

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Simulação de escoamentos em meios porosos utilizando o método dos volumes finitos em malhas quadtree

Joanna D’Arc Nogueira Veloso

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-C²MC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Joanna D’Arc Nogueira Veloso

Simulação de escoamentos em meios porosos utilizando o método dos volumes finitos em malhas quadtree

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
Junho de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

V432s Veloso, Joanna D'Arc Nogueira
Simulação de escoamentos em meios porosos
utilizando o método dos volumes finitos em malhas
quadtree / Joanna D'Arc Nogueira Veloso; orientador
Fabrício Simeoni de Sousa. -- São Carlos, 2024.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática
Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Quadtree. 2. Meios porosos. 3. Volumes
Finitos. 4. Lei de Darcy. I. Sousa, Fabrício Simeoni
de , orient. II. Título.

Joanna D’Arc Nogueira Veloso

Simulation of subsurface flows using finite volume methods
in quadtree meshes

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fabrício Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
June 2024

Aos meus pais e minha irmã.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus e à Nossa Senhora Aparecida por ter me dado forças para chegar até aqui, sem Eles eu nada seria.

Agradeço ao meu pai, Sebastião Gaspar Veloso, e à minha mãe, Angelita Nogueira, por serem meus maiores exemplo de superação, por serem meu porto seguro, por todo o amor e carinho que me deram nesta jornada, por terem compreendido a minha demora e por tudo que eles passaram para que eu conseguisse realizar meus objetivos. Agradeço também à minha irmã, Paula Nogueira Veloso, pelo apoio e ligações/mensagens durante esse tempo. Eu simplesmente amo vocês.

Agradeço aos meus velhos e novos amigos que fiz durante esses anos, em especial, preciso agradecer à Rameyli Godoi por toda paciência comigo durante todo esse tempo, as idas para as UPA'S e Hospitais, por nunca ter me deixado passar por tudo sozinha. Ao meu velho amigo Rudivan Barbosa, que fez de tudo para eu estar aqui e me acompanhou tanto de perto quanto à distância em todos os meus dias, obrigado por sempre ser esse amigo super verdadeiro. E sem dúvidas não posso deixar de agradecer ao amigo que São Carlos me deu, Oscar Linares, sem você nada disso aqui seria possível, obrigada por toda a sua paciência. Vocês tem um cantinho especial no meu coração. E agradeço aos demais que também foram importante, Victória, Uebert, Camila e Bruno.

Agradeço ao meu orientador, Fabrício Simeoni de Sousa, pela paciência, apoio e ensinamentos que me deu durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Laboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica (LMACC), por toda estrutura disponível.

À CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro. À Universidade de São Paulo (USP), ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), e aos professores que contribuíram para a minha formação acadêmica.

*“Se há sorte eu não sei, nunca vi”
(Renato Teixeira)*

RESUMO

VELOSO, J. D. N. **Simulação de escoamentos em meios porosos utilizando o método dos volumes finitos em malhas quadtree**. 2024. 73 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

A exploração e extração de petróleo em meios porosos é uma área de grande importância no contexto global, motivando estudos de diversas naturezas, sejam tecnológicos, experimentais, teóricos ou numéricos/computacionais. Esta dissertação aborda uma metodologia para simulação numérica de escoamentos em meios porosos, descritos por modelos simplificados de reservatórios de petróleo. A resolução deste tipo de escoamento usando as ferramentas numéricas/computacionais é bastante custosa, sendo que grande parte das pesquisas atuais nesta área se dedicam à redução do tempo computacional de simulação. A proposta desta dissertação é utilizar malhas hierárquicas do tipo Quadtree para engrossar a discretização apenas nas regiões menos importantes do escoamento, mantendo-se intactas as partes mais importantes, com o objetivo de acelerar a resolução computacional do modelo. Para tanto, foram utilizadas técnicas de discretizações de volumes finitos em malhas Quadtree, e algoritmos de homogeneização localizada. Resultados foram produzidos com o código gerado durante esta pesquisa, ilustrando que a combinação destas técnicas é bastante promissora para redução de custo computacional, mantendo-se a precisão do problema original.

Palavras-chave: Meios porosos, Volumes Finitos, Lei de Darcy, Quadtree.

ABSTRACT

VELOSO, J. D. N. **Simulation of subsurface flows using finite volume methods in quadtree meshes**. 2024. 73 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

The exploration and extraction of petroleum in porous media are of great global importance, motivating different studies, such as technological, experimental, theoretical, or numerical/computational. This dissertation addresses a methodology for the numerical simulation of flows in porous media described by simplified models of petroleum reservoirs. Solving this type of flow using numerical/computational tools is quite expensive, and much of the current research in this area is dedicated to reducing the computational simulation time. This dissertation proposes using hierarchical Quadtree meshes to coarsen the discretization only in the least important regions of the flow, keeping the most critical parts intact to accelerate the computational resolution of the model. To this end, finite volume discretization techniques in Quadtree meshes and localized homogenization algorithms were used. Results were produced with the code generated during this research, illustrating that combining these techniques is very promising for reducing computational costs while maintaining the accuracy of the original problem.

Keywords: Porous media, Finite volumes, Darcy's law, Quadtree.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação de um meio poroso.	27
Figura 2 – Relação entre porosidade e permeabilidade.	29
Figura 3 – Representação de uma árvore.	38
Figura 4 – Representação de um bloco da quadtree.	38
Figura 5 – Representação gráfica da Quadtree. Lado esquerdo é a representação em formato de árvore e o lado direito, representação em formato de malha . . .	40
Figura 6 – À esquerda uma quadtree não balanceada e à direita após o balanceamento .	41
Figura 7 – (a)-(h) Possíveis casos de configurações de estrutura quadtree; (i) caso onde não é possível ser uma configuração de uma quadtree devido os ramos diferentes tanto ao leste e ao oeste considerando a estrutura quadtree.	42
Figura 8 – Campo de permeabilidade.	43
Figura 9 – Malha <i>quadtree</i> camada 36 do SPE10	43
Figura 10 – Discretização do domínio.	47
Figura 11 – Malha centrada na célula.	47
Figura 12 – Configuração de blocos.	49
Figura 13 – Malha quadtree.	50
Figura 14 – Célula <i>a</i> da malha <i>quadtree</i>	51
Figura 15 – Célula <i>b</i> da malha <i>quadtree</i>	53
Figura 16 – Célula <i>d</i> da malha <i>quadtree</i>	55
Figura 17 – Malhas uniforme e <i>quadtree</i>	58
Figura 18 – Pressão TPFA, exata e aproximada.	59
Figura 19 – Pressão MPFA, exata e aproximada.	59
Figura 20 – Convergência do problema $p(x,y) = x + y$ utilizando malha <i>quadtree</i>	60
Figura 21 – Convergência do problema $p(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3}$ utilizando malha <i>quadtree</i>	61
Figura 22 – Convergência do problema $p(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3}$ utilizando malha uniforme.	62
Figura 23 – Campo de permeabilidade.	62
Figura 24 – Campo de permeabilidade renormalizado.	63
Figura 25 – Pressão inicial e pressão após três refinamentos.	63
Figura 26 – Campo de permeabilidade malha uniforme e <i>quadtree</i>	64
Figura 27 – Malha inicial uniforme e <i>quadtree</i>	64
Figura 28 – Malhas uniforme e <i>quadtree</i> no segundo nível.	65
Figura 29 – Estrutura das matrizes do TPFA e MPFA, respectivamente.	65
Figura 30 – Campo de permeabilidade malha uniforme e <i>quadtree</i>	66

Figura 31 – Spy das matrizes do TPFA e MPFA, respectivamente. 67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Convergência da pressão com malha <i>quadtree</i>	60
Tabela 2 – Convergência da pressão com malha <i>quadtree</i>	61
Tabela 3 – Convergência da pressão com malha uniforme.	61
Tabela 4 – Custo computacional. O ganho é calculado por T_{TPFA}/T_{MPFA}	66
Tabela 5 – Custo computacional. O ganho é calculado por T_{TPFA}/T_{MPFA}	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Processos para a recuperação do petróleo	21
1.2	Simulação numérica nos reservatórios de petróleo	22
1.3	Importância e técnicas para a redução do tempo computacional	23
2	ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS	27
2.1	Propriedades dos fluidos e das rochas	27
2.1.1	<i>Propriedades dos fluidos</i>	28
2.1.2	<i>Propriedades da rocha</i>	28
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	33
3.1	Equações governantes	33
3.1.1	<i>Lei de conservação da massa</i>	34
3.1.2	<i>Lei de Darcy</i>	35
3.1.3	<i>Escoamentos monofásicos</i>	35
3.1.4	<i>Equação da pressão</i>	36
4	QUADTREE	37
4.1	<i>Quadtree</i>	37
4.1.1	<i>Construção da quadtree</i>	38
4.1.2	<i>Balanceamento da quadtree</i>	40
5	MÉTODO NUMÉRICO	45
5.1	Método dos Volumes Finitos	45
5.2	Esquema de discretização malhas quadtree	47
5.2.1	<i>TPFA</i>	47
5.2.2	<i>MPFA</i>	48
5.2.3	<i>Renormalização da permeabilidade (upscaling)</i>	50
5.3	Discretização	50
6	RESULTADOS	57
6.1	Testes de convergência com solução manufaturada	57
6.1.1	<i>Primeiro teste</i>	57
6.1.2	<i>Segundo teste</i>	60

6.2	Simulação SPE10	62
6.2.1	<i>Exemplo 02</i>	63
6.2.2	<i>Exemplo 03</i>	66
7	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71

INTRODUÇÃO

A extração de petróleo em meios porosos é um processo complexo que envolve a recuperação de hidrocarbonetos retidos nas rochas subterrâneas, conhecidas como reservatórios. Esses reservatórios, muitas vezes situados a grandes profundidades, são constituídos por uma matriz porosa de rochas sedimentares, onde o petróleo é armazenado nas cavidades interconectadas. É essencial compreender e modelar o comportamento dos fluidos nesses meios porosos, principalmente da indústria petrolífera, a fim de maximizar a produção de petróleo, minimizar desperdícios e impactos ambientais associados a essa atividade.

Nas próximas seções, os principais aspectos da modelagem de reservatórios de petróleo serão discutidos mais detalhadamente.

1.1 Processos para a recuperação do petróleo

A recuperação do petróleo contido no subsolo é um processo complexo que envolve a extração dos hidrocarbonetos a partir de reservatórios subterrâneos. Esse processo é conhecido como exploração e produção de petróleo.

O processo de recuperação do petróleo começa com a exploração, que inclui a busca por áreas geologicamente propícias para a existência de reservatórios de petróleo. Isso é realizado por meio de estudos geológicos, geofísicos e perfurações de poços de exploração. Após a identificação das áreas de interesse, os poços de exploração são perfurados para confirmar a presença de petróleo e determinar a profundidade e as características do reservatório.

A próxima etapa envolve a avaliação do reservatório, isso inclui a coleta de informações sobre a pressão, a temperatura e as demais propriedades dos fluidos. Também são realizados testes de produção para determinar a vazão de petróleo e gás, e se a quantidade encontrada é comercialmente viável.

Após todas essas etapas, existem três formas principais de recuperar o petróleo que

está contido neste meio poroso, que são: recuperações primária, secundária e terciária (CHEN; HUAN; MA, 2006).

Inicialmente, um reservatório de hidrocarboneto está em equilíbrio e contém gás, óleo e água (HASLE; LIE; QUAK, 2007). Ao perfurar a rocha, este equilíbrio é imediatamente perturbado, a diferença de pressão entre o fluido e a superfície contribui para que parte do óleo seja extraído do reservatório, sem utilizar qualquer outro artifício. Cerca de 15% do óleo presente são extraídos até que um novo equilíbrio seja alcançado, este é o processo de recuperação primária.

Devido a queda de pressão no reservatório, menos petróleo e gás são extraídos e, portanto, a produção primária não é mais economicamente sustentável. Deste modo, inicia-se o processo secundário, que consiste em perfurar a rocha em mais lugares e injetar água ou gás no poço injetor e, com isso, parte da pressão é reconstruída (ou até aumentada), sendo capaz de empurrar o óleo para fora por meio de outros poços, conhecidos como poços produtores. A grande vantagem desta técnica é o baixo custo. No processo secundário ainda não é possível realizar a extração total do óleo, e um terceiro processo é necessário.

No processo secundário podem aparecer grandes dificuldades pois a água possui viscosidade muito menor que o óleo podendo se infiltra nele dando origem à formação de “dedos” e, quando isso ocorre, a água chega mais rápido ao poço produtor. Um simulador numérico é uma ferramenta indispensável no estudo de recuperação secundária, pois é capaz de prever o comportamento do escoamento no interior de rochas reservatórios com bastante precisão, a fim de guiar decisões para aumentar a produção de petróleo (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). Esta ferramenta é importante em todas as fases, desde a descoberta do campo até o seu abandono.

Para realizar a terceira etapa, utilizam-se mecanismos mais complexos, como o aquecimento do reservatório ou injeção de substâncias sofisticadas como solventes ou espuma. Estas técnicas são consideradas muito caras para uso comercial em grande escala e por isso são pouco utilizadas.

1.2 Simulação numérica nos reservatórios de petróleo

Para otimizar todos esses processos complexos descrito anteriormente, a utilização de métodos numéricos tornou-se indispensável.

A Lei de Darcy, que descreve o fluxo de fluidos em meios porosos, desempenha um papel crítico na modelagem do fluxo de fluidos nos meios porosos. Ela estabelece uma relação fundamental entre a velocidade do fluxo e o gradiente de pressão. A compreensão da Lei de Darcy é fundamental para calibrar os modelos numéricos e otimizar a extração de petróleo, uma vez que a permeabilidade pode variar consideravelmente dentro do reservatório.

Ao longo dos anos, várias metodologias foram propostas para obter métodos numéricos

capazes de resolverem as equações que governam o escoamento bifásico em reservatórios de petróleo. Dentre os métodos clássicos da literatura, pode-se citar o Método de Diferenças Finitas (MDF) (PEACEMAN, 1977), Método dos Volumes Finitos (MVF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Finitos Mistos (MEFM). Métodos como o dos volumes finitos e dos elementos finitos foram desenvolvidos visando a aplicação de malhas não-estruturadas, permitindo uma melhor modelagem de características físicas e geométricas complexas.

O Método dos Volumes Finitos vem sendo utilizado por grande partes dos cientistas do mundo inteiro na área de simulação de escoamento em reservatório. Isso se deve ao fato do MVF conseguir tratar domínios com geometrias complexas e à conservação tanto do nível local quanto do nível global de suas propriedades físicas; massa, energia e momento (MALISKA, 2017). Ele oferece uma maneira flexível e robusta de resolver problemas complexos que envolvem equações diferenciais parciais em domínios discretizados.

1.3 Importância e técnicas para a redução do tempo computacional

A redução do tempo computacional desempenha um papel significativo na produção e extração de petróleo, contribuindo para a eficiência, a segurança e a lucratividade, pois a indústria de petróleo e gás é altamente dependente de simulações *in silico* (computacionais) complexas e análises de dados para otimizar suas operações.

Tomada de decisões mais rápidas, modelagem de reservatórios mais precisa, controle em tempo real, redução de custos, são alguns pilares importantes para estudar e obter a redução do tempo computacional, pois deste modo, é possível melhorar a eficiência, a segurança e a lucratividade das operações. Para atender tais necessidades, os cientistas desenvolvem constantemente técnicas para otimizar algoritmos, explorar novas abordagens, como a computação paralela e distribuída (SERPA *et al.*,). Portanto, com o uso de tecnologias avançadas de computação, as empresas podem tomar decisões mais precisas, otimizar as operações e responder rapidamente às mudanças nas condições tanto do mercado quanto dos reservatórios.

A fim de superar a complexidade algorítmica, foram introduzidos alguns métodos. Por exemplo, o método multiescala, que é utilizado em várias áreas da ciência e engenharia para lidar com sistemas complexos ou fenômenos que ocorrem em diferentes escalas de tamanho (ROCHA; PEREIRA; SOUSA, 2020).

