**ANÁLISE DE EFICIÊNCIA DE SIMULAÇÕES COM
NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS EM FILA
M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI**

Elisa Maria de Almeida Sampaio Falco Marchesoni

Orientadora:

Profa. Dra. Maria Creusa Bretas Salles

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Ciências de Computação e Matemática Computacional.

**USP - São Carlos
Agosto de 1994**

*À minha família,
especialmente à minha
mãe e ao Flávio.*

AGRADECIMENTOS

A conclusão dessa dissertação não seria possível sem o auxílio de algumas pessoas e instituições que contribuíram de alguma forma para este projeto, às quais expresso os mais sinceros agradecimentos.

A Deus por mais esta realização em minha vida.

À profa. Dra. Maria Creusa Bretas Salles pela sua orientação dedicada e segura, participando ativamente do estudo, incentivando-me em todo o decorrer da pesquisa.

À CNPq pelo apoio financeiro concedido através do processo número 135112/92-3.

À profa. Dra. Regina C. Santana e ao Prof. Dr. José Reynaldo Setti pelas valiosas sugestões e comentários dados quando da realização do meu exame de qualificação.

Ao prof. Dr. Jorge A. Achcar e ao prof. Dr. Josemar Rodrigues pelo apoio e incentivo dados durante a realização dos créditos.

À minha família e ao Flávio, meu esposo, pelo carinho, incentivo, apoio e dedicação.

Ao meu cunhado Marcelo, pela inestimável ajuda que me prestou em todo o decorrer deste trabalho.

Aos meus colegas da Funrei, em especial à Alba, Toledo, Maria Helena, Maria do Carmo, Eugênio, Scalon, Duílio, dentre outros, que me apoiaram e incentivaram.

A todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para a realização desse trabalho. Aos professores, funcionários e colegas de pós-graduação, pela amizade e apoio durante este período, à Liliam, Cidinho, Fogo, Cátia, Gilberto, Sílvia, Adriana, Mazé, e em especial à amiga Vera, que sempre me incentivaram e me apoiaram, dentro e fora do ICMSC.

RESUMO

Usando números aleatórios antitéticos e usuais, comparamos os resultados de simulações em uma fila M/M/1 com realimentação instantânea Bernoulli.

A análise foi feita sobre o valor médio de 200 rodadas, em cada caso, para o tempo de espera na fila com valor teórico W_q , sendo que o número de esperas para cada freguês é aleatório.

Obtivemos resultados para o valor de W_q e os intervalos de confiança de 90%. A partir dos intervalos de confiança verificamos a porcentagem de cobertura do valor real de W_q . Os resultados confirmam a redução de variância usando números aleatórios antitéticos, porém a cobertura é levemente menor: 88,50% com números aleatórios usuais e 87,50% com antitéticos.

ABSTRACT

Antithetic random numbers are used on Simulation literature to reduce variance. But it is impossible to determine the real coverage of the real mean value of the variable, by the constructed confidence interval.

Using an M/M/1 queue with Bernoulli feedback as model, we develop simulations, by Batch Means, using both, usual and antithetic random numbers, to compare the results of the mean waiting times: the half width of the 90% confidence intervals, the coverage of its real mean value and the correlations between the batches.

The results are as we expected, the half width of the confidence intervals are smaller with antithetic random numbers, the correlations lag 1, 2, 3 too, but the coverage, over 200 simulations on each case, are lightly worse with the antithetic ones.

ÍNDICE

1. CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
2. CAPÍTULO 2 - TEORIA DAS FILAS	6
2.1 INTRODUÇÃO	6
2.2 DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA DE FILAS	7
2.3 NOTAÇÃO E CONFIGURAÇÕES DE SISTEMAS DE FILAS	10
2.4 MODELO DE FILA M/M/1	11
3. CAPÍTULO 3 - FILAS COM REALIMENTAÇÃO	14
3.1 FILAS COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI	14
3.2 FILAS M/G/1 COM REALIMENTAÇÃO INSTANTÂNEA BERNOULLI	16
3.2.1 PROCESSO DE PARTIDA	18
3.2.2 FILA M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI	21
4. CAPÍTULO 4 - SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA	27
4.1 INTRODUÇÃO	27
4.1.1 TIPOS DE MODELOS	28
4.1.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS	29
4.1.3 ETAPAS DA SIMULAÇÃO	30
4.2 GERAÇÃO DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS	32
4.3 PERÍODO DE INICIALIZAÇÃO	33
4.4 MÉTODOS DE COLETAS DE DADOS	34

4.5	NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS	39
5.	CAPÍTULO 5 - DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	42
5.1	INTRODUÇÃO	42
5.2	A SIMULAÇÃO DA FILA M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI	43
5.3	DETERMINAÇÃO DO PERÍODO DE INICIALIZAÇÃO E DO TAMANHO DE BATCH	45
5.4	DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO	47
5.5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	48
6.	CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES FINAIS	57
6.1	CONCLUSÕES	57
7.	BIBLIOGRAFIA	61
APÊNDICE A		
	PROGRAMA DA FILA M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI	64
APÊNDICE B		
	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COM NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS	67
	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COM NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS	72
APÊNDICE C		
	TEMPOS DE ESPERA	77

CAPÍTULO 1 : INTRODUÇÃO

A teoria das filas tem sido utilizada em muitas áreas de aplicação, especialmente em redes de computação e em engenharia onde, os pesquisadores usualmente encontram problemas de desempenho em filas. Essas filas de espera podem ser encontradas tanto em atividades corriqueiras, como telefonar ou ir a um banco, quanto nas menos usuais, como utilizar um programa de computação ou analisar o fluxo de água de um rio.

Sempre que modelamos um sistema através de teoria de filas, precisamos analisá-lo em minúcias, pois o modelo deve apresentar características fundamentais do sistema: número de servidores, os processos de entrada e serviço, se existe ou não retorno dos fregueses ao mesmo servidor, se os fregueses são todos de mesma prioridade ou não, se exigem serviços diferentes ou não, etc.

A partir do modelo de fila proposto para o sistema, várias medidas de desempenho podem ser analisadas, como por exemplo, o número de fregueses no sistema, a proporção do tempo livre dos servidores, a taxa de ocupação do sistema, o tempo de espera e de permanência de um freguês no sistema.

A literatura apresenta vários tipos de sistemas de filas, tais como: sistemas com apenas um servidor, redes de filas com ultrapassagem, redes de filas com realimentação, redes clássicas com um ou mais servidores, etc (ver por exemplo Allen (1990) e Cooper (1981)).

Redes de filas com realimentação são evidenciadas pela possibilidade dos fregueses receberem diversos atendimentos do mesmo servidor, antes que saiam do sistema, devido à possibilidade de retornar à fila.

Neste trabalho, nós analisamos o desempenho da simulação utilizando um modelo de filas com realimentação instantânea Bernoulli.

Sistemas de filas com um servidor e com realimentação instantânea são aqueles onde o freguês, após ser servido, tanto pode sair do sistema para não mais voltar, como pode retornar instantaneamente à fila para esperar por mais serviço. Possuem sala de espera finita ou infinita e processos de chegada e de atendimento seguindo alguma distribuição de probabilidade. Esses sistemas são bastante freqüentes quando fazemos uso de programas de computador.

Na literatura, diversas filas com realimentação foram estudadas; D'Avignon e Disney (1976), por exemplo, estudaram a fila com um único servidor e com realimentação dependente do estado do sistema, cuja decisão de retorno depende de diversas características, tais como, comprimento da fila, tempo do serviço recebido, etc. Foley e Disney (1983) trabalharam a fila com realimentação atrasada.

Os resultados teóricos do modelo de filas com realimentação instantânea Bernoulli foram apresentados em Takács (1963), D'Avignon e Disney (1977), Disney, McNickle e Simon (1980), Disney (1981), Disney, König e Schmidt (1984) e outros, e desenvolvidos por nós no início desta pesquisa. Estamos dissertando no capítulo 2 à respeito de teoria das filas, e analisando os resultados teóricos da fila M/M/1 com realimentação instantânea no capítulo 3.

Por outro lado, a simulação estocástica é atualmente uma poderosa ferramenta na análise de modelos que envolvam processos estocásticos e, mais particularmente, processos de filas. A simulação tanto nos permite estudar a implantação de um sistema novo, como analisar mudanças em sistema já existente, sem que haja necessidade de interferir nas atividades do mesmo.

Recentes avanços nas metodologias em simulação, disponibilidade de softwares e desenvolvimentos técnicos em computação tem tornado a simulação uma das ferramentas mais amplamente usadas e aceitas na análise de sistemas. Em particular, atualmente, muitos ramos de atividades profissionais utilizam teoria das filas e a simulação estocástica para a resolução e aperfeiçoamento de suas pesquisas.

Entretanto a simulação estocástica nos fornece apenas estimativas dos resultados reais de um sistema; contudo, se esta for bem modelada e executada, esses resultados fornecerão uma boa estimativa do sistema simulado. Algumas considerações à respeito de simulação e do uso de *números aleatórios antitéticos*, que utiliza os números aleatórios no sentido usual e seus complementares, na geração das variáveis aleatórias envolvidas no modelo, estão mostradas no capítulo 4.

Encontramos na literatura diversos trabalhos que comprovam, analiticamente e através de simulações, que o uso dos números aleatórios antitéticos conduz à redução de variância (Law e Kelton (1991), Ripley (1987)). Queremos então verificar se além disso, também resulta numa porcentagem de cobertura maior.

O emprego de simulação apresenta diversas vantagens e desvantagens que serão vistas no capítulo 4. Dentre as desvantagens, entretanto, podemos destacar o fato de que os resultados obtidos são aleatórios e, portanto, ao fazer uma simulação, devemos sempre nos preocupar em aumentar a eficiência estatística desses resultados. Um dos meios para esse aumento de eficácia é procurar aumentar a porcentagem de cobertura dos resultados da simulação, correspondendo à proporção de vezes que o valor real da variável aleatória em estudo, pertence aos intervalos de confiança gerados na repetição do experimento de simulação.

Isso porque sabemos que, sendo o resultado da simulação um valor estimado e o intervalo de confiança construído em torno dele, nem sempre contem o valor real da variável. Este é o estudo que desenvolvemos nesta

pesquisa, pois nosso objetivo neste trabalho é analisar o desempenho do uso de números aleatórios antitéticos, através da análise da porcentagem de cobertura do resultado real da variável analisada do sistema proposto.

Surpreendentemente, vemos em Law (1977) que intervalos construídos com 90% de confiança, contêm o valor real de 40,50 a 86,75% das vezes, em situações normais de simulação em uma fila M/M/1.

Em Bernasconi e Salles (1993), usando uma fila M/M/1, fez-se a análise de cobertura do tempo médio de espera dos fregueses no sistema, observando-se uma melhora significativa, de 81% com números aleatórios usuais para 87% com antitéticos, para intervalos construídos com 90% de confiança.

Embora seja trabalhosa a simulação com números antitéticos, pois temos que realizar pares de rodadas para tentar induzir uma correlação negativa através do uso de números aleatórios complementares, sendo necessária a coleta de todos os tempos de espera gerados em cada rodada (apresentamos no apêndice C alguns tempos de espera coletados), temos a seguinte questão: em modelos mais complicados de redes de filas essa melhora na cobertura se mantém? Procurando essa resposta, simulamos uma rede de fila M/M/1 com realimentação instantânea Bernoulli. Os resultados obtidos e as análises sobre a correlação negativa, a média, intervalos de confiança e porcentagem de cobertura dos tempos de espera, se encontram no capítulo 5.

Para obtermos resultados sobre a análise da porcentagem de cobertura do tempo médio de espera na fila M/M/1 com realimentação instantânea Bernoulli em equilíbrio, desenvolvemos 400 rodadas de simulação do modelo proposto, sendo 200 usando números aleatórios usuais e 200 números antitéticos. A determinação do tamanho da rodada, bem como do período de inicialização do sistema (ou para que o sistema atinja o equilíbrio), foi feita através de rodadas piloto.

A partir dos resultados obtidos, fizemos a análise da porcentagem de cobertura do tempo médio de espera dos fregueses no sistema, considerando que devido ao processo de realimentação, cada um dos fregueses é atendido um número aleatório de vezes pelo servidor antes que saia do sistema. Além da porcentagem de cobertura, pesquisamos também a respeito da correlação negativa induzida pelo uso de números aleatórios antitéticos, sobre o intervalo de confiança do tempo médio de espera, a variância desta média e sobre o número médio de retornos, entre outras medidas de desempenho (apêndice B).

As simulações foram feitas utilizando-se o simulador GPSS/H (*General Purpose Simulation System, version H*), o programa pode ser visto no apêndice A, e a análise estatística dos resultados por intermédio do programa estatístico MINITAB. Apresentamos as conclusões finais deste trabalho nos capítulos 5 e 6, aonde mostramos que, embora haja correlação negativa entre os consecutivos tempos de espera gerados pela simulação, o resultado final da análise de cobertura mostrou-se levemente inferior com os números aleatórios antitéticos (passamos de 88.50% para 87.50%), com uma diminuição do tamanho do intervalo de confiança gerado (de 0.581 para 0.393).

CAPÍTULO 2 : TEORIA DAS FILAS

Neste capítulo apresentamos algumas definições gerais sobre teoria das filas, a notação utilizada neste trabalho e comentamos sobre alguns tipos de filas existentes.

2.1. INTRODUÇÃO

Teoria das filas é uma área bastante importante em teoria das probabilidades, pois em situações de ordem prática há uma grande quantidade de filas de espera com as quais nos deparamos constantemente. Ocorrem filas nos correios, portos, postos de gasolina, redes de computadores, e em praticamente todos os tipos de sistemas prestadores de serviços.

Há diversos tipos de sistemas de filas já apresentados na literatura (ver Disney e König (1985) e Gross e Harris (1985), entre outros). As filas clássicas (como por exemplo as $M/M/k$, $G/GI/k$, etc), com salas de espera finita ou infinita, alguma disciplina de fila e processos de chegada e atendimento seguindo alguma distribuição de probabilidade, são, em sua maioria, facilmente resolvidas analiticamente, mas as filas mais complexas são de difícil resolução analítica.

Sempre que analisamos filas de espera temos que considerar que se houver fornecimento de serviço além do necessário, resultará em gastos e prejuízos para o servidor e se, por outro lado, o sistema não proporcionar um atendimento mínimo, poderá haver perda de fregueses e longas filas de espera. A teoria das filas e a simulação estocástica contribuem para que sejam tomadas decisões acertadas para a solução destes problemas.

Atualmente, muitos profissionais, tais como arquitetos, engenheiros, especialistas em redes de computação, entre outros, utilizam a teoria das filas para resolver problemas e otimizar seus trabalhos.

O uso mais antigo da teoria das filas foi no delineamento de sistemas telefônicos, sendo que o conceito desta teoria foi formalizado quando em 1909, A. K. Erlang publicou o artigo "The theory of probabilities and telephone conversations".

2.2. DESCRIÇÃO DE SISTEMAS DE FILAS.

Para descrever corretamente sistemas de filas precisamos conhecer seus diversos componentes. Em sistemas de filas, os fregueses não necessariamente são pessoas, podem ser carros, fluxo de água, mercadorias, informações de computador, ligações telefônicas, entre inúmeras outras coisas. Já os centros de serviço, por sua vez, podem ser uma rua, estação de abastecimento de água, supermercado, computador, posto telefônico, etc.

A figura 2.1 esquematiza um sistema de filas. Os fregueses ficam na fila de espera, caso os servidores estejam ocupados. E, se o sistema permitir, partem após todos os serviços requeridos tenham sido completados.

Existem diversos modelos de sistemas de filas, com chegada e atendimento individual, com chegadas em grupos e/ou atendimentos em grupos, filas determinísticas, filas aleatórias, etc.

Fila determinística é aquela em que o instante de chegada dos fregueses é conhecido e fixo, e/ou o tempo de atendimento também é fixo. Já na *fila aleatória*, as chegadas e os tempos de atendimento são regidos por processos estocásticos, com distribuição de probabilidade conhecida e de média constante no intervalo de tempo considerado.

Fig. 2.1 - Elementos de um sistema de filas

Existem diversas *características* que diferenciam os sistemas, tais como:

- Tamanho da sala de espera;
- Número de servidores;
- Tipos de fregueses;
- Disciplina das filas;
- Prioridade de serviço;
- etc.

Entende-se por *sala de espera* o espaço físico ou virtual onde deve ocorrer a espera, podendo ser finito ou infinito. Nos casos onde a sala de espera é finita, pode haver problemas quanto a perda de fregueses, pois se ocorrem chegadas durante os intervalos de tempo em que a sala estiver completa, o freguês não poderá entrar e esperar no sistema.

O *número de servidores* pode ser finito ou infinito. Se for infinito (virtual) considera-se que não ocorre formação de filas de espera. O ideal é que exista uma relação de equilíbrio entre o número de servidores e o processo de chegada dos fregueses, para que não haja servidores desocupados, ou filas longas.

Quanto aos *tipos de fregueses* deve haver preocupação se estamos lidando com fregueses com as mesmas características, pois devemos tratar de forma diferenciada tipos de fregueses diferentes.

