

Sistemas Aumentados de Grupos e
Shifts de Tipo Finito ¹

ELIANE ZERBETTO TRALDI

Orientador: PROF. DR. OZIRIDE MANZOLI NETO

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, ICMC-USP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de “Mestre em Ciências na Área de Matemática”.

São Carlos

Janeiro de 1999

¹Este Trabalho teve suporte financeiro da CAPES e FAPESP.

Agradecimentos

Agradeço ao Dide pela amizade e dedicação com que me orientou.

Agradeço aos meus pais pelo apoio e grande incentivo que sempre me deram.

Agradeço ao Prof. Daniel pela ajuda.

Agradeço aos professores e funcionários do ICMC.

Agradeço aos colegas de curso e amigos, José Carlos, Luciana, Márcio, Maria Alice e Vera.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Seja (G, χ, x) uma terna consistindo de um grupo finitamente apresentado G , um epimorfismo $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$, e um elemento distingüido $x \in G$ tal que $\chi(x) = 1$. Dado um grupo simétrico, construímos um grafo direcionado finito Γ que descreve o conjunto Φ_r de representações $\rho : \text{Ker}(\chi) \rightarrow S_r$ bem como a aplicação $\sigma_x : \Phi_r \rightarrow \Phi_r$ definida por $(\sigma_x \rho)(a) = \rho(x^{-1}ax)$ para todo $a \in \text{Ker}(\chi)$. O par (Φ_r, σ_x) tem a estrutura de um shift de tipo finito. Discutimos propriedades básicas e aplicações do shift representação (Φ_r, σ_x) , incluindo aplicações à Teoria de Nós.

Abstract

Let (G, χ, x) be a triple consisting of a finitely presented group G , an epimorphism $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$, and a distinguished element $x \in G$ such that $\chi(x) = 1$. Given a finite symmetric group S_r , we construct a finite directed graph Γ that describes the set Φ_r of representations $\rho : \text{Ker}(\chi) \rightarrow S_r$ as well as the mapping $\sigma_x : \Phi_r \rightarrow \Phi_r$ defined by $(\sigma_x \rho)(a) = \rho(x^{-1}ax)$ for all $a \in \text{Ker}(\chi)$. The pair (Φ_r, σ_x) has the structure of a shift of finite type. We discuss basic properties and applications of the representation shift (Φ_r, σ_x) , including applications to knot theory.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Apresentação de Grupos	3
1.2 Nós e Enlaçamentos	4
1.3 Apresentação de Wirtinger	5
2 Representações em Grupos de Permutações e Sistemas Dinâmicos de (G, χ, x)	11
2.1 Representações em Grupos de Permutações	11
2.2 Os Sistemas Dinâmicos de (G, χ, x)	21
3 Shifts de Tipo Finito	25
4 Aplicações	33
4.1 O Invariante de Bieri-Neumann-Strebel	33

4.2	Os Grupos de Baumslag-Solitar	38
4.3	Um Invariante de Entropia para (G, χ)	41
	Referências Bibliográficas	48

Introdução

Seja G um grupo finitamente apresentado e $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$ um epimorfismo. Vamos denotar o núcleo de χ por K_χ . Esforços para entender a estrutura de K_χ são dificultados pelo fato deste grupo frequentemente não ser finitamente gerado. Entretanto várias aplicações de Teoria de Grupos à Topologia requerem tal investigação.

Um **sistema aumentado de grupo** é uma terna (G, χ, x) consistindo de um grupo finitamente apresentado G , um epimorfismo $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$, e um elemento distinguido $x \in G$ tal que $\chi(x) = 1$.

No Capítulo 1 daremos alguns resultados e definições que são pré-requisitos básicos para este trabalho.

No Capítulo 2 estudaremos as representações de K_χ em grupos de permutação, onde χ é o epimorfismo de algum sistema aumentado de grupo (G, χ, x) . Também estudaremos os sistemas dinâmicos (Φ_r, σ_x) e $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$ associados a (G, χ, x) . Os elementos de (Φ_r, σ_x) são as representações de K_χ no grupo simétrico S_r . Usando ferramentas de Teoria Combinatória de Grupos daremos um algoritmo para determinar os shifts (Φ_r, σ_x) . Cada shift (Φ_r, σ_x) se aplica sobre um sistema dinâmico $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$, cujos elementos são os subgrupos H de K_χ de índice $|K_\chi : H| \leq r$. Conseqüentemente, quando (Φ_r, σ_x) é finito, K_χ contém apenas um número finito de subgrupos de índice menor ou igual a r .

No Capítulo 3 daremos algumas definições de Dinâmica Simbólica e mostraremos que o shift (Φ_r, σ_x) associado ao sistema aumentado de grupo (G, χ, x) é conjugado a um shift de tipo finito. Também discutiremos quando uma representação $\rho : K_\chi \rightarrow S_r$ se estende a uma representação de G em S_r . Daremos uma condição necessária para que isso aconteça em termos de (Φ_r, σ_x) .

No Capítulo 4 estabeleceremos condições em termos do invariante de Bieri-Neumann-Strebel [2] para que os shifts (Φ_r, σ_x) sejam finitos para todo r . Esta condição depende apenas do par (G, χ) . Também definiremos a entropia de um shift e verificaremos que a entropia do shift (Φ_r, σ_x) associado a (G, χ, x) é um invariante do par (G, χ) .

A principal referência deste trabalho é [13].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Apresentação de Grupos

Sejam r_1, r_2, \dots palavras (isto é, seqüências finitas de letras com expoentes inteiros) nos símbolos x_1, x_2, \dots . Seja G um grupo. Escrevemos

$$G \cong \langle x_1, x_2, \dots : r_1, r_2, \dots \rangle$$

se G é isomorfo ao quociente do grupo livre nos símbolos x_1, x_2, \dots pelo menor subgrupo normal que contém r_1, r_2, \dots . Os x_i são chamados **geradores** e os r_i **relatores** desta **apresentação** de G . Uma outra notação é escrever a equação $r_i = 1$, chamada **relação**, no lugar do relator r_i .

É um fato conhecido que todo grupo tem uma apresentação (ver [4]). O grupo G é dito **finitamente gerado** (respectivamente **finitamente apresentado**) se tem uma apresentação com um número finito de geradores (respectivamente geradores e relações).

Uma forma bem concisa do Teorema de Van Kampen é enunciada usando-se apresentação de grupos.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Van Kampen). *Seja X um espaço topológico com subconjuntos abertos X_0, X_1, X_2 tais que $X = X_1 \cup X_2$ e $X_0 = X_1 \cap X_2$. Suponhamos que X_0, X_1, X_2 são não vazios e conexos por caminhos. Tomando ponto base p em X_0 , suponhamos conhecidos*

$$\pi_1(X_1, p) \cong \langle a_1, a_2, \dots : r_1, r_2, \dots \rangle$$

$$\pi_1(X_2, p) \cong \langle b_1, b_2, \dots : s_1, s_2, \dots \rangle$$

$$\pi_1(X_0, p) \cong \langle c_1, c_2, \dots : k_1, k_2, \dots \rangle.$$

Além disso, considerando as inclusões $i_1 : X_0 \rightarrow X_1$ e $i_2 : X_0 \rightarrow X_2$, suponhamos também conhecidos os homomorfismos induzidos $i_{1} : \pi_1(X_0, p) \rightarrow \pi_1(X_1, p)$ e $i_{2*} : \pi_1(X_0, p) \rightarrow \pi_1(X_2, p)$. Então*

$$\pi_1(X, p) = \langle a_1, \dots, b_1, \dots : r_1, \dots, s_1, \dots, i_{1*}(c_1) = i_{2*}(c_1), \dots \rangle.$$

Demonstração: Ver [9].

■

Dado um grupo G com apresentação $\langle g_1, g_2, \dots, g_n : r_1, r_2, \dots, r_t \rangle$, o subgrupo comutador é o menor subgrupo normal G' tal que G/G' é abeliano. G' pode ser obtido como o subgrupo normal gerado pelos elementos $[g_i, g_j] = g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1}$. O grupo quociente G/G' é chamado grupo quociente comutador ou grupo abelianizado, e o homomorfismo canônico $G \rightarrow G/G'$ é chamado **abelianização**.

1.2 Nós e Enlaçamentos

Definição 1.2.1. *Um subconjunto K do espaço \mathbb{R}^3 é um **nó** se K é homeomorfo ao círculo S^1 . Mais geralmente, K é um **enlaçamento** se K é homeomorfo à uma união disjunta de círculos.*

Dois nós ou enlaçamentos K, K' são equivalentes se existir um homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $h(K) = K'$.

Se K é um nó (ou enlaçamento) em \mathbb{R}^3 , o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ do seu complemento é chamado, simplesmente, **o grupo de K** .

Proposição 1.2.1. *Se B é qualquer subconjunto limitado de \mathbb{R}^3 tal que $\mathbb{R}^3 \setminus B$ é conexo por caminhos, então a inclusão induz um isomorfismo*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3 \setminus B).$$

Demonstração: Ver [9]. ■

1.3 Apresentação de Wirtinger

Vamos descrever um procedimento para obter uma apresentação do grupo de um nó K em \mathbb{R}^3 , partindo-se de uma projeção do nó. Por uma projeção devemos entender um número finito de arcos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em um plano P (por exemplo, o plano xy). Cada α_i é assumido conectar α_{i-1} a α_{i+1} (módulo n) por arcos de cruzamento inferior, na altura $z = -\epsilon$, como mostra a Figura 1.1.

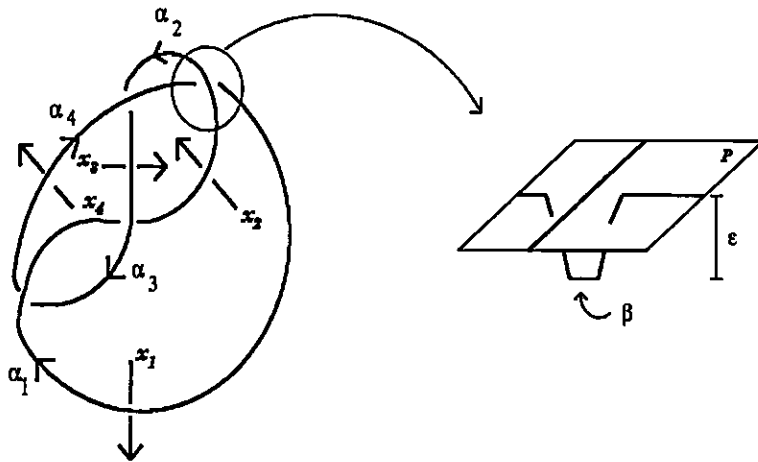


Figura 1.1: Cruzamento dos arcos de um nó

O Algoritmo

Vamos assumir por conveniência que os α_i são orientados compativelmente com a ordem de seus índices. Fazemos uma seta x_i passando “sob” cada α_i na direção da direita para a esquerda. Cada x_i representa um laço em $\mathbb{R}^3 \setminus K$. O ponto $p = (0, 0, 1)$

é tomado como ponto base, e o laço consiste do triângulo orientado de p até o início de x_i , ao longo de x_i e de volta a p .

Agora em cada cruzamento existe uma relação entre os x_i . As duas possibilidades são mostradas na Figura 1.2.

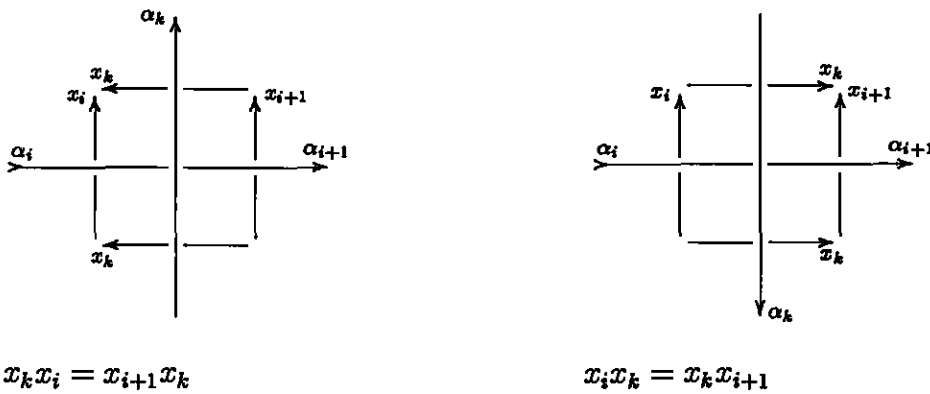


Figura 1.2: Relação entre os x_i

Denotaremos por τ_i a relação que valer para cada i . Assim existem exatamente n relações τ_1, \dots, τ_n .

Teorema 1.3.1. *O grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p)$ é gerado pelos x_i e tem apresentação*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : \tau_1, \dots, \tau_n \rangle.$$

Além disso, qualquer das relações τ_i pode ser omitida e o resultado continua verdadeiro. (Esta relação omitida é consequência das outras.)

Demonstração: Lembremos que K está no plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$, exceto nos cruzamentos, onde os arcos estão no plano $z = -\epsilon$. Para aplicar o Teorema de Van Kampen, dividimos $X = \mathbb{R}^3 \setminus K$ em $n+2$ pedaços A, B_1, \dots, B_n, C .

