UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Desigualdades com peso para transformações integrais do tipo de Fourier

Bruna Zampieri Centurion

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Bruna Zampieri Centurion

Desigualdades com peso para transformações integrais do tipo de Fourier

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
Maio de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C397d

Centurion, Bruna Zampieri
Desigualdades com peso para transformações integrais do tipo de Fourier / Bruna Zampieri Centurion; orientadora Thaís Jordão. -- São Carlos, 2024.
60 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Desigualdades com peso. 2. Transformação integral. 3. Desigualdade de Pitt. 4. Transformada de Fourier. 5. Transformação de Hankel. I. Jordão, Thaís, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Bruna Zampieri Centurion

Weighted norm inequalities for integral transforms of Fourier-type

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
May 2024

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados a todos aqueles que estiveram comigo durante minha jornada no mestrado. Agradeço aos meus pais por todo o suporte e ajuda que me deram antes e durante essa nova experiência. Agradeço ao meu marido por todo o carinho, apoio e compreensão que sempre me ofereceu, mesmo com a distância. Agradeço às minhas pets (a cachorra e a tartaruga de pelúcia) pelas oportunidades de momentos de descontração. Agradeço a meus companheiros de orientação pelo apoio mútuo durante as dificuldades acadêmicas.

Agradeço à diretoria do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação por ter concedido a infraestrutura necessária para a realização desse trabalho. Agradeço também à minha orientadora pela paciência, suporte e conselhos durante toda a execução desse projeto.

Esse projeto foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2021/13082-1.

"Já que é preciso aceitar a vida, que seja então corajosamente."
(Lygia Fagundes Telles)

RESUMO

CENTURION, B. Z. **Desigualdades com peso para transformações integrais do tipo de Fourier**. 2024. 60 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Neste trabalho, apresentamos o conceito de F-transformação ou transformação integral do tipo de Fourier e exploramos condições necessárias e suficientes para a desigualdade de Pitt. Os resultados são obtidos como consequência das desigualdades do tipo Hausdorff-Young e de resultados do tipo Calderón para as F-transformações. Como aplicação dos resultados, recuperamos a celebrada desigualdade de Pitt para a transformação de Hankel e para a transformada de Fourier de funções radiais.

Palavras-chave: Desigualdades com peso, Transformação integral, Desigualdade de Pitt, Transformada de Fourier, Transformação de Hankel.

ABSTRACT

CENTURION, B. Z. **Weighted norm inequalities for integral transforms of Fourier-type**. 2024. 60 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

In this work, we present the concept of F-transform or integral transform of Fourier-type and explore necessary and sufficient conditions for Pitt's inequality. The results are obtained as a consequence of Hausdorff-Young type inequalities and Calderón type results for F-transforms. As an application of the results, we recover the celebrated Pitt's inequality for the Hankel transform and for the Fourier transform of radial functions.

Keywords: Weighted norm inequalities, Integral transform, Pitt's inequality, Fourier transform, Hankel transform.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A transformada de Fourier é uma poderosa e fundamental ferramenta da Análise. Essa transformação é responsável por levar uma função do seu domínio espacial ao seu domínio de frequência. Em termos simples, esse procedimento inverte as propriedades de localização da função e, se aplicado novamente, transforma a função nela mesma composta com uma reflexão. Isso faz com que operações não tão triviais sejam descritas de maneira mais simplificada, por exemplo, a convolução se transforma em multiplicação e a translação se transforma em modulação (GRAFAKOS, 2014). Também é do interesse da área entender o decaimento no infinito da transformada de Fourier de uma função (LIFLYAND, 2021) ou obter desigualdades integrais com peso para a transformada de Fourier de funções Lebesgue integráveis (GORBACHEV; TIKHONOV, 2012). Aplicações deste tipo de resultado incluem formas quantitativas do Lema de Riemann-Lebesgue por meio da caracterização dos espaços de suavidade generalizada em termos do decaimento da transformada de Fourier (JORDÃO, 2020).

Em vista do importante papel teórico da transformada de Fourier e suas aplicações, uma variedade de desigualdades envolvendo uma função e sua transformada são objetos de estudo em Análise. Uma das mais versáteis é a desigualdade de Pitt que estabelece que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(x)\right|^q |x|^{-q\gamma}\, dx\right]^{1/q} \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, |y|^{p\beta}\, dy\right]^{1/p},$$

onde $1 < p \leq q < \infty$, vale se, e somente se,

$$\frac{n}{q} - \frac{n+1}{2} + \max\left\{\frac{1}{q'}, \frac{1}{p}\right\} \leq \gamma < \frac{1}{q}, \quad \gamma - \beta = n\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1\right),$$

em que $1/q + 1/q' = 1$. A desigualdade pode ser encontrada nas referências (BENEDETTO; HEINIG, 2003; BECKNER, 2008). A transformada de Fourier de uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável e de módulo integrável é dada pela fórmula

$$\widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ixy} dy,$$

e a notação $f \lesssim g$ significa $f(t) \leq Cg(t)$ para alguma $C > 0$, não dependendo de t. A beleza da desigualdade de Pitt, além da forte equivalência fornecida, reside no fato que outras três desigualdades podem ser extraídas dela (TITCHMARSH, 1986):

(i) o teorema de Plancherel, para $p = q = 2$ e $\gamma = \beta = 0$;

(ii) o teorema de Hardy-Littlewood, para $1 < p = q \leq 2$ e $\beta = 0$, ou $p = q \geq 2$ e $\gamma = 0$;

(iii) o teorema de Hausdorff-Young, para $q = p' \geq 2$ e $\gamma = \beta = 0$.

Os requisitos específicos que geram condições necessárias e suficientes para a desigualdade de Pitt têm base nas celebradas desigualdades de Hardy, que são ferramentas indispensáveis para a demonstração dos resultados e ganharam várias versões e adaptações ao longo dos anos.

Em 1925, Hardy enunciou e provou a desigualdade que hoje pode ser encontrada como exercício no livro de Análise Real do autor Gerald B. Folland (FOLLAND, 1999, p. 196). A desigualdade de Hardy afirma que, para $f(t) \geq 0, p > 1$, com f integrável sobre qualquer intervalo da forma $(0, x)$ e f^p integrável sobre $(0, \infty)$, vale

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{1.1}$$

Pouco tempo depois a primeira modificação com pesos apareceu (KUFNER; PERSSON; SAMKO, 2017), estabelecendo que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\varepsilon dx, \tag{1.2}$$

vale para todas funções f mensuráveis e não-negativas, para $p > 1$ e $\varepsilon < p - 1$. Também, vale a desigualdade dual

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\varepsilon dx, \tag{1.3}$$

para todas funções f mensuráveis e não-negativas, para $p > 1$ e $\varepsilon > p - 1$.

Essa dissertação explora a generalização tanto da transformada de Fourier unidimensional quanto da desigualdade de Pitt para esta extensão de transformações integrais. O objetivo principal é estabelecer a desigualdade do tipo Pitt para a F-transformação, ou transformação intergal do tipo Fourier, definida em (GORBACHEV; LIFLYAND; TIKHONOV, 2018). A generalização buscada para uma desigualdade do tipo Pitt não é somente no tipo de transformação integral que é contemplada, queremos generalizar também os tipos de funções peso que acompanham essa desigualdade. Para isso, vamos utilizar as seguintes versões com peso da desigualdade de Hardy (KUFNER; PERSSON; SAMKO, 2017, p. 4).

Sejam $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $u, v : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e não-negativas. Se $1 < p \leq q < \infty$, então escrevemos

$$A(u,v) = \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{1/p'}, \tag{1.4}$$

com $p' = p/(p-1)$. Se $1 < p < \infty$, $q \neq 1$ e $0 < q < p < \infty$, então consideraremos

$$A(u,v) = \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx \right)^{1/r}, \tag{1.5}$$

com $1/r = 1/q - 1/p$. Para toda f mensurável e não-negativa em (a,b), vale a desigualdade de Hardy

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p}, \tag{1.6}$$

com $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, se, e somente se,

$$A(u,v) < \infty. \tag{1.7}$$

A desigualdade de Hardy dual, afirma que, para toda f mensurável e não-negativa em (a,b), vale

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p} \tag{1.8}$$

se, e somente se,

$$\widetilde{A}(u,v) < \infty. \tag{1.9}$$

Neste caso, $\tilde{A}(u,v)$ é dada como a seguir. Se $1 < p \leq q < \infty$, então

$$\tilde{A}(u,v) := \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt \right)^{1/p'}. \tag{1.10}$$

Se $1 < p < \infty$, $q \neq 1$ e $0 < q < p < \infty$, então

$$\tilde{A}(u,v) := \left(\int_a^b \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt \right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx \right)^{1/r}. \tag{1.11}$$

Estabeleceremos alguns conceitos e notações com o objetivo de apresentar as F-transformações e a desigualdade de Pitt generalizada. Escreveremos $L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$ para o espaço das funções localmente integráveis (FOLLAND, 1999, p. 95) e $L^p_v((0,\infty))$, para $p \geq 1$, como sendo o espaço das funções mensuráveis f em $(0,\infty)$ à valores em $\mathbb{R}$, tais que

$$\|f\|_{p,v} := \left[\int_0^\infty |f(y)|^p \, v(y)dy \right]^{1/p} < \infty,$$

com $v : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa em $L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Neste trabalho, funções não-negativas em $(0,\infty)$ que são localmente integráveis serão chamadas de função peso e funções definidas em $(0,\infty)\times(0,\infty)$ à valores em $\mathbb{C}$ serão chamadas de núcleos. Uma função $s>0$ contínua não-decrescente em $(0,\infty)$ satisfaz a condição Δ_2 se

$$s(2y) \lesssim s(y), \quad y>0. \tag{1.12}$$

Observamos que se $\nu \geq 0$, então $s(y)=y^\nu$ satisfaz a condição Δ_2. De fato, é imediato que $s(2y)=2^\nu s(y) \lesssim s(y)$, para todo $y>0$.

Sejam $\mathcal{K}$ um núcleo contínuo e $s>0$ uma função contínua não-decrescente em $(0,\infty)$ satisfazendo a condição Δ_2. Assumimos que $f(y)s(y) \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$, para toda $f \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. A transformação integral

$$Ff(x) := \int_0^\infty f(y)\mathcal{K}(x,y)s(y)dy, \quad x>0, \quad f \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty)), \tag{1.13}$$

é uma **F-transformação** se existe uma função $w \geq 0$ não-decrescente em $(0,\infty)$ tal que

$$w(x)s\left(\frac{1}{x}\right) \asymp 1, \quad x>0, \tag{1.14}$$

de tal forma que a desigualdade de Bessel

$$\|Ff\|_{2,w} \lesssim \|f\|_{2,s}, \quad f \in L^2_s((0,\infty)), \tag{1.15}$$

seja satisfeita, e que o núcleo $\mathcal{K}$ satisfaça

$$|\mathcal{K}(x,y)| \lesssim \min\left\{1, [w(x)s(y)]^{-1/2}\right\}, \quad x,y>0. \tag{1.16}$$

A notação acima $f \asymp g$ significa que vale tanto $f \lesssim g$ como $g \lesssim f$ e será empregada ao longo do texto.

Levando em conta a motivação por trás da definição das F-transformações, é importante verificar que a transformada de Fourier é, de fato, uma F-transformação. Para tanto, consideremos $\mathcal{K}(x,y)=e^{-ixy}$, $s(y)=1$ e $w(x)=1$, e é claro que $\widehat{f}=Ff$, para $f \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. A função constante s satisfaz a condição Δ_2, vale $w(x)s(1/x)=1$, para todo $x>0$, e

$$|\mathcal{K}(x,y)| = |\cos(xy) - i\text{sen}(xy)| = 1 = \min\left\{1, [w(x)s(y)]^{-1/2}\right\}, \quad x,y>0.$$

Além disso, sabemos (TITCHMARSH, 1986, p. 71) que vale a desigualdade de Bessel

$$\|Ff\|_{2,1} \lesssim \|f\|_{2,1}, \quad f \in L^2_s((0,\infty)).$$

Outras transformações integrais bem conhecidas também são F-transformações. Por exemplo, as transformadas do seno e do cosseno (LIFLYAND, 2021, p. 49). A transformada do cosseno de uma função $f \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$, definida por

$$\widehat{f_c}(x) = \int_0^\infty f(y)\cos(xy)dy, \quad x>0,$$

é uma F-transformação, com $\mathcal{K}(x,y) = \cos(xy)$, $s(y) = 1$ e $w(x) = 2/\pi$. A transformada do seno de uma função $f \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$, definida por

$$\widehat{f}_s(x) = \int_0^\infty f(y)\text{sen}(xy)dy, \quad x > 0,$$

é uma F-transformação, com $\mathcal{K}(x,y) = (xy)^{-1}\text{sen}(xy)$, $s(y) = y^2$ e $w(x) = (2/\pi)x^2$. Essas duas transformadas serão melhor exploradas no Capítulo 3.

Sejam f uma função mensurável não-negativa definida em $(0,\infty)$ e $x \geq 0$. Utilizaremos a seguinte notação

$$P_x f = \int_0^x f(t)dt \quad \text{e} \quad Q_x f = \int_x^\infty f(t)dt. \tag{1.17}$$

Formalmente, mostraremos o seguinte resultado que será consequência dos resultados que apresentaremos. Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$, u e v pesos tais que $u \geq 0$ é uma função não-crescente e $v \geq 0$ é uma função não-descrescente, e $u, v^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Se

$$\left(P_{1/r}u\right)^{1/q}\left(P_r v^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0, \tag{1.18}$$

e

$$\left[Q_{1/r}\left(x^{-q/a'}u\right)\right]^{1/q}\left[Q_r\left(y^{-p'/a'}v^{1-p'}\right)\right]^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0, \tag{1.19}$$

para $a' \geq \max\{q, p'\}$, então vale a desigualdade de Pitt

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v}, \quad s^{1/a}f \in L^p_v((0,\infty)), \tag{1.20}$$

onde s e w são pesos provenientes da definição de F-transformação da equação (1.13). Se $a = p = q = 2$, então (1.18) implica (1.20).

Mostraremos também o seguinte resultado que traz uma condição necessária para que valha a desigualdade de Pitt. Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$, u e v pesos tais que $u \geq 0$ é uma função não-crescente e $v \geq 0$ é uma função não-descrescente, e $u, v^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Se o núcleo $\mathcal{K}$ satisfaz

$$\mathcal{K}(x,y) \asymp 1, \quad 0 \leq xy \lesssim 1, \tag{1.21}$$

e, para todo $1 < a \leq 2$, vale a desigualdade

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v}, \quad s^{1/a}f \in L^p_v((0,\infty)),$$

onde s e w são pesos provenientes da definição (1.13), então

$$\left(P_{1/r}u\right)^{1/q}\left(P_r v^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0.$$

Esses dois resultados estabelecem condições necessárias e suficientes para a validade da desigualdade do tipo Pitt com pesos u e v.

