SOBRE BORDISMO DE APLICAÇÕES HOMOTÓPICAS A IMERSÕES

Isabel Cristina Rossini

Orientador: Prof. Dr. Carlos Biasi

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Área Matemática - Geometria e Topologia.

**USP - São Carlos
Fevereiro - 1994**

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Carlos Biasi, pela orientação dedicada e segura desse trabalho, que muito contribuiu para a realização do mesmo.

À Profa. Dra. Alice K. Miwa Libardi, pelo incentivo e pelas valiosas sugestões na elaboração desse trabalho.

Aos Profs. Drs. Daciberg Gonçalves, Dirceu Penteado e Pedro Pergher, pelas discussões proveitosas.

Aos professores do ICMSC-USP, pela acolhida e formação; em particular, Maria Aparecida S. Ruas, Janey Daccach e Ozírde Manzoli Neto.

Aos amigos do Departamento de Matemática do IGCE-UNESP, pelo apoio e estímulo constantes. De modo especial, aos professores Geraldo G. Duarte, João Ivo Bertolo, Solange Mancini, Nativi V. P. Bertolo, Rosa Lúcia S. Baroni e Anízio Perissinotto Jr.

À UNESP, que me proporcionou condições para desenvolver o programa de doutorado.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À Sarita e à Simone, pelo excelente trabalho de digitação, realizado com muito carinho e atenção.

Abstract

In this thesis we determine normal bordism groups of a space X with coefficients in an orientable virtual bundle φ , $\Omega_i(X; \varphi)$, for $i \leq 3$, in terms of homology groups of X modulo a convenient Serre class of abelian groups.

We also introduce a normal bordism group which can be seen as a group of maps homotopic to an immersion of m -dimensional closed manifolds into a fixed connected manifold N of dimension n , with $m < n$.

There is an exact sequence involving these groups $\mathfrak{J}_m(N)$ which allows us to determine them up to a group extension, if we consider N a π -manifold and $3m < 2n + 1$. We present some results about the kernel and the image of the forgetfull homomorphism defined in this exact sequence.

We also establish a relationship between regular homotopy and normal bordism.

Resumo

Nesse trabalho determinamos grupos de bordismo normal de um espaço X com coeficientes num fibrado virtual orientável φ , $\Omega_i(X; \varphi)$, para $i \leq 3$, em termos dos grupos de homologia de X módulo uma conveniente classe de Serre de grupos abelianos.

Introduzimos também um grupo de bordismo normal que pode ser interpretado como um grupo de aplicações homotópicas a imersões de variedades m -dimensionais fechadas numa variedade n -dimensional fixa N , com $m < n$.

Existe uma sequência exata envolvendo esses grupos $\mathcal{J}_m(N)$ que nos possibilita determiná-los a menos de extensão de grupos, quando N é uma π -variedade e $3m < 2n + 1$. Apresentamos alguns resultados sobre o núcleo e a imagem do homomorfismo de "esquecimento" definido nessa sequência exata.

Estabelecemos também um relacionamento entre homotopia regular e bordismo normal.

Índice

Introdução	i
Capítulo I. Preliminares	1
1. Grupos de bordismo normal com coeficientes num fibrado virtual	2
2. Resultados básicos	6
3. Dimensão geométrica	9
4. Uma generalização do Teorema de Whitehead módulo $\mathcal{C}$	13
Capítulo II. Grupos de bordismo normal em dimensões baixas	21
1. Uma sequência exata	21
2. Cálculo de grupos de bordismo normal em dimensões baixas	26
3. Aplicações	30
4. O caso não orientável	36
Capítulo III. Homotopia regular e bordismo normal	38
1. Relacionamento entre V_f e $I[M, N]_f$	39
2. Bordismo de frames	41
3. A função l_f	45
4. Alguns resultados sobre a imagem de l_f	47
Bibliografia	57

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho as variedades consideradas são diferenciáveis, de classe C^∞ , e as aplicações entre elas são contínuas.

Dada uma aplicação entre variedades $f: M^m \rightarrow N^{2m-1}$, com $m > 1$, Li Banghe e Peterson provaram que f é sempre homotópica a uma imersão [16, T.4.3]. Mostraram também que, para cada inteiro positivo m , existem variedades fechadas M^m , N^{2m-2} e uma aplicação $f: M^m \rightarrow N^{2m-2}$ que não é homotópica a uma imersão [17, cor.2.2].

A questão natural que se coloca é: dada uma aplicação $f: M^m \rightarrow N^{2m-i}$, $i \geq 0$, entre variedades compactas, em que condições a classe de bordismo $[M, f]$ contém uma imersão? É claro que esse problema é trivial para $i \leq 1$, pois então f é homotópica a uma imersão.

Brown [2], Liulevicius [20] e Olk [23] estudaram esse problema para o caso em que N é um espaço euclidiano. Para o caso geral há resultados recentes obtidos por Szücs [27] e Gui-Song Li [18].

Nesse trabalho introduzimos um determinado grupo de bordismo normal que pode ser interpretado como grupo de bordismo de aplicações homotópicas a imersões. O estudo de um homomorfismo de "esquecimento" definido nesse grupo dá informações sobre a questão formulada acima.

No capítulo I apresentamos um estudo pormenorizado sobre grupos de bordismo normal com coeficientes num fibrado virtual (§§ 1-3), conforme Salomonsen [24]. Usando esses resultados, obtivemos uma sequência exata envolvendo esses grupos (II.1.3), básica para a análise do homomorfismo de "esquecimento". Além disso, introduzimos no parágrafo 4 os conceitos e resultados sobre classes de Serre de grupos

abelianos, que serão utilizados no capítulo II para o cálculo de grupos de bordismo normal. Ressaltamos que a generalização do Teorema de Whitehead módulo $\mathcal{C}$, obtida por Biasi e Daciberg (1.4.7), é de fundamental importância nessa computação.

Dados um par de espaços topológicos (X, A) , um fibrado virtual φ e um inteiro $m \geq 0$, o m -ésimo grupo de bordismo normal de (X, A) com coeficientes em φ é denotado por $\Omega_m(X, A; \varphi)$. Em geral, cálculos explícitos desses grupos são extremamente difíceis, mesmo em dimensões baixas. Koschorke apresenta em [10] uma sequência exata que nos possibilita encontrar $\Omega_m(X; \varphi)$ para $m \leq 2$, a menos de extensão de grupos. Em [19] Gui-Song Li determina $\Omega_2(X, A; \varphi)$, com $A \neq \emptyset$, em termos da homologia de (X, A) , a menos de extensão de grupos.

No capítulo II provamos que $\Omega_m(X; \varphi)$ é $\mathcal{C}_2$ -isomorfo a $H_m(X; \mathbb{Z})$ para $m \leq 2$ e é $\mathcal{C}_{2,3}$ -isomorfo a $H_3(X; \mathbb{Z})$ para $m = 3$, onde $\mathcal{C}_2$ (resp. $\mathcal{C}_{2,3}$) é a classe de Serre de grupos abelianos cujos elementos têm ordem uma potência de 2 (resp. produtos de potências de 2 e de 3), sendo X um complexo CW com somente um número finito de células em cada dimensão e φ um fibrado virtual orientável sobre X .

Consideremos uma variedade N n -dimensional, conexa e compacta, e o fibrado virtual $\tilde{\varphi}_{n-m} = \varepsilon^{r+(n-m)} - \nu_N^r \times \tilde{\gamma}^{n-m}$ sobre $N \times BSO(n-m)$, onde ν_N é o fibrado normal estável de N , $\tilde{\gamma}^{n-m}$ é o fibrado universal orientável de posto $n-m$ sobre $BSO(n-m)$ e $\varepsilon^{r+(n-m)}$ é fibrado trivial sobre $N \times BSO(n-m)$. O grupo de bordismo normal $\Omega_m(N \times BSO(n-m); \tilde{\varphi}_{n-m})$ é interpretado como o grupo de bordismo das aplicações contínuas orientáveis de variedades m -dimensionais em N que são homotópicas a imersões. Como aplicação dos resultados obtidos até então, apresentamos uma caracterização para o núcleo do homomorfismo de "esquecimento" $\Omega_m(N \times BSO(n-m); \tilde{\varphi}_{n-m}) \rightarrow \Omega_m(N)$ no caso em que $n = 2m - i$, $i \leq 3$, $m \equiv i \pmod{2}$ e N é uma π -variedade. Há também uma versão não orientada desses resultados.

Nosso objetivo no capítulo III é obter um relacionamento entre homotopia regular e bordismo normal. Para uma aplicação contínua $f: M^m \rightarrow N^n$, $m < n$, pretendemos comparar o conjunto $I[M, N]_f$, das classes de homotopia regular de imersões homotópicas a f , com o conjunto $\mathcal{C}_f$, das classes de bordismo normal de aplicações homotópicas a imersões que são bordantes a f . Tal comparação é feita através do conjunto V_f das classes de homotopia de frames de codimensão $n-m$ do fibrado normal estável de f .

Em [12], Li Banghe define uma ação em V_f determinada pelo grupo fundamental da componente por caminhos de N^M que contém f , denotado por $\pi_1(N^M, f)$. O mesmo autor mostra que, para $n \geq m+2$ e $V_f \neq \emptyset$, o conjunto das órbitas dessa ação está em correspondência biunívoca com $I[M, N]_f$ [15].

A fim de estabelecer o relacionamento desejado introduzimos o conceito de bordismo de frames de codimensão $n-m$, obtendo novamente o grupo $\Omega_m(N \times BSO(n-m); \tilde{\varphi}_{n-m})$. Definimos então uma função $\ell_f : V_f \rightarrow \mathcal{C}_f$, a qual se fatora por $\bar{\ell}_f$ ao espaço das órbitas $V_f / \pi_1(N^M, f)$. Apresentamos exemplos onde essa função não é injetora e também onde não é sobrejetora. Obtivemos também resultados sobre a imagem de ℓ_f .

CAPÍTULO I

Preliminares

Nesse capítulo reunimos os conceitos e resultados essenciais para o desenvolvimento desse trabalho.

Nos parágrafos de 1 a 3 apresentamos um estudo sobre bordismo normal, segundo Salomonsen [24], que é nossa referência básica para o assunto. A definição de grupo de bordismo normal (1.9) é introduzida no parágrafo 1 e algumas das propriedades satisfeitas por esses grupos são listadas no parágrafo 2. Para maiores detalhes, além de [24], indicamos também os trabalhos de Dax [5] e Koschorke [10]. No parágrafo 3 temos como principal objetivo a obtenção da sequência exata (3.9) [24, T.6.1], básica para o estudo do grupo de bordismo normal de aplicações homotópicas a imersões (II, § 3).

Na computação dos grupos de bordismo normal em dimensões baixas (II, § 2), utilizamos a técnica de "esquecer" grupos numa determinada classe. Esse processo é formalizado através de um estudo de grupos "módulo uma classe de Serre" de grupos abelianos. Essas noções são introduzidas no parágrafo 4. Como referência indicamos os textos de Hu [8, cap X] e de Spanier [25, cap 9, § 6]. O principal resultado apresentado nesse parágrafo é a generalização do Teorema de Whitehead módulo $\mathcal{C}$, obtida por Biasi e Daciberg, fundamental para os cálculos.

Nesse trabalho as variedades consideradas são diferenciáveis, de classe C^∞ , e as aplicações entre elas são contínuas. Para uma variedade M , denotaremos por τ_M e ν_M os fibrados tangente e normal estável, respectivamente. Para uma variedade M com bordo, o símbolo ∂M indicará o bordo de M .

1. Grupos de bordismo normal com coeficientes num fibrado virtual

1.1 Definição. Seja X um espaço topológico. Um *fibrado virtual* φ sobre X é um par ordenado (ξ_+, ξ_-) de fibrados vetoriais de base X , com postos iguais, e é denotado por $\varphi = \xi_+ - \xi_-$.

Descrevemos a seguir algumas construções envolvendo fibrados virtuais.

1.2 Sejam $\varphi = \xi_+ - \xi_-$, $\psi = \zeta_+ - \zeta_-$ fibrados virtuais sobre X .

Os fibrados virtuais $-\varphi$ e $\varphi + \psi$ sobre X são dados por

$$-\varphi = \xi_- - \xi_+ \text{ e } \varphi + \psi = \xi_+ \oplus \zeta_+ - \xi_- \oplus \zeta_-.$$

Se $\psi = \zeta_+ - \zeta_-$ é fibrado virtual sobre Y , o fibrado virtual $\varphi \times \psi$ sobre $X \times Y$ é dado por

$$\varphi \times \psi = \xi_+ \times \zeta_+ - \xi_- \times \zeta_-.$$

Se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, o fibrado virtual induzido $f^*\varphi$ sobre Y é dado por

$$f^*\varphi = f^*\xi_+ - f^*\xi_-.$$

Se f é uma inclusão ou uma projeção fibrada, $f^*\varphi$ é denotado simplesmente por φ .

Se ξ^k é um fibrado vetorial de posto k sobre X , os fibrados virtuais 0_ξ e ξ^0 sobre X são dados por $0_\xi = \xi^k - \xi^k$ e $\xi^0 = \xi^k - \varepsilon^k$, onde ε^k é o fibrado trivial de posto k sobre X . O fibrado virtual $\varepsilon^k - \varepsilon^k$ é denotado por 0^k .

Seja (X, A) um par de espaços topológicos e seja $\varphi = \xi_+^k - \xi_-^k$ um fibrado virtual sobre X .

1.3 Definição. Uma φ -variedade sobre (X, A) de dimensão m é uma terna $\mathcal{M} = (M, f, F)$, onde M é uma variedade m -dimensional compacta com bordo ∂M ,

$f:(M, \partial M) \rightarrow (X, A)$ é uma aplicação de pares e $F: \tau_M \oplus f^*\xi_- \sim \varepsilon^m \oplus f^*\xi_+$ é um isomorfismo estável de fibrados. (Isso significa que F é uma classe de equivalência de isomorfismos de fibrados $F': \tau_M \oplus f^*\xi_- \oplus \varepsilon^N \cong \varepsilon^m \oplus f^*\xi_+ \oplus \varepsilon^N$, onde a relação de equivalência é gerada por

$$(i) F' \sim F' \times 1_{\varepsilon^N},$$

(ii) $F' \sim F''$ se F' é homotópico a F'' através de isomorfismos de fibrados).

1.4 Observação. Para $k \geq 2$ existe uma bijeção entre o conjunto de isomorfismos estáveis de fibrados do tipo $\tau_M \oplus f^*\xi_- \sim \varepsilon^m \oplus f^*\xi_+$ e o conjunto de classes de homotopia de isomorfismos.

Seja M^m uma variedade com bordo ∂M . Usando o Teorema do Colarinho, estabelecemos

1.5 Definição. O bordo da φ -variedade $\mathcal{M} = (M, f, F)$ sobre (X, A) é a φ -variedade $\partial \mathcal{M} = (\partial M, f|_{\partial M}, \partial F)$ sobre $A = (A, \emptyset)$, onde

$$\partial F: \tau_{\partial M} \oplus f^*\xi_- \sim \varepsilon^{m-1} \oplus f^*\xi_+$$

é um isomorfismo estável de fibrados tal que a composição $\varepsilon^1 \oplus \tau_{\partial M} \oplus f^*\xi_- = \tau_{\partial M} \oplus \varepsilon^1 \oplus f^*\xi_- \cong \tau_{M|_{\partial M}} \oplus f^*\xi_- \underset{F}{\sim} \varepsilon^m \oplus f^*\xi_+ = \varepsilon^1 \oplus (\varepsilon^{m-1} \oplus f^*\xi_+)$ é equivalente a $(-1)^m \times \partial F$.

Introduzimos a seguir alguns conceitos e construções envolvendo φ -variedades.

1.6 Sejam φ , fibrado virtual sobre X ; $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ aplicação de pares e $\mathcal{M} = (M, f, F)$ $g^*\varphi$ -variedade sobre (Y, B) .

A φ -variedade $g^*\mathcal{M}$ sobre (X, A) é dada por $g^*\mathcal{M} = (M, g \circ f, F)$.

1.7 Sejam $\mathcal{M}=(M,f,F)$, $\mathcal{N}=(N,g,G)$ φ -variedades sobre (X,A) de mesma dimensão. Então,

$$-\mathcal{M}=(M,f,-F), \text{ onde } -F=F \times (-1): \tau_M \oplus f^*\xi_- \oplus \varepsilon^1 \sim \varepsilon^m \oplus f^*\xi_+ \oplus \varepsilon^1 \text{ e}$$

$\mathcal{M} + \mathcal{N}=(M \cup N, f \cup g, F \cup G)$ é dada pela união disjunta. $\mathcal{M} + (-\mathcal{N})$ é denotada por $\mathcal{M} - \mathcal{N}$.

A variedade vazia define uma φ -variedade $\emptyset=(\emptyset,\emptyset,\emptyset)$.

Se $\partial \mathcal{M} = -\partial \mathcal{N}$, pela identificação dos bordos,

$\mathcal{M} \cup \mathcal{N}=(M \cup N, f \cup g, F \cup G)$ é uma φ -variedade sobre $(X,\emptyset)$, com $\partial (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = \emptyset$.

Vamos introduzir uma relação de equivalência entre φ -variedades sobre (X,A) como segue:

1.8 Definição. Uma φ -variedade $\mathcal{M}$ sobre (X,A) é *bordante a zero*, $\mathcal{M} \sim \emptyset$, se existe uma φ -variedade $\mathcal{U}$ sobre (A,A) com $\partial \mathcal{U} = -\partial \mathcal{M}$ e uma φ -variedade $\mathcal{W}$ sobre (X,X) tais que $\partial \mathcal{W} = \mathcal{M} \cup \mathcal{U}$.

Duas φ -variedades de mesma dimensão $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ sobre (X,A) são *bordantes*, $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$, se $\mathcal{M} - \mathcal{N} \sim \emptyset$.

