ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

I.C.M.S.C.

PERTURBAÇÃO DE ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS SIMÉTRICAS EM EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Maria Aparecida Benã

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

ICMC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

PERTURBAÇÃO DE ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS SIMÉTRICAS EM EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Maria Aparecida Benã

Orientador: *Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências (Matemáticas).

SÃO CARLOS

1985

PERTURBATION OF SYMMETRIC HOMOCLINIC ORBITS IN SECOND ORDER EQUATIONS

Maria Aparecida Benã

Adviser: *Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio*

ABSTRACT

For λ, μ small, the equation

$$\ddot{x} + g(x) = -\lambda\dot{x} + \mu f(t)$$

is considered near a separatrix S of the unperturbed equation $\lambda = \mu = 0$. We assume that S is composite of two symmetric loops, each one being a homoclinic orbit having zero as α-and ω-limit sets. A complete description is given of the bifurcation curves in (λ,μ) - space to homoclinic points in a neighborhood of S.

"Fica decretado que o homem
não precisará nunca mais
duvidar do homem.
Que o homem confiará no homem
Como a palavra confia no vento,
Como o vento confia no ar,
Como o ar confia no campo azul
do céu.

O homem confiará no homem
como um menino confia em
outro menino".

(Thiago de Mello)

Àqueles a quem amo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio pela amizade e estímulos sempre renovados, orientação segura, exemplo de responsabilidade profissional e paciência nos momentos de dificuldade.

Ao professor e amigo Luiz Augusto da Costa Ladeira pelo apoio e ajuda constantes e, sobretudo, pela força interior que me foi dada ao longo de todos estes anos.

Ao Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco pela amizade e incentivo desde os tempos de graduação, bem como pelo otimismo e palavras reconfortantes nos momentos adequados.

Aos professores e amigos da F.C.F.R.P. - USP e aos da F.F.C.L.R.P. - USP pelo carinho, disponibilidade, apoio e confiança em mim depositados-fatores indispensáveis à minha formação não só profissional, como também humana.

Aos colegas da AFA-Pirassununga pelo convívio amigo e acolhedor que sempre me proporcionaram no ambiente de trabalho.

Aos meus pais pelo amor que me devotam e que se faz sempre presente; à Solange pela ternura.

À Sônia, Beth e Laura pelo atendimento carinhoso.

Às amigas de república pela convivência gratificante.

À CAPES e ao CNPq pela bolsas de estudo concedidas.

À Neube E.D.G.Stabili, pela eficiência no trabalho de datilografia.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO 0

1. Variedade Estável e Instável 1
2. Teorema do Gráfico Fechado 5
3. Teorema das Funções Implícitas 6
4. O Método Alternativo 7

CAPÍTULO I 11

CAPÍTULO II 30

Um exemplo 33

BIBLIOGRAFIA 40

INTRODUÇÃO

Como aplicação do tipo de problema que vamos lidar neste trabalho, suponha que um objeto M de massa unitária desliza livremente num fio circular de raio a, centro O, que por sua vez gira sobre um diâmetro vertical com velocidade angular constante ω. A posição do objeto será definida pelo ângulo x que o segmento OM faz com o diâmetro vertical, conforme a figura 1.

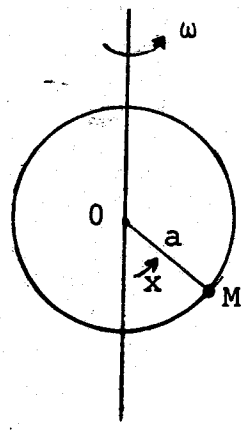


Figura 1

A equação diferencial para esse movimento é $a\ddot{x} = a\omega^2 \operatorname{sen} x \cos x - g \operatorname{sen} x$, onde g é a aceleração devido à gravidade. Ver [1], Cap. II, §5. Pondo $\Omega = a\omega^2/g$, a equação fica

(1) $$\ddot{x} = g \text{ sen } x \, (\Omega \cos x - 1)/a \overset{\text{def}}{=} h(x,\Omega),$$

o sistema associado a (1) fica

(2) $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = h(x,\Omega), \end{cases}$$

que pelo fato de ser conservativo, tem suas órbitas definidas pela equação

(3) $$ay^2/2 - g(1 - \frac{\Omega}{2}\cos x)\cos x = c \quad (c = \text{constante}).$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são os pontos $(x,0)$ onde x satisfaz a equação $h(x,\Omega) = 0$. São portanto os pontos $(x,0)$ onde $x = k\pi$, k inteiro, ou x é solução da equação $\cos x = \Omega^{-1}$. Ver figura 2.

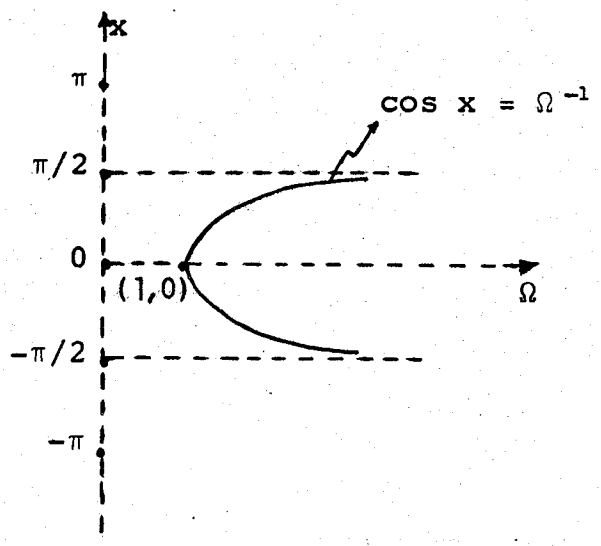


Figura 2

Os diagramas de fase para o sistema (2) são obtidos da equação (3). Notamos que quando $\Omega \leq 1$, ou seja, quando a velocidade angular é menor ou igual a $\sqrt{g/a}$, o movimento é semelhante ao de um pêndulo simples, sem amortecimento. No entanto, para $\Omega > 1$, a origem se transforma num ponto de equilíbrio instável, aparecendo dois novos centros entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. Ver figura 3.

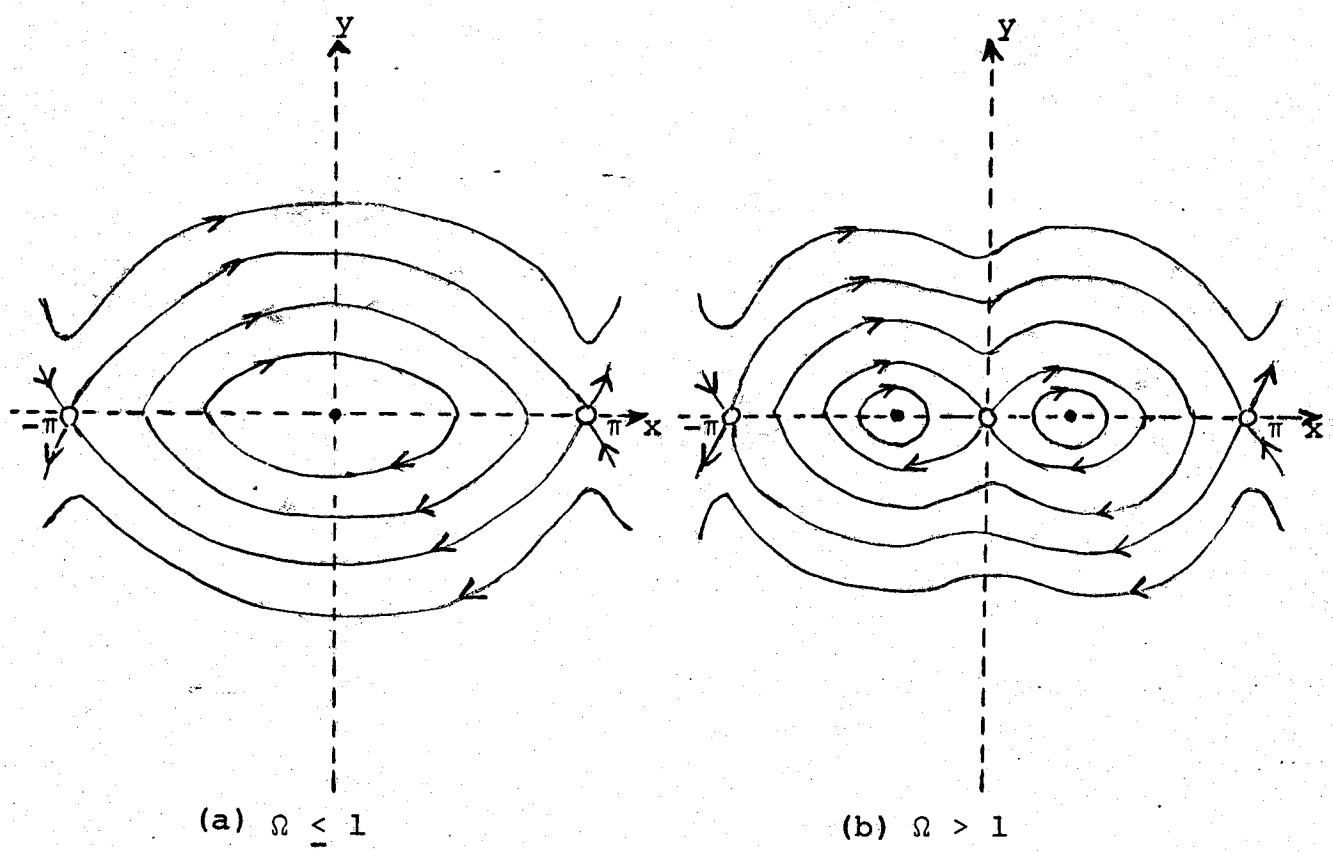


Figura 3

Fixemos nossa atenção no caso $\Omega > 1$. A origem

$(0,0)$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema (2). Um ponto $p \in R^2$ é dito *homoclínico* a $(0,0)$ se p pertence simultaneamente às variedades estável e instável de $(0,0)$. Isso significa que, se p é homoclínico a $(0,0)$ e se $z(.,p)$ é a solução de (2) que satisfaz $z(0,p) = p$, então $z(t,p) \to (0,0)$ quando $t \to \pm\infty$. Notamos então, na figura 3(b) que existe um par de órbitas formadas de pontos homoclínicos a $(0,0)$, constituindo uma separatriz S do sistema. Tal separatriz é a posição limite entre as oscilações ao redor de cada centro e as oscilações ao redor dos dois centros.

