**ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS RETARDADAS COM
ARGUMENTO SECCIONALMENTE
CONTÍNUO**

Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

Orientador: *Prof.Dr. Luiz Antonio Vieira de Carvalho*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências-Área: Matemática - Análise.

**USP - São Carlos
1995**

*Aos meus pais
Paulo e Águida*

AGRADECIMENTOS

Ao professor Luiz Antonio Vieira de Carvalho, pela confiança e orientação.

Aos professores José Geraldo dos Reis, Alexandre Nolasco de Carvalho e Maria Aparecida Bená, pela amizade e pelas valiosas discussões.

Ao meu marido José Carlos, pelo incentivo, pela compreensão e carinho que me dedicou durante todos estes anos.

À minha família, pelo carinho, pelo apoio e pela força interior que todos sempre me transmitiram.

Aos amigos do Departamento de Matemática da UNESP-Rio Claro, pela oportunidade concedida, pelo apoio e pelas valiosas discussões.

À Elizabeth, Laura e Sônia, funcionárias da área acadêmica do ICMSC-USP, pela eficiência e pelo carinho com que sempre me atenderam.

À CAPES, pelo auxílio concedido através do PICD.

À Maria Elisa, pela amizade e pelo capricho com que digitou este trabalho.

À todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

This work is concerned with the study of the stability of Retarded Differential Equations with Piecewise Continuous Argument (EPCA) and Discrete Equations, using Dichotomic Maps.

The definition of Dichotomic Map, and theorems of stability and asymptotic stability for the two cited equations, are established.

We show an important relationship between an EPCA and its associated discrete equation proving, under certain conditions, their equivalence in the study of stability.

An interesting aspect of the EPCA is that the stability of its null equilibrium with initial instant $n_0 \in \mathbb{Z}$, is equivalent to the stability with initial instant $t_0 \in \mathbb{R}$.

The developed methods are illustrated with applications through which we highlight the fact that the main advantage of those methods consist in the use of extremely simple functionals for the achievement of the desired results of stability.

RESUMO

Este trabalho é sobre o estudo da estabilidade de Equações Diferenciais Retardadas com Argumento Seccionalmente Contínuo e de Equações Discretas, usando Funções Dicotômicas.

A definição de Função Dicotômica e teoremas de estabilidade e estabilidade assintótica para as duas equações citadas, são estabelecidos.

Evidenciamos a importante relação entre a equação diferencial e sua equação discreta associada provando, sob certas condições, a equivalência no estudo de estabilidade.

Um aspecto interessante da equação diferencial é que, a estabilidade do seu equilíbrio nulo com instante inicial $n_0 \in \mathbb{Z}$, é equivalente à sua estabilidade com instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$.

Os métodos apresentados são ilustrados com aplicações, onde observamos que a principal vantagem destes métodos consiste no uso de funcionais extremamente simples para a obtenção dos resultados desejados de estabilidade.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	i
CAPÍTULO 1 - Fatos Básicos e o Conceito de Função Dicotômica	
1.1 - Equações Discretas	01
1.2 - Equações Diferenciais Funcionais Retardadas	06
CAPÍTULO 2 - Resultados Gerais sobre a Equação Diferencial com Retardamento Seccionalmente Contínuo	
2.1 - A Relação entre a Equação Diferencial (1.3) e sua Equação Discreta Associada	13
2.2 - Estabilidade	16
2.3 - Equação Autônoma nos Inteiros	20
CAPÍTULO 3 - Estudo da Estabilidade e Estabilidade Assintótica usando Funções Dicotômicas	
3.1 - A Equação Discreta (1.1)	23
3.2 - A Equação Diferencial (1.3)	31
CAPÍTULO 4 - A Relação entre a Equação Diferencial e sua Equação Discreta Associada através de Funções Dicotômicas	
4.1 - Caso Escalar da Equação Diferencial (2.5)	43
4.2 - Caso Geral (Não Escalar) da Equação Diferencial (1.3)	49
CAPÍTULO 5 - Aplicações da Teoria de Funções Dicotômicas	61
BIBLIOGRAFIA.....	87
APÊNDICE.....	90

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos equações diferenciais não autônomas do tipo

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t), x([t])) \quad \text{q.t.p., } t \geq t_0 \\ x_{t_0} &= \varphi\end{aligned}$$

onde $[t]$ denota "a parte inteira de t ". Elas podem ser consideradas como tipos especiais de Equações Diferenciais Funcionais, e são chamadas de Equações Diferenciais Retardadas com Argumento Seccionalmente Contínuo (EPCA).

Estas equações tem sido estudadas em alguns casos lineares e não lineares por Cooke e Wiener [8, 9, 10], Aftabizadeh e Wiener [1], Jayasree e Deo [15], Seifert [20] e outros. E equações do tipo neutro com este tipo de argumento, tem sido também discutidas por Cooke e Wiener [7].

A EPCA é um caso particular de

$$x'(t) = f(t, x(t), x(h(t))) \tag{A}$$

onde o argumento $h(t)$ tem intervalos de constância. Note que, no nosso caso, a função $h(t)$ é descontínua.

As equações do tipo (A) passaram a ter a atenção dos pesquisadores a partir de um artigo de A. D. Myshkis [18] onde o autor observou que não existia uma teoria substancial para equações diferenciais com argumentos que são seccionalmente constantes ou seccionalmente contínuos.

Aplicações destas equações se apresentam na estabilização de sistemas de controle híbrido com retardamento na realimentação. Por um sistema híbrido, entendemos um sistema com uma instalação em processo contínuo com um controlador discreto (por amostragem).

No caso em que a função f não depende diretamente da variável t , a EPCA tem estrutura de sistema dinâmico contínuo em intervalos de comprimento 1, e portanto combina as propriedades de equações diferenciais e equações diferença.

A continuidade de uma solução num ponto de junção de quaisquer dois intervalos consecutivos, implica em relações recursivas para os valores da solução em tais pontos, originando a equação discreta associada.

Daí a importância do estudo da estabilidade de equações discretas que também desenvolvemos neste trabalho, estendendo os resultados de Carvalho e Ferreira [5] sobre equações autônomas.

A teoria que apresentamos para a EPCA, é uma adaptação ao trabalho de Bená [2] que trabalha com Equações Diferenciais Funcionais Retardadas não Autônomas, utilizando o Método das Funções Dicotômicas, originalmente estabelecido por Carvalho e Ferreira [5] para equações discretas e posteriormente por Carvalho e Cooke [4] para equações diferenciais-diferença.

O Método de Funções Dicotômicas apresenta um avanço no estudo da estabilidade do equilíbrio de uma equação diferencial funcional (como também para equações discretas), dentro do contexto do Segundo Método

de Liapunov e estende os Teoremas clássicos de Razumikhin, que permitem a determinação de estabilidade em certos casos em que é muito complicada a construção de um funcional de Liapunov. O Método de Funções Dicotômicas apresenta vantagem na obtenção de resultados de estabilidade, utilizando-se funções extremamente simples.

Este trabalho é composto de cinco capítulos. O primeiro restringe-se à apresentação de elementos básicos para o desenvolvimento do trabalho. No segundo capítulo, fazemos a relação entre a EPCA e sua equação discreta associada, observando características interessantes apresentadas pela equação discreta.

No capítulo 3, estabelecemos os teoremas que garantem estabilidade (estabilidade assintótica) para a EPCA e para equações discretas não autônomas, usando Funções Dicotômicas.

No capítulo 4, apresentamos uma comparação entre a aplicação do princípio de Dicotomia com relação à EPCA e à sua equação discreta associada.

No caso escalar, em que a função f não depende diretamente da variável t , trabalhando com a função dicotômica $V(x) = x^2 / 2$, obtemos equivalência de resultados para as duas equações.

No caso não escalar (geral), nem sempre podemos utilizar a mesma função dicotômica para as duas equações, porém, dada uma função V dicotômica (estritamente dicotômica) com relação à EPCA, definimos uma nova função a partir de V , que terá a propriedade de dicotomia desejada para a equação discreta associada.

O capítulo 5 é destinado às aplicações do Método das Funções Dicotômicas.

Capítulo 1

FATOS BÁSICOS E O CONCEITO DE FUNÇÃO DICOTÔMICA

Neste trabalho serão consideradas equações diferenciais funcionais com retardamento seccionalmente contínuo, que são tanto um tipo especial de equações diferenciais funcionais retardadas como também um caso particular de equações a diferenças finitas. Abordemos então, os fatos básicos sobre estas duas teorias.

1.1. Equações Discretas

Seja $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $I = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$, $f(n, 0) = 0$ para todo $n \in I$ e consideremos a equação discreta:

$$x_{n+1} = f(n, x_n), \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots \quad (1.1)$$

$$x_{n_0} = x_0$$

A solução de (1.1) é dada pela seqüência $x_0, f(n_0, x_0), f(n_0 + 1, f(n_0, x_0)), \dots$, que existe, é única e depende continuamente de x_0 , simplesmente pelo fato de f ser uma função contínua [14, 16].

Denotemos a solução por $x(n, n_0, x_0)$ (ou, quando não couber dúvida, $x_n(x_0)$). Como $f(n, 0) = 0$ para todo $n \in I$, a solução através de $x_0 = 0$ é a solução nula, a qual é também chamada de "equilíbrio nulo".

Denotemos por $|x|$, a norma Euclidiana de x .

A seguir, apresentamos algumas definições e notações, que serão necessárias no decorrer deste trabalho.

Definição 1.1: A solução nula de (1.1) é *estável* (segundo Liapunov) se, dados $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta$ então $|x_n(x_0)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Definição 1.2: A solução nula de (1.1) é *assintoticamente estável* se for estável e além disso existir $\gamma = \gamma(n_0) > 0$ tal que se $|x_0| < \gamma$, então $x_n(x_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Definição 1.3: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, uma vizinhança da origem. Uma função contínua $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *definida positiva* se $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ $x \in U$.

Definição 1.4: Uma função $V : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *definida positiva* em U , se V é contínua, $V(t, 0) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e existe uma função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, estritamente crescente em $[0, \infty)$ com $\alpha(0) = 0$, tal que $V(t, x) \geq \alpha(|x|)$ para $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$.

Definição 1.5: Dada uma função $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e um número inteiro não negativo k , definimos a *k-ésima variação de V ao longo das soluções de (1.1)*, por:

$$\Delta_k V(n, x(n, n_0, x_0)) = V(n, x(n, n_0, x_0)) - V(n-k, x(n-k, n_0, x_0)), \quad n \geq n_0 + k$$

Dados:

- (i) uma função contínua V ,
- (ii) uma vizinhança Ω da origem em $\mathbb{R}^n$,
- (iii) $n, j, k \in \mathbb{Z}$ com $k \geq 2$, $n \geq n_0 + k$ e $j = 1, 2, \dots, k$,
- (iv) $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, uma função contínua, não decrescente, $p(y) > y$,
 $y \in (0, \delta)$ para algum $\delta > 0$ fixado,

passamos a definir os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega_+^j(n, k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(n, x(n, n-k, y)) > 0\},$$

$$\Omega_-^j(n, k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(n, x(n, n-k, y)) < 0\},$$

$$\Omega_0^j(n, k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(n, x(n, n-k, y)) = 0\} \text{ e}$$

$$\Omega_{p-}^j(n, k) = \{y \in \Omega : p(V(n, x(n, n-k, y))) - V(n-j, x(n-j, n-k, y)) < 0\}.$$

Dado um conjunto A , A^* representa o conjunto $A \setminus \{0\}$, $\bar{A}$, o fecho de A e $\Omega_{0-}^j(n, k) = \Omega_-^j(n, k) \cup \Omega_0^j(n, k)$.

Definição 1.6: Dadas uma vizinhança Ω da origem em $\mathbb{R}^n$ e uma função contínua $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que V é *dicotômica com relação à equação (1.1)* (em Ω) se, qualquer que seja $n_0 \in \mathbb{Z}$, pudermos encontrar $N = N(n_0)$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $N \geq 2$, tal que para todo inteiro $n \geq n_0 + N$, existe em correspondência um outro inteiro $k = k(n_0, n)$, $2 \leq k \leq n - n_0$, para o qual se verifica:

$$\left[\bar{\Omega}_+^1(n, k) \cup \Omega_0^1(n, k) \right] \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_{0-}^j(n, k).$$

Definição 1.7: Se V for dicotômica, e além disso existirem um inteiro M , $2 \leq M < \infty$ e uma função p satisfazendo (iv) tais que:

$$(i) \ k = k(n_0, n) \leq M, \text{ para todo } n \geq n_0 + N,$$

$$(ii) \ [\bar{\Omega}_+^1(n, k) \cup \Omega_0^1(n, k)]^* \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_{p^-}^j(n, k) \text{ e}$$

$$(iii) \text{ sempre que } x_{n-k}(x_0) \rightarrow \bigcap_{j=1}^k \Omega_0^j(n, k), \text{ então necessariamente}$$

$$x_n(x_0) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

dizemos que V é *estritamente dicotômica (em Ω) com relação à equação (1.1)*.

Coloquialmente, a Definição (1.6) nos diz que V é dicotômica com relação à equação (1.1) em Ω , se para todo n e todo $x \in \Omega$ onde a primeira variação de V ao longo da solução é não negativa, existe um instante $(n-j)$ anterior à $(n-1)$, tal que a j -ésima variação de V é não positiva. Ou seja, apesar do crescimento de V ao longo da solução no ponto n , temos um decrescimento de V se comparado com um certo ponto $\bar{n}$ anterior à $(n-1)$.

E no caso da Definição (1.7), V é estritamente dicotômica com relação à equação (1.1) em Ω , se ocorrer a situação anterior para $x \neq 0$, com a j -ésima variação de V , estritamente negativa. E mais, a solução tal que a função V ao longo da solução tende a se tornar constante, necessariamente tal solução tende a zero, quando $n \rightarrow \infty$.

Salientamos que, na definição de dicotomia para o caso autônomo dada em [3], o valor k é constante e na Definição (1.6) é permitida a

variação de k com relação à variável n , e em particular, até mesmo o caso em que $k(n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

E mais, o processo de dicotomia não necessariamente se inicia no instante n_0 e sim, a partir de $n_0 + N$, para algum inteiro não negativo $N = N(n_0)$.

Com relação à dicotomia estrita, na Definição (1.7) exige-se a existência de uma função p com certas propriedades específicas, fundamentais na prova de estabilidade assintótica.

No caso autônomo, como é natural, as condições exigidas são menos restritivas, não havendo necessidade da existência da função p , conforme se constata em [3].

Para a equação autônoma

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1-A)$$

com condição inicial $x_0 = y$ e que apresenta uma função dicotômica V com constante k finita, as Definições (1.6) e (1.7) podem ser dadas por:

Definição 1.6-A: Dadas uma vizinhança Ω da origem em $\mathbb{R}^n$ e uma função contínua $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que V é dicotômica com relação à equação (1.1-A) (em Ω) se existir um inteiro k finito, $k \geq 2$, tal que:

$$[\overline{\Omega}_+^1(k) \cup \Omega_0^1(k)] \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_{0-}^j(k).$$

Definição 1.7-A: Se V for dicotômica e além disso:

$$(i) \left[\overline{\Omega}_+^1(k) \cup \Omega_0^1(k) \right]^* \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_-^j(k)$$

$$(ii) \Omega_0^1(k) \cap \Omega_0^k(k) = \{0\} ,$$

dizemos então que V é estritamente dicotômica com relação à equação (1.1-A) (em Ω).

Neste caso, estamos usando as seguintes definições equivalentes:

$$\Omega_+^j(k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(x_k(y)) > 0\} ,$$

$$\Omega_-^j(k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(x_k(y)) < 0\} ,$$

$$\Omega_0^j(k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(x_k(y)) = 0\} \text{ e}$$

$$\Omega_{0-}^j(k) = \Omega_-^j(k) \cup \Omega_0^j(k) , \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

1.2. Equações Diferenciais Funcionais Retardadas

Consideremos a equação diferencial funcional retardada não autônoma:

$$x'(t) = g(t, x_t) , \quad t \geq t_0 \tag{1.2}$$

$$x_{t_0} = \varphi$$

onde $g : \mathcal{R} \times C \rightarrow \mathcal{R}^n$ é uma função contínua que satisfaz condições suficientes para garantir a unicidade e dependência contínua das soluções de (1.2) em relação às condições iniciais.

E $g(t,0) = 0$, $\varphi \in C = C([-r,0], \mathcal{R}^n)$, $r > 0$; onde C indica o espaço de Banach das aplicações contínuas φ de $[-r,0]$ em $\mathcal{R}^n$, com a norma:

$$\|\varphi\| = \sup \{ |\varphi(\theta)| : \theta \in [-r,0] \}.$$

Dada uma função contínua $x : [t_0 - r, t_0 + \zeta) \rightarrow \mathcal{R}^n$, $\zeta > 0$, definimos para $t \in [t_0, t_0 + \zeta)$, a função $x_t : [-r,0] \rightarrow \mathcal{R}^n$ da seguinte forma:

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r,0] \text{ onde } x_t \in C.$$

Usaremos a notação $x(\cdot, t_0, \varphi)$ para a solução de (1.2), onde $x_{t_0}(\cdot, t_0, \varphi) = \varphi$ e $x_t(\cdot, t_0, \varphi)(\theta) = x(t + \theta, t_0, \varphi)$, $\theta \in [-r,0]$.

A solução através de $\varphi = 0$ é a solução nula, a qual é também chamada de "equilíbrio nulo".

Mesmo no caso em que a função g em (1.2) não é contínua, podemos estender os resultados de existência, unicidade e dependência contínua no sentido de Carathéodory, de acordo com a seguinte definição:

Definição 1.8: Uma função $g : \Omega \subset \mathcal{R} \times C \rightarrow \mathcal{R}^n$ (Ω : subconjunto aberto de $\mathcal{R} \times C$) satisfaz *condição de Carathéodory* sobre Ω , se $g(t, \varphi)$ é mensurável em t para cada φ fixa; contínua em φ para cada t fixo, e para todo par fixo $(t, \varphi) \in \Omega$, existe uma vizinhança $U(t, \varphi)$ e uma função m Lebesgue integrável, tal que

$$|g(s, \psi)| \leq m(s), \quad (s, \psi) \in U(t, \varphi).$$

Por exemplo, se g é contínua, é fácil constatar que g satisfaz condição de Carathéodory [13].

Com a hipótese de g satisfazer a condição de Carathéodory, a solução $x(\cdot, t_0, \varphi)$ de (1.2) definida em $[t_0 - r, t_0 + A]$ para algum $A > 0$, é absolutamente contínua em $[t_0, t_0 + A]$ e satisfaz $x'(t) = g(t, x_t)$ em quase toda parte de $[t_0, t_0 + A]$ (q.t.p.).

A teoria geral de Equações Diferenciais Funcionais Retardadas, pode ser encontrada em [11, 13].

Vejamos agora a equação diferencial funcional com retardamento seccionalmente contínuo, para a qual todo este trabalho está voltado.

Seja a equação

$$x'(t) = f(t, x(t), x([t])) \text{ q.t.p., } t \geq t_0 \quad (1.3)$$

$$x_{t_0} = \varphi$$

onde $[t]$ denota "a parte inteira de t ", $\varphi \in C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua com $f(t, 0, 0) = 0$.

Vamos considerar que f satisfaz condições suficientes para garantir unicidade e dependência contínua das soluções de (1.3) em relação às condições iniciais.

O retardamento é seccionalmente contínuo pois $r(t) = t - [t]$ é uma função contínua em todo intervalo $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ e descontínua nos valores inteiros.

A equação (1.3) é equivalente à equação (1.2) com

$$g(t, \varphi) = f(t, \varphi(0), \varphi([t] - t)), \quad t \geq t_0. \quad (1.4)$$

Observemos que g é descontínua em t , devido à descontinuidade do retardamento $r(t)$. Mas como f é contínua, obtemos o seguinte resultado sobre g :

Lema 1.1: Se f é contínua em $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^{2n}$, então a função g dada por (1.4), satisfaz condição de Carathéodory sobre $\mathcal{R} \times C$.

Prova-se, sem dificuldades, este resultado trabalhando-se com a norma da soma em $\mathcal{R} \times C$, a norma do supremo em C , e com a norma do máximo em $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^{2n}$ (veja Apêndice).

Assim, a equação (1.3) é um caso particular da equação (1.2), com a ressalva de que g não é contínua, mas satisfaz a condição de Carathéodory sobre $\mathcal{R} \times C$.

