty[$ e $[\tau_0; +\infty[$, respectivamente, pode-se afirmar que existe um conjunto de medida nula N em $\mathbb{R}$

tal que existem:

$$\dot{y}^i(s), \dot{\xi}_i(s), \text{ para todo } s \in [\tau_0; +\infty[\setminus N, ,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Consideremos uma vizinhança $U(t, \psi) =]t-\delta; t+\delta[\times B_R(\psi)$ em $\mathbb{R} \times C$, onde $0 < \delta < r$ e $R > 0$ são determinados como no teorema anterior. Reprisando os cálculos daquele teorema, obtém-se:

$$\begin{aligned} (1^o) \quad & \frac{1}{2} \ell_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) \geq - \xi_i(s) \dot{\xi}_i(s) - \\ & - |Re a_i(s)| |\psi_i(0) - y^i(s)|^2 - \\ & - \sum_{j=1}^n |b_{ij}(s)| |\psi_j(-r) - y^j(s-r)| |\psi_i(0) - y^i(s)| - \\ & - |f_i(s, \psi) - f_i(s, y_s)| |\psi_i(0) - y^i(s)| - \\ & - |g_i(s, \psi)| |\psi_i(0) - y^i(s)|, \text{ para todo } (s, \psi) \in U(t, \psi) \setminus N \times C, \end{aligned}$$

$$(2^o) \quad \frac{1}{2} \xi_i(s) < |\psi_i(0) - y^i(s)| < \frac{3}{2} \xi_i(s)$$

$$\begin{aligned} |\psi_j(\theta) - y^j(s+\theta)| &< \xi_j(s+\theta) + \frac{1}{2} \xi_i(s) \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \xi_i(s) \leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

para todo $(s, \psi) \in U(t, \psi)$ e $-r \leq \theta \leq 0$. Deste resultado e da propriedade (c_1') da função $\xi_i(\cdot)$, obtemos adicionalmente:

$$||\psi - y_s|| \leq 1 + \frac{1}{2} \xi_i(s) \leq 1 + \frac{k_0}{2} J_i(s) \leq 1 + \frac{k_0}{2} J(s),$$

Este resultado e a hipótese (h_1) permitem escrever que:

$$|f^i(s, \psi) - f^i(s, y_s)| = |f^i(s, y_s + (\psi - y_s)) - f^i(s, y_s)| \leq \lambda_i(s),$$

$$|g^i(s, \psi)| = |g^i(y_s + (\psi - y_s))| \leq \rho_i(s)$$

Deste modo, a desigualdade que comparece em (1^0) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2} \dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) \geq -\xi_i(s) [\dot{\xi}_i(s) + G(s)\xi_i(s) + H(s)],$$

onde:

$$G(s) = \frac{9}{4} |\operatorname{Re} a_i(s)|, \quad H(s) = \frac{3}{2} \left[1 + \frac{k_0}{2} J(s) \right] \sum_{j=1}^n |b_{ij}(s)| + \lambda_i(s) + \rho_i(s),$$

Logo, para que tenhamos $\dot{\ell}_{(1.2)}^i(s, \psi(0)) > 0$, deve ser válida a desigualdade diferencial:

$$\dot{\xi}_i(s) + G(s)\xi_i(s) + H(s) < 0.$$

Ora, de acordo com o lema 2.4, as hipóteses (h_1) e (h_2) , garantem a existência de ao menos uma solução $\xi_i(\cdot)$ da desigualdade acima, definida em $[\sigma_0; +\infty[$, satisfazendo:

(a) $\xi_i(s) > 0$, para todo $s \geq \sigma_0$,

$$(b) \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\xi_i(s)}{J_i(s)} = 0.$$

Além disso, em virtude de (b), é possível escolher um $\tau_0 > \sigma_0 + r$, suficientemente grande, comum a todas as funções $\xi_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tal que $0 < \xi_i(s) \leq \min\{1, k_0 J_i(s)\}$, para todo $s \geq \tau_0$.