Essa dissertação está apresentada da seguinte maneira. O Capítulo 2 aborda toda a parte teórica, os resultados principais e as demonstrações. Na Seção 2.1, apresentamos os lemas que serão necessários para demonstrar os teoremas da Seção 2.2, que por sua vez serão utilizados nas demonstrações da Seção 2.3. Esta última seção, em particular, traz as condições necessárias e suficientes para a desigualdade do tipo Pitt para F-transformações. Na Seção 2.4, exploramos condições necessárias alternativas para F-transformações com um tipo especial de núcleo, os núcleos oscilantes. O Capítulo 3 tem como objetivo aplicar os resultados obtidos no Capítulo 2 em F-transformações conhecidas e com pesos específicos, recuperando a desigualdade de Pitt para cada uma delas. Na Seção 3.1, tratamos especialmente da transformação de Hankel e os resultados obtidos serão cruciais nas seções subsequentes. Na Seção 3.2, abordaremos as transformadas do seno e do cosseno e, por fim, na Seção 3.3, recuperamos a desigualdade de Pitt para a transformada de Fourier de funções definidas em $(0, \infty)$ e para a transformada de Fourier n-dimensional de funções radiais.

CAPÍTULO

2

DESIGUALDADES COM PESO

O objetivo principal deste capítulo é apresentar e demonstrar a desigualdade de Pitt para F-transformações. Para isso, é necessário realizar a construção de resultados menores que, combinados, resultarão no resultado principal.

Iniciaremos a Seção 2.1 apresentando uma estimativa do tipo de Hausdorff-Young para F-transformações e, em seguida, provaremos uma caracterização do tipo de Calderón para que um operador sublinear seja do tipo $(1, \infty)$ e (a, a'), $1 < a < \infty$, cuja definição vem a seguir. As ferramentas abaixo podem ser encontradas em (STEIN; WEISS, 1971, pp. 56-57) e (STEIN; WEISS, 1958, pp. 159-160).

Definição 2.0.1. Sejam (X, σ_X, μ) e (Y, σ_Y, ν) espaços de medida, M e N espaços vetoriais das funções sobre um corpo $\mathbb{K}$ definidas em X e Y, respectivamente. Uma aplicação $T : M \longrightarrow N$ é dita ser um operador sublinear se ocorre

i) $T(f + g)$ está bem definida sempre que $f, g \in M$;

ii) $|T(f + g)(x)| \leq |(Tf)(x)| + |(Tg)(x)|$ em quase todo ponto, para qualquer $f, g \in M$;

iii) $|T(\alpha f)(x)| = |\alpha|\, |(Tf)(x)|$ em quase todo ponto, para toda $f \in M$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Observemos que uma F-transformação definida pela equação (1.13), por ser uma transformação integral, é um operador sublinear sobre $L^1_{\text{loc}}((0, \infty))$. Para $n \geq 1$, escreveremos $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para denotar o espaço das funções localmente integráveis em $\mathbb{R}^n$ e $L^p_v(\mathbb{R}^n)$, para $p \geq 1$, como sendo o espaço das funções mensuráveis f em $\mathbb{R}^n$ à valores em $\mathbb{R}$, tais que

$$\|f\|_{p,v} := \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, v(y)dy\right]^{1/p} < \infty,$$

em que $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função peso, isto é, v é não-negativa e $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.0.2. Sejam $p, q \geq 1$, $n \geq 1$ e $u, v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções peso. Dizemos que uma transformação $T : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ é do tipo (p, q), com $1 < p, q < \infty$, se

$$\|Tf\|_{q,u} \lesssim \|f\|_{p,v}, \quad f \in L^p_v(\mathbb{R}^n).$$

Dizemos que um operador T é do tipo $(1, \infty)$ se

$$\|Tf\|_{\infty} \lesssim \|f\|_{1,v}, \quad f \in L^1_v(\mathbb{R}^n).$$

Lema 2.0.3. Sejam s, w funções peso em $\mathbb{R}^n$ e T um operador sublinear sobre $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Se T é do tipo (p_0, q_0) e do tipo (p_1, q_1), isto é, satisfaz

$$\|Tf\|_{q_0,w} \lesssim \|f\|_{p_0,s}, \quad f \in L^{p_0}_s(\mathbb{R}^n),$$
$$\|Tf\|_{q_1,w} \lesssim \|f\|_{p_1,s}, \quad f \in L^{p_1}_w(\mathbb{R}^n),$$

onde $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, então para todo p e q da forma

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$T(f)$ está definida para $f \in L^p_s(\mathbb{R}^n)$ e T é do tipo (p, q), isto é,

$$\|Tf\|_{q,w} \lesssim \|f\|_{p,s}, \quad f \in L^p_s(\mathbb{R}^n).$$

2.1 Desigualdades do tipo de Hausdorff-Young

Apresentaremos duas estimativas do tipo de Hausdorff-Young para F-transformações.

Lema 2.1.1. Se F é uma F-transformação como definida na equação (1.13), então vale

$$\|Ff\|_{a',w} \lesssim \|f\|_{a,s}, \quad f \in L^a_s((0, \infty)).$$

com $1 \leq a \leq 2$, $1/a + 1/a' = 1$ e w e s são os pesos provenientes da definição da F-transformação.

Demonstração. Da definição de F-transformação da equação (1.13), temos

$$\|Ff\|_{\infty} = \sup_{x>0} \left| \int_0^{\infty} f(y)K(x,y)s(y)dy \right| \leq \sup_{x>0} \int_0^{\infty} |f(y)K(x,y)s(y)|\, dy.$$

Daí, de (1.16) e do fato de $s > 0$,

$$\sup_{x>0} \int_0^{\infty} |f(y)K(x,y)s(y)|\, dy \lesssim \int_0^{\infty} |f(y)|\, s(y)dy = \|f\|_{1,s},$$

ou seja,

$$\|Ff\|_{\infty} \lesssim \|f\|_{1,s}. \tag{2.1}$$

Do Lema 2.0.3 aplicado nas desigualdades de Bessel (1.15) e (2.1), segue o resultado. $\square$

Lema 2.1.2. Seja F uma F-transformação definida pela equação (1.13). Se $1 \leq a \leq 2$, então

$$\left\| w^{1/a'} Ff \right\|_\infty \lesssim \left\| s^{1/a} f \right\|_1, \quad s^{1/a} f \in L^1((0,\infty)).$$

Demonstração. Da definição de F, temos, para $x > 0$,

$$\begin{aligned} Ff(x) = \int_0^\infty f(y)K(x,y)s(y)dy &= \int_0^{1/x} f(y)K(x,y)s(y)dy + \int_{1/x}^\infty f(y)K(x,y)s(y)dy \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Vamos estimar primeiro a integral I_1. Observemos que, de (1.16) e do fato de $s > 0$ ser não-decrescente, temos

$$\begin{aligned} |I_1| = \left| \int_0^{1/x} f(y)K(x,y)s(y)dy \right| &\leq \int_0^{1/x} |f(y)K(x,y)s(y)|\, dy \\ &\lesssim \int_0^{1/x} |f(y)|\, s(y)dy \\ &= \int_0^{1/x} |f(y)|\, s^{1/a}(y) s^{1/a'}(y)dy \\ &\lesssim s^{1/a'}\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x} |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy. \end{aligned}$$

Daí, como $w \geq 0$, e de (1.14), segue que

$$\begin{aligned} w^{1/a'}(x)\, |I_1| &\lesssim w^{1/a'}(x) s^{1/a'}\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x} |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy \\ &\lesssim \int_0^{1/x} |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Agora, vamos estimar a integral I_2. Notemos que, se $1 \leq a \leq 2$, então $a' \geq 2$. Logo, $1/a' - 1/2 \leq 0$. E, como $s > 0$ é não-decrescente, $s^{1/a'-1/2}$ é não-crescente. Daí, de (1.16) e (1.14), temos

$$\begin{aligned} |I_2| \leq \int_{1/x}^\infty |f(y)K(x,y)s(y)|\, dy &\lesssim \int_{1/x}^\infty |f(y)|\, w^{-1/2}(x) s^{-1/2}(y) s(y)dy \\ &= \int_{1/x}^\infty |f(y)|\, w^{-1/2}(x) s^{1/a'-1/2}(y) s^{1/a}(y)dy \\ &\lesssim w^{-1/2}(x) s^{-1/2}\left(\frac{1}{x}\right) s^{1/a'}\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x}^\infty |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy \\ &\lesssim s^{1/a'}\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x}^\infty |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} w^{1/a'}(x)\, |I_2| &\lesssim w^{1/a'}(x) s^{1/a'}\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x}^\infty |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy \\ &\lesssim \int_{1/x}^\infty |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Finalmente, de (2.2) e (2.3),

$$\begin{aligned}\left|w^{1/a'}(x)Ff(x)\right| &\leq w^{1/a'}(x)\,|I_1| + w^{1/a'}(x)\,|I_2| \\ &\lesssim \int_0^{1/x} |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy + \int_{1/x}^{\infty} |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy \\ &= \int_0^{\infty} |f(y)|\, s^{1/a}(y)dy = \left\|s^{1/a} f\right\|_1 .\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_\infty = \sup_{x>0} \left|w^{1/a'}(x)Ff(x)\right| \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_1, \quad s^{1/a}f \in L^1((0,\infty)).$$

□

2.2 Resultados do tipo de Calderón

Nesta seção, introduzimos desigualdades do tipo de Calderón para o rearranjamento de operadores sublineares. Esses resultados terão sua importância evidenciada na demonstração das condições necessárias para a desigualdade de Pitt, resultado principal dessa dissertação. Antes de apresentar essa caracterização, vamos enunciar algumas definições essenciais, que podem ser encontradas em (STEIN; WEISS, 1971, pp. 189).

Definição 2.2.1. Sejam (X, σ_X, ν) um espaço de medida e f uma função mensurável em X. Para $c > 0$ definimos a função distribuição de f, $\lambda := \lambda_f$, por

$$\lambda(c) = \nu(F_c), \quad \text{onde } F_c = \{x \in X : |f(x)| > c\}.$$

Definição 2.2.2. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, e λ a função distribuição f. O rearranjamento decrescente de f é a função $f^* : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ definida por

$$f^*(t) = \inf\{c : \lambda(c) \leq t\}, \quad t > 0.$$

A seguinte proposição pode ser encontrada na referência (STEIN; WEISS, 1971, pp. 191-192), justificada como consequência de propriedades obtidas para a função distribuição de uma função e o rearranjamento descrescente dela.

Proposição 2.2.3. Sejam $n \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então,

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 2.2.4. Seja T um operador sublinear sobre $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. O operador T é do tipo $(1,\infty)$ e do tipo (a, a'), para $1 < a < \infty$ se, e somente se, para cada $f \in L^a(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\left[\int_0^x (Tf)^*(t)^{a'}dt\right]^{1/a'} \lesssim \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s)ds\right)^a t^{a-2}dt\right]^{1/a}, \quad x > 0. \tag{2.4}$$

Demonstração. Seja $f \in L^a(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Vamos supor que vale (2.4). Como $(Tf)^*$ é decrescente,

$$
\begin{aligned}
x(Tf)^*(x)^{a'} \leq \int_0^x (Tf)^*(t)^{a'} dt &\lesssim \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds \right)^a t^{a-2} dt \right]^{a'/a} \\
&\leq \left[\int_0^x \left(\int_0^{\infty} f^*(s) ds \right)^a t^{a-2} dt \right]^{a'/a} \\
&\leq \left[\int_0^x \|f^*\|_1^a t^{a-2} dt \right]^{a'/a}.
\end{aligned}
$$

Daí, utilizando a Proposição 2.2.3,

$$
\begin{aligned}
\left[\int_0^x \|f^*\|_1^a t^{a-2} dt \right]^{a'/a} &= \|f\|_1^{a'} \left[\int_0^x t^{a-2} dt \right]^{a'/a} \\
&= \|f\|_1^{a'} \left(\frac{x^{a-1}}{a-1} \right)^{a'/a} \\
&= \|f\|_1^{a'} \frac{x}{(a-1)^{a'/a}} \lesssim x \|f\|_1^{a'}.
\end{aligned}
$$

Assim, como $x > 0$, então $(Tf)^*(x) \lesssim \|f\|_1$ e, daí, novamente pela Proposição 2.2.3,

$$
\|Tf\|_\infty = \|(Tf)^*\|_\infty = \sup_{x>0} |(Tf)^*(x)| \lesssim \|f\|_1,
$$

ou seja, T é do tipo $(1, \infty)$.

Agora, como (2.4) vale para todo $x > 0$, então, utilizando (1.1) e a Proposição 2.2.3,

$$
\begin{aligned}
\|(Tf)^*\|_{a'} = \left[\int_0^\infty (Tf)^*(t)^{a'} dt \right]^{1/a'} &\lesssim \left[\int_0^\infty \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds \right)^a t^{a-2} dt \right]^{1/a} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(\int_0^{t} f^*(s) ds \right)^a t^{-a} dt \right]^{1/a} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^{t} f^*(s) ds \right)^a dt \right]^{1/a} \\
&\lesssim \|f^*\|_a = \|f\|_a.
\end{aligned}
$$

Logo, da Proposição 2.2.3,

$$
\|Tf\|_{a'} = \|(Tf)^*\|_{a'} \lesssim \|f\|_a,
$$

ou seja, T é do tipo (a, a').

Supomos agora que T é um operador sublinear do tipo $(1, \infty)$ e do tipo (a, a'), para $1 < a < \infty$. Fixamos $s > 0$. Tomando $f \in L^a(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos definir f da forma $f = f_1 + f_2$, onde

$$
f_1^*(t) = \begin{cases} f^*(t), & 0 < t \leq s \\ 0, & t > s \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2^*(t) = f^*(t+s), \quad t > 0.
$$

Essa decomposição é detalhada em (JURKAT; SAMPSON, 1984, pp. 627-628).