Em se tratando da equação (1.3), devemos adotar o seguinte conceito de solução (veja Cooke e Wiener [7]):

Definição 1.9: Uma solução de (1.3) em $[t_0, b)$ é uma função $x(t)$ que satisfaz as condições:

- (i) $x(t)$ é contínua em $[t_0, b)$,
- (ii) a derivada $x'(t)$ existe em cada ponto $t \in [t_0, b)$, com a possível exceção dos pontos $t \in [t_0, b)$, onde derivadas laterais existem,
- (iii) equação (1.3) está satisfeita em cada intervalo $[n, n+1) \subset [t_0, b)$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

Vejamos agora mais algumas definições e notações que serão necessárias.

Definição 1.10: A solução nula de (1.3) é dita *estável* (no sentido de Liapunov) se dados $t_0 \in \mathcal{R}$ e $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que se $\|\varphi\| < \delta$ então $\|x_t(\cdot, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$.

Definição 1.11: A solução nula de (1.3) é dita *assintoticamente estável* se for estável e além disso, existir $\gamma = \gamma(t_0) > 0$ tal que se $\|\varphi\| < \gamma$, então $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Definição 1.12: Seja $V : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ uma função contínua. Definimos a "derivada de V ao longo das soluções de (1.3), $V'(t, \varphi)$ ", por

$$V'(t, \varphi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x(t+h, t, \varphi)) - V(t, x(t, t, \varphi))].$$

Dados:

- (i) uma função diferenciável V ,
- (ii) uma vizinhança Ω da origem em C ,
- (iii) $t, T \in \mathcal{R}$ com $T > 0$, $t \geq t_0 + T$,
- (iv) $p : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$ uma função contínua, não decrescente, $p(y) > y$
 $y \in (0, \delta)$, para algum $\delta > 0$ fixado,

definimos os seguintes subconjuntos de C :

$$\Omega'_+(t,T) = \{\psi \in \Omega : V'(t,x_t(\cdot;t-T,\psi)) > 0\},$$

$$\Omega'_0(t,T) = \{\psi \in \Omega : V'(t,x_t(\cdot;t-T,\psi)) = 0\},$$

$$\Omega_-^s(t,T) = \{\psi \in \Omega : V(t,x(t,t-T,\psi)) - V(t-s,x(t-s,t-T,\psi)) < 0\},$$

$$s \in (0,T],$$

$$\Omega_0^s(t,T) = \{\psi \in \Omega : V(t,x(t,t-T,\psi)) - V(t-s,x(t-s,t-T,\psi)) = 0\},$$

$$s \in (0,T],$$

$$\Omega_p^s(t,T) = \{\psi \in \Omega : p(V(t,x(t,t-T,\psi)) - V(t-s,x(t-s,t-T,\psi))) < 0\},$$

$$s \in (0,T],$$

$$\Omega_{p_0}^s(t,T) = \{\psi \in \Omega : p(V(t,x(t,t-T,\psi)) - V(t-s,x(t-s,t-T,\psi))) \leq 0\},$$

$$s \in (0,T],$$

$$\Omega_{0-}^s(t,T) = \Omega_-^s(t,T) \cup \Omega_0^s(t,T).$$

Definição 1.13: Dadas uma vizinhança Ω da origem em C e uma função diferenciável $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que V é *dicotômica com relação à equação (1.3)* (em Ω) se, qualquer que seja $t_0 \in \mathbb{R}$, pudermos encontrar $\mu = \mu(t_0) > 0$, tal que para todo $t \geq t_0 + \mu$ existe em correspondência um $T = T(t_0, t)$, $0 < T \leq t - t_0$ para o qual se verifica:

$$\left[\overline{\Omega}'_+(t,T) \cup \Omega'_0(t,T) \right] \subset \bigcup_s \Omega_{0-}^s(t,T), \quad s \in (0,T].$$

Definição 1.14: Se V for dicotômica, e além disso existir um M , $0 < M < \infty$ e uma função p satisfazendo (iv) tais que:

(i) $T = T(t_0, t) \leq M$ para todo $t \geq t_0 + \mu$,

(ii) $[\bar{\Omega}'_+(t, T) \cup \Omega'_0(t, T)]^* \subset \bigcup_s \Omega_p^s(t, T)$, $s \in (0, T)$ e

(iii) sempre que $x_{t-T} \rightarrow \bigcap_s [\Omega'_0(t, T) \cap \Omega_p^s(t, T)]$, $s \in (0, T)$, então necessariamente $x_t \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$,

dizemos que V é *estritamente dicotômica com relação à equação (1.3)*.

Coloquialmente, a Definição (1.13) nos diz que V é dicotômica com relação à equação (1.3) em Ω , se para todo t e toda $\psi \in \Omega$ onde a derivada de V ao longo da solução é não negativa, existe um instante $\bar{t}$ anterior à t , tal que a variação de V entre os instantes t e $\bar{t}$ é não positiva.

E no caso da Definição (1.14), V é *estritamente dicotômica com relação à equação (1.3)* em Ω , se ocorrer a situação anterior para $\psi \neq 0$, com a variação de V entre os instantes t e $\bar{t}$, *estritamente negativa*, envolvendo uma função p com certas propriedades específicas.

E mais, se a derivada de V com relação à t ao longo de uma solução, tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ e tende a se tornar uma função constante em intervalos de amplitude T , então necessariamente esta solução tende à solução nula quando $t \rightarrow \infty$.

Capítulo 2

RESULTADOS GERAIS SOBRE A EQUAÇÃO DIFERENCIAL COM RETARDAMENTO SECCIONALMENTE CONTÍNUO

2.1. A Relação entre a Equação Diferencial (1.3) e sua Equação Discreta Associada

Sejam $x(t)$ solução de (1.3) com intervalo maximal de existência $[t_0, b)$, e n_0 o primeiro inteiro maior ou igual à t_0 .

Para $n \in \mathbb{Z}$, seja $x_n(t)$ a restrição da solução $x(t)$ no intervalo $[n_0 + n, n_0 + n + 1) \subset [t_0, b)$, com $c_n = x_n(n_0 + n, t_0, \varphi)$, $n = 0, 1, \dots, [b] - n_0$.

Cada restrição $x_n(t)$ satisfaz a equação diferencial ordinária:

$$x'(t) = f(t, x(t), c_n)$$

$$x(n_0 + n) = c_n$$

para $t \in [n_0 + n, n_0 + n + 1)$, $n = 0, 1, \dots, [b] - n_0$.

Devido à continuidade da solução nos valores inteiros, devemos ter

$$c_{n+1} = x_n(n_0 + n + 1), \quad n = 0, 1, \dots, [b] - n_0.$$

Assim, temos a equação discreta associada à equação (1.3), dada por

$$c_{n+1} = c_n + \int_{n_0+n}^{n_0+n+1} f(s, x(s), c_n) ds ,$$

que pode ser vista como

$$c_{n+1} = h(n, c_n), \quad n = 0, 1, \dots, [b] - n_0, \quad (2.1)$$

onde $h : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua com $I = \{0, 1, \dots, [b] - n_0\}$.

Observemos que o estudo da equação discreta associada à equação (1.3) é importante devido à sua íntima ligação com esta equação: elas coincidem nos instantes inteiros.

Note que, em geral, isto não ocorre nas discretizações de uma equação diferencial ordinária.

Como ilustração, consideremos as equações

$$x'(t) = -x(t) + x^3([t]) - \mu x([t]) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0 \quad (2.2)$$

$$x'(t) = -(1+\mu)x(t) + x^3(t), \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

com condição inicial $x(0) = c_0$, $c_0 \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$.

Inicialmente, calculemos a equação discreta associada à equação (2.2).

No intervalo $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, com a condição $x(n) = c_n$, a equação (2.2) reduz-se à:

$$x'(t) = -x(t) + c_n^3 - \mu c_n$$

que tem como solução:

$$x_n(t) = c_n(c_n^2 - \mu) + c_n[1 - (c_n^2 - \mu)] \exp(n-t), \quad t \in [n, n+1).$$

Devido à continuidade da solução $x(t)$ nos pontos $t = n, n \in \mathbb{N}$, devemos ter:

$$c_n = x_{n-1}(n) = c_{n-1}[(c_{n-1}^2 - \mu)(1 - e^{-1}) + e^{-1}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para o caso $c_0 = 1/2$ e $\mu = 1$, temos o seguinte esboço da solução:

Para $c_0 = 1/2$ e $\mu = 1$, a solução da equação (2.3) é dada por:

$$x(t) = \sqrt{2}(1 + 7\exp(4t))^{-1/2}, \quad t \geq 0.$$

Usando, por exemplo, a técnica de aproximação de $x'(t)$ por $[x(t+h) - x(t)]/h$ (Método de Euler), temos o seguinte: Para $h > 0$ fixo e $t = nh, n \in \mathbb{N}$, $x((n+1)h) - x(nh) = hf(x(nh))$, e para $x(nh) = x_n$, temos que $x_{n+1} = x_n + hf(x_n) = F(x_n)$.

Para a equação diferencial (2.3), temos como equação aproximante, $x_{n+1} = x_n[1 + h(x_n^2 - 1 - \mu)]$, onde estes valores não necessariamente coincidem com os valores da solução de (2.3).

2.2. Estabilidade:

Se o instante inicial para a equação (1.3) for um número inteiro n_0 , torna-se desnecessário trabalhar no espaço C , bastando analisar o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x([t])) \quad \text{q.t.p.,} \quad t \geq n_0 \\ x(n_0) &= c_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

com $c_0 \in \mathbb{R}^n$.

Um aspecto interessante da equação (1.3) é que a estabilidade do seu equilíbrio nulo com instante inicial $n_0 \in \mathbb{Z}$, é equivalente à sua estabilidade com instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$, como se segue:

Definição 2.1: O equilíbrio nulo de (1.3) é *estável nos inteiros*, se a solução de (2.4) é tal que:

dados $n_0 \in \mathbb{Z}$ e $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$, tal que se $|c_0| < \delta$ então $|x(t, n_0, c_0)| < \varepsilon$, para todo $t \geq n_0$.

Fazemos a seguir a relação entre esta definição e a Definição geral (1.10) de estabilidade, dada no capítulo 1.

Lema 2.1: As Definições (1.10) e (2.1) são equivalentes.

Demonstração: É claro que a Definição (1.10) implica na Definição (2.1). Provemos a recíproca. Supondo válida a Definição (2.1), dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, provemos que existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que, se $\|\varphi\| < \delta$ então $\|x_t(\cdot, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Se $t_0 \in \mathbb{Z}$, nada há a mostrar. Suponhamos então que $t_0 \in (n_0 - 1, n_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos μ e $\delta, \delta \leq \delta(n_0)$, $0 < \mu < \delta < \varepsilon$ tão pequenos, tais que $\|\varphi\| < \mu$ implica em $|x(t, t_0, \varphi)| < \delta$ para todo $t \in [t_0, n_0]$ e $|x(n_0, t_0, \varphi)| < \delta$ implica em $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. Ou seja, $\|x_t(\cdot, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. Esta escolha é sempre possível devido à continuidade de $x(\cdot, t_0, \varphi)$ com relação a φ .

—

Em se tratando de estabilidade assintótica, também temos equivalência de definições.

Definição 2.2: O equilíbrio nulo de (1.3) é *assintoticamente estável nos inteiros*, se for estável nos inteiros e além disso existir um $\gamma = \gamma(n_0) > 0$ tal que, se $|c_0| < \gamma$ então $x(t, n_0, c_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, de acordo com o sistema (2.4).

Lema 2.2: As Definições (1.11) e (2.2) são equivalentes.

Demonstração: É claro que a Definição (1.11) implica na Definição (2.2). Provemos a recíproca, ou seja, dado $t_0 \in \mathbb{R}$ existe um $\gamma = \gamma(t_0) > 0$ tal que, se $\|\varphi\| < \gamma$ então $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Se $t_0 \in \mathbb{Z}$, nada há a mostrar. Suponhamos então $t_0 \in (n_0 - 1, n_0)$.

Dado $\gamma = \gamma(n_0) > 0$ garantido pela Definição (2.2), podemos escolher μ tão pequeno, $0 < \mu < \gamma$, tal que $\|\varphi\| < \mu$ implica em $|x(t, t_0, \varphi)| < \gamma$ para $t \in [t_0, n_0]$ e $|x(n_0, t_0, \varphi)| < \gamma$ implica em $x(t, n_0, x(n_0, t_0, \varphi)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Esta escolha é possível devido à continuidade de $x(\cdot, t_0, \varphi)$ com relação a φ ; e segue o resultado.

□

Vamos agora mostrar, sob condições específicas, que a estabilidade (estabilidade assintótica) do equilíbrio nulo da equação discreta (2.1), implica diretamente na estabilidade (estabilidade assintótica) do equilíbrio nulo da equação (1.3).

Teorema 2.3: Suponhamos f Lipschitziana nas variáveis (x, y) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$. Se o equilíbrio nulo da equação discreta (2.1) é estável, então o equilíbrio nulo da equação (1.3) é também estável.

Demonstração: Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ tal que, se $|c_0| < \delta$ então $|c_n(c_0)| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E para cada restrição $x(t)$ da solução em $[n_0 + n, n_0 + n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$x(t) = c_n + \int_{n_0+n}^t f(s, x(s), c_n) ds .$$

Assim, como f é Lipschitziana em (x,y) com constante de Lipschitz k , segue que:

$$|x(t)| \leq (1+k)|c_n| + k \int_{n_0+n}^t |x(s)|ds,$$

e pela Desigualdade de Gronwall, $|x(t)| \leq (1+k)|c_n|e^k = M|c_n|$, onde $M = (1+k)e^k$.

Logo, sempre que $|c_n(c_0)| < \varepsilon/M$, temos que $|x(t)| < \varepsilon$ para $t \in [n_0+n, n_0+n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com este resultado, usando a continuidade de $x(\cdot, t_0, \varphi)$ com relação à φ e a hipótese, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher μ e δ , $\delta \leq \delta(n_0)$,

$0 < \mu < \delta < \varepsilon$ tão pequenos tais que $\|\varphi\| < \mu$ implica em $|x(t, t_0, \varphi)| < \delta$ para $t \in [t_0, n_0]$ e $|x(n_0, t_0, \varphi)| = |c_0| < \delta$ implica em $|c_n(c_0)| < \varepsilon/M < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que por sua vez implica em $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$. E temos o resultado desejado.

□

Teorema 2.4: Com as hipóteses do Teorema (2.3), se o equilíbrio nulo da equação (2.1) é assintoticamente estável, então o equilíbrio nulo da equação (1.3) é também assintoticamente estável.

Demonstração: Por hipótese, dado $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $\gamma = \gamma(n_0) > 0$ tal que se $|c_0| < \gamma$, então $c_n(c_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como no Teorema (2.3), dado $t_0 \in \mathbb{R}$, podemos escolher μ e γ , $\gamma \leq \gamma(n_0)$, $0 < \mu < \gamma$ tão pequenos tais que $\|\varphi\| < \mu$ implica em

$|x(t, t_0, \varphi)| < \gamma$ para $t \in [t_0, n_0]$ e $|c_0| < \gamma$ implica que $c_n(c_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, que por sua vez implica que $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

□

2.3. Equação Autônoma nos Inteiros

Neste parágrafo, abordamos um caso particular da equação (1.3) dada por:

$$x'(t) = f(x(t), x([t])) \quad \text{q.t.p.,} \quad t \geq t_0 \quad (2.5)$$

$$x_{t_0} = \varphi$$

Apesar da função f não depender diretamente da variável t , a equação (2.5) não é autônoma pois, como vimos, é equivalente à equação (1.2) para uma g apropriada.

Observamos que, encontrar solução de (2.5) com valor inicial em t_0 , é equivalente à encontrar solução de (2.5) com valor inicial dado em $t_0 + n$, onde n é um inteiro não negativo, como veremos.

Definição 2.3: Dizemos que a equação diferencial funcional (1.2) é *autônoma em* $A \subset \mathcal{R}_+$, quando

$$x(t+\tau, t_0, \varphi) = x(t, t_0, x_{t_0+\tau}(\cdot; t_0, \varphi)), \quad \text{para todo } \tau \in A.$$

Lema 2.5: A equação (2.5) é autônoma nos inteiros, isto é,

$$x(t+n, t_0, \varphi) = x(t, t_0, x_{t_0+n}(\cdot; t_0, \varphi)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Demonstração: Se $x(t, t_0, x_{t_0+n}(\cdot, t_0, \varphi))$ é solução de (2.5), mostremos que $\psi(t) = x(t+n, t_0, \varphi)$ também satisfaz (2.5). De fato:

$$\psi'(t) = x'(t+n, t_0, \varphi) = f(x(t+n, t_0, \varphi), x([t]+n, t_0, \varphi)) = f(\psi(t), \psi([t])).$$

E no intervalo $[t_0 - 1, t_0]$ as funções coincidem, pois para $\theta \in [-1, 0]$ temos:

$$\psi(t_0 + \theta) = x(t_0 + \theta + n, t_0, \varphi) = x_{t_0+n}(\cdot, t_0, \varphi)(\theta)$$

$$\text{e } x(t_0 + \theta, t_0, x_{t_0+n}(\cdot, t_0, \varphi)) = x_{t_0+n}(\cdot, t_0, \varphi)(\theta).$$

Dada a unicidade de solução, temos a igualdade desejada.

—

Uma propriedade básica da equação (2.5), sendo autônoma nos inteiros, é a seguinte: se $x(t)$ é solução de (2.5) definida no intervalo $[t_0, b)$, então para todo inteiro não negativo n , a função $x(t-n)$ é solução de (2.5) definida no intervalo $[t_0 + n, b + n)$.

E em virtude dos Lemas (2.1), (2.2) e (2.5), constatamos que no estudo da estabilidade do equilíbrio nulo, é suficiente tomar como instante inicial um número inteiro, e como a equação (2.5) é autônoma nos inteiros, basta tomar $t_0 = 0$. Esta escolha facilita bastante a relação entre a equação (2.5) e a sua equação discreta associada, que por sua vez tem a seguinte característica:

Lema 2.6: A equação discreta associada à equação (2.5) é autônoma.

Demonstração: A equação discreta é dada por $c_{n+1} = h(n, c_n)$, $n = 0, 1, \dots$, conforme (2.1).

Provemos que $h(n, d) = h(m, d)$ quando $c_n = c_m = d$, para $n, m \in \mathbb{N}$, arbitrários. Basta provar que $c_{n+1} = c_{m+1}$.

Sabemos que $c_{j+1} = x(n_0 + j + 1, t_0, \varphi)$, $j = 0, 1, \dots$, e como a equação (2.5) é autônoma nos inteiros e $c_n = c_m$, segue que:

$$\begin{aligned} c_{m+1} &= x(n_0 + m + 1, t_0, \varphi) = x(n_0 + 1, t_0, x_{t_0+m}(\cdot, t_0, \varphi)) = \\ &= x(n_0 + 1, t_0, x_{t_0+n}(\cdot, t_0, \varphi)) = x(n_0 + n + 1, t_0, \varphi) = c_{n+1}, \end{aligned}$$

e portanto, temos a igualdade desejada.

—

Capítulo 3

ESTUDO DA ESTABILIDADE E ESTABILIDADE ASSINTÓTICA USANDO FUNÇÕES DICOTÔMICAS

3.1. A Equação Discreta (1.1)

Neste parágrafo, apresentamos o uso de Funções Dicotômicas para garantir a estabilidade e estabilidade assintótica da solução nula da equação discreta não autônoma (1.1), generalizando a teoria apresentada por Carvalho e Ferreira [5] e Carvalho [3], para o caso autônomo.

Teorema 3.1: Suponhamos que $u, v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sejam funções contínuas, não decrescentes com $u(0) = v(0) = 0$, $u(x)$ e $v(x)$ positivas para $x > 0$.

Se existir uma função $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva, dicotômica com relação à equação discreta (1.1), satisfazendo

$$u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

então o equilíbrio nulo de (1.1) é estável.

Demonstração: Para simplificar, usaremos a notação $x_n(x_0)$ para a solução de (1.1).

Seja Ω uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$, onde V é dicotômica com relação à equação (1.1).

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, $0 < \delta_0 < \varepsilon$ tal que $v(\delta_0) < u(\varepsilon)$.

Tomemos ε_0 e δ_0 suficientemente pequenos, $\delta_0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ com $v(\delta_0) < u(\varepsilon_0)$, tais que $|x| < \varepsilon_0$ implica que $x \in \Omega$.

Dado $n_0 \in \mathbb{Z}$, a continuidade de $x_n(x_0)$ com relação à x_0 , a continuidade de V e o fato de $V(t, 0) = 0$, garantem a existência de um $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_0, n_0) > 0$, $\delta_1 < \varepsilon_0$, tal que se $|x_0| < \delta_1$ então $V(n, x_n(x_0)) < u(\varepsilon_0)$, para n variando entre n_0 e $n_0 + N(n_0)$; $N(n_0)$ dado pela Definição de dicotomia (1.6).