É possível utilizar o método multiescala na simulação e modelagem de fluxos de fluidos em meios porosos. Ele é projetado para capturar características complexas que ocorrem em escalas diferentes dentro desses meios. A principal ideia por trás deste método é que meios porosos são geralmente caracterizados por uma hierarquia de escalas de heterogeneidade. Por-

tanto, o método divide o problema em escalas distintas e aborda cada escala separadamente, ou seja, os métodos multiescala possuem duas medidas de malha, a malha grossa e a malha fina (ARBOGAST *et al.*, 2007). Deste modo, o método multiescala permite que pesquisadores consigam realizar simulações em diferentes escalas sem a necessidade de realizar simulações extremamente detalhadas em todas as escalas. Isso torna as simulações mais eficientes e muitas vezes, mais precisas em comparação com a abordagem de uma única escala. Existe também a vantagem do método multiescala em relação a redução do custo computacional.

Outra técnica que existe na simulação de reservatórios é o método de homogeneização *upscaling*. É utilizada para estimar propriedades efetivas do reservatório em uma escala maior do que a escala do modelo de simulação original. O método de homogeneização *upscaling* envolve a média das propriedades do reservatório (permeabilidade e porosidade) em uma determinada região da célula para obter valores médios em uma escala mais grossa. Este método é bem eficaz quando deseja-se obter uma representação mais precisa do comportamento do reservatório em escalas maiores, porém não deseja-se aumentar significativamente a carga computacional da simulação (QI; HESKETH, 2005).

A Quadtree é uma estrutura de dados espacial ou árvore na qual cada nó interno tem quatro filhos (FINKEL; BENTLEY, 1974). A construção da árvore é realizada por meio da divisão recursiva de um espaço bidimensional retangular em quatro regiões ou quadrantes de igual tamanho. Cada nó da quadtree corresponde a um quadrante. Um dos critérios para a divisão é normalmente baseado em variações locais de modo que as sub-regiões contidas em cada quadrante apresentam valores semelhantes. O intuito dessa estratégia visa capturar a redundância de informação de modo a reduzir o número operações computacionais aplicadas no espaço de entrada. A técnica tem sido empregada em diversas aplicações como processamento de imagens, compressão de imagens e simulação em reservatórios de petróleo (LINARES *et al.*, 2017).

Neste projeto de mestrado, estamos aplicando a técnica de divisão do espaço baseada em Quadtree como um processo de pré-processamento. Essa abordagem visa capturar a redundância de informações presentes nos campos de permeabilidade, com o objetivo de reduzir o número de operações computacionais necessárias para resolver o modelo matemático proposto. Essa redução se reflete em uma significativa melhoria no tempo computacional quando comparado com o método tradicional.

Para as simulações foi utilizado um laptop da marca Dell, Ubuntu 18.04.6, Intel i7-4810MQ (8) 3.800GHz, 4th Gen Core Processor com memória de 8Gb.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

- [Capítulo 2](#), apresenta as características de um meio poroso, as propriedades dos fluidos e das rochas;
- [Capítulo 3](#), são apresentadas as equações fundamentais para a modelagem do escoamento

em meios porosos;

- [Capítulo 4](#) descreve-se a estrutura Quadtree, suas propriedades e algoritmos utilizados para o desenvolvimento da sua implementação utilizando a linguagem(...);
- [Capítulo 5](#) estão detalhadas as discretizações das equações do modelo matemático, baseadas nos métodos TPFA (*Two-Point Flux Approximation*) e o MPFA (*Multi-Point Flux Approximation*);
- [Capítulo 6](#) apresenta-se os resultados numéricos obtidos nesta pesquisa;
- [Capítulo 7](#) todas as conclusões obtidas.

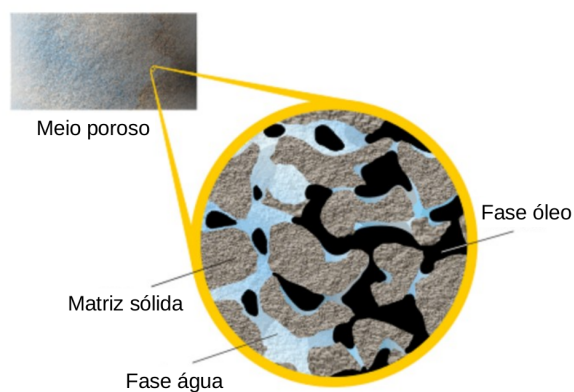
ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS

Quanto maior for o conhecimento sobre as propriedades existentes nos reservatórios de petróleo, mais confiável será a previsão do seu comportamento. Portanto, neste capítulo serão definidas as principais propriedades e conceitos dos fluidos e das rochas em um reservatório de petróleo. Tais definições são importantes para a construção do modelo matemático.

2.1 Propriedades dos fluidos e das rochas

Um meio poroso é um sólido com espaços vazios, que são chamados de poros, tipicamente os poros são preenchidos por fluidos e/ou gases. Reservatórios de petróleo são meios porosos naturais constituídos por rochas sedimentares, nos quais petróleo e gás são encontrados. A distribuição e a fração de volume desses poros são responsáveis por determinar as propriedades da rocha, que governam o fluido de hidrocarbonetos (composto orgânico formado apenas por átomos de carbono e hidrogênio), no reservatório (HASLE; LIE; QUAK, 2007). A Figura 1 ilustra um meio poroso.

Figura 1 – Representação de um meio poroso.



Fonte: SINMEC (2019).

2.1.1 Propriedades dos fluidos

A matéria pode apresentar-se sob diferentes formas: sólida, líquida, gasosa e plasma. Os fluidos compreendem as fases líquidas e gasosa da matéria. Os sólidos diferem-se dos fluidos no que diz respeito à resistência às tensões de cisalhamento. O fluido é uma substância que deforma-se continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (SEDANO, 2013), já alguns sólidos deformam-se também quando uma tensão de cisalhamento lhe é aplicada, porém, a sua deformação não aumenta continuamente com o tempo (FOX; PRITCHARD, 2006). Fluidos escoam de formas diferentes, isto ocorre devido uma propriedade, a viscosidade. Na literatura, a viscosidade normalmente é representada pela letra grega μ e definida como a resistência sofrida por um fluido ao escoar.

A densidade (ρ), é a relação entre a massa do fluido (m), e o volume da fase (V). O seu cálculo é feito pela seguinte expressão:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.1)$$

Outra propriedade importante é a incompressibilidade de um fluido. Diz-se que um fluido é incompressível quando sua densidade é constante ou sua variação ao longo do escoamento é desprezível. Vale ressaltar que nesta dissertação consideramos o fluido incompressível no modelo matemático utilizado.

2.1.2 Propriedades da rocha

Informações sobre as propriedades das rochas, constituem-se em fatores decisivos para o estudo do comportamento dos reservatórios petrolíferos.

A porosidade é uma das mais importantes propriedades das rochas, pois mede a capacidade de armazenamento de fluidos (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). A porosidade é definida como sendo a relação entre o volume vazio de uma rocha e o seu volume total, ou seja,

$$\phi = \frac{V_v}{V_t}, \quad (2.2)$$

onde ϕ é a porosidade, V_v o volume vazio e V_t o volume total. O volume vazio é normalmente denominado volume poroso da rocha, V_p , e o V_t é dado pela soma do volume poroso e do volume com matéria sólida da rocha, V_s , ou seja (RENHA, 2015)

$$V_t = V_p + V_s, \quad (2.3)$$

portanto pode-se reescrever (2.2) como,

$$\phi = \frac{V_p}{V_p + V_s}. \quad (2.4)$$

Existem vários métodos para determinar a porosidade da rocha, tais como amostragem, perfilagem do poço ou análise de teste de pressão em algumas situações especiais. O método

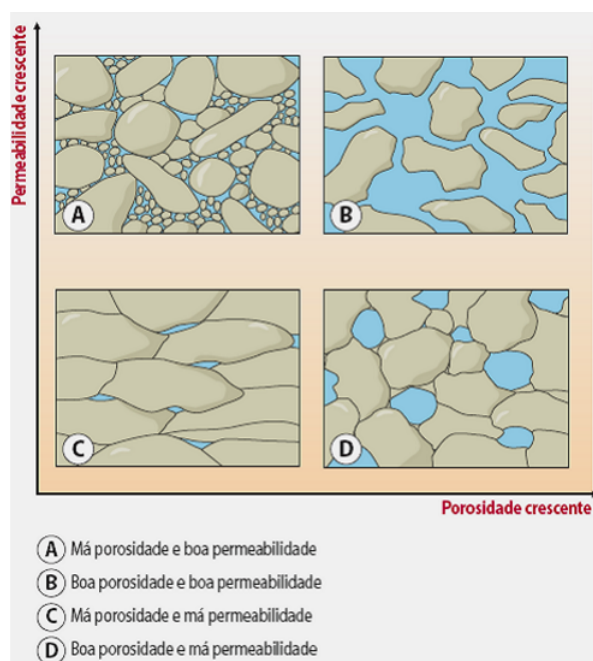
mais comum, no entanto, é o que usa pequenas amostras da rocha-reservatório. O valor da porosidade de grandes porções da rocha é obtido estatisticamente a partir dos resultados de análises de numerosas amostras (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

Outra propriedade de extrema importância é a permeabilidade. A permeabilidade de um meio poroso é a capacidade de deixar-se atravessar por fluidos, denotada por um tensor \mathbf{K} , ou seja, a permeabilidade é a medida da capacidade da rocha de transmitir fluidos através dos poros interconectados. Quando o meio transmite um único fluido, a permeabilidade é chamada de permeabilidade absoluta e quando a rocha está saturada por dois ou mais fluidos a capacidade de transmissão de um desses fluidos chama-se permeabilidade efetiva, k_i (do fluido i).

Como \mathbf{K} é um tensor, a permeabilidade nas suas diferentes direções depende da permeabilidade nas outras direções (HASLE; LIE; QUAK, 2007). Portanto, se as componentes não diagonais do tensor são nulas e as componentes diagonais do tensor são iguais, então diz-se que o meio poroso é isotrópico. Caso contrário, o meio é anisotrópico.

Vale ressaltar que a permeabilidade não deve ser confundida com a porosidade, pois em um meio com alta porosidade pode não ser capaz de permitir o escoamento dos fluidos em todas as direções (TEIXEIRA *et al.*, 2011). A Figura 2 ilustra a relação da porosidade e permeabilidade.

Figura 2 – Relação entre porosidade e permeabilidade.



Fonte: ALEMDASOULAS'S BLOG (2015).

Os fluidos são considerados miscíveis quando dois ou mais fluidos entre si, misturados em quaisquer proporções formam uma mistura homogênea (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). A miscibilidade entre os fluidos depende das suas composições e das condições de temperatura e pressão às quais encontra-se o sistema submetido.

O fenômeno da capilaridade que ocorre no interior dos meios porosos, que constituem os reservatórios de petróleo, deve-se ao fato de que as jazidas petrolíferas, em geral, contêm dois ou mais fluidos imiscíveis. Por exemplo, nos reservatórios de óleo encontram-se em contato pelo menos dois fluidos imiscíveis, água e óleo.

Quando fluidos imiscíveis são colocados em um recipiente, o mais denso escoar para baixo do menos denso, constituindo superfícies de separação entre os fluidos. Isso não ocorre em um meio poroso formado por capilaridade de diferentes diâmetros, pois a superfície de separação neste caso não é brusca, existindo uma zona de transição devida aos fenômenos capilares, que são resultados das atrações entre as moléculas da massa fluida.

Portanto, quando duas fases entram em contato e não se misturam, cada uma exerce uma pressão sobre a outra. A pressão capilar (p_c) é a diferença entre essas pressões, ou seja,

$$p_c = p_o - p_w, \quad (2.5)$$

onde p_o é a pressão do óleo e p_w a pressão da água. Nesta dissertação os efeitos capilares foram desprezados para simplificar o modelo matemático, portanto, a relação entre pressões das fases é considerada na equação abaixo:

$$p_w = p_o = p_c. \quad (2.6)$$

Os espaços vazios de um meio poroso podem estar parcialmente preenchidos por um determinado líquido e os espaços remanescentes por água. Ou ainda, dois ou três líquidos imiscíveis podem preencher todo o espaço vazio.

Define-se saturação de um determinado fluido em um meio poroso como sendo a fração ou a porcentagem do volume de poros ocupados pelo fluido, ou seja,

$$S_i = \frac{V_i}{V_p}, \quad (2.7)$$

onde S_i é a saturação da fase i (fase água (w), óleo (o) ou gás (g)) e V_p o volume poroso. Como consequência da equação da hipótese anterior, tem-se

$$\sum S_i = 1. \quad (2.8)$$

Portanto, para o fluxo bifásico em um meio poroso saturado, considerando que o meio é preenchido por água e óleo, obtêm-se,

$$S_w + S_o = 1. \quad (2.9)$$

A vazão de uma fase em um meio poroso saturado com dois ou mais fluidos é sempre menor que a vazão de uma fase quando somente ela satura o meio poroso. A capacidade de

transmissão de um fluido que satura cem por cento de um meio poroso já foi definida como sendo a permeabilidade absoluta. Portanto, define-se permeabilidade relativa sendo a razão entre a permeabilidade efetiva e a permeabilidade absoluta. Assim, a permeabilidade relativa representa o quanto uma fase influencia o comportamento da outra fase (FERNANDES, 2013). Mesmo que as fases realmente não se misturam para a modelagem em macroescala, assumimos que todas as fases podem estar presentes no mesmo local (HASLE; LIE; QUAKE, 2007).

Para determinar as permeabilidades relativas, os modelos mais comuns são Brooks-Cory e Van Genuchten (HELMIG, 1997). Em um escoamento bifásico saturado, normalmente escolhe-se as permeabilidades relativas

$$k_{rw}(s) = \left(\frac{s - s_{wr}}{1 - s_{wr} - s_{or}} \right)^2, \quad k_{ro}(s) = \left(\frac{1 - s - s_{wr}}{1 - s_{wr} - s_{or}} \right)^2, \quad (2.10)$$

onde s é a saturação da água, s_{wr} e s_{or} são saturações relativas da água (w) e óleo (o), respectivamente.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos as equações que modelam o escoamento bifásico e incompressível de água e óleo em um meio poroso, que podem ser representadas por um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, formado por uma equação elíptica de pressão e uma equação hiperbólica de saturação ([PEACEMAN, 1977](#)).

Para formular matematicamente o problema, considera-se o escoamento imiscível de um fluido incompressível que ocupa todos os espaços vazios do meio poroso isotrópico. Dessa forma, as leis e equações utilizadas são:

- Lei de conservação da massa;
- Lei de Darcy;
- Equação elíptica para a de pressão;
- Equação hiperbólica para a saturação.

A partir das equações básicas de estudo do fluxo em meios porosos, podem ser desenvolvidos modelos matemáticos com os quais procura-se obter informações do reservatório, tais como, pressão e vazão de produção. Esse estudo pode ser complexo ou um pouco mais simples, dependendo do grau de simplificações utilizadas para o modelo matemático ([ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006](#)).

3.1 Equações governantes

Afim de obter as leis de conservação, considera-se um volume de controle V , com o contorno sendo $\partial V = S$, onde a superfície é orientada com vetor normal apontando do interior para o exterior do volume de controle. Para esse problema, a descrição das propriedades do escoamento é dada em termos de grandezas macroscópicas.

3.1.1 Lei de conservação da massa

De acordo com a lei de conservação da massa, só há variação de massa em um volume de controle quando existe diferença na quantidade de fluxo de entrada e saída, ou seja, na ausência de fontes ou sorvedouros, toda massa que entra em um volume de controle deve sair e/ou se acumular neste mesmo volume de controle (FORTUNA, 2000).

Pode-se expressar a equação que rege esta lei como

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (3.1)$$

onde ρ é a massa específica, \mathbf{u} é o campo de velocidades do escoamento e \mathbf{n} o vetor normal.