Vamos introduzir agora no sistema (2) um amortecimento e uma força externa periódica, isto é, consideremos o sistema perturbado

$$(4) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} - h(x,\Omega) = -\lambda y + \mu f(t) \end{cases}$$

onde f é contínua, 2π-periódica e $\rho = (\lambda,\mu)$ é um parâmetro no R^2. Seja $T_\rho : R^2 \to R^2$ a aplicação que associa a cada $p \in R^2$ o valor da solução $\psi(.,0,p)$ de (4) calculada no instante 2π, isto é, $T_\rho(p) = \psi(2\pi,0,p)$. Sabemos que T_ρ é um difeomorfismo, $T_0(0) = 0$ e $T_0(S) = S$.

Para ρ próximo de 0, a solução nula de (2) se transforma numa solução 2π-periódica de (4) $\phi(t) = \phi_\rho(t)$ de pequena amplitude. Ver [6], Cap.IV, Teor. 2.1. Temos por

tanto um ponto fixo $z_\rho = \phi_\rho(0)$ de T_ρ, que sabemos ser hiperbólico. Nosso objetivo é descrever, no espaço dos parâmetros, regiões próximas de 0 para as quais existem ou não pontos *homoclínicos a* z_ρ, próximos de S, ou seja, pontos $p \in R^2$ próximos de S tais que $T_\rho^n(p) \to z_\rho$ quando $n \to \pm\infty$. Em termos da solução $\psi(.,o,p)$ de (4), são pontos p para os quais $\psi(t,0,p) \to \phi_\rho(t)$ quando $t \to \pm\infty$.

Se existe um ponto homoclínico a z_ρ então existem infinitos, pois as variedades estável e instável de T_ρ por z_ρ são invariantes por T_ρ. Logo, os pontos $T_\rho^n(p)$, $n \in Z$ são todos homoclínicos a z_ρ.

A técnica utilizada aqui será basicamente o Método de Liapunov-Schmidt descrito para uma órbita homoclínica em [4] e que desenvolvemos no Capítulo I. Veremos que existem dois setores no espaço dos parâmetros, definidos por duas curvas suaves, para os quais existem ou não pontos homoclínicos. No Capítulo II, consideramos o caso em que a equação não perturbada possui uma separatriz S formada por um par de órbitas homoclínicas simétricas, como no exemplo acima. Sob certas condições, mostramos a existência de um único par de curvas suaves no espaço ρ, que definem dois setores para os quais existem ou não pontos homoclínicos próximos da separatriz S.

CAPÍTULO 0

Neste capítulo reunimos definições, notações e alguns resultados básicos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

1. VARIEDADES ESTÁVEL E INSTÁVEL

Como referência dos resultados apresentados abaixo citamos [2] e [7].

Seja $f: R^n \to R^n$ uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$ e consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(0.1) \qquad \dot{x} = f(x) \qquad (x \in R^n).$$

Um ponto $x_0 \in R^n$ é dito *ponto crítico* de (0.1) se $f(x_0)=0$. Se x_0 é um ponto crítico de (0.1), e se $x(t,p)$ denota a solução de (0.1) que satisfaz $x(0,p) = p$, $p \in R^n$, definimos o *conjunto estável de (0.1) em x_0* como o conjunto dos pontos $p \in R^n$ para os quais $x(t,p)$ está definida em $[0,\infty)$ e $x(t,p) \to x_0$ quando $t \to \infty$. O *conjunto instável de (0.1) em x_0* é definido de modo análogo, exigindo-se $x(t,p) \to x_0$ quando $t \to -\infty$. Esses conjuntos são sempre não vazios, pois contêm o ponto x_0, e em geral não são subvariedades do R^n.

Um ponto crítico x_0 de (0.1) é dito *hiperbólico* se os multiplicadores característicos do sistema linear variacional $\dot{y} = f'(x_0)y$ associado têm norma diferente de um. Se x_0 é um ponto crítico hiperbólico de (0.1), é fato conhecido que os conjuntos estável e instável de (0.1) em x_0 são subvariedades C^k imersas no R^n, denotadas respectivamente por $W^s(x_0)$, $W^u(x_0)$. Além disso, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, quando restritas a V, essas variedades, denominadas *locais* e denotadas respectivamente por $W^s_{loc}(x_0)$ e $W^u_{loc}(x_0)$, são subvariedades C^k do R^n e satisfazem $W^s_{loc}(x_0) \cap W^u_{loc}(x_0) = \{x_0\}$.

Consideremos agora o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(0.2) \qquad \dot{x} = f(t,x) \qquad\qquad (t \in R, \quad x \in R^n)$$

onde f tem derivadas parciais contínuas até ordem k com relação a x e $f(t+2\pi,x) \equiv f(t,x)$. Suponha que todas as soluções de (0.2) estão definidas em R. Se $x(t,p)$ denota a solução de (0.2) que satisfaz $x(0,p) = p$, então a aplicação $T: R^n \to R^n$ definida por $T(p) = x(2\pi,p)$ é um difeomorfismo C^k.

Suponhamos que $x(t,x_0)$ é solução de (0.2) 2π-periódica, isto é, $x(t+2\pi,x_0) \equiv x(t,x_0)$. Nesse caso, x_0 é um ponto fixo de T que suporemos ser hiperbólico, isto é, a aplicação linear tangente DT_{x_0} não tem autovalor de norma

um. Podemos definir, de modo análogo, a *variedade estável de T por* x_0, como o conjunto dos pontos $p \in R^n$ para os quais $T^n(p) \to x_0$ quando $n \to \infty$, e a *variedade instável de T por* x_0 como o conjunto dos pontos $p \in R^n$ para os quais $T^{-n}(p) \to x_0$, quando $n \to \infty$.

Como anteriormente, esses conjuntos são subvariedades C^k imersas no R^n. Quando $n = 2$, pode ocorrer, por exemplo a situação na figura 0.1, onde as variedades estável e instável por x_0 coincidem.

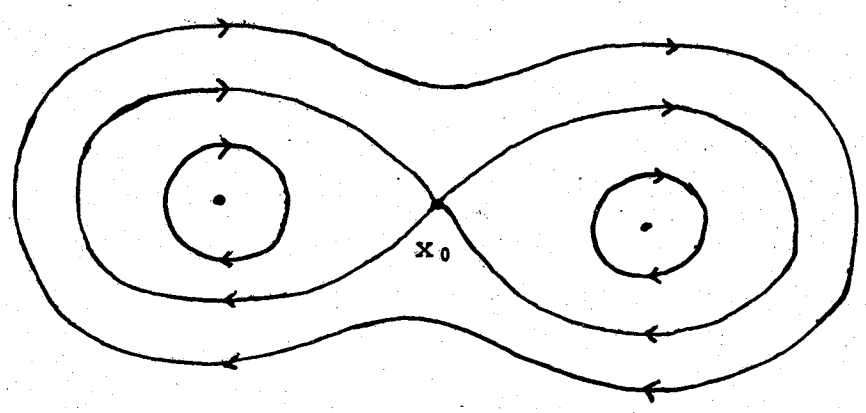


Figura 0.1

Uma situação mais complicada ocorre quando temos dois pontos fixos hiperbólicos para T, digamos x_0 e x_1, e a variedade estável de x_0 intercepta a variedade instável de x_1 transversalmente em q, como ocorre na figura 0.2. O ponto q é então chamado *heteroclínico transversal*. A se-

quência $T^n(q)$, $n \geq 0$, tende a x_0 ao longo da variedade estável em x_0 e está contida na sequência $T^n(A)$, $n \geq 0$ de imagens do pequeno segmento A da variedade instável de

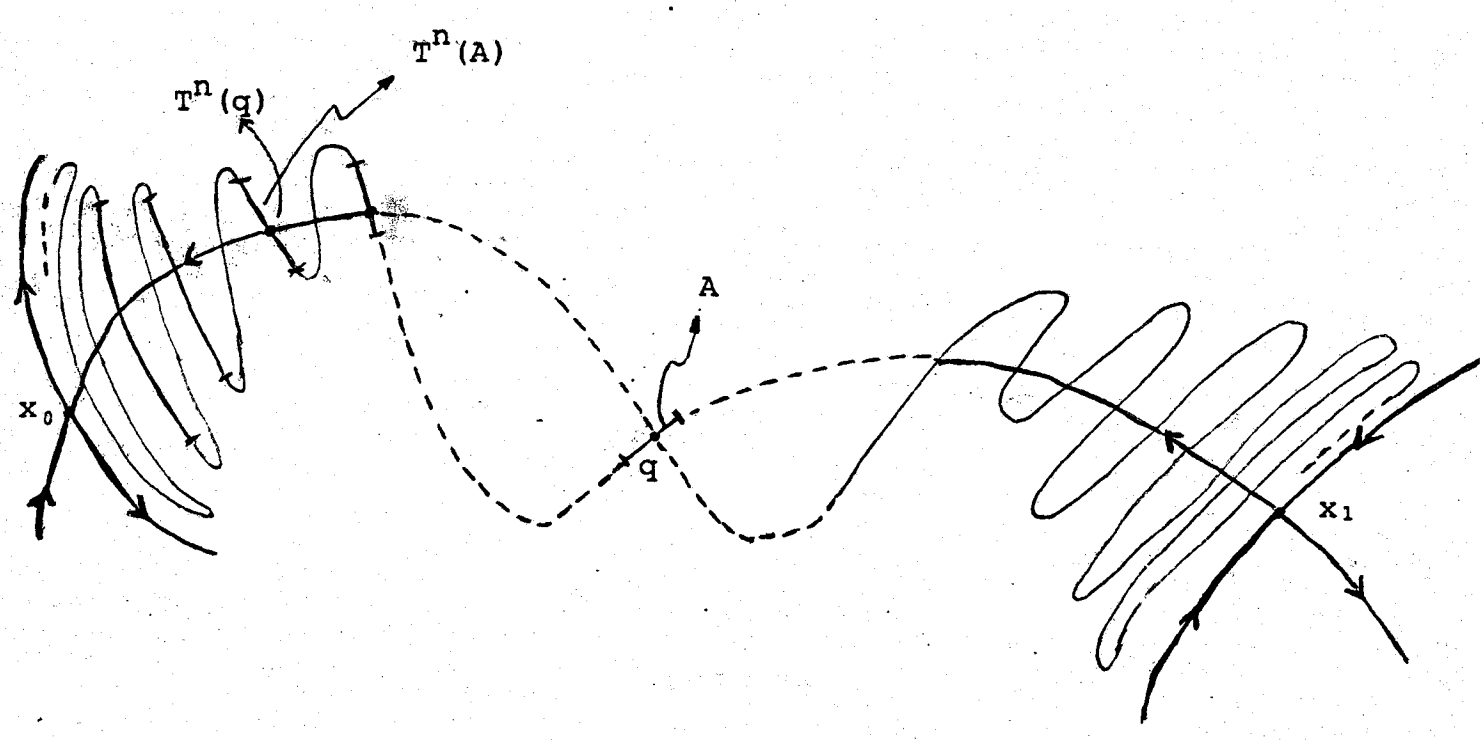


Figura 0.2

x_1 contendo q. Essa última sequência "se acumula" ao longo da variedade instável por x_0, de modo que todo ponto da variedade instável de x_0 é limite de pontos da variedade instável de x_1. De modo análogo, todo ponto da variedade estável de x_1 é limite de pontos da variedade estável de x_0.