Seja $\delta = \min \{\delta_0, \delta_1\}$. Mostremos que se $|x_0| < \delta$ então $V(n, x_n(x_0)) < u(\varepsilon_0)$, para todo $n \geq n_0$.

Suponhamos, por absurdo, que exista um primeiro instante $n_1 > n_0 + N(n_0)$ tal que:

$$V(n_1, x_{n_1}(x_0)) \geq u(\varepsilon_0)$$

$$\text{e } V(n, x_n(x_0)) < u(\varepsilon_0), \text{ para } n < n_1.$$

Isto implica que $V(n_1, x_{n_1}(x_0)) - V(n_1 - 1, x_{n_1-1}(x_0)) > 0$.

Assim, como V é dicotômica com relação à equação (1.1), existe $k = k(n_0, n_1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $2 \leq k \leq n_1 - n_0$, tal que :

$$x_{n_1-k}(x_0) \in \overline{\Omega}_+^1(n_1, k) \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_{0-}^j(n_1, k).$$

Segue que $V(n_1, x(n_1, n_1 - k, x_{n_1-k}(x_0))) - V(n_1 - j, x(n_1 - j, n_1 - k, x_{n_1-k}(x_0))) \leq 0$,
para algum $j, j = 2, \dots, k$, ou seja,

$$V(n_1, x_{n_1}(x_0)) \leq V(n_1 - j, x_{n_1-j}(x_0)) < u(\varepsilon_0) ; \text{ para algum } j, j = 2, \dots, k,$$

em contradição à nossa suposição inicial.

Logo, se $|x_0| < \delta$ então $V(n, x_n(x_0)) < u(\varepsilon_0)$, para $n \geq n_0$.

Por hipótese, temos que:

$$u(|x_n(x_0)|) \leq V(n, x_n(x_0)) < u(\varepsilon_0), \text{ para } n \geq n_0.$$

Como u é não decrescente, segue que $|x_n(x_0)| < \varepsilon_0 < \varepsilon$ para $n \geq n_0$.

Portanto, o equilíbrio nulo de (1.1) é estável.

□

A função p dada no item (iv) e exigida na Definição de dicotomia estrita (1.7), é fundamental para a prova do próximo Teorema. Este fato é constatado no seguinte resultado:

Lema 3.2: Sejam $u, v \in V$ como no Teorema (3.1). Além disso, suponhamos que V seja estritamente dicotômica com relação à equação (1.1). Então, sempre que para um determinado n_1 , $n_1 \geq n_0 + N(n_0)$, tivermos $V(n_1, x_{n_1}(x_0)) > \beta$ e $\Delta_1 V(n_1, x_{n_1}(x_0)) \geq 0$, existirá um $\rho = \rho(\beta) > 0$, tal que:

$$V(n_1, x_{n_1}(x_0)) - V(n_1 - j, x_{n_1-j}(x_0)) < -\rho, \text{ para algum } j, j = 2, \dots, k,$$

onde k e $N(n_0)$ são como na Definição (1.6).

Demonstração: Pelo Teorema (3.1), existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $|x_o| < \delta_1$ então $V(n, x_n(x_o)) < \delta_2$, para $n \geq n_o$. Se $V(n_1, x_{n_1}(x_o)) > \beta$, segue que $\beta < V(n_1, x_{n_1}(x_o)) < \delta_2$.

Se $V(n_1, x_{n_1}(x_o)) - V(n_1 - 1, x_{n_1-1}(x_o)) \geq 0$, como V é estritamente dicotômica com relação à equação (1.1), existe $k = k(n_o, n_1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $2 \leq k \leq M$, tal que:

$$x_{n_1-k}(x_o) \in [\overline{\Omega}_+^1(n_1, k) \cup \Omega_o^1(n_1, k)]^* \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_p^j(n_1, k), \text{ isto é,}$$

$$p(V(n_1, x_{n_1}(x_o))) < V(n_1 - j, x_{n_1-j}(x_o)), \text{ para algum } j, j = 2, \dots, k.$$

Seja $0 < \rho(\beta) < \min \{ p(y) - y : y \in [\beta, \delta_2] \}$. Assim, segue que:

$$V(n_1 - j, x_{n_1-j}(x_o)) > p(V(n_1, x_{n_1}(x_o))) > V(n_1, x_{n_1}(x_o)) + \rho(\beta), \text{ portanto,}$$

$$V(n_1, x_{n_1}(x_o)) - V(n_1 - j, x_{n_1-j}(x_o)) < -\rho(\beta), \text{ para algum } j, j = 2, \dots, k.$$

□

Teorema 3.3: Seja V satisfazendo todas as hipóteses do Teorema (3.1) e estritamente dicotômica com relação à equação (1.1). Então, o equilíbrio nulo de (1.1) é assintoticamente estável.

Demonstração: Sejam δ e $u(\varepsilon)$ como no Teorema (3.1). Tomemos $\gamma \leq \delta$ e mostremos que se $|x_o| < \gamma$ então, $x_n(x_o) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Com relação à $x_n(x_o)$, existem duas alternativas:

(i) existe um $n_1 > n_0 + N$ tal que $\Delta_1 V(n, x_n(x_0)) \leq 0$ para todo $n \geq n_1$
ou,

(ii) existe uma seqüência (n_j) tal que, para todo termo n_j temos
 $\Delta_1 V(n_j, x_{n_j}(x_0)) > 0$.

caso (i): Se existir um $\tau > 0$ tal que $\Delta_1 V(n, x_n(x_0)) < -\tau$ para todo
 $n \geq n_1$, temos que:

$$\begin{aligned} V(n, x_n(x_0)) &= V(n-1, x_{n-1}(x_0)) + [V(n, x_n(x_0)) - V(n-1, x_{n-1}(x_0))] < \\ &< V(n-1, x_{n-1}(x_0)) - \tau. \end{aligned}$$

Uma aplicação sucessiva deste processo, leva-nos à seguinte desigualdade:

$$V(n+m, x_{n+m}(x_0)) < V(n-1, x_{n-1}(x_0)) - (m+1)\tau, \quad m \in \mathbb{N},$$

e portanto segue que $V(n, x_n(x_0)) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, o que contradiz a hipótese de V ser uma função definida positiva.

Se tal fato não ocorrer, da hipótese do caso (i) temos que $V(n, x_n(x_0))$ é decrescente para $n \geq n_1$. Da limitação de V , segue que $V(n, x_n(x_0)) \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$, para alguma constante c não negativa.

Assim, $V(n, x_n(x_0)) - V(n-j, x_{n-j}(x_0)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $j, j=1, \dots, M$, M da definição de dicotomia estrita.

Logo, $x_{n-M}(x_0) \rightarrow \bigcap_{j=1}^M \Omega_0^j(n, M)$ quando $n \rightarrow \infty$ e pelo item (iii) da Definição (1.7), segue que $x_n(x_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

caso (ii): Vamos definir uma nova seqüência (m_j) , subseqüência de (n_j) , da seguinte forma: $m_1 = n_1$; m_2 é o primeiro elemento da seqüência (n_j) , digamos n_{j_0} , tal que $n_{j_0} \geq m_1 + M$. Em geral, definimos m_k , $k \geq 2$ como o primeiro elemento da seqüência (n_j) , digamos n_{j_r} , tal que $n_{j_r} \geq m_{k-1} + M$.

Assim, para todo elemento da seqüência (m_j) , temos que $\Delta_1 V(m_j, x_{m_j}(x_0)) > 0$.

Definimos agora:

$$\beta_j = \max \{ V(n, x_n(x_0)) : m_{j-1} \leq n \leq m_j \}, \quad j = 2, 3, \dots \quad e$$

$$j^* = \min \{ n : m_{j-1} \leq n \leq m_j \text{ e } \beta_j = V(n, x_n(x_0)) \}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Provemos que a seqüência (β_j) é estritamente decrescente.

De fato, temos duas situações a considerar para j arbitrário:

$$(i) \quad j^* = m_{j-1}$$

$$(ii) \quad j^* > m_{j-1}$$

caso (i): Neste caso temos, por construção da seqüência, que $\Delta_1 V(j^*, x_{j^*}(x_0)) > 0$ e assim, pela hipótese de dicotomia estrita, existe um $k = k(n_0, j^*)$, $2 \leq k \leq j^* - n_0$, tal que:

$$x_{j^*-k}^*(x_0) \in [\bar{\Omega}_+^1(j^*, k) \cup \Omega_0^1(j^*, k)] \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_p^j(j^*, k), \quad \text{ou seja,}$$

$$p(V(j^*, x_{j^*}^*(x_0)) < V(j^* - j_0, x_{j^*-j_0}^*(x_0))), \quad \text{para algum } j_0, j_0 = 2, \dots, k(j^*).$$

Temos que $(j^* - j_0) \in [m_{j,2}, m_{j,1}]$, considerando que $j_0 \leq k(j^*) \leq M$ e que cada faixa tem amplitude maior ou igual à M . Assim,

$$\beta_j = V(j^*, x_{j^*}(x_0)) < p(V(j^*, x_{j^*}(x_0)) < V(j^* - j_0, x_{j^* - j_0}(x_0))) \leq \beta_{j-1}.$$

caso (ii): Neste caso, obrigatoriamente temos que $V(j^*, x_{j^*}(x_0)) > V(j^* - 1, x_{j^* - 1}(x_0))$, pois no caso inverso o valor mínimo j no qual β_j é assumido seria $(j^* - 1)$ e não mais j^* ; o que contraria a suposição inicial. E portanto, o resultado segue análogo ao caso (i).

Observemos que o caso $j^* = m_j$ não ocorre, pois senão $V(j^*, x_{j^*}(x_0)) > V(j^* - 1, x_{j^* - 1}(x_0))$ e pela hipótese de dicotomia estrita, segue que:

$$\beta_j = V(j^*, x_{j^*}(x_0)) < p(V(j^*, x_{j^*}(x_0)) < V(j^* - j_0, x_{j^* - j_0}(x_0))), \quad (3.1)$$

para algum $j_0, j_0 = 2, \dots, k$.

Mas como $j_0 \leq k(j^*) \leq M$ e $j^* = m_j$, temos que $(j^* - j_0) \in [m_{j,1}, m_j]$ que tem como máximo valor de $V(n, x_n(x_0))$ o elemento β_j . Segue então que $V(j^* - j_0, x_{j^* - j_0}(x_0)) \leq \beta_j$, que é uma contradição para (3.1).

Portanto, em todos os casos temos que $\beta_j < \beta_{j-1}$, ou seja, (β_j) é uma seqüência estritamente decrescente. Provemos agora que $\beta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Suponhamos que $\beta_j \rightarrow \beta$ quando $j \rightarrow \infty, \beta > 0$.

Temos duas situações a considerar:

- (i) existem infinitos termos j^* , tais que $j^* \in (m_{j,1}, m_j)$,
- (ii) existem infinitos termos j^* , tais que $j^* = m_{j,1}$.

Caso (i): Consideremos a subsequência de (β_j) , que usaremos a mesma notação, tal que j^* é ponto interior do intervalo $[m_{j-1}, m_j]$, isto é, necessariamente $\Delta_1 V(j^*, x_{j^*}(x_0)) > 0$ e $V(j^*, x_{j^*}(x_0)) > \beta$ para todo índice j^* da nova seqüência.

Pelo Lema (3.2) segue que existe um $\rho = \rho(\beta) > 0$, tal que:

$$V(j^*, x_{j^*}(x_0)) - V(j^* - j_0, x_{j^* - j_0}(x_0)) < -\rho(\beta), \text{ para algum } j_0, j_0 = 2, \dots, k.$$

Logo, $\beta_j < \beta_{j-1} - \rho(\beta)$, para todo índice j da subsequência, ou seja: $\beta_{j+1} < \beta_j - \rho < \beta_{j-1} - 2\rho$, e uma aplicação sucessiva deste processo, leva-nos à seguinte desigualdade: $\beta_{j+m} < \beta_j - m\rho$, $m \in \mathbb{N}$.

Logo, $\beta_{j+m} \rightarrow -\infty$ quando $m \rightarrow \infty$, e assim $\beta_j \rightarrow -\infty$ quando $j \rightarrow \infty$, o que contradiz a nossa suposição. Portanto, $\beta = 0$ e segue que $\beta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.

Caso (ii): Temos então uma subsequência de (β_j) , onde $j^* = m_{j-1}$ para todo índice da subsequência, para os quais, por construção da seqüência (β_j) , temos que $\Delta_1 V(j^*, x_{j^*}(x_0)) > 0$. Assim, segue análogo ao caso (i).

Portanto, em ambos os casos, temos que $\beta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.

E como $u(|x_n(x_0)|) \leq V(n, x_n(x_0))$, $u(0) = 0$ e $V(n, x_n(x_0)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que $x_n(x_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e portanto, o equilíbrio nulo de (1.1) é assintoticamente estável.

□

3.2. A Equação Diferencial (1.3)

Neste parágrafo, enunciamos e demonstramos os teoremas que garantem estabilidade e estabilidade assintótica da solução nula da equação diferencial (1.3), utilizando a noção de Função Dicotômica.

Para tanto, vamos supor que $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ em (1.3), leve conjuntos limitados em conjuntos limitados.

A teoria a ser desenvolvida é uma adaptação ao trabalho de Bená [2] que trabalha com equações diferenciais funcionais retardadas não autônomas do tipo:

$$x'(t) = g(t, x_t), \quad t \geq t_0$$

$$x_{t_0} = \varphi$$

com a hipótese de continuidade de g , entre outras.

Lemas adicionais são necessários para garantir a validade da propriedade de dicotomia nos pontos de máximo local, onde $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ não é diferenciável.

Estes pontos na verdade, são os valores inteiros onde a função retardamento da equação (1.3) dada por $r(t) = t - [t]$, é descontínua.

Teorema 3.4: Suponhamos que $u, v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sejam funções contínuas, não decrescentes com $u(0) = v(0) = 0$, $u(x)$ e $v(x)$ positivas para $x > 0$.

Se existir uma função $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva, dicotômica com relação à equação (1.3), satisfazendo

$$u(|x|) \leq V(t,x) \leq v(|x|), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

então o equilíbrio nulo de (1.3) é estável.

Demonstração: Seja Ω uma vizinhança da origem em C onde V é dicotômica com relação à equação (1.3). Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, $0 < \delta_0 < \varepsilon$ tal que $v(\delta_0) < u(\varepsilon)$.

Tomemos ε_0 e δ_0 suficientemente pequenos, $\delta_0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ com $v(\delta_0) < u(\varepsilon_0)$, tais que $\|\psi\| < \varepsilon_0$ implica que $\psi \in \Omega$.

Assim, dado $t_0 \in \mathbb{R}$, se $\|\varphi\| < \delta_0$ temos que :

$$u(|\varphi(\theta)|) \leq V(t_0 + \theta, \varphi(\theta)) \leq v(|\varphi(\theta)|) \leq v(\delta_0) < u(\varepsilon_0),$$

para $\theta \in [-1, 0]$, isto é, $V(t, x(t, t_0, \varphi)) < u(\varepsilon_0)$ para $t \in [t_0 - 1, t_0]$ se $\|\varphi\| < \delta_0$.

Dado $\mu = \mu(t_0)$ pela Definição (1.13), a continuidade de $x(t, t_0, \varphi)$ com relação a φ , garante a existência de um $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon_0, \mu) > 0$, $\delta_1 < \varepsilon_0$ tal que a solução $x(t, t_0, \varphi)$ existe em $I = [t_0 - 1, t_0 + \mu]$ e $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon_0$ em I sempre que $\|\varphi\| < \delta_1$.

E como V é contínua e $V(t, 0) = 0$, afirmamos que se $\|\varphi\| < \delta_1$ então $V(t, x(t, t_0, \varphi)) < u(\varepsilon_0)$ para $t \in I$.

Seja $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Mostremos que se $\|\varphi\| < \delta$ então $V(t, x(t, t_0, \varphi)) < u(\varepsilon_0)$ para todo $t \geq t_0$.

Suponhamos então, por absurdo, que exista um primeiro instante não inteiro $t_1 > t_0 + \mu$ tal que:

$$V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) = u(\varepsilon_0)$$

$$\text{e } V(t, x(t, t_0, \varphi)) < u(\varepsilon_0) \quad \text{para } t < t_1.$$

Isto implica que $V'(t_1, x_{t_1}(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$, pois a função $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ é diferenciável em t_1 , desde que t_1 não é inteiro.

Assim, como V é dicotômica com relação à equação (1.3), existe um $T = T(t_0, t_1)$, $0 < T \leq t_1 - t_0$, tal que :

$$x_{t_1-T}(\cdot, t_0, \varphi) \in [\overline{\Omega}_+(t_1, T) \cup \Omega_0(t_1, T)] \subset \bigcup_s \Omega_s^s(t_1, T), \quad s \in (0, T].$$

Segue que $x_{t_1-T}(\cdot, t_0, \varphi) \in \Omega_{0-}^s(t_1, T)$, para algum $s \in (0, T]$, isto é, $V(t_1, x(t_1, t_1 - T, x_{t_1-T}(\cdot, t_0, \varphi))) - V(t_1 - s, x(t_1 - s, t_1 - T, x_{t_1-T}(\cdot, t_0, \varphi))) \leq 0$, ou seja, $V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) \leq V(t_1 - s, x(t_1 - s, t_0, \varphi))$, para algum $s \in (0, T]$.

Assim, $V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) < u(\varepsilon_0)$, em contradição à nossa suposição inicial. E se $t_1 \in \mathbb{Z}$, ou $V'(t_1) \geq 0$ ou t_1 é ponto de máximo local e pelo Lema (3.6) ou Definição (1.13), temos também contradição.

Logo, se $\|\varphi\| < \delta$ temos que $V(t, x(t, t_0, \varphi)) < u(\varepsilon_0)$ para todo $t \geq t_0$.

Por hipótese, $u(|x(t, t_0, \varphi)|) \leq V(t, x(t, t_0, \varphi)) < u(\varepsilon_0)$ para $t \geq t_0$.

Como u é não decrescente, segue que $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon_0 < \varepsilon$ para $t \geq t_0$.

Portanto, o equilíbrio nulo de (1.3) é estável.

□

O próximo teorema prova a estabilidade assintótica do equilíbrio nulo da equação (1.3), tendo como uma das hipóteses a existência de uma função V estritamente dicotômica com relação à equação (1.3).

Alguns lemas são necessários para provar este resultado. Isto porque a função $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ não é necessariamente diferenciável nos valores inteiros e também, se nestes valores n ocorrem máximos locais, nem sempre temos $V'(n, x_n(\cdot, t_0, \varphi)) = 0$. E assim, as propriedades de dicotomia e dicotomia estrita não se aplicam.

Os Lemas (3.5) a (3.7) garantem estas propriedades para os casos citados, resultados estes fundamentais para a demonstração do teorema.

Lema 3.5: Seja $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função contínua, diferenciável em $\mathfrak{R}$, exceto possivelmente em um conjunto de medida nula, e seja c um ponto de máximo local de f .

Então, existe uma seqüência estritamente crescente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \rightarrow c_-$ quando $n \rightarrow \infty$, com $f'(x_n) \geq 0$ para todo elemento x_n , onde
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)].$$

Demonstração: Analisemos duas alternativas:

- (i) existe uma vizinhança de c , onde o único ponto extremo de f é c , e
- (ii) em toda vizinhança de c , existe pelo menos um ponto extremo de f .

Caso (i): Suponhamos que exista $\gamma > 0$ tal que c seja o único ponto extremo de f em $(c-\gamma, c+\gamma)$; e que f seja não decrescente em $(c-\gamma, c)$ e não crescente em $(c, c+\gamma)$.

Assim, tomando a seqüência (x_n) dada por $x_n = c - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $x_n \in (c-\gamma, c)$.

Logo, para a subsequência (x_{n_k}) onde $x_{n_k} = x_{n_0+k}$, temos que $f'(x_{n_k}) \geq 0$ para todo x_{n_k} , pois f é não decrescente em $(c-\gamma, c)$.

Caso (ii): Se o número de pontos extremos de f à esquerda de c for finito, o raciocínio é análogo ao caso (i). Analisemos o caso contrário, isto é, para todo $\gamma > 0$ existe um ponto extremo de f em $(c-\gamma, c)$.

Assim, para $\gamma_1 = 1$ existe $x_1 \in (c-\gamma_1, c)$ tal que x_1 é ponto extremo de f ; para $\gamma_2 = \min\{1/2, |c-x_1|\}$ existe $x_2 \in (c-\gamma_2, c)$ tal que x_2 é ponto extremo de f .

Sucessivamente, para $\gamma_n = \min\{1/n, |c-x_{n-1}|\}$, $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in (c-\gamma_n, c)$ tal que x_n é ponto extremo de f .