Aplicando o Teorema da Divergência na Equação (3.1), pode-se obter a integral de volume. Portanto, utilizando o Teorema da Divergência e reescrevendo a Equação (3.1), chega-se à

$$\int_V [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] dV = 0. \quad (3.2)$$

A massa específica não se altera com o tempo pois, para cada fase, a viscosidade e a massa específica são constantes. No domínio como um todo só há variação destas propriedades ao mudar de uma fase para outra, ou seja, ocorre um salto nessas propriedades apenas na interface. Logo, pode-se concluir que

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (3.3)$$

onde $\frac{D\rho}{Dt}$ é a derivada material de ρ , que é dada por

$$\frac{D\rho}{Dt} = \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho. \quad (3.4)$$

Como V é um volume arbitrário, tem-se da Equação (3.2) que

$$\int_V [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] dV = \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.5)$$

Da Equação (3.5), obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.6)$$

Usando a definição de derivada material, Equação (3.4), pode-se reescrever a equação anterior como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.7)$$

Como $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ e a massa específica é diferente de zero, a equação de conservação da massa resume-se a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) é conhecida como condição de incompressibilidade.

3.1.2 Lei de Darcy

A Lei de Darcy descreve o fluxo de fluidos em meios porosos, como solos e rochas. Em 1856, observando resultados de experiências que tinham como objetivo a purificação da água através da utilização de filtros de areia, Henry Darcy concluiu que existia uma relação direta entre a vazão que atravessava o leito de areia e a diferença de carga associada a essa vazão (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

Darcy descobriu que a velocidade de filtração é proporcional a uma combinação do gradiente da pressão do fluido do experimento. A proporcionalidade depende do meio onde o fluido escoar, através da permeabilidade absoluta.

A Lei de Darcy (ou velocidade de Darcy) em sua forma diferencial em três dimensões é dada por

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z), \quad (3.9)$$

onde

- \mathbf{u} é a velocidade;
- $K(x, y, z)$ é a permeabilidade absoluta do meio poroso;
- ∇p é o vetor gradiente da pressão;
- μ é a viscosidade do fluido;
- g é a constante gravitacional;
- ρ é a massa específica do fluido;
- $Z = (0, 0, z(x, y, z))$ é o vetor profundidade.

3.1.3 Escoamentos monofásicos

Escoamentos monofásicos em meios porosos são induzidos devido à aplicação de pressão ou devido à imposição de fluxo nas fronteiras do domínio que contém um fluido em seu interior.

Por conveniência computacional e expositiva, representa-se os poços como termos fontes $q(x, t)$. A função q pode descrever tanto poços injetores como poços produtores em um reservatório.

Sabe-se que a conservação da massa afirma que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = q. \quad (3.10)$$

Substituindo a Lei de Darcy (3.9) na equação da conservação da massa (3.10), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) - \nabla \cdot \left(\rho \frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \right) = q. \quad (3.11)$$

Considerando as hipóteses simplificadoras já mencionadas anteriormente, a equação (3.11) reduz-se à

$$-\nabla \cdot \left(\frac{K}{\mu} \nabla p \right) = \frac{q}{\rho}, \quad (3.12)$$

que é a equação que descreve um escoamento monofásico.

3.1.4 Equação da pressão

Considere-se escoamento bifásico em meios porosos onde à fluxo de dois fluidos, neste caso, água e óleo. Apresentaremos a formulação clássica da modelagem matemática para o fluxo bifásico incompressível de fluidos imiscíveis em meios porosos.

Como visto na seção anterior, a Lei de Darcy é definida para escoamentos monofásicos. A sua utilização para escoamento bifásico é a partir da suposição de que a Lei de Darcy é válida para cada fase (água e óleo) que escoam, deste modo, pode-se reescrever a Lei da seguinte forma

$$\mathbf{u}_i = -\frac{K_i}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i g \nabla z), \quad (3.13)$$

onde i representa ou a fase água (w) ou fase óleo (o).

Portanto, a Lei de Darcy modificada para escoamento bifásico é dada por

$$\mathbf{u}_i = -\lambda_i K_i (\nabla p_i + \rho_i g \nabla z), \quad (3.14)$$

no qual $\lambda_i = \lambda_i(S_i)$ é a mobilidade (facilidade com que uma fase escoar no meio) da fase i , dada por $\lambda_i = \frac{k_{ri}(S_i)}{\mu_i}$, tal que $k_{ri}(S_i)$ é a permeabilidade relativa a fase i , portanto, para as outras fases, tem-se

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w} \quad e \quad \lambda_o = \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o}.$$

Desta forma, considerando todas as nossas hipóteses simplificadoras e escrevendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$, a equação (3.14) pode ser reescrita como

$$\mathbf{u} = -\lambda K \nabla p, \quad (3.15)$$

onde $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$ é a mobilidade total e $p = p_w = p_o$ é a pressão global do sistema.

Escrevendo a vazão volumétrica total como $q_t = \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_o}{\rho_o}$, tem-se

$$-\nabla \cdot (\lambda K \nabla p) = q_t, \quad (3.16)$$

ou

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = q_t, \quad (3.17)$$

obtendo-se assim a equação elíptica de pressão.

QUADTREE

Neste capítulo são introduzidos os conceitos necessários para a compreensão de estrutura de dados espacial Quadtree e algumas das terminologias relacionadas. Tais estruturas são amplamente utilizadas, como em processamento de imagens, simulações físicas, computação gráfica, análise de algoritmos, robótica, CFD e geração de malhas não uniformes (LINARES *et al.*, 2017). Diante do elevado custo computacional requerido para simulações de reservatórios, a estratégia do uso da quadtree para geração de malhas se destaca pelo atrativo de permitir o uso de regiões menos refinadas onde não necessitam de um alto detalhamento.

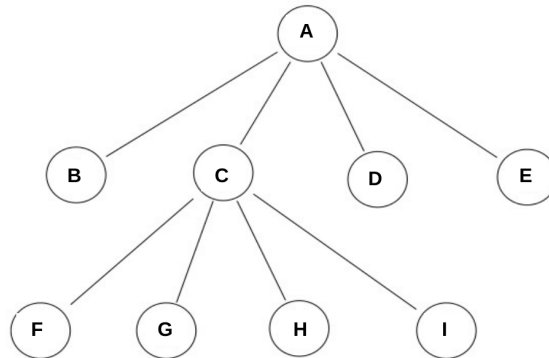
Ao resolver um sistema de equações diferenciais parciais, alguns fenômenos, como discontinuidades e singularidades, precisam ser capturados e a utilização de malhas uniformes não é uma escolha viável computacionalmente. O uso de uma malha menos refinada levará a resultados insatisfatórios a respeito dos fenômenos a serem capturados, enquanto o uso de malhas mais finas não é econômico em termos computacionais. Para obter uma melhor precisão, usa-se da estratégia de refinamento adaptativo, que tem como objetivo ajustar a resolução de malhas automaticamente nas regiões onde elas são mais necessárias (GHOLINEZHAD; JAMSHIDI; HAJIZADEH, 2015; RASAEI; SAHIMI, 2009).

4.1 *Quadtree*

A definição de *Árvore* é necessária para a compreensão da Quadtree. Uma árvore é um grafo conexo acíclico, composta por elementos, chamados de nós. A [Figura 3](#) ilustra uma árvore, o nó raiz que não tem pai da árvore é representado pelo nó A e cresce de cima para baixo.

É importante observar que todos os nós da árvore estão associados a sua raiz, portanto, o acesso a qualquer nó pode ser feito a partir da raiz. Na [Figura 3](#) o conjunto de nós representados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H e I são conectados através de arestas que indicam como os nós estão relacionados.

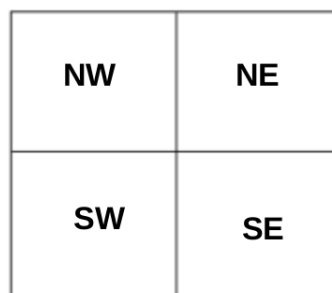
Figura 3 – Representação de uma árvore.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se então definir a árvore *Quadtree* como uma estrutura de dados hierárquica dimensional e espacial que permite a geração malhas quadrangulares, que foi proposta por FINKEL; BENTLEY em 1974. A estrutura é construída por meio da divisão recursiva do espaço em quatro quadrantes iguais como é ilustrado na Figura 4, no qual, cada nó interno (não folha) contém exatamente quatro filhos. O conjunto de quatro quadrantes, chamaremos de bloco. Cada quadrante, nós filhos e nós folhas, são nomeados considerando a sua localização: noroeste (NO), nordeste (NE), sudoeste (SW) e sudeste (SE). E, a partir daí, são associados com a árvore, respeitando a seguinte ordem: NE-NW-SW-SE, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Representação de um bloco da quadtree.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.1 Construção da quadtree

A Quadtree pode ser implementada por meio de duas estruturas, *Quadtree* (Algoritmo 2) e *Node* (Algoritmo 1). Observe que na estrutura *Quadtree* apenas o nó raiz (*root*) é definido, enquanto que na estrutura *Node* são definidos os quatro filhos e uma matriz M que contém o respectivo quadrante de tal forma que a união das respectivas matrizes M de cada um dos quatro nós vizinhos devem formar a matriz M do nó pai. Observe também que a matriz M do nó raiz contém a matriz de entrada sem nenhuma divisão.

Algoritmo 1 – Estrutura Nó

```

struct NODE
  matrix  $M$                                 ▷ Matriz  $m \times n$ 
                                           ▷ Quatro nós filhos

  Node NE
  Node NW
  Node SW
  Node SE
end struct

```

Algoritmo 2 – Estrutura Quadtree

```

struct QUADTREE
  Node Root                                ▷ Nó raiz
end struct

```

A construção da Quadtree é normalmente realizada em apenas uma execução recursiva onde o dado de entrada é a matriz M que é inicialmente atribuída ao nó raiz. Iterativamente a matriz M é dividida em quatro novos elementos retangulares até o critério de parada, normalmente um limiar ser atendido. Quatro novos nós filhos são criados e contem um quadrante da matriz M . No algoritmo 3 é detalhado processo de construção da árvore.

Algoritmo 3 – BuildQuadtree

Requer: *Node* ▷ A primeira chamada deve ser com o nó raiz contendo a matriz de entrada M

Assegure: *Built Quadtree*

```

se Node == NULL então
  Return
fim se
[NE, NW, SW, SE] = NULL
para todo  $i \in Node.M$  faça                                ▷  $M$  is a  $m \times n$  matriz
  se  $i < threshold$  então
    ▷ Divir a matriz e criar 4 novos nós filhos que contem o respetivo quadrante da matriz
    [NE, NW, SW, SE] = Split(Node,  $M$ )
    Break
  fim se
fim para
                                ▷ Chamada recursiva para cada uns dos 4 nós

BuildQuadtree(NE)

BuildQuadtree(NW)

BuildQuadtree(SE)

BuildQuadtree(SE)

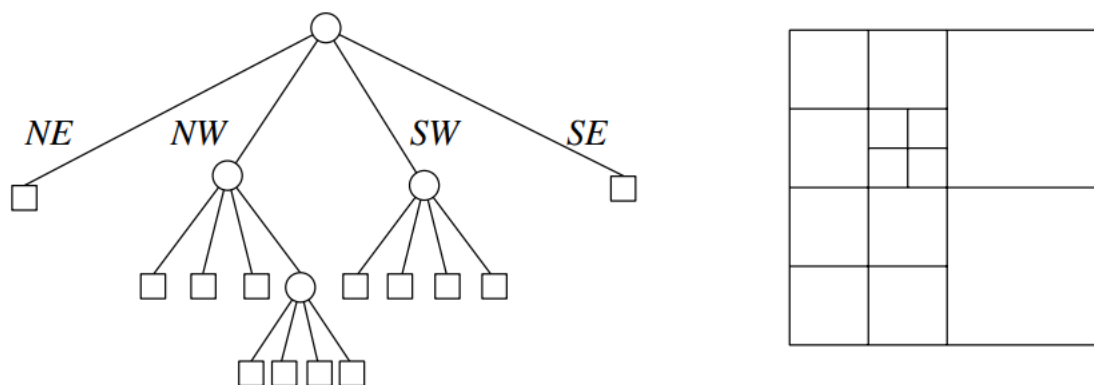
```

Observe que é possível representar graficamente a Quadtree de duas formas, uma em formato de árvore (Figura 5.a) e outra desenhando a malha resultante das divisões recursivas da

matriz de entrada M (Figura 5.b). É importante notar que a malha gerada pela Quadtree tem a propriedade de capturar a redundância de informação no dado de entrada, ou seja, regiões com baixa variação (definida por um limiar) são representadas por quadrantes maiores de modo que todos os elementos contidos na mesma região podem ser considerados iguais ou equivalentes.

A capacidade de captura de informação redundante da Quadtree é sua característica mais importante que neste trabalho propomos para reduzir a quantidade de cálculos normalmente realizados usando uma malha regular.

Figura 5 – Representação gráfica da Quadtree. Lado esquerdo é a representação em formato de árvore e o lado direito, representação em formato de malha



Fonte: [Gholinezhad, Jamshidi e Hajizadeh \(2015\)](#).

4.1.2 Balanceamento da quadtree

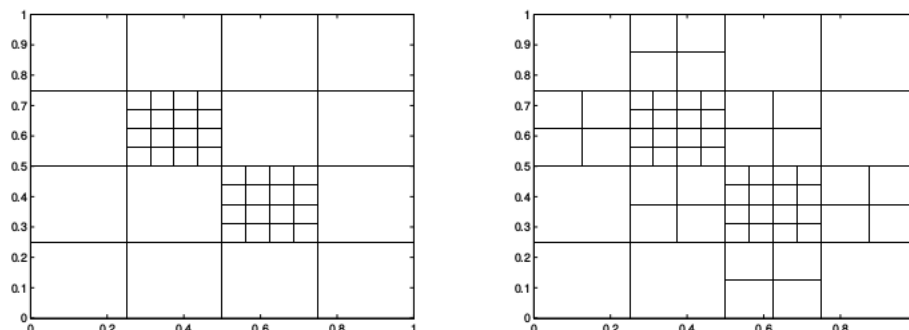
Uma definição relevante é o nível de um nó. Sabe-se que os nós estão conectados por arestas, e o número de conexões de um nodo com outro até a raiz da árvore acrescido de 1 é definido como o nível deste nó. Portanto, o nível de um elemento é o número de decomposições necessárias para obter esse elemento. Analisando a [Figura 3](#), percebe-se que existe um caminho da raiz até cada nó folha que, neste caso, são F, G, H e I , constituído de 2 arestas, portanto, acrescido de 1, obtém-se o nível do nó que, para esse caso, é o nível 3, onde a raiz será sempre o primeiro nível (nível zero).

Se a malha for quadrada uniforme de nível m , tem-se 4^{m-1} nodos gerados com um número total de $\sum_{i=1}^m 4^{i-1} = \frac{4^m - 1}{3}$ nodos na árvore, gerando uma malha $m \times m$ com espaçamento $dy = dx = \frac{1}{2^{m-1}}$.

Para evitar formulações complexas e aumentar a estabilidade do método em geral, nenhuma célula pode ter uma vizinha adjacente e uma célula vizinha diagonal com uma diferença de nível de refinamento maior que um, ver [Greaves e Borthwick \(1998\)](#) [22] e [45]. O nível entre os nós adjacentes não pode exceder 2 pois, caso contrário, a implementação das equações se tornam muito complexas ou impossíveis, dificultando deste modo a convergência. Quando esse

critério é satisfeito, diz-se que se trata de uma *quadtree* balanceada, onde um exemplo é ilustrado na [Figura 6](#), e o processo é conhecido como balanceamento.