Seja $A = \{z \mid z \geq -\epsilon\} \setminus K$. O bordo de A é o plano $P' = \{z \mid z = -\epsilon\}$ com n segmentos removidos β_1, \dots, β_n . Seja B_i a caixa retangular sólida cuja tampa está em P' e contém β_i (veja Figura 1.3). Então removemos β_i de B_i e adicionamos um arco até p , desviando de K . Estas caixas podem ser tomadas disjuntas (a menos de p). Finalmente seja C igual ao fecho de tudo que está abaixo de $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$ mais um arco até p . Queremos calcular

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \cup C, p) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p).$$

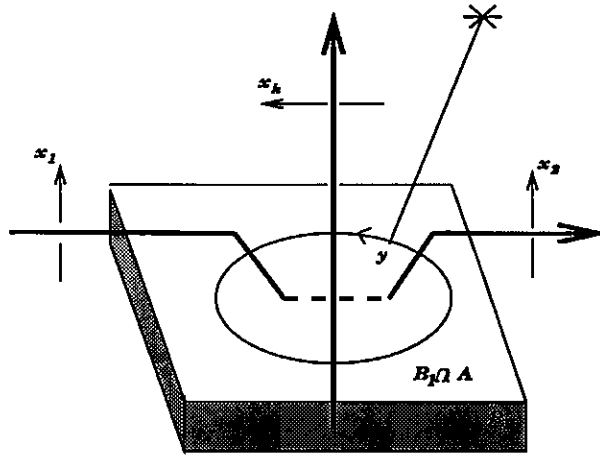


Figura 1.3: B_i

Temos que $\pi_1(A, p)$ é um grupo livre gerado por x_1, \dots, x_n . Agora vamos investigar o efeito de unir B_1 a A . B_1 é simplesmente conexo e $B_1 \cap A$ é um retângulo menos β_1 mais um arco até p . Assim, $\pi_1(B_1 \cap A, p)$ é cíclico infinito, com gerador y . Como é claro, pelo desenho, y se torna a palavra $x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_2$. Assim, pelo Teorema de Van Kampen, $\pi_1(B_1 \cup A, p)$ tem geradores x_1, \dots, x_n e uma única relação $x_k x_1 = x_2 x_k$, que é τ_1 . Assim

$$\pi_1(A \cup B_1, p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : \tau_1 \rangle.$$

Similarmente, unindo B_2 teremos

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup B_2, p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : \tau_1, \tau_2 \rangle.$$

Procedendo de maneira análoga, vamos obter

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n, p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : \tau_1, \dots, \tau_n \rangle.$$

Finalmente unindo C a $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$ temos que $\pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \cup C, p) \cong \pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n, p)$, já que C e $C \cap (A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n)$ são simplesmente conexos. Assim

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \cup C, p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_n \rangle.$$

Isto completa a demonstração, exceto pela observação que uma das relações (digamos r_n) é redundante. Para ver isto, trabalharemos em $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$. Já observamos que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus K)$. Sejam

$$A' = A \cup \infty$$

$$C' = B_n \cup C \cup \infty$$

É claro que $A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup C' = S^3 \setminus K$ e que $\pi_1(A, p) = \pi_1(A', p)$. Assim, unir B_1, \dots, B_{n-1} tem o mesmo efeito que antes, ou seja,

$$\pi_1(A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}, p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

Mas agora temos que C' e $C' \cap A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}$ são simplesmente conexos, sendo uma 2-esfera menos um arco. Logo

$$\pi_1(A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup C', p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_{n-1} \rangle,$$

ou seja,

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p) \cong \langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

■

Em geral só mencionamos o ponto base p quando necessário.

Exemplo 1.3.1. *Nó Figura Oito (Figura 1.4)*

Nos cruzamentos temos as seguintes relações:

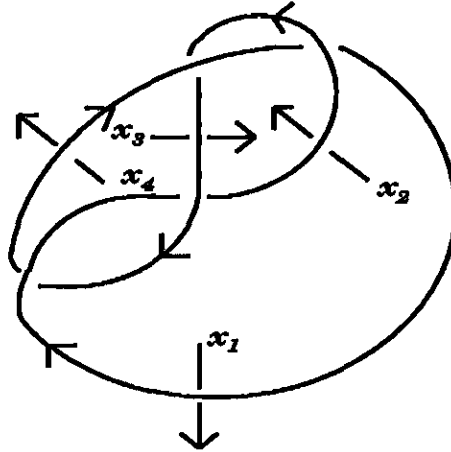


Figura 1.4: Nó Figura Oito

$$r_1 : x_1 x_3 = x_3 x_2$$

$$r_2 : x_4 x_2 = x_3 x_4$$

$$r_3 : x_3 x_1 = x_1 x_4$$

$$r_4 : x_2 x_4 = x_1 x_2.$$

Assim, temos

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x_1, x_2, x_3, x_4 : r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle.$$

Podemos eliminar a relação r_4 . De fato: De r_1 temos que $x_3 = x_1 x_3 x_2^{-1}$. Substituindo em r_3 obtemos

$$x_1 x_3 x_2^{-1} x_1 = x_1 x_4. \tag{1.1}$$

De r_2 tiramos que $x_4 = x_3 x_4 x_2^{-1}$. Substituindo em (1.1) temos

$$x_1 x_3 x_2^{-1} x_1 = x_1 x_3 x_4 x_2^{-1}$$

$$x_2^{-1} x_1 = x_4 x_2^{-1}$$

$$x_2 x_4 = x_1 x_2.$$

Logo

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x_1, x_2, x_3, x_4 : r_1, r_2, r_3 \rangle.$$

Por outro lado, de r_1 tiramos que $x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3$ e de r_3 obtemos $x_4 = x_1^{-1} x_3 x_1$.
Substituindo em r_2 teremos

$$x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3 = x_3 x_1^{-1} x_3 x_1.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x_1, x_3 : x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3 = x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 \rangle.$$

Capítulo 2

Representações em Grupos de Permutações e Sistemas Dinâmicos de (G, χ, x)

2.1 Representações em Grupos de Permutações

Uma representação de um grupo K em um grupo de permutações é um homomorfismo $\rho: K \rightarrow S_r$, onde S_r é o grupo simétrico operando sobre o conjunto $\{1, \dots, r\}$. Chamaremos ρ uma representação de K em S_r . A representação ρ é transitiva se $\rho(K)$ opera transitivamente sobre $\{1, \dots, r\}$, ou seja, se dados $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ existir $\lambda \in \rho(K)$ tal que $\lambda(i) = j$.

Seja K um grupo qualquer e S_r o grupo de permutação de r elementos. O grupo das representações de K em S_r é denotado por $\text{Hom}(K, S_r)$. Defina uma função π de $\text{Hom}(K, S_r)$ no conjunto dos subgrupos de K da seguinte forma

$$\pi(\rho) = \{g \in K \mid \rho(g)(1) = 1\}.$$

Se considerarmos em S_r o subgrupo $S_{r-1} = \{\sigma \mid \sigma(1) = 1\}$, então vemos que $\pi(\rho) = \rho^{-1}(S_{r-1})$.

Lema 2.1.1. *Seja G um grupo e H, F subgrupos de G com $|G : F|$ finito. Então $|H : F \cap H|$ é finito e $|H : F \cap H| \leq |G : F|$.*

Demonstração: De fato, suponhamos que $|G : F| = t$. Então G se escreve como reunião disjunta

$$G = F \cup l_2 F \cup \dots \cup l_t F.$$

Assim temos

$$H \cap G = (H \cap F) \cup (H \cap l_2 F) \cup \dots \cup (H \cap l_t F),$$

reunião disjunta. Mas $H \cap G = H$, pois H é subgrupo de G , então

$$H = (H \cap F) \cup (H \cap l_2 F) \cup \dots \cup (H \cap l_t F),$$

reunião disjunta. Sejam $i_1, i_2, \dots, i_k, 2 \leq k \leq t$, os índices tais que $H \cap l_{i_j} F \neq \emptyset$. Para cada i_j existe $h_{i_j} \in H$ tal que $H \cap l_{i_j} F = H \cap h_{i_j} F$. Assim, temos

$$\begin{aligned} H &= (H \cap F) \cup (H \cap h_{i_1} F) \cup \dots \cup (H \cap h_{i_k} F) \\ &= (H \cap F) \cup h_{i_1}(H \cap F) \cup \dots \cup h_{i_k}(H \cap F), \end{aligned}$$

onde as reuniões são disjuntas. Portanto H é uma reunião disjunta de classes laterais de $H \cap F$. Assim $|H : F \cap H|$ é finito e $|H : F \cap H| \leq |G : F|$. ■

Observação 2.1.1. *Consideremos uma representação $\rho : K \rightarrow S_r$. Temos que $|S_r : S_{r-1}| = r$. Pelo Lema 2.1.1 acima, segue que $|Im(\rho) : S_{r-1} \cap Im(\rho)| \leq r$.*

Proposição 2.1.1. *Seja K qualquer grupo e seja r um inteiro positivo. A função $\pi : \rho \mapsto \{g \in K \mid \rho(g)(1) = 1\}$ aplica o conjunto de representações $\rho : K \rightarrow S_r$ sobre o conjunto de subgrupos $H \leq K$ de índice $|K : H| \leq r$. A pré-imagem de qualquer subgrupo de índice r contém exatamente $(r-1)!$ representações transitivas.*

Demonstração: Seja $\rho : K \rightarrow S_r$ uma representação de K em S_r . Considerando a sobrejeção $\rho : K \rightarrow \text{Im}(\rho)$, vemos que ρ aplica $\pi(\rho)$ em $S_{r-1} \cap \text{Im}(\rho)$. Logo existe uma sobrejeção $\bar{\rho}$ entre $K/\pi(\rho)$ e $\text{Im}(\rho)/(S_{r-1} \cap \text{Im}(\rho))$. Temos que $\bar{\rho}$ também é injetiva. De fato, sejam $x_1\pi(\rho), x_2\pi(\rho) \in K/\pi(\rho)$ de forma que $\rho(x_1)[\text{Im}(\rho) \cap S_{r-1}] = \rho(x_2)[\text{Im}(\rho) \cap S_{r-1}]$. Logo $\rho^{-1}(x_1)\rho(x_2) \in (\text{Im}(\rho) \cap S_{r-1})$, ou seja, $\rho(x_1^{-1}x_2) \in S_{r-1}$ e então, $x_1^{-1}x_2 \in \pi(\rho)$. Assim temos que $x_1\pi(\rho) = x_2\pi(\rho)$. Mas sabemos pela Observação 2.1.1 que $\#\text{Im}(\rho)/(\text{Im}(\rho) \cap S_{r-1}) \leq r$. Logo, $|K : \pi(\rho)| \leq r$.

Seja H subgrupo de K com $|K : H| = s \leq r$. Consideremos o conjunto $X = \{H, k_2H, \dots, k_sH\}$ das classes laterais à esquerda de H em K e façamos as identificações: $H \longleftrightarrow 1$, e $k_iH \longleftrightarrow i$, $i = 2, \dots, s$. Denotemos por S_X o grupo das permutações de X , que podemos identificar com S_s .

Consideremos a seguinte ação

$$\begin{aligned} \phi : K \times K/H &\rightarrow K/H \\ (k, k_iH) &\mapsto kk_iH \end{aligned}$$

Mostremos que ϕ está bem definida. De fato, sejam $kH = sH$. Devemos mostrar que $[\rho_H(g)](kH) = [\phi_H(g)](sH)$, ou seja, que $gkH = gsH$, ou ainda, $(gk)^{-1}gs \in H$. Como $kH = sH$, segue que $k^{-1}s \in H$. Logo $(gk)^{-1}gs = k^{-1}g^{-1}gs = k^{-1}s \in H$.

Esta ação é transitiva, pois dados $k_jH, k_lH \in K/H$ temos que $\phi(k_jk_l^{-1}, k_lH) = k_jk_l^{-1}k_lH = k_jH$.

Seja $\rho_H : K \rightarrow S_X$ dada por $[\rho_H(k)](k_iH) = kk_iH = k_jH$, para algum j . Temos que ρ_H é uma representação transitiva, pois, dados k_jH, k_lH temos que $[\rho_H(k_lk_j^{-1})](k_jH) = k_lH$. Além disso,

$$[\rho_H(xy)](kH) = xykH = x(ykH) = \rho_H(x)[\rho_H(y)(kH)] = [\rho_H(x)\rho_H(y)](kH).$$

Portanto ρ_H é um homomorfismo.

Mostremos agora que $\pi(\rho_H) = H$. Seja k tal que $\rho_H(k)(H) = H$. Então $kH = H$. Logo $k \in H$. Por outro lado, $\rho_H(h)(H) = hH = H, \forall h \in H$. Assim, $\pi(\rho_H) = H$.

Mostremos agora que a aplicação π é sobrejetora. Seja $H < K$, com índice $|K : H| = s \leq r$. Consideremos X como anteriormente e $\rho_H : K \rightarrow S_X$. Além

disso, consideremos a inclusão $i : S_s \rightarrow S_r$. Como S_X pode ser identificado com S_s , obtemos uma aplicação $i \circ \rho_H : K \rightarrow S_r$ com $\pi(\rho_H) = \pi(i \circ \rho_H) = H$. Como tomamos H um subgrupo qualquer, concluímos que π é sobrejetora.

Seja agora $H < K$ com $|K : H| = r$. Precisamos mostrar que $\pi^{-1}(H)$ contém exatamente $(r - 1)!$ representações transitivas.

Consideremos S_X fazendo a identificação usual de S_X com S_r . Seja ${}_H S_X \subset S_X$ o conjunto das permutações que fixam H . O conjunto ${}_H S_X$ será identificado com S_{r-1} . Consideremos a ação

$$\begin{aligned} {}_H S_X \times \pi^{-1}(H) &\rightarrow \pi^{-1}(H) \\ (\alpha, \rho) &\mapsto \rho^\alpha, \end{aligned}$$

onde $\rho^\alpha(k) = \alpha^{-1}\rho(k)\alpha : S_X \rightarrow S_X$.

Esta ação está bem definida e $[\alpha^{-1}\rho(k)\alpha](H) = H$, pois $\alpha \in {}_H S_X$ e $\rho \in \pi^{-1}(H)$.

Sabemos que $|\text{órbita de } \rho_H| = |{}_H S_X : \text{Estabilizador}(\rho_H)|$.