Entende-se por *disciplina de fila* a ordem pela qual os fregueses são servidos. Há diversas disciplinas de filas, dentre elas podemos citar:

FCFS - O primeiro freguês que chega ao sistema é o primeiro a ser atendido;

LCFS - O último freguês que chega ao sistema é o primeiro a ser atendido;

SIRO - O serviço ocorre em ordem aleatória: sorteia-se, segundo uma distribuição qualquer, dentre os fregueses que estão no sistema, o próximo a ser atendido;

ROUND-ROBIN - Subdivide-se a unidade do tempo de serviço, proporcional ao número de fregueses presentes no sistema;

COM OU SEM PREEMPÇÃO - Se houver preempção há interrupção do serviço que está sendo realizado, quando ocorre a chegada de outro freguês com maior prioridade, podendo ocorrer também no caso de fila LCFS.

Quanto às prioridades de serviço, pode-se entender que existe prioridade quando há necessidade de um freguês ser atendido antes de outro, por haver hierarquia ou precedência.

2.3. NOTAÇÃO E CONFIGURAÇÕES DE SISTEMAS DE FILAS

O sistema de fila é caracterizado pelo processo de chegada de fregueses ao sistema, o processo de atendimento, o número de servidores, a sala de espera, etc.

Usualmente utiliza-se a notação de Kendall para indicar o sistema, como se segue:

$A/B/C/D/E...$

onde: "A" representa o processo de chegada e "B" o processo de serviço, e estes podem ser:

- A,B: M - Markoviano ($M/M/\bullet$)
- D - Determinístico ($M/D/\bullet$) ou ($D/M/\bullet$) ou ($D/D/\bullet$)
- G - Geral
- GI - Geral e Independente
- E_k - Erlang de ordem k
- etc.

"C" representa o número de servidores, "D" mostra o tamanho da sala de espera ou do sistema e "E" o tamanho da população. Quando não há especificações sobre "D", "E" ou a disciplina, considera-se que o tamanho da sala de espera e o tamanho da população são infinitos e a disciplina é FCFS.

Atualmente estuda-se filas mais complexas e a notação utilizada têm se adequado às filas, portando usamos, nestes casos, os três ou quatro primeiros elementos da notação de Kendall e explicitamos a disciplina, prioridade, etc., de maneira literal.

Há diversos tipos de filas, pois podem ocorrer variações na configuração dos centros de serviço, na disciplina e na prioridade, entre outros. E portanto, deve-se analisar cuidadosamente cada sistema, para se definir qual modelo é o mais adequado.

Na figura 2.2, há alguns exemplos de configurações para sistemas de filas.

Fig. 2.2 - Configurações para sistemas de filas

2.4. O MODELO DE FILA M/M/1

Usualmente, na análise de sistemas de filas, procuramos estabelecer medidas para o desempenho, baseadas no seu comportamento em equilíbrio.

Para exemplificar os resultados que podem ser obtidos nessa análise, vamos expor resumidamente o desenvolvimento da fila M/M/1.

Um dos modelos de filas mais estudados é o da fila M/M/1, onde o processo de chegada é um *Processo de Poisson*, com taxa λ , e portanto com tempos entre chegadas de fregueses seguindo a distribuição exponencial; seu processo de atendimento é Markoviano, com tempos de serviço seguindo a distribuição exponencial, com taxa μ . Este modelo representa um sistema com sala de espera e tamanho da população infinitos, um único servidor e sua disciplina é FCFS. Ver, por exemplo, Allen (1990) e Gross e Harris (1985).

Portanto, as funções de distribuição que caracterizam os processos de chegada e de atendimento são, respectivamente,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{e} \quad H(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

com tempo médio entre chegadas $1/\lambda$, e tempo médio de serviço $1/\mu$.

Na figura 2.3, podemos ver uma esquematização de fila M/M/1.

Fig. 2.3 - Fila M/M/1

Devido ao fato dos tempos entre chegadas e dos tempos de serviço seguirem a distribuição exponencial e portanto terem a propriedade de "falta de memória", o processo $\{N_t : t \geq 0\}$, que conta o número de fregueses no sistema em um instante t qualquer, é um processo Markoviano.

Usualmente estudamos o processo $\{N_t : t \geq 0\}$ quando o sistema está em equilíbrio, isto é, determinamos a distribuição do sistema em equilíbrio, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr [N_t = n] = \pi_n, \quad n \geq 0.$$

A distribuição $\{\pi_n, n \geq 0\}$ é dada por:

$$\pi_n = \rho^n (1 - \rho), \quad n \geq 0,$$

se está satisfeita a condição de existência para $\{\pi_n, n \geq 0\}$, ou seja,

$$\text{se } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

ρ é então chamada de taxa de ocupação do sistema.

Partindo da distribuição de equilíbrio, podemos determinar algumas medidas de desempenho do sistema que são mais utilizadas, tais como:

$$L = E[N] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- Número esperado de fregueses no sistema, onde $\{N\}$ é o processo em equilíbrio.

$$L_q = E[N_q] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- Número esperado de fregueses na fila,

$$\text{onde } q = \begin{cases} N-1 & \text{se } N \geq 1 \\ 0 & \text{se } N = 0 \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

- Tempo médio de permanência dos fregueses no sistema.

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

- Tempo médio de permanência dos fregueses na fila.

A partir desses resultados, conhecendo ou estimando λ e μ , podemos fazer a análise de sistemas que possam ser caracterizados como filas M/M/1. Entretanto, não estaremos desenvolvendo nossa pesquisa com modelos M/M/1, e sim com filas com processo de realimentação.

CAPÍTULO 3 : FILAS COM REALIMENTAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados teóricos de filas com realimentação instantânea Bernoulli, desenvolvidos por Disney, McNickle e Simon (1980), entre outros, pois desenvolvemos nossos resultados, simulação e análises tendo este sistema como modelo.

3.1. FILAS COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI

Em alguns sistemas de filas, podem ocorrer situações em que o freguês, após ser servido, retorne novamente ao sistema para receber outro atendimento. Cada freguês retorna com probabilidade p , e com probabilidade q o freguês deixa o sistema, com $p + q = 1$. Esta decisão de retorno é um processo de Bernoulli e é um processo independente dos fatores individuais dos fregueses ou do sistema. Tais problemas de filas ocorrem, por exemplo, em redes de computadores. Esses tipos de sistemas são ditos *filas com realimentação Bernoulli*.

Há diversos tipos de filas com realimentação Bernoulli. Um desses tipos é o sistema que apresenta dois servidores e onde o freguês, após ser servido pelo primeiro, tem a probabilidade p de se juntar ao fim da fila do segundo servidor, ser servido por este e novamente retornar à primeira fila, com probabilidade 1. Este sistema é conhecido por *sistema de filas com realimentação atrasada Bernoulli*, como podemos ver na figura 3.1 (Ver, por exemplo, Foley e Disney (1983)).

Fig. 3.1 - Fila com realimentação atrasada Bernoulli

Já os sistemas com apenas um servidor e onde um freguês, ao acabar de ser servido, pode retornar ao fim da fila para requisitar mais serviço, são chamados *sistemas de filas com realimentação Instantânea Bernoulli*, como está esquematizado na figura 3.2 (Ver por exemplo, Disney, McNickle e Simon (1980) e D'Avignon e Disney (1977)).

Fig. 3.2 - Fila com realimentação Instantânea Bernoulli

Um modelo de aplicação em computação pode ser o uso, ou não, dos bancos de dados por um programa que está sendo processado.

Temos portanto, neste modelo, que um freguês, a cada retorno, possui um correspondente tempo de espera na fila, um novo serviço, etc. Logo, cada freguês recebe um número aleatório de serviços do mesmo servidor, definido através do processo de realimentação Bernoulli.

Devemos também notar que, devido à aleatoriedade dos retornos para cada freguês, a ordem de partida dos fregueses do sistema não corresponde à ordem com que os fregueses chegam no sistema, nem o tempo total de serviço

para cada freguês é necessariamente segundo a mesma distribuição, embora cada parcela de serviço o seja.

De agora em diante, sempre que nos referirmos a sistemas de filas com realimentação, estaremos considerando o sistema com realimentação Instantânea Bernoulli.

3.2. FILAS M/G/1 COM REALIMENTAÇÃO INSTANTÂNEA BERNOULLI

Passamos então a apresentar sucintamente os resultados de Disney, McNickle e Simon (1980) para filas M/G/1 com realimentação Bernoulli, visto que nosso interesse é quando o processo de serviço tem uma distribuição exponencial, e não geral.

Supomos que fregueses chegam ao sistema de acordo com um Processo de Poisson de taxa λ . A sala de espera possui capacidade infinita e os fregueses são servidos por um único servidor na ordem de chegada. Os tempos de serviço são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas S_n , com função de distribuição $H(t)$ e a transformada de Laplace-Stieltjes de $H(t)$, denominada $H^*(s)$, é definida por:

$$H^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dH(t) \quad , \quad s \geq 0.$$

Supomos que os processos de chegada e de atendimento são independentes, e que os fregueses após serem servidos retornam ao sistema, juntando-se ao fim da fila, com probabilidade p e partem com probabilidade q , onde $p + q = 1$. Este sistema é denominado de *Fila M/G/1 com Realimentação Instantânea Bernoulli*.

Além do processo fundamental $\{N_t : t \geq 0\}$ que conta o número de fregueses no sistema num instante t qualquer, para este sistema podemos

analisar diferentes processos imersos nos instantes em que ocorrem mudanças de estado. Dentre eles estão o processo de *chegada*, de *entrada*, de *saída*, de *retorno* e o processo de *partida*, imersos nos instantes:

T_n^a : Instante de chegada -	Instante em que o n-ésimo freguês chega ao sistema;
T_n^i : Instante de entrada -	Instante em que o n-ésimo freguês entra na fila;
T_n^o : Instante de saída -	Instante em que o n-ésimo freguês termina o serviço;
T_n^f : Instante de retorno -	Instante em que o n-ésimo freguês retorna à fila;
T_n^d : Instante de partida -	Instante em que o n-ésimo freguês parte do sistema.

Temos para os processos de instantes de ocorrência de eventos que:

$$\{T_n^o\} = \{T_n^f\} \cup \{T_n^d\} \quad \text{e} \quad \{T_n^i\} = \{T_n^f\} \cup \{T_n^a\}$$

Definimos então os processos imersos $\{N_n^j, T_n^j, n \geq 0\}$, $j = a, i, o, f, d$, onde $N_n^j = N(T_n^j)$ é o número de fregueses no sistema imediatamente após a ocorrência do n-ésimo evento T_n^j , $j = a, i, o, f, d$.

Este processos podem ser vistos esquematicamente na figura 3.3.

Fig. 3.3 - Fila M/G/1 com realimentação Instantânea Bernoulli

Pode-se mostrar que $\{N_n^j, T_n^j, n \geq 0\}$ são processos de renovação Markoviana, com núcleo semi-Markoviano dado por:

$$\begin{aligned}
 & \Pr [N_n^j = k, T_n^j - T_{n-1}^j \leq t \mid N_0^j, N_1^j, \dots, N_{n-1}^j = i, T_0^j, T_1^j, \dots, T_{n-1}^j] = \\
 & = \Pr [N_n^j = k, T_n^j - T_{n-1}^j \leq t \mid N_{n-1}^j = i] = \\
 & = Q_{i,k}(t) \text{ (conforme visto em Marchesoni (1994)).}
 \end{aligned}$$

O estudo da fila com realimentação Bernoulli, através dos processos de comprimento de filas imersos em vários instantes é de grande importância, pois nem todos possuem a mesma distribuição assintótica. Estes processos são fortemente relacionados entre si.

3.2.1. PROCESSO DE PARTIDA

Fixar-nos-emos no processo de partida, que é analisado através do número de fregueses no instante imediatamente após uma partida $\{T_n^d, n \geq 0\}$, por ser através dele que definimos a regra de parada para a nossa simulação.

Então:

$$T_n^d = \begin{cases} T_{n-1}^d + S_n' & , \text{ se o sistema fica ocupado após a } (n-1) - \text{ésima partida} \\ T_{n-1}^d + I_n + S_n' & , \text{ se o sistema fica vazio após a } (n-1) - \text{ésima partida} \end{cases}$$

onde S_n' é o tempo total de serviços prestados pelo servidor entre a $(n-1)$ -ésima e a n -ésima partida e I_n é o tempo ocioso até a chegada de um freguês, quando o sistema fica vazio após uma partida.

Para a fila $M/G/1$, os tempos ociosos $\{I_n\}$ são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, que seguem a distribuição exponencial com parâmetro λ .

Então,

$$S_n' = S_1 + S_2 + \dots + S_m,$$

onde $M = m$ é a variável aleatória que conta o número de serviços realizados entre duas partidas sucessivas e S_i o tempo de cada serviço prestado.

Para calcularmos a distribuição da variável M , definimos $\{Y_n, n \geq 0\}$, processo de realimentação Bernoulli, por:

$$Y_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se o } n - \text{ésimo freguês atendido parte do sistema} \\ 1 & , \text{ se o } n - \text{ésimo freguês atendido retorna à fila} \end{cases}$$

Portanto a distribuição de M , é dada por:

$$\begin{aligned} \Pr [M = k] &= \Pr [Y_1 = 1, Y_2 = 1, \dots, Y_{k-1} = 1, Y_k = 0] = \\ &= p^{k-1} \cdot q \end{aligned}$$

Logo, a variável aleatória M é geometricamente distribuída e $\{S'_n\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e com distribuição dependente de M .

Temos então os seguintes resultados:

Resultado 1: A transformada de Laplace-Stieltjes da função de distribuição S'_n é dada por:

$$G^*(s) = \frac{q \cdot H^*(s)}{1 - p \cdot H^*(s)}, \quad s \geq 0. \quad \otimes$$

(o desenvolvimento deste resultado pode ser visto em Cooper (1981)).

A partir da transformada de Laplace-Stieltjes de S'_n , podemos calcular a função geradora de probabilidade do processo básico $\{N_n^d : n \geq 0\}$, do processo de partida, descrito a seguir:

Seja $\{\pi(k) : k \geq 0\}$ a distribuição de equilíbrio de $\{N_n^d : n \geq 0\}$. Definimos então a função geradora de probabilidade:

$$\hat{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \pi(k), \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1$$

Disney, McNickle e Simon (1980) e Gross e Harris (1985), desenvolvendo a função geradora de probabilidade $\hat{g}(z)$, mostram que:

Resultado 2: A função geradora de probabilidades das distribuições em equilíbrio, do processo de partida é dada por:

$$\hat{g}(z) = \frac{\pi(0)(z-1)G^*(\lambda - \lambda z)}{z - G^*(\lambda - \lambda z)}$$

de onde obtemos:

$$\pi(0) = 1 - \frac{\lambda E[S_n]}{q}. \quad \otimes$$

3.2.2. FILA M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI

Como o modelo deste trabalho é a fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, e nossa regra de parada da simulação é dada a partir dos instantes de partida de fregueses no sistema, desenvolvemos alguns resultados desse modelo quanto ao processo imerso nos instantes de partida, a partir dos resultados apresentados em Disney, McNickle e Simon (1980). Os resultados que obtivemos são apresentados a seguir (para maiores detalhes, ver Marchesoni (1994)):

Neste sistema de fila, as chegadas dos fregueses formam um processo de Poisson, com taxa λ e os tempos de atendimento seguem a distribuição exponencial, com taxa μ . A sala de espera é infinita, há apenas um servidor e a disciplina da fila é FCFS. Os fregueses após serem servidos partem do sistema com probabilidade q e retornam ao fim da fila com probabilidade p , $p + q = 1$. O processo de decisão de retorno é um processo de Bernoulli.

Se assumirmos que a distribuição do tempo de serviço é exponencial, então,

$$H(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

Resultado 3: A função distribuição do tempo total de serviço de um freguês, W_s , é exponencial de parâmetro $q\mu$, ou seja:

$$W_s(t) = \Pr [W_s \leq t] = 1 - e^{-q\mu t} \quad \otimes$$

Resultado 4: A transformada de Laplace-Stieltjes do tempo total de serviço, W_s , de um freguês é dada por :

$$W_s^*(s) = \frac{q\mu}{s + q\mu} \quad \otimes$$

Seja $\{N_n^d, T_n^d, n \geq 0\}$ o processo imerso nos instantes de partida, onde N_n^d é o número de fregueses no sistema imediatamente após uma partida.

A matriz de transição P da cadeia imersa $\{N_n^d, n \geq 0\}$, com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$, é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde ,

$$k_n = \frac{\lambda^n q\mu}{(\lambda + q\mu)^{n+1}}, \quad n \geq 0$$

Podemos então calcular a distribuição de equilíbrio de $\{N_n^d : n \geq 0\}$.

Seja $\{\pi(j), j \in E\}$ a distribuição de equilíbrio da cadeia imersa $\{N_n^d, n \geq 0\}$, que é solução de

$$\pi(j) = \sum_k \pi(k) P_{kj}$$

onde P_{kj} é a probabilidade de transição do estado k para o estado j , na matriz imersa P , definida em (1).