Figura 6 – À esquerda uma quadtree não balanceada e à direita após o balanceamento



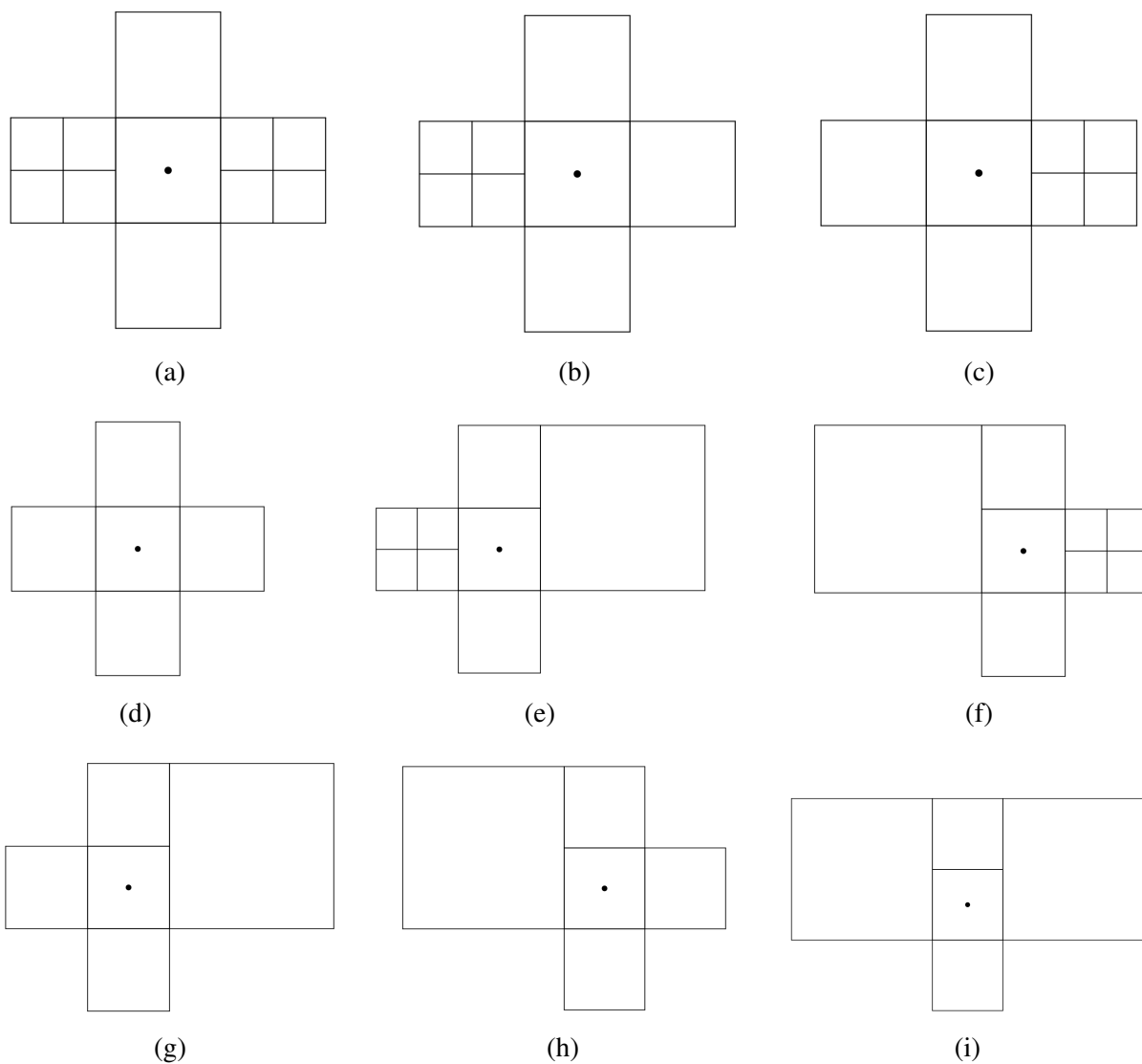
Fonte: [Gholinezhad, Jamshidi e Hajizadeh \(2015\)](#).

Se o número de quadrantes vizinhos for maior que 2, ele é subdividido em 4 quadrantes mais finos. Este processo continua até que todos os quadrantes não tenham mais de 2 quadrantes vizinhos. Esta técnica aumenta o número de blocos da grade, porém simplifica a discretização e a implementação de equações.

Cada nó ou quadrante possuem, no máximo, quatro vizinhos de aresta e quatro vizinhos de vértice. Tem-se interesse em saber quais são os vizinhos de aresta, pois estes serão usados na discretização das equações.

Ao selecionar uma célula, existem nove permutações diferentes, considerando tamanhos dos vizinhos leste e oeste desta célula. Na [Figura 7](#), tem-se a ilustração de todos estes casos. É possível notar que, somente oito dos nove são viáveis na grade *quadtree* balanceada, uma vez que, na [Figura 7i](#), as células vizinhas leste e oeste são ramos diferentes em uma *quadtree*. Para norte e sul, os casos são análogos em relação a célula escolhida.

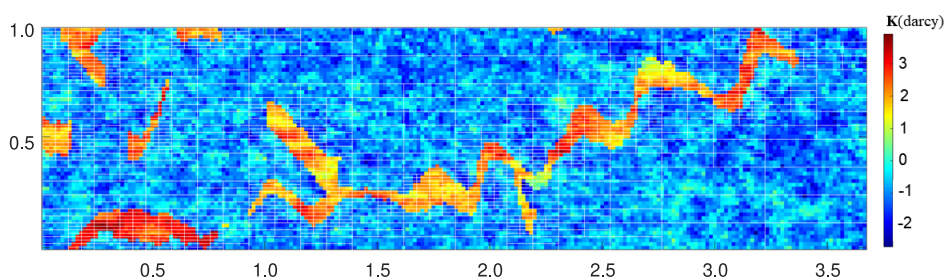
Figura 7 – (a)-(h) Possíveis casos de configurações de estrutura quadtree; (i) caso onde não é possível ser uma configuração de uma quadtree devido os ramos diferentes tanto ao leste e ao oeste considerando a estrutura quadtree.



Fonte: Elaborada pelo autor.

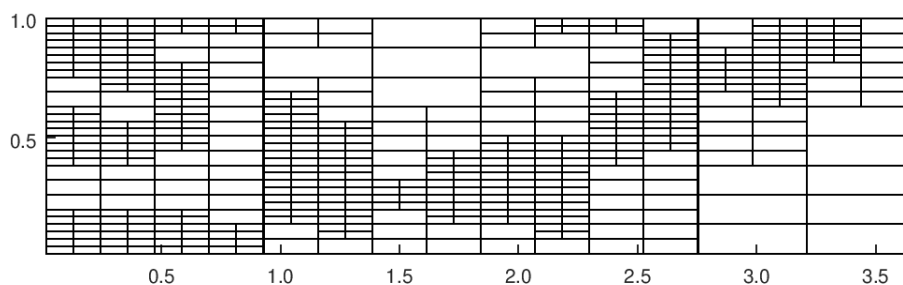
Apresenta-se um teste da implementação da estrutura de dados quadtree para o campo realístico do projeto SPE10, camada 36, (disponível em: <<http://www.spe.org/web/csp>>), fornecido pela Sociedade de Engenheiros de Petróleo (*Society of Petroleum Engineers-SPE*) para a realização de simulações em reservatórios de petróleo. O *benchmark* SPE10 fornece dados de permeabilidade em uma amostra 3D representada em células $60 \times 220 \times 85$. A Figura 8 ilustra o campo de permeabilidade considerado. A Figura 9 ilustra a representação da malha *quadtree* para a camada 36. Os refinamentos de malha capturam perfeitamente o canal de alta permeabilidade.

Figura 8 – Campo de permeabilidade.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 – Malha *quadtree* camada 36 do SPE10



Fonte: Elaborada pelo autor.

MÉTODO NUMÉRICO

Muitos fenômenos físicos podem ser descritos por sistemas de equações diferenciais, mas nem todos possuem soluções analíticas. Assim, surge a necessidade da discretização numérica, cujo objetivo, é obter uma solução aproximada para o problema, que resultam em expressões algébricas discretas que envolvem as grandezas físicas do modelo matemático.

O problema proposto nesta dissertação exige muitas restrições para que se obtenha sua solução analítica, isto é inviável em um reservatório de petróleo, desse modo, torna-se necessário utilizar uma formulação numérica (CHEN, 2007).

Neste capítulo apresenta-se a forma discreta das equações diferenciais responsáveis por modelar o escoamento em reservatórios de petróleo. A característica de conservação de grandezas físicas pelo o Método dos Volumes Finitos o torna-se atrativo para para o nosso estudo.

5.1 Método dos Volumes Finitos

O método dos Volumes Finitos, foi introduzido em 1971 por McDonald e estendido por MackCormack e Pauli em 1972 para o caso bidimensional. O MVF tem como base a utilização de uma formulação integral das leis de conservação no domínio físico do problema em questão (CARVALHO, 2005; SOUZA, 2015).

Uma vantagem do MVF é possuir a característica de conservação das propriedades físicas em nível discreto, isto é, suas expressões algébricas representam o balanço da grandeza em um volume de controle (MALISKA, 2017). Outra vantagem é a de ser flexível para trabalhar com diversos tipos de volume de controle, produzindo boas aproximações em malhas estruturadas ou em malhas não-estruturadas.

A inicialização do MVF é feita utilizando a forma integral das equações de conservação (MALISKA, 2017), o domínio é subdividido em volumes de controle contíguos e as equações de conservação são aplicadas a cada volume de controle. A etapa principal do método é, portanto,

calcular os fluxos destas propriedades nas interfaces dos volumes de controle (AMBRUS *et al.*, 2012).

Há duas técnicas mais utilizadas de volumes finitos: centrados nos vértices (*node-centered*) e centrados em células (*cell-centered*), que dependem de como os volumes elementares são definidos, ambos são capazes de lidar com malhas não ortogonais. Nos volumes finitos centrados em vértices, as variáveis são definidas nos nós da malha e os volumes de controle são formados ao seu redor. Na técnica dos volumes finitos centrado na célula, os nós são posicionados nos centroides dos elementos da malha, sendo o volume de controle definido pelo próprio elemento da malha, ao qual está associada as variáveis do problemas. Outra vantagem do MVF é a de ser flexível para trabalhar com diversos tipos de volume de controle, produzindo boas aproximações em malhas não-estruturadas.

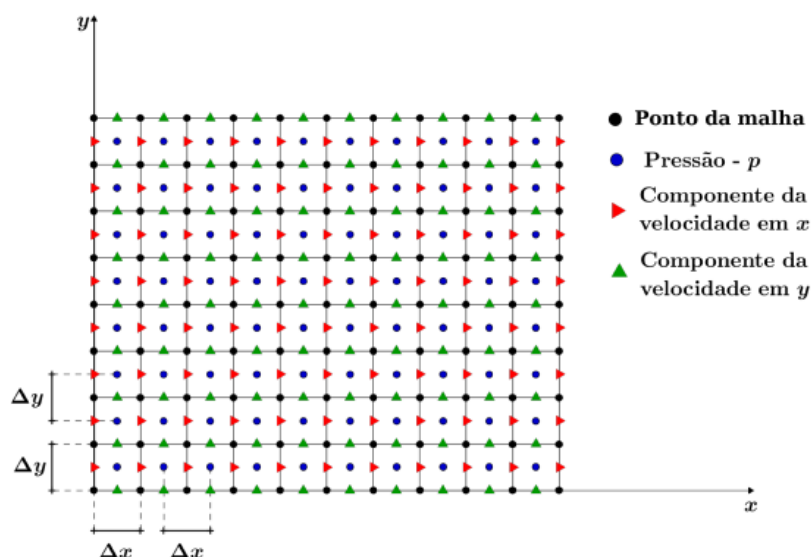
De forma geral, o método é composto pelas seguintes etapas:

- decompor o domínio do problema em volumes de controle;
- formular as equações integrais de conservação para cada volume de controle;
- aplicar o Teorema da Divergência de Gauss (as integrais do domínio são transformadas em integrais de superfície);
- aplicar algum procedimento de discretização nas equações do modelo matemático;
- construir e resolver o sistema algébrico obtido.

Para um caso de malha estruturada, considere-se que o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um retângulo $[a, b] \times [c, d]$ discretizado por uma grade uniforme com espaçamento Δx e Δy , como ilustrado na Figura 10.

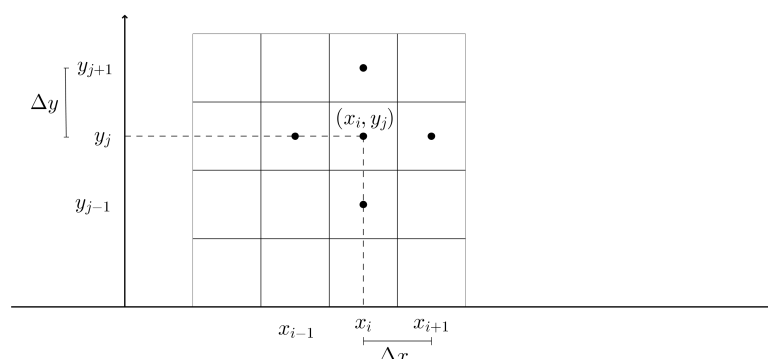
Desde modo, a fim de discretizar o problema proposto para uma malha estruturada, utiliza-se o MVF centrado na célula, esta discretização é ilustrada na Figura 11.

Figura 10 – Discretização do domínio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Malha centrada na célula.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Esquema de discretização malhas quadtree

Para a discretização da equação será utilizado o MVF, a saber, TPFA (*Two-Point Flux Approximation*) e o MPFA (*Multi-Point Flux Approximation*) para obter o resultado desejado.

5.2.1 TPFA

O TPFA é um esquema numérico simples, com baixo custo computacional e robustez comprovada (PEACEMAN, 2000; ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; SOUZA, 2015), utilizados em simuladores comerciais voltados para a indústria petrolífera (SOUZA, 2015). Porém, algumas restrições são observadas quando a aplicabilidade desse método. Entre elas, o fato de o método não ser capaz de lidar com malhas não estruturadas e com tensores de

permeabilidade que não estejam alinhados com a malha (SOUZA, 2015). Só é possível garantir a convergência do método TPFA na simulação de reservatórios, utilizando malhas K-ortogonais, que são malhas cartesianas alinhadas às direções principais do tensor de permeabilidade (SOUZA, 2015). A utilização de malhas não K-ortogonais e/ou tensores complexos em métodos TPFA, produzem resultados inconsistentes para o fluxo aproximado nas superfícies de controle e convergirá para uma solução errada, obtendo erros de primeira ordem, e mesmo com o refinamento da malha, esses erros não desaparecem (EDWARDS, 2006; CONTRERAS, 2017).

Com o intuito de diminuir os efeitos de orientação da malha e com isso melhorar a acurácia da solução, utiliza-se o método MPFA, que é uma generalização do método TPFA.

5.2.2 MPFA

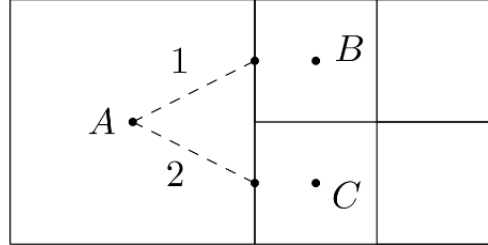
Nos anos 90 surgiu uma nova família de métodos: os *Multi-Point Flux Approximation*, cujo os pioneiros foram Aavatsmark *et al.* (1998), Edwards e Rogers (1998). A concepção do MPFA implica em flexibilidade para lidar com tensores e malhas arbitrárias, corrigindo as deficiências do esquema TPFA. O método MPFA possui duas características fundamentais, aproximação de fluxos nas superfícies de controle e a imposição da continuidade dos fluxos nas superfícies de controle.

O método MPFA é um MVF centrados na célula, pois as suas incógnitas são armazenadas no interior dos volumes de controle e suas propriedades são conservadas tanto no nível local quanto no global. O MPFA surgiu em contraste com o método TPFA, no qual os fluxos são calculados por meio de apenas dois pontos, e o MPFA usa um estêncil com mais pontos (nove considerando um domínio bidimensional em malhas estruturadas quadrilaterais).