A classe de equivalência da φ -variedade $\mathcal{M}$ sobre (X,A) é denominada *classe de bordismo normal de $\mathcal{M}$* e é denotada por $[\mathcal{M}]$.

1.9 Definição. O conjunto de classes de bordismo de φ -variedades de dimensão m sobre (X,A) , com a estrutura de grupo dada pela união disjunta, é chamado *m-ésimo*

grupo de bordismo normal de (X, A) com coeficientes em φ e é denotado por $\Omega_m(X, A; \varphi)$.

Mais explicitamente, $\Omega_m(X, A; \varphi)$ tem estrutura de grupo abeliano dada por:

$$[\mathcal{M}] + [\mathcal{N}] = [\mathcal{M} + \mathcal{N}]; -[\mathcal{M}] = [-\mathcal{M}] \text{ e } 0 = [\emptyset].$$

1.10 Observação. Vamos analisar com mais detalhes a definição (1.8) no caso em que $A = \emptyset$, que será usado com maior frequência nesse trabalho: duas φ -variedades $\mathcal{M}_1 = (M_1, f_1, F_1)$, $\mathcal{M}_2 = (M_2, f_2, F_2)$ sobre X são bordantes se existe uma φ -variedade $\mathcal{W} = (W, g, G)$ sobre (X, X) tal que $\partial \mathcal{W} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$, ou seja, $\partial W = M_1 \cup M_2$, $g|_{F_W} = f_1 \cup f_2$ e $G|_{F_W} = F_1 \cup (-F_2)$. Essa última igualdade significa que $\tau_{W|_{\partial W}}$ é identificado com $\tau_{\partial W} \oplus \varepsilon^1$ através de um campo normal a $\tau_{\partial W}$ que aponta para dentro ao longo de M_1 e para fora ao longo de M_2 .

Nesse caso, $\Omega_m(X; \varphi)$ é o grupo de bordismo de m -variedades singulares em X , munidas de uma descrição de seus fibrados tangentes estáveis (ou normais) em termos de φ . Tais grupos também foram estudados por Dax [5] e Koschorke [10], que adotam uma convenção de sinal oposta para φ .

Destacamos a seguir duas funções que são naturalmente definidas entre grupos de bordismo normal e que são homomorfismos.

1.11 Definição. Seja $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ uma aplicação de pares. O homomorfismo induzido por g

$$g_*: \Omega_m(Y, B; g^* \varphi) \rightarrow \Omega_m(X, A; \varphi)$$

é dado por

$$g_*([\mathcal{M}]) = [g^* \mathcal{M}].$$

1.12 Definição. O homomorfismo bordo

$$\partial : \Omega_m(X, A; \varphi) \rightarrow \Omega_{m-1}(A; \varphi)$$

é dado por

$$\partial ([\mathcal{M}]) = [\partial \mathcal{M}].$$

2. Resultados Básicos

Apresentamos a seguir algumas propriedades que são satisfeitas pelos grupos de bordismo normal, definidos no parágrafo 1, e que serão fundamentais ao desenvolvimento desse trabalho.

Seja $\varphi = \zeta_+^p - \zeta_-^p$ um fibrado virtual sobre o espaço X .

2.1 Sequência exata do par (X, A)

Sejam $i : A \rightarrow X$, $j : X \rightarrow (X, A)$ as inclusões naturais de pares, onde $A = (A, \emptyset)$ e $X = (X, \emptyset)$.

Então, existe uma sequência exata longa

$$\dots \rightarrow \Omega_m(A; \varphi) \xrightarrow{i_*} \Omega_m(X; \varphi) \xrightarrow{j_*} \Omega_m(X, A; \varphi) \xrightarrow{\partial} \Omega_{m-1}(A; \varphi) \rightarrow \dots$$

2.2 Invariança por homotopia

Seja H uma homotopia entre as aplicações de pares $f, g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$.

Então, existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_m(Y, B; f^* \varphi) & \xrightarrow{\theta_H} & \Omega_m(Y, B; g^* \varphi) \\ f_* \searrow & & \swarrow g_* \\ & \Omega_m(X, A; \varphi) & \end{array}$$

onde θ_H é um isomorfismo definido através do isomorfismo $f^* \varphi \cong g^* \varphi$ determinado por H . □

2.3 Seja ξ um fibrado vetorial sobre X . Então, existem isomorfismos

$$\begin{aligned} \Omega_m(X, A; \varphi) &\cong \Omega_m(X, A; \varphi + 0_\xi) \\ \text{e} \quad \Omega_m(X, A; \varphi) &\cong \Omega_m(X, A; 0_\xi + \varphi) \end{aligned}$$

dados por

$$\begin{aligned} [M, f, F] &\mapsto [M, f, F \times 1_{f^*\xi}] \\ \text{e} \quad [M, f, F] &\mapsto [M, f, 1_{f^*\xi} \times F], \end{aligned}$$

respectivamente. □

2.4 Construção de Pontryagin-Thom

Se existe um fibrado vetorial ξ^k sobre X tal que $\zeta_+^p \oplus \xi^k$ é um fibrado trivial de posto $r = p + k$, então, por (2.3), $\Omega_m(X, A; \varphi) \cong \Omega_m(X, A; -(\eta^r)^0)$, onde $\eta^r = \zeta_+^p \oplus \xi^k$.

Nesse caso, a construção de Pontryagin-Thom estabelece um isomorfismo canônico

$$\Omega_m(X, A; \varphi) \cong \pi_{m+r}^s(T(\eta), T(\eta|_A))$$

onde s indica homotopia estável e $T(\eta)$ denota o espaço de Thom de η [3, §11].

Uma demonstração desse resultado é dada por Dax em [5, §2]. □

2.5 Se X é um complexo CW qualquer, então a inclusão do $(m+1)$ -esqueleto X^{m+1} em X induz um isomorfismo entre $\Omega_m(X^{m+1}; \varphi|_{X^{m+1}})$ e $\Omega_m(X; \varphi)$.

2.6 Seja X um complexo CW com somente um número finito de células em cada dimensão. Então, $\Omega_m(X; \varphi)$ é um grupo abeliano finitamente gerado.

Demonstração. Pela hipótese, X^{m+1} é compacto; então, existe um fibrado vetorial ξ^k sobre X^{m+1} tal que $\zeta_+^p \oplus \xi^k$ é trivial [22, p.71]. Assim, sendo $\eta' = \zeta_-^p \oplus \xi^k$, temos por (2.4) e (2.5) que

$$\Omega_m(X; \varphi) \cong \pi_{m+r}^s(T(\eta)),$$

que é um grupo finitamente gerado, visto que $T(\eta)$ é um complexo CW simplesmente conexo finito. □

2.7 Exemplo.

Seja X um complexo CW conexo por caminhos, com somente um número finito de células em cada dimensão. Então,

$$\Omega_0(X; \varphi) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } w_1(\varphi) = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } w_1(\varphi) \neq 0 \end{cases}$$

Demonstração. De forma análoga à demonstração de (2.6), temos que $\Omega_0(X; \varphi) \cong \pi_r^s(T(\eta))$, onde η' é tal que $\varphi|_{X^m} \cong \text{trivial} - \eta'$, $m \geq 1$. Sendo $T(\eta)$ um espaço $(r-1)$ -conexo, $\pi_r^s(T(\eta)) \cong H_r(T(\eta); \mathbb{Z})$ [28, XII (3.10)].

O resultado segue então pelo Teorema do Isomorfismo de Thom-Gysin [5, § 5]. □

Nota. Se $\varphi = \zeta_+^p - \zeta_-^p$ é um fibrado virtual sobre o espaço X , o *fibrado orientação* de φ é dado por $\xi_\varphi = \wedge^p \zeta_+^p \otimes \wedge^p \zeta_-^p$, onde $\wedge^p$ denota a p -ésima potência exterior [10, 6.5].

Definimos $w_1(\varphi) = w_1(\zeta_+) + w_1(\zeta_-)$, onde $w_1(\eta)$ é a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado vetorial η .

Então, $w_1(\varphi) = 0$ se, e somente se, o fibrado orientação ξ_φ é trivial sobre X . Nesse caso, dizemos que φ é *orientável*; caso contrário, *não orientável*.

3. Dimensão geométrica

Seja $\psi = \zeta_+^p - \zeta_-^p$ um fibrado virtual sobre um espaço X .

3.1 Definição. Uma k -redução de ψ é um par (μ^k, G) , onde μ^k é um fibrado vetorial sobre X e

$$G: \mu^k \oplus \zeta_- \sim \varepsilon^k \oplus \zeta_+$$

é um isomorfismo estável de fibrados.

A dimensão geométrica de ψ é $\leq k$ se, e somente se, ψ possui uma k -redução. Denota-se por $gdim \psi \leq k$.

Observamos que se ξ^p é um fibrado vetorial sobre X , então o conceito de $gdim \xi$ como fibrado vetorial coincide com $gdim \xi^0$, onde $\xi^0 = \xi^p - \varepsilon^p$ é fibrado virtual sobre X .

3.2 Exemplo. Sejam M^m, N^n variedades, $f: M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação contínua, com $m < n$. Em [7, T.5.7] Hirsch prova o seguinte

Teorema. $f: M^m \rightarrow N^n$ é homotópica a uma imersão se, e somente se, existe um fibrado vetorial ξ^{n-m} de base M tal que $f^* \tau_N \cong \xi^{n-m} \oplus \tau_M$. Nesse caso, existe uma imersão $g: M^m \rightarrow N^n$ tal que $\nu_g \cong \xi^{n-m}$.

Consideremos o fibrado virtual ψ sobre M dado por $\psi = f^* \tau_N - \varepsilon^{n-m} \oplus \tau_M$. Pela definição, temos que $gdim \psi \leq n - m$ se, e somente se, existe um fibrado vetorial μ^{n-m} sobre M tal que $\mu^{n-m} \oplus \varepsilon^{n-m} \oplus \tau_M \sim \varepsilon^{n-m} \oplus f^* \tau_N$ é um isomorfismo estável de fibrados. Ou ainda, $\mu^{n-m} \oplus \varepsilon^{n-m} \oplus \tau_M \oplus \varepsilon' \cong \varepsilon^{n-m} \oplus f^* \tau_N \oplus \varepsilon'$, para algum inteiro $t > 0$, o que equivale a $f^* \tau_N \cong \mu^{n-m} \oplus \tau_M$, pois $m < n$ [9, 8(1.5)]. Pelo Teorema de Hirsch, esse isomorfismo existe se, e somente se, f é homotópica a uma imersão.

A fim de estudar quando um fibrado virtual $\psi = \zeta_+^p - \zeta_-^p$ sobre um espaço X possui k -reduções, Salomonsen introduz em [24, § 6] um fibrado $\tilde{V}_k(\psi) \xrightarrow{\pi} X$ cuja construção descrevemos a seguir.

Vamos construir primeiramente um fibrado $V_k(\psi)$ de base X do seguinte modo:

Seja $\Omega = Iso(\varepsilon^k \oplus \zeta_-^p, \varepsilon^k \oplus \zeta_+^p) \rightarrow X$ o fibrado cuja fibra em $x \in X$ consiste de todos os isomorfismos lineares $\mathbb{R}^k \oplus (\zeta_-)_x \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus (\zeta_+)_x$. Esse fibrado tem então o grupo $GL(k+p)$ como fibra.

Consideremos a ação à direita do grupo $GL(k)$ em Ω dada por: se $f \in \Omega$ e $T \in GL(k)$, então $f * T$ é definida na fibra sobre $x \in X$ pela composição

$$\mathbb{R}^k \oplus (\zeta_-)_x \xrightarrow{T \times \text{id}_{(\zeta_-)_x}} \mathbb{R}^k \oplus (\zeta_-)_x \xrightarrow{f_x} \mathbb{R}^k \oplus (\zeta_+)_x,$$

ou seja, $f * T = f \circ (T \times 1_{\zeta_-}) \in \Omega$. Observamos que essa ação é livre.

Definimos então o fibrado $V_k(\psi) = \frac{\Omega}{GL(k)} \xrightarrow{\pi} X$, que tem a variedade de Stiefel $V_p(\mathbb{R}^{k+p})$ como fibra, a menos de homotopia, que é $(k-1)$ -conexa.

Analogamente, para cada inteiro positivo t , podemos considerar o fibrado virtual $\psi + 0'$ e construir o fibrado $V_k(\psi + 0') \xrightarrow{\pi} X$, com fibra $V_{p+t}(\mathbb{R}^{k+p+t})$, a menos de homotopia, que também é $(k-1)$ -conexa.

Existe uma inclusão $V_k(\psi) \rightarrow V_k(\psi + 0')$ dada por $f \in GL(k) \mapsto (f \times 1_{\mathbb{R}}) \in GL(k+p+t)$, cobrindo a identidade de X . Portanto, existe uma sequência de inclusões

$$V_k(\psi) \rightarrow V_k(\psi + 0') \rightarrow \dots \rightarrow V_k(\psi + 0') \rightarrow \dots$$

cobrindo a identidade de X . Assim, fica bem definido o fibrado

3.3 $\tilde{V}_k(\psi) = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_k(\psi + 0^i) \xrightarrow{\pi} X$, com projeção induzida π e $\tilde{V}_k = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_{p+i}(\mathbb{R}^{k+p+i})$ como fibra, também $(k-1)$ -conexa.

3.4 Uma vez que $GL(k)$ atua livremente em Ω e efetivamente em $\mathbb{R}^k$, temos que $\frac{\Omega \times \mathbb{R}^k}{GL(k)}$ é o espaço total de um fibrado sobre $V_k(\psi) = \frac{\Omega}{GL(k)}$, que tem fibra $\mathbb{R}^k$.

Esse k -fibrado vetorial será denotado por μ^k .

Para cada inteiro $i > 0$ podemos construir um k -fibrado vetorial sobre $V_k(\psi + 0^i)$ como acima, havendo compatibilidade entre eles. Dessa forma fica induzido um k -fibrado vetorial sobre $\tilde{V}_k(\psi)$, também denotado por μ^k .

3.5 Observação. Existe um isomorfismo canônico $\sigma : \mu^k \oplus \pi^* \zeta_- \rightarrow \varepsilon^k \oplus \pi^* \zeta_+$, onde π é a projeção do fibrado $V_k(\psi) \rightarrow X$. Basta considerar $\sigma([f, u], v) = f(u, v)$. Isso mostra que (σ, μ^k) é uma k -redução de $\pi^* \psi$.

Por outro lado, suponhamos que o fibrado $V_k(\psi) \rightarrow X$ possua uma seção s . Então, a partir de σ , s induz o isomorfismo $s^* \mu^k \oplus \zeta_- \cong \varepsilon^k \oplus \zeta_+$, que fornece uma k -redução para ψ .

A técnica apresentada acima estabelece uma bijeção entre classes de homotopia de seções do fibrado $V_k(\psi) \xrightarrow{\pi} X$ e classes de equivalência (σ^k, g) , onde σ^k é um k -fibrado vetorial sobre X e $g : \sigma^k \oplus \zeta_- \cong \varepsilon^k \oplus \zeta_+$ é uma classe de homotopia de isomorfismos. A equivalência é dada por :

$$(\sigma_1^k, g_1) \sim (\sigma_2^k, g_2) \Leftrightarrow \text{existe um isomorfismo } \theta : \sigma_1 \cong \sigma_2 \text{ tal que } g_1 = g_2 \circ (\theta \times 1_{\zeta_-}).$$

3.6 Notação. Seja φ um fibrado virtual sobre o espaço X . Denotamos por $\Omega_m(X, \tilde{V}_k(\psi); \varphi)$ o grupo constituído pelas classes de bordismo normal de ternas (M^m, f, F) que tornam o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \partial M & \xrightarrow{f_\partial} & \tilde{V}_k(\psi) \\ \downarrow i & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

comutativo, ou seja, $f|_{\partial M}$ se levanta a $\tilde{V}_k(\psi)$ por f_∂ .

O seguinte resultado é válido:

3.7 Teorema. O homomorfismo induzido pela projeção $\pi : \tilde{V}_k(\psi) \rightarrow X$ mergulha na sequência exata longa

$$\dots \rightarrow \Omega_m(\tilde{V}_k(\psi); \varphi) \xrightarrow{\pi_*} \Omega_m(X; \varphi) \rightarrow \Omega_m(X, \tilde{V}_k(\psi); \varphi) \rightarrow \Omega_{m-1}(\tilde{V}_k(\psi); \varphi) \rightarrow \dots$$

Demonstração. Seja T_π o cone da projeção $\pi : \tilde{V}_k(\psi) \rightarrow X$. Lembramos que existe uma inclusão $i : \tilde{V}_k(\psi) \rightarrow T_\pi$ e uma projeção $r : T_\pi \rightarrow X$ tais que $r \circ i = \pi$. Além disso, r é uma equivalência de homotopia. Temos também que o homomorfismo r_* , induzido por r , estabelece um isomorfismo entre $\Omega_m(T_\pi, \tilde{V}_k(\psi); \varphi)$ e $\Omega_m(X, \tilde{V}_k(\psi); \varphi)$, para qualquer fibrado virtual φ sobre X .

Então, a partir da sequência exata longa de bordismo normal do par $(T_\pi, \tilde{V}_k(\psi))$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \Omega_m(\tilde{V}_k(\psi); \varphi) & \xrightarrow{i_*} & \Omega_m(T_\pi; \varphi) & \xrightarrow{j_*} & \Omega_m(T_\pi, \tilde{V}_k(\psi); \varphi) \xrightarrow{\partial} \Omega_{m-1}(\tilde{V}_k(\psi); \varphi) \rightarrow \dots \\ & & \searrow \pi_* & & \downarrow \cong \downarrow r_* & & \downarrow \cong \downarrow r_* \\ & & & & \Omega_m(X; \varphi) & \xrightarrow{r_* j_* r_*^{-1}} & \Omega_m(X, \tilde{V}_k(\psi); \varphi) \nearrow \partial r_*^{-1} \end{array}$$

se obtém a sequência exata longa desejada. $\square$

3.8 Observação. Salomonsen define em [24 , § 7] um homomorfismo

$$\Psi : \Omega_m(X, \tilde{V}_k(\psi); \varphi) \rightarrow \Omega_{m-k-1}(X \times BO(1); -k\lambda^0 - \psi \otimes \lambda + \varphi),$$

onde λ é o fibrado de retas canônico sobre o espaço projetivo real $BO(1)$ e $\psi \otimes \lambda = \zeta_+ \otimes \lambda - \zeta_- \otimes \lambda$. Prova também que Ψ é um isomorfismo para $m \leq 2k+1$ e um epimorfismo para $m = 2k+2$ [24, T.7.4].