Então, para qualquer subconjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$, com $m(E) = x$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(\xi)|^{a'} \chi_E(\xi) d\xi\right)^{1/a'} &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf_1(\xi)|^{a'} \chi_E(\xi) d\xi\right)^{1/a'} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf_2(\xi)|^{a'} \chi_E(\xi) d\xi\right)^{1/a'} \\
&\leq x^{1/a'} \|Tf_1\|_\infty + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf_2(\xi)|^{a'} \chi_E(\xi) d\xi\right)^{1/a'} \\
&\lesssim x^{1/a'} \int_0^\infty f_1^*(t) dt + \left(\int_0^\infty f_2^*(t)^a dt\right)^{1/a} \\
&\lesssim x^{1/a'} \int_0^s f^*(t) dt + \left(\int_s^\infty f^*(t)^a dt\right)^{1/a}.
\end{aligned}$$

Tomando $s = 1/x$, temos

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^x (Tf)^*(t)^{a'} dt\right]^{1/a'} &\leq \sup_{E; m(E)=x} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(\xi)|^{a'} \chi_E(\xi) d\xi\right)^{1/a'} \\
&\lesssim x^{1/a'} \int_0^{1/x} f^*(t) dt + \left(\int_{1/x}^\infty f^*(t)^a dt\right)^{1/a} \\
&\lesssim x^{1/a'} \int_0^{1/x} f^*(t) dt + \left[\int_0^x \left(\frac{1}{t} f^*\left(\frac{1}{t}\right)\right)^a t^{a-2} dt\right]^{1/a} \\
&\lesssim x^{1/a'} \int_0^{1/x} f^*(t) dt + \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds\right)^a t^{a-2} dt\right]^{1/a}.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a desigualdade Hölder (FOLLAND, 1999, p. 182),

$$\begin{aligned}
x^{1/a'} \int_0^{1/x} f^*(t) dt = x^{1-1/a} &\int_0^{1/x} f^*(t) dt \\
&\leq x^{-1/a} \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds t^{1-2/a}\right) t^{-1+2/a} dt\right] \\
&\leq x^{-1/a} \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds\right)^a t^{a-2} dt\right]^{1/a} \left[\int_0^x t^{(-1+2/a)a'} dt\right]^{1/a'} \\
&\lesssim \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds\right)^a t^{a-2} dt\right]^{1/a}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left[\int_0^x (Tf)^*(t)^{a'} dt\right]^{1/a'} \lesssim \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds\right)^a t^{a-2} dt\right]^{1/a} + \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds\right)^a t^{a-2} dt\right]^{1/a},$$

ou seja,

$$\left[\int_0^x (Tf)^*(t)^{a'} dt\right]^{1/a'} \lesssim \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds\right)^a t^{a-2} dt\right]^{1/a}.$$

□

Teorema 2.2.5. Seja T um operador sublinear sobre $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Se T é do tipo $(1, \infty)$ e do tipo (a, a'), para $1 < a < \infty$, então

$$(Tf)^*(x) \lesssim \int_0^{1/x} f^*(y) dy + x^{-1/a'} \int_{1/x}^\infty y^{-1/a'} f^*(y) dy, \quad x > 0,$$

para toda $f \in L^a(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Do Teorema 2.2.4, vale

$$\left[\int_0^x (Tf)^*(t)^{a'}dt\right]^{1/a'} \lesssim \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s)ds\right)^a t^{a-2}dt\right]^{1/a},$$

que implica em

$$x^{1/a'}(Tf)^*(x) \lesssim \left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s)ds\right)^a t^{a-2}dt\right]^{1/a},$$

resultando

$$(Tf)^*(x) \lesssim x^{-1/a'}\left[\int_0^x \left(\int_0^{1/t} f^*(s)ds\right)^a t^{a-2}dt\right]^{1/a}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}(Tf)^*(x) &\lesssim x^{-1/a'}\left[\int_{1/x}^\infty \left(\int_0^{t} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a}\\ &\lesssim x^{-1/a'}\left\{\left[\int_{1/x}^\infty \left(\int_0^{1/x} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a} + \left[\int_{1/x}^\infty \left(\int_{1/x}^{t} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a}\right\}.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}x^{-1/a'}\left[\int_{1/x}^\infty \left(\int_0^{1/x} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a} &= x^{-1/a'}\left[\left(\int_0^{1/x} f^*(s)ds\right)^a \int_{1/x}^\infty t^{-a}dt\right]^{1/a}\\ &= x^{-1/a'}\int_0^{1/x} f^*(s)ds\frac{x^{1/a'}}{(a-1)^{1/a}}\\ &\lesssim \int_0^{1/x} f^*(s)ds.\end{aligned}$$

Agora, queremos mostrar que

$$x^{-1/a'}\left[\int_{1/x}^\infty \left(\int_{1/x}^{t} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a} \lesssim x^{-1/a'}\int_{1/x}^\infty y^{-1/a'}f^*(y)dy.$$

Notemos que, pela versão da desigualdade de Hardy apresentada em (OPIC; KUFNER, 1990, p. 49), para $x > 0$,

$$\left[\int_{1/x}^\infty \left(\int_{1/x}^{t} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a} \lesssim \int_{1/x}^\infty y^{-1/a'}f^*(y)dy$$

vale se, e somente se,

$$\sup_{1/x<t<\infty}\left[\left(\int_t^\infty s^{-a}ds\right)^{1/a} \underset{1/x<y<t}{ess\sup}\, y^{1/a'}\right] < \infty.$$

Como $a > 1$,

$$\begin{aligned}\int_t^\infty s^{-a}ds &= \lim_{b\to\infty}\int_t^b s^{-a}ds\\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-a+1}}{-a+1} - \frac{t^{-a+1}}{-a+1}\\ &= \frac{t^{-a+1}}{a-1} < \infty.\end{aligned}$$

Logo, $\sup\limits_{1/x<t<\infty}\left[(\int_t^\infty s^{-a}ds)^{1/a}\, \underset{1/x<y<t}{ess\sup}\, y^{1/a'}\right] < \infty$ e, portanto, vale

$$\left[\int_{1/x}^{\infty}\left(\int_{1/x}^{t} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a} \lesssim \int_{1/x}^{\infty} y^{-1/a'}f^*(y)dy, x > 0.$$

Disso segue que

$$x^{-1/a'}\left[\int_{1/x}^{\infty}\left(\int_{1/x}^{t} f^*(s)ds\right)^a t^{-a}dt\right]^{1/a} \lesssim x^{-1/a'}\int_{1/x}^{\infty} y^{-1/a'}f^*(y)dy.$$

Portanto,

$$(Tf)^*(x) \lesssim \int_0^{1/x} f^*(y)dy + x^{-1/a'}\int_{1/x}^{\infty} y^{-1/a'}f^*(y)dy.$$

□

2.3 Desigualdade de Pitt

Nesta seção, obteremos condições necessárias e suficientes sobre as funções pesos que nos garantem que uma desigualdade do tipo de Pitt vale para F-transformações. Em primeiro lugar, enunciaremos e demonstraremos condições suficientes para a validade da desigualdade de Pitt para F-transformações. No entanto, para isso, precisamos de algumas ferramentas que serão enunciadas abaixo e que podem ser encontradas em (BENEDETTO; HEINIG, 2003, p. 7).

Definição 2.3.1. Seja v uma função peso definida em $(0,\infty)$ ou $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Definimos

$$v_* = \left[\left(\frac{1}{v}\right)^*\right]^{-1}.$$

Lema 2.3.2. (Lema de Hardy) Sejam $f, g \geq 0$ funções Lebesgue-mensuráveis em $(0,\infty)$, e $\varphi \geq 0$ uma função não-crescente em $(0,\infty)$. Se

$$\int_0^s f(x)dx \leq \int_0^s g(x)dx,$$

para todo $s > 0$, então

$$\int_0^\infty f(x)\varphi(x)dx \leq \int_0^\infty g(x)\varphi(x)dx.$$

A primeira desigualdade do lema abaixo pode ser obtida aplicando o fato de que $|f^p|^* = (f^*)^p$, $f \in L^p$ (BENNETT; SHARPLEY, 1988, p.41), ao Teorema 2.2 de (BENNETT; SHARPLEY, 1988, p. 44). Já a segunda, pode ser encontrada na demonstração do Corolário 2.5 de (HEINIG, 1984, pp. 576-577).

Lema 2.3.3. (Desigualdade de Hardy–Littlewood para rearranjamentos) Sejam $f, u \geq 0$ funções Lebesgue-mensuráveis não-negativas em $(0,\infty)$ ou em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Então

$$\|f\|_{p,u} \leq \|f^*\|_{p,u^*} \quad \text{e} \quad \|f^*\|_{p,v_*} \leq \|f\|_{p,v}. \tag{2.5}$$

Agora, apresentamos as condições de suficicência sobre os pesos para a validade da desigualdade do tipo Pitt para F-transformações, que foram apresentadas na Introdução. Para isso relembramos que as notações P_x e Q_x foram estabelecidas na equação (1.17).

Teorema 2.3.4. (Desigualdade de Pitt para F-transformação) Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$ e u e v funções peso em $(0, \infty)$, $n \geq 1$.

(A) Para $(p, q, a) \neq (2, 2, 2)$, se $u^*, v_*^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0, \infty))$ e

$$\left(P_{1/r} u^*\right)^{1/q} \left(P_r v_*^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0, \tag{2.6}$$

$$\left[Q_{1/r}\left(x^{-q/a'} u^*\right)\right]^{1/q} \left[Q_r\left(y^{-p'/a'} v_*^{1-p'}\right)\right]^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0, \tag{2.7}$$

então, para a F-transformação definida pela equação (1.13), vale

$$\left\| w^{1/a'} F f \right\|_{q,u} \lesssim \left\| s^{1/a} f \right\|_{p,v}, \quad s^{1/a} f \in L^p_v((0, \infty)),$$

onde s e w são pesos provenientes da definição de F.

(B) Para $p = q = a = 2$, se u e v são funções peso tais que $u^*, v_*^{-1} \in L^1_{\text{loc}}((0, \infty))$ e

$$\left(P_{1/r} u^*\right) \left(P_r v_*^{-1}\right) \lesssim 1, \quad r > 0,$$

então, vale a desigualdade de Pitt

$$\left\| w^{1/2} F f \right\|_{2,u} \lesssim \left\| s^{1/2} f \right\|_{2,v}, \quad s^{1/a} f \in L^2_v((0, \infty)),$$

onde s e w são pesos provenientes da definição de F-transformação da equação (1.13).

Demonstração. Observemos que F é sublinear, já que é uma F-transformação. Além disso, do Lema 2.1.1 e do Lema 2.1.2, valem as desigualdades

$$\left\| w^{1/a'} F f \right\|_{\infty} \lesssim \left\| s^{1/a} f \right\|_1 \quad \text{e} \quad \left\| w^{1/a'} F f \right\|_{a'} \lesssim \left\| s^{1/a} f \right\|_a.$$

Vamos denotar $Tg = w^{1/a'} F f$ e $g = s^{1/a} f$.

(A) Aplicando o Teorema 2.2.5, temos

$$(Tg)^*(x) \lesssim \int_0^{1/x} g^*(y) dy + x^{-1/a'} \int_{1/x}^{\infty} y^{-1/a'} g^*(y) dy.$$

Daí, do Lema 2.3.3, e da desigualdade de Minkowski (por exemplo, (FOLLAND, 1999, p. 183), adaptado aos pesos),

$$\begin{aligned}
\|Tg\|_{q,u} &\lesssim \|(Tg)^*\|_{q,u^*} \\
&\lesssim \left\| \int_0^{1/x} g^*(y) dy \right\|_{q,u^*} + \left\| x^{-1/a'} \int_{1/x}^{\infty} y^{-1/a'} g^*(y) dy \right\|_{q,u^*} =: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Vamos estimar primeiro I_1. Notemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\int_0^\infty u^*(x)\left(\int_0^{1/x} g^*(y)dy\right)^q dx\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_\infty^0 -t^{-2}u^*\left(\frac{1}{t}\right)\left(\int_0^t g^*(y)dy\right)^q dt\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_0^\infty t^{-2}u^*\left(\frac{1}{t}\right)\left(\int_0^t g^*(y)dy\right)^q dt\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_0^\infty x^{-2}u^*\left(\frac{1}{x}\right)\left(\int_0^x g^*(y)dy\right)^q dx\right]^{1/q} \\ &= \left\|\int_0^x g^*(y)dy\right\|_{q,\overline{u^*}} = \|P_x g^*\|_{q,\overline{u^*}}, \end{aligned}$$

onde $\overline{u^*}(x) = x^{-2}u^*(1/x)$. Agora, observemos que (2.6) é equivalente a

$$(Q_r\overline{u^*})^{1/q}\left(P_r v_*^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0. \tag{2.8}$$

De fato,

$$\begin{aligned} P_{1/r}u^* &= \int_0^{1/r} u^*(t)dt \\ &= \int_r^\infty x^-2u^*\left(\frac{1}{x}\right)dx \\ &= Q_r\overline{u^*}. \end{aligned}$$

Mais ainda, (2.8) equivale a (1.4). Assim, aplicando a Desigualdade de Hardy (1.6) e o Lema 2.3.3, obtemos

$$I_1 = \|P_x g^*\|_{q,\overline{u^*}} \lesssim \|g^*\|_{p,v_*} \lesssim \|g\|_{p,v} = \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v}.$$

Vamos agora estimar I_2. Notemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\int_0^\infty u^*(x)\left(x^{-1/a'}\int_{1/x}^\infty y^{-1/a'}g^*(y)dy\right)^q dx\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_0^\infty u^*(x)x^{-q/a'}\left(\int_{1/x}^\infty y^{-1/a'}g^*(y)dy\right)^q dx\right]^{1/q} \\ &= \left\|\int_{1/x}^\infty y^{-1/a'}g^*(y)dy\right\|_{q,x^{-q/a'}u^*} \\ &= \left\|\int_x^\infty y^{-1/a'}g^*(y)dy\right\|_{q,\overline{x^{-q/a'}u^*}} = \left\|Q_x y^{-1/a'}g^*\right\|_{q,\overline{x^{-q/a'}u^*}}. \end{aligned}$$

Agora, observemos que (2.7) é equivalente a

$$\left[P_r\left(\overline{x^{-q/a'}u^*}\right)\right]^{1/q}\left[Q_r\left(y^{-p'/a'}v_*^{1-p'}\right)\right]^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0. \tag{2.9}$$

Mais ainda, (2.9) equivale a (1.10). Assim, aplicando a Desigualdade de Hardy (1.8) e o Lema 2.3.3, obtemos

$$I_2 = \left\|Q_x y^{-1/a'}g^*\right\|_{q,\overline{x^{-q/a}u^*}} \lesssim \left\|y^{-1/a'}g^*\right\|_{p,y^{p/a'}v_*} = \|g^*\|_{p,v_*} \lesssim \|g\|_{p,v}.$$

Logo,

$$\|Tg\|_{q,u} \lesssim I_1 + I_2 \lesssim 2\,\|g\|_{p,v}\,.$$

Portanto,

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v}, \quad s^{1/a}f \in L^p_v((0,\infty)).$$

(B) Consideremos agora $a = a' = 2$. Aplicando o Teorema 2.2.4, temos

$$\int_0^x (Tg)^*(t)^2 dt \lesssim \int_0^x \left(\int_0^{1/t} g^*(s)ds\right)^2 dt, \quad x > 0.$$

Pelo Lema 2.3.2, temos

$$\begin{aligned}
\|(Tg)^*\|^2_{2,u^*} &= \int_0^\infty (Tg)^*(t)^2 u^*(t)dt \\
&\lesssim \int_0^\infty \left(\int_0^{1/t} g^*(s)ds\right)^2 u^*(t)dt \\
&= \left\|P_{1/t}g^*\right\|^2_{2,u^*} = \|P_t g^*\|^2_{2,\overline{u^*}}\,, \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Como já verificado em **(A)**, (2.6) é equivalente a

$$(Q_r\overline{u^*})^{1/q}\left(P_r v_*^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0,$$

e isto equivale a (1.4). Assim, aplicando a Desigualdade de Hardy (1.6) e o Lema 2.3.3, obtemos

$$\|P_t g^*\|_{2,\overline{u^*}} \lesssim \|g^*\|_{2,v_*} \lesssim \|g\|_{2,v}\,.$$

Então, disto e do Lema 2.3.3, segue

$$\|Tg\|_{2,u} \leq \|(Tg)^*\|_{2,u^*} = \|P_t g^*\|_{2,\overline{u^*}} \lesssim \|g\|_{2,v}\,.$$

Portanto,

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_{2,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{2,v}, \quad s^{1/a}f \in L^2_v((0,\infty)).$$

□

Corolário 2.3.5. Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$ e u e v funções peso em $(0,\infty)$ ou $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Se $a' < \max\{q, p'\}$ ou $a = p = q = 2$, então a condição (2.6) do Teorema 2.3.4 implica a desigualdade de Pitt. Em particular, vale para $a = 2$ e $1 < p \leq q < \infty$.