Quando a situação acima ocorre com $x_0 = x_1$, q é

dito *homoclínico transversal*, e o comportamento complicado das órbitas está ilustrado na figura 0.3.

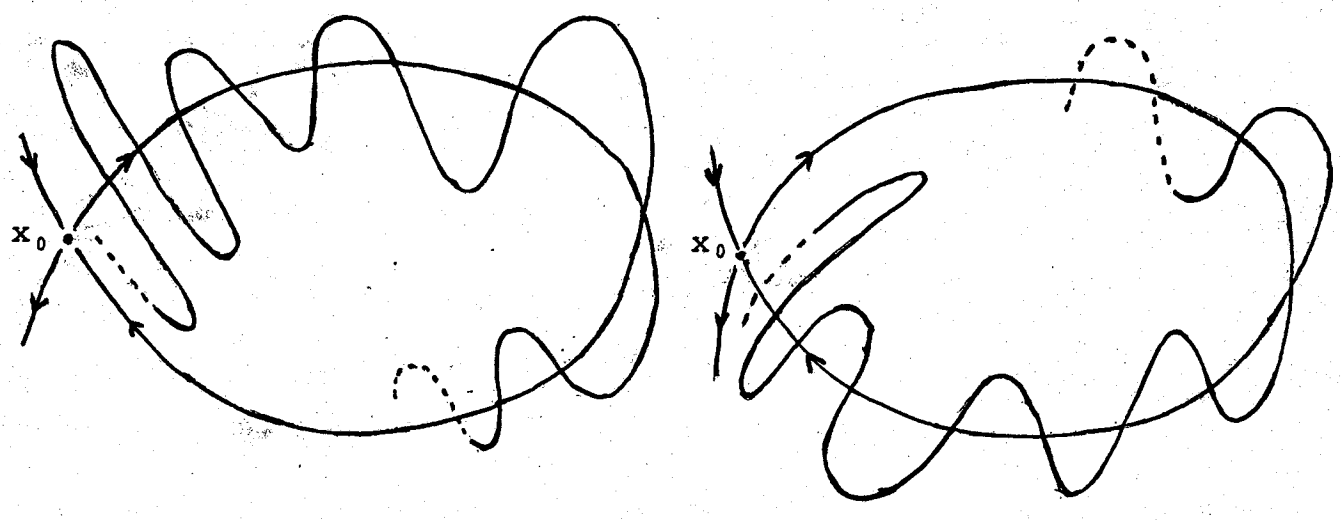


Figura 0.3

2. TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

Sejam X, Y espaços de Banach e T um operador linear definido em um subespaço de X com valores em Y. Denotamos por $R(T)$, $D(T)$, $N(T)$ e $G(T)$ a imagem, o domínio, o núcleo e o gráfico de T, respectivamente, onde $G(T) = \{(x,Tx) : x \in D(T)\}$ é um subespaço de $X \times Y$. No espaço produto, consideramos a norma $|(x,y)| = |x|_X + |y|_Y$.

Dizemos que o operador linear $T:D(T) \subset X \to Y$ é

fechado se $G(T)$ for um subespaço fechado de $X \times Y$. Em outras palavras, T é fechado se para toda sequência (x_n) em $D(T)$, as relações $x_n \to x$ em X, $Tx_n \to y$ em Y implicam $x \in D(T)$ e $Tx = y$. O Teorema do Gráfico Fechado será usado na forma abaixo, conforme [8], Teor.VI.2.

TEOREMA 0.1: Seja $T: D(T) \subset X \to Y$ um operador linear fechado. Então T é contínuo se e somente se $D(T)$ é fechado.

Notemos que se T é um operador linear fechado e invertível então T^{-1} é fechado pois T e T^{-1} têm essencialmente o mesmo gráfico. Também, se T é linear e contínuo e se $D(T)$ é fechado em X então T é fechado. Disso tiramos o corolário abaixo, que estabelece um importante critério para garantir a continuidade do operador inverso.

COROLÁRIO 0.2: Seja $T: D(T) \subset X \to Y$ um operador linear contínuo e bijetor. Se $D(T)$ é fechado então o operador inverso $T^{-1}: Y \to D(T)$ é contínuo.

3. TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

A formulação aqui apresentada do Teorema das Funções Implícitas é conveniente para sua utilização nos capítulos que se seguem. Uma prova do mesmo pode ser encontrada em [9], Cap. II, Teor. 7.2.

TEOREMA 0.3: Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $U \subset X \times Y$ um aberto e $f: U \to Z$ uma função contínua. Suponha que f tenha derivada parcial $D_1f(x,y)$ com relação a x contínua em U. Se $(x_0,y_0) \in U$ é tal que $f(x_0,y_0)=0$ e $D_1f(x_0,y_0)$ é um homeomorfismo linear de X sobre Z, então:

i) existe uma única função contínua $x = u(y)$ definida numa vizinhança V de y_0 tal que $u(y_0) = x_0$ e $f(u(y),y) = 0$, $\forall\, y \in V$.

ii) Se f for de classe C^1, então u é de classe C^1 em V e $u'(y)=-[D_1f(u(y),y)]^{-1} o D_2f(u(y),y)$, $\forall\, y \in V$.

iii) u é de classe C^p se f for de classe C^p, $p \geq 1$.

4. O MÉTODO ALTERNATIVO

Nesta secção apresentamos uma descrição do Método de Liapunov-Schmidt ou Método Alternativo. Exposições mais detalhadas para complementação deste tópico podem ser encontradas em [3], Cap. II; [6], Cap. IX.

Uma projeção P no espaço de Banach X é um operador linear contínuo $P: X \to X$ tal que $P^2 = P$. Uma proje

ção P determina uma decomposição de X em soma direta $X = R(P) \oplus N(P)$, onde $N(P)$, $R(P)$ são subespaços fechados. Se P é uma projeção em X, denotamos $X_p = R(P)$. Com o símbolo $I = I_X$ indicamos o operador identidade em X.

Estamos interessados em estudar a equação

$$(0.3) \qquad Lx = N(x,\rho,\alpha),$$

onde $L: D(L) \subset X \to Y$ é um operador linear e $N: X \times R^n \times R \to Y$ um operador não necessariamente linear. Vamos supor satisfeita a seguinte hipótese:

(H) existem projeções $P: X \to X$ e $Q: Y \to Y$ tais que $X_p = N(L)$ e $Y_{I-Q} = R(L)$.

Com a hipótese (H), a equação (0.3) fica equivalente ao sistema

$$(0.4) \qquad \begin{cases} (I-Q)(Lx-N(x,\rho,\alpha)) = 0 \\ Q(Lx - N(x,\rho,\alpha)) = 0 \end{cases}$$

A hipótese (H) implica que $(I-Q)Lx = Lx$ e $QLx = 0$, para todo $x \in D(L)$. Portanto, o sistema (0.4) fica equivalente a

$$(0.5)\quad \begin{cases} Lx = (I-Q)N(x,\rho,\alpha) \\ \\ QN(x,\rho,\alpha) = 0 \end{cases}$$

Da hipótese (H) temos ainda que $\tilde{L} \overset{def}{=} L|_{D(L)\cap X_{I-P}}$ é um isomorfismo entre $D(L) \cap X_{I-P}$ e $R(L)$. Logo, existe um operador linear $K = \tilde{L}^{-1}$ definido em $R(L)$ tal que

$$LK = I \text{ em } R(L)$$
$$KL = I-P \text{ em } D(L)$$

Utilizando essas relações, concluimos que o sistema (0.5) é equivalente ao sistema abaixo:

$$(0.6)\quad \begin{cases} \text{(a)}\ x = Px + K(I-Q)N(x,\rho,\alpha) \\ \\ \text{(b)}\ QN(x,\rho,\alpha) = 0 \end{cases}$$

Provamos assim o seguinte teorema:

TEOREMA 0.4: Se a hipótese (H) está satisfeita então existe um operador linear $K: R(L) \to X$ tal que $LK = I$ em $R(L)$, $KL = I - P$ em $D(L)$ e a equação (0.3) é equivalente ao sistema (0.6).

Observações:

1) Se $D(L)$ for um subespaço fechado de X e se L for um operador linear contínuo então $D(\tilde{L}) = D(L) \cap X_{I-P}$ é fechado e $\tilde{L}$ é contínuo. Pelo Corolário 0.2 segue que K é contínuo.

2) No caso que estaremos interessados, o sistema (0.6) tem solução $x \in D(L)$ se e somente se $Px = 0$. Mais ainda, N é contínua, $\partial N/\partial x$ é contínua numa vizinhança de $(x,\rho,\alpha) = (0,0,\alpha)$, $N(0,0,\alpha) = 0$ e $\partial N(0,0,\alpha)/\partial x = 0$. Então a função

$$f: D(L) \cap X_{I-P} \times R^n \times R \to Y$$

definida por $f(x,\rho,\alpha) = x - K(I-Q)N(x,\rho,\alpha)$ satisfaz, para todo $\alpha \in R$, $f(0,0,\alpha) = 0$, $\partial f(0,0,\alpha)/\partial x = I$. Segue do Teorema das Funções Implícitas que a equação $f(x,\rho,\alpha)=0$ pode ser resolvida numa vizinhança de $(x,\rho,\alpha) = (0,0,\alpha)$, dando uma única solução $x^* = x^*(\rho,\alpha)$.

Logo, o problema de encontrar soluções para a equação (0.3) fica reduzido a encontrar soluções (ρ,α) para a equação $QN(x^*(\rho,\alpha),\rho,\alpha) = 0$, chamada *equação de bifurcação*. Temos assim um *problema alternativo* para a equação (0.3).