Logo, temos uma sequência estritamente crescente, por construção, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos extremos de f com $x_n \rightarrow c_-$ quando $n \rightarrow \infty$, e como f é contínua, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência (x_{n_k}) de pontos de mínimos locais de f e portanto $f'(x_{n_k}) \geq 0$ para todo elemento x_{n_k} .

Assim, em ambos os casos temos o resultado desejado.

□

Lema 3.6: Seja $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dicotômica com relação à equação (1.3) (em Ω). Se em algum instante inteiro $\bar{t} > t_0 + \mu$, ocorrer um máximo local da função $V(t, x(t, t_0, \varphi))$, então $V(\bar{t}, x(\bar{t}, t_0, \varphi)) \leq V(\bar{t}-s, x(\bar{t}-s, t_0, \varphi))$ para algum $s \in (0, \bar{t}-t_0]$, onde μ é como na Definição (1.13).

Demonstração: No caso em que $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ é constante em $(\bar{t}-\gamma, \bar{t})$ para algum $\gamma > 0$, o resultado é imediato. Suponhamos então, que $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ seja estritamente crescente em $(\bar{t}-\gamma, \bar{t})$.

Se $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ é diferenciável em $\bar{t}$, então $V'(\bar{t}, x_i(\cdot, t_0, \varphi)) = 0$. Assim por hipótese, existe $T = T(t_0, \bar{t})$, $0 < T \leq \bar{t} - t_0$, tal que:

$$x_{\bar{t}-T}(\cdot, t_0, \varphi) \in [\bar{\Omega}_+(\bar{t}, T) \cup \Omega'_0(\bar{t}, T)] \subset \bigcup_s \Omega^s_{0-}(\bar{t}, T), \quad s \in (0, T]$$

isto é, $V(\bar{t}, x(\bar{t}, t_0, \varphi)) \leq V(\bar{t}-s, x(\bar{t}-s, t_0, \varphi))$, para algum $s \in (0, T]$ e temos o resultado.

Se $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ não é diferenciável em $\bar{t}$, pelo Lema (3.5) existe uma seqüência estritamente crescente $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \rightarrow \bar{t}$ quando $n \rightarrow \infty$ com $V'(t_n, x_{t_n}(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$ para todo t_n , $n \in \mathbb{N}$.

Assim, como V é dicotômica com relação à equação (1.3) (em Ω), para cada $t_n \geq t_0 + \mu$, existe $T_n = T_n(t_0, t_n)$, $0 < T_n \leq t_n - t_0$, tal que:

$x_{t_n-T_n}(\cdot, t_0, \varphi) \in [\bar{\Omega}_+(t_n, T_n) \cup \Omega'_0(t_n, T_n)] \subset \Omega^s_{0-}(t_n, T_n)$, para algum $s \in (0, T_n]$, isto é,

$$V(t_n, x(t_n, t_0, \varphi)) \leq V(t_n - s_n, x(t_n - s_n, t_0, \varphi)), \text{ para algum } s_n \in (0, T_n].$$

Como $t_n \rightarrow \bar{t}$ quando $n \rightarrow \infty$ e $T_n \leq t_n - t_0$, temos que $(0, T_n] \subset (0, \bar{t} - t_0]$ e assim a seqüência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada admitindo uma subseqüência (s_{n_k}) convergente, digamos para s , $s \leq \bar{t} - t_0$. Logo,

$$V(t_{n_k}, x(t_{n_k}, t_0, \varphi)) \leq V(t_{n_k} - s_{n_k}, x(t_{n_k} - s_{n_k}, t_0, \varphi)), \quad s_{n_k} \in (0, T_{n_k}] \subset (0, \bar{t} - t_0].$$

Passando ao limite temos: $V(\bar{t}, x(\bar{t}, t_0, \varphi)) \leq V(\bar{t} - s, x(\bar{t} - s, t_0, \varphi))$, $s \in (0, \bar{t} - t_0]$.

Observemos que s é diferente de zero, pois como a função $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ é estritamente crescente em uma vizinhança à esquerda de $\bar{t}$

e $V(t_n, x(t_n, t_0, \varphi)) \leq V(t_n - s_n, x(t_n - s_n, t_0, \varphi))$ para todo $t_n, n \in \mathbb{N}$, então os valores $(t_n - s_n)$ tendem a se afastar do valor $\bar{t}$, e assim s tende a se afastar do zero.

□

Lema 3.7: Seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente dicotômica com relação à equação (1.3). Se em algum instante inteiro $\bar{t} > t_0 + \mu$ ocorrer um máximo local da função $V(t, x(t, t_0, \varphi))$, então existe pelo menos um $s \in (0, M]$ tal que:

$$p(V(\bar{t}, x(\bar{t}, t_0, \varphi))) \leq V(\bar{t} - s, x(\bar{t} - s, t_0, \varphi)),$$

onde μ, M e $p(t)$ são como na Definição (1.14).

Demonstração: Analogamente ao Lema (3.6), se $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ é diferenciável em $\bar{t}$, temos a desigualdade estrita. Caso contrário, temos que: $p(V(t_{n_k}, x(t_{n_k}, t_0, \varphi))) < V(t_{n_k} - s_{n_k}, x(t_{n_k} - s_{n_k}, t_0, \varphi))$, $s_{n_k} \in (0, M]$, com $s_{n_k} \rightarrow s$, $t_{n_k} \rightarrow \bar{t}$ quando $n \rightarrow \infty$ e $s \in (0, M]$.

Passando ao limite temos $p(V(\bar{t}, x(\bar{t}, t_0, \varphi))) \leq V(\bar{t} - s, x(\bar{t} - s, t_0, \varphi))$, para $s \in (0, M]$.

□

Lema 3.8: Sejam u, v e V como no Teorema (3.4). Além disso, suponhamos que V seja estritamente dicotômica com relação à equação (1.3). Então sempre que para um determinado $t_1, t_1 > t_0 + \mu$ tivermos $V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) > c, c > 0$ e t_1 é ponto de máximo local de $V(t, x(t, t_0, \varphi))$, existirá um $\rho = \rho(c) > 0$ tal que :

$$V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) - V(t_1 - s, x(t_1 - s, t_0, \varphi)) < -\rho,$$

para algum $s \in (0, T(t_1)]$, onde μ e $T(t_1)$ são como na Definição (1.14).

Demonstração: Pelo Teorema (3.4), existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $\|\varphi\| < \delta_1$ então $V(t, x(t, t_0, \varphi)) < \delta_2$ para $t \geq t_0$.

Se $V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) > c$, segue que $c < V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) < \delta_2$.

Se t_1 é ponto de máximo local de $V(t, x(t, t_0, \varphi))$, de acordo com o Lema (3.7) ou Definição (1.14), existe pelo menos um $s \in (0, M]$ tal que :

$$p(V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi))) \leq V(t_1 - s, x(t_1 - s, t_0, \varphi)),$$

onde M e $p(t)$ são dados pela Definição de dicotomia estrita (1.14).

Seja $0 < \rho(c) < \min\{p(y) - y : y \in [c, \delta_2]\}$. Assim, segue que:

$$V(t_1 - s, x(t_1 - s, t_0, \varphi)) \geq p(V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi))) > V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) + \rho(c) \quad \text{e portanto,}$$

$$V(t_1, x(t_1, t_0, \varphi)) - V(t_1 - s, x(t_1 - s, t_0, \varphi)) < -\rho(c), \quad \text{para algum } s \in (0, M].$$

□

Lema 3.9: Suponhamos V de classe C^1 e estritamente dicotômica com relação à equação (1.3). Sejam M e μ as constantes dadas pela Definição (1.14). Então para cada $t_1 \in \mathcal{R}$, $t_1 > t_0 + \mu$ em que $V'(t_1, x_{t_1}(\cdot, t_0, \varphi)) > 0$, existe um ponto $t_2 \in (t_1, t_1 + M)$ tal que t_2 é ponto de máximo local de $V(t, x(t, t_0, \varphi))$.

Demonstração: Seja $t_1 \in \mathcal{R}$, $t_1 > t_0 + \mu$ com $V'(t_1, x_{t_1}(\cdot, t_0, \varphi)) > 0$.
 Suponhamos, por absurdo, que $V'(t, x_t(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$ para $t \in [t_1, t_1 + M]$.

De acordo com [19], considerando que $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ é contínua em $[t_1, t_1 + M]$ e sua derivada (dada por limite superior à direita) é não negativa em todo o intervalo, temos que:

$$V(t_1 + M, x(t_1 + M, t_0, \varphi)) \geq V(t, x(t, t_0, \varphi)), \quad t \in [t_1, t_1 + M]. \quad (3.2)$$

Assim,

$$p(V(t_1 + M, x(t_1 + M, t_0, \varphi)) > V(t, x(t, t_0, \varphi)), \quad t \in [t_1, t_1 + M]. \quad (3.3)$$

Como $V'(t_1 + M, x_{t_1+M}(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$, (3.3) contradiz o fato de V ser estritamente dicotômica.

Observemos que se $V'(t_1 + M, x_{t_1+M}(\cdot, t_0, \varphi)) < 0$ com $V'(t, x_t(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$ para todo $t \in [t_1, t_1 + M)$, ou seja, se $(t_1 + M)$ for um valor inteiro; então $(t_1 + M)$ seria um ponto de máximo local de $V(t, x(t, t_0, \varphi))$ com a validade de (3.2), e portanto de (3.3). Mas daí temos uma contradição do Lema (3.7). $\square$

Para simplificar, no próximo resultado usaremos a notação " $x(t)$ " para $x(t, t_0, \varphi)$ e " x_t " para $x_t(\cdot, t_0, \varphi)$.

Teorema 3.10: Suponhamos que V satisfaça todas as hipóteses do Teorema (3.4), e além disso que V seja de classe C^1 e estritamente dicotômica com relação à equação (1.3) (em Ω). Então o equilíbrio nulo de (1.3) é assintoticamente estável.

Demonstração: Sejam δ e $u(\varepsilon)$ como no Teorema (3.4). Tomemos $\gamma \leq \delta$ e mostremos que se $\|\varphi\| < \gamma$, então $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Com relação à $x(t, t_0, \varphi)$, pode ocorrer duas situações:

(i) existe um $\bar{t} > t_0 + \mu$ tal que $V'(t, x_t) \leq 0$ para todo $t \geq \bar{t}$, e

(ii) se não ocorrer (i), o Lema (3.9) garante a existência de uma seqüência crescente (m_n) , $m_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que m_n é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$.

caso (ii): Tomemos uma subsequência de (m_n) , a seqüência (t_n) dada por: $t_1 = m_1$, t_2 é o primeiro elemento da seqüência (m_n) , digamos m_{n_0} , tal que $m_{n_0} - t_1 \geq M$.

Assim definimos t_k , $k \geq 2$ como o primeiro elemento da seqüência (m_n) , digamos m_{n_j} , tal que $m_{n_j} - t_{k-1} \geq M$.

Como $m_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, é sempre possível construir a seqüência (t_n) , $n \in \mathbb{N}$. Sejam

$$c_1 = \max\{V(t, x(t)) : t_0 + \mu \leq t \leq t_1\},$$

$$c_j = \max\{V(t, x(t)) : t_{j-1} \leq t \leq t_j\}, \quad j=2,3,\dots \text{ e}$$

$$\ell_j = \min\{t \in [t_{j-1}, t_j] : c_j = V(t, x(t))\}, \quad j=2,3,\dots$$

Provemos que a seqüência (c_j) é estritamente decrescente.

Seja $c_j = V(\ell_j, x(\ell_j))$ e ℓ_j é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$, $j=2,3,\dots$, então pelo Lema (3.7) ou pela Definição (1.14), existe pelo menos um $s_0 \in (0, M]$ tal que:

$$p(V(\ell_j, x(\ell_j))) \leq V(\ell_j - s_0, x(\ell_j - s_0)), \quad j=2,3,\dots$$

Por esta razão, $(\ell_j - s_0)$ não pertence à $[t_{j-1}, t_j]$ pois neste intervalo o máximo valor é $V(\ell_j, x(\ell_j))$; e sim pertence ao intervalo $[t_{j-2}, t_{j-1}]$ uma vez que não pode pertencer a intervalos anteriores considerando que a amplitude de cada um é, por construção, maior ou igual à M .

E no caso $j=2$, temos que $(\ell_2 - s_0)$ pertence ao intervalo $[t_0 + \mu, t_1]$ e assim, $V(\ell_2 - s_0, x(\ell_2 - s_0)) \leq c_1$.

Para $j=2,3, \dots$, temos $c_j < p(c_j) \leq V(\ell_j - s_0, x(\ell_j - s_0)) \leq c_{j-1}$, e assim, $c_j < c_{j-1}$, $j=2,3, \dots$

A seqüência (c_j) sendo estritamente decrescente e limitada, é convergente e provemos então que $c_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Suponhamos, por absurdo, que $c_j \rightarrow c$ quando $j \rightarrow \infty$. Então $V(\ell_j, x(\ell_j)) > c$ e ℓ_j é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$, $j=2,3, \dots$.

Pelo Lema (3.8), existe uma constante $\rho = \rho(c) > 0$ tal que:

$$c_j < V(\ell_j - s_0, x(\ell_j - s_0)) - \rho \leq c_{j-1} - \rho, \quad j=2,3,\dots, \text{ ou seja,}$$

$$c_{j+1} < c_j - \rho < c_{j-1} - 2\rho < \dots < c_1 - j\rho, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Segue então que $c_j \rightarrow -\infty$ quando $j \rightarrow \infty$, o que contradiz a suposição inicial. Portanto $c=0$. E $u(|x(t)|) \leq V(t, x(t))$ com $V(t, x(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Como u é não decrescente e $u(0)=0$, segue que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

caso (i): Existe um $\bar{t} > t_0 + \mu$ tal que $V'(t, x_t) \leq 0$ para $t \geq \bar{t}$.

Construímos a seqüência (t_n) como anteriormente até obter um n_0 tal que $t_{n_0} = \bar{t}$ ou $t_{n_0} + M \geq \bar{t}$.

Pela hipótese do caso (i), segue que $V(t, x(t))$ é decrescente para $t \geq \bar{t}$.

Da limitação de V , segue que $V(t, x(t)) \rightarrow c$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim:

$V(t, x(t)) - V(t-s, x(t-s)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para todo $s \in (0, M]$, M da definição de dicotomia estrita.

Logo, $x_{t-M} \rightarrow \bigcap_s \Omega_o^s(t, M)$ quando $t \rightarrow \infty$, $s \in (0, M]$.

Se existir um $\tau > 0$ tal que $V'(t, x_t) < -\tau$ para $t \geq \bar{t}$, temos que, de acordo com [17], $V(t, x(t))$ é absolutamente contínua em $[\bar{t}, t]$ para todo $t \geq \bar{t}$, e portanto vale:

$$V(t, x(t)) = V(\bar{t}, x(\bar{t})) + \int_{\bar{t}}^t V'(u, x_u) du, \text{ e assim } V(t, x(t)) \rightarrow -\infty \text{ quando}$$

$t \rightarrow \infty$, o que contradiz o fato de V ser definida positiva. Se tal fato não ocorrer, dada a seqüência $(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, existe uma seqüência $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que $V'(t_n, x_{t_n}) > -1/n$.

Logo, $x_{t_n-M} \rightarrow \Omega_o'(t_n, M)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, $x_{t_n-M} \rightarrow \bigcap_s [\Omega_o'(t_n, M) \cap \Omega_o^s(t_n, M)]$ quando $n \rightarrow \infty$, para $s \in (0, M]$, e pelo item (iii) da Definição (1.14), segue que $x_{t_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Logo, $x(t_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e assim, $V(t_n, x(t_n)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Sendo V decrescente, segue que $V(t, x(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Como $u(|x(t)|) \leq V(t, x(t))$, $u(0) = 0$ e $V(t, x(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, concluímos que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Portanto, em ambos os casos temos que o equilíbrio nulo de (1.3) é assintoticamente estável.

Capítulo 4

A RELAÇÃO ENTRE A EQUAÇÃO DIFERENCIAL E SUA EQUAÇÃO DISCRETA ASSOCIADA ATRAVÉS DE FUNÇÕES DICOTÔMICAS

Neste capítulo fazemos uma comparação entre a aplicação do princípio de Dicotomia com relação à Equação Diferencial Geral (1.3) e com relação à Equação Discreta Associada (2.1).

Em alguns casos, a mesma função V pode ser utilizada para as duas equações. Por exemplo, com a função $V(x) = x^2 / 2$, obtemos equivalência de resultados, trabalhando com a equação (2.5) (caso escalar), e com casos particulares da equação (1.3) (geral), que veremos através de exemplo.

4.1. Caso Escalar da Equação Diferencial (2.5)

A grande vantagem, neste caso, é que a equação restrita a intervalos $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, se torna uma equação diferencial ordinária autônoma, onde a solução ou é constante ou estritamente monótona, de acordo com a Teoria Geral de Equações Diferenciais Ordinárias [12]. Formalmente temos o seguinte resultado:

Lema 4.1: As soluções não constantes de (2.5), no caso escalar, são seccionalmente estritamente monótonas, no seguinte sentido: em cada

intervalo $[n_0 + n, n_0 + n + 1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, a restrição $x_n(t)$ da solução $x(t)$ de (2.5) é estritamente monótona.

Demonstração: Inicialmente observemos que, conforme teoria do capítulo 2, n_0 é o primeiro inteiro maior ou igual ao instante inicial t_0 .

Em cada intervalo $[n_0 + n, n_0 + n + 1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, a solução $x(t)$ de (2.5) satisfaz:

$$x'_n(t) = f(x_n(t), c_n), \quad t \in [n_0 + n, n_0 + n + 1] \quad (4.1)$$

$$x_n(n_0 + n) = c_n$$

com $x_{n-1}(n_0 + n) = c_n$, e pela unicidade de solução temos que os pontos críticos de $f(\cdot, c_n)$ são as soluções constantes de (4.1) e as demais são soluções estritamente monótonas, em virtude do sinal da função $f(\cdot, c_n)$.

□

O próximo lema contribui consideravelmente no estudo da estabilidade da solução nula da equação (2.5) no caso escalar, pois caracteriza completamente o comportamento da função $V(x) = x^2/2$ ao longo das soluções de (2.5).

Lema 4.2: A função $V(x) = x^2/2$ ao longo das soluções $x(t)$ de (2.5), caso escalar, apresenta máximos locais apenas nos valores inteiros para $t \geq n_0$. Ou seja, para $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq [t_0] + 1 = n_0$:

$$\max \{V(x(t, t_0, \varphi)) : t \in [n, n + 1]\} = \max \{V(x(n, t_0, \varphi)), V(x(n + 1, t_0, \varphi))\}.$$

Demonstração: Este fato decorre diretamente do Lema (4.1), observando que $V(x(t, t_0, \varphi))$ pode apresentar mínimo local no intervalo $(n, n+1)$ no instante em que, porventura, a solução $x(t)$ se anule.

□

O próximo resultado mostra a relação entre a equação (2.5), no caso escalar, e a sua equação discreta associada (2.1) através da teoria de Dicotomia.

Teorema 4.3: A função $V(x) = x^2/2$ é dicotômica com relação à equação (2.5) (caso escalar), se e somente se, V é dicotômica com relação à equação discreta associada (2.1).

Demonstração: Suponhamos que V seja dicotômica com relação à equação (2.1) (em $\Omega = (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$). Provemos que, dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um $\mu = \mu(t_0) > 0$ tal que para todo $t \geq t_0 + \mu$, existe em correspondência um $T = T(t_0, t)$, $0 < T \leq t - t_0$, para o qual se verifica:

$$[\overline{\Omega}_+(t, T) \cup \Omega_0^-(t, T)] \subset \bigcup_s \Omega_0^s(t, T), \quad s \in (0, T],$$

para alguma vizinhança Ω da origem em $\mathbb{C}$, isto é:

sempre que $V'(x_t(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$, existe pelo menos um $s \in (0, T]$ tal que:

$$V(x(t, t_0, \varphi)) \leq V(x(t-s, t_0, \varphi)).$$

Suponhamos então que $V'(x_t(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$ para algum $t \in [n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0 + N(n_0)$, onde N é dado pela Definição (1.6). Sabemos pelo Lema (4.2) que:

$$\max \{V(x(t, t_0, \varphi)) : t \in [n-1, n]\} = \max \{V(x(n, t_0, \varphi)), V(x(n-1, t_0, \varphi))\}.$$

Analisemos as duas possibilidades:

(i) o máximo valor é atingido no instante $(n-1)$

Assim, $V(x(t, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-1, t_0, \varphi))$ e já temos um instante anterior à t com a propriedade desejada, desde que $t \neq n-1$. E o caso $t = n-1$ com $V'(x_t) \geq 0$ só ocorre quando $V(x(t, t_0, \varphi))$ é constante em $[n-1, n]$, e assim $V(x(n-1)) = V(x(n))$ e segue pelo caso (ii).