Pois bem, a adoção das funções $\xi_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$, e do número real τ_0 na construção das funções $\ell^i(t, x)$ e $m(t, x)$ tornam o conjunto ω regular relativamente $\tilde{a}$ (eq. 1.2), no sentido da definição 2.9 - Capítulo I. Agora, a parte final da prova segue passo a passo a correspondente do Teorema 2.5.

Exemplo

Consideremos as equações diferenciais com retardamento:

$$(eq. 2.4) \quad \dot{y} = A(t)y(t) + B(t)y(t-r)$$

$$(eq. 2.5) \quad \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) + g(t, x_t),$$

onde:

$$(1^o) \quad A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & a(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & -b(t) \\ b(t) & 0 \end{bmatrix},$$

$$a(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } t = k\pi \\ \frac{|\cos t|}{2|\sin t|^{1/2}} & , \text{ se } k\pi < t < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{|\cos t|}{2|\sin t|^{1/2}} & , \text{ se } k\pi + \frac{\pi}{2} < t < (k+1)\pi \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} 0, & \text{ se } t = k\pi \\ 1, & \text{ se } k\pi < t < k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -1, & \text{ se } k\pi + \frac{\pi}{2} < t < (k+1)\pi \end{cases}$$

$$g(t, \psi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{|t|^{1/2}}(\psi_1(-2\pi) + \psi_2(-2\pi)) \\ \frac{1}{|t|^{1/2}}(\psi_1(-2\pi) + \psi_2(-2\pi)) \end{bmatrix} & , \text{ se } 0 < |t| \leq 1, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & , \text{ se } t = 0, \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2}(\psi_1(-2\pi) + \psi_2(-2\pi)) \\ \frac{1}{t^2}(\psi_1(-2\pi) + \psi_2(-2\pi)) \end{bmatrix} & , \text{ se } |t| > 1. \end{cases}$$

(2^o) as funções $a(t), b(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não são contínuas, embora sejam localmente integráveis, enquanto que a aplicação $g(t, \psi) : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz a condição de Carathéodory sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

(3^o) a (eq. 2.5) possui a propriedade da unicidade de soluções.

$$(4^o) \text{ a função } y(t) = \begin{bmatrix} |\cos t| e^{|\sin t|^{1/2}} \\ |\sin t| e^{|\sin t|^{1/2}} \end{bmatrix} \text{ é solução da (eq. 2.4)}$$

no intervalo $[0; +\infty[$.

No presente exemplo é possível escolher $k_0 = 1$. Por outro lado, pode-se observar que:

$$J_1(s) = J_2(s) = e^{-\frac{9}{4} \int_0^s |a(u)| du} = e^{-\frac{9}{4} |\text{sens}|^{1/2}}$$

$$g_i(s, y_s + \psi) = g_i(s, y_s^1 + \psi_1, y_s^2 + \psi_2) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ se } s = 0, \\ \frac{1}{s^{1/2}} [y^1(s-r) + y^2(s-r) + \psi^1(-r) + \psi^2(-r)] & , \text{ se } 0 < s \leq 1, \\ \frac{1}{s^2} [y^1(s-r) + y^2(s-r) + \psi^1(-r) + \psi^2(-r)] & , \text{ se } s > 1. \end{cases}$$

Deste modo, para todo $(s, \psi) \in [0; +\infty[\times C$, com $||\psi|| \leq 1 + \frac{1}{2}J(s)$, temos:

$$|g_i(s, y_s + \psi)| \leq \begin{cases} \frac{1}{s^{1/2}} (2|\cos s| e^{|\text{sen } s|^{1/2}} + 2 + J_i(s)) & , \text{ para } 0 \leq s \leq 1, \\ \frac{1}{s^2} (2|\cos s| e^{|\text{sen } s|^{1/2}} + 2 + J_i(s)) & , \text{ para } s > 1. \end{cases}$$