A substituição através de Ψ na sequência exata longa obtida no Teorema (3.7), fornece o seguinte

3.9 Teorema. [24, T.6.1] Existe uma sequência exata

$$\Omega_{2k+1}(\tilde{V}_k(\psi); \varphi) \xrightarrow{\pi_*} \Omega_{2k+1}(X; \varphi) \xrightarrow{\gamma_k} \Omega_k(X \times BO(1); \Gamma_k) \xrightarrow{w_k} \Omega_{2k}(\tilde{V}_k(\psi); \varphi) \rightarrow \dots$$

onde $\Gamma_k = -k\lambda^0 - \psi \otimes \lambda + \varphi$.

4. Uma generalização do Teorema de Whitehead módulo $\mathcal{C}$

Apresentamos inicialmente os conceitos e resultados necessários para o estudo de grupos módulo uma determinada classe.

4.1 Definição. Uma *classe de Serre* é uma coleção não vazia $\mathcal{C}$ de grupos abelianos que verifica o seguinte axioma: se na sequência exata $A \rightarrow B \rightarrow C$, os grupos A , C pertencem a $\mathcal{C}$, então B pertence a $\mathcal{C}$.

Equivalentemente, prova-se que

4.2 Teorema. Uma coleção $\mathcal{C}$ de grupos abelianos é uma classe de Serre se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $\mathcal{C}$ contém o grupo trivial.
- (b) Se $A \in \mathcal{C}$ e $A' \cong A$, então $A' \in \mathcal{C}$.
- (c) Se $A \subset B$ e $B \in \mathcal{C}$, então $A \in \mathcal{C}$.
- (d) Se $A \subset B$ e $B \in \mathcal{C}$, então $B/A \in \mathcal{C}$.
- (e) Se $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta, com $A, C \in \mathcal{C}$, então $B \in \mathcal{C}$.

Observemos que os itens (a) e (b) do Teorema (4.2) mostram que uma classe de Serre não forma um conjunto.

4.3 Listamos a seguir alguns exemplos de classes de Serre:

- (1) A classe $\mathcal{A}$ de todos os grupos abelianos.
- (2) A classe $\mathcal{O}$ do grupo trivial.
- (3) A classe $\mathcal{A}_f$ dos grupos abelianos finitamente gerados.
- (4) A classe $\mathcal{F}$ dos grupos abelianos finitos.
- (5) A classe $\mathcal{T}$ dos grupos abelianos de torção.
- (6) A classe $\mathcal{C}_F$ dos grupos de torção com componentes p -primárias nulas para cada primo p pertencente a uma família F de números primos dada.

Dada uma classe de Serre $\mathcal{C}$, estamos interessados em calcular módulo grupos em $\mathcal{C}$. Introduzimos então a seguinte terminologia:

Um homomorfismo $h : A \rightarrow B$ é chamado um $\mathcal{C}$ -monomorfismo (resp. $\mathcal{C}$ -epimorfismo) se $\ker h \in \mathcal{C}$ (resp. $\text{coker } h \in \mathcal{C}$). Se ambas as condições são satisfeitas, h é chamado um $\mathcal{C}$ -isomorfismo.

Se existe um $\mathcal{C}$ -isomorfismo $h : A \rightarrow B$, então A é dito $\mathcal{C}$ -isomorfo a B e denota-se por $A \overset{\mathcal{C}}{\cong} B$.

Observemos que se $\mathcal{C}$ é a classe $\mathcal{O}$, essas noções coincidem com as correspondentes noções clássicas. Além disso, para uma classe de Serre arbitrária $\mathcal{C}$, essas noções têm as mesmas propriedades formais das noções clássicas [8, X (exerc. B)].

A fim de provar os teoremas de isomorfismo de Hurewicz e de Whitehead módulo $\mathcal{C}$ (Ver enunciado a seguir), precisamos que as classes de Serre satisfaçam propriedades adicionais. Nesse sentido, introduzimos os seguintes conceitos:

Uma classe de Serre $\mathcal{C}$ é chamada

- (1) *anel de grupos abelianos*: se $A, B \in \mathcal{C}$, então $A \otimes B, \text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$.
- (2) *ideal de grupos abelianos*: se $A \in \mathcal{C}$, então $A \otimes B, \text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$, para B arbitrário.
- (3) *classe acíclica*: se $\pi \in \mathcal{C}$, então $H_q(\pi) \in \mathcal{C}$, para $q > 0$.

As classes dos exemplos 1, 2, 5 e 6 são ideais de grupos abelianos, enquanto as classes dos exemplos 3 e 4 são anéis de grupos abelianos que não são ideais de grupos abelianos. Todas essas classes são acíclicas.

Usaremos a notação $H_q(X)$ para indicar o q -ésimo grupo de homologia singular do espaço X com coeficientes inteiros.

4.4 Teorema (do isomorfismo de Hurewicz módulo $\mathcal{C}$ absoluto) [25; 9, § 6-15].

Seja $\mathcal{C}$ um anel acíclico de grupos abelianos e seja X um espaço simplesmente conexo. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ para $2 \leq i < n$.
- (ii) $H_i(X) \in \mathcal{C}$ para $2 \leq i < n$.

Além disso, qualquer uma delas implica que o homomorfismo de Hurewicz $\mathcal{H}_i : \pi_i(X) \rightarrow H_i(X)$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo para $i \leq n$.

4.5 Teorema (do isomorfismo de Hurewicz módulo $\mathcal{C}$ relativo) [25; 9, §6-21].

Seja $\mathcal{C}$ um ideal acíclico de grupos abelianos. Seja A subespaço de X , com A e X simplesmente conexos. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\pi_i(X, A) \in \mathcal{C}$ para $2 \leq i < n$.

(ii) $H_i(X, A) \in \mathcal{C}$ para $2 \leq i < n$.

Além disso, qualquer uma delas implica que o homomorfismo de Hurewicz $\mathcal{H}_n : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo.

4.6 Teorema (Whitehead módulo $\mathcal{C}$) [25; 9, §6-22].

Seja $\mathcal{C}$ um ideal acíclico de grupos abelianos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços simplesmente conexos.

Para $n \geq 1$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f_\# : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo para $i \leq n$ e é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo para $i = n+1$.

(ii) $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo para $i \leq n$ e é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo para $i = n+1$.

O teorema seguinte generaliza o Teorema de Whitehead módulo $\mathcal{C}$.

4.7 Teorema. Seja $\mathcal{C}$ um ideal acíclico de grupos abelianos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços simplesmente conexos. Para $n \geq 1$ as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $f_\# : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ é $\mathcal{C}$ - isomorfismo para $i \leq n$.

(ii) $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ é $\mathcal{C}$ - isomorfismo para $i \leq n$ e o homomorfismo $f_* \oplus \mathcal{H}_{n+1}^Y : H_{n+1}(X) \oplus \pi_{n+1}(Y) \rightarrow H_{n+1}(Y)$, definido por $f_* \oplus \mathcal{H}_{n+1}^Y(a, b) = f_*(a) + \mathcal{H}_{n+1}^Y(b)$, é $\mathcal{C}$ - epimorfismo, onde $\mathcal{H}_{n+1}^Y$ é homomorfismo de Hurewicz.

Demonstração. A menos de uma equivalência de homotopia, podemos identificar Y com o cilindro da aplicação f e f com a inclusão $i : X \rightarrow Y$. Consideremos

o diagrama comutativo abaixo, onde as linhas são dadas pelas sequências exatas do par (Y, X) em homotopia e homologia, respectivamente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots \rightarrow \pi_{n+1}(X) & \xrightarrow{(i_{n+1})_*} & \pi_{n+1}(Y) & \xrightarrow{(j_{n+1})_*} & \pi_{n+1}(Y, X) & \xrightarrow{(\partial_{n+1})_*} & \pi_n(X) & \xrightarrow{(i_n)_*} & \pi_n(Y) \rightarrow \dots \\
 \downarrow \mathcal{H}_{n+1}^X & & \downarrow \mathcal{H}_{n+1}^Y & & \downarrow \mathcal{H}_{n+1} & & \downarrow \mathcal{H}_n^X & & \downarrow \mathcal{H}_n^Y \\
 \dots \rightarrow H_{n+1}(X) & \xrightarrow{(i_{n+1})_*} & H_{n+1}(Y) & \xrightarrow{(j_{n+1})_*} & H_{n+1}(Y, X) & \xrightarrow{(\partial_{n+1})_*} & H_n(X) & \xrightarrow{(i_n)_*} & H_n(Y) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

As flechas verticais são homomorfismos de Hurewicz.

Prova de (i) $\Rightarrow$ (ii)

Usando a hipótese, segue da sequência de homotopia do par (Y, X) que $\pi_i(Y, X) \in \mathcal{C}$ para $i \leq n$. Pelo Teorema de Hurewicz módulo $\mathcal{C}$ relativo, segue que $H_i(Y, X) \in \mathcal{C}$ para $2 \leq i \leq n$ e $\mathcal{H}_{n+1}: \pi_{n+1}(Y, X) \rightarrow H_{n+1}(Y, X)$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo. Então, $\text{coker}(i_k)_* \in \mathcal{C}$ para $k \leq n$ e $\text{ker}(i_k)_* \in \mathcal{C}$ para $k \leq n-1$.

Mostraremos agora que $\text{Ker}(i_n)_* \in \mathcal{C}$.

Seja $h: \text{coker } \mathcal{H}_{n+1} \rightarrow \frac{\text{ker}(i_n)_*}{\mathcal{H}_n^X(\text{ker}(i_n)_*)}$ dada por $h(\bar{a}) = \overline{(\partial_{n+1})_*(a)}$. Prova-se

facilmente que h está bem definida e é um epimorfismo. Como $\text{coker } \mathcal{H}_{n+1} \in \mathcal{C}$, segue que

$\frac{\text{ker}(i_n)_*}{\mathcal{H}_n^X(\text{ker}(i_n)_*)} \in \mathcal{C}$. Mas, $\text{ker}(i_n)_* \in \mathcal{C}$; logo, $\mathcal{H}_n^X(\text{ker}(i_n)_*)$ também pertence a $\mathcal{C}$. Segue

então que $\text{ker}(i_n)_* \in \mathcal{C}$.

Falta provar que $\psi_{n+1} = (i_{n+1})_* \oplus \mathcal{H}_{n+1}^Y: H_{n+1}(X) \oplus \pi_{n+1}(Y) \rightarrow H_{n+1}(Y)$ é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo. Consideremos primeiramente

$$\overline{(j_{n+1})_*}: \frac{H_{n+1}(Y)}{\text{im } \psi_{n+1}} \rightarrow \frac{H_{n+1}(Y, X)}{\text{im } \mathcal{H}_{n+1}}$$

dada por $\overline{(j_{n+1})_*}(\bar{a}) = \overline{(j_{n+1})_*(a)}$. Mostra-se facilmente que $\overline{(j_{n+1})_*}$ está bem definido.

Então, é exata a sequência

$$\ker \overline{(j_{n+1})_*} \xrightarrow{i} \frac{H_{n+1}(Y)}{\operatorname{im} \psi_{n+1}} \xrightarrow{\overline{(j_{n+1})_*}} \frac{H_{n+1}(Y, X)}{\operatorname{im} \mathcal{H}_{n+1}}$$

Como $\mathcal{C}$ é uma classe de Serre e $\mathcal{H}_{n+1}$ é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo, se provarmos que $\ker \overline{(j_{n+1})_*} \in \mathcal{C}$, então o resultado segue. Para tanto, observemos que $\bar{a} \in \ker \overline{(j_{n+1})_*}$ se, e somente se, existe $b \in \pi_{n+1}(Y, X)$ tal que $(j_{n+1})_*(a) = \mathcal{H}_{n+1}(b)$. Seja, então

$$k : \ker \overline{(j_{n+1})_*} \rightarrow \frac{\ker(i_n)_\#}{(\partial_{n+1})_\#(\ker \mathcal{H}_{n+1})}$$

dada por $k(\bar{a}) = \overline{(\partial_{n+1})_\#(b)}$.

(A análise da boa definição de k envolve dois aspectos. Suponhamos que existam $b, b' \in \pi_{n+1}(Y, X)$ tais que

$$(j_{n+1})_*(a) = \mathcal{H}_{n+1}(b) \text{ e } (j_{n+1})_*(a) = \mathcal{H}_{n+1}(b').$$

Então, $b - b' \in \ker \mathcal{H}_{n+1}$; logo, $(\partial_{n+1})_\#(b) - (\partial_{n+1})_\#(b') \in (\partial_{n+1})_\#(\ker \mathcal{H}_{n+1})$.

Por outro lado, se $\bar{a} = \bar{a'}$ e $b, b' \in \pi_{n+1}(Y, X)$ são tais que $(j_{n+1})_*(a) = \mathcal{H}_{n+1}(b)$, $(j_{n+1})_*(a') = \mathcal{H}_{n+1}(b')$ temos $(j_{n+1})_*(a) - (j_{n+1})_*(a') = (j_{n+1})_* \mathcal{H}_{n+1}^\vee(c)$, para algum $c \in \pi_{n+1}(Y)$. Então,

$$\mathcal{H}_{n+1}(b) - \mathcal{H}_{n+1}(b') = (j_{n+1})_* \mathcal{H}_{n+1}^\vee(c) = \mathcal{H}_{n+1}((j_{n+1})_\#(c)).$$

Isso mostra que $b - b' - (j_{n+1})_\#(c) = c'$, com $c' \in \ker \mathcal{H}_{n+1}$. Logo,

$(\partial_{n+1})_\#(b) - (\partial_{n+1})_\#(b') = (\partial_{n+1})_\#(j_{n+1})_\#(c) + (\partial_{n+1})_\#(c') = (\partial_{n+1})_\#(c') \in (\partial_{n+1})_\#(\ker \mathcal{H}_{n+1})$; ou seja, $\overline{(\partial_{n+1})_\#(b)} = \overline{(\partial_{n+1})_\#(b')}$.

Vamos mostrar que k é um monomorfismo.

Então, $0 \rightarrow \ker \overline{(j_{n+1})_*} \xrightarrow{k} \frac{\ker(i_n)_\#}{(\partial_{n+1})_\#(\ker \mathcal{H}_{n+1})}$ será exata, onde 0 e

$\frac{\ker(i_n)_\#}{(\partial_{n+1})_\#(\ker \mathcal{H}_{n+1})} \in \mathcal{C}$. Consequentemente, $\ker \overline{(j_{n+1})_*} \in \mathcal{C}$.

Seja, então, $\bar{a} \in \ker k$. Então, existe $b \in \pi_{n+1}(Y, X)$ tal que $(j_{n+1})_*(a) = \mathcal{H}_{n+1}(b)$ e $(\partial_{n+1})_\#(b) \in (\partial_{n+1})_\#(\ker \mathcal{H}_{n+1})$. Assim, $(\partial_{n+1})_\#(b) = (\partial_{n+1})_\#(b')$, para algum $b' \in \ker \mathcal{H}_{n+1}$. Dessa forma, $b - b' = (j_{n+1})_\#(y)$, para algum $y \in \pi_{n+1}(Y)$. Então, $(j_{n+1})_*(a) = \mathcal{H}_{n+1}(b) = \mathcal{H}_{n+1}(b - b') = \mathcal{H}_{n+1}(j_{n+1})_\#(y) = (j_{n+1})_*\mathcal{H}_{n+1}^Y(y)$. Logo, existe $x \in H_{n+1}(X)$ tal que $a - \mathcal{H}_{n+1}^Y(y) = (i_{n+1})_*(x)$, ou seja, $a = \psi_{n+1}(x, y)$.

Prova de (ii) $\Rightarrow$ (i)

Usando a hipótese, segue da sequência de homologia do par (Y, X) que $H_i(Y, X) \in \mathcal{C}$ para $i \leq n$. Pelo Teorema de Hurewicz módulo $\mathcal{C}$ relativo, segue que $\pi_i(Y, X) \in \mathcal{C}$ para $2 \leq i \leq n$ e $\mathcal{H}_{n+1}: \pi_{n+1}(Y, X) \rightarrow H_{n+1}(Y, X)$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo. Sendo X e Y simplesmente conexos, segue que $\text{coker}(i_k)_\# \in \mathcal{C}$ para $k \leq n$ e $\ker(i_k)_\# \in \mathcal{C}$ para $k \leq n-1$. Portanto, $(i_k)_\#: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo para $k \leq n-1$ e $(i_n)_\#: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo.

Falta provar que $(i_n)_\#$ é um $\mathcal{C}$ -monomorfismo, isto é, que $\ker(i_n)_\# = \text{im}(\partial_{n+1})_\# \cong \frac{\pi_{n+1}(Y, X)}{\ker(\partial_{n+1})_\#} = \frac{\pi_{n+1}(Y, X)}{\text{im}(j_{n+1})_\#} \in \mathcal{C}$.