(ii) o máximo valor é atingido no instante n

Logo, $V(x(n-1, t_0, \varphi)) \leq V(x(n, t_0, \varphi))$ ou, em linguagem de equação discreta, $V(x(n-1, n_0, c_0)) \leq V(x(n, n_0, c_0))$ onde $n_0 = [t_0] + 1$ e $c_0 = x(n_0, t_0, \varphi)$.

Assim, como V é dicotômica com relação à equação discreta associada (2.1) (em $\Omega = (-\delta, \delta)$), existe um inteiro não negativo $N = N(n_0)$, $N \geq 2$; tal que para todo $n \geq n_0 + N$, existe em correspondência um inteiro $k = k(n_0, n)$, $2 \leq k \leq n - n_0$, para o qual:

$$x(n-k, n_0, c_0) \in [\bar{\Omega}_+^1(n, k) \cup \Omega_o^1(n, k)] \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega_{o-}^j(n, k).$$

Segue que $V(x(n, n-k, x(n-k, n_0, c_0))) - V(x(n-j, n-k, x(n-k, n_0, c_0))) \leq 0$, para algum j , $j=2, \dots, k$, ou seja, $V(x(n, n_0, c_0)) \leq V(x(n-j, n_0, c_0))$. E como $V(x(t, t_0, \varphi)) \leq V(x(n, t_0, \varphi))$, então $V(x(t, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-j, t_0, \varphi))$ para algum j , $j=2, \dots, k$, e já temos um instante anterior à t com a propriedade desejada.

Seja $\mu(t_0) = N(n_0) = N([t_0] + 1)$, assim, para $t \geq t_0 + \mu$ com $t \in [n-1, n)$, temos que $n \geq n_0 + N(n_0)$, assumido no início da demonstração.

Portanto, em ambos os casos temos que V é dicotômica com relação à equação (2.5) em Ω , no caso escalar, com $\Omega = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < \delta\}$, $\mu(t_0) = N(n_0)$ e para cada $t \geq t_0 + \mu$, $T(t_0, t) = k(n, n_0) = k([t] + 1, [t_0] + 1)$.

Provemos agora a recíproca.

Seja V dicotômica com relação à equação (2.5), caso escalar, e provemos que V é dicotômica com relação à equação (2.1).

Suponhamos que $V(x(n-1, n_0, c_0)) \leq V(x(n, n_0, c_0))$, para algum instante n , $n > t_0 + \mu + 1$.

Como o máximo de $V(x(t, t_0, \varphi))$ em $[n-1, n]$ ocorre nos valores extremos, temos dois casos a considerar:

- (i) $V'(x_n(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$ e
- (ii) $V(x(t, t_0, \varphi))$ assume máximo local no instante n .

Caso (i): $V'(x_n(\cdot, t_0, \varphi)) \geq 0$. Pela hipótese, existe um $\mu = \mu(t_0) > 0$ e uma vizinhança Ω da origem em C , tal que, para $n \geq t_0 + \mu$, existe em correspondência um $T = T(t_0, n)$, $0 < T \leq n - t_0$, para o qual:

$$x_{n-T}(\cdot, t_0, \varphi) \in [\overline{\Omega}_+(n, T) \cup \Omega'_0(n, T)] \subset \bigcup_s \Omega_0^s(n, T), \quad s \in (0, T].$$

Segue que $x_{n-T}(\cdot, t_0, \varphi) \in \Omega_0^s(n, T)$, para algum $s \in (0, T]$. Assim, $V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-s, t_0, \varphi))$, para algum $s \in (0, T]$.

Analisemos as seguintes situações:

$$(i-1) \quad V(x(n-1, t_0, \varphi)) < V(x(n, t_0, \varphi))$$

$$(i-2) \quad V(x(n-1, t_0, \varphi)) = V(x(n, t_0, \varphi)).$$

$$\text{Caso (i-1): } V(x(n-1, t_0, \varphi)) < V(x(n, t_0, \varphi))$$

Como $V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-s, t_0, \varphi))$, para algum $s \in (0, T]$, pelo Lema (4.2), obrigatoriamente $n-s < n-1$, onde $(n-s) \in [n-(j+1), n-j]$, para algum $j \in \mathbb{Z}_+$.

Se $j=1$, ou seja, $(n-s) \in [n-2, n-1]$, obrigatoriamente o máximo valor de $V(x(t, t_0, \varphi))$ neste intervalo é $V(x(n-2, t_0, \varphi))$, pelas considerações acima.

Portanto, $V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-s, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-2, t_0, \varphi))$, ou seja, para $j=1$ temos que $V(x(n, n_0, c_0)) \leq V(x(n-2, n_0, c_0))$, e nos demais casos, $V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-s, t_0, \varphi)) \leq V(x(m, t_0, \varphi))$, onde $V(x(m, t_0, \varphi))$ é o máximo valor da função em $[n-(j+1), n-j]$, com $j \neq 1$.

Portanto, no caso (i-1) temos que:

$$V(x(n, n_0, c_0)) \leq V(x(n-j, n_0, c_0)),$$

para algum $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \geq 2$, que é o resultado desejado.

$$\text{Caso (i-2): } V(x(n-1, t_0, \varphi)) = V(x(n, t_0, \varphi))$$

Temos que $V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-s, t_0, \varphi))$, para algum $s \in (0, T]$. Se $n-s < n-1$, segue que $V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-s, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-j, t_0, \varphi))$ para algum $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \geq 2$, onde $V(x(n-j, t_0, \varphi))$ é o máximo valor de $V(x(t, t_0, \varphi))$ no intervalo que contém o instante $(n-s)$.

Se $n-s = n-1$, analisemos o intervalo $[n-2, n-1]$.

Se $V(x(n-2, t_0, \varphi)) \geq V(x(n-1, t_0, \varphi)) = V(x(n, t_0, \varphi))$, temos o resultado desejado. Caso contrário, pelo Lema (4.2) concluímos que o instante $(n-1)$ é ponto de máximo local da função $V(x(t, t_0, \varphi))$ e pelo Lema (3.6), segue que:

$V(x(n-1, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-1-\tau, t_0, \varphi))$, para algum $\tau \in (0, n-1-t_0]$, desde que $n-1 > t_0 + \mu$. Logo,

$$V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-1-\tau, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-j, t_0, \varphi))$$

para algum $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \geq 2$, e temos o resultado desejado, concluindo o caso (i).

Caso (ii): $V(x(t, t_0, \varphi))$ assume máximo valor no instante n

Assim, pelo Lema (3.6) temos que $V(x(n, t_0, \varphi)) \leq V(x(n-s, t_0, \varphi))$, para algum $s \in (0, n-t_0]$ e segue análogo ao caso (i).

Portanto, em ambos os casos temos que V é dicotômica com relação à equação (2.1) (em Ω), caso escalar, com $N(n_0) = [\mu(t_0)] + 2 \geq 2$ e $\Omega = (-\delta, \delta)$, onde δ é o raio da vizinhança Ω da origem em C .

Observemos que N foi tomado de tal forma a garantir que, para $n \geq n_0 + N(n_0)$ temos $n-1 > t_0 + \mu$ (assumido no início da demonstração).

□

4.2: Caso Geral (Não Escalar) da Equação Diferencial (1.3)

Dada uma função V , dicotômica com relação à equação (1.3), nem sempre a mesma função será dicotômica com relação à equação discreta

associada, pois neste caso, não necessariamente temos a validade da propriedade dada pelo Lema (4.2).

Sendo assim, definimos uma nova função a partir de V , denotada por $\bar{V}$, atuando ao longo das soluções de (2.1) que terá a propriedade de dicotomia desejada. A saber:

$$\bar{V}(n, x(n, n_0, c_0)) = \max \{V(t, x(t, t_0, \varphi)) : t \in [n, n+1]\}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0, \quad (4.2)$$

e nos intervalos $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, define-se $\bar{V}(t, x(t, t_0, \varphi))$ como sendo o segmento de reta entre os valores $\bar{V}(n, x(n, n_0, c_0))$ e $\bar{V}(n+1, x(n+1, n_0, c_0))$.

Nestas condições, provemos o seguinte resultado:

Teorema 4.4: Seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dicotômica com relação à equação (1.3) (em Ω). Então, a função $\bar{V}$ definida em (4.2), é dicotômica com relação à equação discreta associada (2.1).

Demonstração: Com a hipótese dada, provemos que existe uma vizinhança Ω da origem em $\mathbb{R}^n$ e um $N = N(n_0)$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $N \geq 2$, tal que para todo $n \geq n_0 + N$, existe em correspondência um $k = k(n_0, n)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $2 \leq k \leq n - n_0$, com a seguinte propriedade:

sempre que $\bar{V}(n-1, x(n-1, n_0, c_0)) \leq \bar{V}(n, x(n, n_0, c_0))$, então para algum j , $j = 2, \dots, k$, temos $\bar{V}(n, x(n, n_0, c_0)) \leq \bar{V}(n-j, x(n-j, n_0, c_0))$.

Para simplificar a notação, denotemos $x(t, t_0, \varphi)$ por " $x(t)$ ", $x_t(\cdot, t_0, \varphi)$ por " x_t " e analogamente $x(n, n_0, c_0)$ por " $x(n)$ ". Seja

$$\bar{t}_n = \min \{t \in [n, n+1] : V(t, x(t)) = \bar{V}(n, x(n))\}, \quad n \geq n_0.$$

Suponhamos então que $\bar{V}(n-1, x(n-1)) \leq \bar{V}(n, x(n))$ para algum índice n . Analisemos as seguintes situações:

- (i) $\bar{t}_n$ é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$
- (ii) o caso contrário ao item (i).

Caso (i): $\bar{t}_n$ é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$

Neste caso temos duas alternativas:

- (i-1) $\bar{t}_n$ é um inteiro
- (i-2) o caso contrário ao item (i-1).

Caso (i-1): $\bar{t}_n$ é um inteiro

Então, pelo Lema (3.6) segue que $V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n)) \leq V(\bar{t}_n - \bar{s}, x(\bar{t}_n - \bar{s}))$ para algum $\bar{s} \in (0, \bar{t}_n - t_0]$.

Temos que $(\bar{t}_n - \bar{s}) \in [n-k, n-k+1]$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, onde $k \neq 0$ pois $(\bar{t}_n - \bar{s})$ não pode pertencer ao intervalo $[n, n+1]$, considerando que $\bar{t}_n - \bar{s} < \bar{t}_n$ e $\bar{t}_n$ é o mínimo valor neste intervalo onde a função $V(t, x(t))$ assume seu máximo valor. Logo,

$$\bar{V}(n, x(n)) = V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n)) \leq V(\bar{t}_n - \bar{s}, x(\bar{t}_n - \bar{s})) \leq \bar{V}(n-k, x(n-k)) ,$$

para algum $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Se $k > 1$, já temos o instante anterior à n com a propriedade desejada.

Se $k = 1$, $(\bar{t}_n - \bar{s}) \in [n-1, n]$.

Neste caso, obrigatoriamente $\bar{V}(n, x(n)) = \bar{V}(n-1, x(n-1)) = V(\bar{t}_n - \bar{s}, x(\bar{t}_n - \bar{s}))$, desde que $\bar{V}(n-1, x(n-1)) \leq \bar{V}(n, x(n))$.

Analisemos o ponto $\bar{t}_{n-1}$. As alternativas são:

(i-1-1) $\bar{t}_{n-1}$ é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$ e

(i-1-2) o caso contrário ao item (i-1-1).

Caso (i-1-1):

Se $\bar{t}_{n-1}$ é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$, pelo Lema (3.6) ou pela Definição (1.13) temos que $V(\bar{t}_{n-1}, x(\bar{t}_{n-1})) \leq V(\bar{t}_{n-1} - s, x(\bar{t}_{n-1} - s))$, para algum $s \in (0, \bar{t}_{n-1} - t_0]$. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{V}(n, x(n)) &= \bar{V}(n-1, x(n-1)) = V(\bar{t}_{n-1}, x(\bar{t}_{n-1})) \leq \\ &\leq V(\bar{t}_{n-1} - s, x(\bar{t}_{n-1} - s)) \leq \bar{V}(n-j, x(n-j)) , \end{aligned}$$

onde $(\bar{t}_{n-1} - s) \in [n-j, n-j+1]$, para algum $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \geq 2$.

Observemos que o Lema (3.6) só é válido se $\bar{t}_{n-1} > t_0 + \mu$. Para tanto, tomemos $N(n_0) = [\mu(t_0)] + 2$, pois para $n \geq n_0 + N$, temos que:

$$\bar{t}_{n-1} \geq n-1 \geq n_0 + N - 1 = [t_0] + [\mu(t_0)] + 2 > t_0 + \mu.$$

Caso (i-1-2): $\bar{t}_{n-1}$ não é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$

Obrigatoriamente, $\bar{t}_{n-1} = n-1$ pois os casos $\bar{t}_{n-1} = n$ e $\bar{t}_{n-1}$, ponto interior ao intervalo $[n-1, n]$ não ocorrem, considerando que $\bar{V}(n, x(n)) = \bar{V}(n-1, x(n-1))$ e a hipótese deste sub-caso. E como $\bar{t}_{n-1} = n-1$ não é ponto de máximo local, então existe pelo menos um t_1 , $n-2 \leq t_1 < n-1$ tal que $V(t_1, x(t_1)) > V(n-1, x(n-1))$. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{V}(n-2, x(n-2)) &= \max \{V(t, x(t)) : t \in [n-2, n-1]\} \geq V(t_1, x(t_1)) > \\ &> V(n-1, x(n-1)) = V(\bar{t}_{n-1}, x(\bar{t}_{n-1})) = \bar{V}(n-1, x(n-1)). \end{aligned}$$

Logo, $\bar{V}(n, x(n)) = \bar{V}(n-1, x(n-1)) = V(\bar{t}_{n-1}, x(\bar{t}_{n-1})) < \bar{V}(n-2, x(n-2))$, e temos o resultado desejado, concluindo o caso (i-1).

Caso (i-2): $\bar{t}_n$ não é um inteiro

Neste caso $V'(\bar{t}_n, x_{\bar{t}_n}) = 0$ e como V é dicotômica com relação à equação (1.3), existe um $T = T(t_0, \bar{t}_n)$, $0 < T \leq \bar{t}_n - t_0$, tal que:

$$V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n)) \leq V(\bar{t}_n - s, x(\bar{t}_n - s))$$

para algum $s \in (0, T]$, e segue análogo ao caso (i-1).

Caso (ii): $\bar{t}_n$ não é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$

Então $\bar{t}_n = n+1$ pois se $\bar{t}_n$ é ponto interior de $[n, n+1]$ ou se $\bar{t}_n = n$ com $\bar{V}(n, x(n)) \geq \bar{V}(n-1, x(n-1))$, teríamos um valor máximo de $V(t, x(t))$ ocorrendo em $\bar{t}_n$.

Logo, como $\bar{t}_n$ é o mínimo valor de $[n, n+1]$ onde $V(t, x(t))$ assume seu máximo valor neste intervalo, $\bar{t}_n = n+1$ e $\bar{t}_n$ não é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$, afirmamos que existe pelo menos um $t_1 > \bar{t}_n$ com $V'(t_1, x_{t_1}) \geq 0$ e $V(t_1, x(t_1)) > V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n))$.

Como V é dicotômica com relação à equação (1.3), existe um $T = T(t_0, t_1)$, $0 < T \leq t_1 - t_0$, tal que $V(t_1, x(t_1)) \leq V(t_1 - s, x(t_1 - s))$ para algum $s \in (0, T]$ com $t_1 \geq t_0 + \mu$, considerando $N(n_0) = [\mu(t_0)] + 2$. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{V}(n, x(n)) &= V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n)) < V(t_1, x(t_1)) \leq \\ &\leq V(t_1 - s, x(t_1 - s)) \leq \bar{V}(n-k, x(n-k)), \end{aligned}$$

para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq 2$, considerando que $(t_1 - s) \in [n - k, n - k + 1)$. Observemos que $t_1 - s < n - 1$, pois $\bar{V}(n, x(n)) = V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n)) < V(t_1, x(t_1))$ com $\bar{V}(n, x(n)) \geq \bar{V}(n - 1, x(n - 1))$.

Portanto, em ambos os casos analisados temos que $\bar{V}$ é dicotômica com relação à equação discreta (2.1) (em Ω), com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$ e $N(n_0) = [\mu(t_0)] + 2$, onde δ é o raio da vizinhança Ω da origem em $\mathbb{C}$, garantida pela Definição de dicotomia (1.13).

□

Teorema 4.5: Seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente dicotômica com relação à equação (1.3) (em Ω), satisfazendo todas as hipóteses do Teorema (3.10). Então, a função $\bar{V}$ definida em (4.2) é estritamente dicotômica com relação à equação (2.1).

Demonstração: Suponhamos que para algum índice n , temos $\bar{V}(n - 1, x(n - 1)) \leq \bar{V}(n, x(n))$.

Caso (i): $\bar{t}_n$ é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$

Analisemos, neste caso, duas alternativas:

(i-1) $\bar{t}_n$ é um inteiro

(i-2) o caso contrário ao item (i-1).

Caso (i-1): $\bar{t}_n$ é um inteiro

Então, pelo Lema (3.7) existe pelo menos um $s \in (0, M]$ tal que:

$$V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n)) < p(V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n))) \leq V(\bar{t}_n - s, x(\bar{t}_n - s)) ,$$

onde M e $p(t)$ são dados na Definição de dicotomia estrita (1.14).

Logo, se $(\bar{t}_n - s) \in [n-k, n-k+1] \subset [\bar{t}_n - M, \bar{t}_n)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq 2$, temos que $\bar{V}(n, x(n)) < p(\bar{V}(n, x(n))) \leq V(\bar{t}_n - s, x(\bar{t}_n - s)) \leq \bar{V}(n-k, x(n-k))$.

Observemos que $k \neq 1$, pois:

$$\bar{V}(n-1, x(n-1)) \leq \bar{V}(n, x(n)) = V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n)) < V(\bar{t}_n - s, x(\bar{t}_n - s)),$$

ou seja, $V(\bar{t}_n - s, x(\bar{t}_n - s))$ é maior que o máximo valor de $V(t, x(t))$ no intervalo $[n-1, n]$.

Analisemos as duas alternativas:

(i-1-1) $\bar{t}_{n-k}$ é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$

(i-1-2) o caso contrário ao item (i-1-1).

Caso (i-1-1): $\bar{t}_{n-k}$ é ponto de máximo local

Então, pelo Lema (3.7) ou pela Definição (1.14), existe pelo menos um $s \in (0, M]$ tal que $p(V(\bar{t}_{n-k}, x(\bar{t}_{n-k}))) \leq V(\bar{t}_{n-k} - s, x(\bar{t}_{n-k} - s))$. Assim,

$$\bar{V}(n-k, x(n-k)) = V(\bar{t}_{n-k}, x(\bar{t}_{n-k})) < p(V(\bar{t}_{n-k}, x(\bar{t}_{n-k}))) \leq \bar{V}(n-\tau, x(n-\tau)),$$

para algum $\tau \in \mathbb{Z}$, $\tau \geq 3$, onde $(\bar{t}_{n-k} - s) \in [n-\tau, n-\tau+1]$ com $\tau > k$. Logo, para algum $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 3$, temos:

$$p(\bar{V}(n, x(n))) \leq \bar{V}(n-k, x(n-k)) < \bar{V}(n-\tau, x(n-\tau)).$$

Observemos que o Lema (3.7) só é válido se $\bar{t}_{n-k} > t_0 + \mu$, onde $2 \leq k \leq M$, pois $\bar{t}_{n-k} \in [n-k, n-k+1] \subset [\bar{t}_n - M, \bar{t}_n) \subset [n-M, n+1)$.

Para tanto, tomemos $N(n_0) = [\mu(t_0)] + M + 1$, pois para $n \geq n_0 + N(n_0)$, temos que $\bar{t}_{n-k} \geq n-k \geq n_0 + [\mu(t_0)] + 1 > t_0 + \mu$.

Caso (i-1-2): $\bar{t}_{n-k}$ não é ponto de máximo local

Então, necessariamente $\bar{t}_{n-k}$ ocorre nos extremos do intervalo $[n-k, n-k+1]$.

No caso em que $\bar{t}_{n-k} = n-k$, existe pelo menos um t , $n-k-1 \leq t < n-k$ com $V(t, x(t)) > V(\bar{t}_{n-k}, x(\bar{t}_{n-k}))$.