A equação (0.6-a) é chamada *equação auxiliar*.

CAPÍTULO I

Faremos neste capítulo um estudo detalhado da parte de [4] que trata da bifurcação de uma órbita homoclínica.

Consideremos a equação

$$(1.1) \qquad \ddot{x} + g(x) = 0$$

onde g tem derivadas até terceira ordem contínuas em R, $g(0) = 0$ e $g'(0) < 0$. Seja

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

o sistema bidimensional associado a (1.1). Nessas condições, o ponto de equilíbrio $(0,0)$ de $(1,2)$ é um ponto de sela com expoentes característicos $\pm\gamma$, $\gamma = [-g'(0)]^{1/2}$.

Suponha que o sistema (1.2) tenha uma órbita homoclínica Γ constituída de pontos comuns às variedades estável e instável de $(0,0)$. Seja $p(t)$ a solução de (1.1) tal que $\dot{p}(0) = 0$ e

$$\Gamma = \{(p(t), \dot{p}(t)) : t \in R\}.$$

Temos então uma família a um parâmetro de soluções de (1.2) limitadas em R e tendendo a zero quando $t \to \pm\infty$, a saber,

$$\{(p(.-\alpha), \dot{p}(.-\alpha)) : \alpha \in R\}.$$

Consideremos agora a equação perturbada

$$(1.3) \qquad \ddot{x} + g(x) = -\lambda\dot{x} + \mu f(t)$$

onde f é uma função contínua, 2π-periódica, $\rho = (\lambda,\mu)$ é um parâmetro em R^2 e seja o sistema bidimensional associado

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - \lambda y + \mu f(t) \end{cases}$$

Nessas condições, para ρ próximo de $(0,0)$, temos uma solução $\phi_\rho(t)$ de (1.4) que é 2π-periódica de pequena amplitude. Seja $T_\rho : R^2 \to R^2$ o difeomorfismo que leva $p \in R^2$ no valor da solução de (1.4) calculada em $t = 2\pi$. Temos então um ponto fixo $z_\rho = \phi_\rho(0)$ de T_ρ. Sejam W^s_ρ e W^u_ρ respectivamente as variedades globais estável e instável de T_ρ por z_ρ. Dadas vizinhanças V de $\rho = (0,0)$, U de $\bar{\Gamma}$ em R^2, queremos saber se para $\rho \in V$, existem pontos em U comuns às variedades W^s_ρ e W^u_ρ, distintos de z_ρ. Em termos das soluções de (1.4), queremos sa-

ber se para $\rho \in V$, existem trajetórias $\{(t,\psi_\rho(t)):t\in R\}$ de (1.4) com $\psi_\rho(t) \neq \phi_\rho(t)$, $t \in R$ e $\psi_\rho(t) - \phi_\rho(t) \to 0$, quando $t \to \pm\infty$.

Começamos investigando a existência de soluções limitadas em R da equação linear variacional não homogênea

$$(1.5) \qquad \ddot{z} + g'(p(t))z = F(t).$$

Consideremos a equação linear homogênea associada a (1.5),

$$(1.6) \qquad \ddot{z} + g'(p(t))z = 0.$$

Como $\ddot{p}(t) + g(p(t)) = 0$, segue que $\dddot{p}(t) + g'(p(t))\dot{p}(t) = 0$. Portanto $\dot{p}$ é solução de (1.6) e é limitada em R. Seja q a solução de (1.6) satisfazendo $q(0) = -\dfrac{1}{\ddot{p}(0)}$, $\dot{q}(0) = 0$. O valor de $q(0)$ foi escolhido de modo que o valor constante do Wronskiano de $(\dot{p},q)$ seja um, isto é, $\dot{p}(t)\dot{q}(t) - \ddot{p}(t)q(t) \equiv 1$.

Consideremos o sistema linear associado a (1.6) escrito na forma

$$(1.7) \qquad \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + B(t) \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}, \qquad (w=\dot{z})$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & 0 \end{bmatrix}$ e

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g'(p(t))+g'(0) & 0 \end{bmatrix} .$$

Os autovalores de A são $\pm\gamma$, onde $\gamma = [-g'(0)]^{1/2}$. Sejam ζ_1 e ζ_2 os autovetores associados a $-\gamma$, γ respectivamente. Observemos que $\int_0^\infty |B(t)|dt < \infty$. De fato, pelo Teorema do Valor Médio, $|B(t)| = |-g'(p(t))+g'(0)| =$ $= |g''(\theta(t)).p(t)| \leq M|p(t)|$, visto que $\theta(t)$ está entre 0 e $p(t)$ e g'' é contínua. Como $p(t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to \infty$, segue $\int_0^\infty |B(t)|dt < \infty$.

Pelo Teorema IV.2 em [5], o sistema (1.7) tem uma matriz fundamental

$$[\Phi(t),\Psi(t)] \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ w_1(t) & w_2(t) \end{bmatrix}$$

tal que $\Phi(t) \sim e^{-\gamma t}\zeta_1$, $\Psi(t) \sim e^{\gamma t}\zeta_2$, quando $t \to \infty$. O símbolo $f_1(t) \sim f_2(t)$ quando $t \to \infty$ significa que existe $T > 0$ e existem constantes m, M positivas tais que $m \leq |f_1(t)| / |f_2(t)| \leq M$, $t \geq T$. Mostraremos que podemos tomar $\Phi = [\dot{p},\ddot{p}]^T$ e $\Psi = [q,\dot{q}]^T$. De fato, temos que

$$\Phi = a[\dot{p},\ddot{p}]^T + b[q,\dot{q}]^T;$$

$$\Psi = c[\dot{p},\ddot{p}]^T + d[q,\dot{q}]^T$$

onde a,b,c,d são constantes. Agora, como $[\dot{p},\ddot{p}]^T$ é limitada em $[0,\infty)$ e Ψ não é limitada em $[0,\infty)$, segue que $[q,\dot{q}]^T$ não é limitada em $[0,\infty)$. Como Φ é limitada em $[0,\infty)$, segue que $b = 0$. Portanto $[\dot{p},\ddot{p}]^T \sim e^{-\gamma t}\xi_1$, $t \to \infty$. Agora $[\psi - c[\dot{p},\ddot{p}]^T] \sim e^{\gamma t}\xi_2$ quando $t \to \infty$. Logo $[q,\dot{q}]^T \sim e^{\gamma t}\xi_2$, $t \to \infty$.

De modo inteiramente análogo, podemos mostrar que $[\dot{p},\ddot{p}]^T \sim e^{\gamma t}\xi_1$ e $[q,\dot{q}]^T \sim e^{-\gamma t}\xi_2$ quando $t \to -\infty$.

O lema seguinte é uma versão da Alternativa de Fredholm para soluções limitadas em R da equação (1.5). Denotamos por $B(R)$ o espaço de Banach definido por $B(R) = \{F: R \to R;\ F$ contínua e limitada$\}$ munido da norma $\|F\| = \sup_{t\in R} |F(t)|$, $F \in B(R)$.

LEMA 1.1: Se $F \in B(R)$, a equação (1.5) tem solução em $B(R)$ se e somente se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)F(t)dt = 0 \tag{1.8}$$

Se (1.8) estiver satisfeita, então existe uma família a um parâmetro de soluções de (1.5) limitadas em R.

PROVA: Pela Fórmula da Variação das Constantes, to

mando Φ e Ψ definidas acima, temos que a solução geral de (1.5) é dada por

$$(1.9) \qquad z(t) = Aq(t)+B\dot{p}(t)+\int_0^t [\dot{p}(s)q(t)-\dot{p}(t)q(s)]F(s)ds$$

onde A, B são constantes arbitrárias.

Utilizando os fatos provados acima sobre Φ e Ψ, mostra-se que existe constante $k > 0$ tal que

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} &\text{a) } |\dot{p}(t)q(s)| \leq ke^{-\gamma(t-s)}, \quad t, s \geq 0 \\ &\text{b) } |\dot{p}(t)q(s)| \leq ke^{\gamma(t-s)}, \quad t, s \leq 0 \end{aligned}$$

Da relação (1.10-a), verifica-se que $z(t)$ em (1.9) é limitada em $[0,\infty)$ se e somente se $A= -\int_0^\infty \dot{p}(s)F(s)ds$.

De fato, temos que $B\dot{p}(t)$ é limitado em R. Também, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t \dot{p}(t)q(s)F(s)ds\right| &\leq \int_0^t |\dot{p}(t)q(s)|\,|F(s)|ds \\ &\leq \int_0^t ke^{-\gamma(t-s)}\,\|F\|\,ds \\ &\leq k\,\|F\|\,[1 - e^{-\gamma t}]/\gamma \\ &\leq k\,\|F\|/\gamma. \end{aligned}$$

Logo $z(t)$ é limitada em $[0,\infty)$ se e somente se o termo $Aq(t) + q(t)\int_0^t \dot{p}(s)F(s)ds$ é limitado em $[0,\infty)$. Mas,

$$Aq(t) + q(t)\int_0^t \dot{p}(s)F(s)ds = q(t)[A+\int_0^\infty \dot{p}(s)F(s)ds] -$$

$$- \int_t^\infty q(t)\dot{p}(s)F(s)ds.$$ Verifiquemos que $\int_t^\infty q(t)\dot{p}(s)F(s)ds$ é limitado em $[0,\infty)$:

$$\left|\int_t^\infty q(t)\dot{p}(s)F(s)ds\right| \leq \int_t^\infty |\dot{p}(s)q(t)|\,|F(s)|ds$$

$$\leq \int_t^\infty ke^{-\gamma(s-t)}\,\|F\|\,ds$$

$$= k\,\|F\|/\gamma.$$

Como $q(t)$ não é limitada em $[0,\infty)$, segue que $z(t)$ é limitada em $[0,\infty)$ se e somente se $A = -\int_0^\infty \dot{p}(s)F(s)ds$.

De modo análogo, usando (1.10-b), verifica-se que $z(t)$ é limitada em $(-\infty,0]$ se e somente se $A=\int_{-\infty}^0 \dot{p}(s)F(s)ds$.