Observamos inicialmente que $\frac{H_{n+1}(Y, X)}{\text{im}(j_{n+1})_\#} = \frac{H_{n+1}(Y, X)}{\ker(\partial_{n+1})_\#} \cong \text{im}(\partial_{n+1})_* = \ker(i_n)_* \in \mathcal{C}$ e,

portanto, $(j_{n+1})_\#$ é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo. Consequentemente, a composta $(j_{n+1})_* \circ ((i_{n+1})_* \oplus \mathcal{H}_{n+1}^Y)$ é também um $\mathcal{C}$ -epimorfismo, usando a hipótese. Mas, $\text{im}(j_{n+1})_* \circ ((i_{n+1})_* \oplus \mathcal{H}_{n+1}^Y) \subset \text{im}(j_{n+1})_* \circ \mathcal{H}_{n+1}^Y$, assim, é exata a sequência

$$\frac{H_{n+1}(Y, X)}{\text{im}(j_{n+1})_* \circ ((i_{n+1})_* \oplus \mathcal{H}_{n+1}^Y)} \rightarrow \frac{H_{n+1}(Y, X)}{\text{im}(j_{n+1})_* \circ \mathcal{H}_{n+1}^Y} \rightarrow 0,$$

donde segue que $(j_{n+1})_* \circ \mathcal{H}_{n+1}^\gamma$ é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo. Por outro lado, $(j_{n+1})_* \circ \mathcal{H}_{n+1}^\gamma = \mathcal{H}_{n+1} \circ (j_{n+1})_\#$, onde $\mathcal{H}_{n+1}$ é um $\mathcal{C}$ -isomorfismo. Segue então que $(j_{n+1})_\#$ é um $\mathcal{C}$ -epimorfismo, ou seja, $\frac{\pi_{n+1}(Y, X)}{\text{im}(j_{n+1})_\#} \in \mathcal{C}$. Portanto, $\ker(i_n)_\# \in \mathcal{C}$.

□

4.8 Observação. Carlos Biasi e Daciberg Gonçalves provaram o Teorema (4.7) para espaços $\mathcal{C}$ -nilpotentes, onde $\mathcal{C}$ é uma classe generalizada de grupos acíclica (A definição e propriedades dessa classe podem ser encontradas em [6]).

CAPÍTULO II

Grupos de bordismo normal em dimensões baixas

Nesse capítulo calculamos os grupos de bordismo normal com coeficientes num fibrado virtual orientável, em dimensões ≤ 3 , módulo uma conveniente classe de Serre de grupos abelianos (T.2.3). Os Lemas (1.1) e (2.1) são fundamentais nessa computação.

No parágrafo 3 introduzimos um grupo de bordismo normal de aplicações orientáveis homotópicas a imersões, definidas em variedades m -dimensionais fechadas numa variedade n -dimensional fixa N , com $m < n$, que é denotado por $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$. No caso em que N é uma π -variedade, esse grupo é determinado a menos de extensão de grupos, quando $3m < 2n + 1$ (T.3.1). Ainda sob essas hipóteses e como aplicação do cálculo de grupos de bordismo normal, caracterizamos o subgrupo de $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$ constituído pelas aplicações que bordam em $\Omega_m(N)$, quando $n = 2m - i$, $i \leq 3$ e $m \equiv i \pmod{2}$ (T.3.3). Há também uma versão não orientada desses resultados (T.3.8 e T.3.10).

O caso não orientável é estudado no parágrafo 4.

Usaremos a notação $H_q(X)$ para indicar o q -ésimo grupo de homologia singular do espaço X com coeficientes inteiros.

1. Uma sequência exata

Usando a teoria desenvolvida por Salomonsen em [24], em particular os fatos apresentados nos parágrafos 1-3 do capítulo I, obtivemos os resultados que seguem.

Seja X um complexo CW e seja $\tilde{\varphi}_r = \varepsilon^{p+r} - \varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r$ fibrado virtual sobre $X \times BSO(r)$, onde ε^p é o fibrado trivial de posto p sobre X e $\tilde{\gamma}^r$ é o fibrado vetorial orientável universal de posto r sobre $BSO(r)$.

Sob essas hipóteses, temos que

1.1 Lema. Para r suficientemente grande, o m -ésimo grupo de bordismo normal $\Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r)$ é isomorfo ao m -ésimo grupo de bordismo orientado de m -variedades singulares $\Omega_m(X)$, qualquer que seja m .

Demonstração. A construção de Pontryagin-Thom (I.2.4) estabelece um isomorfismo entre $\Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r)$ e $\pi_{m+p+r}^s(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r))$, onde T denota o espaço de Thom. Por outro lado, $T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r)$ é homeomorfo a $T(\varepsilon^p) \wedge MSO(r)$, que por sua vez é homeomorfo a $\sum^p(X/\emptyset) \wedge MSO(r)$, onde $MSO(r) = T(\tilde{\gamma}^r)$, $\sum^p$ indica a p -ésima suspensão e $X/\emptyset$, a união disjunta de X e um ponto. Então,

$$\Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r) \cong \pi_{m+p+r}^s\left(\sum^p(X/\emptyset) \wedge MSO(r)\right) = \pi_{m+r}^s(X/\emptyset \wedge MSO(r)) \cong \Omega_m(X)$$

para r suficientemente grande, conforme [3, §12].

1.2 Observação. Se X é um complexo CW finito para o qual $H_*(X; \mathbb{Z})$ não tem torção, então o resultado do Lema (1.1) é válido para $\tilde{\varphi}_r = \varepsilon^{p+r} - \alpha^p \times \tilde{\gamma}^r$, onde α^p é um fibrado vetorial orientável qualquer sobre X . De fato, pela construção de Pontryagin-Thom (I.2.4),

$$\begin{aligned} \Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r) &\cong \pi_{m+p+r}^s(T(\alpha^p \times \tilde{\gamma}^r)) \cong \\ \pi_{m+p+r}^s(T(\alpha^p) \wedge MSO(r)) &\cong \pi_{m+p+r}^s(T(\alpha^p)/\ast \wedge MSO(r)), \end{aligned}$$

onde $\ast$ é o ponto no infinito do espaço de Thom de α^p . Por outro lado, para r suficientemente grande,

$$\pi_{m+p+r}^s(T(\alpha^p)/\ast \wedge MSO(r)) \cong \Omega_{m+p}(T(\alpha^p), \ast) \cong$$

Temos também que, para r suficientemente grande, $\Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r) \cong \Omega_m(X)$, qualquer que seja m , conforme o Lema (1.1).

Por outro lado, a sequência exata (1.3.9) para $\tilde{\varphi}_r, \tilde{\psi}_r$ é dada por

$$\Omega_{2k+1}(\tilde{V}_k(\tilde{\psi}_r); \tilde{\varphi}_r) \xrightarrow{\pi_*} \Omega_{2k+1}(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r) \xrightarrow{\gamma_{2k+1}} \Omega_k(X \times BSO(r) \times BO(1); \tilde{\Gamma}_k) \xrightarrow{w_{2k}} \Omega_{2k}(\tilde{V}_k(\tilde{\psi}_r); \tilde{\varphi}_r) \longrightarrow \dots$$

onde $\tilde{\Gamma}_k = -k\lambda^0 - \tilde{\psi}_r \otimes \lambda + \tilde{\varphi}_r$.

Portanto, pela substituição nessa sequência de $\Omega_m(\tilde{V}_k(\tilde{\psi}_r); \tilde{\varphi}_r)$ por $\Omega_m(X \times BSO(k); \tilde{\varphi}_k)$ e $\Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r)$ por $\Omega_m(X)$, através dos isomorfismos acima mencionados, obtemos a sequência exata procurada.

□

1.4 Corolário. Para $m < 2k + 1$, o núcleo do homomorfismo de "esquecimento" $\tilde{\mathcal{F}}_m$ é $\mathcal{C}_2$ -isomorfo a $\Omega_{m-k}(X \times BSO(r) \times BO(1); \tilde{\Gamma}_k)$, onde $\mathcal{C}_2$ é a classe de Serre dos grupos abelianos cujos elementos têm ordem uma potência de 2.

Demonstração. Pelo Teorema (1.3), para $m < 2k + 1$, é exata a sequência

$$\dots \rightarrow \Omega_{m+1}(X) \xrightarrow{\gamma_{m+1}} \Omega_{m-k}(X \times BSO(r) \times BO(1); \tilde{\Gamma}_k) \xrightarrow{w_m} \Omega_m(X \times BSO(k); \tilde{\varphi}_k) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}_m} \Omega_m(X) \rightarrow \dots$$

Então, $w_m : \Omega_{m-k}(X \times BSO(r) \times BO(1); \tilde{\Gamma}_k) \rightarrow \text{im } w_m = \ker \tilde{\mathcal{F}}_m$ é um epimorfismo cujo núcleo coincide com a imagem de γ_{m+1} . Conforme [24, 10.2], os elementos que estão na imagem de γ_{m+1} têm ordem uma potência de 2. Portanto, w_m é um $\mathcal{C}_2$ -isomorfismo.

□

Há uma versão não orientada desses resultados se considerarmos o fibrado virtual $\varphi_r = \varepsilon^{p+r} - \varepsilon^p \times \gamma^r$ sobre $X \times BO(r)$, onde γ^r é o fibrado vetorial universal de posto r sobre $BO(r)$.

Nesse caso, temos

1.5 Lema. Para r suficientemente grande, o m -ésimo grupo de bordismo normal $\Omega_m(X \times BO(r); \varphi_r)$ é isomorfo ao m -ésimo grupo de m -variedades singulares $\eta_m(X)$, qualquer que seja m .

Demonstração. Segue análoga à do Lema (1.1), observando que $T(\gamma^r) = MO(r)$ e que $\pi_{m+r}^s(X/\emptyset \wedge MO(r))$ é isomorfo a $\eta_m(X)$, para r suficientemente grande, conforme [3, §16].

□

1.6 Observação. Se X é um complexo CW finito, então o resultado do Lema (1.5) é válido para $\varphi_r = \varepsilon^{p+r} - \alpha^p \times \gamma^r$, onde α^p é um fibrado vetorial qualquer sobre X . A demonstração é análoga à da observação (1.2), lembrando que nesse caso $H_j(X; Z_2) \cong H_{j+p}(T(\alpha^p), *; Z_2)$, pelo Teorema do Isomorfismo de Thom, e que $\eta_m(X) \cong \sum_{j+k=m} H_j(X; Z_2) \otimes \eta_k$, por [3, 17.1].

□

Consideremos os fibrados virtuais $\varphi_r = \varepsilon^{p+r} - \alpha^p \times \gamma^r$, $\psi_r = \gamma^r - \varepsilon^r$ sobre $X \times BO(r)$.

1.7 Teorema. Existe uma sequência exata

$$\Omega_{2k+1}(X \times BO(k); \varphi_k) \xrightarrow{\mathcal{J}_{2k+1}} \eta_{2k+1}(X) \xrightarrow{\gamma_{k+1}} \Omega_{m-k}(X \times BO(r) \times BO(1); \Gamma_k) \xrightarrow{w_{2k}} \Omega_{2k}(X \times BO(k); \varphi_k) \rightarrow \dots$$

para r suficientemente grande, onde $\Gamma_k = -k\lambda^0 - \psi_r \otimes \lambda + \varphi_r$, sendo λ o fibrado de retas canônico sobre $BO(1)$.

$\mathcal{J}_m$ é um homomorfismo de "esquecimento", $m \leq 2k+1$.

Demonstração. Análoga à do Teorema (1.3), usando a sequência (I.3.9) para φ_r, ψ_r e os isomorfismos $\Omega_m(\tilde{V}_k(\psi_r); \varphi_r) \cong \Omega_m(X \times BO(k); \varphi_k)$, obtido através de θ , e $\Omega_m(X \times BO(r); \varphi_r) \cong \eta_m(X)$, dado pelo Lema (1.5).

□

1.8 Corolário. Para $m < 2k + 1$, o núcleo do homomorfismo de "esquecimento" $\mathcal{J}_m$ é $\mathcal{C}_2$ -isomorfo a $\Omega_{m-k}(X \times BO(r) \times BO(1); \Gamma_k)$, onde $\mathcal{C}_2$ é a classe de Serre dos grupos abelianos cujos elementos têm ordem uma potência de 2.

Demonstração. Análoga à do Corolário (1.4).

□

2. Cálculo de grupos de bordismo normal em dimensões baixas

Seja X um complexo CW com somente um número finito de células em cada dimensão e seja η^r um fibrado vetorial estável e orientável sobre X , onde r é suficientemente grande.

Consideremos $g: X \rightarrow BSO(r)$ aplicação classificante de η e $f: X \rightarrow X \times BSO(r)$ definida por $f = (id_X, g)$. Seja $\tilde{\varphi}_r = \varepsilon^{p+r} - \varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r$ fibrado virtual sobre $X \times BSO(r)$. Uma vez que $f^*\tilde{\varphi}_r = -(\varepsilon^p \oplus \eta^r)^0$, a aplicação f induz um homomorfismo

$$f_*: \Omega_m(X; -(\varepsilon^p \oplus \eta^r)^0) \rightarrow \Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r) \text{ para todo } m.$$

Seja $\mathcal{C}_2$ (resp. $\mathcal{C}_{2,3}$) a classe de Serre dos grupos abelianos cujos elementos têm ordens que são potências de 2 (resp. produtos de potências de 2 e de 3).

Sob essas hipóteses, temos que

2.1 Lema. f_* é um $\mathcal{C}_2$ -isomorfismo para $m \leq 2$ e é um $\mathcal{C}_{2,3}$ -isomorfismo para $m = 3$.

Demonstração. Sabe-se que $H_m(BSO(r)) \in \mathcal{C}_2$ para $0 < m \leq 3$ e $r \geq 4$ [1]. Então, usando a fórmula de Künneth, podemos concluir que o homomorfismo

$$f_* : H_m(X) \rightarrow H_m(X \times BSO(r))$$

é um $\mathcal{C}_2$ -isomorfismo para $m \leq 3$. Pelo Teorema do Isomorfismo de Thom segue que

$$Tf_* : H_{m+p+r}(T(\varepsilon^p \oplus \eta^r)) \rightarrow H_{m+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r))$$

é um $\mathcal{C}_2$ -isomorfismo para $m \leq 3$. Em particular, segue que

$$Tf_* \oplus \mathcal{H} : H_{3+p+r}(T(\varepsilon^p \oplus \eta^r)) \oplus \pi_{3+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r)) \rightarrow H_{3+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r))$$

é um $\mathcal{C}_2$ -epimorfismo, onde $\mathcal{H}$ é homomorfismo de Hurewicz.

Vamos provar agora que o homomorfismo

$$Tf_* \oplus \mathcal{H} : H_{4+p+r}(T(\varepsilon^p \oplus \eta^r)) \oplus \pi_{4+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r)) \rightarrow H_{4+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r))$$

é um $\mathcal{C}_{2,3}$ -epimorfismo. É suficiente provar que

$$\mathcal{H} : \pi_{4+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r)) \rightarrow H_{4+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r))$$

é um $\mathcal{C}_{2,3}$ -epimorfismo. Existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_{4+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r)) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & H_{4+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r)) \\ \phi_1 \downarrow & & \uparrow \phi_2 \\ H_4(X) \oplus \pi_{4+r}(MSO(r)) & \xrightarrow{id \oplus \mathcal{H}} & H_4(X) \oplus H_{4+r}(MSO(r)) \end{array}$$

onde ϕ_1 é um isomorfismo e ϕ_2 é um $\mathcal{C}_2$ -isomorfismo obtido pela fórmula de Künneth. Observamos que $H_4(X) \oplus \pi_{4+r}(MSO(r))$ é isomorfo a $H_4(X) \oplus \Omega_4 \cong \Omega_4(X)$. Então, precisamos apenas mostrar que

$$\mathcal{H} : \pi_{4+r}(MSO(r)) \rightarrow H_{4+r}(MSO(r))$$

é um $\mathcal{C}_{2,3}$ -epimorfismo.

Consideremos X como um ponto. Nesse caso, o espaço de Thom de η^r é homeomorfo à esfera S^r e o homomorfismo $Tg_\# : \pi_{m+r}(S^r) \rightarrow \pi_{m+r}(MSO(r))$ é um $\mathcal{C}_2$ -

isomorfismo para $m \leq 2$ e é um $\mathcal{C}_{2,3}$ - isomorfismo para $m = 3$, onde g é aplicação classificante de η . (Observamos que $\pi_{3+r}(S^r) \cong Z_{24}$ se $r \geq 5$). Pelo Teorema (1.4.7) segue que

$$Tg_* : H_{m+r}(S^r) \rightarrow H_{m+r}(MSO(r))$$

é um $\mathcal{C}_2$ - isomorfismo para $m \leq 2$ e é um $\mathcal{C}_{2,3}$ - isomorfismo para $m = 3$, como também

$$Tg_* \oplus \mathcal{H} : H_{4+r}(S^r) \oplus \pi_{4+r}(MSO(r)) \rightarrow H_{4+r}(MSO(r))$$

é um $\mathcal{C}_{2,3}$ - epimorfismo. Sendo $H_{4+r}(S^r) = 0$, temos que Tg_* é o homomorfismo nulo e assim,

$$\mathcal{H} : \pi_{4+r}(MSO(r)) \rightarrow H_{4+r}(MSO(r))$$

é um $\mathcal{C}_{2,3}$ - epimorfismo.

Usando novamente o Teorema (1.4.7), podemos concluir que

$$Tf_{\#} : \pi_{m+p+r}(T(\varepsilon^p \oplus \eta^r)) \rightarrow \pi_{m+p+r}(T(\varepsilon^p \times \tilde{\gamma}^r))$$

é um $\mathcal{C}_2$ - isomorfismo para $m \leq 2$ e é um $\mathcal{C}_{2,3}$ - isomorfismo para $m = 3$. Então, pela construção de Pontryagin-Thom (1.2.4), segue que o homomorfismo induzido por f ,

$$f_* : \Omega_m(X; -(\varepsilon^p \oplus \eta^r)^0) \rightarrow \Omega_m(X \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r)$$

é um $\mathcal{C}_2$ - isomorfismo para $m \leq 2$ e é um $\mathcal{C}_{2,3}$ - isomorfismo para $m = 3$. $\square$

2.2 Observação. Uma vez que para r suficientemente grande $\pi_{4+r}(S^r) = 0$ e $\pi_{4+r}(MSO(r)) \cong \Omega_4 \cong Z$, o homomorfismo $Tg_{\#} : \pi_{4+r}(S^r) \rightarrow \pi_{4+r}(MSO(r))$ na demonstração do Lema (2.1) não pode ser um $\mathcal{C}_{2,3}$ - epimorfismo. Assim, com as técnicas usadas, o resultado obtido é o melhor possível.