A discretização MPFA, resulta em um erro de truncamento local de ordem $O(1/h)$ quando aplicada a grades não uniformes adaptativas (RASAEI; SAHIMI, 2009; EDWARDS, 1996). Edwards (1996), apresentou uma abordagem com a finalidade de eliminar tais erros, tornando $O(h)$.

Para um exemplo, considere a configuração de blocos apresentadas na Figura 12 .

Figura 12 – Configuração de blocos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Deseja-se que a pressão e o fluxo sejam contínuos nas faces 1 e 2 e isto é obtido através da introdução de pressões médias em 1 e 2, aplicando uma aproximação linear por partes da pressão sobre o triângulo resultante \triangle_{A12} . Conforme visto anteriormente, considerando as faces 1 e 2, os fluxos no lado esquerdo são equivalentes ao fluxo do lado direito, portanto, obtém-se duas equações para as duas pressões de face média p_1 e p_2 , respectivamente,

$$K_A \frac{p_a - (p_1 - p_2)/2}{l} = K_B \frac{p_1 - p_B}{l/2}, \quad (5.1)$$

$$K_A \frac{p_a - (p_1 - p_2)/2}{l} = K_C \frac{p_2 - p_C}{l/2}, \quad (5.2)$$

onde l é a distância entre os centros dos blocos e K_A, K_B e K_C representam a permeabilidade horizontal das células A, B e C , respectivamente.

Eliminando p_1 e p_2 em função de p_A, p_B e p_C , obtém-se o fluxo,

$$f = \frac{4K_A K_B K_C}{4K_A K_B + K_C K_B + K_C K_A} \left(p_A - \frac{p_B - p_C}{2} \right) \frac{1}{l}. \quad (5.3)$$

Se forem considerados apenas dois pontos, a aproximação do fluxo dada pela equação (5.3) se reduz a

$$f = \frac{2K_B K_C}{K_B + K_C} \left(\frac{p_B - p_C}{l} \right), \quad (5.4)$$

que é o método TPFa. Vale ressaltar que o fluxo através da fronteira de blocos de grade não estruturados não podem ser aproximados pelo TPFa, devido à diferença de tamanho entre os blocos vizinhos e por isso é usada uma aproximação de fluxo multipontos (MPFA) (GHOLINEZHAD; JAMSHIDI; HAJIZADEH, 2015).

5.2.3 Renormalização da permeabilidade (*upscaling*)

O engrossamento da malha *quadtrees* é baseado em um campo de permeabilidade apresentado em uma resolução refinada. O engrossamento utilizado aqui combina 4 células vizinhas, folhas de mesmo nível na *quadtrees*, para que se tornem apenas uma.

Na literatura, são usadas várias técnicas para realizar essa nova distribuição, como, por exemplo, média harmônica, média aritmética, e média geométrica, entre outras. Cada técnica possui características específicas para cada aplicação (GHOLINEZHAD; JAMSHIDI; HAJIZADEH, 2015). Para este trabalho, utilizaremos uma técnica de renormalização para o *upscaling*, que vem sendo utilizada com grande aceitação em diversos trabalhos (GHOLINEZHAD; JAMSHIDI; HAJIZADEH, 2015; RASAEI; SAHIMI, 2009).

Para essa renormalização, dadas as permeabilidades K_1 , K_2 , K_3 e K_4 da malha mais refinada, a permeabilidade efetiva da célula grossa formada pela união dessas quatro células, é dada por

$$K = \frac{N}{D}, \quad (5.5)$$

tal que,

$$N = 4(K_1 + K_3)(K_2 + K_4)(K_1K_3(K_2 + K_4) + K_2K_4(K_1 + K_3)), \quad (5.6)$$

$$D = (K_1 + K_1 + K_3 + K_4)(K_1K_3(K_2 + K_4) + K_2K_4(K_1 + K_3)) + 3(K_1 + K_2)(K_3 + K_4)(K_1 + K_3)(K_2 + K_4). \quad (5.7)$$

5.3 Discretização

Com efeito de ilustrar a discretização, considera-se a seguinte configuração de malha, dada na Figura 13.

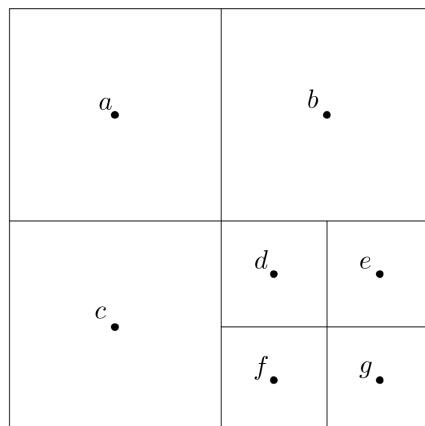


Figura 13 – Malha quadtree.

Substituindo a equação (4) em (5) tem-se

$$\nabla \cdot (-K\nabla p) = q. \quad (5.8)$$

Usando volumes finitos precisa-se resolver,

$$\iint_V \nabla \cdot (-K\nabla p) dV = \int_V q dV. \quad (5.9)$$

Para resolver usa-se o Teorema da Divergência, logo,

$$\iint_V \nabla \cdot (-K\nabla p) dV = \int_S -K\nabla p \cdot \vec{n} dS. \quad (5.10)$$

Tem-se que calcular ∇p que é avaliado nas faces das células, uma vez que p é avaliado em centro de célula. Assim,

$$\mathbf{u} = -K\nabla p, \quad (5.11)$$

calculando a integral de superfície,

$$\int_{\partial V} -\mathbf{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (5.12)$$

A permeabilidade K na face vai ser a média harmônica da permeabilidade da célula que toca a face.

O primeiro caso a ser resolvido será a célula a . Para esse caso, tem-se o esquema ilustrado na [Figura 14](#).

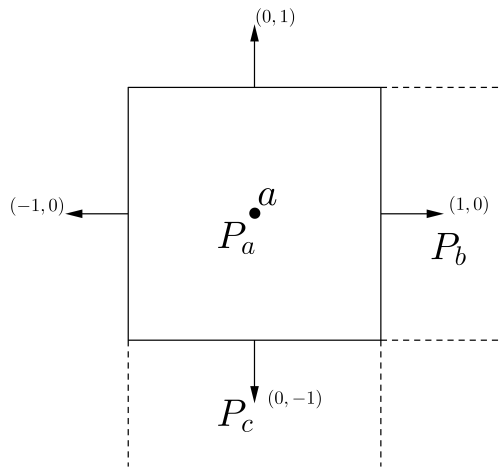


Figura 14 – Célula a da malha *quadtree*.

Então,

$$\int_{\partial V} -\mathbf{u} \cdot \vec{n} dS = - \left(\int_W \mathbf{u} \cdot \vec{n} dS + \int_N \mathbf{u} \cdot \vec{n} dS + \int_S \mathbf{u} \cdot \vec{n} dS + \int_E \mathbf{u} \cdot \vec{n} dS \right). \quad (5.13)$$

Resolvendo para cada face, tem-se

- Fluxo sul:

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_S -K \frac{\partial p}{\partial y} dS \approx \left(K_s \frac{p_a - p_c}{\Delta y} \int_S dS \right), \quad (5.14)$$

$$= -2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_a K_c}{K_a + K_c} (p_a - p_c). \quad (5.15)$$

onde $K_s = K_a K_c / (K_a + K_c)$ é a média harmônica e Δy e Δx é a distância entre os centros.

- Fluxo Leste:

$$\int_E \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_E K \frac{\partial p}{\partial x} dS \approx \left(K_E \frac{p_b - p_a}{\Delta x} \int_E dS \right), \quad (5.16)$$

$$= 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_a K_b}{K_a + K_b} (p_b - p_a). \quad (5.17)$$

- Fluxo Oeste:

Na fronteira oeste, será imposta a condição de contorno tipo Neumann, ou seja,

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -1.$$

Portanto,

$$\int_W \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_W -K \frac{\partial p}{\partial x} dS \approx \int_W -1 dS, \quad (5.18)$$

$$= -\Delta y. \quad (5.19)$$

- Fluxo Norte:

Como no caso oeste, para todas as fronteiras do domínio será imposta a condição de contorno tipo Neumann. Para o fluxo norte será considerada nula, portanto

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0,$$

$$\int_N \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_N -K \frac{\partial p}{\partial y} dS \approx \int_N 0 dS, \quad (5.20)$$

$$= 0. \quad (5.21)$$

A integral de $q(x, y)$ é aproximada pela a Regra do Ponto Médio para integrais, portanto,

$$\int_V q(x, y) dV \approx \Delta x \Delta y q(x, y). \quad (5.22)$$

Deste modo,

$$\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_V q(x, y) dV, \quad (5.23)$$

logo,

$$\int_V q(x,y) dV = - \left(\int_W \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_N \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_E \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS \right), \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y q(x,y) &= \Delta y - 0 + \left(2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_a K_c}{K_a + K_c} (p_a - p_c) \right) + \\ &\quad - \left(2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_a K_b}{K_a + K_b} (p_b - p_a) \right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\Delta x \Delta y q(x,y) = \Delta y + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_a K_c}{K_a + K_c} (p_a - p_c) - 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_a K_b}{K_a + K_b} (p_b - p_a), \quad (5.26)$$

$$q(x,y) = \frac{1}{\Delta x} + \frac{2}{\Delta y^2} \frac{K_a K_c}{K_a + K_c} (p_a - p_c) - \frac{2}{\Delta x^2} \frac{K_a K_b}{K_a + K_b} (p_b - p_a), \quad (5.27)$$

$$q(x,y) - \frac{1}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta y^2} \frac{K_a K_c}{K_a + K_c} (p_a - p_c) - \frac{2}{\Delta x^2} \frac{K_a K_b}{K_a + K_b} (p_b - p_a). \quad (5.28)$$

Agora, vamos calcular o fluxo para a célula b . Para esse caso, temos o esquema da Figura 15. Então,

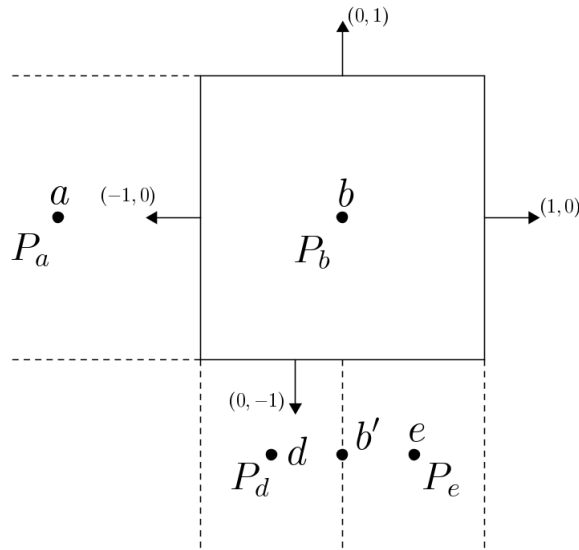


Figura 15 – Célula b da malha *quadtree*.

$$\int_{\partial V} -\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = - \left(\int_W \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_N \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_E \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS \right). \quad (5.29)$$

Resolvendo para cada face, tem-se

- Fluxo Sul: MPFA

Para resolver a face sul, precisamos usar o MPFA e para esse caso, consideramos também as células d e e e a média harmônica para esse caso é dada pela expressão

$$K_\alpha = \frac{4K_1 K_2 K_3}{4K_1 K_2 + K_1(K_2 + K_3)}. \quad (5.30)$$

Precisa-se também determinar a pressão no ponto b' , indicado na figura. A pressão neste ponto ($p_{b'}$) é a média das pressões nas células d e e ,

$$p_{b'} = \frac{p_d + p_e}{2}. \quad (5.31)$$

Calculando, tem-se

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_S -K_S \frac{\partial p}{\partial y} dS \approx - \left(K_S \frac{p_b - p_{b'}}{\Delta y_n} \int_S dS \right), \quad (5.32)$$

$$= - \left[\frac{4K_b K_d K_e}{4K_d K_e + K_b(K_d + K_e)} \left(\frac{p_b - \frac{p_d + p_e}{2}}{\Delta y_n} \right) \Delta x \right], \quad (5.33)$$

$$= - \left[4 \frac{\Delta x}{\Delta y_n} \frac{K_b K_d K_e}{4K_d K_e + K_b(K_d + K_e)} \left(\frac{p_d + p_e}{2} - p_b \right) \right]. \quad (5.34)$$

• Fluxo Oeste: TPFA

$$\int_W \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_W -K_W \frac{\partial p}{\partial x} dS \approx - \left(K_W \frac{p_b - p_a}{\Delta x} \int_W dS \right), \quad (5.35)$$

$$= - \left[2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_b K_a}{K_b + K_a} (p_b - p_a) \right]. \quad (5.36)$$

• Fluxo Norte: Para esse caso, norte continua sendo fronteira, portanto,

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0,$$

$$\int_N \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_N -K_N \frac{\partial p}{\partial y} dS \approx \int_N 0 dS, \quad (5.37)$$

$$= 0. \quad (5.38)$$

• Fluxo Leste:

Novamente é um caso de fronteira, e impondo a condição de contorno tipo Neumann, tem-se

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 1,$$

$$\int_W \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_W K \frac{\partial p}{\partial x} dS \approx \int_W 1 dS, \quad (5.39)$$

$$= \Delta y. \quad (5.40)$$

Então, tem-se

$$\int_V q(x,y) dV = - \left(\int_W \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_N \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS + \int_E \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS \right), \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} q \Delta x \Delta y &= \left(2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_b K_a}{K_b + K_a} (p_b - p_a) \right) - 0 + \\ &\quad - \left(4 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_b K_d K_e}{4K_d K_e + K_b(K_d + K_e)} \left(\frac{p_d + p_e}{2} - p_b \right) \right) - \Delta y, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} q + \frac{1}{\Delta x} &= \frac{2}{\Delta x^2} \frac{K_b K_a}{K_b + K_a} (p_b - p_a) + \\ &\quad + \frac{4}{\Delta y^2} \frac{K_b K_d K_e}{4K_d K_e + K_b(K_d + K_e)} \left(\frac{p_d + p_e}{2} - p_b \right). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Agora será calculado o fluxo para a célula d , onde tem-se o esquema da Figura 16.

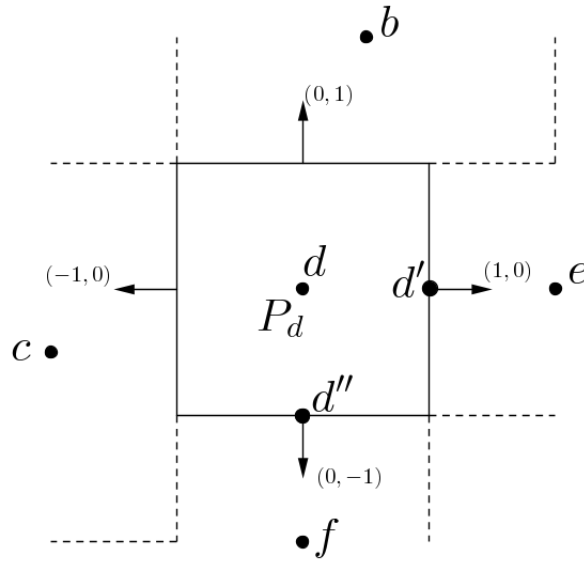


Figura 16 – Célula d da malha *quadtree*.