Podemos calcular $\hat{g}(z)$, a função geradora de probabilidade de $\{N_n^d, n \geq 0\}$ que é dada por:

$$\hat{g}(z) = \sum_{j \in E} \pi(j) z^j, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

Após substituições, obtemos:

$$\hat{g}(z) = [\pi(0) + \pi(1)] k_0 + \sum_{j=1}^{\infty} z^j \pi(0) k_j + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^j z^j \pi(j-i+1) k_i \quad (2)$$

Para determinarmos a equação (2), chamamos de

$$A = [\pi(0) + \pi(1)] k_0$$

$$B = \pi(0) \sum_{j=1}^{\infty} z^j k_j$$

$$C = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^j z^j \pi(j-i+1) k_i$$

Desenvolvendo cada parcela obtemos, após os cálculos usuais, o resultado de $\hat{g}(z)$ dado por:

$$\begin{aligned}\hat{g}(z) &= \left(\frac{z \pi(0) q \mu - \pi(0) q \mu}{z (\lambda - \lambda z + q \mu)} \right) \left(\frac{z (\lambda - \lambda z + q \mu)}{z (\lambda - \lambda z + q \mu) - q \mu} \right) = \\ &= \frac{\pi(0) q \mu (z - 1)}{z (\lambda - \lambda z + q \mu) - q \mu}\end{aligned}$$

(para maiores detalhes, ver Marchesoni (1994))

Temos então o seguinte resultado,

Resultado 5: A função geradora de probabilidade da distribuição de equilíbrio da cadeia imersa $\{N_n^d, n \geq 0\}$ é dada por:

$$\hat{g}(z) = \frac{\pi(0) q \mu (z - 1)}{z (\lambda - \lambda z + q \mu) - q \mu}, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad \otimes$$

Por outro lado, como

$$\lim_{z \rightarrow 1} \hat{g}(z) = 1$$

podemos obter a probabilidade do sistema estar vazio em equilíbrio, $\pi(0)$, usando a regra de L'Hôpital:

$$\pi(0) = 1 - \frac{\lambda}{q \mu} = 1 - \rho$$

onde ρ é a condição para que exista distribuição de equilíbrio. Para esta fila a taxa de ocupação do sistema (ρ), é dado por:

$$\rho = \frac{\lambda}{q \mu} < 1. \quad (3)$$

Determinamos então a distribuição de equilíbrio da cadeia imersa $\{ N_n^d, n \geq 0 \}$ pelos métodos usuais, isto é:

$$\left. \frac{\partial^n \hat{g}(z)}{\partial z^n} \right|_{z=0} = n! \pi(n), \quad n \geq 1$$

Substituindo temos:

$$\pi(n) = \rho^n (1 - \rho), \quad n \geq 0;$$

que é a equação de equilíbrio em instantes de partida para este sistema de fila.

Portanto, a distribuição de equilíbrio $\{ \pi(n), n \geq 0 \}$ é geométrica, com parâmetro $(1-\rho)$.

A partir desse resultado, podemos então calcular algumas medidas de desempenho do sistema em equilíbrio, imerso nos instantes de partida do sistema.

Resultado 6: O número esperado de fregueses no sistema em equilíbrio, observado nos instantes de partida, é dado por:

$$L = E(N^d) = \frac{\rho}{1-\rho} = \left(\frac{\lambda}{q\mu} \right) \left(\frac{q\mu}{q\mu - \lambda} \right) = \frac{\lambda}{q\mu - \lambda} \quad \otimes$$

Resultado 7: O tempo médio de permanência de um freguês no sistema, observado nos instantes de partida, é dado por:

$$W = \frac{1}{q\mu - \lambda}. \quad \otimes$$

(a demonstração pode ser encontrada em Takács (1962)).

Resultado 9: Seja V_n a variável aleatória que conta o número de retornos realizado por um freguês, que corresponde ao número de serviços menos 1 que esse freguês recebe e considerando a demonstração do resultado 4, temos que:

$$\Pr [V_n = k] = p^k q$$

que tem distribuição geométrica. Portanto, o número médio de retornos é dado por:

$$E [V_n] = \frac{p}{q}. \quad \otimes \quad (4)$$

Resultado 10: O tempo médio de espera de um freguês, observado nos instantes de partida, é dado por:

$$W_q = \frac{1}{q\mu} \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (5)$$

Demonstração: Lembrando que o tempo total de um freguês no sistema (resultado 8) é a soma dos tempos de serviço (resultado 4) que ele recebe mais o tempo que ele espera na fila, segue-se o resultado. $\otimes$

A partir desses resultados teóricos, estaremos fazendo a análise da simulação nos capítulos 5 e 6.

CAPÍTULO 4 : SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA

Neste capítulo estudamos a simulação de eventos discretos, algumas de suas vantagens e desvantagens, seus principais problemas e soluções.

4.1. INTRODUÇÃO

A simulação é uma ferramenta valiosa para diversos profissionais, tais como, engenheiros e pesquisadores. Podemos utilizá-la tanto na avaliação do projeto de um novo sistema, como para avaliar mudanças em sistemas já existentes, quando testes e experimentos com o sistema real seriam caros demais e/ou destrutivos. Ela nos auxilia na compreensão de sistemas complexos, nos fornecendo, de forma lógica e sistemática, um grande volume de dados.

Como o próprio nome indica, simulação é uma imitação que fazemos de sistemas reais, desenvolvida em computadores, através de um modelo que atua como uma representação do comportamento do sistema estudado. Sendo uma representação, temos portanto primeiramente que fazer a análise da situação real para que possamos identificar todas as suas características, variáveis e pontos críticos e então idealizarmos o modelo o mais próximo possível da realidade.

A simulação é uma técnica poderosa e muito vantajosa se bem utilizada, mas que também poderá nos induzir a erros graves, e conseqüentemente à sérios prejuízos, quando não tomamos certos cuidados básicos. O modelo de

simulação deve ser suficientemente detalhado para que os resultados obtidos correspondam o melhor possível aos resultados do sistema real.

Todavia, para que um modelo seja tratável, somos obrigados, em certos casos, a adotar hipóteses restritivas ao sistema, e isso pode comprometer a credibilidade do modelo resultante, pois seus resultados podem não representar corretamente o universo da problemática real. Torna-se imprescindível, portanto, não esquecermos as simplificações feitas quando da formulação do modelo e resistir à tentação de generalizar as conclusões baseadas nos resultados do simulador.

Além dos cuidados que já citamos, devemos também, por exemplo, fazer todas as verificações para a validação do modelo e do simulador, para garantir boas condições de emprego dos mesmos.

A simulação deve ser desenvolvida de acordo com os modelos a serem simulados, como apresentaremos a seguir. Também abordaremos suas vantagens e desvantagens, bem como as etapas a serem seguidas para o seu desenvolvimento.

4.1.1. TIPOS DE MODELOS

Há diversos tipos de modelos de simulação que variam conforme o sistema estudado. O *modelo discreto* é aquele que representa o sistema onde os estados das variáveis mudam somente em um conjunto de pontos enumerável ou finito, dentro de um intervalo de tempo. Um bar, ou um banco, é um exemplo de sistema discreto pois o estado das variáveis, por exemplo o número de fregueses, muda somente quando um freguês chega ou parte do sistema.

O *modelo contínuo*, é aquele que modela o sistema onde o estado das variáveis muda de modo contínuo em relação ao tempo. Por exemplo, um carro de corridas em relação à sua velocidade, que muda de modo contínuo no tempo.

Representamos um sistema em um instante qualquer através de um *modelo de simulação estático*. O método Monte Carlo de simulação é tipicamente deste tipo o qual, por sua vez, é definido como um modelo empregando números pseudo-aleatórios, isto é, variáveis aleatórias equiprováveis ($U(0,1)$) que são usadas para resolver certos problemas numéricos (Ripley (1987)).

Um modelo de simulação é considerado *estocástico* se representa um sistema que contenha variáveis aleatórias que mudam com o passar do tempo. Os próprios resultados de um modelo estocástico são aleatórios e, assim, são apenas estimativas dos resultados verdadeiros.

Os modelos de simulação que trabalhamos neste projeto são discretos e estocásticos e por estas características, recebem o nome de *modelos de simulação de evento discreto*.

4.1.2. VANTAGENS E DESVANTAGENS

Entretanto, ao se utilizar simulação, deparamo-nos com diversas vantagens e desvantagens (Law e Kelton (1991)). Dentre as vantagens podemos citar:

- A simulação é freqüentemente o único meio de investigação possível em muitos sistemas reais, pois eles apresentam elementos estocásticos que não podem ser corretamente descritos por intermédio de modelos matemáticos e que não poderiam ser avaliados analiticamente.
- A simulação nos permite estimar a atuação de um sistema existente sob novas condições de operação.
- Podemos comparar, através da simulação, diversas propostas de projetos, ou várias políticas de operação para um mesmo sistema, e verificar qual melhor preenche as necessidades específicas.

Temos também diversas desvantagens ao se usar a simulação, tais como:

- Modelos de simulação de sistemas complexos são geralmente caros e demorados para serem desenvolvidos.
- Cada rodada de simulação de um modelo estocástico produz somente estimativas dos verdadeiros resultados de um modelo, para um conjunto particular de parâmetros de entrada. Portanto, para cada conjunto de parâmetros fixado, provavelmente teremos que realizar diversas rodadas independentes de simulação, para que haja condições de termos um resumo representativo.
- O grande volume de números resultantes de um estudo de simulação freqüentemente nos induz a ter maior confiança nos resultados obtidos do que é justificado. Se um modelo não é uma representação válida do sistema em estudo, os resultados da simulação, não interessando quão impressionantes pareçam, não fornecerão nenhuma informação útil sobre o sistema.

4.1.3. ETAPAS DA SIMULAÇÃO

Apesar da simulação não ser um processo estritamente seqüencial, há diversas etapas a serem realizadas, tais como:

- (a) *Formulação do problema e planejamento da simulação*: Sempre devemos começar uma simulação determinando os objetivos e planejando, o máximo possível, o projeto inteiro.
- (b) *Coleta de dados e definição do modelo*: Devemos coletar os dados no sistema de interesse para estimar os parâmetros de entrada e obter as funções de distribuição das variáveis aleatórias usadas no modelo.
- (c) *Validação analítica*: É necessário validar o modelo definido acima, e para tal devemos verificar se o modelo está realmente correspondendo ao sistema real. Devemos também verificar se as funções de distribuição estão adequadas, através de testes estatísticos, tais como *Qui-quadrado* e *Kolmogorov-Smirnov*.

- (d) *Construção do programa e verificação*: Devemos construir o programa de simulação através de uma linguagem de programação ou através de um software específico, como, no caso de simulação de eventos discretos, o GPSS/H, SIMUL ou SIMSCRIPT, entre outros.
- (e) *Execução de rodadas piloto*: Nesta fase são feitas algumas rodadas do modelo verificado.
- (f) *Validação do simulador*: As rodadas piloto podem ser usadas para testar a sensibilidade dos resultados a pequenas mudanças nos parâmetros de entrada. Devemos também comparar os resultados da simulação piloto com os resultados adquiridos na coleta de dados.
- (g) *Planejamento do experimento*: Devemos decidir sobre as condições iniciais e o tamanho das rodadas de simulação, e também sobre o número de rodadas independentes.
- (h) *Execução das rodadas de simulação*: São executadas as rodadas de simulação para a obtenção dos dados do sistema em estudo.
- (i) *Análise dos resultados*: Nesta etapa são utilizadas técnicas estatísticas para se analisar os resultados das rodadas de simulação. O objetivo usual é calcular a média, a variância e construir intervalos de confiança para uma medida de desempenho do sistema.
- (j) *Documentação e implementação dos resultados*: É importante documentar as suposições feitas na definição do modelo e o programa construído. Devemos sempre verificar se os resultados atingiram os objetivos propostos em (a).

4.2. GERAÇÃO DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS

No desenvolvimento das simulações, todos os resultados obtidos dependem de modo fundamental do gerador de números pseudo-aleatórios pois é, a partir destes, que o sistema em análise será desenvolvido.

Um dos fatores que pode propiciar muitos erros nos resultados de uma simulação, é causado pela aleatoriedade dos elementos gerados. Este problema somente pode ser resolvido se trabalharmos com um bom gerador de números pseudo-aleatórios.

Um gerador de números aleatórios é um procedimento que gera números independentes e equiprováveis; mas que, por serem gerados por um computador, sua seqüência é reproduzível e portanto, determinística. Conseqüentemente não a consideramos uma seqüência de números aleatórios mas sim pseudo-aleatórios.

Os primeiros métodos de geração de números aleatórios foram essencialmente realizados à mão, através de jogos de dados ou bolas numeradas, mas por volta de 1940 foram desenvolvidos os primeiros geradores numéricos ou aritméticos de números pseudo-aleatórios.

Existem diversas fórmulas de se gerar números pseudo-aleatórios, como por exemplo o gerador congruencial linear, introduzido por Lehmer em 1951. Uma seqüência de inteiros $z_1, z_2, \dots$ é definida pela fórmula recursiva

$$z_i = (az_{i-1} + c)(\text{mod } m) \quad , \quad i \geq 1 \quad , \quad 0 \leq z_i \leq m - 1$$

onde m , a , c e z_0 (o valor inicial) são inteiros positivos fixados e devem satisfazer $m > 0$, $a < m$, $c < m$, e $z_0 < m$, além de condições especiais que tornem a seqüência a maior possível (Cooper (1981)).

Para obter os números aleatórios desejados U_i (para $i = 1, 2, \dots$) em $(0, 1)$, calculamos:

$$U_i = \frac{Z_i}{m}$$

Devido a importância do gerador nos resultados da simulação, devemos sempre testar o gerador de números pseudo-aleatórios utilizado. Uma das maneiras de se efetuar esta validação é testando se os números gerados são independentes e equiprováveis e, portanto, seguem a distribuição uniforme (ver, por exemplo, Bernasconi (1993)).

Devemos observar que sempre que neste trabalho estivermos citando números aleatórios, estaremos nos referindo a números pseudo-aleatórios, por estarmos analisando simulações.

4.3. PERÍODO DE INICIALIZAÇÃO

Todos os tópicos de simulação, tratados até agora, são referentes a simulação de qualquer tipo de sistema. Neste trabalho, por simularmos sistemas de filas de espera *em equilíbrio*, nos preocupamos também com um outro problema que pode ser fonte de muitos erros na análise dos resultados obtidos, que é o *período de inicialização*.

A maioria dos sistemas de filas aleatórias, imediatamente após iniciarem seus processos de chegada e atendimento, passam por um período de inicialização ou instabilidade, correspondendo à fase transitória do sistema inicialmente instável, até atingir seu equilíbrio. Contudo, convém ressaltar que certos sistemas nunca atingem este equilíbrio, ficando permanentemente instáveis. A duração deste período varia conforme as características do sistema.

A determinação do período de inicialização é um fator importante no planejamento da simulação, pois normalmente estudamos o sistema em equilíbrio, e não devemos coletar os resultados desse período inicial para

analisar o sistema em equilíbrio, pois as características desses períodos são diferentes.

Law (1977), e posteriormente Bernasconi (1993), desenvolveram a análise comparativa de simulações contendo e não contendo o período de inicialização, para diferentes métodos de coleta de dados da simulação de uma fila M/M/1, apresentando resultados surpreendentes, como por exemplo, porcentagem de cobertura variando de 86,75% para 40,50%.

Em Pawlikowski (1990) encontramos várias regras para a determinação da duração do período de inicialização e dentre eles, a regra que afirma que este período termina após o comprimento inicial correspondendo a 2% do total da simulação. No início do nosso trabalho também testamos esse procedimento como pode ser visto no capítulo 5.

4.4. MÉTODOS DE COLETA DE DADOS

Como, na simulação de filas trabalhamos com sistemas que interagem, resultando em variáveis aleatórias altamente dependentes, procuramos resolver este problema de correlação entre as observações coletadas através de diferentes métodos de coletas de dados.

Na literatura, diversos métodos de coleta dos dados da simulação tem sido propostos, tais como: *Método de Replicações*, *Batch Means*, *Batch Means sobrepostos*, *amostras não correlacionadas*, etc. . Por serem os mais usados, descreveremos a seguir sucintamente os dois primeiros, e os demais estão descritos em Pawlikowski (1990), dentre outros.

No *método de replicações*, a simulação é dividida em uma série de n rodadas independentes com o mesmo número de resultados coletados da variável observada, onde cada rodada (R) possui um período inicial, usa uma sequência diferente e independente de números aleatórios, e a média das

observações da variável analisada, coletadas durante cada rodada é calculada. Um esquema do método de replicações pode ser visto na figura 4.1.

Fig. 4.1 - Método de Replicação

Estas médias são utilizadas na análise estatística posterior como resultados independente e identicamente distribuídos. Há opiniões diferentes sobre a aplicabilidade deste método, em comparação a outros métodos de coleta de dados, baseados em uma única simulação, mais longa.

Neste trabalho utilizamos o *Método de Batch Means*, pois além de ser considerado um método eficaz, é mais viável de ser realizado através do computador. Neste método de coleta de dados, executamos uma única rodada de simulação, temos portanto um único período inicial e escolhemos, uma única vez, as posições iniciais da seqüência de números pseudo-aleatórios. Dividimos então os n resultados observados em k batches de comprimento iguais. Obtemos então k médias da variável observada, a partir dos n resultados. Este método é representado na figura 4.2.

Fig. 4.2 - Método de Batch Means

Podemos ver que a sequência de n observações originais da variável observada, $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, é dividida em uma série de k subconjuntos não sobrepostos, denominados *batches*, de tamanho m :

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1m}), (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2m}), \dots, (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}),$$

$$\text{onde } m = \frac{n}{k}.$$

Para cada batch calculamos as médias $\bar{X}_1(m), \bar{X}_2(m), \dots, \bar{X}_k(m)$, onde:

$$\bar{X}_i(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij}$$

que são posteriormente utilizadas na análise estatística dos resultados da simulação.