O resultado principal desse capítulo é dado pelo

2.3 Teorema. Seja φ um fibrado virtual orientável sobre X , complexo CW com somente um número finito de células em cada dimensão. Então, o grupo de bordismo normal $\Omega_m(X; \varphi)$ é $\mathcal{C}_2$ - isomorfo a $H_m(X)$ para $m \leq 2$ e é $\mathcal{C}_{2,3}$ - isomorfo a $H_3(X)$ para $m = 3$.

Demonstração. Por (I.2.5) temos que

$$\Omega_m(X; \varphi) \cong \Omega_m(X^{m+1}; \varphi|_{X^{m+1}}),$$

onde X^{m+1} denota o $(m+1)$ -esqueleto de X . Como X^{m+1} é compacto, existe um fibrado vetorial η sobre X^{m+1} tal que

$$\Omega_m(X^{m+1}; \varphi|_{X^{m+1}}) \cong \Omega_m(X^{m+1}; -\eta^0).$$

Observamos que nesse caso η é orientável e pode ser tomado com posto r suficientemente grande. Além disso, por (I.2.3),

$$\Omega_m(X^{m+1}; -\eta^0) \cong \Omega_m(X^{m+1}; -(\varepsilon^r \oplus \eta^r)^0).$$

Por outro lado, pelo Lema (1.1),

$$\Omega_m(X^{m+1} \times BSO(r); \tilde{\varphi}_r) \cong \Omega_m(X^{m+1}).$$

Sendo $\Omega_m(X^{m+1}) \cong H_m(X^{m+1})$ para $m \leq 3$ e $H_m(X^{m+1}) \cong H_m(X)$, o resultado segue então pelo Lema (2.1).

□

Nota. A demonstração do Teorema 2.3 mostra que basta ter X complexo CW com um número finito de células em dimensão 4.

2.4 Observação. Para $m = 1$, o Teorema (2.3) pode ser obtido por outra técnica, conforme veremos a seguir. Sendo o espaço de Thom de η , $T(\eta)$, $(r-1)$ -conexo, a seguinte sequência é exata

$$(*) \quad \pi_{r+2}(T(\eta)) \xrightarrow{\mathcal{H}_2} H_{r+2}(T(\eta)) \xrightarrow{b} \frac{\pi_r(T(\eta))}{2\pi_r(T(\eta))} \xrightarrow{a} \pi_{r+1}(T(\eta)) \xrightarrow{\mathcal{H}_1} H_{r+1}(T(\eta)) \rightarrow 0$$

onde $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ são homomorfismos de Hurewicz [28]. Para r suficientemente grande, $\pi_{m+r}(T(\eta))$ é isomorfo a $\Omega_m(X; -\eta^0)$, qualquer que seja m . Por outro lado, sendo η orientável, temos que $\pi_r(T(\eta))$ é isomorfo a Z e $H_{m+r}(T(\eta))$ é isomorfo a $H_m(X)$, qualquer que seja m . Então, a partir de (*), obtemos a sequência exata

$$\Omega_2(X; -\eta^0) \rightarrow H_2(X) \rightarrow Z_2 \rightarrow \Omega_1(X; -\eta^0) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0,$$

donde segue que $\Omega_1(X; -\eta^0)$ é $\mathcal{O}_2$ - isomorfo a $H_1(X)$.

□

3. Aplicações

Seja N uma variedade n -dimensional, conexa e compacta. Consideremos o fibrado virtual $\tilde{\varphi}_k = \varepsilon^{p+k} - \nu_N^p \times \tilde{\gamma}^k$ sobre $N \times BSO(k)$, onde ν_N^p é o fibrado normal estável de N .

Denotaremos por $\tilde{\mathcal{C}}_m(N, k)$ o m -ésimo grupo de bordismo normal de $\tilde{\varphi}_k$ -variedades sobre $N \times BSO(k)$, ou seja, $\tilde{\mathcal{C}}_m(N, k) = \Omega_m(N \times BSO(k); \tilde{\varphi}_k)$.

Seja $\mathcal{M} = (M, (f, g), F)$ representante de um elemento de $\tilde{\mathcal{C}}_m(N, k)$. Então, M é uma variedade m -dimensional fechada, $f: M \rightarrow N$ e $g: M \rightarrow BSO(k)$ são aplicações contínuas, e $F: \tau_M \oplus (f, g)^*(\nu_N^p \times \tilde{\gamma}^k) \sim \varepsilon^m \oplus (f, g)^*(\varepsilon^{p+k})$ é um isomorfismo estável de fibrados (Ver I.1.3).

A partir de F , sendo $m < n$, temos que

$$\tau_M \oplus f^* \nu_N \oplus g^* \tilde{\gamma}^k \sim \varepsilon^m \oplus \varepsilon^{p+k}$$

que é equivalente a

$$\tau_M \oplus \nu_M \oplus f^*(\tau_N \oplus \nu_N) \oplus g^* \tilde{\gamma}^k \sim f^* \tau_N \oplus \nu_M \oplus \varepsilon^{m+p+k}$$

ou ainda,

$$f^* \tau_N \oplus \nu_M \sim g^* \tilde{\gamma}^k$$

o que mostra que o fibrado normal estável de f , v_f , admite uma $SO(k)$ -estrutura.

No caso $k = n - m$, v_f possuir uma $SO(n - m)$ - estrutura equivale a f ser homotópica a uma imersão, conforme Hirsch [7, T.5.7] (Ver I.3.2). Além disso, v_f é orientável (Nesse caso, dizemos que f é orientável). Assim, podemos interpretar $\tilde{\mathcal{C}}_m(N, n - m)$ como o grupo de bordismo normal das aplicações contínuas orientáveis com contradomínio N que são homotópicas a imersões.

Denotaremos $\tilde{\mathcal{C}}_m(N, n - m)$ por $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$.

O resultado seguinte é um caso particular do Teorema (1.3) e determina o grupo $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$ a menos de extensão de grupos.

3.1 Teorema. Seja N uma π -variedade n -dimensional conexa e compacta. Então, para $3m < 2n + 1$, é exata a sequência

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \Omega_{2m-n}(N \times BSO(r) \times BO(1); \tilde{\Gamma}_{n-m}) \xrightarrow{w_n} \tilde{\mathcal{J}}_m(N) \xrightarrow{\tilde{J}_n} \Omega_m(N) \xrightarrow{\gamma_n} \\ \Omega_{2m-n-1}(N \times BSO(r) \times BO(1); \tilde{\Gamma}_{n-m}) \xrightarrow{w_{n-1}} \tilde{\mathcal{C}}_{m-1}(N, n - m) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

para r suficientemente grande, onde $\tilde{\Gamma}_{n-m} = -(n - m)\lambda^0 - \tilde{\psi}_r \otimes \lambda + \tilde{\phi}_r$, com $\tilde{\phi}_r = \varepsilon^{p+r} - v_N^p \times \tilde{\gamma}^r$, $\tilde{\psi}_r = \tilde{\gamma}^r - \varepsilon^r$ fibrados virtuais sobre $N \times BSO(r)$, λ fibrado de retas canônico sobre $BO(1)$.

Demonstração. É imediata a partir do Teorema (1.3), lembrando que v_N é trivial. $\square$

Observamos que, nas hipóteses do Teorema (3.1), o núcleo do homomorfismo de "esquecimento" $\tilde{\mathcal{J}}_m$ é o grupo das classes de bordismo normal de aplicações contínuas orientáveis com contradomínio N que são homotópicas a imersões e que bordam em $\Omega_m(N)$. Nesse caso, temos que

3.2 Corolário. $\ker \tilde{\mathcal{F}}_m^{\mathcal{O}_2} \cong \Omega_{2m-n}(N \times BSO(r) \times BO(1); \tilde{\Gamma}_{n-m})$.

Demonstração. Análoga à do Corolário (1.4). □

Usaremos os resultados já obtidos para dar uma caracterização do núcleo de $\tilde{\mathcal{F}}_m$, no caso em que N é uma π -variedade $(2m-i)$ -dimensional, com $i \leq 3$, o qual denotaremos por $\tilde{K}_m^i$. Nessas condições, temos

3.3 Teorema. Seja $m \equiv i \pmod{2}$. Então, $\tilde{K}_m^i$ é $\mathcal{O}_2$ -isomorfo a $H_i(N)$ para $i \leq 2$ e é $\mathcal{O}_{2,3}$ -isomorfo a $H_3(N)$ para $i = 3$.

Demonstração. Seja $X = N \times BSO(r) \times BO(1)$. Pelo Corolário (3.2), $\tilde{K}_m^i$ é $\mathcal{O}_2$ -isomorfo a $\Omega_i(X; \tilde{\Gamma}_{m-i})$. Como X é um complexo CW com somente um número finito de células em cada dimensão e $w_1(\tilde{\Gamma}_{m-i}) = (m-i)w_1(\lambda) = 0$, segue pelo Teorema (2.3) que $\Omega_i(X; \tilde{\Gamma}_{m-i})$ é $\mathcal{O}_2$ -isomorfo a $H_i(X)$ para $i \leq 2$ e é $\mathcal{O}_{2,3}$ -isomorfo a $H_i(X)$ para $i = 3$. Aplicando a fórmula de Künneth a $H_i(X)$, obtemos um $\mathcal{O}_2$ -isomorfismo com $H_i(N)$ para $i \leq 3$. Portanto, $\tilde{K}_m^i$ é $\mathcal{O}_2$ -isomorfo a $H_i(N)$ para $i \leq 2$ e é $\mathcal{O}_{2,3}$ -isomorfo a $H_3(N)$ para $i = 3$.

3.4 Observação. É imediato pelo Teorema (3.3) que $\text{rank } \tilde{K}_m^i = \beta_i(N)$, para $i \leq 3$, onde $\beta_i(N)$ é o i -ésimo número de Betti inteiro da variedade N .

3.5 Observação. No caso do fibrado virtual $\tilde{\Gamma}_k = -k\lambda^0 - \tilde{\psi}_r \otimes \lambda + \tilde{\varphi}_r$ sobre $X = N \times BSO(r) \times BO(1)$, onde N é uma variedade qualquer, $\tilde{\varphi}_r = \varepsilon^{p+r} - v_N^p \times \tilde{\gamma}^r$,

$\tilde{\psi}_r = \tilde{\gamma}^r - \varepsilon^r$ e λ é o fibrado de retas canônico sobre $BO(1)$, é possível determinar um fibrado vetorial ξ sobre X de modo que $\tilde{\Gamma}_+ \oplus \xi$ seja trivial.

De fato, temos que $\tilde{\Gamma}_+ = \varepsilon^{p+k+r} \oplus r\lambda$ é isomorfo a $\varepsilon^{p+k+r} \oplus \tau_{\mathbb{R}P(r-1)} \oplus \varepsilon^1$, onde $\mathbb{R}P(r-1)$ é o espaço projetivo real $(r-1)$ -dimensional. Então, $\xi = \nu_{\mathbb{R}P(r-1)}$ satisfaz as condições desejadas.

Nesse caso, sendo $\eta = \tilde{\Gamma}_+ \oplus \xi = k\lambda \oplus \tilde{\gamma}^r \otimes \lambda \oplus \nu_N^p \times \tilde{\gamma}^r \oplus \nu_{\mathbb{R}P(r-1)}$, temos que $w_1(\tilde{\Gamma}_k) = w_1(\eta) = k w_1(\lambda) + w_1(N)$ e $\Omega_m(X; \tilde{\Gamma}_k)$ é isomorfo a $\Omega_m(X; -\eta^0)$, para qualquer m .

3.6 Observação. Ainda sob as hipóteses do Teorema (3.1), a imagem do homomorfismo de "esquecimento" $\tilde{\mathcal{F}}_m$ representa o subgrupo de $\Omega_m(N)$ constituído pelas classes de bordismo orientado de aplicações contínuas orientáveis $f: M^m \rightarrow N^n$ que são bordantes a uma imersão.

Nossos resultados permitem determinar essa imagem apenas quando $n = 2m - 1$, com m ímpar. De fato, sendo $X = N \times BSO(r) \times BO(1)$, temos que $\Omega_0(X; \tilde{\Gamma}_{m-1}) \cong \mathbb{Z}$, visto que $\tilde{\Gamma}_{m-1}$ é orientável. Então, pela sequência exata do Teorema (3.1), $\text{im } \gamma_m \subset \mathbb{Z}$ e, como seus elementos têm ordem uma potência de 2 [24, 10.2], segue que γ_m é o homomorfismo nulo. Portanto, $\text{im } \tilde{\mathcal{F}}_m = \ker \gamma_m = \Omega_m(N)$, ou seja, toda $f: M^m \rightarrow N^{2m-1}$ orientável é bordante a uma imersão. Todavia, esse fato é uma consequência do resultado obtido por Li Banghe e Peterson em [16, T.4.3] : toda aplicação contínua $f: M^m \rightarrow N^{2m-1}$ é homotópica a uma imersão, para quaisquer variedades M, N .

Em [18], Gui-Song Li determina condições necessárias e suficientes para que uma aplicação contínua $f: M^m \rightarrow N^{2m-i}$ seja bordante a uma imersão nos casos $i = 2, 3$.

Destacamos o seguinte resultado no caso $n = 2m - 1$, com m ímpar.

3.7 Teorema. $\tilde{\mathcal{J}}_m(N) \stackrel{\mathcal{C}_2}{\cong} H_1(N) \oplus \Omega_m(N).$

Demonstração. Pelo Teorema (3.1), obtemos a sequência exata

$$\dots \rightarrow \Omega_1(X; \tilde{\Gamma}_{m-1}) \xrightarrow{w_m} \tilde{\mathcal{J}}_m(N) \xrightarrow{\tilde{f}_m} \Omega_m(N) \xrightarrow{\gamma_m} Z \rightarrow \dots,$$

conforme já observamos em (3.5). Então,

$$\tilde{\mathcal{J}}_m(N) \cong \tilde{K}_m^1 \oplus \text{im } \tilde{f}_m = \tilde{K}_m^1 \oplus \Omega_m(N),$$

também por (3.5). Assim, pelo Teorema (3.3), segue que

$$\tilde{\mathcal{J}}_m(N) \stackrel{\mathcal{C}_2}{\cong} H_1(N) \oplus \Omega_m(N).$$

□

Há uma versão não orientada desses resultados se considerarmos inicialmente o fibrado virtual $\varphi_k = \varepsilon^{p+k} - \nu_N^p \times \gamma^k$ sobre $N \times BO(k)$, onde N é uma variedade n -dimensional, conexa e compacta, e γ^k é o fibrado vetorial universal de posto k sobre $BO(k)$.

Denotaremos por $\mathcal{C}_m(N, k)$ o m -ésimo grupo de bordismo normal de φ_k -variedades sobre $N \times BO(k)$, $\Omega_m(N \times BO(k); \varphi_k)$. Analogamente ao caso orientado, dado um representante $\mathcal{M} = (M, (f, g), F)$ de um elemento desse grupo, se obtém $f^* \tau_N \oplus \nu_M \sim g^* \gamma^k$ e, assim, o fibrado normal estável de f , ν_f , admite uma $O(k)$ -estrutura. Quando $k = n - m$, f é então homotópica a uma imersão. Assim, $\mathcal{C}_m(N, n - m)$ é o grupo de bordismo normal das aplicações contínuas $f: M^m \rightarrow N^n$ que são homotópicas a imersões. Denotaremos esse grupo por $\mathcal{J}_m(N)$.

Enunciaremos a seguir a versão não orientada dos resultados já obtidos nesse parágrafo. As demonstrações serão omitidas por serem análogas àquelas apresentadas. Também devemos considerar N uma π -variedade n -dimensional, conexa e compacta.

3.8 Teorema. Para $3m < 2n + 1$ e r suficientemente grande, é exata a sequência

$$\dots \rightarrow \Omega_{2m-n}(N \times BO(r) \times BO(1); \Gamma_{n-m}) \xrightarrow{w_m} \mathcal{J}_m(N) \xrightarrow{\mathcal{J}_m} \eta_m(N) \xrightarrow{\gamma_m}$$

$$\Omega_{2m-n-1}(N \times BO(r) \times BO(1); \Gamma_{n-m}) \xrightarrow{w_{m-1}} \mathcal{C}_{m-1}(N, n-m) \rightarrow \dots$$

onde $\Gamma_{n-m} = -(n-m)\lambda^0 - \psi_r \otimes \lambda + \varphi_r$, com $\varphi_r = \varepsilon^{p+r} - v_N^p \times \gamma^r$, $\psi_r = \gamma^r - \varepsilon^r$ fibrados virtuais sobre $N \times BO(r)$, λ fibrado de retas canônico sobre $BO(1)$.

Observamos que nesse caso $\ker \mathcal{J}_m$ é o grupo de bordismo das aplicações contínuas $f: M^m \rightarrow N^n$ que são homotópicas a imersões e que bordam em $\eta_m(N)$.

3.9 Corolário. $\ker \mathcal{J}_m \cong \Omega_{2m-n}^{\mathcal{C}_2}(N \times BO(r) \times BO(1); \Gamma_{n-m})$.

3.10 Teorema. Seja $n = 2m - i$, com $i \leq 3$ e $m \equiv i \pmod{2}$. Então, K_m^i é $\mathcal{C}_2$ -isomorfo a $H_i(N)$ para $i \leq 2$ e é $\mathcal{C}_{2,3}$ -isomorfo a $H_3(N)$ para $i = 3$.