- Fluxo Leste: TFPFA

$$\int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS = \int_E K_E \frac{\partial p}{\partial x} dS \approx \left(K_E \frac{p_e - p_d}{\Delta x} \int_E dS \right), \quad (5.44)$$

$$= \left[2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_d K_e}{K_d + K_e} (p_e - p_d) \right]. \quad (5.45)$$

- Fluxo Sul : TPFPA

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS = \int_S -K \frac{\partial p}{\partial y} dS \approx \left(K_S \frac{p_d - p_f}{\Delta y} \int_S dS \right), \quad (5.46)$$

$$= -2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_d K_f}{K_d + K_f} (p_d - p_f). \quad (5.47)$$

- Fluxo Norte: MPFA

A pressão no ponto d' , denotada por $(p_{d'})$, é a média das pressões nas células d e e , ou seja,

$$p_{d'} = \frac{p_d + p_e}{2}. \quad (5.48)$$

Calculando, tem-se

$$\int_N \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS = \int_N K_N \frac{\partial p}{\partial y} dS \approx \left(K_N \frac{p_{d'} - p_b}{\Delta y} \int_N dS \right), \quad (5.49)$$

$$= \left[\frac{4K_d K_b K_e}{4K_b K_e + K_d(K_b + K_e)} \left(\frac{p_d + p_e}{2} - p_d \right) \Delta x \right], \quad (5.50)$$

$$= - \left[4 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_d K_b K_e}{4K_b K_e + K_d(K_b + K_e)} \left(\frac{p_d + p_e}{2} - p_d \right) \right]. \quad (5.51)$$

- Fluxo Oeste: MPFA

A pressão no ponto d'' , denotada por $(p_{d''})$, é a média das pressões nas células d e f , ou seja,

$$p_{d''} = \frac{p_d + p_f}{2}. \quad (5.52)$$

Calculando, tem-se

$$\int_W \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS = \int_W -K_W \frac{\partial p}{\partial y} dS \approx \left(-K_W \frac{p_d - p_{d''}}{\Delta x} \int_W dS \right), \quad (5.53)$$

$$= - \left[\frac{4K_d K_c K_f}{4K_c K_f + K_d(K_c + K_f)} \left(\frac{p_d - p_{d''}}{\Delta x} \right) \Delta y \right], \quad (5.54)$$

$$= - \left[4 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_d K_c K_f}{4K_c K_f + K_d(K_c + K_f)} \left(\frac{p_d + p_f}{2} - p_d \right) \right]. \quad (5.55)$$

Então, tem-se

$$\int_V q(x,y) dV = - \left(\int_W \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS + \int_N \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS + \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS + \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}} dS \right), \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} q \Delta x \Delta y &= \left[4 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_d K_c K_f}{4K_c K_f + K_d(K_c + K_f)} \left(\frac{p_d + p_f}{2} - p_d \right) \right] + \\ &- \left[4 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_d K_b K_e}{4K_b K_e + K_d(K_b + K_e)} \left(\frac{p_d + p_e}{2} - p_d \right) \right] + \\ &+ 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{K_d K_f}{K_d + K_f} (p_d - p_f) - \left[2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{K_d K_e}{K_d + K_e} (p_e - p_d) \right], \quad (5.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{4}{\Delta x^2} \frac{K_d K_c K_f}{4K_c K_f + K_d(K_c + K_f)} \left(\frac{p_d + p_f}{2} - p_d \right) + \\ &- \frac{4}{\Delta y^2} \frac{K_d K_b K_e}{4K_b K_e + K_d(K_b + K_e)} \left(\frac{p_d + p_e}{2} - p_d \right) + \\ &+ \frac{2}{\Delta y^2} \frac{K_d K_f}{K_d + K_f} (p_d - p_f) - \frac{2}{\Delta x^2} \frac{K_d K_e}{K_d + K_e} (p_e - p_d). \quad (5.58) \end{aligned}$$

Para as demais células, o raciocínio é análogo, sempre observando se existe um ou dois vizinhos por face.

RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos com o método descrito nesta dissertação, gerados por código implementado em linguagem MATLAB/Octave. Os testes foram realizados considerando o modelo de Darcy

$$\mathbf{u} = -K\nabla p \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = q \quad em \quad \Omega \subset \mathbf{R}^2 \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = g \quad em \quad \partial\Omega \quad (6.3)$$

para casos homogêneos ($K = 1$) e heterogêneos, a partir de uma malhas uniformes com discretizações de volumes finitos padrão (TPFA) e não uniformes (estrutura *quadtree*) com discretizações baseadas em MPFA.

6.1 Testes de convergência com solução manufaturada

6.1.1 Primeiro teste

Neste primeiro teste, consideramos o caso homogêneo ($K = 1$) de forma que a solução para pressão é dada por

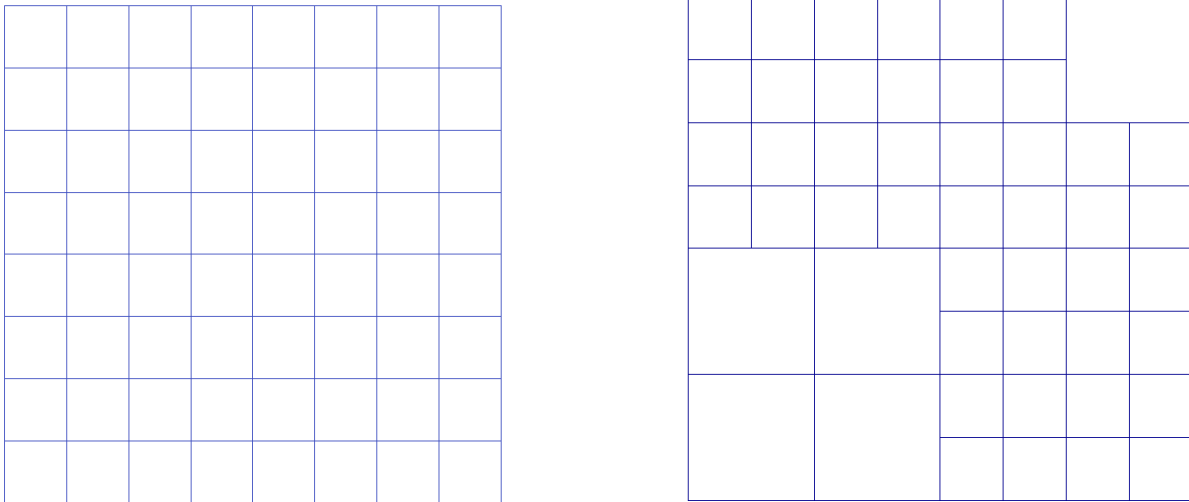
$$p(x, y) = x + y.$$

Para tanto, é necessário impor um termo fonte dado por

$$q(x, y) = \nabla \cdot (-K\nabla p) = -\nabla^2 p = 0.$$

A velocidade de Darcy é dada por

$$\mathbf{u} = -K\nabla p = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Figura 17 – Malhas uniforme e *quadtree*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por se tratar de um problema de Neumann, as condições de contorno são impostas diretamente do campo \mathbf{u} , de forma que

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = g \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Desta forma basta impor em cada fronteira:

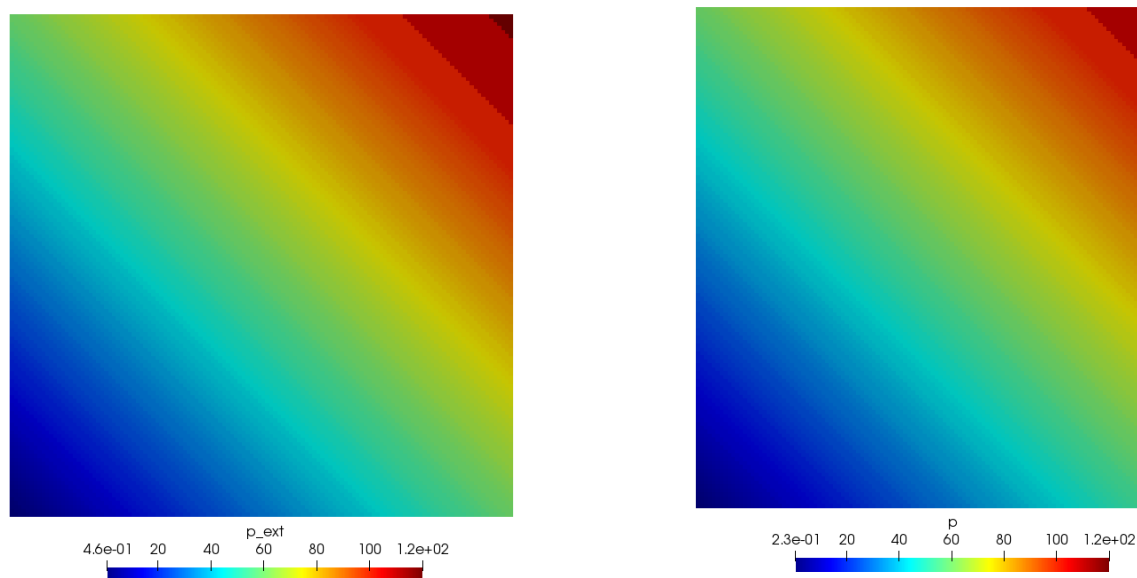
- Leste: $\vec{\mathbf{n}} = [1, 0]$, $g = -1$
- Oeste: $\vec{\mathbf{n}} = [-1, 0]$, $g = 1$
- Norte: $\vec{\mathbf{n}} = [0, 1]$, $g = -1$
- Sul: $\vec{\mathbf{n}} = [0, -1]$, $g = 1$

Sabe-se que um problema de Neumann puro admite infinitas soluções pois não é um problema bem posto. O resultado será um sistema linear singular. Para tratar a singularidade do problema, é necessário impor ainda um valor de pressão fixo, que será calculado como sendo a pressão da célula inferior esquerda $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, onde $x_0 = 0 = y_0$, $x_1 = \Delta x$ e $y_1 = \Delta y$. A pressão nesta célula é calculada a partir da solução analítica:

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{1}{|V_k|} \int_{V_k} p(x, y) dV = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{V_k} x + y dV = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_0}^{x_1} x dx + \int_{y_0}^{y_1} y dy \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\Delta x} + \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\Delta y} \right] = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta y^2}{2} \right] = \frac{\Delta x}{2\Delta y} + \frac{\Delta y}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

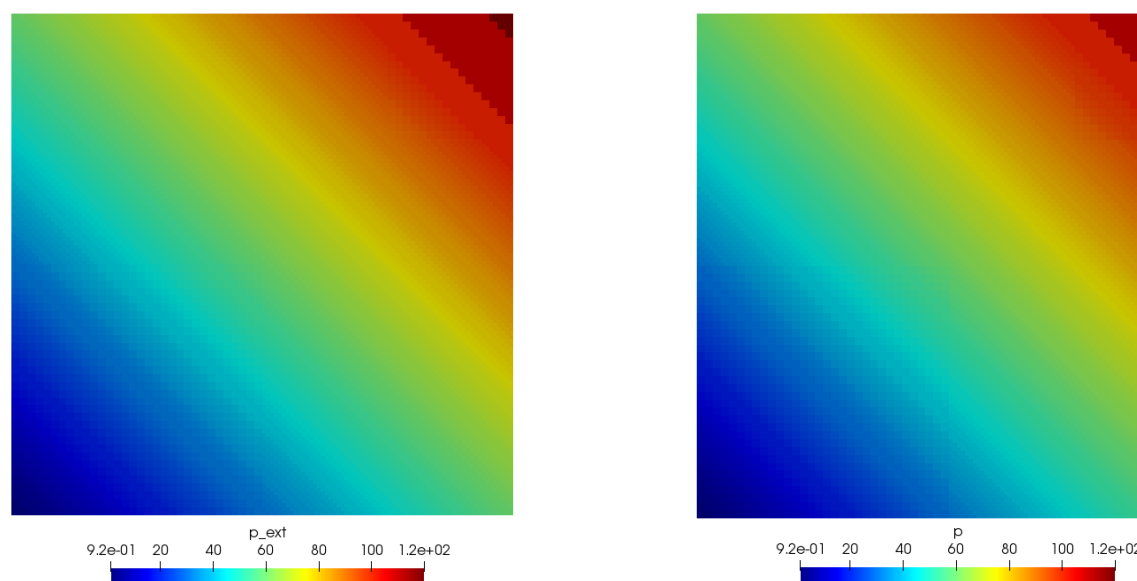
As malhas iniciais consideradas neste teste de convergência podem ser vistas na [Figura 26](#), para os casos de malha uniforme e malha *quadtree*. Estas malhas foram refinadas e o erro relativo com relação à solução analítica foi calculado. As pressões obtidas podem ser vistas na [Figura 18](#)

Figura 18 – Pressão TPFA, exata e aproximada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Pressão MPFA, exata e aproximada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

para o caso uniforme e [Figura 19](#) para a malha *quadtree*. Foram selecionadas malhas refinadas para apresentação destes resultados.

A convergência do problema usando malha *quadtree* é evidenciada na [Figura 20](#) e na [Tabela 1](#). A estimativa da ordem de convergência é facilmente calculada pela expressão dado em [LeVeque *et al.* \(2002\)](#). Pode-se notar que a convergência do problema com discretização de volumes finitos MPFA na malha *quadtree* obteve ordem assintótica $O(h)$, que é o esperado para esta discretização.

Tabela 1 – Convergência da pressão com malha *quadtree*.

<i>Elementos</i>	<i>h</i>	<i>Erro</i>	<i>Ordem</i>	<i>Tempo (segundos)</i>
49	7.3750	0.084222	—	0,027969
196	3.6875	0.042042	1.0024	0,10278
784	1.8438	0.021813	0.9466	0,49832
3136	0.92188	0.010505	1.0541	2,2984
12544	0.46094	0.0052525	1.00000	18,396

Fonte: Elaborada pelo autor.

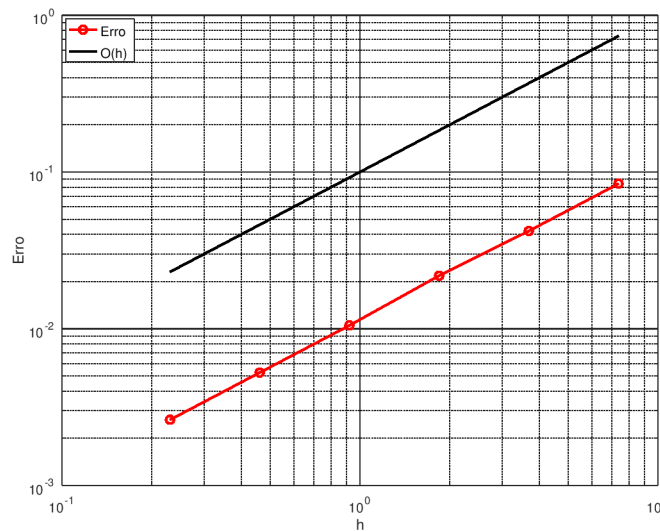


Figura 20 – Convergência do problema $p(x,y) = x + y$ utilizando malha *quadtree*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.1.2 Segundo teste

Considere agora o mesmo problema anterior, mas com uma solução analítica dada por

$$p(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{3} \quad (6.4)$$

Realizando de forma análoga os passos anteriores para o primeiro teste, verifica-se que o termo fonte que resulta nesta solução é dado por

$$q(x,y) = 2x + 2y, \quad (6.5)$$

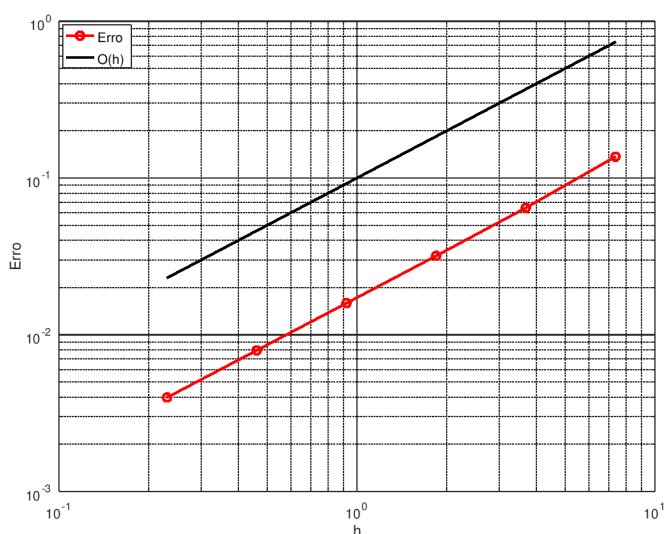
sendo as condições de contorno e dessingularização do sistema feitos de forma análoga ao caso anterior.