Calculemos $\text{Estabilizador}(\rho_H)$. Suponhamos que $\alpha^{-1}\rho_H\alpha = \rho_H$. Logo $\rho_H\alpha = \alpha\rho_H, \forall k \in K$. Então

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\rho_H\alpha &= \rho_H, \forall k \in K \\ \alpha^{-1}\rho_H(k)\alpha &= \rho_H(k) \\ (\alpha^{-1}\rho_H(k)\alpha)(H) &= \rho_H(k)(H) \\ (\alpha^{-1}\rho_H(k))(H) &= kH \\ \alpha^{-1}(kH) &= kH. \end{aligned}$$

Portanto segue que $\alpha^{-1} = Id$ e então $\alpha = Id$. Assim teremos

$$|\text{órbita de } \rho_H| = |{}_H S_X : \{Id\}| = |{}_H S_X| = (r - 1)!$$

Verifiquemos que estas $(r - 1)!$ representações são transitivas. Consideremos $k_i H, k_j H \in X = \{H, k_2 H, \dots, k_r H\}$. Para cada α devemos encontrar g tal que $\rho_H^\alpha(g)$ leva $k_i H$ em $k_j H$. Faça $k_{\alpha(i)} H = \alpha(k_i H)$ e $k_{\alpha(j)} H = \alpha(k_j H)$. Então basta tomarmos $g = k_{\alpha(j)} k_{\alpha(i)}^{-1}$ e teremos

$$\begin{aligned} (\rho_H^\alpha(g))(k_i H) &= [\alpha^{-1} \rho_H(k_{\alpha(j)} k_{\alpha(i)}^{-1}) \alpha](k_i H) = \\ \alpha^{-1} \rho_H(k_{\alpha(j)} k_{\alpha(i)}^{-1}) k_{\alpha(i)} H &= \alpha^{-1} \rho_H(k_{\alpha(j)}) H = k_j H. \end{aligned}$$

Dessa forma mostramos que existem pelo menos $(r-1)!$ representações transitivas em $\pi^{-1}(H)$. Devemos agora mostrar que estas são as únicas. Para isto, seja ρ uma representação em $\pi^{-1}(H)$. Mostremos que existe α (como acima) tal que $\alpha^{-1} \rho_H \alpha = \rho$.

Observemos que para $\rho \in \pi^{-1}(H)$ e x, y na mesma classe lateral de H , isto é, $x^{-1}y \in H$, temos $Id = \rho(x^{-1}y) = \rho^{-1}(x)\rho(y)$ e portanto $\rho(x) = \rho(y)$. Se $g \in k_r H$ então $\rho(g) = \rho(k_r)$ e portanto $(\rho(g))(k_i H) = [\rho(k_r)](k_i H) = k_j H$ e j está bem definido.

Precisamos encontrar α tal que $\alpha^{-1} \rho_H \alpha = \rho$, isto é, $\forall g, \alpha^{-1} \rho_H(g) \alpha = \rho(g)$. Temos que $g = k_i h$, com k_i e h bem definidos. Então

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \rho_H(g) \alpha &= \rho(g) \\ \alpha^{-1} \rho_H(k_i h) \alpha &= \rho(k_i h) \\ \alpha^{-1} \rho_H(k_i) \rho_H(h) \alpha &= \rho(k_i) \rho_H(h) \\ \alpha^{-1} \rho_H(k_i) \alpha &= \rho(k_i). \end{aligned}$$

Aplicando em H temos que

$$\begin{aligned} [\alpha^{-1} \rho_H(k_i) \alpha](H) &= \rho(k_i)(H) \\ \alpha^{-1}(k_i H) &= \rho(k_i)(H) \\ \alpha^{-1}(k_i H) &= k_j H, \end{aligned}$$

onde j está bem definido.

Esta equação define α^{-1} nas classes laterais de H e portanto define α .

Desta forma mostramos que existem exatamente $(r - 1)!$ representações transitivas em $\pi^{-1}(H)$. ■

Dada qualquer representação $\rho : K \rightarrow S_r$ pode-se obter um conjunto de geradores para o subgrupo $H = \pi(\rho)$ pelo seguinte método topológico. Seja C^2 um 2-complexo com uma única 0-célula v tal que $\pi_1(C^2, v) \cong K$. O complexo C^2 é facilmente construído a partir de uma apresentação (não necessariamente finita) para K : 1-células orientadas em C^2 correspondem a geradores, 2-células orientadas correspondem a relatores. Use a representação ρ para construir um espaço de recobrimento de r folhas $p : \tilde{C}^2 \rightarrow C^2$ da seguinte forma. A única 0-célula v é recoberta por 0-células $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r$. Uma 1-célula orientada e é recoberta por r 1-células orientadas que vão de \tilde{v}_i até $\tilde{v}_{\rho(e)(i)}$, $i = 1, \dots, r$; será útil chamar cada uma destas 1-células por e . Finalmente, cada 2-célula orientada em C^2 é recoberta por r 2-células orientadas de maneira óbvia. Seja \tilde{C}_0^2 a componente de \tilde{C}^2 que contém \tilde{v}_1 . A projeção p induz um monomorfismo $p_* : \pi_1(\tilde{C}_0^2, \tilde{v}_1) \rightarrow \pi_1(C^2, v)$ com imagem H . Projetando os geradores para $\pi_1(\tilde{C}_0^2, \tilde{v}_1)$ produzimos geradores para H .

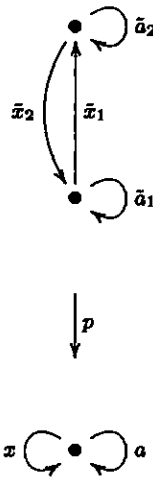


Figura 2.1: 1-esqueleto de C^2 e seu espaço de recobrimento

Exemplo 2.1.1. *Seja K o grupo $(x, a : xax^{-1} = a^2)$ de dois geradores e uma relação, com representação $\rho : K \rightarrow S_2$ dada por $x \mapsto (1, 2)$, $a \mapsto (1)$. O 1-esqueleto de C^2 e seu espaço de recobrimento \tilde{C}^2 aparecem na Figura 2.1. A partir disto, vemos que os elementos a, xax^{-1}, x^2 geram o subgrupo correspondente $H < K$ de*

índice 2. Usando a relação em K obtemos o conjunto mais eficiente de geradores $\{x^2, a\}$.

Neste trabalho estamos interessados no caso $K = K_\chi$, onde χ é o epimorfismo de algum sistema aumentado de grupo (G, χ, x) .

Dada qualquer apresentação finita $\langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_m \rangle$ para G , um algoritmo bem conhecido da Teoria Combinatória de Grupos, o método de Reidemeister-Schreier, nos torna capaz de encontrar uma apresentação (possivelmente infinita) para K_χ . Vamos descrever o procedimento para a nossa situação.

Método de Reidemeister-Schreier

Consideremos (G, χ, x) um sistema aumentado de grupo e uma apresentação finita para G , $\langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_m \rangle$. O elemento distinguido x corresponde a alguma palavra w nos geradores x_i . Adicionamos um novo símbolo x e uma relação $x = w$ à nossa apresentação para G . (Tal operação é chamada uma "Transformação de Tietze" [7].) Depois trocamos cada gerador x_i por $a_i = x_i x^{-\chi(x_i)}$. Mais rigorosamente, introduzimos novos símbolos a_i e relações $a_i = x_i x^{-\chi(x_i)}$; as novas relações são equivalentes a $x_i = a_i x^{\chi(x_i)}$ que usamos para reescrever r_1, \dots, r_m em termos de x, a_1, \dots, a_n ; finalmente, eliminamos os velhos símbolos x_i e os relações $a_i = x_i x^{-\chi(x_i)}$. (O último passo pode ser visto como a operação inversa do tipo de transformação de Tietze com a qual começamos.) Para cada $i = 1, \dots, n$ e $j \in \mathbf{Z}$, denotamos o elemento $x^{-j} a_i x^j$ pelo símbolo $a_{i,j}$. Claramente, cada $a_{i,j}$ é um elemento de K_χ . Na verdade, não é difícil ver que estes elementos geram K_χ . Obtemos um conjunto de relatores para K_χ reescrevendo cada $x^{-j} r_1 x^j, \dots, x^{-j} r_m x^j$ como uma palavra nos $a_{i,j}$, um processo que é possível porque a soma dos expoentes de x em cada $x^{-j} r_i x^j$ é zero, $i = 1, \dots, m$. Note que a reescrita de $x^{-j-t} r_k x^{j+t}$ é justamente o resultado de adicionar t ao segundo índice da reescrita de $x^{-j} r_k x^j$.

Exemplo 2.1.2. Denotemos o grupo $\langle x, a : xax^{-1} = a^2 \rangle$ do exemplo anterior por G . Usando o método de Reidemeister-Schreier verificamos que o núcleo K_χ do homomorfismo abelianização $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$ é $\langle a_i : a_i = a_{i+1}^2, i \in \mathbf{Z} \rangle$.

De fato: Temos que $\chi(x) = 1$ e $\chi(a) = 0$. Vamos encontrar o conjunto de geradores de K_χ .

$$a_1 = ax^{-\chi(a)} = a$$

$$a_{1,j} = x^{-j}a_1x^j = x^{-j}ax^j$$

Assim, $\{a_i = x^{-i}ax^i, i \in \mathbf{Z}\}$ é o conjunto de geradores de K_χ . Encontremos agora as relações de K_χ . A relação da apresentação de G é $xa x^{-1} = a^2$, assim :

$$\tau_i : x^{-i}(xa x^{-1})x^i = x^{-i}a^2x^i$$

$$\tau_i : x^{-i+1}ax^{i-1} = x^{-i}a^2x^i$$

$$\tau_i : a_{i-1} = a_i^2$$

Logo, $\langle a_i : a_i = a_{i+1}^2 \rangle$ é uma apresentação para K_χ .

Consideremos a associação

$$\rho(a_i) = \begin{cases} (1, 2, 3) & \text{se } i \text{ é par} \\ (1, 3, 2) & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (2.1)$$

Note que se i é par temos

$$\rho(a_i) = (1, 2, 3)$$

$$\rho(a_{i+1}^2) = \rho(a_{i+1})^2 = (1, 3, 2)(1, 3, 2) = (1, 2, 3).$$

Também se i é ímpar temos

$$\rho(a_i) = (1, 3, 2)$$

$$\rho(a_{i+1}^2) = \rho(a_{i+1})^2 = (1, 2, 3)(1, 2, 3) = (1, 3, 2).$$

Logo, $\rho(a_i) = \rho(a_{i+1}^2)$, $\forall i \in \mathbf{Z}$. Dessa forma, a função ρ induz uma representação de K_χ em S_3 . Os 1-esqueletos de C^2 e \tilde{C}^2 estão indicados na Figura 2.2.

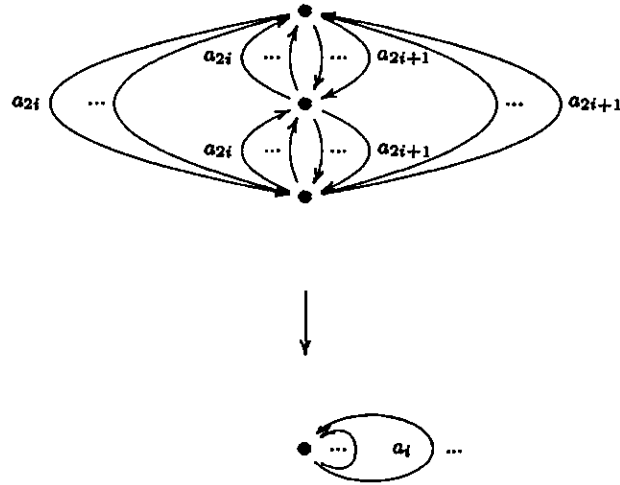


Figura 2.2: 1-esqueletos de C^2 e \tilde{C}^2

O subgrupo correspondente $H < K_\chi$ de índice 3 é gerado por

$$a_{2i}a_{2j+1}, a_{2i+1}a_{2j}, a_{2i}a_{2j}a_{2k}, a_{2i+1}a_{2j+1}a_{2k+1},$$

onde i, j, k variam sobre \mathbf{Z} .

Simplificando o conjunto de geradores de K_χ , temos que

$$\begin{aligned} a_{2i}a_{2j+1} &= a_{2i+1}^2 a_{2j+1} = a_{2i+2}^4 a_{2j+1} = \dots = \\ &= a_{2j+1}^{2^{2j+1-2i}} a_{2j+1} = a_{2j+1}^{2^{2(j-i)+1}} a_{2j+1} = a_{2j+1}^{2^{2(j-i)+1}+1}. \end{aligned}$$

Mostremos que $2^{2(j-i)+1} + 1 = 3\lambda$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, $\lambda > 0$, por indução sobre $j - i$.

Para $j - i = 0$ temos $2^1 + 1 = 3$. Para $j - i = 1$ temos $2^{2+1} + 1 = 9$. Suponhamos que o resultado é verdadeiro para $j - i = \alpha$, ou seja, $2^{2\alpha+1} + 1 = 3\lambda'$, e mostremos que ele também é válido para $j - i = \alpha + 1$. De fato,

$$2^{2(\alpha+1)+1} + 1 = 2^{2\alpha+3} + 1 = 2^2 2^{2\alpha+1} + 1 = 4 \cdot 2^{2\alpha+1} + 1 = 3 \cdot 2^{2\alpha+1} + (2^{2\alpha+1} + 1) = 3 \cdot 2^{2\alpha+1} + 3\lambda' = 3(2^{2\alpha+\lambda'}).$$

Da mesma forma vemos que

$$a_{2i+1} a_{2j} = a_{2j}^{2^{2(j-i)-1}+1}$$

$$a_{2i} a_{2j} a_{2k} = a_{2k}^{2^{2(k-i)}+2^{2(k-j)}+1}$$

$$a_{2i+1} a_{2j+1} a_{2k+1} = a_{2k}^{2^{2(k-i)}+2^{2(k-j)}+1}$$

e por indução mostramos que

$$2^{2(j-i)-1} + 1 = 3\lambda_1$$

$$2^{2(k-i)} + 2^{2(k-j)} + 1 = 3\lambda_2.$$

Assim obtemos o conjunto relativamente menor de geradores $\{a_i^3 \mid i \in \mathbf{Z}\}$ de K_χ . Temos portanto, neste caso, uma boa descrição de K_χ . De fato, K_χ é isomorfo ao grupo $\mathbf{Z}[1/2]$ dos racionais diádicos via isomorfismo $a_i \mapsto 1/2^i$. Segundo este isomorfismo o subgrupo H é simplesmente $3\mathbf{Z}[1/2]$.

Em geral, se ρ é qualquer representação de K em S_τ , então o índice de $\pi(\rho)$ é a cardinalidade do subconjunto maximal de $\{1, \dots, \tau\}$ contendo 1 sobre o qual $\rho(K)$ opera transitivamente. Dadas duas representações, ρ_1 e ρ_2 , é uma tarefa fácil determinar quando os subgrupos $H_1 = \pi(\rho_1)$ e $H_2 = \pi(\rho_2)$ são iguais. Primeiro, verificamos quando $H_1 = \pi(\rho_1)$ e $H_2 = \pi(\rho_2)$ têm o mesmo índice j em K . Se este é o caso, então podemos assumir sem perda de generalidade que ρ_1 e ρ_2 são representações transitivas de K em S_j . Agora $H_1 = \pi(\rho_1)$ e $H_2 = \pi(\rho_2)$ são iguais se e somente se $\rho_2 = \tau \circ \rho_1$ para algum automorfismo interno τ de S_j , conjugação por uma permutação que fixa 1.