Observamos apenas que na demonstração desse teorema devemos considerar $X = N \times BO(r) \times BO(1)$. Também podemos concluir que $\text{rank } K_m^i = \beta_i(N)$, para $i \leq 3$.

3.11 Observação. A imagem do homomorfismo de "esquecimento" $\mathcal{J}_m$ representa nesse caso o subgrupo de $\eta_m(N)$ constituído pelas classes de bordismo de aplicações contínuas $f: M^m \rightarrow N^n$ que são bordantes a uma imersão. Também para $n = 2m - 1$, com m ímpar, se obtém $\text{im } \mathcal{J}_m = \eta_m(N)$, ou seja, toda aplicação contínua $f: M^m \rightarrow N^{2m-1}$ é bordante a uma imersão. Esse fato é consequência de [16, T.4.3].

Além disso, destacamos que

3.12 Teorema. $\mathcal{J}_m(N) \cong H_1(N)$.

Demonstração. De forma análoga à prova do Teorema (3.7), $\mathcal{J}_m(N) \cong_{\mathcal{C}_2} H_1(N) \oplus \eta_m(N)$. Como N é um complexo CW finito, segue por [3,17.1] que $\eta_m(N) \cong \sum_{i=0}^m H_i(N; Z_2) \otimes \eta_{m-i}$ e, assim, pertence a $\mathcal{C}_2$. Portanto, $\mathcal{J}_m(N) \cong_{\mathcal{C}_2} H_1(N)$. $\square$

4. O caso não orientável

Seja X um complexo CW com um número finito de células em cada dimensão e seja φ um fibrado virtual sobre X , não orientável. Nesse caso o resultado do Teorema (2.3) não é válido. Por exemplo, para X conexo por caminhos, temos que $H_0(X) \cong Z$, enquanto $\Omega_0(X; \varphi) \cong Z_2$ (1.2.7).

Em dimensão 1 obtivemos a seguinte estimativa:

4.1 Teorema. $\text{rank } \Omega_1(X; \varphi) + 1 \leq \beta_1(X, Z_2)$, onde $\beta_1(X, Z_2)$ é o primeiro número de Betti de X com coeficientes Z_2 .

Demonstração. Temos que $\Omega_1(X; \varphi)$ é isomorfo a $\Omega_1(X^n; \varphi|_{X^n})$ para $n \geq 2$, onde X^n é o n -esqueleto de X . Sendo X^n compacto, $\Omega_1(X^n; \varphi|_{X^n}) \cong \Omega_1(X^n; -\eta^0)$, para algum fibrado vetorial η^r de posto r sobre X^n . Observamos que r pode ser tomado suficientemente grande. Além disso, $\Omega_1(X^n; -\eta^0)$ é isomorfo a $\pi_{1+r}(T(\eta))$, pela construção de Pontryagin-Thom. Logo, $\Omega_1(X; \varphi) \cong \pi_{1+r}(T(\eta))$.

Uma vez que $\pi_i(T(\eta)) = 0$ para $i \leq r-1$ e $\pi_r(T(\eta))$ é isomorfo a Z_2 , temos que $\pi_i(T(\eta)) \in \mathcal{C}_2$ para $1 \leq i \leq r$ e que o homomorfismo de Hurewicz $\mathcal{H}_{r+1}: \pi_{r+1}(T(\eta)) \rightarrow H_{r+1}(T(\eta))$ é um $\mathcal{C}_2$ -isomorfismo. Então, $\Omega_1(X; \varphi)$ é $\mathcal{C}_2$ -isomorfo a $H_{r+1}(T(\eta))$.

Por outro lado, $H_1(X; Z_2) \cong H_1(X^n; Z_2) \cong H_{r+1}(T(\eta); Z_2) \cong H_{r+1}(T(\eta)) \otimes Z_2 \oplus Z_2$ e, assim,

$$\beta_1(X, Z_2) = \dim_{Z_2} (H_{r+1}(T(\eta)) \otimes Z_2) + 1 \geq \text{rank } H_{r+1}(T(\eta)) + 1 = \text{rank } \Omega_1(X; -\eta^0) + 1$$

o que conclui a prova. $\square$

Como aplicação desse teorema, vamos dar uma estimativa para $\text{rank } K_m^1$ quando N é uma π -variedade $(2m-1)$ -dimensional, conexa e compacta, com m par. Lembramos que $X = N \times BSO(r) \times BO(1)$ no caso orientado e, na versão não orientada, $X = N \times BO(r) \times BO(1)$, para r suficientemente grande. Temos que:

4.2 Corolário. $\text{rank } K_m^1 \leq \beta_1(N, Z_2)$ no caso orientado e $\text{rank } K_m^1 \leq \beta_1(N, Z_2) + 1$ na versão não orientada.

Demonstração. Pelos corolários (3.2) e (3.8), $\text{rank } K_m^1 = \text{rank } \Omega_1(X; \Gamma_{m-1})$ nos casos orientado e não orientado, respectivamente. Lembramos que $w_1(\Gamma_{m-1}) = (m-1)w_1(\lambda)$, onde λ é o fibrado de retas canônico sobre $BO(1)$. Sendo m par, temos que Γ_{m-1} não é orientável; então, pelo Teorema (4.1), segue que $\text{rank } K_m^1 + 1 \leq \beta_1(X, Z_2)$. A conclusão da prova é obtida observando-se que $\beta_1(X, Z_2) = \beta_1(N, Z_2) + 1$ no caso orientado e, $\beta_1(X, Z_2) = \beta_1(N, Z_2) + 2$ na versão não orientada. $\square$

CAPÍTULO III

Homotopia regular e bordismo normal

Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Vamos supor M fechada, conexa e $m < n$.

Tomemos o fibrado normal estável de f , v_f , com posto p suficientemente grande. Lembramos que v_f é a classe estável de $f^* \tau_N \oplus v_M$, onde v_M denota o fibrado normal estável de M . Considerando a variedade M^m mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$, com $k \geq m+1$, entendemos "p suficientemente grande" como $p \geq n+m+1$.

Denotaremos por $V_{p-(n-m)}(v_f)$ o fibrado de frames de v_f com codimensão igual a $n-m$. Por V_f indicaremos o conjunto das classes de homotopia de seções de $V_{p-(n-m)}(v_f)$.

Denotaremos por $I[M, N]_f$ o conjunto das classes de homotopia regular de imersões homotópicas a f .

O objetivo desse capítulo é relacionar $I[M, N]_f$ com o conjunto das classes de bordismo normal de aplicações homotópicas a imersões que são bordantes a f , o qual será denotado por $\mathcal{C}_f$ (Ver § 3). Isso será feito através de V_f .

No parágrafo 1 estudamos uma bijeção existente entre $I[M, N]_f$ e o espaço das órbitas de V_f pela ação de $\pi_1(N^m, f)$, grupo fundamental da componente por caminhos de N^m que contém f . No parágrafo 2 introduzimos o conceito de bordismo de frames de codimensão $n-m$, que nos possibilita definir uma função $\ell_f: V_f \rightarrow \mathcal{C}_f$. Essa função é estudada nos parágrafos 3 e 4.

1. Relacionamento entre V_f e $I[M, N]_f$

Como consequência do Teorema de Hirsch (Ver (1.3.2)) temos que

1.1 Teorema. Para $n \geq m+1$, $V_f \neq \emptyset$ se, e somente se, f é homotópica a uma imersão.

Demonstração. Como $n \geq m+1$, existe um fibrado vetorial ξ^{n-m} de base M tal que $f^*\tau_N \cong \xi^{n-m} \oplus \tau_M$ se, e somente se, $f^*\tau_N \oplus \nu_M \cong \xi^{n-m} \oplus \tau_M \oplus \nu_M$, onde ν_M é o fibrado normal estável de M . Isso equivale a $\nu_f^p \cong \xi^{n-m} \oplus \varepsilon^{p-(n-m)}$; que por sua vez equivale a ν_f possuir $p-(n-m)$ seções linearmente independentes. Isso ocorre se, e somente se, $V_{p-(n-m)}(\nu_f)$ possui uma seção. O resultado segue então pelo Teorema de Hirsch. $\square$

Seja $f: M^m \rightarrow N^{2m-i}$ uma aplicação homotópica a imersão. Em [14], Li Banghe determina V_f nos seguintes casos: $i=1, m>3$; $i=2, 4 < m \equiv 0, 1 \pmod{4}$; $i=2, m=4$ e $w_1(\nu_f)=0$.

Suponhamos $V_f \neq \emptyset$.

Denotemos por N^M o espaço constituído por todas as aplicações contínuas $M \rightarrow N$ com a topologia compacto-aberta. O grupo fundamental da componente por caminhos de N^M que contém f é indicado por $\pi_1(N^M, f)$. Tal grupo atua em V_f da seguinte maneira:

Seja $[\alpha] \in \pi_1(N^M, f)$ e $\alpha: I \rightarrow N^M$ um representante de $[\alpha]$, que determina uma homotopia $F: M \times I \rightarrow N$ entre f e f ; a saber, $F(x, t) = \alpha(t)(x)$. Seja $V_{p-(n-m)}(\nu_f^p)$ o fibrado de frames de ν_f^p com codimensão $n-m$. (Estamos considerando

$M \times I$ mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k+1}$). Então, $V_{p-(n-m)}(v_F^p)|_{M \times \{0\}} = V_{p-(n-m)}(v_f^p) = V_{p-(n-m)}(v_F^p)|_{M \times \{1\}}$.

Seja $[s_0] \in V_f$ e s_0 , seção de $V_{p-(n-m)}(v_f)$, representante de $[s_0]$. Pelas considerações acima, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & E(V_{p-(n-m)}(v_F)) & \\ s_0 \nearrow & & \searrow p \\ M & \xrightarrow{H_0} & M \times I \end{array}$$

é comutativo, onde $H_0(x) = (x, 0)$. Isso mostra que a homotopia $H: M \times I \rightarrow M \times I$, $H(x, t) = (x, t)$, se levanta no nível 0. Pela propriedade de levantamento de homotopia do fibrado $V_{p-(n-m)}(v_F)$, existe uma homotopia $s: M \times I \rightarrow E(V_{p-(n-m)}(v_F))$ tal que $p \circ s = H$ e $s(x, 0) = s_0(x)$. (Observamos que, sendo $H = id_{M \times I}$, s é efetivamente uma seção de $V_{p-(n-m)}(v_F)$).

Então, para cada $t \in I$, s_t é uma seção de $V_{p-(n-m)}(v_{F_t})$, onde $F_t = F|_{M \times \{t\}}$. Em particular, s_1 é uma seção de $V_{p-(n-m)}(v_f)$. Assim, tem sentido a seguinte

1.2 Definição. A classe de homotopia $[s_1] \in V_f$ é a imagem de $[\alpha] \in \pi_1(N^M, f)$ atuando em $[s_0] \in V_f$.

A órbita de $[s] \in V_f$ pela ação de $\pi_1(N^M, f)$ será denotada por $\{[s]\}$.

1.3 Observação. Li Banghe prova em [15] que para $n > m + 2$ existe uma bijeção entre o conjunto $V_f / \pi_1(N^M, f)$ das órbitas dessa ação e o conjunto $I[M, N]_f$ das classes de homotopia regular de imersões homotópicas a f .

Quando essa ação é trivial, fica então estabelecida uma bijeção entre V_f e $I[M, N]_f$. Isso acontece, por exemplo, se N é um espaço projetivo real de dimensão ímpar, ou mais geral, se N é um espaço de "lens" $S_m^n = S^n/Z_m$, com n ímpar, $n > m + 1$ [13, T.1]. Esse também é o caso quando o fibrado tangente a N , τ_N , é estavelmente trivial sobre o $(m+1)$ -esqueleto de N [12, T.5].

2. Bordismo de frames

Seja N uma variedade n -dimensional conexa e compacta.

Vamos considerar ternas (M, g, s) , onde M é uma variedade m -dimensional fechada, com $m < n$; $g: M \rightarrow N$ é uma aplicação orientável (i.é , $w_1(v_g^p) = 0$) e $s: M \rightarrow E(V_{p-(n-m)}(v_g^p))$ é uma seção. Para que o conjunto de tais ternas seja não vazio, as aplicações em questão devem ser homotópicas a imersões (1.1).

Considerando as variedades de dimensão m mergulhadas em $\mathbb{R}^{m+k}$ e as de dimensão $m+1$ em $\mathbb{R}^{m+k+1}$, com k suficientemente grande, estabelecemos uma relação de equivalência no conjunto das ternas (M, g, s) como acima da seguinte maneira:

2.1 Definição. Um *bordismo* entre (M_1^m, g_1, s_1) e (M_2^m, g_2, s_2) é uma terna (W^{m+1}, g, s) na qual $\partial W = M_1 \cup M_2$, $g: W \rightarrow N$ é uma aplicação tal que $g|_{\partial W} = g_1 \cup g_2$ e $s: W \rightarrow E(V_{p-(n-m)}(v_g^p))$ é uma seção tal que $s|_{\partial W} = s_1 \cup (-s_2)$, onde $(-s_2)$ denota a troca de sinal em uma das componentes de s_2 previamente fixada.

Essa definição fornece uma interpretação, em termos de frames de codimensão $n-m$, do grupo de bordismo normal $\tilde{J}_m(N) = \Omega_m(N \times BSO(n-m); \tilde{\varphi}_{n-m})$, onde

$\tilde{\varphi}_{n-m} = \varepsilon^{l+(n-m)} - v_N^l \times \tilde{\gamma}^{n-m}$ é fibrado virtual sobre $N \times BSO(n-m)$ (Ver II.3).

Formalmente temos:

2.2 Proposição. Existe uma bijeção entre o conjunto das classes de bordismo determinadas pela definição (2.1) e o conjunto $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$.

Demonstração. Seja $[M, g, s]$ uma classe de equivalência determinada pela definição (2.1). A seção s de $V_{p-(n-m)}(v_g^p)$ fornece $s_1, \dots, s_{p-(n-m)}$ seções linearmente independentes de v_g^p . Tais seções determinam uma decomposição do fibrado normal estável de g , a saber: $v_g^p \cong \xi_s^{n-m} \oplus \varepsilon_s^{p-(n-m)}$, onde para cada $x \in M$, a fibra de $\varepsilon_s^{p-(n-m)}$ é o subespaço gerado por $s_1(x), \dots, s_{p-(n-m)}(x)$ e a de ξ_s^{n-m} é o complemento ortogonal desse subespaço em $(v_g)_x$. Observamos que, sendo v_g um fibrado orientável, ξ_s^{n-m} também o é.

Tomemos $h : M \rightarrow BSO(n-m)$ aplicação classificante de ξ_s^{n-m} . Obtemos então

$$g^* \tau_N \oplus v_M \cong v_g^p \cong h^* \tilde{\gamma}^{n-m} \oplus \varepsilon_s^{p-(n-m)}$$

Como $m < n$, esse isomorfismo é equivalente a

$$g^*(\tau_N \oplus v_N) \oplus \tau_M \oplus v_M \cong \tau_M \oplus g^* v_N \oplus h^* \tilde{\gamma}^{n-m} \oplus \varepsilon_s^{p-(n-m)},$$

ou ainda,

$$\varepsilon^{n+l} \oplus \varepsilon^{m+k} \cong \tau_M \oplus (g, h)^*(v_N^l \times \tilde{\gamma}^{n-m}) \oplus \varepsilon_s^{p-(n-m)}$$

Usando novamente o fato que $m < n$, segue que

$$\tau_M \oplus (g, h)^*(v_N \times \tilde{\gamma}^{n-m}) \cong \varepsilon^m \oplus \varepsilon^{l+(n-m)}.$$

Seja G o isomorfismo estável assim determinado.

Então, associaremos à classe $[M, g, s]$ dada, a classe da φ -variedade $(M, (g, h), G) \in \tilde{\mathcal{J}}_m(N)$ determinada acima.

Vamos mostrar que essa associação está bem definida.

Seja (W^{m+1}, g, s) um bordismo entre as ternas (M_1, g_1, s_1) , (M_2, g_2, s_2) conforme (2.1). Pelo método descrito acima, essas ternas determinam a φ -variedade de dimensão $m+1$ $(W^{m+1}, (g, \tilde{h}), G)$ e as φ -variedades de dimensão m $(M_1, (g_1, h_1), G_1)$, $(M_2, (g_2, h_2), G_2)$, respectivamente.

Assim, $\tilde{h}$ e G são obtidos a partir da decomposição de v_g^p dada por s ; digamos $g^* \tau_N \oplus v_W \cong \xi_s^{n-m} \oplus \varepsilon_s^{p-(n-m)}$.

Como $s|_{M_1} = s_1$, então $(\varepsilon_s^{p-(n-m)})|_{M_1} = \varepsilon_{s_1}^{p-(n-m)}$ e, conseqüentemente, $(\xi_s^{n-m})|_{M_1} = \xi_{s_1}^{n-m}$. Por outro lado, como $s|_{M_2} = (-s_2)$ (no sentido de (2.1)), então $(\varepsilon_s^{p-(n-m)})|_{M_2} = -\varepsilon_{s_2}^{p-(n-m)}$, onde "-" indica uma inversão de sinal na componente de $\varepsilon_{s_2}^{p-(n-m)}$ fixada pela definição (2.1). Ainda assim, $(\xi_s^{n-m})|_{M_2} = \xi_{s_2}^{n-m}$.

A partir dessas considerações, podemos concluir que:

(1) $\tilde{h}|_{M_i}$ classifica ξ_{s_i} .

Segue então que $\tilde{h}|_{M_i}$ é homotópica a h_i , $i = 1, 2$. Mas, é possível encontrar h homotópica a $\tilde{h}$ tal que $h|_{M_i} = h_i$, $i = 1, 2$.

(2) $G|_{M_1} = G_1$ e $G|_{M_2} = -G_2$.

Isso mostra que $(W^{m+1}, (g, h), G)$ é um bordismo entre $(M_1, (g_1, h_1), G_1)$ e $(M_2, (g_2, h_2), G_2)$.