O resultado final da simulação, com relação à variável X observada, será a média μ_X , estimada por $\bar{X}(n) = \bar{\bar{X}}(k, m)$, que é o estimador média das médias, onde:

$$\bar{\bar{X}}(k,m) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{X}_i(m)$$

e, como já dissemos, $n = k.m$.

Construímos então o intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confiança de $\bar{X}(n)$ definido por:

$$\bar{\bar{X}}(k,m) \pm t_{k-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}[\bar{\bar{X}}(k,m)]$$

onde:

$$\hat{\sigma}^2[\bar{\bar{X}}(k,m)] = \frac{k}{\sum_{i=1}^k} \frac{\{\bar{X}_i(m) - \bar{\bar{X}}(k,m)\}^2}{k(k-1)}$$

é o estimador de variância de $\bar{\bar{X}}(k,m)$ e $t_{k-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$, para $0 < \alpha < 1$, é o ponto

crítico superior $(1-\alpha/2)$ da distribuição t com $k-1$ graus de liberdade pois, além de não conhecermos σ^2 nem $\bar{X}$ da população, pelo Teorema de Limite Central as médias dos batches $\bar{X}_i(m)$ podem ser consideradas normalmente distribuídas (m muito grande) e, além disso, neste trabalho estamos efetuando simulações com o valor de $k = 30$ ou seja, com 30 batches.

Ao utilizarmos este método devemos levar em consideração que as observações mais distantes no tempo são menos correlacionadas. Assim, para batches suficientemente longos, ou seja, com uma quantidade grande de observações, as médias dos batches são pouco ou nada relacionadas.

A seleção do tamanho do batch que assegure médias de batches não correlacionadas e a seleção de um comprimento adequado do período de inicialização, devem ser fatores prioritários ao se utilizar este método.

Quanto à seleção do *tamanho do batch*, uma das diversas soluções apresentadas é estimar a auto-correlação entre as médias dos batches, iniciando-se com um tamanho m_1 ; caso a auto-correlação não possa ser ignorada, aumenta-se o tamanho do batch e repete-se o procedimento. O tamanho do batch ideal é aquele que apresenta pouca auto-correlação entre suas médias (ver Pawlikowski (1990)). O usual é considerarmos uma auto-correlação desprezível quando esta é menor, em módulo, que $\frac{1}{\sqrt{k}}$, onde k representa o número de elementos considerados no cálculo da auto-correlação (Mood, Graybill e Boes (1974)).

Devemos lembrar que, a auto-correlação de lag j , r_j , onde $-1 \leq r_j \leq 1$, $j = 1, 2, \dots$, das médias dos batches em cada simulação, é calculada por :

$$r_j = \frac{\sum_{i=1}^{k-j} (\bar{X}_i(m) - \bar{\bar{X}}(k,m)) (\bar{X}_{i+j}(m) - \bar{\bar{X}}(k,m))}{\sum_{i=1}^k (\bar{X}_i(m) - \bar{\bar{X}}(k,m))^2}, \quad 1 \leq i \leq k \text{ e } i+j \leq k$$

Outro problema é determinar o *número de batches* de uma simulação. A esse respeito Schmeiser (1982), conclui que um número qualquer de batches, maior que 10 e menor que 30 é razoável para a maioria das simulações, pois haveria perda significativa da porcentagem de cobertura com um número de batches abaixo de 10 e não haveria ganhos significativos da porcentagem de cobertura com mais de 30 batches.

A *porcentagem de cobertura*, como já dissemos, consiste em verificar, em cada intervalo de confiança, se o valor teórico da variável de interesse está contido neste intervalo e obter, portanto, a porcentagem dos intervalos de confiança que contém o valor teórico, em um número determinado de repetições da simulação, com diferentes sequências de números aleatórios, e os demais parâmetros do sistema fixados. Para esta pesquisa, a variável de interesse é o tempo médio de espera na fila.

4.5. NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

Neste trabalho, nosso objetivo principal é analisar o desempenho do uso de números aleatórios antitéticos, através da análise dos resultados da simulação. Portanto, descreveremos números aleatórios antitéticos a seguir:

A idéia fundamental do uso de números aleatórios antitéticos, é fazer pares de rodadas do modelo, tal que uma observação pequena em uma das rodadas, em um par, tende a ser compensada por uma grande observação na outra, e vice-versa; isto é, que as duas observações sejam negativamente correlacionadas. Então, se usarmos a média das duas observações no par, como um dado para a análise, este resultado tenderá a ser mais próximo da variável que queremos estimar, do que seria se as duas observações fossem independentes.

Portanto, os números aleatórios antitéticos tentam induzir esta correlação negativa através do uso de números aleatórios complementares para a geração das duas rodadas em um par. Isto é, se U_k é um particular número aleatório, usado para um particular propósito (por exemplo, para gerar o i -ésimo tempo de serviço) na primeira rodada, usamos $1 - U_k$ para o mesmo propósito na segunda rodada. É importante notar que o uso de um determinado U_k em uma rodada e de seu complementar $1 - U_k$ na outra rodada do par devem ser para o mesmo propósito. Pode-se mostrar que:

$$U_k \sim U(0,1) \quad \text{então} \quad 1 - U_k \sim U(0,1).$$

Nas simulações que realizamos com números aleatórios antitéticos efetuamos duas rodadas do modelo, para obtermos um único resultado da variável observada tempo de espera. Na primeira simulação utilizamos a geração usual de números aleatórios para gerar os tempos entre chegadas e os tempos de serviço, na segunda rodada utilizamos os complementares dos números aleatórios usuais gerados para obter os tempos entre chegadas e de serviço.

Logo, se o tempo entre chegadas, por exemplo, gerado por $U(0,1)$ for pequeno, o gerado por $1 - U(0,1)$ deverá ser grande. O resultado da simulação com números aleatórios antitéticos será a média dos tempos de espera obtidos nas duas rodadas, elemento a elemento. Este resultado obtido pela média é considerado um dado da simulação, e será utilizado como um elemento do batch para obtermos a média dos batches, no método de batch means.

O reflexo da média desses dois tempos deverá produzir, no sistema, tempos de espera mais similares para os fregueses, pois verificamos que ocorre uma correlação negativa entre os dados $x_1, x_2, \dots, x_n$, tempos de espera na fila gerada através dos números aleatórios usuais, e $y_1, y_2, \dots, y_n$, tempos de espera gerados pelos números aleatórios complementares, par a par $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$. Os resultados são mostrados no capítulo 5.

Devido à correlação negativa entre os $\{x_i\}$ e os $\{y_i\}$, o uso de números aleatórios antitéticos resulta em variâncias menores, nos resultados das simulações, e conseqüentemente reduz o amplitude dos intervalos de confiança que são construídos em torno das médias dos resultados. Queremos agora verificar se obtemos uma maior porcentagem de cobertura nos resultados da simulação do modelo proposto, com o uso dos números aleatórios antitéticos.

Nas simulações que realizamos da fila M/M/1 com realimentação, utilizando o software GPSS/H, geramos como primeira simulação, os valores para os tempos entre chegadas e os tempos de serviço dos fregueses, utilizando os números aleatórios $U(0,1)$. Realizamos a simulação e armazenamos os resultados dos tempos de espera em um arquivo.

Como segunda simulação, geramos os valores complementares dos números aleatórios da primeira rodada, e a partir deles os tempos entre chegadas e de serviço. Isso é feito colocando-se, na mesma seqüência, exatamente os mesmos números, mas com o sinal negativo na frente.

Efetuamos esta simulação e também armazenamos os resultados. Obtemos então a média desses resultados, dividindo por dois a soma do

primeiro tempo de espera, obtido na primeira simulação, com o primeiro tempo de espera obtido na nova simulação, e assim por diante. Esses resultados é que consideramos como "simulação com números aleatórios antitéticos".

Em relação aos números gerados para o processo de retorno, não efetuamos nenhuma mudança da primeira para a segunda rodada, pois este processo é independente dos outros processos e necessitamos que os retornos ocorram na mesma seqüência, para que possamos obter o tempo total de espera de cada freguês. Portanto nas simulações utilizando o GPSS/H colocamos a mesma seqüência de números gerados para a obtenção do processo de retorno nas duas rodadas de simulação.

CAPÍTULO 5 : DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos a descrição do trabalho desenvolvido e os resultados finais obtidos das 400 rodadas de simulação executadas.

5.1. INTRODUÇÃO

Primeiramente escolhemos o pacote computacional GPSS/H, *General Purpose Simulation System, version H* (Banks, Carson, Ngo Sy (1989)), para efetuarmos as simulações. O GPSS/H é uma linguagem de simulação bem ajustada para sistemas de filas. Uma de suas principais vantagens é a facilidade e a rapidez com que os modelos de simulação podem ser construídos. O simulador do modelo está apresentado no Apêndice A.

Lembrando que a regra de parada utilizada para o fim da simulação corresponde, neste caso, a um número fixado de fregueses saindo do sistema, e devido ao fato das estatísticas obtidas pelo GPSS/H incluir o tempo de espera e o tempo de serviço dos fregueses que não chegaram a completar o serviço e sair do sistema, introduzimos coletas de dados para o cálculo estatístico. Armazenamos os tempos de espera dos fregueses em um arquivo, e calculamos as estatísticas do nosso interesse utilizando o MINITAB, um pacote computacional dedicado à cálculos estatísticos. Isto é feito pois queremos estudar o sistema através dos tempos de espera dos fregueses que realmente chegaram a sair do sistema.

Conforme já foi explicado no capítulo anterior, a simulação de um modelo é conduzida por números pseudo-aleatórios e seus resultados dependem desses números que foram gerados durante a execução da simulação. O gerador utilizado pelo GPSS/H é o gerador linear congruencial multiplicativo de Lehmer (Banks, Carson, Ngo Sy (1989)). No caso do GPSS/H este gerador tem um período de 2.147.483.646 números, onde entende-se por período a quantidade máxima de números pseudo-aleatórios na seqüência, antes que esta comece a se repetir. Assim, neste pacote, mais de 2 bilhões de valores podem ser “gerados” antes que esta seqüência se repita.

Este simulador já possui esta seqüência pronta, armazenada em seu interior, e quando a utilizamos escolhemos simplesmente a posição inicial desta seqüência. O gerador de números pseudo-aleatórios do GPSS/H foi testado quanto a uniformidade por Bernasconi (1993) e foi verificado sua eficiência.

5.2. A SIMULAÇÃO DA FILA M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI

Conforme já afirmado anteriormente, o modelo de fila escolhido para a nossa pesquisa foi a fila M/M/1 com realimentação Bernoulli principalmente por que o processo de realimentação Bernoulli é independente dos processos de chegada e de atendimento. Portanto, se estivermos usando nas simulações com o GPSS/H a mesma seqüência de números pseudo-aleatórios para o processo de realimentação, os retornos ocorrerão na mesma seqüência e assim, teremos o mesmo número de retornos.

Este é um resultado importante para o nosso trabalho, uma vez que necessitamos que haja o mesmo número de tempos de espera coletados, para que possamos trabalhar com a variável antitética, ou seja, obtermos as médias dos tempos de espera dos fregueses que são os resultados da simulação utilizando números aleatórios antitéticos, para então podermos comparar os

resultados obtidos na porcentagem de cobertura, da simulação com a geração usual de números aleatórios com a simulação com a geração antitética.

Para o desenvolvimento da pesquisa, consideremos como suposições iniciais que:

- a) a média dos tempos entre chegadas dos fregueses $\frac{1}{\lambda} = 1$ u.t.,
- b) a média dos tempos de serviço $\frac{1}{\mu} = 0.5$ u.t.,
- c) a probabilidade de que o freguês retorne ao sistema, neste caso, é dada por $p = 0.4$ e a probabilidade que ele saia do sistema é $q = 0.6$.

Portanto a taxa de ocupação do sistema, conforme a equação (6) capítulo 3, é dada por:

$$\rho = \frac{\lambda}{q \mu} = \frac{1}{0,6 \cdot \frac{1}{0,5}} = 0,83$$

Conforme a equação (7) capítulo 3, o número teórico médio de retornos por freguês é dado por:

$$E[V_n] = \frac{p}{q} = \frac{0.4}{0.6} = 0,667$$

e o tempo médio de espera de um freguês, conforme a equação (8), capítulo 3, é:

$$W_q = \frac{1}{q \mu} \frac{\rho}{1 - \rho} = 4,052$$

5.3. DETERMINAÇÃO DO PERÍODO DE INICIALIZAÇÃO E DO TAMANHO DE BATCH

Após termos decidido o modelo a ser simulado, desenvolvemos simulações com três rodadas piloto para a determinação do período inicial e do tamanho de batch, sempre considerando que nossa simulação utiliza o método de Batch Means para coleta de dados, com 30 batches, conforme as seções 4.3 e 4.4, capítulo 4.

Fizemos algumas simulações com o tamanho dos batches igual a 700 e a 1000 partidas. Lembramos que, devido aos retornos, o número de dados em cada batch corresponderá em média a 1167 e 1667, respectivamente, no entanto as estatísticas são determinadas considerando 700 e 1000 como número de dados, visto que a variável analisada é o tempo médio de espera de um freguês no sistema.

Comparamos e analisamos os resultados das taxas de ocupação do sistema (ρ) para os dois casos, por ser este um parâmetro estável na simulação, embora a nossa pesquisa envolva como variável de interesse o tempo total de espera de cada freguês. Esse procedimento foi realizado para testarmos se compensaria aumentar os tamanhos dos batches e conseqüentemente aumentarmos o tamanho da simulação.

Foi feito também um estudo para verificar a influência do período de inicialização com batches de 700 e 1000 partidas (ver considerações da seção 4.3 capítulo 4). Para tal, comparamos os resultados das taxas de ocupação do sistema com o período de inicialização de 2% e de 2,5% do total de partidas, que correspondem, respectivamente, a 420 e 525 para o caso de 700 partidas por batch, com 30 batches, e 600 e 750 para o caso de 1000 partidas. Obtivemos, em todos os casos, $0.8457 \leq \rho \leq 0.8467$. Portanto, todos os resultados obtidos comprovaram que a taxa média de ocupação está dentro do intervalo aceitável, em relação ao total de partidas da simulação e ao período

de inicialização, como seria de se esperar, pois ρ é considerada estável na simulação.

A fim de verificarmos a dependência entre os batches, calculamos as auto-correlações de lags 1 e 2 dos valores médios de ρ obtidos nos batches nestas rodadas piloto. Analisamos apenas as auto-correlações de lags 1 e 2, porque é suposta a independência entre os batches mais distantes, devido à característica da variável ρ utilizada. Os resultados obtidos estão dispostos na tabela 5.1.

TAB. 5.1: Correlação entre os ρ médios dos batches, ρ taxa de ocupação do sistema (rodadas piloto).

Período de inicialização	Tamanho dos Batches			
	700		1000	
	Lag 1	Lag 2	Lag 1	Lag 2
2,0%	-0.004	-0.105	0.167	-0.087
2,5%	-0.068	0.009	0.098	0.037

Todas as auto-correlações calculadas em módulo foram consideradas não significativas, pois são menores que:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{30}} = 0.183$$

onde k é o número de médias consideradas (seção 4.4, capítulo 4).

Também fizemos, para as três rodadas piloto, a análise do tempo médio total de espera de um freguês, sendo que os resultados apresentados também foram aceitáveis, dentro do esperado para esse pequeno número de rodadas. Com isso, optamos então por desenvolver nossa pesquisa com 30 batches de 700 partidas e período de inicialização de 525 partidas, o que equivale a 2,5% do total de partidas.

5.4. DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

Com o intuito de analisar a porcentagem de cobertura da variável tempo médio de espera dos fregueses, na fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, através da comparação dos resultados obtidos da simulação realizada com a geração usual de números aleatórios, com os resultados da simulação com a geração antitética de números aleatórios, realizamos o trabalho descrito a seguir:

Realizamos 200 rodadas de simulação utilizando a geração usual de números aleatórios, e 200 utilizando a geração antitética. Cada rodada foi realizada contendo um período de inicialização de 525 partidas, o que equivale a 2,5% do total de partidas e 30 batches, sendo que cada batch contém 700 partidas.

Devido ao fato do número médio de retornos teórico por freguês ser 0,667, coletamos em média, 1167 tempos de espera dos fregueses por batch, e aproximadamente, 35000 dados no final de cada rodada da simulação.

Para cada uma das 400 rodadas de simulação (200 com números aleatórios usuais e 200 com antitéticos), determinamos conforme a seção 4.4 capítulo 4:

- a) tempo médio de espera em cada batch,

- b) média das médias dos 30 batches, $\bar{\bar{X}}$,
- c) desvio padrão,
- d) intervalo de 90% de confiança, usando uma distribuição t-student,
- e) semi amplitude do intervalo de confiança,
- f) correlações de lags 1,2,3, r_j ; $j = 1,2,3$, dos tempos médios de espera entre os batches, considerando que não há necessidade de determinarmos as correlações de lags maiores, uma vez que quanto mais distantes os valores, mais são considerados independentes.

Os resultados de cada rodada de simulação, nos dois casos, estão apresentados no apêndice B.

5.5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Cálculo do tempo médio de espera

Calculamos, para cada uma das gerações de números aleatórios, 200 valores das médias finais dos tempos de espera, relativo à cada rodada de simulação. Posteriormente, calculamos os resultados da média das 200 médias finais dos tempos de espera, para a geração usual e para a geração antitética (tabela 5.2).