Daí:

$$|g_i(s, y_s + \psi)| \leq \begin{cases} \frac{1}{s^{1/2}} (2e + 2 + J_i(s)) & , \text{ para } 0 \leq s \leq 1, \\ \frac{1}{s^2} (2e + 2 + J_i(s)) & , \text{ para } s > 1, \end{cases}$$

resultado que sugere a seguinte definição:

$$\rho_i(s) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } s = 0 \\ \frac{1}{s^{1/2}}(2e + 2 + J_i(s)) & , \text{ se } 0 < s \leq 1 \\ \frac{1}{s^2}(2e + 2 + J_i(s)) & , \text{ se } s > 1 \end{cases}$$

A função $\rho_i(\cdot) : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é integrável sobre $[0; +\infty[$. Em vista deste fato e considerando que:

$$(J_i(s))^{-1} = e^{\frac{9}{4}|s \operatorname{sen} s|^{1/2}} \leq e^{\frac{9}{4}}, \text{ para todo } s \geq 0,$$

concluimos, então, que a integral $\int_0^{+\infty} \frac{\rho_i(s)}{J_i(s)} ds$ converge.

Portanto, uma vez que todas as hipóteses do Teorema 2.6 estão satisfeitas, pode-se afirmar que existe ao menos uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 2.5), definida no futuro, tal que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x^i(t, \sigma, \psi) - | \cos t | e^{| \operatorname{sen} t |^{1/2}}] e^{9/4 | \operatorname{sen} t |^{1/2}} = 0, \text{ para } i=1,2,$$

Isto, por sua vez, implica que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x^i(t, \sigma, \psi) - | \cos t | e^{| \operatorname{sen} t |^{1/2}}] = 0, \text{ para } i = 1,2.$$

Tanto no teorema 2.5 como no seu subsequente, exige-se que a (eq. 1.2) apresente a "propriedade da unicidade de soluções". No entanto, é possível eliminar esta restrição desde que algumas hipóteses dos teoremas mencionados sejam convenientemente alteradas.

Assim, começaremos por admitir que as funções $|Rea_i(t)|$ e $|b_{ij}(t)|$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$, são contínuas em $]T; +\infty[$.

Teorema 2.7

Suponhamos que $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ seja uma dada solução da (eq. 1.1), definida em $[\sigma_0; +\infty[$ e admitamos que sejam válidas as seguintes hipóteses:

(h₁) existe um número real $k_0 = k_0(y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)) > 0$ e aplicações contínuas $\lambda, \rho :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$, tais que:

"para todo $(s, \psi) \in]\max\{\sigma_0; T\}; +\infty[\times \Omega$, com $\|\psi\| \leq \frac{3}{2} k_0$, tem-se:

$$\begin{aligned} |f_i^i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi) - f_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0))| &\leq \lambda_i(s) \\ &\quad i=1, 2, \dots, n. \\ |g_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi)| &\leq \rho_i(s) \end{aligned}$$

(h₂) para cada $i = 1, 2, \dots, n$, tem-se $Rea_i(t) > 0$, para todo $t > T$,

$$(h_3) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^n |b_{ij}(t)|}{Rea_i(t)} = 0, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

(h₄) a integral $\int_0^{+\infty} [\lambda_i(s) + \rho_i(s)] ds$ converge.

Então, existe ao menos uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 1.2), definida no futuro, tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t, \sigma, \psi) - y(t, \sigma_0, \psi_0)] = 0$.

Prova

Segue passo a passo a prova correspondente do teorema 2.5, apoiando-se sobre o teorema 2.11-Capítulo I, ao invés do teorema 2.10 do mesmo capítulo. Com efeito, as alterações introduzidas fazem com que o conjunto polifacial ω , regular relativamente $\tilde{a}$ (eq. 1.2), no sentido da definição 2.9 - Capítulo I, que comparece na prova do teorema 2.5, seja gerado por aplicações $\ell^i(t,x)$ e $m(t,x)$ continuamente diferenciáveis. Além disso, todos os conjuntos $N(\sigma, \psi)$ da definição citada acima são automaticamente vazios. A isto, devemos acrescentar ainda o fato de o conjunto Z , que se considera naquela prova ser compacto.