Portanto $z(t)$ é limitada em R se e somente se $A = -\int_0^\infty \dot{p}(s)F(s)ds = \int_{-\infty}^0 \dot{p}(s)F(s)ds$, isto é, (1.8) está satisfeita. Nesse caso, substituindo um dos valores de A acima em (1.9), obtemos as soluções limitadas em R de (1.5) dadas por:

$$(1.11) \qquad z(t) = B\dot{p}(t)-\dot{p}(t)\int_0^t q(s)F(s)ds+q(t)\int_\infty^t \dot{p}(s)F(s)ds.$$

Observemos que variando B em R obtemos uma família a um parâmetro de soluções de (1.5) limitadas em R. Assim, o lema está demonstrado.

Se x é uma solução limitada em R de (1.3) com $(x(0),\dot{x}(0))$ próximo de Γ, então existem α, a reais univocamente determinados de modo que:

$$(x(0),\dot{x}(0)) = (p(\alpha),\dot{p}(\alpha)) + a(\ddot{p}(\alpha),-\dot{p}(\alpha)),$$

onde $(\ddot{p}(\alpha),-\dot{p}(\alpha))$ é ortogonal ao vetor tangente $(\dot{p}(\alpha),\ddot{p}(\alpha))$ a Γ por $(p(\alpha),\dot{p}(\alpha))$. Portanto, é suficiente considerarmos soluções $x(t)$ de (1.3) da forma

$$x(t) = p(t+\alpha) + z(t+\alpha),$$

onde $(z(\alpha),\dot{z}(\alpha))$ é ortogonal a $(\dot{p}(\alpha),\ddot{p}(\alpha))$ por $(p(\alpha),\dot{p}(\alpha))$. Ou seja, soluções $x(t)$ dadas por

$$(1.12) \qquad x(t-\alpha) = p(t) + z(t),$$

onde $(z(0),\dot{z}(0))$ é ortogonal a $(\dot{p}(0),\ddot{p}(0)) = (0,\ddot{p}(0))$. Isso acontece se e somente se $\dot{z}(0) = 0$.

Fazendo então a mudança de variável (1.12) na equação (1.3) e linearizando obtemos:

$$\ddot{p}(t) + \ddot{z} + g(p(t)+z) = -\lambda(\dot{p}(t)+\dot{z}) + \mu f(t-\alpha),$$

$$\ddot{p}(t) + \ddot{z} + g(p(t)) + g'(p(t))z =$$

$$= -\lambda\dot{p}(t) - \lambda\dot{z} + \mu f(t-\alpha) + E(t,z),$$

onde $E(t,z) = -g(p(t)+z) + g(p(t)) + g'(p(t))z$. Notamos que $E(t,z) = 0(|z|^2)$, quando $|z| \to 0$.

Observando que p é solução de (1.1), nosso problema é encontrar soluções z da seguinte equação:

$$(1.13) \qquad \begin{aligned} &\ddot{z} + g'(p(t))z = F(t,z,\dot{z},\rho,\alpha), \\ &F(.,z,\dot{z},\rho,\alpha) \overset{\text{def}}{=} -\lambda\dot{p} - \lambda\dot{z} + \mu f(.-\alpha) + E(.,z). \end{aligned}$$

Vamos aplicar o Método de Liapunov-Schmidt à equação (1.13). Sejam $X = B^{(2)}(R)$ o espaço de Banach definido por $B^{(2)}(R) = \{F \in B(R);\ F$ é de classe C^2, F' e F'' limitadas em $R\}$ munido da norma $\|F\|_2 = \|F\| + \|F'\| + \|F''\|$, $F \in X$ e $Y = B(R)$ definido anteriormente. Seja $L: X \to Y$ o operador linear dado por $Lz = \ddot{z} + g'(p(.))z$, $N: X \times R^2 \times R \to Y$, o operador definido por $N(z,\rho,\alpha) = -\lambda\dot{p} - \lambda\dot{z} + \mu f(.-\alpha) + E(.,z)$. Estamos então interessados em estudar a equação

$$(1.14) \qquad Lz = N(z,\rho,\alpha).$$

Definindo $P: X \to X$ por

$$(Pz)(t) = \dot{z}(0).\dot{p}(t)/\ddot{p}(0), t \in R,$$

temos que P é projeção. De fato, P é linear, contínua e

$$P^2 z = P(Pz) = P(\dot{z}(0).\dot{p}/\ddot{p}(0)) = \dot{z}(0).\dot{p}/\ddot{p}(0) = Pz,$$

ou seja, $P^2 = P$. Além disso, $X_p = [\dot{p}] = N(L)$.

Definindo $Q: Y \to Y$ por

$$(QF)(t) = \dot{p}(t)\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(s)F(s)ds/\eta, \quad t \in R,$$

onde $\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}^2(s)ds$, temos que Q é uma projeção em Y.

Além disso, pela alternativa de Fredholm, $R(L) = \{F \in Y : QF = 0\} = Y_{I-Q}$. Nessas condições, pelo que vimos na descrição do Método de Liapunov-Schmidt o operador $L|X_{I-P}$ é um isomorfismo entre X_{I-P} e $R(L)$. Portanto, dada $F \in R(L)$, isto é, $F \in Y$ com $QF = 0$, existe uma única solução z da equação (1.5) com $Pz = 0$, ou seja, uma solução z de (1.5) com $\dot{z}(0) = 0$. Analisando a expressão (1.11), vemos que essa solução é a obtida tomando-se $B = 0$, a qual denotaremos por z_F. Logo, o operador linear inverso de $L|X_{I-P}$ é $K: R(L) \to X_{I-P}$ definido por $K(F) = z_F$.

Temos que o operador $L|X_{I-P}$ é contínuo, pois

$$\begin{aligned}\|Lz\| &= \|\ddot{z} + g'(p(.))z\| \\ &\leq \|\ddot{z}\| + \|g'(p(.))\| \cdot \|z\| \\ &\leq (1 + \|g'(p(.))\|)\|z\|_2 \\ &= M\|z\|_2 , \quad \forall z \in (I-P)X.\end{aligned}$$

Também, $(I-P)X$ é subespaço fechado de X, pois $(I-P)X = P^{-1}(0)$, onde P é contínua. Do Corolário (0.2) segue que K é um operador linear contínuo.

Pelo Método de Liapunov-Schmidt a equação (1.14) é então equivalente ao sistema:

$$(1.15) \quad \begin{cases} a) \ z = K(I-Q)F(.,z,\dot{z},\rho,\alpha) \\ b) \ QF(.,z,\dot{z},\rho,\alpha) = 0. \end{cases}$$

LEMA 1.2: Existe $\delta > 0$ tal que se $|\rho| < \delta$, $\alpha \in R$, então a equação (1.15.a) tem uma única solução $z^* = z^*(\rho,\alpha)$ de classe C^2 em ρ,α, satisfazendo $z^*(0,\alpha) = 0$, $\dot{z}^*(0,\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in R$.

PROVA: Substituindo em (1.15.a) a expressão dada em (1.13) e definindo $J(z,\dot{z},\rho,\alpha) = z - K(I-Q)[-\lambda\dot{p} - \lambda\dot{z} + \mu f(.-\alpha) + E(.,z)]$, temos que $J(0,0,0,\alpha)=0$; $D_zJ(0,0,0,\alpha) = I$, onde I é o operador identidade em X_{I-P}.

Pelo Teorema das Funções Implícitas, existem $\delta>0$

e uma única função $z^*(\rho,\alpha)$ para $|\rho|<\delta$, $\alpha \in R$, tal que $z^*(0,\alpha) = 0$, $\dot{z}^*(0,\alpha) = 0$ e $J(z^*(\rho,\alpha), \dot{z}^*(\rho,\alpha),\rho,\alpha) = 0$, isto é, $z^*(\rho,\alpha) = K(I-Q)[-\lambda\dot{p} - \lambda\dot{z}^*(\rho,\alpha) + \mu f(.-\alpha) + E(.,z^*(\rho,\alpha))]$. Claramente $z^*(\rho,\alpha)$ é de classe C^2 em ρ. Para ver que é de classe C^2 em α, observar que $z^*(\rho,\alpha)$ é a solução limitada em R da equação.

$$\ddot{z}(t)+g'(p(t))z(t) = (I-Q)[-\lambda\dot{z}+\mu f(.-\alpha)+E(.,z)](t)$$

com $\dot{z}^*(\rho,\alpha)(0) = 0$, visto que $Q\dot{p} = \dot{p}$. Então $z^*(\rho,\alpha)(.+\alpha) \overset{def}{=} w^*(\rho,\alpha)$ é a solução da equação

$$\ddot{w}(t)+g'(p(t+\alpha))w(t) = (I-Q_\alpha)[-\lambda\dot{w}+\mu f+E(.+\alpha,w)](t),$$

tal que $\dot{w}^*(-\alpha) = 0$, onde $Q_\alpha: Y \to Y$ é a projeção definida por

$$(Q_\alpha f)(t) = \dot{p}(t+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\dot{p}(s+\alpha)f(s)ds/\eta \ ; \quad t \in R,$$

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{p}^2(s+\alpha)ds.$$

Considerando $L_\alpha: X \to Y$ o operador linear dado por $L_\alpha w = \ddot{w} + g'(p(.+\alpha))w$, observamos, como foi visto anteriormente para L, que $N(L_\alpha) = [\dot{p}(.+\alpha)]$, $R(L_\alpha) = \{F \in Y: Q_\alpha F = 0\}$. Logo podemos definir o operador

linear K_α, inverso de $L_\alpha|X_{I-P_\alpha}$, $K_\alpha : R(L_\alpha) \to X_{I-P_\alpha}$, onde $P_\alpha : X \to X$ é a projeção definida por

$$(P_\alpha \phi)(t) = \dot{\phi}(0).\dot{p}(t+\alpha)/\dot{p}(\alpha); \quad t \in R.$$

Concluimos assim que

$$w^*(\rho.\alpha) = K_\alpha(I-Q_\alpha)[-\lambda\dot{w}^*(\rho,\alpha)+\mu f+E(.+\alpha,w^*(\rho,\alpha))],$$

ou seja, $w^*(\rho,\alpha)$ é solução implícita da equação $w = K_\alpha(I-Q_\alpha)[-\lambda\dot{w} + \mu f + E(. +\alpha,w)]$.

Pelo Teorema de Diferenciabilidade das soluções em relação às condições iniciais e parâmetros, segue que K_α é de classe C^2 em α.

Como $(I-Q_\alpha)[-\lambda\dot{w} + \mu f + E(. +\alpha, w)]$ é de classe C^2 em α, conclui-se que $w^*(\rho,\alpha)$ é de classe C^2 em α. Portanto $z^*(\rho,\alpha)$ é de classeC^2 em α. O lema está demonstrado.