TAB. 5.2: Tempo médio de espera da simulação da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, com 200 rodadas em cada caso.

Geração Usual	Geração Antitética
4.163	4.174

Considerando que o tempo médio teórico de espera na fila por um freguês é $W_q = 4.052$, o resultado obtido na simulação com a geração usual de números aleatórios é 2.74% maior que o teórico e utilizando os números aleatórios antitéticos obtivemos um resultado 3.01% maior.

Determinação do desvio padrão e de semi amplitude de confiança

Determinamos também para as 200 rodadas de simulação, a média dos resultados obtidos do desvio padrão e da semi amplitude do intervalo de confiança, tanto para a geração usual de números aleatórios quanto para a geração antitética, (tabela 5.3).

TAB. 5.3: Desvio padrão médio e semi amplitude de confiança médio da simulação da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, com 200 rodadas em cada caso.

	Ger. Usual	Ger. Antitética
Desvio Padrão	1.873	1.266
Semi Amplitude	0.581	0.393

Conforme já dissemos (capítulo 1), o uso de números aleatórios antitéticos conduz a uma redução de variância. Nos resultados de 200 rodadas de simulação com números aleatórios usuais e 200 rodadas utilizando a geração antitética, da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, obtivemos uma redução de 32.41% nos resultados do desvio padrão. Conseqüentemente, obtivemos uma redução de 32.36% nos resultados da semi amplitude do intervalo de confiança, com o uso da geração antitética de números aleatórios.

Obtenção do intervalo de confiança médio

Considerando os resultados da semi amplitude do intervalo de confiança (tabela 5.3), e os resultados da média dos 200 tempos médios de espera (tabela 5.2), podemos determinar intervalos de confiança para esta média e verificar que, conforme esperado, a amplitude do intervalo de confiança diminui com o uso de números aleatórios antitéticos (tabela 5.4).

TAB. 5.4: Intervalos de confiança médios, para os tempos de espera da simulação da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, com 200 rodadas em cada caso.

Ger. Usual	Ger. Antitética
(3.582 ; 4.744)	(3.781 ; 4.567)

A redução do desvio padrão, e conseqüentemente da semi amplitude do intervalo de confiança determinado para o tempo médio de espera, é devido teoricamente à correlação negativa induzida pelo uso de números aleatórios antitéticos.

Verificação da correlação negativa

Com o intuito de testar a correlação negativa entre os dados da simulação, para comprovar que o uso de números aleatórios antitéticos produz correlação negativa e portanto reduz a variância, calculamos as correlações entre os tempos de espera resultantes de um par de rodadas do modelo, e verificamos que realmente ocorre correlação negativa entre os tempos de espera resultantes da geração $U(0,1)$ e os tempos de espera determinados através de seu complementar.

Para essa verificação, e por motivos da capacidade de análise do software Minitab, desmembramos os 35717 tempos de espera coletados em cada uma rodadas do par em nove partes, e então calculamos a correlação de cada parcela, conforme mostrado na tabela 5.5. A última linha desta tabela contém o resultado de um programa realizado em Pascal que calcula a correlação entre todos os resultados dos tempos de espera, deste par de rodadas do modelo.

O fato de termos dividido em parcelas de tamanhos diferentes, nos permite observar que os resultados das correlações são negativos para todos os tamanhos de parcelas determinados, e vemos que o resultado da primeira parcela, que contém os tempos de espera do período de inicialização, também é negativo.

Podemos verificar que existe correlação negativa entre os resultados dos tempos de espera deste par de rodadas de simulação, pois todos os resultados, em módulo, são maiores do que o valor teoricamente aceitável em estatística, que é dado por (conforme seção 4.4 capítulo 4):

$$\frac{1}{\sqrt{4999}} = 0.014 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1918}} = 0.0228 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1878}} = 0.023 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{35717}} = 0.005$$

onde os valores 4999, 1918 e 1878, são os números de elementos das parcelas e o valor 35717 é o número total de tempos de espera em cada um dos casos no par de rodadas. Alguns dos resultados dos tempos de espera desse par de rodadas estão mostrados no apêndice C.

TAB. 5.5: Correlações médias entre os tempos de espera de um par de rodadas da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli.

# de tempos de espera	Correlações
1 - 5000	- 0.272
5001 - 10000	- 0.181
10001 - 11919	- 0.306
11920 - 16919	- 0.245
16920 - 21919	- 0.289
21920 - 23838	- 0.118
23839 - 28838	- 0.361
28839 - 33838	- 0.224
33839 - 35717	- 0.394
1 - 35717	- 0.234

Cálculo das correlações dos tempos médios de espera

Continuando a análise dos resultados obtidos, determinamos as dependências (médias) entre os batches em cada rodada, para as 200 rodadas de simulação realizadas. Portanto calculamos as correlações de lags 1, 2 e 3, dos tempos médios de espera coletados nos batches, tanto para a geração usual quanto para a geração antitética de números aleatórios (apêndice B). As médias finais das correlações foram calculadas em valor absoluto (tabela 5.6).

Todos os resultados obtidos das médias finais das correlações estão abaixo do valor teoricamente aceitável, ou seja, são menores que:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{30}} = 0.183$$

onde k é o número de tempos médios de espera considerados por rodada (ver seção 4.4 capítulo 4). Portanto, aceitamos que não existe relação linear entre os batches. Não há necessidade de se calcular as correlações de lags maiores que três, pois consideramos que quanto mais distantes os dados mais independentes eles são, e além disso, usualmente apenas calculamos as correlações de lags 1 e 2.

TAB. 5.6: Correlações médias dos tempos médios de espera das simulações da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, com 200 rodadas em cada caso.

	Lag 1	Lag 2	Lag 3
Ger. Usual	0.142	0.142	0.119
Ger. Antitética	0.134	0.136	0.126

Com os resultados da tabela 5.6, vemos que conforme esperado, as correlações de lag 3 são menores que as correlações de lags 1 e 2, para os dois tipos de geração de números aleatórios. Os resultados da correlação de lag 1 utilizando a geração antitética é menor 5.63% do que os obtidos através da geração usual de números aleatórios, e comparando os resultados da correlação de lag 2 verificamos que ocorre uma redução de 4.22% utilizando os números aleatórios antitéticos. Apenas nas correlações de lag 3 é que ocorre um aumento de 5.88% nos resultados da simulação com a geração antitética em comparação com os resultados obtidos com a geração usual de números aleatórios.

Análise do número médio de retornos

Verificamos que o número médio de retornos por frequê, das 200 rodadas de simulação da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, é dado por 0.66669 (apêndice B), correspondendo a 466.683 retornos em cada batch, e comparamos com o número médio de retornos teórico por frequê, $E[v_n] = 0.667$ (seção 5.2 capítulo 5). Verificamos que embora o processo de decisão de realimentação seja um processo de Bernoulli, portanto aleatório, o número médio de retornos se manteve igual ao teórico nas 200 rodadas.

Para a análise do número médio de retornos teórico por frequê, apenas observamos os números de retorno ocorridos na simulação utilizando a geração usual de números aleatórios, pois conforme seção 4.5 capítulo 4, não efetuamos nenhuma mudança nas simulações em relação ao processo de realimentação, pois necessitamos que os retornos ocorram na mesma seqüência, para que possamos obter o tempo total de espera de cada frequê, assim o número médio de retornos por frequê é o mesmo para a simulação com a geração usual e com a geração antitética de números aleatórios.

Análise de cobertura

Como resultado final para a análise, em cada rodada de simulação, a partir dos intervalos de 90% de confiança determinados, verificamos se o valor teórico

do tempo médio de espera na fila por um freguês, $W_q = 4.052$, estava contido nesse intervalo, ou seja, determinamos a porcentagem de cobertura (tabela 5.7).

TABELA 5.7: Porcentagem de cobertura da simulação da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli

Ger. Usual	Ger. Antitética
88.5%	87.5%

Esses valores estão bem próximos dos 90% desejados, pois quando determinamos intervalos de 90% de confiança, sabemos que dentre todos os possíveis intervalos de confiança, 90% deles deve conter a média teórica. Porém nossos resultados são apenas cerca de 1.5% e 2.5% menores, o que é surpreendente, em vista dos resultados obtidos em Law (1977) e Bernasconi (1993) com uma fila simples M/M/1 (tabela 5.8).

TABELA 5.8: Porcentagem de cobertura da simulação da fila M/M/1 obtida por Law (1977) e Bernasconi (1993)

	Law	Bernasconi
Ger. usual	86.75%	81%
Ger. antitética		87%

Os resultados da tabela 5.8 foram obtidos utilizando também o método de Batch Means com 30 batches, mas com 1000 partidas cada batch. Os resultados da simulação da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli ficaram mais próximos dos 90% teórico do que os resultados da simulação da fila M/M/1, uma vez que também neste caso foram determinados intervalos de 90% de confiança.

É de se notar que a porcentagem de cobertura para a fila M/M/1 com realimentação Bernoulli é maior com números aleatórios usuais do que com números aleatórios antitéticos, o que contraria os resultados obtidos por Bernasconi (1993) nas simulações da fila M/M/1. Isto ocorre devido à complexidade da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli.

CAPÍTULO 6 : CONCLUSÕES FINAIS

Neste capítulo apresentamos as conclusões finais desta pesquisa e algumas sugestões de trabalhos futuros que poderiam dar continuidade a este.

6.1. CONCLUSÕES

Nosso objetivo ao realizar esta pesquisa, era verificar se o aumento da porcentagem de cobertura, como encontrado para a fila M/M/1, através dos resultados das simulações com o uso da geração antitética de números aleatórios, se manteria para modelos mais complicados de redes de filas.

Como pudemos ver em Bernasconi (1993), na análise de uma fila M/M/1 com números aleatórios antitéticos, observou-se uma melhora significativa, de 81% com números aleatórios usuais para 87% com antitéticos para intervalos gerados para o tempo médio de espera de um freguês, com 90% de confiança.

Com o intuito de verificar se esta melhora na porcentagem de cobertura se manteria, para os resultados de simulações da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, realizamos 400 rodadas de simulações, sendo 200 utilizando a geração usual de números aleatórios e 200 rodadas com a geração antitética.

Em cada caso, coletamos os tempos médios de espera de um freguês qualquer, e sobre as 200 rodadas calculamos a média final, desvio padrão médio, intervalo de confiança médio e porcentagem de cobertura, para podermos comparar os resultados obtidos na simulação realizada utilizando a

geração usual, com a simulação gerada por números aleatórios antitéticos. Todos os nossos cálculos são apresentados sobre os resultados finais das 200 rodadas em cada um dos casos.

Com o modelo de fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, considerando a probabilidade de o freguês efetuar o retorno ($p = 0,4$) e com tempos médios entre chegadas e de serviço, respectivamente, de 1 e 0.5 u.t., e portanto com tempo médio de espera, teórico, de $W_q = 4.052$, não conseguimos uma melhora na porcentagem de cobertura. Obtivemos uma porcentagem de cobertura de 88,5%, nos resultados da simulação utilizando a geração usual de números aleatórios, e de 87,5% com a geração antitética de números aleatórios (tabela 5.2, capítulo 5).

Entretanto, outros resultados interessantes foram obtidos. Comparando os resultados obtidos do desvio padrão médio que são: 1,87 para números aleatórios usuais e 1,27 números aleatórios antitéticos (tabela 5.5 capítulo 5), percebemos que, como já esperávamos, há uma redução significativa nos resultados da variância com o uso dos números aleatórios antitéticos, pois a variável antitética é um método já comprovado para a redução de variância (Law e Kelton (1991)). Conseqüentemente a semi amplitude de confiança também se reduz significativamente, de 0,58 com números aleatórios usuais para 0,39 com números aleatórios antitéticos, conforme podemos ver na tabela 5.5 capítulo 5.

Verificamos que esta redução da variância e da semi amplitude de confiança, é decorrente da correlação negativa existente e comprovada através da tabela 5.7 capítulo 5, causada pelo uso de números aleatórios antitéticos, que induzem uma correlação negativa através do uso de números aleatórios complementares para a geração de pares de rodadas.

As médias finais dos tempos de espera, praticamente não se alteraram: 4,163 com números aleatórios usuais e 4,174 com números aleatórios antitéticos, tabela 5.4 capítulo 5, mas são maiores que a média teórica, $W_q = 4,05$, 2.79% na simulação com a geração usual e 3.06% com a geração antitética de números aleatórios.

Considerando os resultados das médias finais dos tempos de espera e as semi amplitudes de confiança, calculamos os intervalos de confiança para as médias finais, conforme podemos ver na tabela 5.6 capítulo 5, e verificamos que o tempo médio teórico de espera por um freguês, tanto nos resultados da simulação com números aleatórios usuais quanto utilizando a geração antitética, está incluído nos intervalos de confiança determinados. Além disso, a semi amplitude do intervalo de confiança resultante da simulação com os números aleatórios antitéticos, também se reduz significativamente.

A média de retornos das rodadas obtida de 466,68 foi o resultado esperado conforme podemos ver na seção 5.4 capítulo 5, e concluímos que o número médio de retornos se manteve igual ao teórico nas 200 rodadas de simulação.

Em relação às correlações, apenas os resultados das correlações de lag 3 foram menores na simulação com a geração de números aleatórios usuais: 0,119 usual e 0,126 antitético, já as correlações de lag 1 e 2 foram menores com a geração de números aleatórios antitéticos: lag 1: 0,142 usual e 0,134 antitético e lag 2: 0,142 usual e 0,136 antitético, conforme podemos ver na tabela 5.8 capítulo 5. Entretanto todas as correlações são consideradas não significativas.

Concluindo, para a fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, se nosso objetivo principal na análise dos resultados é diminuir o intervalo de confiança sobre o valor estimado pela simulação, o uso de números aleatórios antitéticos, leva-nos à uma melhora de 32.36% com relação ao uso de números aleatórios usuais (seção 5.4 capítulo 5), embora o esforço computacional seja maior.

Entretanto, se a análise da porcentagem de cobertura é primordial, devemos ficar com uso dos números aleatórios usuais, pelo menos nas simulações da fila M/M/1 com realimentação Bernoulli, e com os parâmetros considerados nesta pesquisa.

No entanto, no uso diário da simulação em problemas reais, geralmente não conhecemos o valor real da variável analisada pela simulação, levando-nos a maioria das vezes a optarmos por intervalos de confiança de menor amplitude, correspondendo a estimadores estatísticos de mínima variância. Neste caso, o uso de números aleatórios antitéticos certamente nos levariam a menores intervalos de confiança.

Acreditamos que os resultados desta pesquisa fornece subsídios à um usuário de simulação para que este possa definir, sob certos aspectos, quando deve ou não optar pela utilização de números aleatórios antitéticos bem como a entendê-los melhor. Pensamos que deveriam ser feitas pesquisas, com outros modelos de redes de filas, para podermos obter mais resultados a esse respeito. Além disso, poderíamos verificar também se ocorre aumento na porcentagem de cobertura, considerando outra variável de interesse, como por exemplo o número médio de fregueses na fila, ou o tempo médio de sistema dos fregueses.

BIBLIOGRAFIA

- ALLEN, A.O. : *Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science application*. 2 ed. New York, Academic Press, 1990.
- BANKS, J.; CARSON, J.S.; NGO SY, J. : *Getting started with GPSS/H*. Annandale, Wolverine Software Corporation., 1989.
- BERNASCONI, G. C. R. (1993) : *Números Aleatórios Antitéticos: Uma comparação com os resultados usuais em Simulação*. Dissertação (Mestrado) - apresentada ao ICMSC - USP.
- BERNASCONI, G. C. R.; SALLES, M. C. B. (1993) : *Números Aleatórios Antitéticos: Uma comparação com os resultados usuais em Simulação*. XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, p. 262-67.
- COOPER, B.R. : *Introduction to Queueing Theory*. 2 ed. New York, North Holland, 1981.
- D'AVIGNON, G.R.; DISNEY, R.L. (1976) : *Single-server queues with state-dependent feedback*. INFOR, v. 14, p. 71-85.
- D'AVIGNON, G.R.; DISNEY, R.L. (1977) : *Queues with instantaneous feedback*. *Management Science*, v. 24, n. 2, p. 168-80.
- DISNEY, R.L. (1981) : *A note on sojourn times in M/G/1 queues with instantaneous Bernoulli feedback*. *Naval Research Logistics Quarterly*, v. 28, n. 4, p. 679-84.

- DISNEY, R.L.; KÖNIG, D. (1985) : *Queueing Networks: A survey of their random processes*. SIAM Review, v. 27, n. 3, p. 335-403.
- DISNEY, R.L.; KÖNIG, D.; SCHMIDT, V. (1984) : *Stationary queue - length and waiting-time distributions in single-server feedback queues*. Adv. Appl. Prob., v. 16, p. 437-46.
- DISNEY, R.L.; MCNICKLE, D.C.; SIMON, B. (1980) : *The M/G/1 queue with instantaneous Bernoulli feedback*. Naval Research Logistics Quarterly, v. 27, p. 635-44.
- FOLEY, R.D.; DISNEY, R.L. (1983) : *Queues with delayed feedback*. Adv. Appl. Prob., v. 15, p. 162-82.
- GROSS, D.; HARRIS, C.M. : *Fundamentals of Queueing Theory*. 2. ed. New York, John Wiley, 1985.
- HANNIBALSSON, I.; DISNEY, R.L. (1977) : *An M/M/1 queue with delayed feedback*. Naval Research Logistics Quarterly, v. 24, p. 281-91.
- LAW, A.M. (1977) : *Confidence Intervals in discrete event Simulation: A comparison of Replication and Batch Means*. Naval Research Logistic Quarterly, v. 24, p. 667-78.
- LAW, A.M.; KELTON, W.D. : *Simulation modeling and analysis*. 2. ed. New York, McGraw-Hill, 1991.
- MARCHESONI, E.M. (1994) : *Análise de eficiência de Simulações com Números Aleatórios Antitéticos em fila M/M/1 com feedback Bernoulli*. Mini-Dissertação apresentada nos exames gerais de qualificação ICMSC - USP.
- MOOD, A.M.; GRAYBILL, F.A.; BOES, D.C. : *Introduction to the Theory of Statistics*. 3. ed. New York, McGraw-Hill, 1974.