Demonstração. Vamos provar que, se $a' < \max\{q, p'\}$, então (2.6) $\Rightarrow$ (2.7).

Notemos que, de (2.6), para $r > 0$, temos, pela monotonicidade da integral,

$$\left[\frac{1}{r}u^*\left(\frac{1}{r}\right)\right]^{1/q}\left[r v_*^{1-p'}(r)\right]^{1/p'} \leq \left[\int_0^{1/r} u^*(x)dx\right]^{1/q}\left[\int_0^r v_*^{1-p'}(x)dx\right]^{1/p'} \lesssim 1.$$

Daí,

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{1/q}(u^*)^{1/q}\left(\frac{1}{r}\right) r^{1/p'} v_*^{(1-p')/p'}(r) \lesssim 1, \quad r > 0.$$

Disso, temos, para $r > 0$

$$u^* \left(\frac{1}{r} \right) \lesssim r^{1-q/p'} v_*^{q/p}(r) \tag{2.10}$$

e

$$v_*^{-1}(r) \lesssim (u^*)^{-p/q} \left(\frac{1}{r} \right) r^{p/q-p/p'}. \tag{2.11}$$

Vamos analisar primeiro o caso em que $p < a$, ou seja, $a' < p'$. Provemos que vale (2.7). Temos

$$\left[Q_{1/r} \left(x^{-q/a'} u^* \right) \right]^{1/q} \left[Q_r \left(y^{-p'/a'} v_*^{1-p'} \right) \right]^{1/p'} = \left[\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'} u^*(x) dx \right]^{1/q} \left[\int_r^{\infty} y^{-p'/a'} v_*^{1-p'}(y) dy \right]^{1/p'}.$$

De (2.10) e da monotonicidade da integral, o lado direito da equação acima é majorado, a menos de constante, por

$$\left[\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'} \left(\frac{1}{x} \right)^{1-q/p'} v_*^{q/p} \left(\frac{1}{x} \right) dx \right]^{1/q} \left[\int_r^{\infty} y^{-p'/a'} v_*^{1-p'}(y) dy \right]^{1/p'},$$

que, por sua vez, usando novamente a monotonicidade da integral, é majorado por

$$v_*^{1/p}(r) \left[\int_{1/r}^{\infty} x^{-q(1/a'-1/p')} \frac{dx}{x} \right]^{1/q} v_*^{-1/p}(r) \left[\int_r^{\infty} y^{1-p'/a'} \frac{dy}{y} \right]^{1/p'} =: J_1.$$

O fato que $a' < p'$ garante $J_1 \lesssim 1$, quando $r > 0$. Logo,

$$\left[Q_{1/r} \left(x^{-q/a'} u^* \right) \right]^{1/q} \left[Q_r \left(y^{-p'/a'} v_*^{1-p'} \right) \right]^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0,$$

como queríamos.

Vamos analisar agora o caso em que $a' < q$. Temos

$$\left[Q_{1/r} \left(x^{-q/a'} u^* \right) \right]^{1/q} \left[Q_r \left(y^{-p'/a'} v_*^{1-p'} \right) \right]^{1/p'} = \left[\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'} u^*(x) dx \right]^{1/q} \left[\int_r^{\infty} y^{-p'/a'} v_*^{1-p'}(y) dy \right]^{1/p'}.$$

Observemos que $v_*^{1-p'}(y) = (v_*^{-1}(y))^{p'/p}$. Daí, de (2.11) e da monotonicidade da integral, o lado direito da equação acima é majorado, a menos de constante, por

$$\left[\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'} u^*(x) dx \right]^{1/q} \left[\int_r^{\infty} y^{-p'/a'} \left[(u^*)^{-p/q} \left(\frac{1}{y} \right) y^{p/q-p/p'} \right]^{p'/p} (y) dy \right]^{1/p'}$$

que, por sua vez, usando novamente a monotonicidade da integral, é majorado por

$$(u^*)^{1/q} \left(\frac{1}{r} \right) \left[\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'} dx \right]^{1/q} (u^*)^{-1/q} \left(\frac{1}{r} \right) \left[\int_r^{\infty} y^{p'(1/q-1/a')} \frac{dy}{y} \right]^{1/p'} =: J_2.$$

O fato que $a' < q$ garante $J_2 \lesssim 1$, quando $r > 0$. Logo,

$$\left[Q_{1/r} \left(x^{-q/a'} u^* \right) \right]^{1/q} \left[Q_r \left(y^{-p'/a'} v_*^{1-p'} \right) \right]^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0,$$

como queríamos. □

A partir de agora, consideraremos que $u \geq 0$ é uma função não-crescente e $v \geq 0$ é uma função não-descrescente em $(0,\infty)$. Notemos que, desse modo,

$$u = u^* \quad \text{e} \quad v_* = \left[\left(\frac{1}{v}\right)^*\right]^{-1} = v.$$

Levando a obsevação acima em conta, juntamente com o Teorema 2.3.4 e o Corolário 2.3.5, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 2.3.6. Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$, u e v funções peso tais que $u \geq 0$ é uma função não-crescente e $v \geq 0$ é uma função não-descrescente com $u, v^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Se

$$\left(P_{1/r}u\right)^{1/q}\left(P_r v^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0, \tag{2.12}$$

e, para $a' \geq \max\{q, p'\}$,

$$\left[Q_{1/r}\left(x^{-q/a'}u\right)\right]^{1/q}\left[Q_r\left(y^{-p'/a'}v^{1-p'}\right)\right]^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0, \tag{2.13}$$

então vale a desigualdade de Pitt

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v}, \quad s^{1/a}f \in L^p_v((0,\infty)), \tag{2.14}$$

onde s e w são pesos provenientes da definição de F-transformação da equação (1.13). Em particular, se $a = p = q = 2$, então a condição (2.12) implica a desigualdade (2.14).

Agora, vamos obter condições necessárias sobre os pesos para a desigualdade de Pitt, que serão apresentadas no próximo teorema.

Teorema 2.3.7. Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$, u e v pesos tais que $u \geq 0$ é uma função não-crescente e $v \geq 0$ é uma função não-descrescente e tais que $u, v^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Se o núcleo $\mathcal{K}$ satisfaz

$$\mathcal{K}(x,y) \asymp 1, \quad 0 \leq xy \lesssim 1, \tag{2.15}$$

e, para todo $1 < a \leq 2$, vale a desigualdade

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v}, \quad s^{1/a}f \in L^p_v((0,\infty)),$$

onde s e w são pesos provenientes da definição de F-transformação da equação (1.13), então

$$\left(P_{1/r}u\right)^{1/q}\left(P_r v^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0.$$

Demonstração. Vamos definir $f(y) = v^{1-p'}(y)s^{-1}(y)\chi_{[0,r]}(y)$, onde $r > 0$. Para $x \lesssim 1/r$, temos, usando (2.15) e o fato de $v^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$,

$$Ff(x) = \int_0^\infty f(y)\mathcal{K}(x,y)s(y)dy \asymp \int_0^r v^{1-p'}(y)dy < \infty.$$

Da desigualdade de Pitt,

$$\left[\int_0^\infty \left|w^{1/a'}(x)Ff(x)\right|^q u(x)dx\right]^{1/q} \left[\int_0^\infty \left|s^{1/a}(y)f(y)\right|^p v(y)dy\right]^{-1/p} \lesssim 1.$$

Ainda, para $r > 0$ e $x \lesssim 1/r$,

$$\left[\int_0^{1/r} \left|w^{1/a'}(x)\int_0^r v^{1-p'}(y)dy\right|^q u(x)dx\right]^{1/q} \left[\int_0^r \left|s^{1/a}(y)v^{1-p'}(y)s^{-1}(y)\right|^p v(y)dy\right]^{-1/p} \lesssim 1.$$

Disso, temos

$$\left[\int_0^{1/r} w^{q/a'}(x)u(x)dx\right]^{1/q} \left[\int_0^r v^{1-p'}(y)dy\right] \left[\int_0^r s^{p/a-p}(y)v^{(1-p')p+1}(y)dy\right]^{-1/p} \lesssim 1,$$

que implica

$$\left[\int_0^{1/r} w^{q/a'}(x)u(x)dx\right]^{1/q} \left[\int_0^r v^{1-p'}(y)dy\right] \left[\int_0^r s^{-p/a'}(y)v^{1-p'}(y)dy\right]^{-1/p} \lesssim 1. \tag{2.16}$$

Se $a \to 1$, então $a' \to \infty$. Daí, $w^{q/a'} \to 1$ e $s^{-p/a'} \to 1$ quando $a \to 1$ e (2.16) se torna

$$\left[\int_0^{1/r} u(x)dx\right]^{1/q} \left[\int_0^r v^{1-p'}(y)dy\right]^{1-1/p} \lesssim 1,$$

ou seja,

$$\left(P_{1/r}u\right)^{1/q}\left(P_r v^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0,$$

como queríamos. $\square$

2.4 Condições necessárias para a desigualdade de Pitt

Na seção anterior, vimos condições necessárias para a validade da desigualdade de Pitt sob uma condição específica de núcleo, a saber:

$$\mathcal{K}(x,y) \asymp 1, \quad 0 \leq xy \lesssim 1. \tag{2.17}$$

Agora, vamos ver condições necessárias para uma certa classe de núcleos. Para isso, precisaremos do auxílio de um lema, que será enunciado e provado a seguir. Este lema faz uso das integrais de Böhmer, definidas em (ERDÉLYI *et al.*, 1953, p. 149) como

$$C(x,\mu) = \int_x^\infty t^{\mu-1}\cos t dt \quad \text{e} \quad S(x,\mu) = \int_x^\infty t^{\mu-1}\text{sen} t dt.$$

Também, precisaremos da seguinte definição, que pode ser encontrada em (BARY, 1964, p. 24).

Definição 2.4.1. Sejam $f, g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x) = O(g(x))$ se $f(x)/g(x)$ for uma função limitada. Em particular, dizemos que $f(x) = O(1)$ se f for limitada.

Lema 2.4.2. Seja $0 < \mu < 1$. Definimos

$$G(x) := G_\mu(x, b(x)) = \int_0^x t^{\mu-1}\cos(t - b(x))dt, \quad x > 0,$$

onde $b : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Então

$$|G(x)| = O\left(x^\mu\right), \quad x \lesssim 1 \tag{2.18}$$

e

$$G(x) = \Gamma(\mu)\cos\left(b(x) - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left(x^{\mu-1}\right), \quad x \gtrsim 1. \tag{2.19}$$

Em particular, $|G(x)| = O(1)$, para $x > 0$.

Demonstração. Vamos demonstrar a igualdade (2.18). Pela definição de G e pela monotonicidade da integral, temos

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leq \int_0^x t^{\mu-1}\left|\cos(t - b(x))\right| dt \\ &\leq \int_0^x t^{\mu-1}dt = \frac{1}{\mu}x^\mu. \end{aligned}$$

Logo, $|G(x)| = O\left(x^\mu\right)$, $x \lesssim 1$.

Agora, provemos a igualdade (2.19). Podemos reescrever $G(x)$ em função das integrais de Böhmer da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G(x) &:= \int_0^x t^{\mu-1}\cos(t - b(x))dt \\ &= \int_0^x t^{\mu-1}\left[\cos t\cos(b(x)) + \operatorname{sen} t\operatorname{sen}(b(x))\right] dt \\ &= \cos(b(x))\int_0^x t^{\mu-1}\cos t dt + \operatorname{sen}(b(x))\int_0^x t^{\mu-1}\operatorname{sen} t dt \\ &= \cos(b(x))\left[C(0,\mu) - C(x,\mu)\right] + \operatorname{sen}(b(x))\left[S(0,\mu) - S(x,\mu)\right]. \end{aligned}$$

Pelas fórmulas (6) e (7) em (ERDÉLYI *et al.*, 1953, p. 150), valem $C(0, \mu) = \Gamma(\mu)\cos(\pi\mu/2)$ e $S(0, \mu) = \Gamma(\mu)\operatorname{sen}(\pi\mu/2)$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} G(x) &= \Gamma(\mu)\cos(b(x))\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - \cos(b(x))C(x,\mu) \\ &\quad + \Gamma(\mu)\operatorname{sen}(b(x))\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - \operatorname{sen}(b(x))S(x,\mu) \\ &= \Gamma(\mu)\cos\left(b(x) - \frac{\pi\mu}{2}\right) - \left[\cos(b(x))C(x,\mu) + \operatorname{sen}(b(x))S(x,\mu)\right]. \end{aligned}$$

Pelas fórmulas (8) e (9) em (ERDÉLYI *et al.*, 1953, p. 150), valem

$$|C(x,\mu)| = O(x^{\mu-1}) \quad \text{e} \quad |S(x,\mu)| = O(x^{\mu-1}), \quad x \gtrsim 1.$$

Daí, como $\operatorname{sen}(b(x))$ e $\cos(b(x))$ são limitadas para todo x,

$$\begin{aligned} G(x) &= \Gamma(\mu)\cos\left(b(x) - \frac{\pi\mu}{2}\right) - \left[\cos(b(x))C(x,\mu) + \operatorname{sen}(b(x))S(x,\mu)\right] \\ &= \Gamma(\mu)\cos\left(b(x) - \frac{\pi\mu}{2}\right) - O(x^{\mu-1})\left[\cos(b(x)) + \operatorname{sen}(b(x))\right], \quad x \gtrsim 1, \end{aligned}$$

é equivalente a

$$G(x) = \Gamma(\mu)\cos\left(b(x) - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left(x^{\mu-1}\right), \quad x \gtrsim 1,$$

como queríamos. $\square$

No restante desta seção, em nossos teoremas, consideraremos $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$, u e v pesos em que $u \geq 0$ é uma função não-crescente e $v \geq 0$ é uma função não-descrescente, satisfazendo $u, v^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Também, assumimos que vale a desigualdade de Pitt para a F-transformação definida em (1.13), isto é,

$$\left\|w^{1/a'}Ff\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v}, \quad s^{1/a}f \in L^p_v((0,\infty)),$$

com w e s as funções peso provenientes da definição da F.