Logo, $\bar{V}(n-k, x(n-k)) < V(t, x(t)) \leq \bar{V}(n-k-1, x(n-k-1))$ e segue que:

$$p(\bar{V}(n, x(n))) \leq \bar{V}(n-k, x(n-k)) < \bar{V}(n-k-1, x(n-k-1)), \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 2.$$

Se $\bar{t}_{n-k} = n-k+1$ e considerando que $\bar{t}_{n-k}$ não é ponto de máximo local, existe pelo menos um $t > \bar{t}_{n-k}$ com $V(t, x(t)) > V(\bar{t}_{n-k}, x(\bar{t}_{n-k}))$ e $V'(t, x_t) \geq 0$.

Como V é estritamente dicotômica com relação à equação (1.3), existe um $T = T(t_0, t)$, $0 < T \leq t - t_0$, tal que $p(V(t, x(t)) < V(t-s, x(t-s)))$, para algum $s \in (0, T]$, assim,

$$\begin{aligned} p(\bar{V}(n, x(n))) &\leq \bar{V}(n-k, x(n-k)) < V(t, x(t)) < \\ &< p(V(t, x(t)) < \bar{V}(n-\tau, x(n-\tau))), \end{aligned}$$

para algum $\tau \in \mathbb{Z}$, $\tau \geq 3$ com $(t-s) \in [n-\tau, n-\tau+1]$ e concluímos o caso (i-1).

Caso (i-2): $\bar{t}_n$ não é um inteiro

Neste caso $V'(\bar{t}_n, x_{\bar{t}_n}) \geq 0$ e como V é estritamente dicotômica com relação à equação (1.3), existe um $T = T(t_0, \bar{t}_n)$, $0 < T \leq \bar{t}_n - t_0$, tal que: $p(V(\bar{t}_n, x(\bar{t}_n))) < V(\bar{t}_n - s, x(\bar{t}_n - s))$, para algum $s \in (0, T]$, isto é,

$$p(\bar{V}(n, x(n))) < \bar{V}(n-k, x(n-k)),$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$ com $(\bar{t}_n - s) \in [n-k, n-k+1]$.

Observemos que $k \neq 1$, pois $\bar{V}(n, x(n)) \geq \bar{V}(n-1, x(n-1))$ e concluímos o caso (i).

Caso (ii): $\bar{t}_n$ não é ponto de máximo local de $V(t, x(t))$

Então $\bar{t}_n = n+1$, pois se $\bar{t}_n$ é ponto interior de $[n, n+1]$ ou se $\bar{t}_n = n$ com $\bar{V}(n, x(n)) \geq \bar{V}(n-1, x(n-1))$, teríamos um valor máximo de $V(t, x(t))$ ocorrendo em $\bar{t}_n$. E mais, $V'(\bar{t}_n, x_{\bar{t}_n}) \geq 0$ e segue análogo ao caso anterior (i-2).

Concluindo parcialmente, em ambos os casos temos provado os itens (i) e (ii) da Definição (1.7).

Para completar a demonstração, provemos o item (iii) da definição.

Seja $x_{n-k}(c_0) \rightarrow \bigcap_{j=1}^k \Omega_0^j(n, k)$ quando $n \rightarrow \infty$. Provemos que $x_n(c_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como $c_j = \max \{ \bar{V}(n, x(n)) : n \in [t_{j-1}, t_j] \}$, $n \in \mathbb{Z}$ conforme notação do Teorema (3.10) e definição de $\bar{V}$, temos que $c_j \rightarrow c$ quando $j \rightarrow \infty$ para alguma constante c , e pelo mesmo Teorema segue que, necessariamente $c = 0$ e que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Logo, $x_n(c_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e temos a validade do item (iii) da Definição (1.7).

Concluindo, temos que $\bar{V}$ é estritamente dicotômica com relação à equação (2.1) (em Ω), com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$, $N(n_0) = [\mu(t_0)] + M + 1$ e $k(n, n_0) = 2M$ para todo $n \geq n_0 + N$, onde δ é o raio da vizinhança Ω da origem em C , garantida pela Definição (1.13).

□

No parágrafo (4.1), utilizando a função $V(x) = x^2 / 2$, vimos que o conceito de dicotomia (dicotomia estrita) para a equação (2.5) e para a equação discreta associada, no caso escalar, é equivalente.

No parágrafo (4.2) comentamos que, em geral, não temos a equivalência para a equação (1.3). Porém, observemos que, para casos particulares apresentando a propriedade dada pelo Lema (4.2), podemos ter o resultado. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.1: Consideremos o sistema:

$$x'(t) = -x(t)x([t]) - y(t)\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad \text{q.t.p.}, t \geq 0 \quad (4.3)$$

$$y'(t) = -y(t)x([t]) + x(t)\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad \text{q.t.p.}, t \geq 0$$

Em coordenadas polares, em cada intervalo $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, o sistema equivalente é:

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t)r_n \cos \theta_n & r(n) &= r_n \\ \theta'(t) &= r(t) & \theta(n) &= \theta_n, \end{aligned}$$

que tem como solução, para $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$r(t) = r_n \exp[r_n \cos \theta_n (n-t)]$$

$$\theta(t) = [1 - \exp(r_n \cos \theta_n (n-t))] / \cos \theta_n + \theta_n ,$$

E a equação discreta associada é dada por:

$$r_{n+1} = r_n \exp(-r_n \cos \theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = [1 - \exp(-r_n \cos \theta_n)] / \cos \theta_n + \theta_n .$$

Através de dados computacionais, trabalhando com a função $V(x,y) = (x^2 + y^2) / 2$ (ou $V(r) = r^2 / 2$), constatamos que o processo de dicotomia se faz presente, bastando analisá-lo através da equação discreta, uma vez que V ao longo das soluções de (4.3) assume valores extremos apenas nos instantes inteiros.

De fato:

Para $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ e $z(t, t_0, \varphi)$ denotando a solução de (4.3) em coordenadas polares, temos que:

$$V'(z_t(\cdot, t_0, \varphi)) = r'(t)r(t) = -r^2(t)r_n \cos \theta_n .$$

E $V'(z_t(\cdot, t_0, \varphi)) = 0$, se e somente se, ocorrer uma das seguintes alternativas: $r_n = 0$, $\cos \theta_n = 0$ ou $r(t) = 0$ para $t \in [n, n+1)$.

Analisando os três casos constatamos que a única alternativa é $r(t)$ ser uma função constante em $[n, n+1)$.

De fato, considerando que $r(t) = r_n \exp[r_n \cos \theta_n (n-t)]$, $t \in [n, n+1)$, temos:

- (i) Se $r_n = 0$, $r(t) = 0$ para todo $t \in [n, n+1)$,
- (ii) Se $\cos \theta_n = 0$, $r(t) = r_n$ para todo $t \in [n, n+1)$,

(iii) Se $r(t) = 0$ para algum $t \in [n, n+1)$, necessariamente $r_n = 0$ e segue análogo ao caso (i).

Logo, para as funções $r(t)$ não constantes, $V(z(t, t_0, \varphi))$ não apresenta pontos extremos interiores aos intervalos $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$; e temos a propriedade do Lema (4.2).

Capítulo 5

APLICAÇÕES DA TEORIA DE FUNÇÕES DICOTÔMICAS

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações da Teoria de Funções Dicotômicas evidenciando, no caso escalar, a forte influência que a equação discreta exerce sobre a equação diferencial funcional a que está associada. E para simplificar, usaremos " $x(t)$ " para denotar a solução $x(t, t_0, \varphi)$; e " x_t " para $x_t(\cdot; t_0, \varphi)$.

Aplicação 1: Consideremos a equação

$$x'(t) = ax(t) + bx([t]) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0 \quad (5.1)$$

com $a \leq -\delta < 0$ e $|b| < k\delta$, $\delta > 0$ e algum $k \in (0, 1)$.

Nestas condições, o equilíbrio nulo de (5.1) é assintoticamente estável.

Primeiramente observemos que se $b > 0$, então $-a/b > 1/k$ e se $b < 0$, $a/b > 1/k$.

Seja $V(x) = x^2 / 2$. Provemos que V é estritamente dicotômica com relação à equação (5.1) e pelo Teorema (3.10) tomando $u(x) = x^2 / 4$ e $v(x) = x^2$ para $x > 0$, temos o resultado desejado.

Temos que $V'(x_t) = x(t)x'(t) = x(t)[ax(t) + bx([t])]$.

Inicialmente observemos que para $t \in \mathbb{Z}_+$ com $x(t) \neq 0$, $V'(x_t) < 0$.

De fato:

Como $x(t) = x([t])$ e $(a+b) < 0$, então $V'(x_t) = x^2(t)(a+b) < 0$.

Portanto, analisemos os pontos $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$, $x(t) \neq 0$ com $V'(x_t) \geq 0$, isto é,

$$x(t)[ax(t) + bx([t])] \geq 0.$$

Analisemos dois casos: $x(t) > 0$ e $x(t) < 0$.

1) $x(t) > 0$.

Então, $ax(t) + bx([t]) \geq 0$.

Se $b > 0$, segue que $x([t]) \geq (-a/b)x(t) > x(t)/k$.

Assim, $x^2([t])/2 > x^2(t)/2k^2$ e escolhendo a função $p(y) = y/k^2$, $y > 0$, temos $p(V(x(t))) < V(x([t]))$.

Se $b < 0$, segue que $x([t]) \leq (-a/b)x(t) < -x(t)/k$.

Considerando que $x(t) > 0$, temos:

$$x^2([t])/2 > x^2(t)/2k^2, \quad \text{ou seja,}$$

$$p(V(x(t))) < V(x([t])).$$

2) $x(t) < 0$

Devemos ter $ax(t) + bx([t]) \leq 0$.

Se $b > 0$, $x([t]) \leq (a/b)(-x(t)) < (-1/k)(-x(t)) = x(t)/k \leq 0$, assim,

$$x^2([t])/2 > x^2(t)/2k^2, \quad \text{ou seja,}$$

$$p(V(x(t))) < V(x([t])).$$

Se $b < 0$, $x([t]) \geq (-a/b)x(t) > -x(t)/k$, e assim,

$$x^2([t])/2 > x^2(t)/2k^2, \text{ ou seja,}$$

$$p(V(x(t))) < V(x([t])).$$

Logo, em ambos os casos, sempre que $V'(x_t) \geq 0$ e $x(t) \neq 0$ segue que $p(V(x(t))) - V(x([t])) < 0$ para $t \in \mathcal{R}_+ \setminus Z$.

Observemos o caso $x(t) = 0$ com $V'(x_t) = 0$. Consideremos:

(i) $t \in \mathcal{R}_+ \setminus Z$

(ii) $t \in Z_+$

caso (i): Analisemos duas situações com $t \in (n, n+1)$, $n \in Z_+$:

(i-1) existe pelo menos um $\bar{t} \in (n, n+1)$ com $x(\bar{t}) \neq 0$ e $V'(x_{\bar{t}}) \geq 0$,

(i-2) $x(t) = 0$ para todo $t \in (n, n+1)$.

caso (i-1): Neste caso, $p(V(x(\bar{t}))) < V(x(n))$, como já vimos.

Logo, $0 = p(V(x(t))) < p(V(x(\bar{t}))) < V(x(n))$ e já temos o resultado desejado com $T(t) = 1$.

caso (i-2): Neste caso, necessariamente temos que $x(t) = 0$ para todo $t \geq n$, pela propriedade de dicotomia já provada. Assim, como $x(t)$ é solução não nula, existe pelo menos um $\bar{t} \in [0, n]$ tal que $x(\bar{t}) \neq 0$.

Logo, $0 = p(V(x(t))) < V(x(\bar{t}))$ e temos a propriedade desejada com $T(t) = t - \bar{t}$.

caso (ii): Se $t = n$ e $x(n) = 0$, necessariamente estamos no caso (i-2) devido à propriedade já provada, e segue análogo.

Observemos também o caso em que $x(t) = 0$ para todo $t \geq t^*$, para algum $t^* > 0$. Para $t \geq t^*$, $V'(x_t) = 0$ e devemos provar que valem os itens (i) e (ii) da definição de dicotomia estrita.

Para tanto, seja $M = \sup \{ T(t) : t < t^* + 1 \}$.

Para $t \geq t^* + 1$, tomemos $T(t) = M$. E se $t \geq t^* + 1 + M$, $t - M \geq t^* + 1$ com $x_{t-M} = 0$; portanto, para estes pontos não é necessário analisar a propriedade de dicotomia estrita.

Concluindo, para todo t com $V'(x_t) \geq 0$, temos $T = M$ onde M é definido como anteriormente.

Assim, os itens (i) e (ii) da Definição de dicotomia estrita (1.14) estão satisfeitos.

Provemos então o item (iii). Seja $x_{t,T} \rightarrow \bigcap_s [\Omega'_0(t,T) \cap \Omega^s_0(t,T)]$ quando $t \rightarrow \infty$, $s \in (0, T]$.

Logo, $V'(x_t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e $V(x(t)) - V(x(t-s)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $s \in (0, T]$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V'(x_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)[ax(t) + bx([t])] = 0 \text{ com } x(t) \rightarrow c \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

para alguma constante c .

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)[ax(t) + bx([t])] = \lim_{t \rightarrow \infty} c^2(a + b) = 0.$$

Como $(a + b) < 0$, por hipótese, necessariamente $c = 0$ e temos o resultado.

Assim, a Definição (1.14) está satisfeita e V é estritamente dicotômica com relação à equação (5.1).

Vamos agora discutir o comportamento da função $V(x) = x^2 / 2$ ao longo da solução da equação discreta associada à (5.1), tomando $\varphi(0) = c_0$, utilizando-se da Definição (1.7-A), uma vez que a equação discreta associada é autônoma, como veremos abaixo.

A solução $x(t)$ restrita ao intervalo $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$x_n(t) = (-b/a)c_n + c_n(1+b/a)\exp(a(t-n)), \text{ onde } c_n = x_n(n, c_0).$$

Devido à continuidade de $x(t)$ nos valores inteiros, devemos ter $c_n = x_{n-1}(n, c_0)$, ou seja:

$$c_n = [(1+b/a)e^a - b/a]c_{n-1} = Ac_{n-1}. \quad (5.2)$$

Se considerarmos a região do $\mathbb{R}^2$ dada por $|A| < 1$, que corresponde à $a(1+e^a)/(1-e^a) < b < -a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e para $a = 0$ corresponde à $-2 < b < 0$, temos que V é estritamente dicotômica com relação à equação (5.2) com $k = 2$ conforme Definição (1.7-A).

De fato:

Seja Ω uma vizinhança arbitrária do zero em $\mathbb{R}$. Assim:

$$\Omega_+^1(2) = \{y \in \Omega : \Delta_1 V(c_2(y)) > 0\} = \emptyset,$$

pois, para todo $y \in \Omega$ temos: $\Delta_1 V(c_2(y)) = V(c_2(y)) - V(c_1(y)) =$
 $= (1/2)[c_2^2(y) - c_1^2(y)] = (c_1^2(y)/2)(A^2 - 1) \leq 0$, considerando que $|A| < 1$.

E também,

$$\Omega_0^1(2) = \{y \in \Omega : \Delta_1 V(c_2(y)) = 0\} = \{0\}$$

pois, $\Delta_1 V(c_2(y)) = 0$ se e somente se, $y = 0$.

Assim, $[\overline{\Omega}_+^1(2) \cup \Omega_0^1(2)]^* \subset \Omega_-^2(2)$.

E mais, $\Omega_0^1(2) \cap \Omega_0^2(2) = \{0\}$ pois, se $y \in \Omega_0^1(2) \cap \Omega_0^2(2)$, então
 $V(c_2(y)) = V(c_1(y)) = V(y)$.

Assim, $c_2^2(y) = c_1^2(y) = y^2$ isto é, $(A^2 y)^2 = (Ay)^2 = y^2$.

Como $|A| < 1$, necessariamente $y = 0$ e segue o resultado.

Logo, todos os itens da Definição (1.7-A) estão satisfeitos e portanto, V é estritamente dicotômica com relação à equação (5.2) e pelos Teoremas (2.4) e (3.3), segue que o equilíbrio nulo da equação (5.1) é assintoticamente estável sempre que $|(1+b/a)e^a - (b/a)| < 1$.

Observemos que esta região é muito mais abrangente do que a região $a \leq -\delta < 0$ e $|b| < k\delta$ para $\delta > 0$ e algum $k \in (0,1)$, considerada inicialmente, principalmente por permitir valores positivos para a constante a .

Portanto, melhores resultados foram possíveis devido ao estudo feito sobre a equação discreta associada (5.2).

Como ilustração, apresentamos o esboço dos gráficos de $x(t)$ e de $V(x(t))$ para $a = b = -1$ e $\varphi(0) = c_0 = 1/2$.

Aplicação 2: Consideremos a equação

$$x'(t) = x([t]) - f(t, x(t)) \quad \text{q.t.p., } t \geq t_0. \quad (5.3)$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $f(t, 0) = 0$ e satisfaz $x f(t, x) \geq kx^2$, para algum $k > 1$.

Com estas hipóteses, o equilíbrio nulo de (5.3) é assintoticamente estável.

De fato:

Seja $V(x) = x^2 / 2$. Assim, $V'(x_t) = x(t)x'(t) = x(t)[x([t]) - f(t, x(t))]$.

Se $t \in \mathbb{Z}$ e $x(t) \neq 0$, então $V'(x_t) < 0$, pois $x(t) = x([t])$ e $V'(x_t) = x^2(t) - x(t)f(t, x(t)) \leq x^2(t) - kx^2(t) = (1-k)x^2(t) < 0$ considerando que $k > 1$.

Portanto, analisemos os pontos $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $t \geq t_0$ com $V'(x_t) \geq 0$ e $x(t) \neq 0$.

Temos que :

$$V'(x_t) = x(t)x([t]) - x(t)f(t, x(t)) \leq x(t)x([t]) - kx^2(t).$$

Se $V'(x_t) \geq 0$, então $x(t)x([t]) - kx^2(t) \geq 0$.

Analisemos os casos $x(t) > 0$ e $x(t) < 0$.

1) $x(t) > 0$

Então, $x([t]) - kx(t) \geq 0$, isto é, $x([t]) \geq kx(t)$.

Seja M uma constante satisfazendo $1 < M < k$. Assim,

$$x([t]) \geq kx(t) > Mx(t), \text{ ou seja,}$$

$$x^2([t])/2 > M^2x^2(t)/2.$$

Tomando $p(y) = M^2y$, $y > 0$, temos que $p(V(x(t))) < V(x([t]))$.

2) $x(t) < 0$

Como $x(t)x([t]) - kx^2(t) = -|x(t)| [x([t]) + k|x(t)|] \geq 0$, segue que $x([t]) + k|x(t)| \leq 0$, ou seja, $0 \leq k|x(t)| \leq -x([t])$.

Tomando M e $p(t)$ como anteriormente, temos que:

$$M|x(t)| \leq -x([t]), \text{ isto é, } M^2x^2(t)/2 < x^2([t])/2.$$

Logo, $p(V(x(t))) < V(x([t]))$.

Portanto, sempre que $V'(x_t) \geq 0$ e $x(t) \neq 0$ segue que:

$p(V(x(t))) - V(x([t])) < 0$ para $t \in \mathcal{R} \setminus Z$, e para o caso em que $x(t) = 0$, segue análogo à observação feita na Aplicação 1.

Assim, os itens (i) e (ii) da Definição de dicotomia estrita (1.14) estão satisfeitos para $T = M$ e $\mu(t_0)$ arbitrário. Provemos o item (iii).

Seja $x_{t,T} \rightarrow \bigcap_s [\Omega'_0(t,T) \cap \Omega^s_0(t,T)]$ quando $t \rightarrow \infty$, $s \in (0,T]$.

Então, $V'(x_t(\cdot, t_0, \varphi)) \rightarrow 0$ e $V(x(t)) - V(x(t-s)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para $s \in (0,T]$.

Assim, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c$ para algum c e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)[x([t]) - f(t, x(t))] = 0$.

Como

$$x(t)x([t]) - x(t)f(t, x(t)) \leq x(t)x([t]) - kx^2(t), \text{ então,}$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)[x([t]) - f(t, x(t))] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)x([t]) - kx^2(t)] = c^2(1-k) \leq 0,$$

considerando que $(1-k) < 0$, e portanto $c = 0$.

Assim, V é estritamente dicotômica com relação à equação (5.3) e pelo Teorema (3.10), tomando $u(x)$ e $v(x)$ como na Aplicação 1, segue o resultado.

Aplicação 3: Consideremos a equação:

$$x'(t) = ax^2([t]) + bx(t) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0 \quad (5.4)$$

$$x_0 = \varphi$$

Se a é uma constante arbitrária não nula, $b < 0$ e $\varphi \in \Omega = \{\psi \in C : \|\psi\| < |b/a|k\}$, para algum $k \in (0,1)$ e $C = C([-1,0], \mathcal{R})$; temos que o equilíbrio nulo de (5.4) é assintoticamente estável.