- PAWLIKOWSKI, K. (1990) : *Steady-state Simulation of Queueing Processes: A survey of problems and solutions*. ACM Computing Surveys, v. 22, n. 2, p. 123-70.
- RIPLEY, B.D. : *Stochastic Simulation*. New York, John Wiley, 1987.
- SCHMEISER, B. (1982) : *Batch size effects in the analysis of Simulation output*. Operations Research, v. 30, n. 3, p. 556-68.
- TAKÁCS, L. (1963) : *A single-server queue with feedback*. The Bell System Technical Journal, v. 42, p. 505-19.

APÊNDICE A: PROGRAMA DA FILA M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI

Apresentamos a seguir o simulador desenvolvido para modelar a fila M/M/1 com realimentação instantânea Bernoulli. Verificamos este programa através de gráficos, de simulações piloto e da seção debugger do GPSS/H

SIMULATE

* MODELO DE FILA M/M/1 COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI

INTEGER &I (declara a variável inteira)

REAL &A (declara as variáveis reais)

RMULT 77252,675485,9875 (fornece as posições iniciais na seqüência de números pseudo-aleatórios. O primeiro número corresponde ao processo de retorno, o segundo inicia a seqüência de tempos entre chegadas; o terceiro número corresponde aos tempos de serviço)

OUT FILE 'BATCHES.SAI' (declara que os resultados da primeira fila serão colocados no arquivo BATCHES.SAI)

GENERATE RVEXPO(2,1.0) (declara que os tempos entre chegadas dos fregueses seguem a distribuição exponencial com média $\frac{1}{\lambda} = 1.0$ u. t.)

CX1 MARK (atualiza o relógio de simulação do freguês)

QUEUE FILA (inicia a coleta dos tempos de espera da fila)

PRIORITY	1,BUFFER (determina que o freguês retorne no final da fila)
SEIZE	SERVIDOR (captura o servidor)
BLET	&A=M1 (declara que a variável real &A receberá o valor de tempo de espera da fila)
BPUTPIC	FILE=OUT,LINES=1,(&A) (declara que os tempos de espera da fila serão colocados no arquivo BATCHES.SAI, na formatação de um valor por linha)
.*	(declara qual o formato numérico de saída desejamos)
DEPART	FILA (termina a coleta dos tempos de espera da fila)
ADVANCE	RVEXPO(3,0.5) (declara que os tempos de serviço do servidor seguem a distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu} = 0.5$ u. t.)
RELEASE	SERVIDOR (libera o servidor)
TRANSFER	.4,,CX1 (determina que a probabilidade que o freguês retorne é 0.4 e a probabilidade que ele saia do sistema é 0.6)
TERMINATE	1 (aumenta 1 no número de partidas)
START	525,NP (determina que o período inicial é de 420 partidas e manda não incluir os resultados desse período nos cálculos. Neste trabalho utilizamos um período inicial com o valor de 2% do total de partidas)
RESET	(zera as estatísticas mas mantém os fregueses que permaneceram no sistema)
PUTPIC	FILE=OUT,LINES=1 (ordena a colocação de uma linha em branco após os resultados do período inicial, para o arquivo BATCHES.SAI) (linha em branco para separação dos batches)
DO	&I=1,30 (ordena a execução de 30 batches)
START	700 (declara que o batch terminará após 700 partidas)
PUTPIC	FILE=OUT,LINES=1 (coloca uma linha em branco após o resultado de cada batch, para o file BATCHES.SAI)

(linha em branco para separação dos batches)

RESET (zera as estatísticas mas mantém os fregueses que permaneceram no sistema)

ENDDO (termina um batch)

END (termina a simulação).

APÊNDICE B: RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

B.1 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COM NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	Semi Amplitude de Confiança	Intervalo de 90 % Confiança	Correl. Lag 1	Correl. Lag 2	Correl. Lag 3	Média de Retornos
1	4.118	1.931	0.599	(3.519 - 4.717)	0.0730	0.0870	0.1100	463.200
2	4.538	1.900	0.590	(3.949 - 5.128)	-0.0590	0.1120	0.2260	464.900
3	3.473	1.394	0.432	(3.041 - 3.905)	-0.0580	-0.0480	-0.2170	463.833
4	4.091	1.824	0.566	(3.525 - 4.657)	-0.2140	0.2140	-0.1060	462.900
5	3.877	1.729	0.537	(3.340 - 4.413)	0.2610	0.1670	0.2210	467.867
6	3.647	1.169	0.363	(3.284 - 4.009)	-0.3720	0.2520	-0.1140	464.100
7	3.860	1.739	0.540	(3.320 - 4.399)	0.3440	0.0510	-0.1950	472.767
8	4.221	2.229	0.692	(3.529 - 4.912)	-0.1740	-0.1430	0.1830	469.133
9	3.977	1.404	0.436	(3.542 - 4.413)	0.0660	0.0210	-0.0680	466.400
10	3.897	2.276	0.706	(3.369 - 4.781)	-0.1338	0.0630	-0.1640	469.033
11	3.573	1.301	0.404	(3.493 - 4.301)	-0.0220	-0.0750	-0.2400	469.433
12	4.336	1.406	0.437	(3.137 - 4.010)	-0.1160	0.1440	0.0700	453.800
13	5.072	1.697	0.527	(3.809 - 4.862)	-0.4250	0.1730	-0.0660	466.567
14	4.609	2.604	0.808	(4.264 - 5.880)	0.1780	-0.2520	-0.0990	477.433
15	4.298	1.973	0.612	(3.997 - 5.221)	0.2620	-0.2590	-0.2320	462.533
16	4.347	2.380	0.739	(3.560 - 5.037)	-0.0070	0.1460	0.1080	467.500
17	4.347	1.713	0.532	(3.816 - 4.879)	0.1650	-0.0630	0.2620	463.900
18	3.749	1.166	0.362	(3.387 - 4.111)	-0.0360	-0.3120	0.2350	463.000
19	3.695	1.619	0.503	(3.192 - 4.197)	-0.0930	-0.1160	-0.0650	457.000
20	4.862	2.451	0.761	(4.101 - 5.622)	-0.0290	-0.1190	-0.0990	470.167
21	4.354	2.034	0.631	(3.723 - 4.985)	-0.1000	0.0590	-0.2360	462.300
22	4.052	2.220	0.689	(3.364 - 4.741)	-0.0230	-0.1420	-0.1200	461.433
23	4.603	2.568	0.797	(3.806 - 5.400)	0.0090	0.1030	-0.1360	464.100
24	3.852	1.349	0.419	(3.434 - 4.271)	0.2440	0.2070	-0.0830	460.367
25	4.814	2.200	0.683	(4.131 - 5.497)	-0.2500	-0.2070	-0.1180	471.000
26	3.726	1.586	0.492	(3.234 - 4.218)	0.0420	0.1660	-0.0050	465.100
27	3.964	1.399	0.435	(3.529 - 4.398)	0.2000	-0.3150	-0.2790	465.167

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	Semi Amplitude de Confiança	Intervalo de 90 % Confiança	Correl. Lag 1	Correl. Lag 2	Correl. Lag 3	Média de Retornos
28	4.234	1.806	0.561	(3.673 - 4.794)	0.0800	-0.3540	-0.0900	463.133
29	4.527	3.084	0.957	(3.570 - 5.483)	1.0830	0.0000	0.2300	471.067
30	3.580	1.630	0.486	(3.095 - 4.066)	-0.0110	-0.0650	0.1600	463.367
31	4.053	1.370	0.425	(3.628 - 4.478)	-0.1830	0.1880	-0.2540	468.767
32	4.127	2.434	0.755	(3.372 - 4.882)	0.1190	-0.0830	-0.2680	465.333
33	4.923	3.097	0.961	(3.962 - 5.884)	0.1590	0.0760	-0.0090	480.767
34	4.433	3.021	0.938	(3.495 - 5.370)	-0.0960	-0.1050	0.0000	474.467
35	4.143	1.693	0.526	(3.617 - 4.668)	0.0700	-0.0930	0.1410	465.567
36	4.677	2.610	0.810	(3.867 - 5.487)	0.3740	-0.1760	-0.2740	476.467
37	4.238	1.815	0.564	(3.674 - 4.801)	0.1950	-0.1890	-0.0700	467.333
38	4.068	1.883	0.584	(3.484 - 4.652)	-0.2650	0.0410	0.1140	465.833
39	4.439	2.984	0.926	(3.514 - 5.365)	0.0580	-0.0370	-0.0190	469.133
40	4.821	2.199	0.683	(4.138 - 5.503)	0.0470	0.1200	-0.0120	463.167
41	4.220	1.735	0.539	(3.682 - 4.759)	-0.2590	0.0050	-0.0120	472.500
42	4.142	1.960	0.608	(3.534 - 4.750)	0.1340	-0.1710	-0.1300	468.100
43	4.072	2.067	0.642	(3.431 - 4.714)	-0.2380	0.0190	-0.1000	471.333
44	4.795	2.530	0.786	(4.010 - 5.581)	-0.1900	-0.1120	0.1030	464.300
45	4.483	2.810	0.872	(3.611 - 5.355)	0.0400	-0.0290	-0.1320	461.700
46	4.428	2.354	0.730	(3.698 - 5.158)	0.2680	-0.0150	-0.0450	471.600
47	4.247	1.371	0.425	(3.822 - 4.672)	0.0920	-0.2450	-0.0130	470.267
48	4.326	1.943	0.603	(3.723 - 4.929)	0.0390	-0.1460	0.0560	469.667
49	3.964	2.028	0.630	(3.334 - 4.593)	-0.0080	-0.0480	-0.1200	451.600
50	4.076	1.340	0.416	(3.660 - 4.491)	0.0840	-0.3460	0.2730	466.467
51	3.690	1.564	0.485	(3.205 - 4.175)	-0.1580	0.3620	0.1200	464.233
52	4.701	3.406	1.057	(3.644 - 5.758)	0.0730	-0.1500	-0.1450	478.733
53	4.461	2.373	0.737	(3.724 - 5.197)	-0.1600	0.1110	0.0430	463.433
54	4.370	1.639	0.509	(3.862 - 4.879)	0.0220	-0.1640	-0.0310	463.833
55	4.100	1.381	0.429	(3.671 - 4.528)	0.0700	0.0960	0.0310	457.367
56	4.008	1.351	0.420	(3.589 - 4.428)	-0.0840	-0.0370	0.0720	472.533
57	4.403	1.735	0.539	(3.864 - 4.941)	0.4070	0.2450	0.1700	464.967
58	4.116	1.631	0.506	(3.610 - 4.622)	0.1510	-0.2040	-0.0980	466.700
59	4.235	1.704	0.529	(3.706 - 4.764)	-0.0080	-0.0590	-0.0880	474.433
60	4.673	2.199	0.683	(3.990 - 5.355)	-0.1040	0.1010	-0.1360	468.033
61	4.391	1.804	0.560	(3.831 - 4.950)	0.0670	-0.2520	-0.1550	467.400
62	3.821	1.611	0.500	(3.321 - 4.321)	-0.2940	0.1370	0.0660	467.500
63	3.871	1.737	0.539	(3.332 - 4.410)	0.1070	0.4640	0.1150	462.833
64	4.041	1.431	0.444	(3.597 - 4.485)	-0.1390	-0.1790	0.1280	466.900
65	4.256	1.731	0.537	(3.719 - 4.793)	-0.0410	-0.3160	-0.0040	472.600
66	4.125	2.053	0.637	(3.488 - 4.762)	0.2590	-0.0960	-0.0690	463.533
67	4.100	1.605	0.498	(3.602 - 4.598)	0.0800	0.0430	-0.0280	470.333
68	4.369	1.549	0.481	(3.888 - 4.849)	-0.0180	-0.1670	-0.0210	475.100
69	4.195	2.544	0.790	(3.406 - 4.985)	0.0220	0.2630	-0.1130	473.267
70	4.105	1.365	0.424	(3.682 - 4.529)	0.1280	0.1780	0.1290	474.833

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	Semi Amplitude de Confiança	Intervalo de 90 % Confiança	Correl. Lag 1	Correl. Lag 2	Correl. Lag 3	Média de Retornos
71	3.580	1.191	0.370	(3.210 - 3.949)	-0.1680	-0.0650	-0.1820	470.567
72	4.396	2.402	0.746	(3.651 - 5.142)	-0.2250	-0.1860	0.1430	482.067
73	3.441	1.340	0.416	(3.025 - 3.857)	-0.0480	-0.1030	0.1570	469.900
74	5.015	3.572	1.109	(3.906 - 6.123)	-0.1750	-0.0530	-0.1430	469.567
75	4.272	1.733	0.538	(3.734 - 4.810)	0.0050	-0.1260	-0.0130	471.533
76	4.068	1.373	0.427	(3.641 - 4.494)	0.0540	0.2140	0.1420	461.400
77	3.911	1.800	0.558	(3.353 - 4.469)	0.1140	0.0790	0.1160	461.867
78	3.972	1.341	0.417	(3.555 - 4.388)	-0.1660	-0.3080	-0.0180	469.933
79	3.276	1.101	0.342	(2.934 - 3.618)	-0.0790	-0.1710	-0.0900	467.200
80	4.061	1.643	0.510	(3.552 - 4.571)	0.0000	0.1820	0.2900	466.900
81	4.230	1.946	0.604	(3.627 - 4.834)	-0.2520	-0.0330	0.0800	462.367
82	3.453	1.233	0.383	(3.070 - 3.836)	0.0410	-0.0520	-0.0060	468.167
83	3.755	1.278	0.397	(3.358 - 4.151)	-0.0120	-0.1440	-0.0350	464.800
84	3.998	1.490	0.463	(3.536 - 4.461)	-0.1310	-0.2020	-0.0020	460.900
85	4.045	1.598	0.496	(3.549 - 4.541)	-0.3370	0.1120	0.1590	470.600
86	4.111	1.602	0.497	(3.614 - 4.608)	-0.2020	-0.0330	-0.0260	464.700
87	4.556	2.004	0.622	(3.934 - 5.177)	0.1150	-0.0850	0.1850	466.633
88	3.899	1.321	0.410	(3.489 - 4.309)	0.1520	-0.1670	0.1190	467.567
89	4.590	2.183	0.678	(3.912 - 5.267)	-0.0120	-0.1970	-0.0980	476.133
90	4.863	2.697	0.837	(4.026 - 5.699)	0.1700	-0.0760	0.0330	463.300
91	4.372	2.134	0.662	(3.710 - 5.034)	0.3730	0.0700	-0.1380	465.600
92	4.185	1.318	0.409	(3.777 - 4.594)	-0.0380	-0.1080	0.0040	462.367
93	3.684	1.375	0.427	(3.257 - 4.111)	0.2030	0.2030	0.2470	464.100
94	4.158	1.857	0.576	(3.582 - 4.734)	-0.1800	0.0690	0.0550	466.233
95	3.944	1.513	0.470	(3.475 - 4.414)	0.1180	-0.1150	0.1970	465.567
96	4.717	2.174	0.675	(4.043 - 5.392)	-0.1810	0.4680	-0.0720	474.533
97	3.817	1.360	0.422	(3.395 - 4.239)	0.4260	0.0780	-0.1150	468.167
98	4.129	1.503	0.467	(3.663 - 4.596)	-0.4680	0.2150	0.0240	468.700
99	3.857	1.660	0.516	(3.342 - 4.373)	-0.1730	-0.2580	0.0100	461.633
100	4.252	1.685	0.523	(3.729 - 4.774)	-0.0270	-0.1270	0.2730	470.867
101	4.080	1.319	0.410	(3.670 - 4.489)	0.2820	0.0970	0.0720	470.467
102	4.233	1.386	0.430	(3.803 - 4.663)	0.2590	-0.1720	0.0380	462.267
103	4.421	2.038	0.633	(3.788 - 5.053)	-0.1480	-0.1570	0.1550	466.100
104	3.701	3.232	1.003	(2.698 - 4.704)	0.2420	-0.0260	0.0120	461.467
105	3.882	1.124	0.349	(3.534 - 4.231)	-0.2450	-0.1070	-0.1560	462.833
106	3.998	1.584	0.492	(3.506 - 4.489)	-0.5130	0.0920	0.1200	468.467
107	3.972	1.490	0.463	(3.510 - 4.435)	-0.0910	-0.2440	0.1220	470.900
108	4.091	1.475	0.458	(3.634 - 4.549)	-0.1340	-0.0760	-0.1140	463.267
109	3.374	1.091	0.339	(3.035 - 3.712)	0.0240	-0.0840	-0.1520	470.667
110	3.771	1.670	0.518	(3.253 - 4.289)	-0.1100	-0.2340	0.0800	461.167
111	4.711	1.924	0.597	(4.114 - 5.308)	-0.0660	0.1220	0.0750	466.567
112	3.860	1.616	0.502	(3.358 - 4.361)	-0.0010	-0.4270	-0.1420	466.233
113	3.934	1.335	0.414	(3.520 - 4.348)	0.0100	-0.0620	-0.2250	464.933