Teorema 2.8

Seja $y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)$ uma dada solução da (eq. 1.1), definida em $[\sigma_0; +\infty[$ e suponhamos válidas as seguintes hipóteses:

(h₁) existe um número real $k_0 = k_0(y(\cdot, \sigma_0, \psi_0)) > 0$ e aplicações contínuas $\lambda, \rho :]T; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$, tais que:

"para todo $(s, \psi) \in]\max\{\sigma_0; T\}; +\infty[\times \Omega$, com $\|\psi\| \leq 1 + \frac{k_0}{2} J(s)$,

onde $J(s) = \max_{i=1,2,\dots,n} J_i(s)$ e $J_i(s) = e^{-9/4 \int_{\sigma_0}^s |\text{Re} a_i(u)| du}$,

tem-se:

$$|f_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi) - f_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0))| \leq \lambda_i(s),$$

$i=1,2,\dots,n.$

$$|g_i(s, y_s(\sigma_0, \psi_0) + \psi)| \leq \rho_i(s)$$

(h₂) para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$, as integrais impróprias:

$$\int_{\cdot}^{+\infty} \frac{|b_{ij}(s)|}{J_i(s)} ds, \quad \int_{\cdot}^{+\infty} \frac{\lambda_i(s) + \rho_i(s)}{J_i(s)} ds$$

convergem.

Então, existe ao menos uma solução $x(\cdot, \sigma, \psi)$ da (eq. 1.2), definida no futuro, tal que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^i(t, \sigma, \psi) - y^i(t, \sigma_0, \psi_0)}{J_i(t)} = 0,$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DEIMLING, K. - Ordinary Differential Equations in Banach Spaces, Lectures Notes 596, Springer-Verlag 1977.
- [2] HALE, J.K. - Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag 1977.
- [3] HARTMAN, P. - Ordinary Differential Equations, Birkhäuser 1982.
- [4] HARTMAN, P. e WINTNER, A. - On monotone solutions of systems of nonlinear differential equations. Am. J. Math. 76, 860-866 (1954).
- [5] IZÉ, A.F. - Asymptotic Behavior and Existence of Periodic Solutions of a Class of Nonlinear Ordinary Differential Equations of the Second Order. Anais da Academia Brasileira de Ciências, 41(3) , 1969.
- [6] JACKSON, L.K. e KLAASEN, G. - A variation of the Topological Method of Ważewski. Siam J. Appl. Math, 20, 124-130(1971).
- [7] ONUCHIC, N. - Applications of the Topological Method of Ważewski to Certain Problems of Asymptotic Behavior in Ordinary Differential Equations. Pacific J. Math. 11, 1511-1527, (1961).
- [8] ONUCHIC, N. - Relationships Among the Solutions of Two Systems of Ordinary Differential Equations. Michigan Math. J., 10, 129-139 (1963).
- [9] PALAMIDES, P.K; SFICAS, Y.G e STAIKOS, V.A. - Asymptotic Behavior of Carathéodory Systems. Anti-Liapunov Method. J. Diff. Eq. 36, 442-457 (1980).
- [10] RYBAKOWSKI, K.P. - Ważewski's Principle for Retarded Functional Differential Equations. J. Diff. Eq. 36, 117-138 (1980).
- [11] RYBAKOWSKI, K.P. - A Topological Principle for Retarded Differential Equations of Carathéodory Type. J. Diff. Eq. 39, 131-150 (1981).

- [12] Staikos, V. - On the Asymptotic Behavior of Solutions of Perturbed Linear Systems of Ordinary Differential Equations. Bull. Soc. Math. Grèce (N.S.), 8, n.^o 2 (1967), 1-64 (Greek; English Summary).
- [13] Staikos, V. - On the Asymptotic Relationship at Infinity Between the Solutions of Two Differential Systems. Bull. Soc. Math. Grèce (N.S.), 13 (1972), 1-13.
- [14] Smydtoŭna, Z. - Sur l'Allure Asymptotique des Integrales des Equations Differentielles Ordinaires. Ann. Polon. Math. 24 (1951), 17-34.