Então o problema de encontrar soluções limitadas em R para a equação (1.14) fica reduzido a encontrar soluções (ρ,α) da equação

$$Q[-\lambda\dot{p}-\lambda\dot{z}^*(\rho,\alpha)+\mu f(.-\alpha) + E(.,z^*(\rho,\alpha))] = 0$$

Assim, usando a definição de Q, provamos o seguinte teorema:

TEOREMA 1.3: Suponhamos g e f satisfazendo as condições anteriores. Então existem $\delta > 0$, $\zeta > 0$, tais que, se $|\rho| < \delta$, (1.3) tem uma única solução 2π-periódica $\phi_\rho(.)$ com $\|\phi_\rho(.)\| < \zeta$, $\phi_0(t) \equiv 0$. Além disso, para $|\rho| < \delta$, existe uma solução $x_\rho(.)$ de (1.3) distinta de $\phi_\rho(.)$ com $(x_\rho(t), \dot{x}_\rho(t))$ próximo de Γ, para $t \in R$, e $|x_\rho(t) - \phi_\rho(t)| \to 0$ quando $t \to \pm\infty$, se e somente se $x_\rho(.) = p(. + \alpha) + z^*(\rho,\alpha)(. + \alpha)$; $x_0(.) = p(. + \alpha)$, onde $z^*(\rho,\alpha)$ é solução de (1.15-a) e (ρ,α) satisfaz a equação de bifurcação

$$G(\rho,\alpha) = 0,$$

$$G(\rho,\alpha) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)F(t,z^*(\rho,\alpha)(t),\dot{z}^*(\rho,\alpha)(t),\rho,\alpha)dt/\eta.$$

Passemos agora a estudar a equação acima.
Da definição de F em (1.13), temos

$$G(\rho,\alpha) = -\lambda + \frac{\mu}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}f(.-\alpha) + G_0(\rho,\alpha) = 0, \quad \text{onde}$$

$$G_0(\rho,\alpha) \overset{\text{def}}{=} [-\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\dot{z}^* - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\, g(p+z^*) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\, g(p) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\, g'(p)z^*]/\eta.$$

Observemos que $G_0(\rho,\alpha) = O(|\rho|^2)$, quando $|\rho| \to 0$.

De fato, $G_0(0,\alpha) = [-\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\, g(p+z^*(0,\alpha)) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\, g(p) +$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\, g'(p) z^*(0,\alpha)]/\eta = 0,$$

$$\partial G_0(0,\alpha)/\partial\lambda = [-\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\dot{z}^*(0,\alpha) - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p} g'(p+z^*(0,\alpha))\, \partial z^*(0,\alpha)/\partial\lambda +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p} g'(p)\, \partial z^*(0,\alpha)/\partial\lambda]/\eta = 0.$$

Analogamente $\partial G_0(0,\alpha)/\partial\mu = 0$.

Observemos agora que as soluções de $G(\lambda,\mu,\alpha) = 0$ com $\lambda \neq 0$ devem ter $\mu \neq 0$. De fato, se $G(\lambda,0,\alpha) = 0$ então $\lambda = G_0(\lambda,0,\alpha) = 0(|\lambda|^2)$. Portanto, numa vizinhança de $\lambda = 0$ temos $|\lambda| \leq M|\lambda|^2$, que implica $\lambda = 0$.

Isso justifica dividir $G(\rho,\alpha)$ por μ. Fazendo em seguida $\beta = \lambda/\mu$, $H(\beta,\mu,\alpha) \overset{def}{=} G(\beta\mu,\mu,\alpha)/\mu$, $h(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p} f(.-\alpha)/\eta$, obtemos

$$H(\beta,\mu,\alpha) = -\beta + h(\alpha) + G_1(\beta,\mu,\alpha) = 0,$$

onde G_1 é definido por $G_1(\beta,\mu,\alpha) = G_0(\beta\mu,\mu,\alpha)/\mu$, se $\mu \neq 0$ e $G_1(\beta,0,\alpha) = 0$.

Os próximos lemas estabelecem condições para a existência de soluções de $H(\beta,\mu,\alpha) = 0$.

LEMA 1.4: Se $\beta_0 = h(\alpha_0), h'(\alpha_0) \neq 0$, então existem $\Delta > 0$ e função $\alpha^*(\beta,\mu)$ com $\alpha^*(\beta_0,0) = \alpha_0$, tal que

$H(\beta,\mu,\alpha^*(\beta,\mu)) = 0$ para $|\beta-\beta_0| < \Delta$, $|\mu| < \Delta$.

PROVA: Da definição de H temos que:

$$H(\beta_0,0,\alpha_0) = -\beta_0 + h(\alpha_0) + G_1(\beta_0,0,\alpha_0) = 0,$$

$$H_\alpha(\beta_0,0,\alpha_0) = h'(\alpha_0) + \partial G_1(\beta_0,0,\alpha_0)/\partial\alpha = h'(\alpha_0)\neq 0.$$

O resultado segue do Teorema das Funções implícitas.

LEMA 1.5: Se $\beta_0 = h(\alpha_0)$, $h'(\alpha_0) = 0$, $h''(\alpha_0) \neq 0$, então existem $\Delta > 0$ e função $\beta^*(\mu)$ definida para $|\mu| < \Delta$, com $\beta^*(0) = \beta_0$ tal que a equação $H(\beta,\mu,\alpha) = 0$ tem duas soluções próximas de $(\beta_0,0,\alpha_0)$ de um lado da curva $\beta = \beta^*(\mu)$, e nenhuma solução do outro lado.

PROVA: De acordo com as hipóteses, aplicando o Teorema das Funções Implícitas à função H_α no ponto $(\beta_0,0,\alpha_0)$, obtemos $\Delta > 0$ e uma única função $\alpha^*(\beta,\mu)$ com $\alpha^*(\beta_0,0) = \alpha_0$ e $H_\alpha(\beta,\mu,\alpha^*(\beta,\mu)) = 0$ para $|\beta-\beta_0| < \Delta$, $|\mu| < \Delta$.

Definamos $M(\beta,\mu) = H(\beta,\mu,\alpha^*(\beta,\mu))$.

O valor $M(\beta,\mu)$ é um máximo ou mínimo de $H(\beta,\mu,\alpha)$ com relação a α para β,μ fixados. De fato, como $h''(\alpha_0) \neq 0$ e $\partial^2 G_1/\partial\alpha^2$ é contínua com $\partial^2 G_1(\beta_0,0,\alpha_0)/\partial\alpha^2=0$, Δ pode ser tomado de modo que $H_\alpha(\beta,\mu,\alpha^*(\beta,\mu)) = 0$ e $H_{\alpha\alpha}(\beta,\mu,\alpha^*(\beta,\mu) \neq 0$ para $|\beta-\beta_0| < \Delta$, $|\mu| < \Delta$.

Agora, $M(\beta_0,0) = H(\beta_0,0,\alpha_0) = -\beta_0 + h(\alpha_0) + G_1(\beta_0,0,\alpha_0)=0$, $M_\beta(\beta_0,0) = -1 + h'(\alpha_0)\alpha^*_\beta(\beta_0,0) + \partial G_1(\beta_0,0,\alpha_0)/\partial\beta +$ $+ \partial G_1(\beta_0,0,\alpha_0)/\partial\alpha \,.\, \alpha^*_\beta(\beta_0,0) = -1$. Pelo Teorema das Funções Implícitas, existem $\Delta > 0$ e função $\beta^*(\mu)$ definida para $|\mu| < \Delta$, $\beta^*(0) = \beta_0$ tal que $M(\beta^*(\mu),\mu) = 0$.

Para fixar as idéias, suponhamos $h''(\alpha_0) > 0$, isto é, $M(\beta_0,0)$ é um valor mínimo de $H(\beta_0,0,\alpha)$.

Fixando (β,μ) com $|\beta - \beta_0| < \Delta$, $|\mu| < \Delta$ do lado da curva $\beta = \beta^*(\mu)$ em que o valor mínimo $M(\beta,\mu)$ de $H(\beta,\mu,\alpha)$ é negativo, segue que existem dois valores de α próximos de α_0 para os quais $H(\beta,\mu,\alpha) = 0$. Portanto, temos duas soluções de $H(\beta,\mu,\alpha) = 0$ próximas de $(\beta_0,0,\alpha_0)$.

Quando $M(\beta,\mu) > 0$, não há solução de $H(\beta,\mu,\alpha)=0$ próxima de $(\beta_0,0,\alpha_0)$. Conclusões análogas são tiradas no caso em que $h''(\alpha_0) < 0$.

Logo, existem duas soluções de $H(\beta,\mu,\alpha) = 0$ próximas de $(\beta_0,0,\alpha_0)$ quando (β,μ) está num lado da curva $\beta = \beta^*(\mu)$, e nenhuma solução quando (β,μ) está no outro lado. O lema está demonstrado.

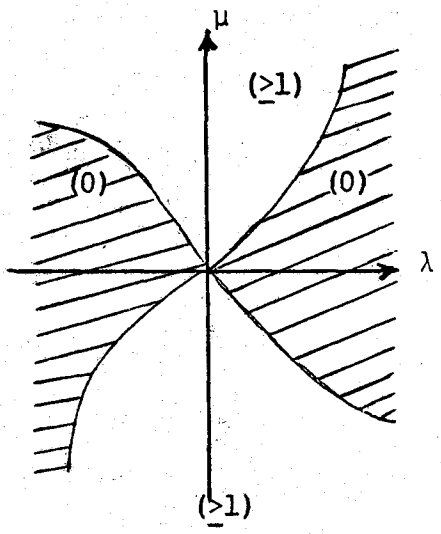
Em termos de coordenadas originais λ, μ, o lema anterior diz que existe uma vizinhança V de $(\lambda,\mu) = (0,0)$ tal que a equação $G(\lambda,\mu,\alpha) = 0$ tem duas soluções (λ,μ,α) se $(\lambda,\mu) \in V$ está num lado da curva $\lambda = \beta^*(\mu)\mu$, α próximo de α_0, λ próximo de $\beta_0\mu$, e nenhuma solução com α próximo de α_0 se (λ,μ) está do outro lado. Observamos que a curva $\lambda = \beta^*(\mu)\mu$ é tangente à reta $\lambda = \beta_0\mu$ em

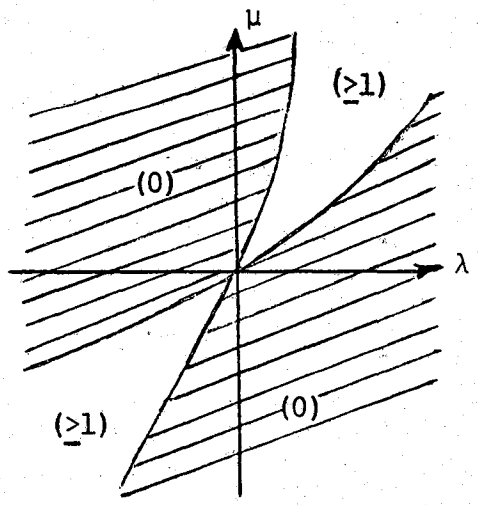
$(\lambda,\mu) = (0,0)$.