2.2 Os Sistemas Dinâmicos de (G, χ, x)

Um sistema dinâmico é um par (X, σ) consistindo de um espaço topológico X e um homeomorfismo $\sigma : X \rightarrow X$. Uma aplicação $f : (X, \sigma) \rightarrow (X', \sigma')$ de sistemas dinâmicos é uma função contínua $f : X \rightarrow X'$ para a qual $f \circ \sigma = \sigma' \circ f$. Os sistemas dinâmicos (X, σ) e (X', σ') são **conjugados** se também existir uma aplicação $g : (X', \sigma') \rightarrow (X, \sigma)$ tal que $f \circ g$ e $g \circ f$ são as funções identidade de X' e X , respectivamente.

Definição 2.2.1. *Seja r um inteiro positivo. O shift representação associado a (G, χ, x) é o sistema dinâmico (Φ_r, σ_x) consistindo do espaço Φ_r das representações $\rho : K_\chi \rightarrow S_r$ e aplicação σ_x descrita por $\sigma_x(\rho)(g) = \rho(x^{-1}gx)$, para todo $g \in K_\chi$.*

A topologia em Φ_r é determinada pelos conjuntos base $N_{g_1, \dots, g_n}(\rho) = \{\rho' \mid \rho'(g_i) = \rho(g_i), i = 1, \dots, n\}$, para todo $\rho \in \Phi_r, g_1, \dots, g_n \in K_\chi$.

Mostremos que σ_x é de fato um homeomorfismo.

Observemos que σ_x está bem definida. Sejam $\rho \in \Phi_r$ e $g, g_1, g_2 \in K_\chi$. Então $\sigma_x(\rho)(g) = \rho(x^{-1}gx) = (\rho \circ \phi_x)(g)$, onde $\phi_x(g) = x^{-1}gx$. Como $g \in K_\chi$ temos que $x^{-1}gx = \phi_x(g) \in K_\chi$. Logo $\rho(x^{-1}gx) = \sigma_x(\rho)(g) \in S_r$. Portanto σ_x está bem definida.

Mostremos agora que σ_x é bijetora. Para isto, basta exibirmos a sua inversa. Mostremos que $(\sigma_x)^{-1} = \sigma_{x^{-1}}$. De fato: $(\sigma_{x^{-1}} \circ \sigma_x)(\rho) = \sigma_{x^{-1}}(\rho \circ \phi_x) = \rho \circ \phi_x \circ \phi_{x^{-1}}$. Como $\phi_x \circ \phi_{x^{-1}} = id$, pois $(\phi_x \circ \phi_{x^{-1}})(g) = \phi_x(xgx^{-1}) = x^{-1}xgx^{-1}x = g$, segue que $(\sigma_{x^{-1}} \circ \sigma_x)(\rho) = \rho \circ id = \rho$. Logo $\sigma_{x^{-1}} \circ \sigma_x = id$. Por outro lado, $(\sigma_x \circ \sigma_{x^{-1}})(\rho) = \rho \circ \phi_{x^{-1}} \circ \phi_x = \rho$, pois $\phi_{x^{-1}} \circ \phi_x = id$. Assim, $\sigma_x \circ \sigma_{x^{-1}} = id$. Portanto, $(\sigma_x)^{-1} = \sigma_{x^{-1}}$. Assim, σ_x é bijetora.

Ainda precisamos mostrar que σ_x e $\sigma_{x^{-1}}$ são contínuas. Mostremos que $\sigma_{x^{-1}}$ é contínua, ou equivalentemente, que σ_x é uma aplicação aberta. Seja $\rho \in \Phi_r$ e seja $N_{g_1, \dots, g_n}(\rho) \ni \rho$ um aberto de Φ_r . Precisamos mostrar que $\sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(\rho))$ é aberto. Mostremos que $\sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(\rho)) = N_{g_1, \dots, g_n}(\sigma_x(\rho))$. Para isso, seja $\rho' \in N_{g_1, \dots, g_n}(\rho)$. Então $\rho'(g_i) = \rho(g_i), i = 1, \dots, n$. Assim, $\sigma_x(\rho'(g_i)) = \sigma_x(\rho(g_i)) \in N_{g_1, \dots, g_n}(\sigma_x(\rho)), i = 1, \dots, n$. Logo $\sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(\rho)) \subset N_{g_1, \dots, g_n}(\sigma_x(\rho))$. Por outro lado, seja $\rho' \in N_{g_1, \dots, g_n}(\sigma_x(\rho))$. Então $\rho'(g_i) = \sigma_x(\rho)(g_i), i = 1, \dots, n$. Como $\rho \in N_{g_1, \dots, g_n}(\rho)$ segue que $\rho'(g_i) \in \sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(\rho))$. Assim $N_{g_1, \dots, g_n}(\sigma_x(\rho)) \subset \sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(\rho))$. Logo $N_{g_1, \dots, g_n}(\sigma_x(\rho)) = \sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(\rho))$. Portanto, $\sigma_{x^{-1}}$ é contínua. Analogamente

mostramos que σ_x é contínua. Assim concluímos que σ_x é de fato um homeomorfismo.

Uma aplicação $h : (G, \chi, x) \rightarrow (G', \chi', x')$ de sistemas aumentados de grupos é um homomorfismo $h : G \rightarrow G'$ tal que $\chi = \chi' \circ h$. É fácil ver que tal homomorfismo induz uma aplicação $h^* : (\Phi'_r, \sigma'_x) \rightarrow (\Phi_r, \sigma_x)$ entre os shifts representação associados. A aplicação h^* é descrita por $\rho' \mapsto \rho' \circ h$.

Definição 2.2.2. *Seja r um inteiro positivo. O sistema de subgrupo associado a (G, χ, x) é o sistema dinâmico $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$ consistindo do espaço $\tilde{\Phi}_r$ dos subgrupos $H \leq K_\chi$ com $|K_\chi : H| \leq r$ e aplicação $\tilde{\sigma}_x : H \mapsto x^{-1}Hx$.*

A topologia em $\tilde{\Phi}_r$ é determinada pelos conjuntos base $N_{g_1, \dots, g_n}(H) = \{H' \mid H \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) = H' \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n)\}$, para todo $H \in \tilde{\Phi}_r$, $g_1, \dots, g_n \in K_\chi$. (Aqui $\text{gp}(g_1, \dots, g_n)$ denota o subgrupo de K_χ gerado por g_1, \dots, g_n .)

Mostremos que $\tilde{\sigma}_x$ é de fato um homeomorfismo.

Note que $\tilde{\sigma}_x$ está bem definida. De fato, dado $H \in \tilde{\Phi}_r$ temos que $\tilde{\sigma}_x(H) = x^{-1}Hx \in \tilde{\Phi}_r$ pois $x^{-1}Hx \leq K_\chi$ e $[K_\chi : xHx^{-1}] = [K_\chi : H] \leq r$.

Além disso, $\tilde{\sigma}_x$ é bijetora. De fato, $\tilde{\sigma}_x^{-1} = \tilde{\sigma}_{x^{-1}}$ é dada por $H \mapsto xHx^{-1}$. Temos $(\tilde{\sigma}_x \circ \tilde{\sigma}_{x^{-1}})(H) = H(\tilde{\sigma}_{x^{-1}} \circ \tilde{\sigma}_x)(H) = H$.

Resta mostrarmos que $\tilde{\sigma}_x$ e $\tilde{\sigma}_{x^{-1}}$ são contínuas. Seja $X \in N_{g_1, \dots, g_n}(H)$. Então $H \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) = X \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n)$. Assim

$$\begin{aligned} x^{-1}(H \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n))x &= x^{-1}(X \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n))x \\ x^{-1}Hx \cap x^{-1} \text{gp}(g_1, \dots, g_n)x &= x^{-1}Xx \cap x^{-1} \text{gp}(g_1, \dots, g_n)x \\ x^{-1}Hx \cap \text{gp}(x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx) &= x^{-1}Xx \cap \text{gp}(x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx) \\ \Rightarrow \sigma_x(X) &\in N_{x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx}(x^{-1}Hx) \\ \Rightarrow \sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(H)) &\subset N_{x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx}(\sigma_x(H)). \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $Y \in N_{x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx}(x^{-1}Hx)$. Então

$$\begin{aligned}
& x^{-1}Hx \cap \text{gp}(x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx) = Y \cap \text{gp}(x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx) \\
& \Rightarrow x^{-1}(H \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n))x = x^{-1}(xYx^{-1} \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n))x \\
& \Rightarrow H \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) = xYx^{-1} \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) \\
& \Rightarrow xYx^{-1} \in N_{g_1, \dots, g_n}(H) \\
& \Rightarrow \sigma_x^{-1}(Y) \in N_{g_1, \dots, g_n}(H) \\
& \Rightarrow Y \in \sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(H)) \\
& \Rightarrow N_{x^{-1}g_1x, \dots, x^{-1}g_nx}(\sigma_x(H)) \subset \sigma_x(N_{g_1, \dots, g_n}(H)).
\end{aligned}$$

Dessa forma mostramos que σ_x é uma função aberta. De forma análoga mostramos que sua inversa também é uma função aberta, e assim concluímos que σ_x é um homeomorfismo.

A seguinte proposição segue facilmente da Proposição 2.1.1

Proposição 2.2.1. *Seja r um inteiro positivo. A função*

$$\pi : \rho \mapsto H = \{g \in K_X \mid \rho(g)(1) = 1\}$$

induz uma aplicação $\tilde{\pi}$ de (Φ_r, σ_x) sobre $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$.

Demonstração: Da Proposição 2.1.1 segue que π aplica Φ_r sobre $\tilde{\Phi}_r$. Devemos mostrar que π é uma função contínua e que $\pi \circ \sigma_x = \tilde{\sigma}_x \circ \pi$.

Provemos que, $\forall \rho_0 \in \pi^{-1}(N_{g_1, \dots, g_n}(H))$, a vizinhança de ρ_0 , $N_{g_1, \dots, g_n}(\rho_0) \subset \pi^{-1}(N_{g_1, \dots, g_n}(H))$. Se $\rho_0 \in \pi^{-1}(N_{g_1, \dots, g_n}(H))$ então $\pi(\rho_0) \in N_{g_1, \dots, g_n}(H)$, isto é, $\pi(\rho_0) \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) = H \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n)$.

Se ρ está em $N_{g_1, \dots, g_n}(\rho_0)$, então $\rho(g_i) = \rho_0(g_i)$, $\forall i = 1, \dots, n$. Portanto $\rho = \rho_0$ em $\text{gp}(g_1, \dots, g_n)$.

Afirmção: $\pi(\rho) \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) = \pi(\rho_0) \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n)$.

Da afirmação e do fato já conhecido que $\pi(\rho_0) \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) = H \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n)$, segue que $\rho \in \pi^{-1}(N_{g_1, \dots, g_n}(H))$. E assim concluímos que a aplicação π é contínua.

Vamos agora provar a afirmação. Temos que

$$\begin{aligned}
g \in \pi(\rho) \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n) &\Leftrightarrow \\
g \in \text{gp}(g_1, \dots, g_n) \text{ e } [\rho(g)](1) = 1 &\Leftrightarrow \\
\rho_0(g) = \rho(g), [\rho(g)](1) = 1 \text{ e } g \in \text{gp}(g_1, \dots, g_n) &\Leftrightarrow \\
g \in \text{gp}(g_1, \dots, g_n) \text{ e } [\rho_0(g)](1) = 1 &\Leftrightarrow \\
g \in \pi(\rho_0) \cap \text{gp}(g_1, \dots, g_n). &
\end{aligned}$$

Provemos agora que $\pi \circ \sigma_x = \tilde{\sigma}_x \circ \pi$. Temos

$$\begin{aligned}
[\pi \circ \sigma_x](\rho) = \pi(\sigma_x(\rho)) &= \{g \in K_\chi \mid [\sigma_x(\rho)](g)(1) = 1\} \\
&= \{g \in K_\chi \mid [\rho(x^{-1}gx)](1) = 1\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{\sigma}_x \circ \pi](\rho) = \tilde{\sigma}_x(\pi(\rho)) &= \tilde{\sigma}_x(\{g \in K_\chi \mid \rho(g)(1) = 1\}) = \\
x^{-1}\{g \in K_\chi \mid \rho(g)(1) = 1\}x &= \{x^{-1}gx \in K_\chi \mid \rho(g)(1) = 1\} = \\
\{w \in K_\chi \mid \rho(x^{-1}gx)(1) = 1\}, &
\end{aligned}$$

onde $w = x^{-1}gx$. Portanto, $\pi \circ \sigma_x = \tilde{\sigma}_x \circ \pi$. ■

O seguinte Corolário é uma consequência das Proposições 2.1.1 e 2.2.1.

Corolário 2.2.1. *Seja (G, χ, x) um sistema aumentado de grupo e seja r um inteiro positivo. Então o shift representação associado (Φ_r, σ_x) é finito (respectivamente infinito enumerável, não-enumerável) se e somente se o sistema de subgrupo $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$ é finito (respectivamente infinito enumerável, não-enumerável).*

Demonstração: Suponhamos que (Φ_r, σ_x) seja finito. Como a aplicação $\tilde{\pi}$ é sobrejetora, segue que $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$ também será finito. (A mesma justificativa para o caso de (Φ_r, σ_x) infinito enumerável.)

Por outro lado, se $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$ é finito, como a imagem inversa de um subgrupo H de $\tilde{\Phi}_r$ é uma quantidade finita de representações, segue que (Φ_r, σ_x) também é finito. (A mesma justificativa para o caso de $(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\sigma}_x)$ infinito enumerável.) ■

Capítulo 3

Shifts de Tipo Finito

Se χ é um homomorfismo de um grupo finitamente apresentado G sobre \mathbf{Z} , então o núcleo K_χ pode ser muito complicado. Entretanto, qualquer apresentação de K_χ que se obtém pelo método de Reidemeister-Schreier tem estrutura que sugere um sistema dinâmico. Continuando esta linha de pensamento mostramos que todo shift representação é conjugado a um shift de tipo finito.