Provemos que $V(x) = x^2 / 2$ é estritamente dicotômica com relação à equação (5.4) em Ω , e através do Teorema (3.10) tomando $u(x)$ e $v(x)$ como nas aplicações anteriores, segue o resultado.

Inicialmente, observemos que para todo $t \in Z_+$ com $x_t(\cdot, \varphi) \in \Omega$ e $x(t) \neq 0$, temos que $V'(x_t) < 0$.

De fato:

Como $x(t) = x([t])$, segue que $V'(x_t) = x(t)x'(t) = x^2(t)[ax(t) + b]$.

Se $x_t(\cdot, \varphi) \in \Omega$, então $|x(t)| < |b/a|k$.

Analisemos os casos: $a > 0$ e $a < 0$.

1) $a > 0$

Então, $|x(t)| < -(b/a)k$ e como $k < 1$, segue que $x(t) < -b/a$ e portanto, $[ax(t) + b] < 0$.

2) $a < 0$

Então, $|x(t)| < (b/a)k$, isto é, $(-b/a)k < x(t) < (b/a)k$.

Como $k < 1$, temos que $-b/a < x(t)$ e portanto, $[ax(t) + b] < 0$.

Em ambos os casos, $[ax(t) + b] < 0$ e segue que $V'(x_t) < 0$ sempre que $t \in Z_+$ com $x_t(\cdot, \varphi) \in \Omega$ e $x(t) \neq 0$.

Sendo assim, basta analisar os pontos $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Z$ tais que $V'(x_t) \geq 0$.

Suponhamos então que $x_{[t]}(\cdot, \varphi) \in \Omega$ com $x(t) \neq 0$ e $V'(x_t) \geq 0$ onde

$$V'(x_t) = x(t)[ax^2([t]) + bx(t)].$$

Analisemos os casos: $x(t) > 0$ e $x(t) < 0$

1) $x(t) > 0$

Então, $ax^2([t]) + bx(t) \geq 0$.

Se $a > 0$, $x^2([t]) \geq (-b/a)x(t)$. E como $x_{[t]}(\cdot, \varphi) \in \Omega$, $|x([t])| < (-b/a)k$ e assim,

$$(-b/a)x(t) \leq x^2([t]) < (-b/a)k|x([t])|,$$

e portanto, $x(t)/k < |x([t])|$, ou melhor, $x^2(t)/2k^2 < x^2([t])/2$.

Tomando $p(y) = y/k^2$, $y > 0$, temos que $p(V(x(t))) - V(x([t])) < 0$.

Se $a < 0$, $x^2([t]) \leq (-b/a)x(t)$. Mas, $(-b/a)x(t) \leq 0$, pois $(-b/a) < 0$ e $x(t) > 0$.

Logo, $0 \leq x^2([t]) \leq (-b/a)x(t) \leq 0$ e portanto $x(t) = 0$; contradição da hipótese tomada. Assim, este caso não ocorre.

2) $x(t) < 0$

Então, $ax^2([t]) + bx(t) \leq 0$.

Se $a > 0$, temos a mesma contradição vista anteriormente.

Se $a < 0$, $x^2([t]) \geq (-b/a)x(t)$ e como $x_{[t]}(\cdot, \varphi) \in \Omega$, $|x([t])| < (b/a)k$, isto é,

$$(-b/a)x(t) \leq x^2([t]) < (b/a)k|x([t])|.$$

Logo, $k|x([t])| > -x(t) \geq 0$, ou seja, $x^2([t])/2 > x^2(t)/2k^2$.

Assim, $p(V(x(t))) - V(x([t])) < 0$.

Portanto, em ambos os casos, sempre que $V'(x_t) \geq 0$ com $x_{[t]}(\cdot, \varphi) \in \Omega$ e $x(t) \neq 0$, segue que $V(x(t)) < p(V(x(t))) < V(x([t]))$.

Assim, para $\varphi \in \Omega$ temos que $x_t(\cdot, \varphi) \in \Omega$, para todo $t \geq 0$.

Concluindo, se $b < 0$ e $\varphi \in \Omega^*$, sempre que $V'(x_t) \geq 0$ com $x(t) \neq 0$ segue que $p(V(x(t))) - V(x([t])) < 0$, e o caso $x(t) = 0$ segue análogo à observação feita na Aplicação 1.

Assim, provamos os itens (i) e (ii) da Definição (1.14) de dicotomia estrita com μ arbitrário e $T = M$.

Provemos agora o item (iii). Seja $x_{t-T} \rightarrow \bigcap_s [\Omega_o^-(t, T) \cap \Omega_o^s(t, T)]$ quando $t \rightarrow \infty$, $s \in (0, T]$. Então, $V'(x_t(\cdot, \varphi)) \rightarrow 0$ e $x(t) \rightarrow c$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum c , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) [ax^2([t]) + bx(t)] = 0.$$

Segue que $c^2(ac + b) = 0$, ou seja, $c = 0$ ou $c = -b/a$.

Afirmamos que $c \neq -b/a$, pois para $\varphi \in \Omega$ temos que $x_t(\cdot, \varphi) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, isto é, $|x(t, \varphi)| < |b/a|k < |b/a|$.

Assim, $x(t)$ deve convergir, necessariamente para algum valor estritamente menor que $|b/a|$ (ou estritamente maior que $-|b/a|$).

Portanto, $c = 0$ e provamos o item (iii) da Definição (1.14), concluindo que V é estritamente dicotômica com relação à equação (5.4) em Ω .

Aplicação 4: Seja o sistema:

$$x'(t) = y(t)x([t]) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0 \quad (5.4-A)$$

$$y'(t) = -x(t)x([t]) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0$$

Então, o equilíbrio nulo de (5.4-A) é estável.

Provemos que $V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$ é dicotômica com relação ao sistema (5.4-A).

Sejam $z_t = (x_t, y_t)$ e Ω , vizinhança arbitrária da origem em $C = C([-1,0], \mathbb{R}^2)$. Então, para todo $t \geq 0$,

$$V'(z_t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = x(t)y(t)x([t]) - x(t)y(t)x([t]) = 0.$$

Assim, $\Omega_+^1(t,T) = \emptyset$ e $\Omega_o^1(t,T) = \Omega$ para todo $t \geq 0$ com $T > 0$ arbitrário. Temos, para $T=1$ que $\Omega_o^1(t,1) = \Omega$ para todo $t \geq 1$, pois se $V'(z_t) = 0$ para todo $t \geq 0$, então $V(z(t)) = c$, para algum $c \geq 0$. Assim,

$$\Omega_o^1(t,1) = \{\psi \in \Omega : V(z(t,t-1,\psi)) - V(z(t-1,t-1,\psi)) = 0\} = \Omega,$$

para todo $t \geq 1$. Portanto, $[\bar{\Omega}_+^1(t,1) \cup \Omega_o^1(t,1)] = \Omega_o^1(t,1) \subset \bigcup_s \Omega_o^s(t,1)$, $s \in (0,1]$ e está satisfeita a Definição de dicotomia (1.13) para $\mu = T = 1$, e pelo Teorema (3.10), tomando $u(x) = x^2/4$ e $v(x) = x^2$, segue o resultado. Neste caso, não temos estabilidade assintótica.

Aplicação 5: Consideremos o sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + bx([t]) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0 & x_o &= \varphi \\ y'(t) &= cy(t) + dy([t]) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0 & y_o &= \psi \end{aligned} \quad (5.5)$$

com as seguintes hipóteses:

$$(a + 1/2k) < 0 \quad \text{e} \quad (c + 1/2k) < 0$$

$$(2a + 1/k + b^2) < 0 \quad \text{e} \quad (2c + 1/k + d^2) < 0 ,$$

para algum $k \in (0,1)$.

Nestas condições, o equilíbrio nulo de (5.5) é assintoticamente estável.

Provemos que $V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$ é estritamente dicotômica com relação ao sistema (5.5), averiguando a validade da seguinte desigualdade, para todo $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Z$ com $z(t) \neq 0$:

$$- [V'(z_t) + V(z(t))/k - V(z([t]))] > 0, \quad (5.6)$$

onde $z(t) = (x(t), y(t))$ e $z_t = (x_t, y_t)$.

Assim, sempre que $V'(z_t) \geq 0$, necessariamente teremos que $p(V(z(t))) - V(z([t])) < 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Z$ com $z(t) \neq 0$, onde definimos $p(y) = y/k$, $y > 0$.

E para os valores $t \in Z_+$ com $z(t) \neq 0$, provaremos que $V'(z_t) < 0$, e assim, usando a observação feita na Aplicação 1 para o caso $z(t) = 0$, teremos provado os itens (i) e (ii) da Definição de dicotomia estrita (1.14) com μ arbitrário e $T = M$.

1) Provemos que, para $t \in Z_+$ com $z(t) \neq 0$, $V'(z_t) < 0$.

Inicialmente, com as hipóteses dadas, notemos que $(a+b) < 0$ e $(c+d) < 0$, pois: $b^2 < -2a - 1/k < -2a - 1 < a^2$, e portanto, $|b| < |a| = -a$, considerando que a é negativo.

Analogamente, tem-se que $(c+d) < 0$.

Seja então $t \in Z_+$ com $z(t) \neq 0$.

Segue que $z(t) = z([t])$ e $V'(z_t) = x^2(t)(a+b) + y^2(t)(c+d) < 0$, pois $z(t) \neq 0$, $(a+b) < 0$, $(c+d) < 0$ e segue o resultado.

2) Provemos a validade de (5.6) para $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Z$ com $z(t) \neq 0$.

$$\begin{aligned} -V'(z_t) - V(z(t))/k + V(z([t])) &= -x(t)[ax(t) + bx([t])] - \\ &- y(t)[cy(t) + dy([t])] - [x^2(t) + y^2(t)]/2k + [x^2([t]) + y^2([t])]/2 = \\ &= -(a + 1/2k)x^2(t) - bx(t)x([t]) - (c + 1/2k)y^2(t) - \\ &- dy(t)y([t]) + x^2([t])/2 + y^2([t])/2. \end{aligned}$$

Esta igualdade pode ser vista como uma forma quadrática $w^T X w$, onde $w(t) = [x(t) \ y(t) \ x([t]) \ y([t])]$, e

$$X = \begin{bmatrix} -(a+1/2k) & 0 & -b/2 & 0 \\ 0 & -(c+1/2k) & 0 & -d/2 \\ -b/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Nosso objetivo é provar que esta forma quadrática é positiva definida. Para tal, analisemos os menores principais de X , que são dados por:

$$\begin{aligned} &-(a + 1/2k), \quad (a + 1/2k)(c + 1/2k), \quad (c + 1/2k)[(a + 1/2k)/2 + b^2/4] \\ &\text{e} \quad [(c + 1/2k)/2 + d^2/4][(a + 1/2k)/2 + b^2/4]. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, os fatores $(a + 1/2k)$, $(c + 1/2k)$, $(b^2 + 2a + 1/k)$ e $(d^2 + 2c + 1/k)$ são negativos, segue que todos os menores principais de X são positivos e portanto, a forma quadrática é positiva definida.

Provemos agora o item (iii) da Definição (1.14).

Seja $z_{t-T} \rightarrow \bigcap_s [\Omega_o^-(t, T) \cap \Omega_o^+(t, T)]$ quando $t \rightarrow \infty$, $s \in (0, T]$.

Então, $V(z_t) \rightarrow 0$ e $V(z(t)) - V(z(t-s)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para $s \in (0, T]$. Provemos que $z(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Suponhamos que $z(t) \rightarrow c$ quando $t \rightarrow \infty$, onde $c = (c_1, c_2)$.

Temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t)[ax(t) + bx([t])] + y(t)[cy(t) + dy([t])]\} = 0$, com $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (c_1, c_2)$.

Segue que $(a+b)c_1^2 + (c+d)c_2^2 = 0$.

Como, por hipótese, $(a+b) < 0$ e $(c+d) < 0$, então $c_1 = c_2 = 0$ e temos provado o item (iii) da Definição (1.14), concluindo que V é estritamente dicotômica com relação ao sistema (5.5).

Aplicação 6: Consideremos o sistema:

$$x'(t) = ax(t) + bx(t)y^2(t) + f(x(t), x([t])) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0 \quad (5.7)$$

$$y'(t) = cy(t) + dx^2(t)y(t) + g(y(t), y([t])) \quad \text{q.t.p., } t \geq 0$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ com $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$,
- (ii) a, b, c e d são constantes com $a, c < -M$, para algum $M > 1$ e $(b + d) < 0$,

(iii) $xf(x,y) \leq y^2$ e $xg(x,y) \leq y^2$, em alguma vizinhança da origem em $\mathfrak{R}^2$.

Com estas hipóteses, o equilíbrio nulo de (5.7) é assintoticamente estável.

Provemos que $V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$ é estritamente dicotômica com relação ao sistema (5.7).

Primeiramente observemos que, para $t \in Z_+$ com $z(t) \neq 0$ temos $V'(z_t) < 0$, onde $z(t) = (x(t), y(t))$.

De fato: Neste caso $z(t) = z([t])$ e

$$V'(z_t) = ax^2(t) + (b+d)x^2(t)y^2(t) + x(t)f(x(t),x(t)) + \\ + cy^2(t) + y(t)g(y(t),y(t)) < (-M+1)[x^2(t) + y^2(t)],$$

utilizando-se das hipóteses.

Logo, $V'(z_t) < (1-M)[x^2(t) + y^2(t)] < 0$, considerando que $M > 1$ e $z(t) \neq 0$. Sendo assim, basta analisar os valores $t \in \mathfrak{R}_+ \setminus Z$ com $z(t) \neq 0$, para os quais $V'(z_t) \geq 0$. Temos que:

$$V'(z_t) = ax^2(t) + (b+d)x^2(t)y^2(t) + cy^2(t) + x(t)f(x(t),x([t])) + \\ + y(t)g(y(t),y([t])) < -M[x^2(t) + y^2(t)] + x^2([t]) + y^2([t]),$$

utilizando-se das hipóteses. Logo, se $V'(z_t) \geq 0$, segue que:

$$[x^2([t]) + y^2([t])]/2 > [x^2(t) + y^2(t)]M/2.$$

Definindo $p(y) = My$, $y > 0$ com $M > 1$, temos que $p(V(z(t))) < V(z([t]))$.

Portanto, sempre que $V'(z_t) \geq 0$ com $z(t) \neq 0$, $p(V(z(t))) - V(z([t])) < 0$.

Se $z(t) = 0$, valem as mesmas observações feitas na Aplicação 1.

Assim, estão satisfeitos os itens (i) e (ii) da Definição (1.14) com constante μ arbitrária, $T = M$.

Provemos agora o item (iii) da Definição (1.14).

Seja $z_{t-T} \rightarrow \bigcap_s [\Omega_o(t, T) \cap \Omega_o^s(t, T)]$ quando $t \rightarrow \infty$, $s \in (0, T]$.

Então, $V'(z_t) \rightarrow 0$ e $V(z(t)) - V(z(t-s)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para $s \in (0, T]$. Provemos que $z(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Suponhamos que $z(t) \rightarrow c$ quando $t \rightarrow \infty$, onde $c = (c_1, c_2)$. Então,

$V'(z_t) < -M[x^2(t) + y^2(t)] + [x^2([t]) + y^2([t])]$ com $\lim_{t \rightarrow \infty} V'(z_t) = 0$. Segue

que:

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [-M(x^2(t) + y^2(t)) + (x^2([t]) + y^2([t]))] = (1-M)(c_1^2 + c_2^2) \leq 0 ,$$

considerando que $(1-M) < 0$.

Portanto, $c_1 = c_2 = 0$ e temos provado o item (iii), concluindo que V é estritamente dicotômica com relação ao sistema (5.7).

A seguir, apresentamos exemplos de funções que satisfazem a propriedade dada no item (iii) da Aplicação 6, em $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq 1\}$.

Genericamente, f é dada por $f(x, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) y^{n_i}$, com :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 ,$$

$g_i : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, funções contínuas satisfazendo $xg_i(x) \leq 1$, para $|x| \leq 1$,

$$i = 1, \dots, m \quad \text{e}$$

$$n_i \in \mathbb{N} , \quad n_i \geq 2 , \quad i = 1, \dots, m .$$

De fato: Para $(x,y) \in \Omega$, $xg_i(x)y^{n_i} \leq y^2$, para todo $i = 1, \dots, m$. Então,

$$\lambda_i xg_i(x)y^{n_i} \leq \lambda_i y^2 \quad \text{e} \quad x \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)y^{n_i} \leq y^2 \sum_{i=1}^m \lambda_i = y^2 .$$

Portanto, $xf(x,y) \leq y^2$, $\forall (x,y) \in \Omega$, e está satisfeita a propriedade do item (iii) da Aplicação 6.

Como particulares exemplos, temos:

$$f_1(x,y) = x^m y^n , \quad m, n \in \mathbb{N} , \quad n \geq 2 ,$$

$$f_2(x,y) = y^2 \sin x/x \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{e} \quad f_2(0,0) = 0 ,$$

$$f_3(x,y) = y^2 (\cos x - 1)/2x \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{e} \quad f_3(0,0) = 0 \quad \text{e}$$

$$f_4(x,y) = y^2 x \sin(1/x) \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{e} \quad f_4(0,0) = 0 .$$

Aplicação 7:

Seja a função $f: [0, 2\pi) \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ onde $f(\theta, r) = r \exp(-r \cos \theta)$.

Dada uma seqüência $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotemos $r_n = r(\theta_n)$ e consideremos a equação discreta $r_{n+1} = f(\theta_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Em particular, para $\theta_{n+1} = \theta_n + \pi/2$, $n \in \mathbb{N}$, a equação discreta correspondente tem a seguinte forma:

$$r_{n+1} = r_n \exp(-r_n \cos \theta_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.8)$$

com valor inicial $r_0 = r$, e aqui, θ desempenha o papel da variável "tempo", medido segundo a lei acima.

Como o zero é ponto de equilíbrio de (5.8), estudemos a sua estabilidade.

Provemos que $V(r) = r^2$ é estritamente dicotômica com relação à equação (5.8) em $\Omega = \{r \in \mathbb{R}_+ : re^r < 1\}$ e escolhendo $u(r) = r^2/2$ e $v(r) = r^2$, pelo Teorema (3.3) temos que o equilíbrio nulo de (5.8) é assintoticamente estável.

Suponhamos que $\Delta_1 V(r_4(r)) \geq 0$ para $r \in \Omega^*$.

Então, $\Delta_1 V(r_4(r)) = V(r_4(r)) - V(r_3(r)) \geq 0$, ou seja, $r_3 \leq r_4$.

Daí, $r_3 \leq r_3 \exp(-r_3 \cos \theta_3)$ e assim, $\cos \theta_3 \leq 0$.

Temos dois casos a analisar: $\theta_3 \in [\pi/2, \pi]$ e $\theta_3 \in [\pi, 3\pi/2]$.

1) $\theta_3 \in [\pi/2, \pi]$. Provemos que $\Delta_3 V(r_4(r)) < 0$.

De fato:

$$r_2 = r_1 \exp(-r_1 \cos \theta_1),$$

$$\begin{aligned} r_3 &= r_2 \exp(-r_2 \cos \theta_2) = r_1 \exp(-r_1 \cos \theta_1) \exp[-r_1 \exp(-r_1 \cos \theta_1) \cos \theta_2] = \\ &= r_1 \exp(-Ar_1), \text{ onde } A = \cos \theta_1 + \exp(-r_1 \cos \theta_1) \cos \theta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 &= r_3 \exp(-r_3 \cos \theta_3) = r_1 \exp(-Ar_1) \exp[-r_1 \exp(-Ar_1) \cos \theta_3] = \\ &= r_1 \exp(-Br_1), \text{ onde } B = A + \exp(-Ar_1) \cos \theta_3. \end{aligned}$$

Observemos que, se $B > 0$, segue que $r_4 < r_1$, e portanto, $\Delta_3 V(r_4(r)) = V(r_4) - V(r_1) = r_4^2 - r_1^2 < 0$, que é o resultado desejado.

Provemos então que $B > 0$, sempre que $r \in \Omega^*$.

Inicialmente mostremos que, para $r \in \Omega^*$, $A \geq 1$ e $A - 1 < B \leq A$ e assim, $0 \leq A - 1 < B \leq A$ e segue que $B > 0$.

a) $A \geq 1$

De fato:

Como $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$, então $A = \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \exp(-r_1 \cos\theta_1)$.

Se $re^r < 1$, então $r_1 < 1$, pois $r_1 = r \exp(-r \cos\theta)$ onde $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$, e assim, $r_1 \leq re^r$.