Teorema 2.4.3. Se o núcleo $\mathcal{K}$ satisfaz a condição (2.17) e

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{C}{[w(x)s(y)]^{1/2}}[\cos(xy - c) + O(x^{-1})], \quad x \gtrsim 1, \quad y \asymp 1, \tag{2.20}$$

para determinadas constantes $C > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\int_0^1 w^{q/a'}(x)u(x)dx + \int_1^\infty w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}u(x)dx < \infty, \tag{2.21}$$

sempre que $\mu > 1/p'$.

Demonstração. Por hipótese, $v \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Logo, podemos encontrar um intervalo da forma $[r, 2r]$, $r > 0$, tal que $v(y) \asymp 1$, $y \in [r, 2r]$. Seja $0 < \mu < 1$. Definimos

$$f_\mu(y) := s^{-1/2}(y)(y-r)^{\mu-1}\chi_{(r,2r]}(y).$$

Notemos que, pela forma que foi definida, $f_\mu \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$. Daí,

$$Ff_\mu(x) = \int_0^\infty f_\mu(y)K(x,y)s(y)dy = \int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}K(x,y)s^{1/2}(y)dy.$$

Como $r < y < 2r$, tomamos primeiramente $x \lesssim 1/r$. De (2.17), da monotonicidade da integral e da Definição 1.12, temos

$$\begin{aligned} Ff_\mu(x) &\asymp \int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}s^{1/2}(y)dy \\ &\leq s^{1/2}(2r)\int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}dy \\ &\lesssim s^{1/2}(r)\int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}dy \asymp 1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Agora, para $x \gtrsim 1/r$, de (2.20) temos

$$\begin{aligned} Ff_\mu(x) &= \frac{C}{w^{1/2}(x)}\int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}[cos(xy-c) + O(x^{-1})]dy \\ &= \frac{C}{w^{1/2}(x)}\left[\int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}cos(xy-c)dy + \int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}O(x^{-1})dy\right]. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t = xy - rx$, temos

$$\begin{aligned} Ff_\mu(x) &= \frac{C}{w^{1/2}(x)}\left[x^{-\mu}\int_0^{rx} t^{\mu-1}cos(t+rx-c)dt + \int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}O(x^{-1})dy\right] \\ &= \frac{C}{w^{1/2}(x)}\left[x^{-\mu}G_\mu(rx, c-rx) + \int_r^{2r}(y-r)^{\mu-1}O(x^{-1})dy\right] \\ &= \frac{C}{w^{1/2}(x)}\left[x^{-\mu}G_\mu(rx, c-rx) + O(x^{-1})\right]. \end{aligned}$$

Definindo $I := x^{-\mu}G_\mu(rx, c-rx)$, do Lema 2.4.2 temos

$$I = x^{-\mu}\left[\Gamma(\mu)\cos\left(c - rx - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left((rx)^{\mu-1}\right)\right], \quad x \gtrsim 1.$$

Então, para $x \gtrsim 1/r$,

$$\begin{aligned} Ff_\mu(x) &= \frac{C}{w^{1/2}(x)}\left\{x^{-\mu}\left[\Gamma(\mu)\cos\left(c - rx - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left((rx)^{\mu-1}\right)\right] + O(x^{-1})\right\} \\ &= \frac{C}{w^{1/2}(x)x^\mu}\left\{\left[\Gamma(\mu)\cos\left(rx - c + \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left((rx)^{\mu-1}\right)\right] + x^\mu O(x^{-1})\right\}. \end{aligned}$$

Isso é equivalente a dizer que

$$Ff_\mu(x) = \frac{C_0}{w^{1/2}(x)x^\mu}\left[\cos\left(rx - c_0\right) + O(x^{\mu-1})\right], \quad x \gtrsim \frac{1}{r}, \tag{2.23}$$

onde $C_0 = C\Gamma(\mu)$ e $c_0 = c + \pi\mu/2$.

Agora, se $1/p' < \mu < 1$, isto é, $-1 < (\mu-1)p < 0$, temos

$$\begin{aligned} \left\|s^{1/a}f_\mu\right\|_{p,v} &= \left[\int_0^\infty \left|s^{1/a}(y)f_\mu(y)\right|^p v(y)dy\right]^{1/p} \\ &= \left[\int_r^{2r} \left|s^{1/a}(y)s^{-1/2}(y)(y-r)^{\mu-1}\right|^p v(y)dy\right]^{1/p} \\ &= \left[\int_r^{2r} s^{p(1/a-1/2))}(y)(y-r)^{p(\mu-1)}v(y)dy\right]^{1/p} \\ &\le s^{(1/a-1/2)}(2r)\left[\int_r^{2r}(y-r)^{p(\mu-1)}v(y)dy\right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Usando o fato que $v(y) \asymp 1$ para $y \in [r, 2r]$, temos

$$\left\|s^{1/a}f_\mu\right\|_{p,v} \lesssim \left[\int_r^{2r}(y-r)^{p(\mu-1)}dy\right]^{1/p} \lesssim 1 \tag{2.24}$$

e

$$\begin{aligned} \left\|w^{1/a'}Ff_\mu\right\|_{q,u} &= \left[\int_0^\infty \left|w^{1/a'}(x)Ff_\mu(x)\right|^q u(x)dx\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_0^{1/r} \left|w^{1/a'}(x)Ff_\mu(x)\right|^q u(x)dx + \int_{1/r}^\infty \left|w^{1/a'}(x)Ff_\mu(x)\right|^q u(x)dx\right]^{1/q} \\ &=: (I_1 + I_2)^{1/q}. \end{aligned}$$

Por (2.22), sabemos que $Ff_\mu(x) \asymp 1$ quando $x \lesssim 1/r$. Daí,

$$I_1 := \int_0^{1/r} \left|w^{1/a'}(x)Ff_\mu(x)\right|^q u(x)dx \asymp \int_0^{1/r} w^{q/a'}(x)u(x)dx$$

e, pela desigualdade de Pitt e (2.24), segue que $w^{q/a'}u$ é integrável em uma vizinhança de 0. Além disso, de (2.23), vem

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{1/r}^{\infty} \left|w^{1/a'}(x)Ff_\mu(x)\right|^q u(x)dx \\ &= \int_{1/r}^{\infty} \left|w^{1/a'}(x)\frac{C_0}{w^{1/2}(x)x^\mu}\left[\cos\left(rx - c_0\right) + O(x^{\mu-1})\right]\right|^q u(x)dx \\ &= \int_{1/r}^{\infty} w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}\left|\cos\left(rx - c_0\right) + O(x^{\mu-1})\right|^q u(x)dx. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Agora, notemos que, para $x \in A := \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [(\pi k - 1 + c_0)/r, (\pi k + 1 + c_0)/r]$, temos

$$|\cos(rx - c_0)| \geq \cos 1.$$

Daí, como $u(x)$ e x^{-qu} são não-crescentes e não-negativas, e $w(x)$ é não-decrescente, não-negativa e satisfaz a condição Δ_2 (1.12), segue que

$$\begin{aligned} \infty > I_2 &= \int_{1/r}^{\infty} w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}\left|\cos\left(rx - c_0\right) + O(x^{\mu-1})\right|^q u(x)dx \\ &\gtrsim \int_{1/r}^{\infty} w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}\left|\cos\left(rx - c_0\right)\right|^q u(x)dx \\ &\gtrsim \int_{[1/r,\infty)\cap A} w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}u(x)dx \\ &\gtrsim \int_{1/r}^{\infty} w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}u(x)dx. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Logo,

$$\int_0^1 w^{q/a'}(x)u(x)dx + \int_1^{\infty} w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}u(x)dx < \infty,$$

como queríamos. □

Teorema 2.4.4. Se o núcleo $\mathcal{K}$ satisfaz a seguinte condição

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{D}{[w(x)s(y)]^{1/2}}[cos(xy - d(x)) + O(y^{-1})], \quad x \gtrsim 1, \quad y \asymp 1, \tag{2.27}$$

para determinada constante $D > 0$ e determinada função contínua $d : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, então

$$\int_1^{\infty} s^{p(1/a-1/2)}(y)y^{p(\mu-1)}v(y)dy = \infty, \tag{2.28}$$

sempre que $\mu \geq 1/q$.

Demonstração. Vamos supor que vale (2.27). Como $d(x)$ é uma função contínua, podemos escolher $r > 0$, $d_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\left|\cos\left(d(x) - d_0 - \frac{\pi\mu}{2}\right)\right| \asymp 1, \quad u(x) \asymp 1, \quad x \in [r, r+\varepsilon].$$

Agora, definimos, para $0 < \mu < 1$, a função

$$f_\mu(y) = s^{-1/2}(y) y^{\mu-1} \cos(ry - d_0) \chi_{[r,R)}(y),$$

onde $R > r$ é tal que $R_0 := R/\ln R > 1/\varepsilon$. Vamos estimar $Ff_\mu(x)$ no intervalo $[r, r+\varepsilon]$. Temos

$$Ff_\mu(x) = \int_0^\infty f_\mu(y)\mathcal{K}(x,y)s(y)dy = \int_r^R s^{1/2}(y) y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)K(x,y)dy := I.$$

Por (2.27)

$$\begin{aligned} I &= \int_r^R s^{1/2}(y)y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)\frac{D}{[w(x)s(y)]^{1/2}}[\cos(xy-d(x)) + O(y^{-1})]dy \\ &= \frac{D}{w^{1/2}(x)}\int_r^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)[\cos(xy-d(x)) + O(y^{-1})]dy \\ &= \frac{D}{w^{1/2}(x)}\left[\int_r^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)\cos(xy-d(x))dy + \int_r^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)O(y^{-1})dy\right]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Pela continuidade de w, segue que $D/(w^{1/2}(x)) \asymp 1$, $x \in [r, r+\varepsilon]$. Mais ainda, para qualquer $R > 0$, como $0 < \mu < 1$, vale

$$\begin{aligned} \left|\int_r^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)O(y^{-1})dy\right| &\le \int_r^R \left|y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)O(y^{-1})\right| dy \\ &\lesssim \int_r^R y^{\mu-2}dy = O(1), \end{aligned} \tag{2.30}$$

e

$$\begin{aligned} \int_r^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)\cos(xy-d(x))dy &= \int_0^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)\cos(xy-d(x))dy \\ &\quad - \int_0^r y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)\cos(xy-d(x))dy \\ &= \int_0^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)\cos(xy-d(x))dy + O(1). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Observemos que

$$\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos a + \cos b).$$

Tomando $a = xy + ry - d(x) - d_0$ e $b = xy - ry - d(x) + d_0$, obtemos $(a+b)/2 = xy - d(x)$ e $(a-b)/2 = ry - d_0$. Substituindo em (2.31), temos

$$\begin{aligned} \int_r^R y^{\mu-1}\cos(ry-d_0)\cos(xy-d(x))dy &= \frac{1}{2}\int_0^R y^{\mu-1}\cos(xy+ry-d(x)-d_0)dy \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^R y^{\mu-1}\cos(xy-ry-d(x)+d_0)dy + O(1) \\ &=: \frac{1}{2}[I_1 + I_2] + O(1). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Assim, de (2.29), (2.30) e (2.32),

$$I = \frac{D}{2w^{1/2}(x)}[I_1 + I_2 + O(1)], \quad x \in [r, r+\varepsilon]. \tag{2.33}$$

Vamos estimar I_1. Sejam $\xi = x + r$ e $\delta(\xi) = d(x) + d_0$. Então, aplicando mudanças de variável convenientes, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^R y^{\mu-1} \cos(y(x+r) - d(x) - d_0) dy \\ &= \int_0^R y^{\mu-1} \cos(y\xi - \delta(\xi)) dy \\ &= \xi^{-\mu} \int_0^{\xi R} t^{\mu-1} \cos(t - \delta(\xi)) dt = \xi^{-\mu} G_\mu(R\xi, \delta(\xi)). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Agora, notemos que para $x \in [r, r+\varepsilon]$, temos $\xi \in [2r, 2r+\varepsilon]$, ou seja, $\xi \asymp 1$. Daí, $\xi^{-\mu} \asymp 1$ e, pelo Lema 2.4.2,

$$|I_1| = \left|\xi^{-\mu} G_\mu(R\xi, \delta(\xi))\right| = O(1).$$

Substituindo em (2.4), temos

$$I = \frac{D}{2w^{1/2}(x)}[I_2 + O(1)], \quad x \in [r, r+\varepsilon]. \tag{2.35}$$

Resta estimarmos I_2. Sejam $\xi = x - r$ e $\delta(\xi) = d(x) - d_0$. Então, aplicando mudanças de variável convenientes, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^R y^{\mu-1} \cos(y(x-r) - d(x) + d_0) dy \\ &= \int_0^R y^{\mu-1} \cos(y\xi - \delta(\xi)) dy \\ &= \xi^{-\mu} \int_0^{\xi R} t^{\mu-1} \cos(t - \delta(\xi)) dt = \xi^{-\mu} G_\mu(R\xi, \delta(\xi)). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Se $x \in [r + 1/R_0, r+\varepsilon]$, então $\xi \in [1/R_0, \varepsilon]$. Daí, $\xi R \geq R/R_0 = \ln R$ e, mais ainda, $(\ln R)^{\mu-1} \leq (\xi R)^{\mu-1}$. Aplicando o Lema 2.4.2, da igualdade (2.36), obtemos

$$I_2 = \xi^{-\mu}\Gamma(\mu)\cos\left(\delta(\xi) - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left((\xi R)^{\mu-1}\right),$$

que é equivalente a

$$I_2 = \xi^{-\mu}\Gamma(\mu)\cos\left(\delta(\xi) - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left((\ln R)^{\mu-1}\right).$$

Então, usando o fato que $x \geq \varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left|\xi^{-\mu}\Gamma(\mu)\cos\left(\delta(\xi) - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left((\ln R)^{\mu-1}\right)\right| \\ &\gtrsim \xi^{-\mu}\left|\cos\left(\delta(\xi) - \frac{\pi\mu}{2}\right) + O\left((\ln R)^{\mu-1}\right)\right| \\ &\gtrsim x^{-\mu}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