Vamos revisar algumas definições e resultados de dinâmica simbólica. Seja \mathcal{A} qualquer conjunto finito. Chamamos \mathcal{A} um **alfabeto** e seus elementos **letras**. Damos a \mathcal{A} a topologia discreta e a $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ a topologia produto. A **aplicação shift** σ sobre $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ é a função que leva qualquer $\rho = (\rho_j)$, $\rho_j \in \mathcal{A}$, em $\rho' = (\rho'_j)$, onde $\rho'_j = \rho_{j+1}$. Então $(\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}, \sigma)$ é um sistema dinâmico; nos referimos a este sistema, ou ao conjunto $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$, como o **full \mathcal{A} -shift**. Em particular, $\{0, 1, \dots, r-1\}^{\mathbf{Z}}$ é chamado o **full r -shift**.

Se X é um subconjunto fechado de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ com $\sigma(X) = X$, então (X, σ) é um sistema dinâmico que chamamos um **subshift** de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$, ou simplesmente um **shift**. Novamente, podemos chamar X de **shift**, com σ subentendido.

Por um **bloco** (sobre \mathcal{A}) entendemos qualquer seqüência finita w de letras. Se o tamanho de w é N , então w é dito um N -bloco. O bloco vazio ϵ tem tamanho zero. Um bloco w **ocorre** em $\rho \in \mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ se w aparece como alguma seqüência de letras consecutivas em ρ . Seja \mathcal{B} uma coleção de N -blocos para algum N . O conjunto

X de toda $\rho \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que todo N -bloco ocorrendo em ρ está em \mathcal{B} é um subshift. Um shift deste tipo é chamado um **shift de tipo finito**, e \mathcal{B} é seu conjunto de N -blocos permitidos.

Quando $N = 2$ podemos representar X por um grafo direcionado Γ : o conjunto de vértices é \mathcal{A} , e existe uma aresta de ρ_0 a ρ'_0 se $\rho_0\rho'_0$ é um 2-bloco permitido. Os pontos de X estão em uma correspondência um-a-um com os caminhos bi-infinitos (caminhos infinitos em ambas as direções) em Γ . Reciprocamente, se $\Gamma = (V, E)$ é um grafo direcionado sem arestas paralelas, então obtemos um shift de tipo finito $X \subset V^{\mathbb{Z}}$ da maneira óbvia; X é chamado um **vertex shift** com grafo Γ . Podemos também obter um shift de tipo finito $\hat{X} \in E^{\mathbb{Z}}$: os elementos de \hat{X} são as seqüências bi-infinitas de arestas que formam caminhos em Γ , e ee' é um 2-bloco permitido se o vértice final de e é o vértice inicial de e' . O shift \hat{X} é chamado o **edge shift** com grafo Γ . É fácil ver que X e \hat{X} são shifts conjugados segundo a aplicação que leva a seqüência de vértices de um caminho na correspondente seqüência de arestas. Observamos que podemos definir o edge shift como acima mesmo se Γ tem arestas paralelas. O vertex shift e edge shift não são afetados se “podarmos” Γ , removendo qualquer vértice v ou aresta e que não está em qualquer caminho bi-infinito em Γ .

Como um exemplo disso, seja $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ e $\mathcal{B} = \{00, 01, 10, 02, 20\}$. Na Figura 3.1 representamos o shift associado X , primeiro como o vertex shift de um grafo Γ e então como o edge shift de outro grafo Γ' .

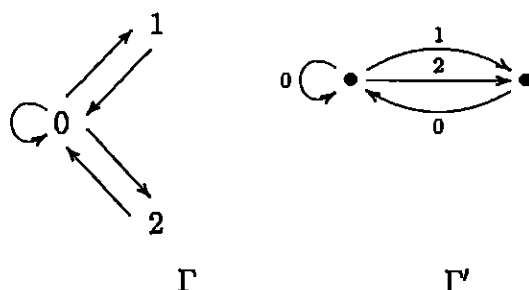


Figura 3.1: X como vertex shift e edge shift

Teorema 3.0.1. *Assuma que (G, χ, x) é um sistema aumentado de grupo. Para qualquer inteiro positivo r , o shift representação associado (Φ_r, σ_x) é conjugado a um shift de tipo finito.*

Demonstração: Lembremos que G tem apresentação da forma $\langle x, a_1, \dots, a_n : r_1, \dots, r_m \rangle$ tal que $\chi(x) = 1$ e que $\chi(a_1) = \dots = \chi(a_n) = 0$. Além disso, K_χ tem apresentação

$$\langle a_{i,j} : R_j, 1 \leq i \leq n, j \in \mathbf{Z} \rangle, \quad (3.1)$$

onde os símbolos $a_{i,j}$ denotam os geradores $x^{-j}a_i x^j$, e R_j é $\{x^{-j}r_1 x^j, \dots, x^{-j}r_m x^j\}$ escrito como palavras nos geradores. Lembremos também que R_{q+t} é obtido a partir de R_q adicionando t ao segundo índice de todo símbolo em R_q . Suponhamos que as palavras em R_0 (e então em cada R_q) são reduzidas e ciclicamente reduzidas, ou seja, que nenhum gerador aparece ao lado do seu inverso, e nenhuma palavra em R_0 termina com o inverso do gerador com o qual ela começa. Trocando os relatores originais r_j por convenientes conjugados $x^{-t_j}r_j x^{t_j}$, podemos assumir que se R_0 contém $a_{i,j}$ para algum j , então R_0 não contém $a_{i,j}$ com $j < 0$. Então trocando os geradores iniciais por convenientes conjugados, podemos assumir que se R_0 contém $a_{i,j}$ para algum j , então R_0 contém $a_{i,0}$. Se $a_{i,0}$ ocorre em R_0 , então seja M_i o maior valor de j tal que $a_{i,j}$ ocorre. Se $a_{i,0}$ não ocorre em R_0 , então seja M_i igual a zero.

Da apresentação (3.1) de K_χ obtemos uma apresentação de algum grupo

$$H_0 = \langle a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,M_1}, a_{2,0}, \dots, a_{n,M_n} : R_0 \rangle.$$

Como em K_χ os geradores de H_0 podem satisfazer outras relações além daquelas que são conseqüências de R_0 , o grupo H_0 , em geral, não é um subgrupo de K_χ . Entretanto, H_0 é valioso para o estudo das representações de K_χ em grupos de permutações. Denotemos o conjunto de geradores $\{a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,M_1}, a_{2,0}, \dots, a_{n,M_n}\}$ pelo símbolo A_0 , e seja $A_t = \{a_{1,t}, a_{1,1+t}, \dots, a_{1,M_1+t}, a_{2,t}, \dots, a_{n,M_n+t}\}$. Combinando as apresentações $(A_t : R_t)$ com t variando sobre \mathbf{Z} , reproduzimos a apresentação (3.1) de K_χ .

Apagando $a_{1,M_1}, \dots, a_{n,M_n}$ de A_0 , produzimos um subconjunto que denotaremos por $A_{0,1}$. Similarmente, $A_{0,2}$ é o resultado de apagar $a_{1,0}, \dots, a_{n,0}$ de A_0 .

Seja \mathcal{A} o conjunto de todas as representações de H_0 em S_r . Tais representações são precisamente aquelas funções $\rho_0 : A_0 \rightarrow S_r$ tais que as m equações $\rho_0(r_i) = id$, $r_i \in R_0$ valem em S_r . Em particular, \mathcal{A} é um conjunto finito e pode ser calculado. Traçamos uma aresta do vértice ρ_0 ao vértice ρ'_0 se, e somente se, $\rho_0(a_{i,j+1}) = \rho'_0(a_{i,j})$ para cada $a_{i,j} \in A_{0,1}$. O grafo Γ determina um shift de tipo finito X com alfabeto \mathcal{A} .

Qualquer elemento $\rho = (\rho_j)$ de X determina uma função bem definida $\bigcup_{t \in \mathbf{Z}} A_t \rightarrow S_r$ por $a_{i,j} \mapsto \rho_t(a_{i,t-j})$ se $a_{i,j} \in A_t$. Esta função aplica cada relator $x^{-t}r_jx^t$ em R_t no elemento $\rho_t(r_j)$ que é a identidade (já que ρ_t é um homomorfismo), e assim ela induz um homomorfismo de $K = \langle A_t : R_t, t \in \mathbf{Z} \rangle$ em S_r . É fácil verificar que isto determina uma função contínua shift-comutativa f de X em (Φ_r, σ_x) .

Reciprocamente, qualquer representação $\rho : K \rightarrow S_r$ determina uma função $A_0 \rightarrow S_r$ para cada t por $a_{i,j} \mapsto \rho(a_{i,j+t})$. A função aplica cada relator r_j em R_0 em $\rho(x^{-t}r_jx^t)$, o elemento identidade de S_r , e assim ela induz um homomorfismo ρ_t de H_0 em S_r . Claramente, $\rho = (\rho_t)$ é um elemento do shift X , e obtemos uma função contínua shift-comutativa $g : (\Phi_r, \sigma_x) \rightarrow X$. Como f e g são inversas uma da outra, os shifts (Φ_r, σ_x) e X são conjugados. ■

Em vista do Teorema 3.0.1 elementos do shift X serão vistos como representações $\rho : K_\chi \rightarrow S_r$ sem menção explícita da correspondência. Notemos que segundo a correspondência os N -blocos permitidos de X são as representações do grupo $H_{[0, N-1]} = \langle A_0, \dots, A_{N-1} : R_0, \dots, R_{N-1} \rangle$ em S_r .

Qualquer apresentação com a forma (3.1) é chamada uma **apresentação \mathbf{Z} -dinâmica finita**. Os resultados deste trabalho podem ser estabelecidos em termos de tais apresentações ao invés de sistemas aumentados de grupos.

Exemplo 3.0.1. *Seja $G = \langle x, a : xax^{-1} = a^2 \rangle$ e seja χ o homomorfismo abelianização. No Exemplo 2.1.2 exibimos uma representação particular de K_χ em S_3 . Vamos encontrar todas estas representações. Lembremos que $K_\chi = \langle a_i : a_i = a_{i+1}^2, i \in \mathbf{Z} \rangle$. Aqui, $M = 1$, e $H_0 = \langle A_0 : R_0 \rangle$, onde $A_0 = \{a_0, a_1\}$ e R_0 consiste da única relação $a_0 = a_1^2$. (Indexamos a letra a apenas com o seu segundo índice já que o primeiro é sempre igual a 1.) O grupo simétrico S_3 é gerado por $\sigma = (1, 2, 3)$ e $\tau = (1, 2)$. Existem exatamente 6 representações de H_0 em S_3 , correspondentes aos seis valores, (id, id) , (σ, σ^2) , (σ^2, σ) , (id, τ) , $(id, \sigma\tau)$, $(id, \sigma^2\tau)$, para (a_0, a_1) que satisfazem o relator de H_0 . Os pares se tornam os vértices do grafo direcionado Γ , com uma aresta direcionada do vértice v ao vértice v' se e somente se a segunda coordenada de v é igual à primeira coordenada de v' . O grafo Γ aparece na Figura 3.2.*

A partir de Γ vemos que o shift (Φ_3, σ_x) é finito, consistindo de apenas 3 elementos. Um elemento é uma representação de K_χ em S_3 correspondente à seqüência constante $(\dots, id, id, id, \dots) \in X$. O subgrupo de K_χ correspondente a esta representação é o próprio K_χ . Os outros dois elementos são representações transitivas

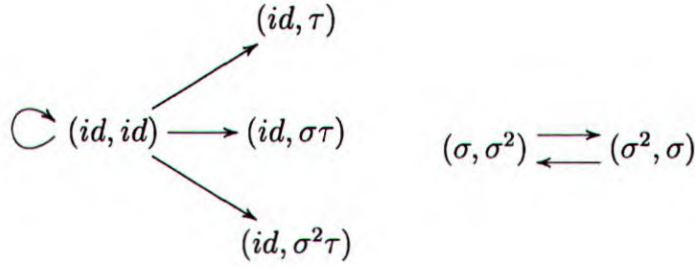


Figura 3.2: Grafo Γ

de K_χ em S_3 que formam uma órbita de período 2 em (Φ_3, σ_x) ; isto é, eles são mandados um no outro por σ_x . Estas duas representações se estendem a G (veja Proposição 3.0.2). Como uma das representações é a outra composta com um automorfismo interno de S_3 , conjugação por $(2, 3)$, ambas determinam o mesmo subgrupo de índice 3, chamado $3\mathbf{Z}[1/2]$. O núcleo K_χ não tem nenhum subgrupo de índice 2. Seguirá de um resultado mais geral (Proposição 4.2.1) que K_χ tem um subgrupo de índice r se e somente se r é ímpar, e neste caso tal subgrupo é único, isomorfo a $r\mathbf{Z}[1/2]$.

Embora seja conveniente representar X como o vertex shift de um grafo direcionado Γ , nós também podemos representar X como o edge shift de outro grafo $\widehat{\Gamma}$ que usualmente tem menos vértices que Γ e assim é mais simples de se calcular. Os vértices de $\widehat{\Gamma}$ correspondem às funções $\rho_0 : A_{0,1} \rightarrow S_r$. (Quando $A_{0,1}$ é vazio, $\widehat{\Gamma}$ tem um único vértice correspondente à única função $\rho_0 : \emptyset \rightarrow S_r$.) Se ρ_0 é uma representação de H_0 em S_r , colocamos uma aresta direcionada ρ_0 do vértice $\rho_0|_{A_{0,1}}$ ao vértice $\rho'_0|_{A_{0,1}}$, onde $\rho'_0(a_{i,j}) = \rho_0(a_{i,j+1})$ para todo $a_{i,j} \in A_{0,1}$. Notemos que as arestas de $\widehat{\Gamma}$ correspondem aos vértices de Γ . Ilustramos com um exemplo que mostra que o conjunto de representações de K_χ em S_r pode ser consideravelmente maior que o conjunto de representações de G em S_r , em contraste com o exemplo anterior.