No que segue admitiremos a seguinte hipótese:

(H) $h''(\alpha) \neq 0$ sempre que $h'(\alpha) = 0$, h assume o valor mínimo em α_m, o valor máximo em α_M, $h(\alpha_m) < h(\alpha_M)$.

TEOREMA 1.6: Suponhamos satisfeita a hipótese (H). Então existem vizinhanças U de Γ, V de $(\lambda,\mu) = (0,0)$ e duas curvas diferenciáveis C_m, $C_M \subset V$, tangentes respectivamente às retas $\lambda = h(\alpha_m)\mu$, $\lambda = h(\alpha_M)\mu$ no ponto $(\lambda,\mu) = (0,0)$, de modo que C_m e C_M definem dois setores em V, tais que para (λ,μ) pertencente ao setor interceptando o eixo $\mu = 0$, a equação (1.3) não possui solução distinta de $\phi_\rho(.)$ com trajetória contida em $R \times U$, e tem pelo menos uma se (λ,μ) pertence ao outro setor.





PROVA: Pelo Teorema 1.3, as soluções desejadas são da forma $x_\rho(.) = p(.+\alpha) + z^*(\rho,\alpha)(.+\alpha)$ onde $\beta = \lambda/\mu$ e α são soluções da equação

$$(1.17) \qquad H(\beta,\mu,\alpha) = -\beta + h(\alpha) + G_1(\beta,\mu,\alpha) = 0,$$

para β, α em R, μ próximo de zero. Se $\beta \neq h(\alpha)$, para α em R então a equação não tem solução com μ próximo de zero, pois G_1 é contínua e $G_1(\beta,0,\alpha) = 0$.

Se $\beta_0 = h(\alpha_0)$, com $\alpha_0 = \alpha_m$ ou α_M, então $h'(\alpha_0) = 0$ e $h''(\alpha_0) \neq 0$, pela hipótese (H). Segue do Lema 1.5 que (1.17) tem duas soluções próximas de $(\beta_0,0,\alpha_0)$ se (β,μ) está num lado da curva $\beta = \beta^*(\mu)$, $\beta^*(0) = \beta_0$, e nenhuma solução próxima de $(\beta_0,0,\alpha_0)$ se (β,μ) está do outro lado de $\beta = \beta^*(\mu)$. A curva $\beta = \beta^*(\mu)$, quando $\alpha_0=\alpha_m$ define C_m por $\lambda = \beta^*(\mu)\mu$, que é tangente à reta $\lambda = h(\alpha_m)\mu$ em $(\lambda,\mu) = (0,0)$. Quando $\alpha_0 = \alpha_M$, a curva $\beta = \beta^*(\mu)$ define C_M por $\lambda = \beta^*(\mu)\mu$, que é tangente à reta $\lambda = h(\alpha_M)\mu$ em $(\lambda,\mu) = (0,0)$.

Se $\beta_0 = h(\alpha_0)$ com $h'(\alpha_0) \neq 0$, segue do Lema 1.4 que existe uma solução $(\beta,\mu,\alpha^*(\beta,\mu))$ de (1.17) próxima de $(\beta_0,0,\alpha_0)$. Observar que, nesse caso, como $\lambda = h(\alpha_0)\mu$ e $h(\alpha_m) < h(\alpha_0) < h(\alpha_M)$, então (λ,μ) não pertence ao setor que intercepta o eixo λ. O teorema está provado.

As curvas C_m e C_M serão chamadas *curvas de bifurcação* para a órbita homoclínica Γ.

CAPÍTULO II

Vamos considerar neste capítulo o caso em que a função g em (1.1) é ímpar e que (1.1) tem um par de órbitas homoclínicas Γ^+, Γ^-, necessariamente simétricas em relação ao eixo Oy.

Sejam $p(t)$ a única solução de (1.1) satisfazendo $p(0) > 0$, $\dot{p}(0) = 0$, $p(t) \to 0$ quando $t \to \pm\infty$, $q(t)$ a única solução de (1.1) com $q(0) = -p(0)$, $\dot{q}(0) = 0$, $q(t) \to 0$ quando $t \to \pm\infty$ e

$$\Gamma^+ = \{(p(t),\dot{p}(t)) : t \in R\},$$

$$\Gamma^- = \{(q(t),\dot{q}(t)) : t \in R\}.$$

Como g é ímpar, as soluções de (1.1) definidas acima satisfazem $q(t) \equiv -p(t)$. De fato, $q(t)$ é solução de (1.1) satisfazendo $q(0) = -p(0)$, $\dot{q}(0) = 0$. Definindo $\phi(t) = -p(t)$, temos que ϕ é solução de (1.1) com $\phi(0) = -p(0)$, $\dot{\phi}(0) = -\dot{p}(0) = 0$. Da unicidade do problema do valor inicial segue que $q(t) \equiv \phi(t)$.

Consideremos agora a equação perturbada

$$\ddot{x} + g(x) = -\lambda\dot{x} + \mu f(t) \tag{2.1}$$

onde f é contínua em R, 2π-periódica, e f é harmônica

ímpar, isto é, $f(t+\pi) = -f(t)$.

Sejam $F^+(.,z,\dot{z},\rho,\alpha) = -\lambda\dot{p} - \lambda\dot{z} + \mu f(.-\alpha)+E(.,z)$, $E(.,z) = -g(p(.)+z) + g(p(.)) + g'(p(.))z$, e Q a projeção $(QF)(t) = \dot{p}(t)\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(s)F(s)ds/\eta$, $\eta = \int_{\infty}^{\infty} \dot{p}^2(s)ds$ definida em $B(R)$. Definimos $F^-(.,z,\dot{z},\rho,\alpha)$ de modo análogo substituindo p por $q = -p$. Nosso objetivo aqui é mostrar que as curvas de bifurcação para a órbita Γ^+ coincidem com as curvas de bifurcação para a órbita Γ^-.

LEMA 2.1: Suponhamos que g e f satisfazem as condições anteriores e que $z_+^*(\rho,\alpha)$, $z_-^*(\rho,\alpha)$ são respectivamente as soluções das equações
$z = K(I-Q)F^+(.,z,\dot{z},\rho,\alpha)$, $z = K(I-Q)F^-(.,z,\dot{z},\rho,\alpha)$. Então $z_+^*(\rho,\alpha+\pi) = -z_-^*(\rho,\alpha)$.

PROVA: Do que vimos no Capítulo I, $z_+^*(\rho,\alpha+\pi)$ é a única solução limitada em R da equação $\ddot{z} + g'(p(t))z = (I-Q)F^+(t,z,\dot{z},\rho,\alpha+\pi)$ satisfazendo $\dot{z}_+^*(\rho,\alpha+\pi)(0) = 0$. Analogamente $z_-^*(\rho,\alpha)$ é a única solução limitada em R da equação $\ddot{z} + g'(p(t))z = (I-Q)F^-(t,z,\dot{z},\rho,\alpha)$ tal que $\dot{z}_-^*(\rho,\alpha)(0) = 0$.

Das expressões de F^+ e F^-, temos que $F^+(t,z,\dot{z},\rho,\alpha+\pi) = -F^-(t,-z,-\dot{z},\rho,\alpha)$. Então $z_+^*(\rho,\alpha+\pi)$ é solução da equação $\ddot{z} + g'(p(t))z = -(I-Q)F^-(t,-z,-\dot{z},\rho,\alpha)$ e portanto $-z_+^*(\rho,\alpha+\pi)$ é solução da equação

$\ddot{z} + g'(p(t))z = (I-Q)F^-(t,z,\dot{z},\rho,\alpha)$ tal que $-\dot{z}_+^*(\rho,\alpha+\pi)(0)=0$.

Da unicidade segue que $z_+^*(\rho,\alpha+\pi) = -z_-^*(\rho,\alpha)$. O lema está demonstrado.

Seja $G^+(\rho,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}F^+(.,z_+^*(\rho,\alpha),\dot{z}_+^*(\rho,\alpha),\rho,\alpha)/\eta$, e G^- definida de modo análogo substituindo p por $q = -p$ e z_+^* por z_-^*.

LEMA 2.2: Se as hipóteses do Lema 2.1 estão satisfeitas, então $G^+(\lambda,\mu,\alpha+\pi) = G^-(\lambda,\mu,\alpha)$.

PROVA: A expressão de $G^+(\lambda,\mu,\alpha)$ é dada por

$$G^+(\lambda,\mu,\alpha) = -\lambda + \frac{1}{\eta}\,[\mu + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}f(.\ -\alpha) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\ \dot{z}_+^*(\rho,\alpha) -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}g(p+z_+^*(\rho,\alpha)) + \int_{\infty}^{\infty} \dot{p}\ g(p) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\ g'(p)z_+^*(\rho,\alpha)].$$

Logo $G^+(\lambda,\mu,\alpha+\pi) = -\lambda + \frac{1}{\eta}[\mu\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}f(.-(\alpha+\pi) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}\dot{z}_+^*(\rho,\alpha+\pi) -$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}g(p+z_+^*(\rho,\alpha+\pi) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}g(p) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}g'(p)z_+^*(\rho,\alpha+\pi)],$$

$$G^+(\lambda,\mu,\alpha+\pi) = -\lambda + \frac{1}{\eta}\,[\ \mu \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}f(.-\alpha) - \lambda\int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}\ \dot{z}_-^*(\rho,\alpha) -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}g(q+z_-^*(\rho,\alpha)) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}\ g(q) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}g'(q)z_-^*(\rho,\alpha)] = G^-(\lambda,\mu,\alpha).$$

Portanto $G^+(\lambda,\mu,\alpha+\pi) = G^-(\lambda,\mu,\alpha)$.

Como consequência dos lemas temos o seguinte

COROLÁRIO 2.3: Se g e f satisfazem as condições mencionadas anteriormente, então as curvas de bifurcação para a órbita homoclínica Γ^+ coincidem com as curvas para a órbita homoclínica Γ^-.