Reciprocamente, seja dada a classe $[M, (g, h), G]$ de uma φ -variedade em $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$. Lembramos que $g: M \rightarrow N$, $h: M \rightarrow BSO(n-m)$ são aplicações contínuas e G é um isomorfismo estável de fibrados: $\tau_M \oplus (g, h)^*(v_N^l \times \tilde{\gamma}^{n-m}) \sim \varepsilon^m \oplus (g, h)^*(\varepsilon^{l+(n-m)})$. Como em (II.3), obtemos a partir de G um isomorfismo de fibrados vetoriais

$$v_g^p = g^* \tau_N \oplus v_M \cong h^* \tilde{\gamma}^{n-m} \oplus \varepsilon^{p-(n-m)}.$$

Com essa decomposição de v_g , podemos concluir que $w_1(v_g) = 0$ e determinar $p-(n-m)$ seções linearmente independentes de v_g ; a saber, $s_i(x) = (0_x, e_i)$, onde 0_x é o vetor nulo na fibra sobre x de $h^* \tilde{\gamma}^{n-m}$ e e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{p-(n-m)}$. Então, $s = (s_1, \dots, s_{p-(n-m)})$ é uma seção de $V_{p-(n-m)}(v_g^p)$.

À classe $[M, (g, h), G] \in \tilde{\mathcal{J}}_m(N)$ dada, associaremos a terna $[M, g, s]$, onde s é a seção de $V_{p-(n-m)}(v_g^p)$ determinada acima.

Vamos mostrar que essa associação está bem definida.

Seja $(W, (g, h), G)$ um bordismo entre as ϕ -variedades $(M_1, (g_1, h_1), G_1)$, $(M_2, (g_2, h_2), G_2)$. Pelo método descrito acima, a essas ϕ -variedades podemos associar ternas (W, g, s) , (M_1, g_1, s_1) e (M_2, g_2, s_2) , respectivamente.

Então, s é obtida a partir da decomposição $v_g^p \cong h^* \tilde{\gamma}^{n-m} \oplus \varepsilon^{p-(n-m)}$ dada por G ; a saber, $s_i(x) = (0_x, e_i)$, onde 0_x é o vetor nulo na fibra sobre $x \in W$ de $h^* \tilde{\gamma}^{n-m}$ e e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{p-(n-m)}$, que é a fibra de $\varepsilon^{p-(n-m)}$ sobre $x \in W$. Como $G|_{M_1} = G_1$ e $G|_{M_2} = -G_2$, segue que $s|_{M_1} = s_1$ e $s|_{M_2} = (-s_2)$, no sentido de (2.1).

Assim, (W, g, s) é um bordismo entre (M_1, g_1, s_1) e (M_2, g_2, s_2) .

Portanto, existe uma bijeção entre $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$ e o conjunto das classes de bordismo de ternas dadas pela definição (2.1). $\square$

2.3 Observação. Através da bijeção estabelecida na proposição (2.2), consideramos uma estrutura de grupo abeliano no conjunto das classes de bordismo definidas em (2.1). A partir de então tal grupo será identificado com $\tilde{\mathcal{J}}_m(N)$.

2.4 Observação. Sem exigir $w_1(v_g) = 0$, obtemos uma versão não orientada da Definição (2.1). De forma análoga à Proposição (2.2), podemos estabelecer uma estrutura de grupo abeliano no conjunto das classes de bordismo de ternas (M, g, s) assim determinadas, através de uma bijeção com o grupo de bordismo normal $\mathcal{J}_m(N) = \Omega_m(N \times BO(n-m); \varphi_{n-m})$, onde $\varphi_{n-m} = \varepsilon^{l+(n-m)} - v_N^l \times \gamma^{n-m}$ é fibrado virtual sobre $N \times BO(n-m)$ (Ver II.3). Os dois grupos são então identificados.

3. A função ℓ_f

Seja $f : M^m \rightarrow N^n$, $m < n$, uma aplicação homotópica a uma imersão. Então, f é bordante a uma imersão. Se $w_1(v_f) = 0$, então $[M, f]$ pertence à imagem do homomorfismo de "esquecimento"

$$\tilde{\mathcal{J}}_m : \tilde{\mathcal{J}}_m(N) \rightarrow \Omega_m(N).$$

Caso contrário, trata-se da versão não orientada e $[M, f]$ está na imagem do homomorfismo de "esquecimento"

$$\mathcal{J}_m : \mathcal{J}_m(N) \rightarrow \eta_m(N).$$

Vamos estudar os dois casos simultaneamente, adotando a notação sem " $\sim$ ".

Em termos da interpretação de $\mathcal{J}_m(N)$ obtida em (2.3 e 2.4), esse homomorfismo é dado por

$$\mathcal{J}_m([M', f', s']) = [M', f'].$$

Vamos denotar por $\mathcal{C}_f$ a imagem inversa de $[M, f]$ por $\mathcal{J}_m$. Tal conjunto é então constituído pelas classes de bordismo normal de aplicações homotópicas a imersões que são bordantes a f . Observamos ainda que $\mathcal{C}_f$ nada mais é que a classe lateral $\ker \mathcal{J}_m + \alpha$, onde $\mathcal{J}_m(\alpha) = [M, f]$. Portanto, $\mathcal{C}_f$ e $\ker \mathcal{J}_m$ possuem a mesma cardinalidade.

A fim de comparar $I[M, N]_f$ e $\mathcal{C}_f$, como proposto na introdução desse capítulo, definimos a seguinte função:

$$3.1 \quad \ell_f : V_f \rightarrow \mathcal{C}_f \text{ dada por } \ell_f([s]) = [M, f, s].$$

Vamos primeiramente analisar se ℓ_f está bem definida. Sejam s_0, s_1 seções homotópicas de $V_{p-(n-m)}(v_f)$. Então, s_0 e $(-s_1)$ também são homotópicas; assim, existe $H : M \times I \rightarrow E(V_{p-(n-m)}(v_f))$ tal que $H(x, 0) = s_0(x)$, $H(x, 1) = (-s_1)(x)$ e H_t é uma seção de $V_{p-(n-m)}(v_f)$ para todo $t \in I$.

Tomemos $W = M \times I$ e $g : W \rightarrow N$ dada por $g(x, t) = f(x)$; ou seja, $g = f \circ \pi_1$. Então, como $v_{M \times I} \cong \pi_1^* v_M$, temos $v_g \cong \pi_1^* v_f$ e, consequentemente, $V_{p-(n-m)}(v_g) \cong \pi_1^*(V_{p-(n-m)}(v_f))$.

Assim, $s : M \times I \rightarrow E(V_{p-(n-m)}(v_g))$ dada por $s((x, t)) = ((x, t), H(x, t))$ define uma seção de $V_{p-(n-m)}(v_g)$ tal que $s|_{M \times \{0\}} = s_0$ e $s|_{M \times \{1\}} = s_1$.

Portanto, $(M \times I, g, s)$ determina um bordismo entre (M, g, s_0) e (M, g, s_1) . Isso mostra que ℓ_f está bem definida.

3.2 Observação. O diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} V_f & \xrightarrow{\ell_f} & \mathcal{C}_f \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\ell}_f & \\ V_f/\pi_1(N^M, f) & & \end{array}$$

é comutativo, onde $\tilde{\ell}_f(\{[s]\}) = [M, f, s]$ e π é a projeção natural. De fato, consideremos $[s_0], [s_1] = [-s_1]$ elementos de V_f , pertencentes a mesma órbita pela ação de $\pi_1(N^M, f)$. Então, por (1.2), existe uma homotopia $F : M \times I \rightarrow N$ entre f e f , e uma seção s de $V_{p-(n-m)}(v_f)$ tal que $s|_{M \times \{0\}} = s_0$ e $s|_{M \times \{1\}} = (-s_1)$. Isso mostra que $(M \times I, F, s)$ é um bordismo entre (M, f, s_0) e (M, f, s_1) .

Portanto, a menos da bijeção $V_f/\pi_1(N^M, f) \leftrightarrow I[M, N]_f$ (1.3), a função $\tilde{\ell}_f$ determina uma função de $I[M, N]_f$ em $\mathcal{C}_f$.

3.3 Observação. A função ℓ_f pode não ser injetora. Por exemplo, consideremos $f : M^m \rightarrow N^{2m-1}$; então, f é homotópica a uma imersão. No caso em que M, N são orientáveis, com $f^*(w_2(N)) = 0$, Li Banghe prova em [14] que, para $m \equiv 1 \pmod{4}$,

$$V_f \leftrightarrow H_1(M; \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

onde " $\leftrightarrow$ " denota bijeção. Se N for uma π -variedade, mostramos que $K_m^1 \cong H_1(N; \mathbb{Z})$ (T. II.3.3). Então, se $H_1(N; \mathbb{Z}) = 0$, temos que $K_m^1 \in \mathcal{C}_2$ e, portanto, é finito. Segue então que $\mathcal{C}_f$ também é finito. Assim, para M tal que $H_1(M; \mathbb{Z})$ é infinito, a função l_f não é injetora.

A função l_f pode não ser sobrejetora. Isso ocorre, por exemplo, se tivermos $H_1(N; \mathbb{Z})$ infinito e $H_1(M; \mathbb{Z})$ finito, com M e N nas condições anteriores.

4. Alguns resultados sobre a imagem de l_f

O estudo da imagem de l_f envolve questões sobre a extensão de seções de fibrados. As técnicas usadas encontram-se na teoria de obstrução, particularmente aquelas introduzidas por Liao em [11]. Faremos a seguir um breve resumo dos resultados desse artigo que serão utilizados nesse parágrafo.

Seja $\beta : E \xrightarrow{p} B$ um fibrado com fibra F , complexo CW finito $(q-1)$ -conexo, $q \geq 2$, e espaço base B , complexo CW conexo. Consideremos a ação de $\pi_1(B)$ em $\pi_q(F)$ trivial.

Suponhamos que o fibrado β possua uma seção s sobre o $(q+1)$ -esqueleto de B , B^{q+1} . À classe de homotopia de s restrita a B^q é associada uma classe de cohomologia $\theta(s) \in H^q(E; \pi_q(F))$, conforme descrevemos a seguir. É provado que existe um elemento $e \in H^q(E; \pi_q(F))$ tal que $i^*e = k$, onde i^* é a induzida em cohomologia pela inclusão $i : F \rightarrow E$ e $k \in H^q(F; \pi_q(F))$ é a obstrução primária à contração de F a um ponto. Então, $\theta(s)$ é definido por:

$$4.1 \quad \theta(s) = e - p^*s^*e \in H^q(E; \pi_q(F)).$$

(O homomorfismo dual $s^* : H^q(E; \pi_q(F)) \rightarrow H^q(B; \pi_q(F))$ está definido porque s é uma seção sobre o $(q+1)$ -esqueleto de B).

A classe $\theta(s)$ independe da escolha de e e é o único elemento de $H^q(E; \pi_q(F))$ que satisfaz as condições: $s^*\theta(s) = 0$ e $i^*\theta(s) = k$. Além disso, as seguintes propriedades são válidas:

(i) Duas seções s_1, s_2 de β sobre B^{q+1} são homotópicas sobre o q -esqueleto de B se, e somente se, $\theta(s_1) = \theta(s_2)$.

(ii) Se r é outra seção de β sobre B^{q+1} , então $\theta(r) = \theta(s) - p^*r^*\theta(s)$. Consequentemente, $s^*\theta(r) = -r^*\theta(s)$.

(iii) Considere fixada uma seção r de β sobre B^{q+1} . Então, para quaisquer seções s_1, s_2 de β sobre B^{q+1} ,

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) \text{ se, e somente se, } s_1^*(\theta(r)) = s_2^*(\theta(r)).$$

(iv) Para cada $e \in H^q(E; \pi_q(F))$ tal que $i^*e = k$, existe uma seção s de β sobre B^{q+1} tal que $\theta(s) = e$.

(v) Sejam s_1, s_2 seções de β sobre B^{q+1} e $\bar{d}(s_1, s_2) \in H^q(B; \pi_q(F))$ sua diferença primária. Então,

$$p^*(\bar{d}(s_1, s_2)) = \theta(s_1) - \theta(s_2).$$

A partir dessas propriedades prova-se o seguinte

4.2 Teorema. Seja $\beta: E \xrightarrow{p} B$ um fibrado com fibra F , complexo CW finito $(q-1)$ -conexo, $q \geq 2$, e espaço base B , complexo CW conexo. Consideremos a ação de $\pi_1(B)$ em $\pi_q(F)$ trivial. Suponhamos que β possua uma seção r sobre B^{q+1} .

Então, a função

$$\begin{aligned} \{[s]_q; \text{ é seção de } \beta \text{ sobre } B^{q+1}\} &\rightarrow H^q(B; \pi_q(F)) \\ [s]_q &\mapsto s^*(\theta(r)) \end{aligned}$$

é bijetora.

Apresentamos a seguir os resultados que obtivemos sobre a imagem de ℓ_f . Primeiramente vamos estabelecer a notação usada.

Para uma aplicação $g: M^m \rightarrow N^n$ denotamos por β_g o fibrado de frames de codimensão $n-m$ do fibrado normal estável de g , que consideramos com posto p suficientemente grande.

4.3 Seja $f: M^m \rightarrow N^{2m-1}$ uma aplicação fixada e seja $[M', f', r']$ um elemento de $\mathcal{C}_f$, $m \geq 3$. Suponhamos que exista um bordismo (W, g, R) entre (M', f', r') e (M, f, r) , onde $r = R|_M$. Os fibrados β_g, β_f e $\beta_{f'}$ possuem como fibra a variedade de Stiefel $F = V_{p-(m-1)}(\mathbb{R}^p)$, que é um complexo CW finito $(m-2)$ -conexo. Analisemos a ação do grupo fundamental dos respectivos espaços base em $\pi_{m-1}(F)$. Lembramos que esse grupo é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, se m for par, e isomorfo a $\mathbb{Z}$, se m for ímpar [26,25.6]. Assim, para m par, tal ação é sempre trivial. No caso m ímpar, vamos supor que tal fato ocorra e que os espaços base sejam variedades orientadas. Então, pelo Teorema (4.2), segue que as funções abaixo são bijetoras:

$$\begin{aligned} \{[S]_{m-1}; S \text{ é seção de } \beta_g \text{ sobre } W^m\} &\rightarrow H^{m-1}(W; \pi_{m-1}(F)) \\ [S]_{m-1} &\mapsto S^*(\theta(R)) \\ \{[s]_{m-1}; s \text{ é seção de } \beta_f \text{ sobre } M\} &\rightarrow H^{m-1}(M; \pi_{m-1}(F)) \\ [s]_{m-1} &\mapsto s^*(\theta(r)) \\ \{[s']_{m-1}; s' \text{ é seção de } \beta_{f'} \text{ sobre } M'\} &\rightarrow H^{m-1}(M'; \pi_{m-1}(F)) \\ [s']_{m-1} &\mapsto s'^*(\theta(r')) \end{aligned}$$

4.4 Proposição. Seja $[M', f', r']$ um elemento da imagem de ℓ_f . Seja (W, g, R) um bordismo entre (M', f', r') e (M, f, r) , $r = R|_M$.

Suponhamos que para todo elemento da forma $[M', f', s'] \in \mathcal{C}_f$ exista uma seção S de β_g de modo que (W, g, S) seja um bordismo entre (M', f', s') e (M, f, s) ,

$s = S|_M$. Então, $i'_*(H_1(M'; \pi_{m-1}(F))) \subset i_*(H_1(M; \pi_{m-1}(F)))$, onde $i' : M' \rightarrow W$, $i : M \rightarrow W$ são inclusões.

Demonstração. Tomemos $u' \in H_1(M'; \pi_{m-1}(F))$ e consideremos sua classe dual $D_M^{-1}(u') \in H^{m-1}(M'; \pi_{m-1}(F))$. Pela bijeção estabelecida em (4.3) é possível determinar uma seção s' de $\beta_{f'}$, de modo que $s'^*(\theta(r')) = D_M^{-1}(u')$.

Dado o elemento $[M', f', s'] \in \mathcal{C}_f$, segue pela hipótese que existe uma seção S de β_g tal que (W, g, S) seja um bordismo entre (M', f', s') e (M, f, s) , $s = S|_M$. Novamente por (4.3), à classe de homotopia $[S]_{m-1}$ corresponde uma única classe de cohomologia $S^*(\theta(R)) \in H^{m-1}(W; \pi_{m-1}(F))$.

Seja $\alpha \in H_2(W, M \cup M'; \pi_{m-1}(F))$ a classe de homologia dual a $S^*(\theta(R))$, ou seja, $\alpha = D_W(S^*(\theta(R)))$. Então, pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow H^{m-1}(W; \pi_{m-1}(F)) & \xrightarrow{(i^*, i'^*)} & H^{m-1}(M; \pi_{m-1}(F)) \oplus H^{m-1}(M'; \pi_{m-1}(F)) \rightarrow \dots \\ \downarrow D_W & & \downarrow D_M + D_{M'} \\ \dots \rightarrow H_2(W; M \cup M'; \pi_{m-1}(F)) & \xrightarrow{\partial} & H_1(M; \pi_{m-1}(F)) \oplus H_1(M'; \pi_{m-1}(F)) \rightarrow \dots \end{array}$$

temos que

$$\begin{aligned} \partial \alpha &= \partial D_W(S^*(\theta(R))) = (D_M + D_{M'}) (i^*, i'^*) (S^*(\theta(R))) = \\ &= (D_M + D_{M'}) (i^*(S^*(\theta(R))), i'^*(S^*(\theta(R)))) = \\ &= (D_M + D_{M'}) (s^*(\theta(r)) + s'^*(\theta(r'))) = D_M(s^*(\theta(r))) + u'. \end{aligned}$$

Seja $u = D_M(s^*(\theta(r))) \in H_1(M; \pi_{m-1}(F))$. Então, $\partial \alpha = u + u'$ e, consequentemente, $(i_* + i'_*)(u + u') = 0$. Portanto, $i'_*(u') = i_*(-u)$, com $-u \in H_1(M; \pi_{m-1}(F))$. $\square$

No caso m par há uma recíproca desse resultado. Necessitamos do seguinte

4.5 Lema. Seja $f: M^m \rightarrow N^{2m-1}$ uma aplicação contínua, com m par. Para $m \equiv 2 \pmod{4}$ suponhamos que $f^*w_2(N) + f^*w_1(N) \cdot w_1(M) \neq 0$.