Exemplo 3.0.2. Seja $G = \langle x, a_1, a_2 : x^{-1}a_1^2x = a_1^{-1}a_2^2a_1 \rangle$ e consideremos o homomorfismo $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$ descrito por $x \mapsto 1, a_1 \mapsto 0$ e $a_2 \mapsto 0$. É claro da forma da relação $x^{-1}a_1^2x = a_1^{-1}a_2^2a_1$ que qualquer função do conjunto de geradores $\{x, a_1, a_2\}$ no grupo simétrico $S_2 = \{id, \sigma\}$ induz um homomorfismo. Logo existem exatamente 8 representações de G em S_2 . Para encontrar todas as representações de K_χ , primeiro aplicamos o método de Reidemeister-Schreier para obter $K_\chi = \langle a_{1,j}, a_{2,j} : a_{1,j}^{-1}a_{2,j}^2a_{1,j} = a_{1,j+1}^2 \rangle$. Então $M_1 = 1, M_2 = 0$, e $H_0 = \langle A_0 : R_0 \rangle$, onde $A_0 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, a_{2,0}\}$ e R_0 consiste da única relação $a_{1,0}^{-1}a_{2,0}^2a_{1,0} = a_{1,1}^2$. O

grafo direcionado $\hat{\Gamma}$ tem dois vértices, correspondentes às funções de $A_{0,1} = \{a_{1,0}\}$ em S_2 . Novamente da forma da relação existem 8 representações $\rho_0 : H_0 \rightarrow S_2$, correspondentes às ternas ordenadas de elementos em S_2 , os valores de $(a_{1,0}, a_{1,1}, a_{2,0})$. As oito ternas se tornam arestas. O grafo direcionado $\hat{\Gamma}$ aparece na Figura 3.3. A partir disto vemos que (Φ_2, σ_x) é não-enumerável. Logo K_χ tem uma quantidade não-enumerável de representações em S_2 e uma quantidade não-enumerável de subgrupos de índice 2 pelo Teorema 3.0.1 e Corolário 2.2.1.

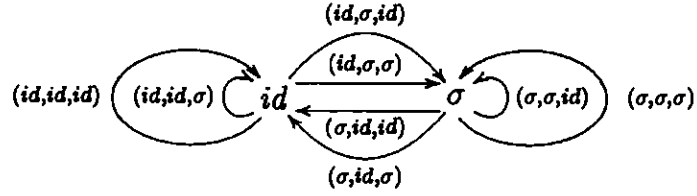


Figura 3.3: Grafo $\hat{\Gamma}$

Quando uma representação de K_χ em S_r se estende a uma representação de G em S_r ? A Proposição 3.0.2 nos dá uma resposta completa. O Corolário 3.0.2 dá uma condição necessária em termos de (Φ_r, σ_x) .

Proposição 3.0.2. *Uma representação $\rho : K_\chi \rightarrow S_r$ se estende a uma representação de G em S_r se, e somente se, existe um elemento $\tau \in S_r$ tal que $\tau^{-1}\rho(a_{i,j})\tau = \rho(a_{i,j+1})$, $1 \leq i \leq n$, $j \in \mathbf{Z}$.*

Demonstração: Suponha que $\rho : K_\chi \rightarrow S_r$ se estende a uma representação de G em S_r . Seja $\tau = \rho(x)$. Aplicando ρ em cada lado da relação $x^{-1}a_{i,j}x = a_{i,j+1}$, temos

$$\begin{aligned}\rho(x^{-1}a_{i,j}x) &= \rho(a_{i,j+1}) \\ \rho(x)^{-1}\rho(a_{i,j})\rho(x) &= \rho(a_{i,j+1}) \\ \tau^{-1}\rho(a_{i,j})\tau &= \rho(a_{i,j+1})\end{aligned}$$

Reciprocamente, se ρ é uma representação de K_χ em S_r e existe um elemento $\tau \in S_r$ tal que $\tau^{-1}\rho(a_{i,j})\tau = \rho(a_{i,j+1})$, $1 \leq i \leq n$, $j \in \mathbf{Z}$, então podemos estender ρ a todo G definindo $\rho(x)$ como sendo τ . ■

Corolário 3.0.2. *Se uma representação $\rho : K_\chi \rightarrow S_r$ se estende a uma representação de G em S_r , então ρ é um ponto periódico de (Φ_r, σ_x) ; isto é, $\sigma_x^d(\rho) = \rho$ para algum inteiro positivo d .*

Demonstração: Como ρ se estende a uma aplicação de G em S_r , pela Proposição 3.0.2 existe $\tau \in S_r$ tal que $\tau^{-1}\rho(a_{i,j})\tau = \rho(a_{i,j+1})$. Seja d a ordem de τ em S_r . Como $\rho(a_{i,j}) = \tau^{-d}\rho(a_{i,j})\tau^d = \rho(a_{i,j+d})$, segue que $\sigma_x^d(\rho) = \rho$ no shift (Φ_r, σ_x) . ■

Observamos que pontos periódicos de (Φ_r, σ_x) não precisam se estender para representações de G em S_r . Por exemplo, no Exemplo 3.0.2 a representação correspondente a $\rho = (\rho_t)$, onde

$$\rho_t = \begin{cases} (id, \sigma, id) & \text{se } t \text{ é par} \\ (\sigma, id, id) & \text{se } t \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.2)$$

não se estende a uma representação de G em qualquer grupo simétrico S_r . De fato, temos

$$\begin{array}{ll} \rho(a_{1,0}) = id & \rho(a_{2,0}) = id \\ \rho(a_{1,1}) = \sigma & \rho(a_{2,1}) = id \\ \rho(a_{1,2}) = id & \rho(a_{2,2}) = id \\ \rho(a_{1,3}) = \sigma & \rho(a_{2,3}) = id \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Assim, suponhamos que ρ se estende a uma representação de G em S_r . Então existe $\tau \in S_r$ tal que $\tau^{-1}\rho(a_{i,j})\tau = \rho(a_{i,j+1})$. Logo $\tau^{-1}\rho(a_{1,0})\tau = \rho(a_{1,1})$, ou seja, $\tau^{-1}id\tau = \sigma$. Logo, $id = \sigma$, o que é um absurdo. Logo ρ não se estende a todo G .

Entretanto é possível caracterizar os pontos periódicos do shift representação. Se (G, χ, x) é um sistema aumentado de grupo, então para qualquer inteiro positivo d definimos $K_{\chi,d}$ como o núcleo da composição $G \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/(d)$, onde a primeira aplicação é o epimorfismo χ e a segunda é a projeção quociente natural.

Proposição 3.0.3. *Uma representação $\rho : K_{\chi} \rightarrow S_r$ é um ponto periódico de (Φ_r, σ_x) se, e somente se, para algum $d > 0$, ρ se estende a uma representação de $K_{\chi,d}$.*

Demonstração: Seja $\langle a_{i,j} : R_j, 1 \leq i \leq n, j \in \mathbf{Z} \rangle$ uma apresentação para K_x . Não é difícil ver que $K_{x,d}$ tem apresentação $\langle y, a_{i,j} : R_j, y^{-1}a_{i,j}y = a_{i,j+d}, 1 \leq i \leq n, j \in \mathbf{Z} \rangle$ na qual y representa o elemento $x^d \in G$. Se $\sigma_x^d(\rho) = \rho$, então podemos estender ρ a $K_{x,d}$ definindo $\rho(y) = id$. Reciprocamente, se $\rho : K_x \rightarrow S_r$ se estende a uma representação de $K_{x,d}$ em S_r então, denotando a extensão por ρ , devemos ter $\rho(y)^{-1}\rho(a_{i,j})\rho(y) = \rho(a_{i,j+d})$ para todo $a_{i,j}$. Seja q a ordem de $\rho(y)$ em S_r . Então $\sigma_x^{dq}\rho(a_{i,j}) = \rho(a_{i,j+dq}) = \rho(y)^{-dq}\rho(a_{i,j})\rho(y)^{dq} = \rho(a_{i,j})$. Logo ρ é periódica. ■

Capítulo 4

Aplicações

4.1 O Invariante de Bieri-Neumann-Strebel

Novamente seja G um grupo finitamente apresentado e seja χ um epimorfismo com núcleo K_χ . Dada uma apresentação finita de G , obtemos no Capítulo 3 uma apresentação $\langle A_0 : R_0 \rangle$ de um certo grupo H_0 . Como já observamos, em geral H_0 não é um subgrupo de K_χ . Mas existe um subgrupo normal, que chamamos K_0 , em H_0 tal que H_0/K_0 é subgrupo de K_χ . Similarmente para H_t . Denotaremos estes grupos fatores por H_{t*} . Em [8] Rapaport descreve como recuperar G usando H_{0*} : Seja $H_{0,1*}$ o subgrupo de H_{0*} gerado por $A_{0,1}$ e seja $H_{0,2*}$ o subgrupo gerado por $A_{0,2}$. A aplicação $a_{i,j} \mapsto a_{i,j+1}$ induz um isomorfismo $\phi : H_{0,1*} \rightarrow H_{0,2*}$. O grupo G pode ser descrito como $\langle x, H_{0*} : x^{-1}hx = \phi(h) \rangle$, $h \in H_{0,1*}$ (onde, abusando da notação, da maneira usual, escrevemos H_{0*} no lugar dos geradores e relatores específicos para tal grupo). Os peritos reconhecerão G como uma extensão HNN de H_{0*} . Lembremos que um grupo G é uma extensão HNN de um grupo B se existirem subgrupos S e T de B e um isomorfismo $\phi : S \rightarrow T$ tal que $G = \langle x, B : x^{-1}sx = \phi(s), s \in S \rangle$, onde x é um gerador não contido em B . Neste caso, B é chamada a base da extensão HNN, enquanto S e T são os subgrupos associados. Quando S coincide com a base B , então a extensão HNN é dita ascendente.

Se G é qualquer grupo finitamente apresentado e $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$ é um epimor-

fismo, então G pode ser descrito como uma extensão HNN com base finitamente gerada B contida em K_χ ([3]). Em [2] Bieri, Neumann e Strebel mostram que se uma tal extensão HNN descrevendo G é ascendente, então todas são. Na verdade, eles mostram que este é o caso se, e somente se, uma determinada classe $[\chi]$ em $(\text{Hom}(G, \mathbb{R}) \setminus 0)/\mathbb{R}_+$, onde \mathbb{R}_+ atua por multiplicação, está em um certo subconjunto Σ .

Vamos assumir o seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. *Suponhamos que (G, χ, x) é um sistema aumentado de grupo. Se $[\chi] \in \Sigma$, então para qualquer r o shift associado (Φ_r, σ_x) é finito. Consequentemente, K_χ contém apenas uma quantidade finita de subgrupos H com índice $|K_\chi : H| \leq r$ para qualquer $r < \infty$.*

Notemos que as hipóteses do Teorema 4.1.1 não fazem menção ao elemento distinguido x . De fato, o Teorema 4.1.1 é um resultado sobre pares (G, χ) tal que G é um grupo finitamente apresentado e $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ é um epimorfismo. Chamaremos tal par um sistema de grupo.

Lembremos que um grupo G é residualmente finito se a intersecção de todos os subgrupos normais de índice finito de G é trivial. Equivalentemente, G é residualmente finito se dado qualquer elemento não trivial $g \in G$, existe um homomorfismo de G em algum grupo finito tal que g não está no núcleo. Um grupo é hopfiano se todo homomorfismo do grupo sobre ele mesmo é um automorfismo. Um teorema bem conhecido de Malcev estabelece que todo grupo residualmente finito, finitamente gerado é hopfiano.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Malcev). *Um grupo G residualmente finito, finitamente gerado é hopfiano.*

Demonstração: Seja $\theta : G \rightarrow G$ sobrejetora e seja K o núcleo de θ . Seja n qualquer inteiro positivo. Como G é finitamente gerado, o teorema de M. Hall [7] estabelece que existe apenas uma quantidade finita de subgrupos, digamos M_1, M_2, \dots, M_k de índice n . Seja $L_i = \theta^{-1}(M_i)$. É fácil verificar que $[G : L_i] = n$. Como as pré-imagens dos M_i são distintas e existe apenas uma quantidade finita de M_i , a coleção dos L_i é igual à coleção dos M_i . Então K está contido em todos os M_i . Mas como n é arbitrário, K está contido na intersecção de todos os subgrupos de índice finito. Como G é residualmente finito, esta intersecção é $\{1\}$. Logo $K = \{1\}$ e θ é um automorfismo. ■

Notemos que a prova do teorema de Malcev requer que o grupo seja finitamente gerado apenas para que se saiba que o número de subgrupos de um índice arbitrário r é finito. O seguinte corolário é imediato.

Corolário 4.1.1. *Seja (G, χ) um sistema de grupo. Se G é residualmente finito e $[\chi] \in \Sigma$, então K_χ é hopfiano.*

Demonstração: Como (G, χ) é um sistema de grupo e $[\chi] \in \Sigma$, pelo Teorema 4.1.1, segue que K_χ contém apenas uma quantidade finita de subgrupos H de índice $|K_\chi : H| \leq r$ para qualquer r finito. Como G é residualmente finito, temos que K_χ também é. Assim, pelo Teorema de Malcev, segue que K_χ é hopfiano. ■

Questão 4.1.1. *Se G é o grupo de um nó em S_3 , o subgrupo comutador G' é hopfiano?*

Em vista do fato que grupos de nós são residualmente finitos [14], W. Whitten e D. S. Silver esperavam obter uma resposta afirmativa para a Questão 4.1.1, mostrando que o subgrupo comutador de qualquer grupo de nó tem apenas uma quantidade finita de subgrupos com um índice arbitrário finito. Pois desta forma, como G' é residualmente finito, pelo Teorema de Malcev teríamos que G' é hopfiano. As técnicas deste trabalho, entretanto, mostram que o subgrupo comutador do grupo do nó 5_2 (Figura 4.1) tem uma quantidade não-enumerável de subgrupos de índice r sempre que $r > 3$.