E considerando que $\cos\theta_1 \in [0, 1]$ e $\sin\theta_1 \in [-1, 0]$, temos:

$\cos\theta_1 - \sin\theta_1 \geq \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \exp(-r_1 \cos\theta_1) \geq \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \exp(-\cos\theta_1)$, ou seja, $A \geq \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \exp(-\cos\theta_1)$.

Provemos que $f(\theta_1) = \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \exp(-\cos\theta_1) - 1 \geq 0$, e assim segue que $A - 1 \geq 0$.

Se $\cos\theta_1 = x$, $\sin\theta_1 = -\sqrt{1-x^2}$ para $\theta_1 \in [3\pi/2, 2\pi]$.

Então, $f(x) = x + \sqrt{1-x^2} \exp(-x) - 1$.

Afirmamos que $f(x) \geq 0$ para $x \in [0, 1]$, pois a desigualdade equivalente dada por $xe^x \geq e^x - \sqrt{1-x^2}$ é verdadeira no intervalo considerado, bastando para isso comparar os gráficos das funções.

b) $A - 1 < B \leq A$

Considerando que $r_1 \in (0, 1)$, $A \geq 1$, $\cos\theta_3 \in [-1, 0]$ e que $B = A + \exp(-Ar_1) \cos\theta_3$, temos que $A - \exp(-Ar_1) \leq B \leq A$.

E como $A - 1 < A - \exp(-Ar_1) < A - \exp(-A)$, segue que:

$A - 1 < A - \exp(-Ar_1) \leq B \leq A$, ou seja, $A - 1 < B \leq A$.

Portanto, a partir de (a) e (b), temos que $B > 0$ para $r \in \Omega^*$, e assim, $\Delta_3 V(r_4(r)) < 0$.

2) $\theta_3 \in [\pi, 3\pi/2]$. Provemos que $\Delta_4 V(r_4(r)) < 0$.

De fato:

$$r_1 = r \exp(-r \cos \theta),$$

$$r_2 = r_1 \exp(-r_1 \cos \theta_1) = r \exp(-Ar), \text{ onde } A = \cos \theta + \cos \theta_1 \exp(-r \cos \theta),$$

$$r_3 = r_2 \exp(-r_2 \cos \theta_2) = r \exp(-Br), \text{ onde } B = A + \cos \theta_2 \exp(-Ar) \text{ e}$$

$$r_4 = r_3 \exp(-r_3 \cos \theta_3) = r \exp(-Cr), \text{ onde } C = B + \cos \theta_3 \exp(-Br).$$

Observemos que se $C > 0$, segue que $r_4 < r$, e portanto, $\Delta_4 V(r_4(r)) = V(r_4) - V(r) = r_4^2 - r^2 < 0$ para $r \in \Omega^*$, que é o resultado desejado.

Para análise do gráfico da função $C = C(r, \theta_2)$ em $(0, 1) \times [\pi/2, \pi]$, recorremos ao programa computacional "Mathematica" pois, algebricamente, a análise do sinal da referida função requer muito cálculo. Segue abaixo o gráfico da função C .

```
A := -Cos[y] + Sin[y]*Exp[x*Cos[y]]
B := A + Cos[y]*Exp[-A*x]
H := Sin[y]*Exp[-B*x]
Plot3D[B - H, {x, 0, 1}, {y, Pi/2, Pi}]
```

-SurfaceGraphics-

Observemos que $C(r, \theta_2) = 0$ somente se $r = 0$ e é positiva para os demais valores do seu domínio.

Portanto, se $C > 0$ para $r \in \Omega^*$, segue que $\Delta_4 V(r_4(r)) < 0$.

Assim, dada a vizinhança Ω da origem em $\mathfrak{R}$, existe $k = 4$ tal que: sempre que $\Delta_1 V(r_4(r)) \geq 0$ para $r \in \Omega^*$, segue que $\Delta_j V(r_4(r)) < 0$, para $j = 3$ ou $j = 4$, ou seja:

$$[\overline{\Omega}_+^1(4) \cup \Omega_0^1(4)]^* \subset \bigcup_{j=2}^4 \Omega_-^j(4).$$

Logo, o item (i) da Definição de dicotomia estrita (1.7-A) está satisfeito; provemos o item (ii), isto é, $\Omega_0^1(4) \cap \Omega_0^4(4) = \{0\}$.

De fato:

Se $r \in \Omega_0^1(4) \cap \Omega_0^4(4)$, então $V(r_4(r)) = V(r_3(r)) = V(r)$, ou seja, $r_4 = r_3 = r$.

Mas, $r_4 = r \exp(-Cr)$ e $r = r \exp(-Cr)$ somente se $r = 0$, pois C é sempre positivo para $r \neq 0$. Assim, todos os itens da Definição (1.7-A) estão satisfeitos e portanto, V é estritamente dicotômica com relação à (5.8).

Aplicação 8:

Conforme as considerações feitas na Aplicação 7, seja a seguinte equação discreta:

$$r_{n+1} = a(n)r_n \exp[-\cos \theta_n / (n+1)], \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots \quad (5.9)$$

com $r_{n_0} = r$, $\theta_{n+1} = \theta_n + \pi/2$, $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$,

$a : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, é uma função contínua, $a(t) < k < 1$ para todo $t \in \mathcal{R}$, para alguma constante k com $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = d \neq 1$.

Com estas hipóteses, o equilíbrio nulo de (5.9) é assintoticamente estável.

Provemos que $V(r) = r^2$ é estritamente dicotômica com relação à (5.9).

Suponhamos que $V(r_{n-1}) \leq V(r_n)$, para algum $n > n_0$, com $r_{n-4} \neq 0$.

Então $r_{n-1} \leq r_n$, isto é, $r_{n-1} \leq r_{n-1}a(n-1)\exp[-\cos\theta_{n-1}/n]$, e assim segue que $\cos\theta_{n-1} \leq 0$.

Temos dois casos a considerar: $\theta_{n-1} \in [\pi/2, \pi]$ e $\theta_{n-1} \in [\pi, 3\pi/2]$.

1) $\theta_{n-1} \in [\pi/2, \pi]$

$$r_{n-2} = r_{n-3}a(n-3)\exp[-\cos\theta_{n-3}/(n-2)],$$

$$r_{n-1} = r_{n-2}a(n-2)\exp[-\cos\theta_{n-2}/(n-1)] =$$

$$= r_{n-3}a(n-3)a(n-2)\exp\{-\cos\theta_{n-3}/(n-2) - \cos\theta_{n-2}/(n-1)\},$$

$$r_n = r_{n-1}a(n-1)\exp[-\cos\theta_{n-1}/n] = r_{n-3}a(n-3)a(n-2)a(n-1)\exp(B), \text{ onde}$$

$$B = -\cos\theta_{n-3}/(n-2) - \cos\theta_{n-2}/(n-1) - \cos\theta_{n-1}/n.$$

Observemos inicialmente que $B < 0$.

Como $\theta_{n-1} \in [\pi/2, \pi]$, então $\cos\theta_{n-2} = -\sin\theta_{n-3}$ e $\cos\theta_{n-1} = -\cos\theta_{n-3}$.

Assim, $B = -\cos\theta_{n-3}/(n-2) + \sin\theta_{n-3}/(n-1) + \cos\theta_{n-3}/n$, ou seja,
 $B = [-2(n-1)\cos\theta_{n-3} + n(n-2)\sin\theta_{n-3}]/n(n-1)(n-2)$.

Chamando $x = \cos\theta_{n-3}$ com $\theta_{n-3} \in [3\pi/2, 2\pi]$, temos que $x \in [0, 1]$ e que $\sin\theta_{n-3} = -\sqrt{1-x^2}$.

Logo, $B(n, x) = -[2(n-1)x + n(n-2)\sqrt{1-x^2}]/n(n-1)(n-2)$ e portanto, $B(n, x) < 0$ para $n \geq n_0 + 3$ e $x \in [0, 1]$.

Assim, como $r_n = r_{n-3}a(n-3)a(n-2)a(n-1)e^B$, com $a(n) < k < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $B < 0$, temos que:

$$r_n^2 / k < [r_{n-3}^2 k^6 e^{2B}] / k < r_{n-3}^2.$$

Chamando $p(y) = y / k$, $y > 0$, segue que $p(V(r_n)) < V(r_{n-3})$.

2) $\theta_{n-1} \in [\pi, 3\pi/2]$

$$r_{n-3} = r_{n-4}a(n-4)\exp[-\cos\theta_{n-4} / (n-3)],$$

$$r_{n-2} = r_{n-3}a(n-3)a(n-4)\exp[-\cos\theta_{n-4} / (n-3) - \cos\theta_{n-3} / (n-2)],$$

$$r_{n-1} = r_{n-2}a(n-2)a(n-3)a(n-4)\exp[-\cos\theta_{n-4} / (n-3) - \cos\theta_{n-3} / (n-2) - \cos\theta_{n-2} / (n-1)],$$

$$r_n = r_{n-4}a(n-1)a(n-2)a(n-3)a(n-4)\exp(A), \text{ onde:}$$

$$A = -\cos\theta_{n-4} / (n-3) - \cos\theta_{n-3} / (n-2) - \cos\theta_{n-2} / (n-1) - \cos\theta_{n-1} / n.$$

Inicialmente, mostremos que $A < 0$.

Como $\theta_{n-1} \in [\pi, 3\pi/2]$, então $\cos\theta_{n-1} = -\sin\theta_{n-2}$, $\cos\theta_{n-4} = -\cos\theta_{n-2}$ e $\cos\theta_{n-3} = \sin\theta_{n-2}$.

Assim, $A = 2\cos\theta_{n-2} / (n-1)(n-3) - 2\sin\theta_{n-2} / n(n-2)$, e portanto $A < 0$ pois $\cos\theta_{n-2} \in [-1, 0]$ e $\sin\theta_{n-2} \in [0, 1]$ com $n \geq n_0 + 4$.

Como $r_n = r_{n-4}a(n-1)a(n-2)a(n-3)a(n-4)e^A$, temos que:

$$r_n^2 / k < [r_{n-4}^2 k^8 e^{2A}] / k < r_{n-4}^2. \text{ Então, } p(V(r_n)) < V(r_{n-4}).$$

Logo, em ambos os casos, sempre que $V(r_n) - V(r_{n-1}) \geq 0$ segue que $p(V(r_n)) - V(r_{n-j}) < 0$ para $n \geq n_0 + 4$ e $r_{n-4} \neq 0$, onde $j=3$ ou $j=4$.

Assim, os itens (i) e (ii) da Definição de dicotomia estrita (1.7) estão satisfeitos com $M = 4$ e $N = 4$.

Provemos o item (iii). Seja $r_{n-k}(r) \rightarrow \bigcap_{j=1}^k \Omega_o^j(n, k)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Então $V(r_n) - V(r_{n-j}) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para $j = 1, \dots, k$, em particular, para $j=1$, $r_n^2 - r_{n-1}^2 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n-1}^2 [a^2(n-1) \exp(-2 \cos \theta_{n-1} / n) - 1] = 0.$$

Provemos que $r_n(r) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponhamos que $r_n(r) \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$, para alguma constante $c \geq 0$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = d$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp[-\cos \theta_{n-1} / n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{-\cos[\theta_o + (n-1)\pi/2] / n\} = 1,$$

segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n-1}^2 [a^2(n-1) \exp\{-2 \cos \theta_{n-1} / n\} - 1] = c^2(d^2 - 1) = 0$.

Mas como $d \neq 1$, por hipótese, necessariamente $c = 0$ e portanto, a Definição (1.7) está satisfeita, isto é, V é estritamente dicotômica com relação à (5.9) com $N = 4$ e para cada $n \geq n_o$, $k(n) = 3$ ou 4 .

Escolhemos as funções u e v como na Aplicação 7 e pelo Teorema (3.3), o equilíbrio nulo de (5.9) é assintoticamente estável.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AFTABIZADEH, A.R.; WIENER, J. Oscillatory and periodic solutions for systems of two first order linear differential equations with piecewise constant argument. *Applic. Anal.*, v.26, p.327-333, 1988.
- [2] BENÁ, M.A. Estabilidade de equações diferenciais retardadas através do método das funções dicotômicas. São Carlos, ICMSC-USP, 1993 (Tese de Doutorado).
- [3] CARVALHO, L.A.V. The stability of discrete equations and ordinary differential equations. *Delay Differential Equations and Dynamical Systems*. New York, Springer-Verlag, p.88-97, 1990.
- [4] CARVALHO, L.A.V.; COOKE, K.L. On dichotomic maps for a class of differential-difference equations. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, v.117A, p.317-328, 1991.
- [5] CARVALHO, L.A.V. ; FERREIRA, R.R. On a new extension of Liapunov's direct method to discrete equations. *Quart. Appl. Math.*, v.46, n.4, p.779-788, 1988.
- [6] COOKE, K.L.; WIENER, J. A survey of differential equations with piecewise continuous arguments. *Delay Differential Equations and Dynamical Systems*. New York, Springer-Verlag, p.1-15, 1990.

- [7] _____ Neutral differential equations with piecewise constant arguments. *Boll. Un. Mat. Ital.* (7)1-B, p.321-346, 1987.
- [8] _____ Oscillations in systems of differential equations with piecewise constant argument. *J. Math. Anal. Appl.*, v.137, p.221-239, 1989.
- [9] _____ Retarded differential equations with piecewise constant delays. *J. Math. Anal. Appl.*, v.99, p.265-297, 1984.
- [10] _____ Stability regions for linear equations with piecewise continuous delay. *Comp. & Math. with Appls.*, v.12A, n.6, p.695-701, 1986.
- [11] DRIVER, R.D. *Ordinary and delay differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977 (Appl. Math. Sciences, 20).
- [12] HALE, J.K. *Ordinary differential equations*. New York, Robert E. Krieger Publis. Company, 1980.
- [13] _____ *Theory of functional differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977.
- [14] HURT, J. Some stability theorems for ordinary difference equations. *SIAM J. Numerical Anal.* 4, p.582-596, 1967.

- [15] JAYASREE, K.N.; DEO, S.G. On piecewise constant delay differential equations. *J. Math. Anal. and Appl.*, v.169, p.55-69, 1992.
- [16] LA SALLE, J.P. Stability theory for difference equations. *MAA Stu. in Math.* v.14, p.1-31, 1977.
- [17] MC SHANE, E.J. *Integration*. Princeton, Princeton University Press, 1947.
- [18] MYSHKIS, A.D. On certain problems in the theory of differential equations with deviating argument. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 32, p.173-202, 1977.
- [19] ROYDEN, H.L. *Real Analysis*, London, The Macmillan Company.
- [20] SEIFERT, G. Certain systems with piecewise constant feedback controls with a time delay. *Diff. and Integ. Eq.*, v.6, n.4, p.937-947, 1993.

APÊNDICE

Resultado: Se $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, a função $g: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por :

$$g(t, \varphi) = f(t, \varphi(0), \varphi([t] - t)) \quad , \quad t \geq t_0$$

satisfaz condição de Carathéodory sobre $\mathbb{R} \times C$.

Demonstração: Usaremos em $\mathbb{R} \times C$ a norma da soma, em $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ a norma do supremo, e em $\mathbb{R}^{2n}$ a norma do máximo.

1) Provemos que $g(t, \varphi)$ é mensurável em t , para cada φ fixa.

Definimos as funções:

$$k: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0] \quad , \quad k(t) = [t] - t \quad e$$

$$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad , \quad H = (\text{Id}, \varphi \circ k).$$

Assim, para cada $\varphi \in C$ fixa, temos:

$$g(t, \varphi) = f(t, \varphi(0), \varphi([t] - t)) = f_{\varphi(0)}(t, \varphi([t] - t)) = (f_{\varphi(0)} \circ H)(t),$$

onde $f_{\varphi(0)}$ denota a função f com a segunda variável fixa.

Portanto,

$$g_{\varphi}(t) = (f_{\varphi(0)} \circ H)(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como k é mensurável, f e φ são contínuas, segue que g_φ é mensurável, para cada φ fixa.

2) Provemos que g é contínua em φ , para cada t fixo.

Como f é contínua, para cada t fixo e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, então $|f(t, x, y) - f(t, x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Seja $\varphi_1 \in C$. Tomemos $\varphi \in C$ tal que $\|\varphi - \varphi_1\| < \delta$.

Logo, para cada t fixo,

$$\|\varphi(0) - \varphi_1(0)\| < \delta \quad \text{e}$$

$$\|\varphi([t] - t) - \varphi_1([t] - t)\| < \delta.$$

Então, $|(\varphi(0), \varphi([t] - t)) - (\varphi_1(0), \varphi_1([t] - t))| < \delta$, e pela hipótese sobre f , segue que

$$|g(t, \varphi) - g(t, \varphi_1)| = |f(t, \varphi(0), \varphi([t] - t)) - f(t, \varphi_1(0), \varphi_1([t] - t))| < \varepsilon,$$

para cada t fixo.

Portanto, para cada t fixo e $\varphi_1 \in C$, temos:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ se $\|\varphi - \varphi_1\| < \delta$ para $\varphi \in C$, então $|g(t, \varphi) - g(t, \varphi_1)| < \varepsilon$, o que prova o resultado.

3) Para todo $(t, \varphi) \in \mathbb{R} \times C$ fixo, provemos que existe uma vizinhança $V(t, \varphi)$ e uma função Lebesgue Integrável m , tal que:

$$|g(s, \psi)| \leq m(s) \quad , \quad (s, \psi) \in V(t, \varphi).$$

De fato:

Sejam $(t, \varphi) \in \mathcal{R} \times C$ e $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ dado pela continuidade de f e definimos:

$$V_\delta(t, \varphi) = \{(s, \psi) \in \mathcal{R} \times C : |(t, \varphi) - (s, \psi)| < \delta\}.$$

Assim, para cada s tal que $(s, \psi) \in V_\delta(t, \varphi)$, temos que $\|\varphi - \psi\| < \delta$, ou:

$$|\varphi(0) - \psi(0)| < \delta \quad e$$

$$|\varphi([s] - s) - \psi([s] - s)| < \delta,$$

o que é equivalente à $|(s, \psi(0), \psi([s] - s)) - (s, \varphi(0), \varphi([s] - s))| < \delta$.

E pela continuidade de f , segue que:

$$|f(s, \psi(0), \psi([s] - s)) - f(s, \varphi(0), \varphi([s] - s))| < \varepsilon, \text{ ou}$$

$$|f(s, \psi(0), \psi([s] - s))| < \varepsilon + |f(s, \varphi(0), \varphi([s] - s))|.$$

Logo, para $(t, \varphi) \in \mathcal{R} \times C$, fixo e $\varepsilon = 1$, existe uma vizinhança $V_\delta(t, \varphi)$ e uma função m dada por:

$$m(s) = 1 + |f(s, \varphi(0), \varphi([s] - s))|,$$

tal que

$$|g(s, \psi)| = |f(s, \psi(0), \psi([s] - s))| < m(s), \text{ para } (s, \psi) \in V_\delta(t, \varphi).$$

Para concluir o resultado desejado, basta provar que a função m é Lebesgue Integrável.

Notemos que o domínio de m é o intervalo $(t - \delta, t + \delta)$ pois, para cada s com $(s, \psi) \in V_\delta(t, \varphi)$, temos que $|s - t| < \delta$.

Consideremos dois casos: $t \notin \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{N}$.

1) $t \notin \mathbb{N}$

Se $t \in (n, n + 1)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, a função $k(s) = [s] - s$ torna-se contínua para $s \in (t - \delta, t + \delta)$, o que leva à continuidade de m e conseqüentemente, m é Lebesgue Integrável, considerando que m é limitada sobre seu domínio.

2) $t \in \mathbb{N}$

Neste caso, k é contínua à esquerda em $(t - \delta, t]$ e contínua em $[t, t + \delta)$.

Seja uma nova função $\ell : (t - \delta, t] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\ell(s) = \begin{cases} k(s) & , \quad t - \delta < s < t \\ -1 & , \quad s = t \end{cases}$$

Temos que $\ell = k$ em quase toda parte de $(t - \delta, t]$ e que ℓ é contínua. Assim, dada a função:

$$m(s) = 1 + |f(s, \varphi(0), \varphi(\ell(s)))|$$

definida em $(t - \delta, t]$, temos que $m = m$, em quase toda parte, sendo m contínua (e limitada sobre seu domínio).

Logo, m é Lebesgue Integrável em $(t - \delta, t]$ e conforme [19] página 80, a função m é também Lebesgue Integrável em $(t - \delta, t]$.

Por outro lado, m é Lebesgue Integrável em $[t, t + \delta)$ pois é contínua e limitada neste intervalo.

Assim, m é Lebesgue Integrável no seu domínio.

□