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	Semi Amplitude de Confiança	Intervalo de 90 % Confiança	Correl. Lag 1	Correl. Lag 2	Correl. Lag 3	Média de Retornos
114	4.241	1.688	0.524	(3.717 - 4.765)	-0.0850	-0.2250	-0.0070	469.733
115	4.295	1.666	0.517	(3.778 - 4.812)	0.4010	-0.0680	-0.2490	470.900
116	3.801	1.397	0.434	(3.367 - 4.234)	-0.1750	0.0340	-0.1400	454.433
117	4.136	1.809	0.561	(3.575 - 4.697)	0.3580	-0.1780	-0.1270	464.333
118	4.523	2.326	0.722	(3.801 - 5.245)	-0.1250	0.2150	-0.1380	465.767
119	4.530	2.539	0.788	(3.742 - 5.318)	-0.0400	-0.3490	0.1700	463.267
120	3.975	1.843	0.572	(3.403 - 4.547)	0.0270	-0.1820	0.0740	461.767
121	3.997	1.410	0.438	(3.559 - 4.434)	0.0370	0.1660	-0.0450	461.967
122	4.158	1.981	0.615	(3.543 - 4.772)	-0.1510	-0.0040	0.1030	476.600
123	4.302	2.280	0.708	(3.595 - 5.010)	-0.2740	-0.2320	0.2930	470.333
124	4.464	1.719	0.533	(3.931 - 4.997)	-0.0130	0.0210	0.0380	472.900
125	4.137	1.966	0.610	(3.527 - 4.747)	-0.2420	-0.0220	0.0480	470.467
126	3.973	1.566	0.486	(3.488 - 4.459)	-0.0240	-0.0230	0.2540	469.167
127	3.244	1.014	0.315	(2.929 - 3.559)	0.2370	-0.0900	-0.1210	454.300
128	4.200	2.461	0.764	(3.437 - 4.964)	-0.2280	0.0490	0.0800	467.333
129	4.063	1.299	0.403	(3.660 - 4.466)	-0.0150	0.0430	-0.0480	467.733
130	3.762	1.144	0.356	(3.407 - 4.118)	-0.2370	-0.0690	-0.0070	462.900
131	4.348	2.064	0.641	(3.708 - 4.989)	0.0760	0.1730	-0.2360	469.433
132	4.071	1.689	0.525	(3.547 - 4.596)	0.4840	0.0260	-0.1030	462.800
133	4.454	2.723	0.845	(3.609 - 5.298)	0.0230	-0.1500	0.3470	468.633
134	4.028	1.575	0.489	(3.539 - 4.517)	-0.2280	0.1590	-0.3040	467.167
135	4.404	2.193	0.681	(3.723 - 5.084)	0.0110	0.1390	-0.0270	475.667
136	4.104	3.183	0.988	(3.116 - 5.091)	-0.0050	-0.1370	0.1030	464.767
137	4.177	2.012	0.624	(3.553 - 4.801)	-0.2100	-0.2270	0.2520	452.700
138	4.014	1.661	0.516	(3.499 - 4.530)	-0.0060	0.0230	0.2280	470.900
139	3.965	1.018	0.316	(3.649 - 4.280)	0.0550	-0.0970	-0.2770	477.200
140	4.316	1.531	0.475	(3.841 - 4.791)	0.0650	-0.0760	-0.0150	462.733
141	4.445	2.135	0.662	(3.783 - 5.107)	-0.2810	-0.1060	-0.0620	460.900
142	3.863	1.686	0.523	(3.340 - 4.386)	-0.0340	-0.1640	-0.1190	460.833
143	4.446	2.183	0.677	(3.769 - 5.123)	-0.0230	-0.0810	-0.1600	459.500
144	3.739	1.349	0.419	(3.321 - 4.158)	0.1490	-0.1450	0.0660	469.767
145	4.092	1.469	0.456	(3.636 - 4.548)	0.0150	-0.1370	0.2230	466.433
146	4.172	1.287	0.400	(3.772 - 4.571)	0.2630	-0.2790	-0.2130	465.333
147	3.705	1.264	0.393	(3.312 - 4.097)	-0.0910	-0.1330	0.1130	468.033
148	4.315	1.740	0.540	(3.775 - 4.855)	-0.1460	0.0890	-0.0330	471.933
149	3.785	1.487	0.461	(3.324 - 4.246)	0.1130	-0.3600	0.0750	457.933
150	4.494	2.254	0.700	(3.794 - 5.193)	-0.2010	-0.0600	-0.0640	467.867
151	3.905	1.472	0.457	(3.449 - 4.362)	-0.0270	-0.2510	-0.1470	465.200
152	3.674	1.272	0.395	(3.280 - 4.069)	0.0630	0.1550	0.0970	470.467
153	5.870	5.050	1.567	(4.303 - 7.436)	0.2940	-0.2330	-0.1260	468.633
154	4.039	1.621	0.503	(3.536 - 4.542)	0.2470	-0.1840	-0.1100	463.400
155	4.008	1.593	0.494	(3.514 - 4.502)	0.0640	-0.3070	-0.1200	465.733
156	4.664	2.259	0.701	(3.963 - 5.364)	-0.0570	0.1120	-0.0240	466.067

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	Semi Amplitude de Confiança	Intervalo de 90 % Confiança	Correl. Lag 1	Correl. Lag 2	Correl. Lag 3	Média de Retornos
157	4.069	1.697	0.527	(3.542 - 4.595)	-0.1830	-0.0770	0.3390	467.800
158	3.966	2.455	0.762	(3.204 - 4.728)	0.1090	-0.2180	-0.1260	462.700
159	4.160	1.495	0.464	(3.696 - 4.624)	0.1480	0.0130	-0.0320	462.033
160	4.028	2.287	0.710	(3.318 - 4.738)	0.2060	-0.0120	-0.1780	461.533
161	4.048	1.930	0.599	(3.449 - 4.647)	-0.0640	-0.1020	-0.1560	468.500
162	4.459	1.923	0.597	(3.862 - 5.056)	0.1190	0.0720	0.1500	470.367
163	4.156	1.603	0.498	(3.658 - 4.653)	0.0400	-0.1720	-0.1480	466.567
164	4.415	2.112	0.655	(3.760 - 5.070)	0.0160	-0.1500	-0.2850	472.967
165	4.861	2.159	0.670	(4.191 - 5.531)	0.0130	-0.1450	0.0870	471.867
166	4.159	1.519	0.472	(3.687 - 4.630)	0.0170	0.2490	-0.1560	465.000
167	4.820	4.015	1.246	(3.575 - 6.066)	-0.2050	0.0300	-0.0960	475.000
168	4.223	2.642	0.820	(3.403 - 5.043)	-0.1770	0.0020	-0.0460	462.533
169	3.995	1.562	0.485	(3.510 - 4.479)	-0.0390	-0.2760	0.0370	472.333
170	4.361	3.463	1.075	(3.286 - 5.436)	-0.0770	-0.1890	-0.0620	462.800
171	3.960	1.947	0.604	(3.356 - 4.564)	-0.0950	-0.0230	-0.2260	469.300
172	4.220	1.729	0.537	(3.684 - 4.757)	0.1080	-0.1770	-0.1100	476.800
173	3.945	1.078	0.335	(3.611 - 4.280)	0.2060	-0.1180	-0.2690	471.533
174	3.540	1.394	0.433	(3.108 - 3.973)	-0.1050	-0.2240	0.0970	463.567
175	3.811	1.470	0.456	(3.355 - 4.267)	-0.2030	-0.1130	0.1740	465.833
176	3.622	1.326	0.411	(3.211 - 4.033)	-0.0630	-0.3710	0.1330	475.767
177	4.692	2.221	0.690	(4.003 - 5.382)	-0.2940	-0.0100	-0.0680	475.200
178	5.258	3.377	1.048	(4.211 - 6.306)	-0.3240	-0.2720	0.3460	466.433
179	3.960	1.605	0.498	(3.462 - 4.458)	0.1200	-0.0930	-0.0380	463.933
180	4.291	1.655	0.514	(3.778 - 4.805)	-0.0640	-0.0660	-0.0200	472.000
181	4.193	1.667	0.517	(3.676 - 4.710)	0.2030	-0.1330	-0.0820	470.133
182	4.444	3.460	1.074	(3.370 - 5.517)	-0.0590	0.0160	0.0860	463.267
183	4.066	1.754	0.545	(3.522 - 4.611)	0.0340	-0.2360	0.0440	462.700
184	4.181	1.689	0.524	(3.657 - 4.705)	-0.0110	-0.3610	-0.0780	463.467
185	3.225	1.170	0.363	(2.862 - 3.588)	0.1070	-0.2580	0.0370	456.500
186	3.982	1.661	0.515	(3.467 - 4.497)	-0.0880	-0.1500	-0.2460	461.667
187	4.221	1.815	0.563	(3.658 - 4.784)	0.2640	-0.1530	-0.1310	454.300
188	3.735	1.247	0.387	(3.348 - 4.122)	-0.0810	-0.0230	-0.0300	457.800
189	4.475	2.212	0.687	(3.789 - 5.162)	-0.0710	0.1010	-0.0050	461.067
190	5.042	2.492	0.774	(4.269 - 5.816)	0.0000	-0.2090	-0.1480	472.533
191	4.203	2.090	0.649	(3.555 - 4.852)	-0.1810	0.0530	0.1460	466.733
192	5.181	3.001	0.931	(4.250 - 6.112)	0.0530	0.0040	-0.0830	468.633
193	4.157	1.424	0.442	(3.715 - 4.599)	-0.2210	-0.2050	0.0040	456.700
194	3.597	1.183	0.367	(3.230 - 3.964)	-0.0720	0.0650	0.1640	470.933
195	4.524	3.065	0.951	(3.573 - 5.475)	-0.1870	-0.0230	-0.1050	467.000
196	3.944	1.628	0.505	(3.439 - 4.449)	0.0350	-0.0960	0.0200	463.500
197	3.853	1.437	0.446	(3.407 - 4.299)	-0.1470	-0.1330	0.1810	467.633
198	4.217	1.876	0.582	(3.635 - 4.799)	-0.1880	0.3560	-0.0240	466.800
199	3.973	1.690	0.524	(3.449 - 4.497)	0.1270	-0.1160	0.0330	460.900
200	3.834	1.312	0.407	(3.427 - 4.241)	0.1410	-0.0760	-0.0500	463.433

B.2 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COM NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	Semi Amplitude de Confiança	Intervalo de 90% Confiança	Correl. Lag1	Correl. Lag2	Correl. Lag3	Média de Retornos
1	4.272	1.348	0.419	(3.853 - 4.690)	-0.023	0.168	0.023	463.200
2	4.112	1.027	0.319	(3.794 - 4.431)	-0.264	0.327	-0.306	464.900
3	3.880	0.805	0.250	(3.630 - 4.130)	0.010	-0.019	-0.244	463.833
4	4.312	1.739	0.540	(3.773 - 4.852)	-0.048	0.047	0.107	462.900
5	4.144	1.223	0.380	(3.764 - 4.523)	0.053	0.023	0.177	467.867
6	3.892	0.927	0.288	(3.604 - 4.180)	-0.148	0.040	0.292	464.100
7	4.425	0.970	0.301	(4.124 - 4.726)	0.361	0.211	0.064	472.767
8	4.292	1.308	0.406	(3.886 - 4.698)	-0.198	-0.242	0.268	469.133
9	3.888	0.921	0.286	(3.603 - 4.174)	0.151	0.167	0.140	466.400
10	4.381	1.485	0.461	(3.920 - 4.842)	-0.112	-0.140	0.216	469.033
11	4.255	1.248	0.387	(3.868 - 4.642)	-0.033	0.110	-0.118	469.433
12	3.564	0.896	0.278	(3.286 - 3.842)	-0.209	0.006	0.223	453.800
13	4.065	1.103	0.342	(3.723 - 4.407)	-0.203	0.122	-0.003	466.567
14	4.809	1.620	0.503	(4.306 - 5.312)	0.063	-0.179	-0.241	477.433
15	4.393	1.154	0.358	(4.035 - 4.751)	-0.115	-0.229	-0.077	462.533
16	4.643	1.688	0.524	(4.120 - 5.167)	0.093	-0.141	-0.224	467.500
17	4.033	1.047	0.325	(3.708 - 4.358)	0.031	-0.025	0.111	463.900
18	3.932	1.593	0.494	(3.438 - 4.426)	-0.068	-0.076	-0.040	463.000
19	3.628	0.779	0.242	(3.386 - 3.870)	0.026	0.099	-0.060	457.000
20	4.526	1.832	0.568	(3.958 - 5.094)	0.084	-0.009	-0.211	470.167
21	4.259	1.279	0.397	(3.862 - 4.656)	-0.064	-0.144	-0.073	462.300
22	4.165	1.577	0.490	(3.675 - 4.654)	-0.115	-0.181	-0.014	461.433
23	4.289	1.386	0.430	(3.859 - 4.719)	-0.153	0.106	-0.059	464.100
24	4.011	1.123	0.349	(3.662 - 4.359)	0.194	-0.292	-0.173	460.367
25	4.479	1.350	0.419	(4.060 - 4.897)	-0.065	-0.326	-0.066	471.000
26	3.789	0.953	0.296	(3.494 - 4.085)	0.005	0.191	-0.062	465.100
27	4.222	1.409	0.438	(3.785 - 4.660)	0.293	0.154	-0.057	465.167

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	½ Intervalo de Confiança	Intervalo de 90% Confiança	Correl. Lag1	Correl. Lag2	Correl. Lag3	Média de Retornos
28	4.273	1.356	0.421	(3.852 - 4.694)	-0.061	-0.176	0.152	463.133
29	4.359	1.638	0.508	(3.851 - 4.867)	0.032	-0.054	0.124	471.067
30	3.843	0.980	0.305	(3.538 - 4.147)	-0.094	-0.058	-0.093	463.367
31	3.995	1.271	0.395	(3.601 - 4.390)	0.070	-0.031	-0.001	468.767
32	4.212	1.557	0.483	(3.729 - 4.695)	0.330	-0.018	-0.276	465.333
33	4.778	1.679	0.521	(4.257 - 5.299)	0.223	0.249	0.292	480.767
34	4.204	1.622	0.504	(3.700 - 4.707)	-0.173	0.259	0.014	474.467
35	4.164	1.000	0.311	(3.854 - 4.475)	-0.141	-0.122	-0.108	465.567
36	4.539	1.233	0.383	(4.157 - 4.922)	0.447	0.046	-0.199	476.467
37	4.263	1.171	0.363	(3.900 - 4.626)	-0.061	-0.395	0.178	467.333
38	3.879	0.986	0.306	(3.573 - 4.185)	-0.158	0.005	0.113	465.833
39	4.129	1.822	0.566	(3.564 - 4.695)	-0.006	-0.017	-0.099	469.133
40	4.279	1.409	0.438	(3.842 - 4.717)	0.089	-0.014	0.138	463.167
41	4.416	1.368	0.425	(3.991 - 4.840)	-0.301	0.147	0.067	472.500
42	4.210	1.267	0.393	(3.817 - 4.603)	0.151	0.143	0.287	468.100
43	4.475	1.625	0.504	(3.971 - 4.979)	0.078	-0.063	-0.307	471.333
44	4.515	1.685	0.523	(3.992 - 5.038)	-0.167	-0.127	-0.012	464.300
45	4.663	1.840	0.571	(4.092 - 5.234)	0.184	0.122	0.101	461.700
46	4.316	1.544	0.479	(3.837 - 4.795)	0.222	-0.068	-0.100	471.600
47	4.223	0.754	0.234	(3.989 - 4.457)	0.009	0.075	-0.087	470.267
48	4.224	1.499	0.465	(3.759 - 4.689)	-0.109	-0.212	-0.012	469.667
49	4.163	1.652	0.513	(3.650 - 4.676)	0.098	-0.171	-0.109	451.600
50	4.082	0.885	0.275	(3.808 - 4.357)	-0.021	0.058	0.078	466.467
51	3.808	1.291	0.401	(3.408 - 4.209)	-0.137	-0.044	-0.145	464.233
52	4.494	1.881	0.584	(3.911 - 5.078)	0.102	-0.144	-0.205	478.733
53	4.355	1.673	0.519	(3.836 - 4.874)	0.275	0.140	0.116	463.433
54	4.148	1.279	0.397	(3.751 - 4.545)	0.220	0.152	0.009	463.833
55	3.809	0.993	0.308	(3.501 - 4.117)	0.180	0.083	-0.031	457.367
56	4.138	1.466	0.455	(3.683 - 4.593)	0.055	-0.087	-0.171	472.533
57	4.348	1.289	0.400	(3.948 - 4.748)	0.116	-0.015	-0.043	464.967
58	4.105	0.933	0.290	(3.815 - 4.395)	-0.110	-0.085	-0.125	466.700
59	4.757	2.202	0.683	(4.074 - 5.440)	0.248	0.012	0.157	474.433
60	4.368	1.293	0.402	(3.966 - 4.769)	0.246	-0.006	-0.042	468.033
61	4.305	1.028	0.319	(3.986 - 4.624)	0.069	0.147	-0.294	467.400
62	3.899	1.053	0.327	(3.573 - 4.226)	-0.131	-0.180	0.148	467.500
63	4.079	1.124	0.349	(3.730 - 4.428)	0.216	0.081	0.056	462.833
64	4.490	1.261	0.391	(4.099 - 4.881)	-0.117	-0.102	-0.053	466.900
65	4.180	0.933	0.290	(3.891 - 4.470)	-0.104	-0.121	-0.069	472.600
66	3.999	1.236	0.384	(3.615 - 4.382)	0.103	-0.273	-0.014	463.533
67	4.113	0.965	0.300	(3.814 - 4.413)	-0.095	0.047	-0.074	470.333
68	4.664	1.098	0.341	(4.323 - 5.005)	0.172	0.011	0.068	475.100
69	4.331	1.655	0.514	(3.817 - 4.844)	0.313	-0.018	-0.038	473.267
70	4.144	0.992	0.308	(3.836 - 4.452)	0.256	0.233	-0.127	474.833