Então, existe uma bijeção entre V_f e o conjunto das classes de homotopia sobre M^{m-1} de seções de β_f .

Demonstração. Com essas hipóteses, Li Banghe prova em [14] que

$$V_f \leftrightarrow H^{m-1}(M; \mathbb{Z}_2).$$

Por outro lado, por (4.3), temos que

$$\{[s]_{m-1}; s \text{ é seção de } \beta_f\} \leftrightarrow H^{m-1}(M; \mathbb{Z}_2),$$

donde segue o lema. □

4.6 Proposição. Seja m um inteiro positivo par. Seja $[M', f', r']$ um elemento da imagem de ℓ_f . Se $m \equiv 2 \pmod{4}$, suponhamos $f'^*w_2(N) + f'^*w_1(N) \cdot w_1(M') \neq 0$.

Seja (W, g, R) um bordismo entre (M', f', r') e (M, f, r) , $r = R|_M$.

Se $i'_*(H_1(M'; \mathbb{Z}_2)) \subset i_*(H_1(M; \mathbb{Z}_2))$, então para todo elemento da forma $[M', f', s'] \in \mathcal{C}_f$, existe uma seção S de β_g tal que (W, g, S) seja um bordismo entre (M', f', s') e (M, f, s) , $s = S|_M$.

Demonstração. Seja dado um elemento da forma $[M', f', s']$ em $\mathcal{C}_f$. Por (4.3), à classe de homotopia $[s']_{m-1}$ corresponde uma única classe de cohomologia em $H^{m-1}(M'; \mathbb{Z}_2)$; a saber, $s'^*(\theta(r'))$. Seja $u' = D_{M'}(s'^*(\theta(r')))$ sua classe dual em $H_1(M'; \mathbb{Z}_2)$. Pela hipótese, existe $(-u) \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ tal que $i'_*(u') = i_*(-u)$ e, então, $(i_* + i'_*)(u + u') = 0$. Pela exatidão da sequência de homologia do par $(W, M \cup M')$, existe $\alpha \in H_2(W, M \cup M'; \mathbb{Z}_2)$ tal que $\partial\alpha = u + u'$.

Novamente por (4.3), à classe dual de α está associada uma única classe de homotopia $[S']_{m-1}$, onde S' é uma seção de β_g sobre W^m , de modo que $\alpha = D_W(S'^*(\theta(R)))$. Como $H^{m+1}(W; Z_2) = 0$, S' se estende a uma seção $\bar{S}$ de β_g e temos $\bar{S}^*(\theta(R)) = S'^*(\theta(R))$. Da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow H^{m-1}(W; Z_2) & \xrightarrow{(i^*, i'^*)} & H^{m-1}(M; Z_2) \oplus H^{m-1}(M'; Z_2) \rightarrow \dots \\ \downarrow D_W & & \downarrow D_M + D_{M'} \\ \dots \rightarrow H_2(W; M \cup M'; Z_2) & \xrightarrow{\partial} & H_1(M; Z_2) \oplus H_1(M'; Z_2) \rightarrow \dots \end{array}$$

segue que $u' = D_{M'}(\bar{S}_{|M'}^*(\theta(r')))$. Então, $s'^*(\theta(r')) = (\bar{S}_{|M'})^*(\theta(r'))$; logo, por (4.3), $[s']_{m-1} = [\bar{S}_{|M'}]_{m-1}$. Pelo Lema (4.5), segue que s' é homotópica a $\bar{S}_{|M'}$. Como $\bar{S}_{|M'}$ se estende a uma seção $\bar{S}$ de β_g , segue que s' também se estende a uma seção S de β_g . Então, (W, g, S) é um bordismo entre (M', f', s') e (M, f, s) , $s = S_{|M}$. $\square$

4.7 Observação. A Proposição (4.6) nos fornece uma técnica para determinar seções bordantes que não sejam homotópicas. Consideremos as mesmas hipóteses da referida proposição e tomemos $m \equiv 2 \pmod{4}$. Dado $u' \in H_1(M'; Z_2)$, se $u \in H_1(M; Z_2)$ é tal que $i'_*(u') = i_*(u)$, então para todo $v \in \ker i_*$, temos $i'_*(u') = i_*(u + v)$. Como na demonstração anterior, é possível determinar $\alpha_v \in H_2(W, M \cup M'; Z_2)$ tal que $\partial \alpha_v = u' - (u + v)$ e, por (4.3), encontrar S_v seção de β_g tal que $\alpha_v = D_W(S_v^*(\theta(R)))$.

Denotemos $S_{v|M'}$ por s'_v e, no caso particular de $v = 0$, por s' . Então, $D_{M'}(s_v'^*(\theta(r')))) = u' = D_{M'}(s'^*(\theta(r'))))$. Consequentemente, $[s'_v]_{m-1} = [s']_{m-1}$. Como a variedade M' satisfaz as hipóteses do Lema (4.5), segue que $[s'_v] = [s']$ e, portanto, (M', f', s'_v) é bordante a (M', f', s') .

Por outro lado, podemos considerar as seções $s_v = S_{v|M}$ de β_f , $v \in \ker i_*$. Como (M, f, s_v) é bordante a (M', f', s'_v) e (M, f, s) é bordante a (M', f', s') , segue que

(M, f, s_v) é bordante a (M, f, s) . Então, $l_f([s_v]) = l_f([s])$, para todo $v \in \ker i_*$. Mas, l_f pode não ser injetora. Assim, as seções s_v de β_f , $v \in \ker i_*$, não são necessariamente homotópicas.

□

4.8 Proposição. Seja N variedade n -dimensional, q -simples para $q \leq m$ e tal que o homomorfismo de Hurewicz $\mathcal{H}: \pi_m(N) \rightarrow H_m(N; \mathbb{Z})$ seja injetor.

Se (M, f) é bordante a (M', f') , é possível determinar um bordismo (W, g) entre eles de modo que o homomorfismo induzido $g_\#: \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(N)$ seja injetor.

Demonstração. Seja (W', g') um bordismo entre (M, f) e (M', f') .

Consideremos $\lambda: S^1 \rightarrow W'$ um gerador de $\ker g'_\#$ e $h: S^1 \times D^m \rightarrow W'$ um mergulho que represente λ . Tomemos $W = [W' - h(S^1 \times 0)] + D^2 \times S^{m-1} / \equiv$, onde a relação $\equiv$ identifica $h(u, tv)$ com (tu, v) , $u \in S^1$, $v \in S^{m-1}$, ou seja, W é obtido de W' por uma cirurgia do tipo $(1, m)$. O grupo fundamental $\pi_1(W)$ é isomorfo ao quociente de $\pi_1(W')$ por um subgrupo que contém λ [21].

Analisemos a possibilidade de estender g' a uma aplicação g definida em W . Para tanto, basta verificar se $G = g'_{|S^1 \times S^{m-1}}: S^1 \times S^{m-1} \rightarrow N$ se estende a $D^2 \times S^{m-1}$. Sendo

$D^2 \times S^{m-1}$ um espaço conexo por caminhos, é possível estender G ao 1-esqueleto de $D^2 \times S^{m-1}$. Quanto à extensão ao 2-esqueleto de $D^2 \times S^{m-1}$, basta observar que $\pi_1(D^2 \times S^{m-1}) = 0$ e que $G_\#([e_1]) = 0$, onde $[e_1]$ é um gerador de $\pi_1(S^1 \times S^{m-1})$.

Também podemos estender G ao q -esqueleto de $D^2 \times S^{m-1}$, para $3 \leq q \leq m$, pois a obstrução à extensão é uma classe de cohomologia em $H^q(D^2 \times S^{m-1}, S^1 \times S^{m-1}; \pi_{q-1}(N))$ que é nulo.

Uma vez que $H^{m+1}(D^2 \times S^{m-1}, S^1 \times S^{m-1}; \pi_m(N)) \cong \pi_m(N)$, analisaremos a extensão a $D^2 \times S^{m-1}$ através do seguinte processo. Retiramos de $D^2 \times S^{m-1}$ um disco fechado $D = D^{m+1}$ e observamos que $H^{m+1}(D^2 \times S^{m-1} - \dot{D}, S^1 \times S^{m-1}; \pi_m(N)) = 0$, visto que $D^2 \times S^{m-1} - \dot{D}$ é uma variedade aberta, com bordo $S^1 \times S^{m-1} \cup S^m$. Então, é possível estender G a $D^2 \times S^{m-1} - \dot{D}$. Seja $k : S^m \rightarrow N$ a restrição dessa extensão ao bordo de D . Basta, então, verificar se k se estende ao interior de D , ou equivalentemente, se k é homotópica a uma constante. Tomemos $\tilde{W}$ a variedade obtida pela união disjunta de W e $W - \dot{D}$, identificando pelo bordo comum $M \cup M'$. Então, $\partial \tilde{W} = S^m$.

Seja $\mu_{\tilde{W}} \in H^{m+1}(\tilde{W}, S^m)$ a classe fundamental de homologia. Se $\tilde{g}$ é a extensão de g a $\tilde{W}$ e $i : S^m \rightarrow \tilde{W}$ é a inclusão, então $k_*(\mu_{S^m}) = (\tilde{F} \circ i)_*(\mu_{S^m}) = \tilde{F}_* \circ i_*(\partial \mu_{\tilde{W}}) = \tilde{F}_*(i_* \partial (\mu_{\tilde{W}})) = \tilde{F}_*(0) = 0$. Sendo $\mathcal{H} : \pi_m(N) \rightarrow H_m(N; \mathbb{Z})$ um monomorfismo e $\mathcal{H}([k]) = k_*(\mu_{S^m}) = 0$, obtemos $[k] = 0$, donde segue o resultado.

Repetindo esse processo para cada gerador de $\ker g'_\#$, obtemos um bordismo (W, g) entre (M, f) e (M', f') de modo que $g_\# : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(N)$ seja injetor. $\square$

4.9 Corolário. Seja N variedade n -dimensional, satisfazendo as hipóteses da proposição anterior. Seja $[M', f', s']$ um elemento da imagem de ℓ_f . Então, existe um

bordismo (W, g, S) entre (M', f', s') e (M, f, s) , $s = S|_M$, de modo que o homomorfismo induzido $g_\# : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(N)$ seja injetor.

Demonstração. Seja $[M', f', s']$ um elemento da imagem de ℓ_f . Então, existe um bordismo (W', g', R') entre (M', f', s') e (M, f, R'_M) . Em particular, (W', g') é um bordismo entre (M, f) e (M', f') . Pela proposição anterior, podemos substituir (W', g') por um bordismo (W, g) de modo que $g_\# : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(N)$ seja monomorfismo. Retomando a demonstração da proposição anterior, analisemos a possibilidade de estender R' a uma seção R de β_g definida em W . Para tanto, basta verificar se $R'|_{S^1 \times S^{m-1}}$ se estende a $D^2 \times S^{m-1}$. A fibra L de β_g é $(m-2)$ -conexa; portanto, existe extensão de $R'|_{S^1 \times S^{m-1}}$ até o $(m-1)$ -esqueleto de $D^2 \times S^{m-1}$. Também podemos estendê-la ao m -esqueleto de $D^2 \times S^{m-1}$, pois sua obstrução pertence a $H^m(D^2 \times S^{m-1}, S^1 \times S^{m-1}; \pi_{m-1}(L))$ que é nulo.

Analisemos a extensão ao $(m+1)$ -esqueleto de $D^2 \times S^{m-1}$. Retiremos um disco fechado $D = D^{m+1}$ de $D^2 \times S^{m-1}$: uma vez que $H^{m+1}(D^2 \times S^{m-1} - \dot{D}, S^1 \times S^{m-1}; \pi_m(L)) = 0$, existe uma extensão a $D^2 \times S^{m-1} - \dot{D}$. Dessa forma, obtemos uma seção R de β_g sobre $W - \dot{D}$, que contém o m -esqueleto de W . Sendo $r' = R|_{M'} = R|_M$, a seção R é uma extensão de r' a $W - \dot{D}$ e, em particular, $R|_{W^m}$ é uma extensão de r' a W^m . A obstrução à extensão de $R|_{W^m}$ ao $(m+1)$ -esqueleto de W pertence a $H^{m+1}(W, M') = 0$; portanto, $R|_{W^m}$ se estende a uma seção S de β_g .

Obtemos, então, (M', f', s') bordante a (M, f, s) , $s = S|_M$, através do bordismo (W, g, S) , onde $g_\# : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(N)$ é um monomorfismo. $\square$

4.10 Corolário. Seja N variedade $(2m-1)$ -dimensional, 1-conexa e tal que o homomorfismo de Hurewicz $\mathcal{H}: \pi_m(N) \rightarrow H_m(N; \mathbb{Z})$ seja injetor. Então, a função l_f é sobrejetora.

Demonstração. Seja $[M', f', s'] \in \mathcal{C}_f$. Então, (M', f') é bordante a (M, f) . Pela Proposição (4.9), é possível determinar um bordismo (W, g) entre eles de modo que $g_\# : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(N)$ seja monomorfismo. Segue desse fato e da hipótese N 1-conexa que $\pi_1(W) = 0$.

Como a fibra de β_g é $(m-2)$ -conexa, é possível estender s' , que é uma seção de $\beta_{g|M'}$, a uma seção S' de β_g sobre $M' \cup W^{m-1}$. A obstrução à extensão dessa seção a $M' \cup W^m$ é uma classe em $H^m(W, M'; \pi_{m-1}(F)) \cong H_1(W, M; \pi_{m-1}(F))$.

Uma vez que $H_1(W; \mathbb{Z}) = 0$, temos que $H_1(W; \pi_{m-1}(F)) = 0$; assim, da sequência de homologia do par (W, M) , supondo M e W conexas, segue que $H_1(W, M; \pi_{m-1}(F)) = 0$. Portanto, s' se estende a uma seção S de β_g sobre W .

Considerando $s = S|_M$, temos então $l_f([s]) = [M', f', s']$.

□

Bibliografia

- [1] Brown, E. H. *The cohomology of BSO_n and BO_n with integer coefficients*. Proc. Amer. Math. Soc., 85, 283-288 (1982).
- [2] Brown, R. L. W. *Immersions and embeddings up to cobordism*. Can. J. Math. 23, 1102-1115 (1971).
- [3] Conner, P. E. e Floyd, E. E. *Differentiable Periodic Maps*. Springer Verlag (1979).
- [4] Daccach, J. A. *Cirurgia e aplicações*. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP (1974).
- [5] Dax, J. P. *Étude homotopique des espaces de plongements*. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 5, 303-377 (1972).
- [6] Gonçalves, D. L. *Generalized classes of groups, $\mathcal{C}$ - nilpotent spaces and " the Hurewicz Theorem "*. Math. Scand., 53, 39-61 (1983).
- [7] Hirsch, M. W. *Immersions of manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 93, 242-276 (1959).
- [8] Hu, S-T. *Homotopy Theory*. Academic Press Inc. (1959).
- [9] Husemoller, D. *Fibre bundles*. Mc Graw-Hill Book Company (1966).
- [10] Koschorke, U. *Vector fields and other vector bundle morphisms - A singularity approach*. Lecture Notes in Math., 847. Springer Verlag (1981).
- [11] Liao, S. D. *On the theory of obstructions of fiber bundles*. Ann. of Math. (2) 60, 146-191 (1954).

- [12] Li, B. H. *On immersions of manifolds in manifolds*. Scientia Sinica Ser. A (25), 255-263 (1982).
- [13] _____. *On classification of immersions of n -manifolds in $(2n-1)$ -manifolds*. Comment. Math. Helv. 57, 135-144 (1982).
- [14] _____. *Classification of immersions of m -manifolds in $(2m - 1)$ and $(2m - 2)$ -manifolds*. Northeastern Math. J., 2 (1), 87-99 (1986).
- [15] _____. *Immersions of manifolds and stable normal bundles*. Sci. Sinica Ser. A 30, nº 2, 136-147 (1987).
- [16] Li, B. H. e Peterson, F. P. *On immersions of k -manifolds in $(2k - 1)$ -manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. 83, 159-162 (1981).
- [17] _____. *Immersions of n -manifolds into $(2n - 2)$ -manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. 97, 531-538 (1986).
- [18] Li, G-S. *On immersions in bordism classes*. Math. Ann. 291, 373-382 (1991).
- [19] _____. *The second normal bordism group of a space pair*. Proc. Amer. Math. Soc. 118, nº 1, 259-262 (1993).
- [20] Liulevicius, A. *Immersions up to cobordism*. Ill. J. Math. 19, 149-164 (1973).
- [21] Milnor, J. W. *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds*. Differentiable manifolds - Simposia in Pure Mathematics III. AMS (1961).
- [22] Milnor, J. W. e Stasheff, J. *Characteristic classes*. Annals of Mathematics Studies nº 76. Princeton Univ. Press (1974).

- [23] Olk, C. *Immersionen von mannigfaltigkeiten in Euklidische raume*. Ph.D Thesis, Siegen Univ. (1980).
- [24] Salomonsen, H. A. *Bordism and geometric dimension*. Math. Scand. 32, 87-111 (1973).
- [25] Spainer, E. H. *Algebraic Topology*. Mc Graw-Hill Book Company (1966).
- [26] Steenrod, N. *The topology of the fibre bundles*. Princeton University Press (1951).
- [27] Szücs, A. *Immersionen in bordism classes*. Math. Proc.Camb. Philos. Soc. 103, 89-95 (1988).
- [28] Whitehead, G. W. *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer Verlag (1978).