PROVA: É só observar que se (λ,μ) pertence ao setor onde a equação (2.1) tem solução com trajetória contida em $R \times W$ onde W é uma vizinhança de Γ^-, existe $\alpha \varepsilon R$ tal que $G^-(\lambda,\mu,\alpha) = 0$. Isso é equivalente a $G^+(\lambda,\mu,\alpha+\pi)=0$, ou seja, (λ,μ) pertence ao setor onde a equação (2.1) tem solução com trajetória contida em $R \times U$ onde U é uma vizinhança de Γ^+.

UM EXEMPLO

Veremos agora um exemplo onde as hipóteses consideradas estão satisfeitas. Seja a equação

$$\ddot{x} - x + 2x^3 = -\lambda\dot{x} + \mu \cos t \tag{2.2}$$

e a equação não perturbada associada,

(2.3) $\ddot{x} - x + 2x^3 = 0.$

O sistema bidimensional associado a (2.3) é conservativo e tem como primeira integral $E(x,y) = y^2 - x^2 + x^4$. Tal sistema tem um par de órbitas homoclínicas simétricas contidas na curva de nível $E(x,y) = E(0,0) = 0$ de E. Como $E(1,0)=0$, tomamos $p(t)$ a solução de (2.3) tal que $p(0) = 1$, $\dot{p}(0) = 0$. A função p é par, $\dot{p}$ é ímpar, $p(t) > 0$ e p é decrescente em $[0,\infty)$. Como $E(p(t), \dot{p}(t)) = 0$, segue que $dp/dt = -p(1-p^2)^{1/2}$ para $t \geq 0$. Integrando, obtemos $p(t) = 2[e^{-t}+e^{t}]^{-1}$, $t \in R$.

A expressão de $G(\rho\ \alpha)$ vista no capítulo I é dada por $G(\rho,\alpha) = -\lambda + \mu h(\alpha) + G_0(\rho,\alpha) = 0$, onde $h(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t) f(t-\alpha)\,dt/\eta$. De (2.2),

$$\eta h(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)\cos(t-\alpha)\,dt = \cos\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)\cos t\,dt +$$

$$+ \operatorname{sen}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)\operatorname{sen} t\,dt.$$

Como $\dot{p}(t)\cos t$ é uma função ímpar, segue que a primeira integral vale zero. Calculando a outra integral, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)\operatorname{sen} t\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2(e^{-t}-e^{t}) \,.\, (e^{-t} + e^{t})^{-2}\operatorname{sen} t\,dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{senh} t \,.\, \operatorname{sen} t/\cosh^2 t)\,dt.$$

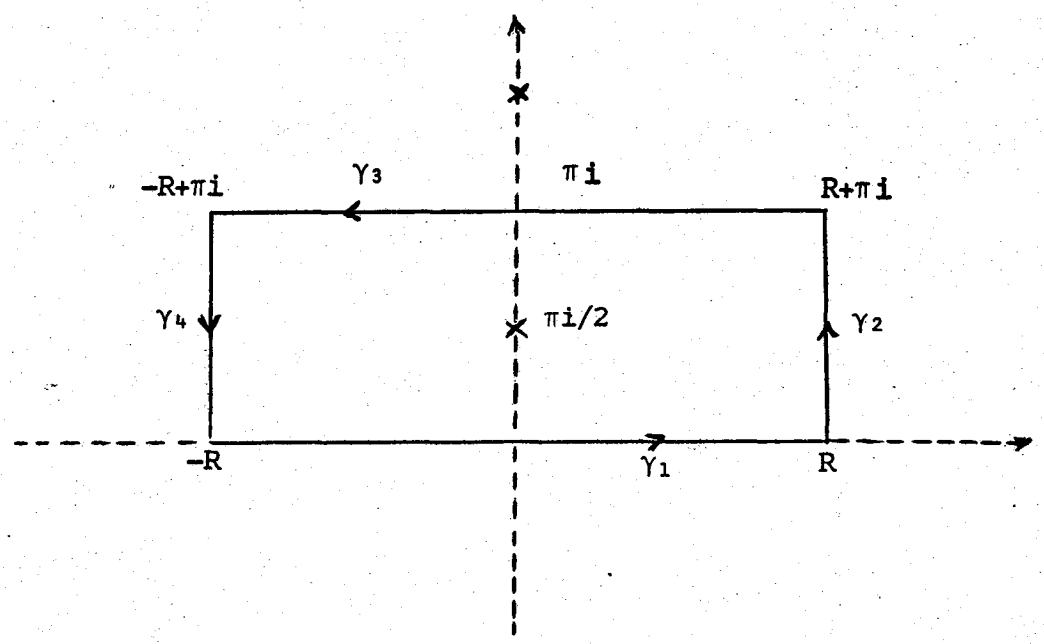
Fazendo uma integração por partes, resulta que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)\,\mathrm{sen}\,t\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} (\cos t/\cosh t)\,dt =$$

$$= -\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{iz}/\cosh z)\,dz.$$

O cálculo agora segue o Método dos Resíduos. Observemos que a função $e^{iz}/\cosh z$ tem um número infinito de singularidades que ocorrem nos pontos $z = z_n = (n + \frac{1}{2})\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Consideremos o seguinte contorno retangular Γ_R dado na figura abaixo, $\Gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.



Analisemos como se comportam as integrais sobre γ_2, γ_3 e γ_4 para R grande:

Para γ_2: $z = R + is$, $0 \leq s \leq \pi$, temos:

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{ie^{i(R+is)}}{\cosh(R+is)}\, ds \right|$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{2ie^{iR}e^{-s}}{e^{R+is}+e^{-R-is}}\, ds \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{2}{|e^{R+is}+e^{-R-is}|}\, ds$$

Observando que $|e^{R+is} + e^{-R-is}| \geq (e^{2R} - 1)/e^{R}$, obtemos

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{2e^{R}}{e^{2R}-1}\, ds$$

$$= \frac{2\pi e^{R}}{e^{2R}-1},$$

a qual tende a zero quando $R \to \infty$.

Analogamente, em γ_4: $z = -R + i(\pi-s)$, $0 \leq s \leq \pi$, temos:

$$\left| \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz \right| = \left| - \int_0^{\pi} \frac{ie^{i[-R+i(\pi-s)]}}{\cosh(-R+i(\pi-s))}\, ds \right|$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{2ie^{-iR}\, e^{-(\pi-s)}}{e^{-R+i(\pi-s)}+e^{R-i(\pi-s)}}\, ds \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{2}{|e^{-R+i(\pi-s)}+e^{R-i(\pi-s)}|}\, ds$$

Através da desiguadade $|e^{-R+i(\pi-s)} + e^{R-i(\pi-s)}| \geq |1-e^{2R}|/e^{R}$,

segue que

$$\left| \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{2e^{R}}{|1-e^{2R}|}\, ds$$

$$= \frac{2\pi e^{R}}{|1-e^{2R}|},$$

que tende a zero quando $R \to \infty$.

Para a integral sobre o segmento horizontal $\gamma_3 : z = -s + \pi i$, $-R \leq s \leq R$, obtemos que

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{i(-s+\pi i)}}{\cosh(-s+\pi i)}\, ds$$

Fazendo a mudança de variável $t = -s$, $dt = -ds$, a integral acima fica na forma

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{i(t+\pi i)}}{\cosh(t+\pi i)}\, dt$$

$$= e^{-\pi} \int_{R}^{-R} \frac{2e^{it}}{e^{t+\pi i}+e^{-t-\pi i}}\, dt$$

$$= e^{-\pi} \int_{R}^{-R} \frac{2e^{it}}{-e^{t}-e^{-t}}\, dt$$

$$= e^{-\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{\cosh t}\, dt$$

$$= e^{-\pi} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz.$$

Logo,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz = (1+e^{-\pi}) \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz + \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz.$$

Calculando o limite quando $R \to \infty$, obtemos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz = (1+e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz.$$

Como o resíduo da função $e^{iz}/\cosh z$ em $\pi i/2$ é $-ie^{-\pi/2}$, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz = 2\pi i(-ie^{-\pi/2})/(1+e^{-\pi})$$

$$= 2\pi e^{-\pi/2}/(1+e^{-\pi})$$

$$= 2\pi e^{\pi/2}/(e^{\pi}+1)$$

$$\overset{\text{def}}{=} A$$

Logo, $\int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}(t)\,\text{sen}\,t\,dt = -A < 0$, $\eta h(\alpha) = -A \text{ sen } \alpha$.

Calculemos o valor de η:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}^2(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{senh}^2 s/\cosh^4 s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [(\cosh^2 s-1)/\cosh^4 s]\, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech}^2 s - \operatorname{sech}^4 s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tgh}^2 s \operatorname{sech}^2 s \, ds.$$

Integrando por substituição obtemos $\eta = 2/3$.

Portanto, $h(\alpha) = -3A\operatorname{sen}\alpha/2$.

Deste modo, $G(\rho,\alpha)$ tem a seguinte expressão:

$$G(\rho,\alpha) = -\lambda - \mu \frac{3}{2} A \operatorname{sen}\alpha + G_0(\rho,\alpha) = 0, \quad G_0(\rho,\alpha) = 0(|\rho|^2),$$

quando $|\rho| \to 0$.

Temos assim que as tangentes às curvas de bifurcação são dadas por $\lambda = \pm 3A\mu/2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] - ANDRONOV, A.A.; CHAIKIN, C.E. - *Theory of oscillations.* Princeton, Princeton University Press, 1949.

[2] - CHILLINGWORTH, D.R.J. - *Differential topology with a view to applications.* London, Pitman, 1976. (Research Notes in Mathematics, 9).

[3] - CHOW, S.N.; HALE, J.K. - *Methods of bifurcation theory.* New York, Springer Verlag, 1981.

[4] - _____; _____; MALLET-Paret, J. - *An example of bifurcation to homoclinic orbits.* *J. Diff. Eq.*, 37(3): 351-373, 1980.

[5] - COPPEL, W.A. - *Stability and asymptotic behavior of differential equations.* Boston, D.C. Heath,1965.

[6] - HALE, J.K. - *Ordinary differential equations.* 2 ed. New York, Krieger, 1980.

[7] - IRWIN, M.C. - *Smooth dynamical systems.* London, Academic Press, 1980.

[8] - NIREMBERG, L. - *Functional analysis.* New York, New York University, 1975.

[9] - _____ - *Topics in nonlinear analysis.* New York, New York University, 1974.