Os erros para a pressão e a taxas de convergência da solução numérica são apresentadas nas [Tabela 2](#) e [Figura 21](#) para os resultados obtidos com malha *quadtree* e discretização por volumes finitos MPFA, enquanto os resultados para malhas uniformes e discretização por volumes finitos TPFA podem ser vistos nas [Tabela 5](#) e [Figura 22](#).

Tabela 2 – Convergência da pressão com malha *quadtree*.

<i>Elementos</i>	<i>h</i>	<i>Erro</i>	<i>Ordem</i>	<i>Tempo (segundos)</i>
49	7.3750	0.13696	—	0,029335
196	3.6875	0.064496	1.0865	0,10916
784	1.8438	0.031853	1.0178	0,51020
3136	0.92188	0.015900	1.0024	2,6518
12544	0.46094	0.0079522	0.9996	18,364

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Convergência do problema $p(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{3}$ utilizando malha *quadtree*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 – Convergência da pressão com malha uniforme.

<i>Elementos</i>	<i>h</i>	<i>Erro</i>	<i>Ordem</i>	<i>Tempo (segundos)</i>
64	7.3750	0,0052579	—	0,035843
256	3.6875	0,0014752	1.8336	0,13617
1024	1.8438	0,00038980	1,9201	0,65585
4096	0.92188	0,00010014	1,9607	3,5008
16384	0.46094	0,00002537	1,9806	27,965

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que enquanto a ordem de convergência estimada a partir dos resultados para a discretização em malha uniforme foi $O(h^2)$, a estimativa para a discretização por volumes finitos MPFA foi novamente de $O(h)$, ambos de acordo com o esperado, já que a ordem de convergência máxima do MPFA é linear.

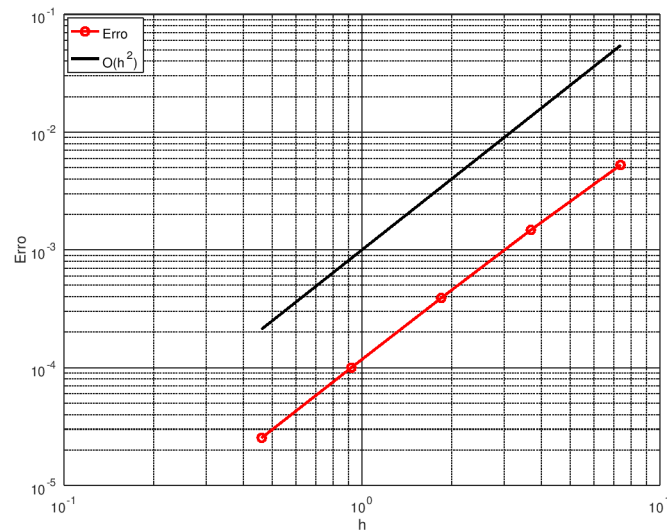


Figura 22 – Convergência do problema $p(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3}$ utilizando malha uniforme.

Fonte: Elaborada pelo autor.

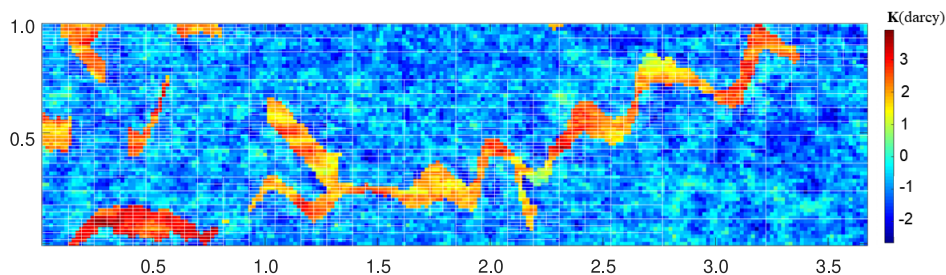
6.2 Simulação SPE10

O próximo exemplo considera um campo de permeabilidade realístico obtido do projeto SPE10, que é fornecido pela Sociedade de Engenheiros de Petróleo (Society of Petroleum Engineers-SPE). O SPE10 fornece dados de 85 camadas de permeabilidade em uma amostra 3D do tamanho $60 \times 220 \times 85$.

Para esse problema usa-se a camada 36 do SPE10 que, originalmente é dividida em 60×220 células. Utiliza-se os dados mencionados para as condições de contorno. Na Figura 23 pode-se observar o campo original e na Figura 24 tem-se o resultado do processo de renormalização da permeabilidade para as células da decomposição quadtree, onde nota-se que os refinamentos de malha capturam satisfatoriamente o canal de alta permeabilidade.

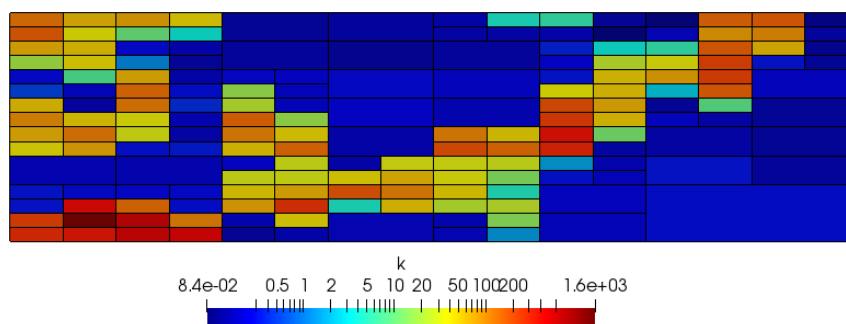
A solução para o campo de pressão são mostradas na Figura 25 considerando primeiramente apenas um refinamento e depois três refinamentos, com um total final de 3520 células.

Figura 23 – Campo de permeabilidade.



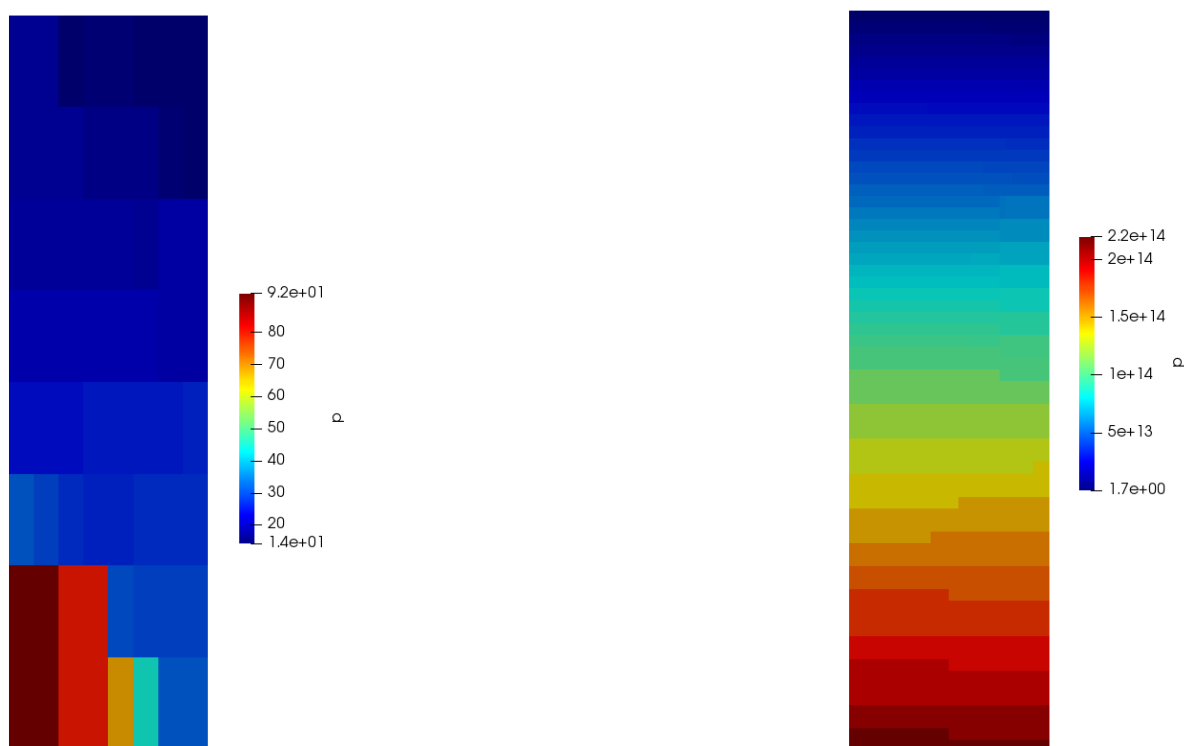
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Campo de permeabilidade renormalizado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

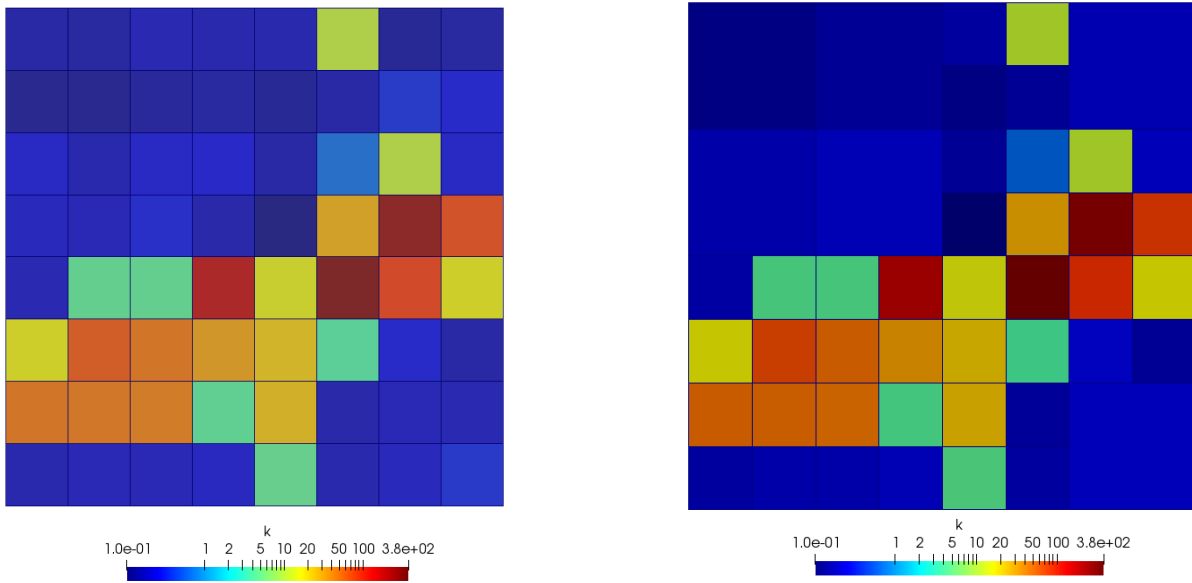
Figura 25 – Pressão inicial e pressão após três refinamentos.



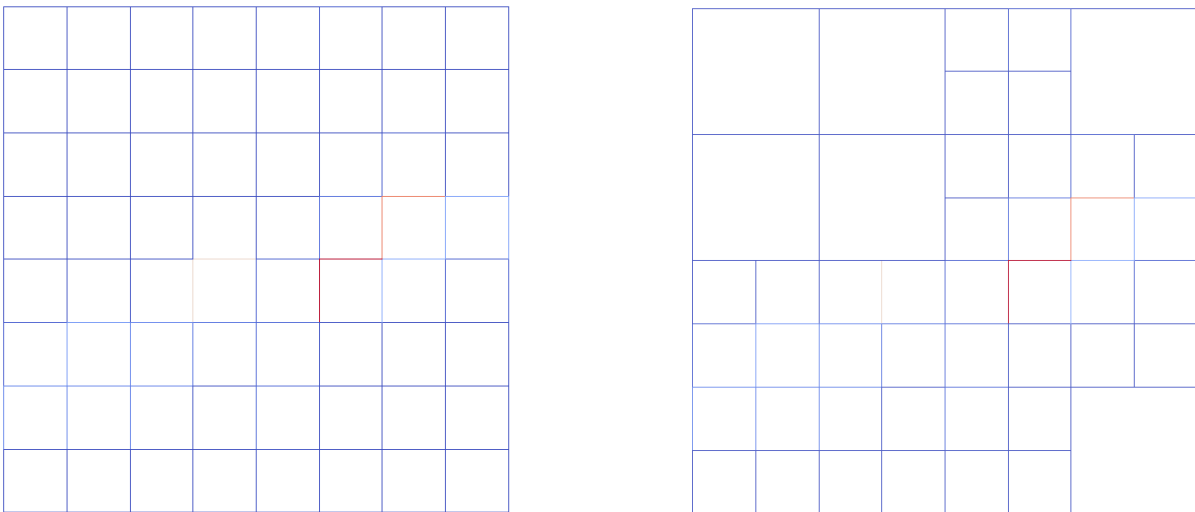
Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.1 Exemplo 02

Neste exemplo agora, considera novamente uma parte do campo de permeabilidade SPE10, a camada 36, porém só uma parte da camada, a parte central no tamanho 60×60 . Na [Figura 26](#) abaixo tem-se o campo de permeabilidade tanto para o caso uniforme como para a malha quadtree:

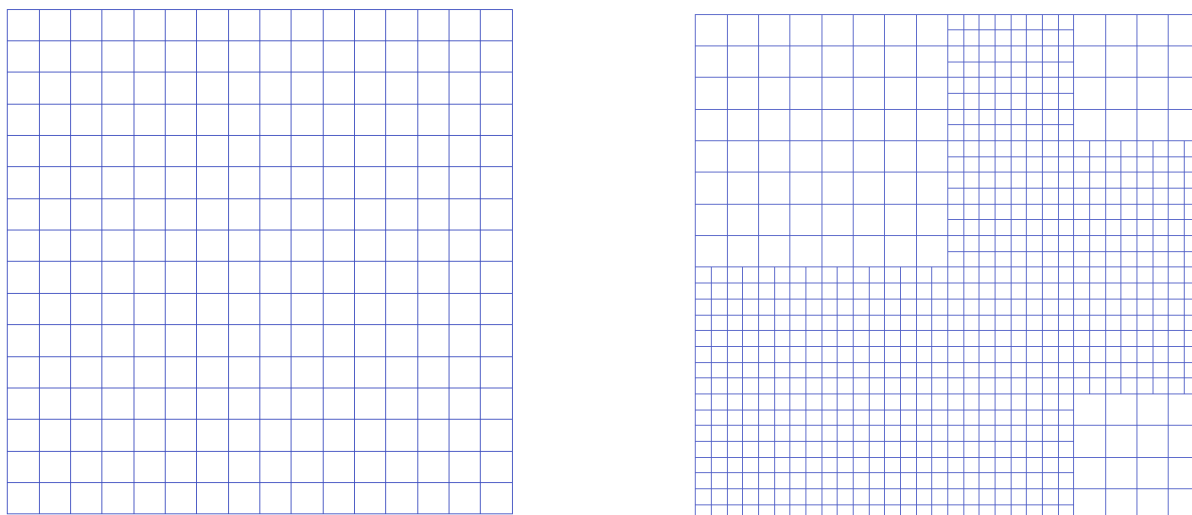
Figura 26 – Campo de permeabilidade malha uniforme e *quadtree*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Malha inicial uniforme e *quadtree*.