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	½ Intervalo de Confiança	Intervalo de 90% Confiança	Correl. Lag1	Correl. Lag2	Correl. Lag3	Média de Retornos
71	3.751	0.706	0.219	(3.532 - 3.970)	-0.050	0.016	0.209	470.567
72	4.429	1.352	0.420	(4.009 - 4.848)	-0.307	-0.071	0.128	482.067
73	3.895	1.077	0.334	(3.561 - 4.229)	-0.275	0.136	-0.093	469.900
74	4.518	1.856	0.576	(3.942 - 5.094)	-0.136	0.201	-0.118	469.567
75	4.090	0.963	0.299	(3.791 - 4.388)	0.018	-0.063	0.100	471.533
76	4.045	0.995	0.309	(3.736 - 4.353)	-0.117	-0.235	0.016	461.400
77	3.913	0.947	0.294	(3.620 - 4.207)	-0.215	0.023	-0.009	461.867
78	4.129	1.180	0.366	(3.763 - 4.495)	0.108	-0.077	-0.097	469.933
79	3.842	1.245	0.386	(3.456 - 4.228)	-0.140	-0.274	-0.029	467.200
80	3.899	1.074	0.333	(3.566 - 4.232)	-0.219	0.106	0.021	466.900
81	4.083	0.882	0.274	(3.809 - 4.357)	-0.270	-0.206	0.264	462.367
82	3.713	1.176	0.365	(3.348 - 4.078)	-0.089	-0.240	0.057	468.167
83	3.858	1.344	0.418	(3.440 - 4.275)	-0.143	-0.085	-0.191	464.800
84	4.007	1.001	0.311	(3.697 - 4.318)	-0.292	-0.054	-0.062	460.900
85	4.318	0.968	0.301	(4.017 - 4.618)	-0.090	-0.276	0.081	470.600
86	3.986	0.803	0.249	(3.737 - 4.235)	-0.383	0.282	-0.023	464.700
87	4.466	1.670	0.519	(3.947 - 4.984)	0.129	0.173	-0.015	466.633
88	3.834	0.725	0.225	(3.609 - 4.059)	0.052	-0.101	-0.139	467.567
89	4.590	1.258	0.391	(4.200 - 4.981)	0.072	-0.338	0.108	476.133
90	4.616	1.496	0.464	(4.152 - 5.080)	0.051	-0.220	-0.035	463.300
91	4.136	1.302	0.404	(3.732 - 4.540)	0.401	0.155	0.047	465.600
92	4.044	1.036	0.322	(3.722 - 4.365)	0.128	-0.475	-0.075	462.367
93	3.745	1.075	0.334	(3.411 - 4.079)	-0.028	0.041	-0.021	464.100
94	4.334	1.306	0.405	(3.929 - 4.739)	0.038	0.078	-0.004	466.233
95	4.010	1.076	0.334	(3.676 - 4.344)	0.155	-0.362	-0.042	465.567
96	4.529	1.298	0.403	(4.127 - 4.932)	-0.055	0.265	-0.041	474.533
97	4.086	1.339	0.416	(3.671 - 4.502)	0.033	0.042	-0.066	468.167
98	4.280	1.275	0.396	(3.884 - 4.676)	0.065	-0.001	0.159	468.700
99	4.149	1.242	0.386	(3.764 - 4.535)	0.021	-0.045	0.029	461.633
100	4.126	0.971	0.301	(3.825 - 4.427)	0.062	-0.011	0.412	470.867
101	3.871	0.931	0.289	(3.582 - 4.159)	-0.115	0.086	-0.127	470.467
102	4.109	1.100	0.341	(3.768 - 4.450)	0.445	-0.086	-0.130	462.267
103	4.603	2.496	0.775	(3.829 - 5.378)	-0.014	0.222	0.031	466.100
104	4.118	1.928	0.598	(3.520 - 4.716)	-0.001	-0.082	0.029	461.467
105	3.873	0.775	0.240	(3.633 - 4.113)	-0.128	-0.361	-0.171	462.833
106	4.153	1.428	0.443	(3.710 - 4.596)	0.042	0.090	-0.091	468.467
107	4.161	1.212	0.376	(3.785 - 4.537)	-0.234	-0.063	0.241	470.900
108	3.997	0.994	0.309	(3.689 - 4.306)	-0.054	-0.304	0.060	463.267
109	3.741	0.992	0.308	(3.433 - 4.048)	0.060	0.204	-0.141	470.667
110	3.926	1.082	0.336	(3.590 - 4.261)	0.188	-0.155	-0.240	461.167
111	4.457	1.403	0.435	(4.022 - 4.892)	0.288	0.224	0.060	466.567
112	4.047	1.159	0.360	(3.687 - 4.407)	-0.001	-0.117	0.128	466.233
113	3.973	1.136	0.353	(3.620 - 4.325)	-0.138	0.032	0.143	464.933

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	½ Intervalo de Confiança	Intervalo de 90% Confiança	Correl. Lag1	Correl. Lag2	Correl. Lag3	Média de Retornos
114	4.177	1.026	0.319	(3.859 - 4.496)	-0.279	-0.117	0.207	469.733
115	4.364	1.096	0.340	(4.024 - 4.704)	0.111	0.103	0.192	470.900
116	4.100	1.110	0.345	(3.755 - 4.444)	-0.320	0.174	-0.218	454.433
117	4.223	1.284	0.399	(3.825 - 4.622)	0.207	-0.350	-0.099	464.333
118	4.234	1.260	0.391	(3.843 - 4.625)	-0.155	0.258	-0.068	465.767
119	4.355	1.405	0.436	(3.920 - 4.791)	-0.226	-0.278	0.192	463.267
120	3.888	1.053	0.327	(3.561 - 4.215)	-0.129	0.081	0.190	461.767
121	3.970	0.853	0.265	(3.706 - 4.235)	0.011	0.043	-0.195	461.967
122	4.308	1.146	0.356	(3.952 - 4.663)	-0.037	0.037	0.027	476.600
123	4.344	1.485	0.461	(3.883 - 4.805)	-0.073	-0.419	-0.034	470.333
124	4.524	1.789	0.555	(3.969 - 5.079)	0.019	0.047	-0.154	472.900
125	4.143	1.306	0.405	(3.738 - 4.548)	-0.081	-0.127	-0.065	470.467
126	4.125	1.179	0.366	(3.759 - 4.491)	0.026	-0.169	0.211	469.167
127	3.554	0.888	0.276	(3.278 - 3.829)	-0.137	0.112	-0.027	454.300
128	4.233	1.189	0.369	(3.864 - 4.602)	-0.113	-0.122	0.181	467.333
129	4.126	0.882	0.274	(3.853 - 4.400)	-0.031	0.100	0.135	467.733
130	4.143	1.330	0.413	(3.730 - 4.556)	0.109	-0.229	-0.032	462.900
131	4.207	1.153	0.358	(3.849 - 4.565)	-0.320	0.418	-0.264	469.433
132	4.001	1.135	0.353	(3.649 - 4.354)	0.208	-0.038	-0.260	462.800
133	4.490	1.509	0.469	(4.021 - 4.958)	-0.323	-0.101	0.345	468.633
134	4.083	1.032	0.320	(3.763 - 4.403)	0.246	0.101	0.029	467.167
135	4.448	1.233	0.383	(4.065 - 4.831)	0.112	0.082	-0.101	475.667
136	4.264	1.570	0.487	(3.777 - 4.751)	0.032	-0.314	0.016	464.767
137	4.004	1.041	0.324	(3.681 - 4.328)	0.135	-0.007	0.184	452.700
138	4.179	1.543	0.479	(3.700 - 4.658)	-0.219	-0.147	-0.046	470.900
139	4.100	0.896	0.278	(3.822 - 4.378)	0.303	-0.083	-0.061	477.200
140	4.189	1.196	0.372	(3.817 - 4.560)	0.244	-0.215	-0.215	462.733
141	4.118	0.903	0.280	(3.838 - 4.398)	-0.102	-0.098	-0.235	460.900
142	4.445	1.879	0.583	(3.862 - 5.028)	-0.026	-0.186	0.037	460.833
143	4.367	1.511	0.469	(3.898 - 4.836)	-0.080	-0.246	-0.225	459.500
144	3.990	0.974	0.302	(3.688 - 4.292)	0.147	-0.020	-0.180	469.767
145	4.113	0.934	0.290	(3.823 - 4.403)	0.248	-0.017	0.025	466.433
146	3.920	0.965	0.300	(3.621 - 4.220)	-0.174	-0.010	-0.186	465.333
147	4.174	1.047	0.325	(3.849 - 4.499)	0.197	-0.228	-0.259	468.033
148	4.406	1.245	0.387	(4.019 - 4.792)	0.183	-0.129	-0.197	471.933
149	4.017	1.122	0.348	(3.669 - 4.365)	0.000	-0.179	-0.023	457.933
150	4.256	1.386	0.430	(3.826 - 4.686)	-0.069	-0.037	-0.131	467.867
151	4.091	0.967	0.301	(3.790 - 4.391)	-0.186	0.081	-0.221	465.200
152	4.138	1.034	0.321	(3.817 - 4.459)	-0.258	-0.102	0.122	470.467
153	4.958	2.902	0.901	(4.057 - 5.859)	0.345	-0.163	-0.187	468.633
154	4.117	1.204	0.374	(3.743 - 4.491)	-0.242	-0.100	0.093	463.400
155	3.933	1.011	0.314	(3.619 - 4.246)	0.029	0.222	0.057	465.733
156	4.085	1.181	0.366	(3.719 - 4.451)	-0.087	-0.068	-0.159	466.067

Nº da Rodada	Média das Médias	Desvio Padrão	½ Intervalo de Confiança	Intervalo de 90% Confiança	Correl. Lag1	Correl. Lag2	Correl. Lag3	Média de Retornos
157	3.970	0.920	0.286	(3.685 - 4.256)	0.058	0.028	0.218	467.800
158	4.380	1.257	0.390	(3.990 - 4.769)	0.075	0.083	-0.001	462.700
159	3.891	0.959	0.298	(3.593 - 4.188)	0.005	-0.056	-0.222	462.033
160	4.136	1.466	0.455	(3.682 - 4.591)	0.081	0.255	-0.024	461.533
161	4.150	1.476	0.458	(3.692 - 4.608)	-0.030	0.057	-0.141	468.500
162	4.050	1.156	0.359	(3.691 - 4.408)	-0.022	0.218	0.083	470.367
163	3.977	0.979	0.304	(3.673 - 4.281)	0.015	-0.213	0.166	466.567
164	4.377	1.184	0.368	(4.010 - 4.745)	0.229	0.077	0.047	472.967
165	4.410	1.584	0.492	(3.918 - 4.901)	0.118	-0.180	-0.099	471.867
166	4.182	1.192	0.370	(3.812 - 4.552)	-0.183	0.080	-0.128	465.000
167	4.559	2.162	0.671	(3.888 - 5.230)	-0.235	0.057	-0.014	475.000
168	4.312	1.868	0.580	(3.733 - 4.892)	-0.202	0.092	-0.140	462.533
169	4.600	1.815	0.564	(4.036 - 5.163)	-0.050	0.085	0.070	472.333
170	4.165	2.029	0.630	(3.535 - 4.794)	-0.030	-0.157	0.091	462.800
171	4.218	1.372	0.426	(3.793 - 4.644)	0.332	-0.224	-0.304	469.300
172	4.246	0.971	0.302	(3.944 - 4.547)	-0.001	-0.009	-0.136	476.800
173	4.024	0.853	0.265	(3.759 - 4.289)	-0.172	0.022	0.144	471.533
174	3.633	0.823	0.256	(3.378 - 3.889)	-0.045	0.021	0.061	463.567
175	3.817	1.010	0.314	(3.504 - 4.131)	-0.091	-0.334	0.028	465.833
176	4.148	0.917	0.285	(3.864 - 4.433)	-0.040	-0.351	-0.119	475.767
177	4.578	1.722	0.535	(4.044 - 5.113)	0.042	-0.301	-0.249	475.200
178	4.727	1.770	0.549	(4.178 - 5.276)	-0.280	-0.264	0.386	466.433
179	3.899	1.101	0.342	(3.557 - 4.240)	-0.081	-0.042	0.250	463.933
180	4.319	1.075	0.334	(3.986 - 4.653)	0.251	-0.129	-0.094	472.000
181	4.054	0.950	0.295	(3.759 - 4.349)	0.055	0.054	-0.408	470.133
182	4.049	1.777	0.552	(3.497 - 4.600)	-0.075	0.037	0.129	463.267
183	4.189	1.275	0.396	(3.794 - 4.585)	-0.074	0.157	-0.259	462.700
184	4.503	1.833	0.569	(3.935 - 5.072)	0.067	-0.066	-0.083	463.467
185	3.522	0.806	0.250	(3.272 - 3.772)	0.125	0.087	0.105	456.500
186	4.334	2.250	0.699	(3.636 - 5.033)	-0.047	0.065	-0.288	461.667
187	3.719	1.087	0.338	(3.382 - 4.057)	0.204	-0.237	-0.208	454.300
188	3.716	0.752	0.234	(3.482 - 3.949)	-0.068	-0.055	0.333	457.800
189	4.010	1.331	0.413	(3.597 - 4.423)	0.114	-0.134	-0.089	461.067
190	4.631	1.523	0.473	(4.158 - 5.103)	0.207	-0.307	-0.109	472.533
191	4.198	1.061	0.329	(3.869 - 4.527)	0.201	0.170	-0.021	466.733
192	4.438	1.437	0.446	(3.992 - 4.884)	-0.014	-0.122	-0.011	468.633
193	4.405	1.399	0.435	(3.971 - 4.840)	-0.139	0.266	-0.338	456.700
194	4.008	1.297	0.403	(3.605 - 4.410)	0.202	0.132	0.357	470.933
195	4.292	1.567	0.487	(3.806 - 4.779)	0.051	-0.151	0.052	467.000
196	3.881	1.112	0.346	(3.536 - 4.227)	0.029	0.011	-0.156	463.500
197	4.147	1.130	0.351	(3.796 - 4.497)	0.048	0.095	0.057	467.633
198	3.910	0.995	0.309	(3.601 - 4.219)	-0.180	0.095	0.068	466.800
199	4.088	1.248	0.387	(3.701 - 4.475)	-0.118	-0.084	-0.008	460.900
200	4.139	1.250	0.388	(3.751 - 4.527)	0.049	-0.276	0.039	463.433

APÊNDICE C : TEMPOS DE ESPERA

Parte dos tempos de espera resultados de um par de rodadas da simulação da fila M/M/1 com realimentação instantânea Bernoulli.

As primeiras colunas referem-se aos resultados da rodada de simulação com números aleatórios usuais $U(0,1)$, já as segundas colunas são os tempos de espera da rodada com os números aleatórios complementares $1 - U(0,1)$.

0.0000	0.0000	0.9420	0.0000	2.0821	0.4781
0.0000	0.8918	0.8005	0.5089	0.6448	0.9965
0.0000	0.1605	0.5340	0.3286	0.6131	1.1169
0.6846	0.1191	0.5547	0.4310	0.6631	1.0009
0.6644	0.0000	0.7900	0.3265	1.0966	0.3694
0.0000	0.3351	1.1008	0.0000	0.5089	0.3879
0.0000	0.4762	0.9545	0.5890	0.3310	0.5165
1.0954	0.0000	0.8987	0.0000	1.0180	0.0349
0.9638	0.0000	0.7225	0.0000	2.0893	0.0000
1.1343	0.0000	0.9973	0.0000	1.9162	0.0000
1.1860	0.0000	0.9910	0.1365	1.5676	0.0000
1.5748	0.1463	0.8823	0.0000	1.9810	0.0000
1.3918	1.2398	0.2557	0.5643	1.0683	0.0000
0.7154	0.6973	0.1993	1.0732	1.3125	0.0000
0.7987	0.2382	1.1351	1.0725	1.2069	0.1500
0.8920	0.0000	1.0349	0.8981	1.1223	0.0000
1.0870	0.0788	0.4620	1.1553	1.4310	0.0000
1.2250	0.0938	0.9342	1.0530	1.4092	0.0341
1.2792	0.3351	1.5898	0.6436	0.3109	0.2460
1.6317	0.1929	1.7282	0.6378	1.1418	0.0990