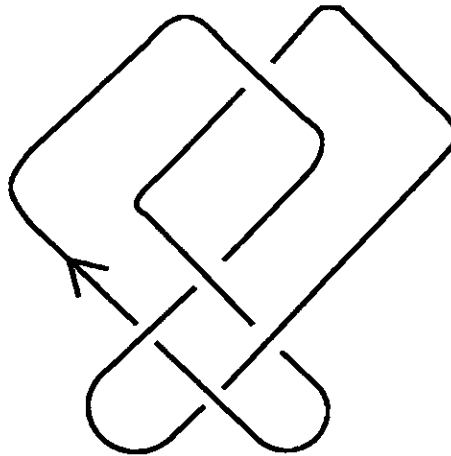


Figura 4.1: Nó 5_2

Para ver isso, consideremos a apresentação de Wirtinger

$$\begin{aligned}
&\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : x_1 = x_2x_5x_2^{-1}, x_3 = x_5x_2x_5^{-1}, x_4 = x_1x_3x_1^{-1}, x_2 = x_4x_1x_4^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x_2, x_4, x_5 : x_4 = x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2x_5^{-1}x_2x_5^{-1}x_2^{-1}, x_2 = x_4x_2x_5x_2^{-1}x_4^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x_2, x_5 : x_2 = x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2x_5^{-1}x_2x_5^{-1}x_2^{-1}x_2x_5x_2^{-1}x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2^{-1}x_5^{-1}x_2x_5^{-1}x_2^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x_2, x_5 : x_2 = x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2x_5^{-1}x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2^{-1}x_5^{-1}x_2x_5^{-1}x_2^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x_2, x_5 : x_5x_2^{-1}x_5x_2x_5^{-1}x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2^{-1}x_5^{-1}x_2x_5^{-1}x_2^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x_2, x_5 : x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2x_5^{-1}x_2x_5^{-1}x_2^{-1}x_5x_2^{-1}x_5^{-1}x_2x_5^{-1} \rangle.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = x_2$ e $a = x_2^{-1}x_5 = x^{-1}x_5$, temos que $x_5 = xa$. Assim

$$\begin{aligned}
&\langle x_2, x_5 : x_2x_5x_2^{-1}x_5x_2x_5^{-1}x_2x_5^{-1}x_2^{-1}x_5x_2^{-1}x_5^{-1}x_2x_5^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x, a : xxaaxa^{-1}a^{-1}x^{-1}ax^{-1}a^{-1}a^{-1}x^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x, a : x^2a^2xa^{-2}x^{-1}ax^{-1}a^{-2}x^{-1} \rangle \cong \\
&\langle x, a : x(xa^2xa^{-2}x^{-1}ax^{-1}a^{-2})x^{-1} \rangle.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : x_1 = x_2x_5x_2^{-1}, x_3 = x_5x_2x_5^{-1}, x_4 = x_1x_3x_1^{-1}, x_2 = x_4x_1x_4^{-1} \rangle \\
&\cong \langle x, a : x(xa^2xa^{-2}x^{-1}ax^{-1}a^{-2})x^{-1} \rangle,
\end{aligned}$$

onde $x = x_2$ e $a = x^{-1}x_5$.

Temos que $\chi(x) = 1$ e $\chi(a) = 0$.

Façamos $a_1 = ax^{-\chi(a)} = a$. Então, pelo método de Reidemeister-Schreier, temos que os geradores de K_χ são os elementos $a_{1,j} = x^{-j}a_1x^j$, $j \in \mathbf{Z}$; ou seja, $\{a_i : i \in \mathbf{Z}\}$, onde $a_i = x^{-i}ax^i$, é o conjunto de geradores de K_χ .

K_χ tem $x^{-i}rx^i$ como relator, onde r é o relator da apresentação de G . Temos que o relator $xa^2xa^{-2}x^{-1}ax^{-1}a^{-2}$ é equivalente a $x^{-2}(xa^2xa^{-2}x^{-1}ax^{-1}a^{-2})x^2 = x^{-1}a^2xa^{-2}x^{-1}ax^{-1}a^{-2}x^2$. Logo os relatores de K_χ são

$$\begin{aligned}
& x^{-i}x^{-1}a^2xa^{-2}x^{-1}ax^{-1}a^{-2}x^2x^i = \\
& (x^{-i-1}a^2x^{i+1})(x^{-i}a^{-2}x^i)(x^{-i-1}ax^{i+1})(x^{-i-2}a^{-2}x^{i+2}) = \\
& a_{i+1}^2a_i^{-2}a_{i+1}a_{i+2}^{-2}.
\end{aligned}$$

Portanto obtemos a seguinte apresentação para o subgrupo comutador G'

$$\langle a_i : a_{i+1}^2a_i^{-2}a_{i+1}a_{i+2}^{-2} \rangle.$$

O grafo direcionado $\widehat{\Gamma}$ que descreve o shift representação (Φ_4, σ_x) é grande, mas podemos apenas entender bem o detalhe na Figura 4.2 que mostra dois ciclos. Qualquer caminho bi-infinito em $\widehat{\Gamma}$ que passa pelo menos uma vez em volta de cada ciclo corresponde a uma representação transitiva de G' em S_4 . Pela Proposição 2.1.1 concluímos que G' contém uma quantidade não-enumerável de subgrupos de índice 4. Além disso, como cada permutação no círculo interno fixa 4, podemos adicionar um terceiro ciclo, idêntico ao segundo, mas com 5 no lugar de 4, e assim obter um detalhe do grafo direcionado descrevendo (Φ_5, σ_x) (veja Figura 4.3). Novamente, qualquer caminho bi-infinito que percorre pelo menos uma vez cada ciclo corresponde a uma representação transitiva de G' , desta vez em S_5 . Este processo pode ser repetido para obter uma quantidade não-enumerável de subgrupos de G' de índice r , para qualquer $r \geq 4$. Curiosamente, G' tem apenas uma quantidade finita de subgrupos de índice $r < 4$.

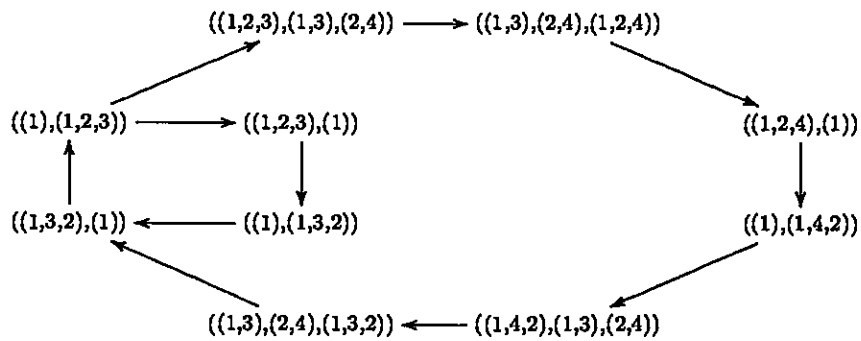


Figura 4.2: Detalhe do grafo de (Φ_4, σ_x)

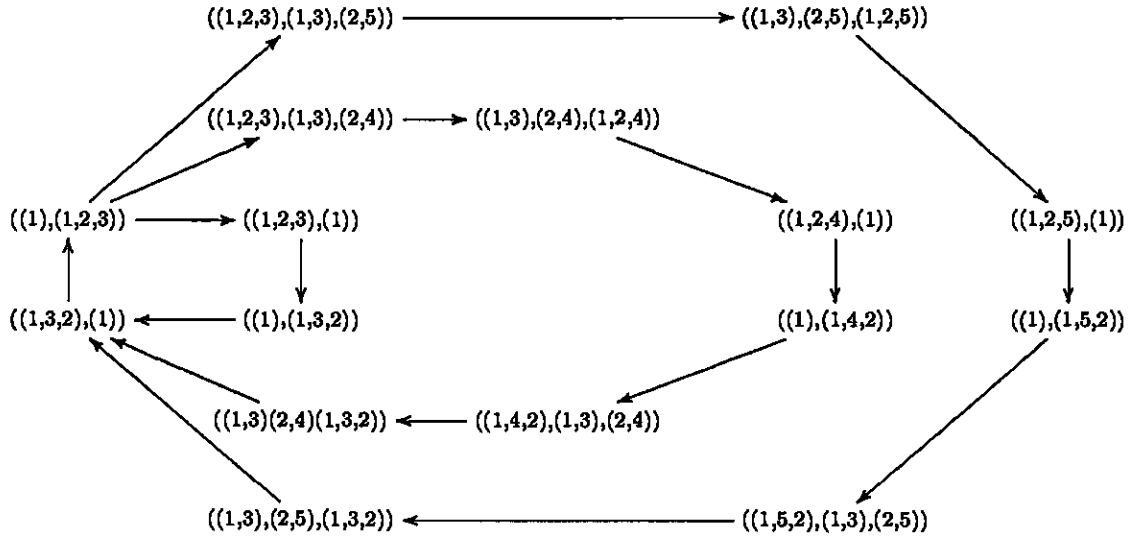


Figura 4.3: Detalhe do grafo de (Φ_5, σ_x)

4.2 Os Grupos de Baumslag-Solitar

Em 1962 Baumslag e Solitar provaram que o grupo

$$G(m, n) = \langle x, a : xa^m x^{-1} = a^n \rangle$$

é não hopfiano sempre que $m, n \geq 2$ são coprimos [1]. Para quaisquer inteiros m e n , nós definimos $\chi : G(m, n) \rightarrow \mathbf{Z}$ como o homomorfismo tal que $\chi(x) = 1$ e $\chi(a) = 0$. Dessa forma, temos que os geradores do núcleo $K(m, n)$ de χ são os elementos $a_i = x^{-i} a x^i$ e as relações são $r_i : a_i^m = a_{i+1}^n$; ou seja, $K(m, n) = \langle a_i : a_i^m = a_{i+1}^n \rangle$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} x^{-i} (x a^m x^{-1}) x^i &= x^{-i} a^n x^i \\ \Rightarrow x^{-(i-1)} a^m x^{i-1} &= x^{-i} a^n x^i \\ \Rightarrow a_{i-1}^m &= a_i^n \end{aligned}$$

$$\text{Logo } K_\chi = \langle a_i : a_i^m = a_{i+1}^n \rangle.$$

Utilizaremos o seguinte Lema na demonstração da Proposição 4.2.1.

Lema 4.2.1. *Suponha que g é qualquer elemento de ordem finita de um grupo. Se a ordem $o(g^a) = b$, e se $(a, b) = d$, então $o(g) = a_1 d b$ para algum a_1 dividindo a/d .*

Demonstração Temos que $(g^a)^b = g^{ab} = e$. Logo $o(g) | ab$. Então existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda o(g) = ab$.

Por outro lado, de $o(g^a) = b$ e $\langle g^a \rangle < \langle g \rangle$ segue que $b | o(g)$, ou seja, existe $\mu \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu b = o(g)$. Substituindo $o(g) = \mu b$ em $\lambda o(g) = ab$ obtemos $\lambda \mu b = ab$, ou seja, $\lambda \mu = a$. Portanto, $\lambda | a$.

Note que $(g^{\frac{a}{\lambda}})^b = g^{\frac{ab}{\lambda}} = g^{o(g)} = e$. Logo $o(g^{\frac{a}{\lambda}}) | b$. (E assim, $o(g^{\frac{a}{\lambda}}) \leq b$.) Por outro lado, $\langle g^{\frac{a}{\lambda}} \rangle > \langle g^a \rangle$. Então $o(g^{\frac{a}{\lambda}}) \leq o(g^a) = b$. Portanto, $o(g^{\frac{a}{\lambda}}) = b$. Assim, $\langle g^{\frac{a}{\lambda}} \rangle = \langle g^a \rangle$.

Observemos que $g^{a+k o(g)} = g^a g^{k o(g)} = g^a g^{o(g)^k} = g^a$. Assim, $a/\lambda + k(ab/\lambda) = a$, ou seja, $1 + kb = \lambda$. Logo $1 = \lambda - kb$. Portanto $(\lambda, b) = 1$.

Como $(a, b) = d$, temos que $d | b$. De $(\lambda, b) = 1$ e $d | b$, segue que $(\lambda, d) = 1$.

Temos que $\lambda o(g) = ab$, ou seja, $\lambda o(g) = \frac{a}{d} \frac{b}{d} d^2$ com $(a/d, b/d, d^2) = 1$. Como λ não divide d e b/d , segue que λ divide a/d .

$$\text{Logo } o(g) = \frac{a}{\lambda d} b d$$

Basta então chamarmos $a_1 = \frac{a}{\lambda d}$.

■

Aplicando as técnicas do Capítulo 3, provamos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.1. *(i) Suponhamos que $(m, n) = 1$. Então $K(m, n)$ tem um subgrupo de índice r se, e somente se, $(r, m) = (r, n) = 1$. Neste caso, existe exatamente um tal subgrupo.*

(ii) Suponhamos que $(m, n) \neq 1$. Se r é maior ou igual ao menor primo divisor de m e n , então $K(m, n)$ tem uma quantidade não-enumerável de subgrupos de índice r .

Demonstração: Da relação $a_i^m = a_{i+1}^n$ temos que $(a_i^m)^n = a_i^{mn} = a_{i+1}^{mn}$ e $a_{i+1}^{n^2} = a_i^{mn}$, (e portanto $a_{i+2}^{n^2} = a_{i+1}^{mn}$) ou seja, $a_i^{m^2} = a_{i+2}^{n^2}$. Da mesma forma temos $a_i^{m^3} = a_{i+2}^{mn^2} = (a_{i+2}^m)^{n^2} = (a_{i+3}^n)^{n^2} = a_{i+3}^{n^3}$. Prosseguindo desta forma mostramos que

$$a_i^{m^k} = a_{i+k}^{n^k} \quad (4.1)$$

para todo $k \geq 1$.

Seja ρ uma representação transitiva de $K(m, n)$ em S_r , e denotemos a permutação $\rho(a_i)$ por ρ_i . Como S_r é finito, temos que $\rho_s = \rho_{s+t}$ para algum s e $t \geq 1$. Então por (4.1), temos

$$\rho_s^{m^t} = [\rho(a_s)]^{m^t} = \rho(a_s)^{m^t} = \rho(a_{s+t}^{n^t}) = [\rho(a_{s+t})]^{n^t} = \rho_{s+t}^{n^t} = \rho_s^{n^t}.$$

Seja l a ordem de ρ_s em S_r . Como $\rho_s^{m^t} = \rho_s^{n^t}$ segue que $l \mid (m^t - n^t)$. Como, por hipótese, $(m, n) = 1$, devemos ter $(l, m) = (l, n) = 1$.