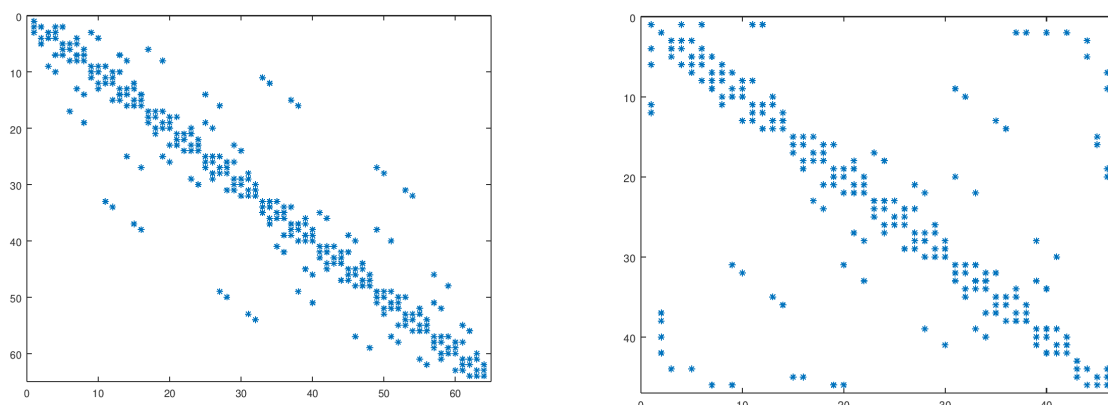
Fonte: Elaborada pelo autor.

E nas [Figura 27](#) e [Figura 28](#) ilustram a malha utilizada inicialmente, à esquerda tem-se a malha uniforme e à direita a *quadtree*, para o nível inicial e o segundo nível de refinamento, respectivamente. Percebe-se que na *quadtree* teve o engrossamento nos locais com baixa permeabilidade, conforme esperado.

Figura 28 – Malhas uniforme e *quadtree* no segundo nível.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Estrutura das matrizes do TPFA e MPFA, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A [Figura 29](#) ilustra a estrutura das matrizes geradas pelo TPFA e MPFA. Nota-se que a malha não estruturada tem impacto na estrutura da matriz do MPFA quando comparada com a matriz do TPFA.

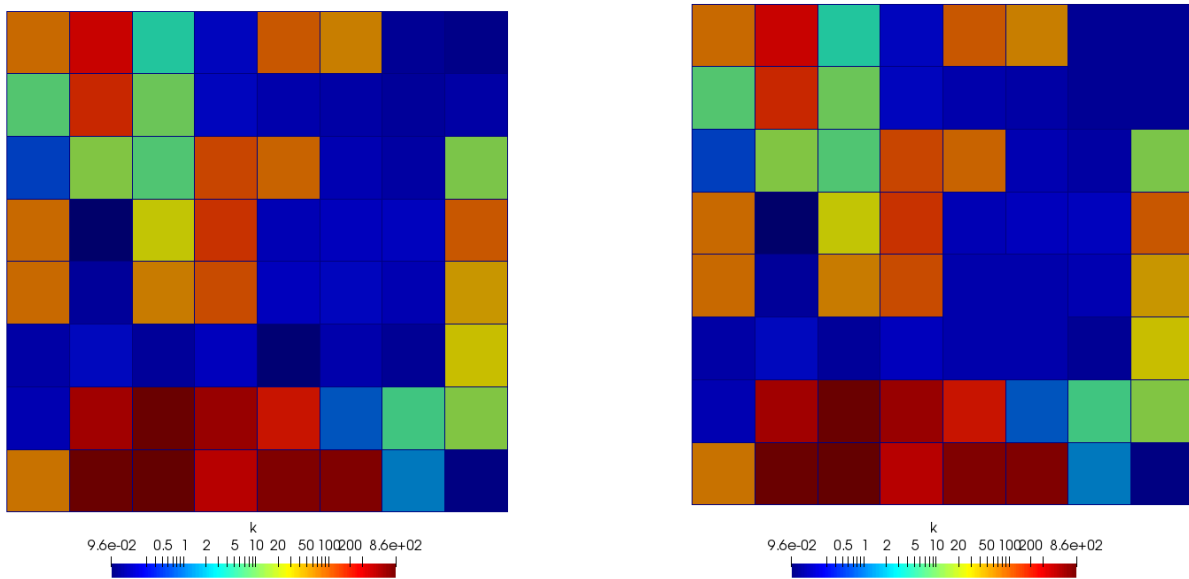
O erro para a pressão e o custo computacional são apresentados na [Tabela 4](#) para os resultados obtidos com malha a malha 60×60 . O ganho computacional é calculo por

$$T_{TPFA}/T_{MPFA}.$$

É possível observar que para o primeiro nível de refinamento consegue-se reduzir o tempo computacional até 4 vezes. E também observa-se que em todas as etapas o método utilizando malha quadtree o custo computacional foi menor quando comparado com a malha uniforme, corroborando a hipótese almejada por este trabalho.

Tabela 4 – Custo computacional. O ganho é calculado por T_{TPFA}/T_{MPFA} .

N° TPFA	N° MPFA	Erro	Ganho Solver (s)	Ganho total (s)
64	46	0,1217021	4,0852	—
256	184	0,0630208	2,7253	2,20877
1024	736	0,0314632	2,0160	1,5905
4096	2944	0,01579986	1,1422	1,4067
16384	11776	0,00792683	1,8877	1,8193

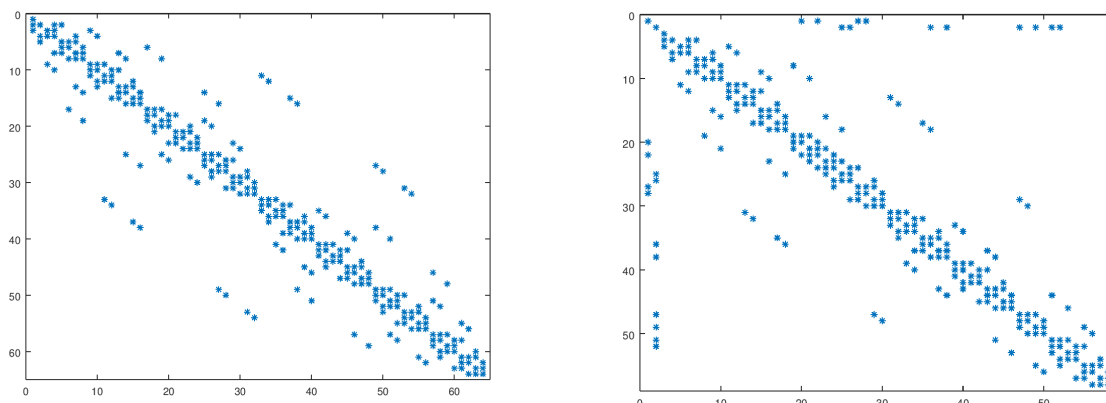
Figura 30 – Campo de permeabilidade malha uniforme e *quadtree*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.2 Exemplo 03

Agora utiliza-se a mesma idéia do exemplo anterior, porém considerando a parte inicial do campo de permeabilidade do SPE10, camada 36. Novamente o tamanho do campo é 60×60 . Tem-se na [Figura 30](#) o campo de permeabilidade considerado neste caso e na [Figura 31](#) a estrutura das matrizes. Observa-se que para o caso TPFA a matriz possui a mesma estrutura do exemplo anterior, conforme esperado e para a matriz utilizando MPFA novamente é possível ver alterações nesta estrutura.

Figura 31 – Spy das matrizes do TPGA e MPFA, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Custo computacional. O ganho é calculado por T_{TPGA}/T_{MPFA}

N° TPGA	N° MPFA	Erro	Ganho Solver (s)	Ganho total (s)
64	58	0,0715583	1,0431	—
256	232	0,0378753	1,2071	1,0232
1024	928	0,0206978	1,1697	1,5612
4096	3712	0,000758476	1,8638	1,1367
16384	14848	0,0000051779	1,7413	1,1325

Para este caso, também foi possível obter ganho computacional utilizando malhas quadtree, a razão foi menor devido o fato do campo possuir muitos locais com alta permeabilidade porém mesmo com uma malha menos grossa ainda houve ganho computacional. Desta forma, conclui-se que utilizar malhas quadtree uma alternativa que apresenta vantagens, pois é possível reduzir o tempo computacional mantendo-se um erro aceitável para o campo de pressão, não prejudicando o resultado final.

CONCLUSÃO

Esta dissertação de mestrado apresenta uma metodologia para solução numérica de escoamentos em meios porosos, baseada em discretizações de volumes finitos em malhas hierárquicas do tipo *quadtree*.

Primeiramente utiliza-se uma combinação de técnicas de *upscaling* e renormalização de permeabilidades com a geração da malha *quadtree*, de forma a obter uma malha com menos elementos que a original, mantendo-se uma resolução menor nas regiões de alta permeabilidade, ou seja, nas regiões onde o fluxo tem maior magnitude.

Utilizando uma técnica de discretização baseada no MPFA (*Multi Point Flux Approximation*), é possível reconstruir o fluxo entre células de tamanhos distintos, de forma a obter um método de volumes finitos capaz de aproximar o problema em malhas *quadtree* balanceadas.

Resultados obtidos com código desenvolvido em OCTAVE/MATLAB demonstram que esta técnica pode ser aplicada para simulação de escoamentos em meios porosos modelados por Darcy. As ordens de convergência observadas foram compatíveis com as esperadas para problemas homogêneos com solução manufaturada, sendo $O(h^2)$ para as malhas uniformes e

Por fim, simulações com campos heterogêneos realistas demonstram que é possível reduzir o custo computacional devido ao engrossamento da malha em regiões menos importantes em até quatro vezes, mantendo-se uma precisão satisfatória, devido à boa resolução mantida nas regiões de alta permeabilidade, onde o fluxo no meio poroso é dominante.

REFERÊNCIAS

AAVATSMARK, I.; BARKVE, T.; BØE, O.; MANNSETH, T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part i: Derivation of the methods. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 19, n. 5, p. 1700–1716, 1998. Citado na página 48.

ALEMDASOULAS'S BLOG. **Aquíferos**. 2015. <<https://alemdasaulas.wordpress.com/2015/02/>>, Last accessed on 16/07/2019. Citado na página 29.

AMBRUS, J. *et al.* Volumes finitos utilizando aproximações de múltiplos pontos aplicados à simulação numérica de reservatórios de petróleo. 2012. Citado na página 46.

ARBOGAST, T.; PENCHEVA, G.; WHEELER, M. F.; YOTOV, I. A multiscale mortar mixed finite element method. **Multiscale Modeling & Simulation**, SIAM, v. 6, n. 1, p. 319–346, 2007. Citado na página 24.

CARVALHO, D. d. **Uma formulação do método dos volumes finitos com estrutura de dados por aresta para a simulação de escoamentos em meios porosos**. Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-UFPE, Recife, 2005. Citado na página 45.

CHEN, Z. **Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery**. [S.l.]: Siam, 2007. v. 77. Citado na página 45.

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. **Computational methods for multiphase flows in porous media**. [S.l.]: Siam, 2006. v. 2. Citado na página 22.

CONTRERAS, F. R. L. Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo. Universidade Federal de Pernambuco, 2017. Citado na página 48.

EDWARDS, M. G. Elimination of adaptive grid interface errors in the discrete cell centered pressure equation. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 126, n. 2, p. 356–372, 1996. Citado na página 48.

_____. Higher-resolution hyperbolic-coupled-elliptic flux-continuous cvd schemes on structured and unstructured grids in 2-d. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 51, n. 9-10, p. 1059–1077, 2006. Citado na página 48.

EDWARDS, M. G.; ROGERS, C. F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. **Computational geosciences**, Springer, v. 2, n. 4, p. 259–290, 1998. Citado na página 48.

ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J. H.; KING, G. R. **Basic applied reservoir simulation**. [S.l.: s.n.], 2001. Citado na página 47.

FERNANDES, J. d. P. V. Implementação da formulação impes-modificado em problemas de elementos finitos com volume de controle para simulação de fluxo bifásico com acoplamento geomecânico. Universidade Federal de Pernambuco, 2013. Citado na página 31.

- FINKEL, R. A.; BENTLEY, J. L. Quad trees a data structure for retrieval on composite keys. Springer, v. 4, p. 1–9, 1974. Citado nas páginas 24 e 38.
- FORTUNA, A. de O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. [S.l.]: Edusp, 2000. ISBN 85-314-0526-2. Citado na página 34.
- FOX, R. M.; PRITCHARD, A. Pj introdução à mecânica dos fluidos. Editora LTC, 6ª edição, Rio Janeiro, 2006. Citado na página 28.
- GHOLINEZHAD, S.; JAMSHIDI, S.; HAJIZADEH, A. Quad-tree decomposition method for areal upscaling of heterogeneous reservoirs: application to arbitrary shaped reservoirs. **Fuel**, Elsevier, v. 139, p. 659–670, 2015. Citado nas páginas 37, 40, 41, 49 e 50.
- GREAVES, D. M.; BORTHWICK, A. G. On the use of adaptive hierarchical meshes for numerical simulation of separated flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 26, n. 3, p. 303–322, 1998. Citado na página 40.
- HASLE, G.; LIE, K.-A.; QUAK, E. **Geometric modelling, numerical simulation, and optimization**. [S.l.]: Springer, 2007. Citado nas páginas 22, 27, 29 e 31.
- HELMIG, R. Multiphase flow and transport processes in the subsurface. springer-verlag, berlin. **Multiphase flow and transport processes in the subsurface**. Springer-Verlag, Berlin., 1997. Citado na página 31.
- LEVEQUE, R. J. *et al.* **Finite volume methods for hyperbolic problems**. [S.l.]: Cambridge university press, 2002. v. 31. Citado na página 59.
- LINARES, O. A.; BOTELHO, G. M.; RODRIGUES, F. A.; NETO, J. B. Segmentation of large images based on super-pixels and community detection in graphs. **IET Image Processing**, Wiley Online Library, v. 11, n. 12, p. 1219–1228, 2017. Citado nas páginas 24 e 37.
- MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2017. Citado nas páginas 23 e 45.
- PEACEMAN, D. **Numerical Solution of Parabolic Problems in One Dependent Variable. Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation**. [S.l.]: Elsevier, 1977. Citado nas páginas 23 e 33.
- PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of numerical reservoir simulation**. [S.l.]: Elsevier, 2000. v. 6. Citado na página 47.
- QI, D.; HESKETH, T. An analysis of upscaling techniques for reservoir simulation. **Petroleum science and technology**, Taylor & Francis, v. 23, n. 7-8, p. 827–842, 2005. Citado na página 24.
- RASAEI, M. R.; SAHIMI, M. Upscaling of the permeability by multiscale wavelet transformations and simulation of multiphase flows in heterogeneous porous media. **Computational Geosciences**, Springer, v. 13, n. 2, p. 187–214, 2009. Citado nas páginas 37, 48 e 50.
- RENHA, J. F. **Simulação do processo de injeção de soluções poliméricas viscoelásticas na escala de reservatório**. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2015. Citado na página 28.
- ROCHA, F. F.; PEREIRA, L. F. F.; SOUSA, F. S. d. **Métodos mistos multiescala aprimorados para fluxos bifásicos em meios porosos de alto contraste**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020. Citado na página 23.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. A. D. **Engenharia de reservatórios de petróleo**. [S.l.]: Interciência, 2006. Citado nas páginas 22, 28, 29, 30, 33 e 35.

SEDANO, R. Z. **O problema de escoamento miscível em meios porosos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2013. Citado na página 28.

SERPA, M. da S.; SEVERO, E. B.; SCHEPKE, C.; COMPUTAÇÃO, C. d. C. da. Avaliando diferentes interfaces de programação paralela em simulação de fluxos de fluidos. Citado na página 23.

SINMEC. **Projeto RelP (Relative Permeability)**. 2019. <<http://www.sinmec.ufsc.br/site/projetos.php?id=18>>, Last accessed on 16/07/2019. Citado na página 27.

SOUZA, M. R. d. A. Simulação numérica de escoamento bifásico em reservatório de petróleo heterogêneos e anisotrópicos utilizando um método de volumes finitos “verdadeiramente” multidimensional com aproximação de alta ordem. Universidade Federal de Pernambuco, 2015. Citado nas páginas 45, 47 e 48.

TEIXEIRA, G. M. *et al.* Métodos numéricos para a solução de escoamentos bifásicos de fluidos incompressíveis em meios porosos. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), 2011. Citado na página 29.