As relações assintóticas das equações (2.37) e (2.35), e o fato de $D/(w^{1/2}(x)) \asymp 1$, $x \in [r, r+\varepsilon]$, implicam

$$Ff_\mu(x) = I \gtrsim x^{-\mu} + O(1), \quad x \in [r, r+\varepsilon]. \tag{2.38}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\left\| s^{1/a} f_\mu \right\|_{p,v}^p &= \int_0^\infty \left| s^{1/a}(y) f_\mu(y) \right|^p v(y) dy \\
&= \int_r^R s^{p/a}(y) s^{-p/2}(y) y^{(\mu-1)p} \left| \cos(ry - d_0) \right|^p v(y) dy \\
&\leq \int_r^R s^{p(1/a-1/2)} y^{(\mu-1)p} v(y) dy, \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

e, de (2.38), e do fato que $u, w \asymp 1$ em $[r + 1/R_0, r+\varepsilon]$,

$$\begin{aligned}
\left\| w^{1/a'} Ff_\mu \right\|_{q,u}^q &= \int_0^\infty \left| w^{1/a'}(x) Ff_\mu(x) \right|^q u(x) dx \\
&= \int_0^\infty w^{q/a'}(x) \left| Ff_\mu(x) \right|^q u(x) dx \\
&\gtrsim \int_{r+1/R_0}^{r+\varepsilon} w^{q/a'}(x) \left| Ff_\mu(x) \right|^q u(x) dx \\
&\asymp \int_{r+1/R_0}^{r+\varepsilon} \left| Ff_\mu(x) \right|^q dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| w^{1/a'} Ff_\mu \right\|_{q,u}^q \gtrsim \int_{r+1/R_0}^{r+\varepsilon} \left| Ff_\mu(x) \right|^q dx \gtrsim J + O(1), \tag{2.40}$$

onde

$$J := \int_{r+1/R_0}^{r+\varepsilon} (x-r)^{-\mu q} dx = \int_{1/R_0}^{\varepsilon} t^{-\mu q} dt \asymp \begin{cases} R_0^{\mu q - 1}, & \mu \neq \frac{1}{q} \\ \ln R_0, & \mu = \frac{1}{q} \end{cases}.$$

Daí, se $\mu \geq 1/q$ e $R_0 \to \infty$, então $J \to \infty$. Logo, $\left\| w^{1/a'} Ff_\mu \right\|_{q,u}^q = \infty$ e, pela desigualdade de Pitt, $\left\| s^{1/a} f_\mu \right\|_{p,v}^p = \infty$. Portanto,

$$\int_r^R s^{p(1/a-1/2)} y^{(\mu-1)p} v(y) dy = \infty,$$

e, consequentemente,

$$\int_1^\infty s^{p(1/a-1/2)} y^{(\mu-1)p} v(y) dy = \infty,$$

como queríamos. $\square$

CAPÍTULO

3

APLICAÇÕES

A seguir, apresentaremos aplicações para F-transformações já conhecidas. Nesse capítulo, recuperaremos condições necessárias e suficientes conhecidas para a validade da desigualdade de Pitt para a transformação de Hankel, para a transformada de Fourier e para a transformada de Fourier n-dimensional de funções radiais.

3.1 Transformação de Hankel

O primeiro exemplo que vamos analisar é a desigualdade de Pitt para a transformação de Hankel. Iniciaremos trazendo a definição e propriedades básicas dessa F-transformação.

3.1.1 *Definição e propriedades básicas*

A teoria por trás da transformação de Hankel que precisaremos baseia-se, majoritariamente, na teoria das funções de Bessel. Nesta seção consideraremos $\alpha \geq -1/2$.

A função de Bessel é a solução da equação diferencial de Bessel

$$t^2 + \frac{d^2w}{dt^2} + t\frac{dw}{dt} + (t^2 - \alpha^2)w = 0,$$

conforme pode ser encontrado em (ERDÉLYI *et al.*, 1953, p. 4) ou (STEIN; WEISS, 1971, p. 154). Tal função pode ser representada da forma

$$J_\alpha(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(t/2)^{2m+\alpha}}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} = \frac{(t/2)^\alpha}{\Gamma\left((2\alpha+1)/2\right)\Gamma\left(1/2\right)} \int_{-1}^{1} e^{its}(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2} ds,$$

e consideraremos a função de Bessel normalizada, definida por

$$j_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(t), \quad t \in (0, \infty).$$

O Capítulo 7 de (ERDÉLYI *et al.*, 1953) desenvolve toda a teoria de funções de Bessel e traz várias representações úteis. Algumas representações assintóticas para a função de Bessel, que podem ser traduzidas para a função de Bessel normalizada, também podem ser encontradas em (LEVITAN; SARGSJAN, 1975, p. 244). A seguir, listaremos as propriedades que serão necessárias e são baseadas nas referências citadas.

Proposição 3.1.1. Seja $\nu = 2\alpha + 1$. Então, valem as seguintes afirmações:

(i) As funções $j_\alpha(\lambda t)$ são as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dt}\left(t^\nu \frac{d}{dt} j_\alpha(\lambda t)\right) + \lambda^2 t^\nu j_\alpha(\lambda t) = 0, \quad j_\alpha(0) = 1, \quad \frac{d}{dt} j_\alpha(0) = 0;$$

(ii) Para $\alpha > -1/2$, vale a representação como integral de Poisson

$$j_\alpha(t) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^1 \left(1-u^2\right)^{\alpha-1/2} \cos(tu)du;$$

(iii) Se $t \to +\infty$,

$$j_\alpha(t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)(2/\pi)^{1/2}}{t^{\alpha+1/2}} \left[\cos\left(t - c_\alpha\right) + O\left(t^{-1}\right)\right], \quad c_\alpha = \frac{\pi(\alpha+1/2)}{2}.$$

Essas propriedades a respeito das funções de Bessel serão fundamentais para demonstrar que a transformação de Hankel é, de fato, uma F-transformação. A propriedade (i) pode ser encontrada em (LEVITAN; SARGSJAN, 1975, p. 253), a (ii) pode ser encontrada em (ERDÉLYI *et al.*, 1953, p. 81), aplicando à definição de de função de Bessel normalizada, e (iii) em (LEVITAN; SARGSJAN, 1975, p. 244), aplicando à definição de função de Bessel normalizada.

Definimos as transformações direta e inversa de Hankel (quando existir) (LEVITAN; SARGSJAN, 1975, p. 252-254) por

$$H_\nu f(\lambda) = \int_0^\infty f(t) j_\alpha(\lambda t) t^\nu dt, \quad \nu = 2\alpha + 1 \geq 0 \tag{3.1}$$

e

$$H_\nu^{-1} f(t) = b_\alpha \int_0^\infty f(\lambda) j_\alpha(\lambda t) \lambda^\nu d\lambda, \quad b_\alpha^{-1} = (2^\alpha \Gamma(\alpha+1))^2, \tag{3.2}$$

onde f é uma função localmente integrável em $(0, \infty)$.

Em casos particulares, a transformação de Hankel se reduz a transformadas de Fourier clássicas. No caso em que $\alpha = -1/2$, se reduz à transformada de Fourier do cosseno e, no caso em que $\alpha = 1/2$, a transformada de Fourier do seno, conforme será demonstrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.1.2. A transformada de Fourier do cosseno de uma função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\hat{f}_c(x) = \int_0^\infty f(y)\cos(xy)dy, \quad x > 0.$$

Para $\alpha = -1/2$ (ERDÉLYI *et al.*, 1953, p. 79, fórmula (15)), vale

$$J_{-1/2}(z) = (1/2\pi z)^{-1/2}\cos z.$$

Pela definição de função de Bessel normalizada, temos $j_\alpha(t) = \cos(t)$ e $\nu = 2\alpha + 1 = 0$. Daí, para $x > 0$,

$$H_0 f(x) = \int_0^\infty f(y) j_{-1/2}(xy)dy = \int_0^\infty f(y)\cos(xy)dy = \hat{f}_c(x).$$

Exemplo 3.1.3. A transformada de Fourier do seno de uma função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\hat{f}_s(x) = \int_0^\infty f(y)\mathrm{sen}(xy)dy, \quad x > 0.$$

Para $\alpha = 1/2$ (ERDÉLYI *et al.*, 1953, p. 79, fórmula (14)), vale

$$J_{1/2}(z) = (1/2\pi z)^{-1/2}\mathrm{sen} z,$$

e pela definição de função de Bessel normalizada, temos $j_\alpha(t) = t^{-1}\mathrm{sen}(t)$ e $\nu = 2\alpha + 1 = 2$. Daí, para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}_s(x) &= \int_0^\infty f(y)\mathrm{sen}(xy)dy \\
&= \int_0^\infty f(y)\frac{xy}{xy}\mathrm{sen}(xy)\frac{y^2}{y^2}dy \\
&= x\int_0^\infty \frac{f(y)}{y}\frac{\mathrm{sen}(xy)}{xy}y^2 dy \\
&= xH_2 g(x),
\end{aligned}$$

onde $g(t) = f(t)/t$, para $t > 0$.

Proposição 3.1.4. Sejam $f \in L^2_{\lambda^\nu}((0, \infty))$, $\alpha \geq -1/2$ e $\nu = 2\alpha + 1$. Então, vale

$$\|f\|^2_{2,t^\nu} = b_\alpha \|H_\nu f\|^2_{2,\lambda^\nu}.$$

A identidade de Parseval acima pode ser obtida aplicando a construção feita em (LEVITAN; SARGSJAN, 1975, pp. 253-254) à fórmula (3.2) em (LEVITAN; SARGSJAN, 1975, p. 248).

3.1.2 Desigualdade de Pitt

Na subseção anterior, vimos que as transformações de Hankel direta e inversa coincidem a menos de uma constante. Em vista disso, trabalharemos apenas com a transformação direta de Hankel.

Iniciaremos essa subseção provando que a transformação de Hankel definida é uma F-transformação.

Proposição 3.1.5. Sejam $\alpha \geq -1/2$, j_α a função de Bessel normalizada, $\nu = 2\alpha + 1 \geq 0$. Então, a transformação de Hankel dada por

$$Hf(\lambda) := H_\nu f(\lambda) = \int_0^\infty f(t) j_\alpha(\lambda t) t^\nu dt$$

é uma F-transformação como definida em (1.13), com $\mathcal{K}(x,y) = j_\alpha(xy)$, $s(y) = y^\nu$ e $w(x) = b_\alpha x^\nu$.

Demonstração. De fato, s é uma função contínua, não-decrescente, não-negativa e satisfaz a condição Δ_2. Do mesmo modo, w é uma função contínua, não-decrescente, não-negativa e

$$w(x)s\left(\frac{1}{x}\right) = b_\alpha x^\nu \frac{1}{x^\nu} = b_\alpha \asymp 1, \quad x > 0.$$

Mais ainda, se $f \in L^2_s$, pela Proposição 3.1.4, vale a desigualdade de Bessel

$$\|Hf\|_{2,w} \lesssim \|f\|_{2,s}.$$

Agora, se $\mathcal{K}(x,y) = j_\alpha(xy)$, então $\mathcal{K}$ é um núcleo contínuo, já que, pelo item (i) da Proposição 3.1.1, j_α é autofunção do problema de Sturm-Liouville. Resta mostrar que

$$|\mathcal{K}(x,y)| \lesssim \min\left\{1, [w(x)s(y)]^{-1/2}\right\}, \quad x, y > 0.$$

Pela Proposição 3.1.1, item (iii), notamos que

$$|j_\alpha(xy)| = \left|\frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)(2/\pi)^{1/2}}{(xy)^{\alpha+1/2}} \left[\cos\left((xy) - c_\alpha\right) + O\left((xy)^{-1}\right)\right]\right|, \quad c_\alpha = \frac{\pi(\alpha+1/2)}{2},$$

quando $xy \gtrsim 1$, e isso implica que

$$|j_\alpha(xy)| \lesssim \frac{1}{(xy)^{\alpha+1/2}} = [w(x)s(y)]^{-1/2}.$$

Quando $xy \lesssim 1$, pela Proposição 3.1.1, item (ii), notamos que

$$\begin{aligned}
|j_\alpha(xy)| &= \left|\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^1 \left(1-u^2\right)^{\alpha-1/2} \cos(xyu) du\right| \\
&\leq \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \left|\int_0^1 \left(1-u^2\right)^{\alpha-1/2} \cos(xyu) du\right| \\
&\leq \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^1 \left|\left(1-u^2\right)^{\alpha-1/2}\right| du \\
&= \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^1 \left(1-u^2\right)^{\alpha-1/2} du \\
&= \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^{\pi/2} \left(1-(\operatorname{sen} t)^2\right)^{\alpha-1/2} \cos t dt \\
&= \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha} t dt \\
&= \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)} \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+1/2)}{2\Gamma(\alpha+1)} = 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|j_\alpha(xy)| \lesssim \min\left\{1, [w(x)s(y)]^{-1/2}\right\}, \quad x, y > 0.$$

Com isso, concluímos que a transformação de Hankel é uma F-transformação. □

Lema 3.1.6. Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $1 < a \leq 2$. Se $H := H_\nu$ é a transformação de Hankel, com $\nu = 2\alpha + 1 \geq 0$, e s e w são os pesos associados em sua definição, então

$$\left\|x^{-\gamma} Hf\right\|_{q,x^\nu} \lesssim \left\|y^\beta f\right\|_{p,y^\nu}$$

é equivalente a

$$\left\|w^{1/a'} Hf\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a} f\right\|_{p,v},$$

onde u e v são pesos tais que $u \geq 0$ é uma função não-crescente e $v \geq 0$ é uma função não-descrescente, e $u, v^{1-p'} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$, e valem as seguintes desigualdades:

$$\gamma \geq \nu\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{a'}\right), \tag{3.3}$$

$$\beta \geq \nu\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{a'}\right), \tag{3.4}$$

$$\gamma < \frac{\nu+1}{q} - \frac{\nu}{a'}, \tag{3.5}$$

$$\beta < \frac{\nu+1}{p'} - \frac{\nu}{a'}. \tag{3.6}$$

Demonstração. De fato, observemos que, para $s^{1/a} f \in L^p_v((0,\infty))$,

$$\left\|w^{1/a'} Hf\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a} f\right\|_{p,v}$$

pode ser escrito da forma

$$\left[\int_0^\infty \left|w^{1/a'}(x) Hf(x)\right|^q u(x)dx\right]^{1/q} \lesssim \left[\int_0^\infty \left|s^{1/a}(y) f(y)\right|^p v(y)dy\right]^{1/p},$$

que é equivalente a

$$\left[\int_0^\infty \left|w^{1/a'-1/q}(x) u^{1/q}(x) Hf(x)\right|^q w(x)dx\right]^{1/q} \lesssim \left[\int_0^\infty \left|s^{1/p'-1/a'}(y) v^{1/p} f(y)\right|^p s(y)dy\right]^{1/p},$$

e pode ser escrito da forma

$$\left\|w^{1/a'-1/q} u^{1/q} Hf\right\|_{q,w} \lesssim \left\|s^{1/p'-1/a'} v^{1/p} f\right\|_{p,s}.$$

Como as desigualdades independem das constantes, podemos considerar $w(x) = x^\nu$ e $s(y) = y^\nu$. Daí,

$$\begin{aligned} x^{-\gamma} &= w^{1/a'-1/q}(x) u^{1/q}(x) \\ x^{-\gamma} &= x^{\nu/a'-\nu/q} u^{1/q}(x) \\ u(x) &= x^{-\gamma q - q\nu/a' + \nu}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y^\beta &= s^{1/p'-1/a'}(y)v^{1/p}(y) \\ y^\beta &= y^{\nu/p'-\nu/a'}(y)v^{1/p}(y) \\ v(y) &= y^{p\beta-\nu p/p'+\nu p/a'}. \end{aligned}$$

Como u é não-crescente, então $-\gamma q - q\nu/a' + \nu \leq 0$, ou seja,

$$\gamma \geq \nu\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{a'}\right).$$

E como $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$, então $-\gamma q - q\nu/a' + \nu > -1$, isto é,

$$\gamma < \frac{\nu+1}{q} - \frac{\nu}{a'}.$$

Agora, como v é não-decrescente, $p\beta - \nu p/p' + \nu p/a' \geq 0$, ou seja,

$$\beta \geq \nu\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{a'}\right).$$

E como $v^{1-p'} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$, então $(1-p')(p\beta - \nu p/p' + \nu p/a') > -1$, isto é,

$$\beta < \frac{\nu+1}{p'} - \frac{\nu}{a'}.$$

Com isso, conseguimos a equivalência entre as desigualdades. $\square$

Agora, vamos demonstrar o resultado principal dessa seção de aplicações: a desigualdade de Pitt para a transformação de Hankel.

Teorema 3.1.7. Seja $H := H_\nu$ a transformação de Hankel, com $\nu = 2\alpha + 1 \geq 0$. A desigualdade de Pitt

$$\left\|x^{-\gamma}Hf\right\|_{q,x^\nu} \lesssim \left\|y^\beta f\right\|_{p,y^\nu},$$

com $1 < p \leq q < \infty$, vale se, e somente se,

$$\gamma - \beta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)(\nu+1)$$

e

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma < \frac{\nu+1}{q}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.6, sabemos que essa desigualdade de Pitt é equivalente a

$$\left\|w^{1/a'}Hf\right\|_{q,u} \lesssim \left\|s^{1/a}f\right\|_{p,v},$$

onde $u(x) = x^{-\gamma q - q\nu/a' + \nu}$, $v(y) = y^{p\beta - \nu p/p' + \nu p/a'}$, $w(x) = x^\nu$ e $s(y) = y^\nu$.

Notemos primeiro que o núcleo $\mathcal{K}$ satisfaz as condições (2.17) e (2.20) do Teorema 2.4.3. Aplicando esse resultado, temos, para todo $\mu > 1/p'$,

$$\int_0^1 w^{q/a'}(x)u(x)dx + \int_1^\infty w^{q(1/a'-1/2)}(x)x^{-q\mu}u(x)dx < \infty$$
$$\int_0^1 x^{\nu q/a'}x^{-\gamma q - q\nu/a' + \nu}dx + \int_1^\infty x^{\nu q(1/a'-1/2)}x^{-q\mu}x^{-\gamma q - q\nu/a' + \nu}dx < \infty$$
$$\int_0^1 x^{\nu q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu}dx + \int_1^\infty x^{\nu q(1/a'-1/2) - q\mu - \gamma q - q\nu/a' + \nu}dx < \infty.$$

A desigualdade só ocorre se

$$I_1 := \int_0^1 x^{\nu q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu}dx < \infty$$

e

$$I_2 := \int_1^\infty x^{\nu q(1/a'-1/2) - q\mu - \gamma q - q\nu/a' + \nu}(x)dx < \infty.$$

Temos $I_1 < \infty$ se, e somente se, $\nu q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu > -1$, ou seja

$$\gamma < \frac{\nu + 1}{q}. \tag{3.7}$$

E, temos $I_2 < \infty$ se, e somente se, $\nu q(1/a' - 1/2) - q\mu - \gamma q - q\nu/a' + \nu < -1$, isto é,

$$\gamma > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \frac{1}{q} - \mu =: A.$$

Como isso é válido para todo $\mu > 1/p'$, então A está delimitado superiormente por

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}.$$

Por isso,

$$\gamma \geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}$$

Além disso, levando em conta que vale (3.3), então

$$\gamma \geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\}. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), segue

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma < \frac{\nu + 1}{q}.$$

Para obtermos a igualdade, vamos aplicar o Teorema 2.3.7. Como temos todas hipóteses desse teorema satisfeitas, sabemos que vale

$$\left(P_{1/r}u\right)^{1/q}\left(P_r v^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0,$$

que equivale a

$$\left[\int_0^{1/r} x^{-\gamma q - q\nu/a' + \nu} dx\right]^{1/q} \left[\int_0^r y^{-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')} dy\right]^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0. \tag{3.9}$$

Notemos que

$$\left[\int_0^{1/r} x^{-\gamma q - q\nu/a' + \nu} dx\right]^{1/q} \asymp \begin{cases} r^{[\gamma q + q\nu/a' - \nu - 1]/q}, & \text{se } -\gamma q - q\nu/a' + \nu > -1 \\ \text{diverge}, & \text{se } -\gamma q - q\nu/a' + \nu \leq -1 \end{cases},$$

e

$$\left[\int_0^r y^{-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')} dy\right]^{1/p'} \asymp \begin{cases} r^{[-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')+1]/p'}, & \text{se } -p'(\beta-\nu/p'+\nu/a') > -1 \\ \text{diverge}, & \text{se } -p'(\beta-\nu/p'+\nu/a') \leq -1 \end{cases}.$$

Com isso, (3.9) acontece se, e somente se, $-\gamma q - q\nu/a' + \nu > -1$, $-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a') > -1$ e

$$r^{(\gamma q + q\nu/a' - \nu - 1)/q} r^{(-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')+1)/p'} \lesssim 1, \quad r > 0. \tag{3.10}$$

Mas, a equação (3.10) ocorre somente se

$$\frac{\gamma q + q\nu/a' - \nu - 1}{q} + \frac{-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')+1}{p'} = 0,$$

isto é, se

$$\gamma - \beta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)(\nu + 1).$$

Notemos também que $-\gamma q - q\nu/a' + \nu > -1$ e $-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a') > -1$ equivalem a (3.5) e (3.6). Logo, essas condições estão asseguradas pelo Lema 3.1.6. Assim, se

$$\left\|x^{-\gamma} Hf\right\|_{q,x^\nu} \lesssim \left\|y^\beta f\right\|_{p,y^\nu},$$

com $1 < p \leq q < \infty$, então

$$\gamma - \beta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)(\nu + 1)$$

e

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma < \frac{\nu+1}{q}.$$

Agora, supomos que

$$\gamma - \beta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)(\nu + 1)$$

e

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma < \frac{\nu+1}{q}.$$

Para mostrarmos que a desigualdade é válida, vamos utilizar o Corolário 2.3.6. Considerando a hipótese e o que foi mostrado na primeira parte da demonstração, sabemos que vale a desigualdade (2.12). Resta mostrar que a desigualdade (2.13) é válida, isto é, que

$$\left[Q_{1/r}\left(x^{-q/a'}u\right)\right]^{1/q}\left[Q_r\left(y^{-p'/a'}v^{1-p'}\right)\right]^{1/p'}\lesssim 1,\quad r>0,$$

quando $a'\geq \max\{q,p'\}$. Em nosso caso, essa desigualdade se traduz da forma

$$\begin{aligned}\left[\int_{1/r}^{\infty}x^{-q/a'}x^{-\gamma q-q\nu/a'+\nu}dx\right]^{1/q}\left[\int_{r}^{\infty}y^{-p/a'}y^{-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')}dy\right]^{1/p'}&\lesssim 1,\quad r>0,\\ \left[\int_{1/r}^{\infty}x^{-q/a'-\gamma q-q\nu/a'+\nu}dx\right]^{1/q}\left[\int_{r}^{\infty}y^{-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')}dy\right]^{1/p'}&\lesssim 1,\quad r>0. \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Notemos que

$$\left[\int_{1/r}^{\infty}x^{-q/a'-\gamma q-q\nu/a'+\nu}dx\right]^{1/q}\asymp\begin{cases}r^{[q/a'+\gamma q+q\nu/a'-\nu-1]/q}, & \text{se }-q/a'-\gamma q-q\nu/a'+\nu<-1\\ \text{diverge }, & \text{se }-q/a'-\gamma q-q\nu/a'+\nu\geq -1\end{cases},$$

e

$$I_r:=\left[\int_{r}^{\infty}y^{-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')}dy\right]^{1/p'}$$

satisfaz

$$I_r\asymp\begin{cases}r^{[-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')+1]/p'}, & \text{se }-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')<-1\\ \text{diverge }, & \text{se }-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')\geq -1\end{cases}.$$

Daí, (3.11) só ocorre se $-q/a'-\gamma q-q\nu/a'+\nu<-1$, $-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')<-1$ e

$$r^{(q/a'+\gamma q+q\nu/a'-\nu-1)/q}r^{[-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')+1]/p'}\lesssim 1,\quad r>0. \qquad (3.12)$$

Mas, (3.12) é valida se, e somente se,

$$\frac{q/a'+\gamma q+q\nu/a'-\nu-1}{q}+\frac{-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')+1}{p'}=0,$$

isto é, se

$$\gamma-\beta=\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p'}\right)(\nu+1),$$

que temos por hipótese.

Resta garantir que $-q/a'-\gamma q-q\nu/a'+\nu<-1$ e $-p/a'-p'(\beta-\nu/p'+\nu/a')<-1$ acontecem. Notemos que,

$$\begin{aligned}a'&\geq\max\{q,p'\}\\ \frac{1}{a'}&\leq\min\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{p'}\right\}\\ \frac{1}{q}-\frac{1}{a'}&\geq\frac{1}{q}-\min\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{p'}\right\}=\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p'}\right\},\end{aligned}$$

e como $a' \geq 2$, então
$$\frac{1}{q} - \frac{1}{a'} \geq \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$
Daí, $-q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu < -1$ é equivalente a
$$\gamma > \nu\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{a'}\right) + \frac{1}{q} - \frac{1}{a'}$$
que, por conseguinte, equivale a
$$\gamma \geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\},$$
que temos por hipótese. Por fim, observemos que
$$\frac{q/a' + \gamma q + q\nu/a' - \nu - 1}{q} + \frac{-p/a' - p'(\beta - \nu/p' + \nu/a') + 1}{p'} = 0,$$
implica
$$\frac{-p/a' - p'(\beta - \nu/p' + \nu/a') + 1}{p'} = \frac{-q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu + 1}{q},$$
e, portanto,
$$-p/a' - p'(\beta - \nu/p' + \nu/a') = \frac{p'(-q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu + 1)}{q} - 1.$$

Daí, $-p/a' - p'(\beta - \nu/p' + \nu/a') < -1$ se, e somente se,
$$\begin{aligned}
\frac{p'(-q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu + 1)}{q} - 1 &< -1 \\
\frac{p'(-q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu + 1)}{q} &< 0 \\
-q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu + 1 &< 0 \\
-q/a' - \gamma q - q\nu/a' + \nu &< -1,
\end{aligned}$$

que já garantimos que ocorre no passo anterior. Com isso, concluímos que a condição da equação (2.13) do Corolário 2.3.6 é satisfeita. Portanto, segue desse resultado e do Lema 3.1.6 que vale a desigualdade de Pitt
$$\left\|x^{-\gamma} Hf\right\|_{q,x^{\nu}} \lesssim \left\|y^{\beta} f\right\|_{p,y^{\nu}},$$
com $1 < p \leq q < \infty$.

□

3.2 Transformadas do Seno e do Cosseno

Nessa seção, vamos recuperar o mesmo tipo de resultado obtido para a transformação de Hankel, mas dessa vez para as transformadas do seno e do cosseno. Assim como visto na seção anterior, as transformadas do seno e do cosseno podem ser escritas em função de uma transformação de Hankel. Com isso, poderemos aplicar o Teorema 3.1.7 para obter esses resultados.

Exemplo 3.2.1. A transformada de Fourier do cosseno de uma função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\widehat{f}_c(x) = \int_0^\infty f(y)\cos(xy)dy, \quad x > 0.$$

Conforme já visto no Exemplo 3.1.2, ela pode ser recuperada pela transformação de Hankel, com $\alpha = -1/2$, da forma

$$\widehat{f}_c(x) = H_0 f(x), \quad x > 0.$$

Aplicando o Teorema 3.1.7 para $\nu = 2\alpha + 1 = 0$, temos

$$\left\|x^{-\gamma}\widehat{f}_c\right\|_{q,x^\nu} \lesssim \left\|y^\beta f\right\|_{p,y^\nu},$$

com $1 < p \leq q < \infty$, vale se, e somente se,

$$\gamma - \beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}$$

e

$$\max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma < \frac{1}{q}.$$

Exemplo 3.2.2. A transformada de Fourier do seno de uma função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\widehat{f}_s(x) = \int_0^\infty f(y)\mathrm{sen}(xy)dy, \quad x > 0.$$

Conforme já visto no Exemplo 3.1.3, ela pode ser recuperada pela transformação de Hankel, com $\alpha = 1/2$, da forma

$$\widehat{f}_s(x) = xH_2 g(x), \quad x > 0,$$

onde $g(t) = \frac{f(t)}{t}$.

Queremos encontrar uma equivalência para a desigualdade

$$\left\|x^{-\gamma}\widehat{f}_s\right\|_q \lesssim \left\|y^\beta f\right\|_p, \quad 1 < p \leq q < \infty.$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\left\|x^{-\gamma}\widehat{f}_s\right\|_q &= \left(\int_0^\infty \left|\widehat{f}_s(x)\right|^q x^{-\gamma q}dx\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty |xH_2g(x)|^q x^{-\gamma q}dx\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty \left|x^{-(\gamma-1+2/q)}H_2g(x)\right|^q x^2dx\right)^{1/q} \\
&= \left\|x^{-(\gamma-1+2/q)}H_2g\right\|_{q,x^2},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left\|y^{\beta}f\right\|_p &= \left(\int_0^\infty |f(y)|^p y^{\beta p}dy\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\infty \left|\frac{f(y)}{y}\frac{y^{\beta+1}}{y^{2/p}}\right|^p y^2dy\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\infty \left|g(y)y^{\beta+1-2/p}\right|^p y^2dy\right)^{1/p} \\
&= \left\|y^{\beta+1-2/p}g\right\|_{p,x^2}.
\end{aligned}
$$

Então, $\left\|x^{-\gamma}\widehat{f}_s\right\|_q \lesssim \left\|y^{\beta}f\right\|_p$ é equivalente a

$$\left\|x^{-(\gamma-1+2/q)}H_2g\right\|_{q,x^2} \lesssim \left\|y^{\beta+1-2/p}g\right\|_{p,x^2}.$$

Definindo $\gamma' := \gamma - 1 + 2/q$ e $\beta' := \beta + 1 - 2/p$, e aplicando o Teorema 3.1.7 para γ', β' e $\nu = 2\alpha + 1 = 2$, obtemos

$$\gamma' - \beta' = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)(2+1),$$

que implica

$$\gamma - 1 + \frac{2}{q} - \beta - 1 + \frac{2}{p} = \frac{3}{q} - \frac{3}{p'}$$

e, com isso,

$$\gamma - \beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}.$$

Mais ainda, temos

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)2 + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma' < \frac{2+1}{q},$$

que resulta em

$$\max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma < \frac{1}{q} + 1.$$

Portanto,

$$\left\|x^{-\gamma}\widehat{f}_s\right\|_q \lesssim \left\|y^{\beta}f\right\|_p, \quad 1 < p \leq q < \infty,$$

vale se, e somente se,

$$\gamma - \beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}$$

e

$$\max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \leq \gamma < \frac{1}{q} + 1.$$

3.3 Transformada de Fourier

Para finalizar, recuperaremos a desigualdade de Pitt clássica para a transformada de Fourier em $(0,\infty)$, e para a transformada de Fourier n-dimensional de funções radiais.

Teorema 3.3.1. Sejam $f \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$, $n \geq 1$, e $\widehat{f} : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sua transformada de Fourier dada por

$$\widehat{f}(x) := \int_0^\infty f(y)e^{-ixy}dy.$$

A Desigualdade de Pitt

$$\left[\int_0^\infty \left|\widehat{f}(x)\right|^q x^{-q\gamma}dx\right]^{1/q} \lesssim \left[\int_0^\infty |f(y)|^p\, y^{p\beta}dy\right]^{1/p}, \tag{3.13}$$

onde $1 < p \leq q < \infty$, vale se, e somente se,

$$\max\left\{0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right\} \leq \gamma < \frac{1}{q}$$

e

$$\beta - \gamma = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Demonstração. Observemos que, nesse caso, $u(x) = x^{-q\gamma}$ e $v(y) = y^{p\beta}$. Estamos supondo que u é não-crescente e locamente integrável, que v é não-decrescente e que $v^{1-p'}$ é locamente integrável.

Vamos supor que vale a desigualdade de Pitt. Como visto no Capítulo 1, $|\mathcal{K}(x,y)| = 1$. Aplicando o Teorema 2.3.7, sabemos que vale a condição

$$\left(P_{1/r}u\right)^{1/q}\left(P_r v^{1-p'}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0.$$

No nosso caso, isso se traduz em

$$\left(\int_0^{1/r} x^{-\gamma q}dx\right)^{1/q}\left(\int_0^r y^{p\beta(1-p')}dy\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0. \tag{3.14}$$

Notemos que $p\beta(1-p') = -p'\beta$,

$$\int_0^{1/r} x^{-\gamma q}dx \asymp \begin{cases} r^{\gamma q-1}, & \gamma q < 1 \\ \text{diverge}, & \gamma q \geq 1 \end{cases},$$

e

$$\int_0^r y^{p\beta(1-p')}dy \asymp \begin{cases} r^{-p'\beta+1}, & -p'\beta > -1 \\ \text{diverge}, & -p'\beta \leq -1 \end{cases}.$$

Logo, a equação (3.14) é valida se, e somente se, $\gamma q < 1$, $-p'\beta > -1$ e

$$\left(r^{\gamma q-1}\right)^{1/q}\left(r^{-p'\beta+1}\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r > 0.$$

Mas essa desigualdade é equivalente a

$$r^{\gamma-1/q-\beta+1/p'} \lesssim 1, \quad r>0,$$

e isso só ocorre quando

$$\gamma - 1/q - \beta + 1/p' = 0,$$

que equivale a

$$\beta-\gamma = 1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}.$$

Logo, a equação (3.14) é valida se, e somente se, $\gamma < 1/q$, $\beta < 1/p'$ e

$$\beta-\gamma = 1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}.$$

Mais ainda, do fato de u ser não-crescente e v ser não-decrescente, sabemos que $\gamma \geq 0$ e $\beta \geq 0$. Levando em conta que $\gamma < 1/q$, $\beta < 1/p'$ e $\beta - \gamma = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, obtemos

$$0 \leq \gamma < \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \gamma \geq -1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Assim,

$$\max\left\{0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right\} \leq \gamma < \frac{1}{q}.$$

Agora, supomos que as condições sobre as potências sejam válidas. Dessas condições, inferimos que $0 \leq \gamma < 1/q$ e $0 \leq \beta < 1/p'$. Pelo que foi feito no passo anterior, sabemos que as condições dadas e obtidas implicam que a condição (2.12) do Corolário 2.3.6 é válida. Resta checar que vale a condição (2.13).

De fato, supondo $a' \geq \max\{q, p'\}$, a condição (2.13) em nosso caso se traduz como

$$\left(\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'} x^{-q\gamma} dx\right)^{1/q} \left(\int_{r}^{\infty} y^{-p'/a'} y^{p\beta(1-p')} dy\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r>0,$$

isto é,

$$\left(\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'-q\gamma} dx\right)^{1/q} \left(\int_{r}^{\infty} y^{-p'/a'-p'\beta} dy\right)^{1/p'} \lesssim 1, \quad r>0. \tag{3.15}$$

Notemos que

$$\int_{1/r}^{\infty} x^{-q/a'-q\gamma} dx \asymp \begin{cases} r^{q/a'+q\gamma-1}, & -q/a'-q\gamma < -1 \\ \text{diverge}, & -q/a'-q\gamma \geq -1 \end{cases},$$

e

$$\int_{r}^{\infty} y^{-p'/a'-p'\beta} dy \asymp \begin{cases} r^{-p'/a'-p'\beta+1}, & -p'/a'-p'\beta < -1 \\ \text{diverge}, & -p'/a'-p'\beta \geq -1 \end{cases}.$$

Logo, (3.15) ocorre se, e somente se, $-q/a' - q\gamma < -1$, $-p'/a' - p'\beta < -1$ e

$$r^{1/a'+\gamma-1/q-1/a'-\beta+1/p'} \lesssim 1, \quad r>0. \tag{3.16}$$

Mas, (3.16) só ocorre quando

$$1/a' + \gamma - 1/q - 1/a' - \beta + 1/p' = 0,$$

isto é, quando

$$\beta - \gamma = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Assim, as hipóteses do Corolário 2.3.6 estão satisfeitas. Com isso, concluímos que vale a desigualdade de Pitt para a transformada de Fourier. □

Finalizamos este trabalho recuperando a desigualdade de Pitt para a transformada de Fourier n-dimensional de uma função radial. Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, é radial (STEIN; SHAKARCHI, 2003, p. 182) se existe uma função $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(|x|)$.

Lema 3.3.2. Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, é não-negativa e integrável, tal que $f(x) = h(|x|)$, para alguma $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \left|S^{n-1}\right| \int_0^\infty h(r)r^{n-1}dr,$$

onde S^{n-1} denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ e $|S^{n-1}| = m(S^{n-1})$ representa a área da superfície da esfera segundo a medida de Lebesgue induzida sobre ela.

O lema acima pode ser encontrado em (FOLLAND, 1999, p. 79).

Teorema 3.3.3. Sejam $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ uma função radial, $n \geq 1$, e $1 < p \leq q < \infty$. Vale a Desigualdade de Pitt

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(x)\right|^q |x|^{-q\gamma}\, dx\right]^{1/q} \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, |y|^{p\beta}\, dy\right]^{1/p} \tag{3.17}$$

se, e somente se,

$$\frac{n}{q} - \frac{n+1}{2} + \max\left\{\frac{1}{q'}, \frac{1}{p}\right\} \leq \gamma < \frac{1}{q}$$

e

$$\gamma - \beta = n\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1\right).$$

Demonstração. Como f é uma função radial, então existe $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(|x|)$. A transformada de Fourier n-dimensional de uma função radial é também radial (STEIN; WEISS, 1971, p. 155) e pode ser escrita em termos da transformada de Hankel, da forma

$$\widehat{f}(x) = \left|S^{n-1}\right| H_\nu h(x) = \left|S^{n-1}\right| \int_0^\infty h(t) j_\alpha(2\pi\, |x|\, t) t^\nu dt,$$

onde $\nu = n-1$ e $\alpha = n/2-1$ (PINOS, 2018, p. 59). Pela radialidade de f, $\widehat{f}$ e das potências, segue do Lema 3.3.2 que

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \, |y|^{p\beta} \, dy\right]^{1/p} &= \left[\left|S^{n-1}\right| \int_0^\infty \left|y^\beta h(y)\right|^p y^{n-1} dy\right]^{1/p} \\ &= \left|S^{n-1}\right|^{1/p} \left\|y^\beta h\right\|_{p,y^\nu}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(x)\right|^q |x|^{-q\gamma} \, dx\right]^{1/q} &= \left[\left|S^{n-1}\right|^{1+q} \int_0^\infty \left|x^{-\gamma} H_\nu h(x)\right|^q x^{n-1} dx\right]^{1/q} \\ &= \left|S^{n-1}\right|^{1/q+1} \left\|x^{-\gamma} H_\nu h\right\|_{q,x^\nu}.\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade (3.17) é equivalente a

$$\left\|x^{-\gamma} H_\nu h\right\|_{q,x^\nu} \lesssim \left\|y^\beta h\right\|_{p,y^\nu}.$$

Aplicando o Teorema 3.1.7, a desigualdade (3.17) vale se, e somente se,

$$\gamma - \beta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)(\nu+1)$$

e

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\nu + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \le \gamma < \frac{\nu+1}{q}.$$

Como $\nu = n-1$, temos

$$\gamma - \beta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)((n-1)+1),$$

que implica

$$\gamma - \beta = n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right)$$

e resulta em

$$\gamma - \beta = n\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1\right).$$

Mais ainda, temos

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)(n-1) + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \le \gamma < \frac{(n-1)+1}{q},$$

que equivale a

$$\frac{n}{q} - \frac{1}{q} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right\} \le \gamma < \frac{n}{q}$$

e pode ser visto da forma

$$\frac{n}{q} - \frac{n+1}{2} + \max\left\{\frac{1}{q'}, \frac{1}{p}\right\} \le \gamma < \frac{n}{q},$$

como queríamos. $\square$

REFERÊNCIAS

BARY, N. K. **A treatise on trigonometric series. Vol. I**. [S.l.]: The Macmillan Company, New York, 1964. Vol. I: xxiii+553 pp. Vol. II: xix+508 p. (A Pergamon Press Book). Authorized translation by Margaret F. Mullins. Citado na página 34.

BECKNER, W. Pitt's inequality with sharp convolution estimates. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 136, n. 5, p. 1871–1885, 2008. ISSN 0002-9939,1088-6826. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-07-09216-7>. Citado na página 15.

BENEDETTO, J. J.; HEINIG, H. P. Weighted Fourier inequalities: new proofs and generalizations. **J. Fourier Anal. Appl.**, v. 9, n. 1, p. 1–37, 2003. ISSN 1069-5869,1531-5851. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00041-003-0003-3>. Citado nas páginas 15 e 28.

BENNETT, C.; SHARPLEY, R. **Interpolation of operators**. [S.l.]: Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. v. 129. xiv+469 p. (Pure and Applied Mathematics, v. 129). ISBN 0-12-088730-4. Citado na página 28.

ERDÉLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F.; TRICOMI, F. G. **Higher transcendental functions. Vol. II**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953. xxvi+302, xvii+396 p. Based, in part, on notes left by Harry Bateman. Citado nas páginas 34, 35, 43, 44 e 45.

FOLLAND, G. B. **Real analysis**. Second. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. xvi+386 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-31716-0. Citado nas páginas 16, 17, 26, 29 e 57.

GORBACHEV, D.; LIFLYAND, E.; TIKHONOV, S. Weighted norm inequalities for integral transforms. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 67, n. 5, p. 1949–2003, 2018. ISSN 0022-2518,1943-5258. Disponível em: <https://doi.org/10.1512/iumj.2018.67.7470>. Citado na página 16.

GORBACHEV, D.; TIKHONOV, S. Moduli of smoothness and growth properties of Fourier transforms: two-sided estimates. **J. Approx. Theory**, v. 164, n. 9, p. 1283–1312, 2012. ISSN 0021-9045,1096-0430. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2012.05.017>. Citado na página 15.

GRAFAKOS, L. **Classical Fourier analysis**. Third. Springer, New York, 2014. v. 249. xviii+638 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 249). ISBN 978-1-4939-1193-6; 978-1-4939-1194-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1194-3>. Citado na página 15.

HEINIG, H. P. Weighted norm inequalities for classes of operators. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 33, n. 4, p. 573–582, 1984. ISSN 0022-2518,1943-5258. Disponível em: <https://doi.org/10.1512/iumj.1984.33.33030>. Citado na página 28.

JORDÃO, T. Decay of Fourier transforms and generalized Besov spaces. **Constr. Math. Anal.**, v. 3, n. 1, p. 20–35, 2020. ISSN 2651-2939. Disponível em: <https://doi.org/10.33205/cma.646557>. Citado na página 15.

JURKAT, W. B.; SAMPSON, G. On maximal rearrangement inequalities for the Fourier transform. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 282, n. 2, p. 625–643, 1984. ISSN 0002-9947,1088-6850. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1999257>. Citado na página 26.

KUFNER, A.; PERSSON, L.-E.; SAMKO, N. **Weighted inequalities of Hardy type**. Second. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017. xx+459 p. ISBN 978-981-3140-64-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/10052>. Citado na página 16.

LEVITAN, B. M.; SARGSJAN, I. S. **Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 1975. Vol. 39. xi+525 p. (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 39). Translated from the Russian by Amiel Feinstein. Citado nas páginas 44 e 45.

LIFLYAND, E. **Harmonic analysis on the real line -a path in the theory**. Birkhäuser/Springer, Cham, 2021. ix+197 p. (Pathways in Mathematics). ISBN 978-3-030-81891-3; 978-3-030-81892-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-81892-0>. Citado nas páginas 15 e 18.

OPIC, B.; KUFNER, A. **Hardy-type inequalities**. [S.l.]: Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990. v. 219. xii+333 p. (Pitman Research Notes in Mathematics Series, v. 219). ISBN 0-582-05198-3. Citado na página 27.

PINOS, A. D. **Convergence and integrability of fourier transforms**. Tese (Doutorado em Matemática) — Universitat Autònoma de Barcelona, 2018. Disponível em <https://ddd.uab.cat/record/190452>. Citado na página 58.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Fourier analysis**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. v. 1. xvi+311 p. (Princeton Lectures in Analysis, v. 1). An introduction. ISBN 0-691-11384-X. Citado na página 57.

STEIN, E. M.; WEISS, G. Interpolation of operators with change of measures. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 87, p. 159–172, 1958. ISSN 0002-9947,1088-6850. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1993094>. Citado na página 21.

_____. **Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971. No. 32. x+297 p. (Princeton Mathematical Series, No. 32). Citado nas páginas 21, 24, 43 e 57.

TITCHMARSH, E. C. **Introduction to the theory of Fourier integrals**. Third. [S.l.]: Chelsea Publishing Co., New York, 1986. x+394 p. ISBN 0-8284-0324-4. Citado nas páginas 16 e 18.

ICMC USP
SÃO CARLOS