Afirmção: Todas as permutações ρ_i têm ordem l .

Desta afirmação segue que podemos resolver a equação $\rho_i^m = \rho_{i+1}^n$, obtendo $\rho_i = \rho_{i+1}^{nv}$, onde v é tal que $vm = l$; ou $\rho_{i+1} = \rho_i^{mq}$, onde q é tal que $qn = l$.

Consequentemente todas as permutações ρ_i são unicamente determinadas como potências de uma única permutação ρ_0 . Como a representação ρ é transitiva, ρ_0 deve atuar transitivamente sobre $\{1, \dots, r\}$, então $l = r$ e, a menos de automorfismo interno de S_r , podemos assumir que $\rho_0 = (1, 2, \dots, r)$. Então $(r, m) = (r, n) = 1$ e, como já vimos anteriormente, os subgrupos $H_i = \pi(\rho_i)$ são todos iguais já que são potências de ρ_0 .

Provemos agora a afirmação. É suficiente mostrar que se algum ρ_i tem ordem l , com $(l, m) = (l, n) = 1$, então ρ_{i+1} e ρ_{i-1} também têm ordem l .

Suponhamos que ρ_i tem ordem l . Como $(l, m) = 1$, temos que $l = o(\rho_i^n) = o(\rho_{i+1}^n)$. Usando o Lema 4.2.1, $o(\rho_{i+1}) = n_1 l$, onde n_1 divide n . Então $n_1 l = o(\rho_i^m) = o(\rho_{i+2}^m)$. Novamente usando o Lema 4.2.1, $o(\rho_{i+2}) = n_2 n_1^2 l$, onde $n_2 \mid (n/n_1)$. Continuando desta maneira, concluímos que a ordem de ρ_{i+k} é divisível por n_1^k . Como a ordem é limitada por r , devemos ter $n_1 = 1$ e $o(\rho_{i+1}) = l$.

O mesmo argumento mostra que $o(\rho_{i-1}) = l$. Isto completa a prova de (i).

Provemos agora (ii). Seja $p > 0$ primo dividindo m e n , e suponha que $r \geq p$. Seja S o conjunto de todos os elementos de S_r que são produtos de p -ciclos disjuntos. Incluímos o “produto vazio” (1), de forma que a cardinalidade de S é maior ou igual a 1 sempre que $r = p = 2$. Então (Φ_r, σ_x) contém o full shift sobre os elementos de S . É fácil ver que uma quantidade não-enumerável de elementos deste shift correspondem a representações transitivas de $K(m, n)$ em S_r . Usando a Proposição 2.1.1 vemos que $K(m, n)$ contém uma quantidade não enumerável de subgrupos de índice r . ■

4.3 Um Invariante de Entropia para (G, χ)

Na Seção 4.1 vimos que se (G, χ, x) é um sistema aumentado de grupo, então algumas conclusões sobre os shifts representação associados (Φ_r, σ_x) podem ser deduzidas a partir apenas do par (G, χ) . A classe de conjugação do shift (Φ_r, σ_x) é, na verdade, independente da escolha do elemento distingüido x ? O Exemplo 4.3.1 mostra que a resposta é não.

Exemplo 4.3.1. *Consideremos o sistema aumentado de grupo (G, χ, x) , onde G é o grupo livre sobre x e a , e $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$ é o epimorfismo determinado por $x \mapsto 1, a \mapsto 0$. O núcleo K_χ é livre com geradores $a_i, i \in \mathbf{Z}$, onde a_i denota $x^{-1}ax^i$. Claramente o shift representação associado (Φ_3, σ_x) é conjugado ao full 6-shift. Este shift tem exatamente 6 pontos fixos, correspondentes às representações $\rho : a_i \mapsto \phi$, para todo $i \in \mathbf{Z}$, onde ϕ é qualquer permutação em S_3 .*

Agora considere o sistema aumentado de grupo (G, χ, y) , onde $y = xax^{-1}a^{-1}x$. Para estudar o shift representação associado (Φ_3, σ_y) , primeiro aplicamos uma sequência de transformações de Tietze à apresentação $\langle x, a : \rangle$ para G

$$\langle x, a : \rangle = \langle x, a, b, y : b = ax^{-1}a^{-1}x, y = xb \rangle \cong \langle a, b, y : b = aby^{-1}a^{-1}yb^{-1} \rangle.$$

Depois aplicamos o método de Reidemeister-Schreier à última apresentação. Tomando $x_1 = a$ e $x_2 = b$, temos que $a_i = x_i y^{-\chi(x_i)}$, ou seja, $a_1 = a$ e $a_2 = b$. Os geradores de K_χ são os elementos $a_{i,j}$ com $i = 1, 2$ e $j \in \mathbf{Z}$, onde $a_{i,j} = y^{-j}a_i y^j$; ou seja, $\{a_i, b_i : i \in \mathbf{Z}\}$ é o conjunto de geradores de K_χ , onde $a_i = y^{-i}a y^i$ e $b_i = y^{-i}b y^i$. Os relatores de K_χ são da forma $y^{-i}r y^i$, onde r é o relator da apresentação de G .

$$\begin{aligned}
\{y^{-i}ry^i\} &= \{y^{-i}by^i = y^{-i}aby^{-1}a^{-1}yb^{-1}y^i\} = \\
\{b_i &= (y^{-i}ay^i)(y^{-i}by^i)(y^{-i}y^{-1}a^{-1}yy^i)(y^{-i}b^{-1}y^i)\} = \\
\{b_i &= a_i b_i a_{i+1}^{-1} b_i^{-1}\}
\end{aligned}$$

Assim, obtemos uma apresentação $\langle a_i, b_i : b_i = a_i b_i a_{i+1}^{-1} b_i^{-1} \rangle$ para K_χ , onde a_i agora denota $y^{-i}ay^i$, e da mesma forma b_i denota $y^{-i}by^i$. É fácil verificar que (Φ_3, σ_y) tem 6 pontos fixos correspondentes às representações $\rho : a_i \mapsto \phi, b_i \mapsto (1)$, onde $\phi \in S_3$. Entretanto, (Φ_3, σ_y) tem mais 6 pontos fixos

$$\begin{aligned}
a_i &\mapsto (1, 2), b_i \mapsto (1, 2, 3) \\
a_i &\mapsto (2, 3), b_i \mapsto (1, 2, 3) \\
a_i &\mapsto (1, 3), b_i \mapsto (1, 2, 3) \\
a_i &\mapsto (1, 2), b_i \mapsto (1, 3, 2) \\
a_i &\mapsto (2, 3), b_i \mapsto (1, 3, 2) \\
a_i &\mapsto (1, 3), b_i \mapsto (1, 3, 2)
\end{aligned}$$

Como shifts conjugados têm o mesmo número de pontos fixos, (Φ_3, σ_x) e (Φ_3, σ_y) não são conjugados.

Definição 4.3.1. Shifts de tipo finito são finitamente equivalentes se existir um shift de tipo finito que se aplica sobre cada um por aplicações que são finito a um.

A equivalência finita é uma forma mais fraca de equivalência que a conjugação [6]. Entretanto, é uma noção útil.

Definição 4.3.2. A entropia de um shift pode ser definida como $\limsup \frac{1}{N} \log |\mathcal{B}_N|$, onde $|\mathcal{B}_N|$ é o número de N -blocos permitidos do shift.

Shifts conjugados têm a mesma entropia. Na verdade, shifts finitamente equivalentes também têm a mesma entropia.

Teorema 4.3.1. Suponhamos que (G, χ, x) e (G, χ, y) sejam sistemas aumentados de grupos que diferem apenas na escolha dos elementos distinguidos x e y . Então para cada $r > 0$, os shifts associados (Φ_r, σ_x) e (Φ_r, σ_y) são finitamente equivalentes.

Demonstração: Lembremos que Φ_r é o conjunto de representações $\rho : K_\chi \rightarrow S_r$. As aplicações σ_x e σ_y são definidas por $\sigma_x\rho(g) = \rho(x^{-1}gx)$ e $\sigma_y\rho(g) = \rho(y^{-1}gy)$, para todo $g \in K_\chi$. Podemos escrever $y = xb$ para algum elemento $b \in K_\chi$. Usaremos o seguinte Lema.

Lema 4.3.1. *Para $n > 0$, temos*

$$\sigma_y^n \rho(g) = [\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0)]^{-1} \sigma_x^n \rho(g) [\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0)]$$

e

$$\sigma_y^{-n} \rho(g) = [\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0)] \sigma_x^{-n} \rho(g) [\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0)]^{-1},$$

onde $b_n = x^{-n} b x^n$.

Definamos θ_r como o espaço produto $\Phi_r \times S_r$, onde S_r tem a topologia discreta, e definamos $T : \theta_r \rightarrow \theta_r$ por $T(\rho, \pi) = (\sigma_x \rho, \rho(b)\pi)$. T é claramente contínua, já que cada uma das suas coordenadas é. Notemos que $T^n(\rho, \pi) = (\sigma_x^n \rho, \rho(b_{n-1} \dots b_0)\pi)$ e $T^{-n}(\rho, \pi) = (\sigma_x^{-n} \rho, [\rho(b_{n-1} \dots b_0)]^{-1}\pi)$, se $n > 0$. Segue que a projeção na primeira coordenada $p_1 : \theta_r \rightarrow \Phi_r$ induz uma aplicação $r!$ a um de (θ_r, T) sobre (Φ_r, σ_x) . Também, $f : \theta_r \rightarrow \Phi_r$ definida por $f(\rho, \pi) = \pi^{-1}\rho\pi$ induz uma aplicação de (θ_r, T) sobre (Φ_r, σ_y) . A aplicação f é também $r!$ a um já que $f^{-1}(\rho) = \{(\pi\rho\pi^{-1}) \mid \pi \in S_r\}$.

Para completar a prova do Teorema 4.3.1 é suficiente mostrar que o sistema dinâmico (θ_r, T) é conjugado a um shift de tipo finito. Como na demonstração do Teorema 3.0.1, obtemos uma apresentação $\langle a_{i,j} : R_j \rangle$ para K_χ correspondente à apresentação $\langle x, a_i : R_0 \rangle$ para G . Aplique θ_r em um shift com alfabeto $\{(\rho_0, \pi) \mid \rho_0 \text{ é uma função de } A_0 \text{ em } S_r, \pi \in S_r\}$ mandando (ρ, π) em (ρ_i, π_i) , onde $\rho_i = \sigma_x^i \rho|_{A_0}$, $\pi_0 = \pi$, e (indutivamente) $\pi_{i+1} = \rho(b_i)\pi_i$. Se $b = b_0 = w(a_{-l}, \dots, a_l)$ é uma palavra nos a_i , então $b_i = w(a_{i-l}, \dots, a_{i+l})$ e $\rho(b_i) = w(\rho_{i-l}, \dots, \rho_{i+l})$. Então a condição $\pi_{i+1} = \rho(b_i)\pi$ é uma condição de tipo finito (isto é, uma condição que pode ser verificada examinando-se os blocos de um tamanho fixo), e a imagem de θ_r é um shift de tipo finito. É fácil verificar que esta aplicação é uma conjugação. De fato, temos

$$[(p_1 \circ T)(\rho, \pi)](g) = [p_1(\sigma_x \rho, \rho(b)\pi)](g) = \sigma_x \rho(g)$$

e

$$[(\sigma_x \circ p_1)(\rho, \pi)](g) = \sigma_x \rho(g)$$

Portanto, $[(p_1 \circ T)(\rho, \pi)] = [(\sigma_x \circ p_1)(\rho, \pi)]$.

Temos também que

$$\begin{aligned} [(f \circ T)(\rho, \pi)](g) &= [f(\sigma_x \rho, \rho(b)\pi)](g) = \\ &= ([\rho(b)\pi]^{-1}(\sigma_x \rho)[\rho(b)\pi])(g) = [\rho(b)\pi]^{-1}\sigma_x \rho(g)[\rho(b)\pi] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [(\sigma_y \circ f)(\rho, \pi)](g) &= [\sigma_y(\pi^{-1}\rho\pi)](g) = (\pi^{-1}\rho\pi)(y^{-1}gy) = \pi^{-1}\rho(y^{-1}gy)\pi = \\ &= \pi^{-1}\rho(b^{-1}x^{-1}gxb)\pi = \pi^{-1}\rho(b^{-1})\rho(x^{-1}gx)\rho(b)\pi = [\rho(b)\pi]^{-1}\sigma_x \rho(g)[\rho(b)\pi] \end{aligned}$$

Portanto, $[(f \circ T)(\rho, \pi)] = [(\sigma_y \circ f)(\rho, \pi)]$. ■

Demonstração do Lema 4.3.1 : Temos que

$$\begin{aligned} \sigma_y \rho(g) &= \rho(y^{-1}gy) = \rho(b^{-1}x^{-1}gxb) = \rho(b_0^{-1}x^{-1}gxb_0) = \\ &= \rho(b_0^{-1})\rho(x^{-1}gx)\rho(b_0) = [\rho(b_0)]^{-1}\sigma_x \rho(g)[\rho(b_0)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 \rho(g) &= \sigma_y(\sigma_y \rho(g)) = \sigma_y(\rho(y^{-1}gy)) = \rho(y^{-2}gy^2) = \rho(b^{-1}x^{-1}b^{-1}x^{-1}gxbxb) = \\ &= \rho(b^{-1}x^{-1}b^{-1}xx^{-2}gx^2x^{-1}bxb) = \rho(b^{-1}x^{-1}b^{-1}x)\rho(x^{-2}gx^2)\rho(x^{-1}bxb) = \\ &= (\rho(x^{-1}bxb))^{-1}\rho(x^{-2}gx^2)(\rho(x^{-1}bxb)) = [\rho(b_1b_0)]^{-1}\sigma_x^2 \rho(g)[\rho(b_1b_0)]. \end{aligned}$$

Suponhamos que

$$\sigma_y^{n-1} \rho(g) = [\rho(b_{n-2} \dots b_1 b_0)]^{-1} \sigma_x^{n-1} \rho(g) [\rho(b_{n-2} \dots b_1 b_0)].$$

Notemos que

$$b_j b_{j-1} \dots b_1 b_0 = (x^{-j} b x^j) (x^{-(j-1)} b x^{j-1}) \dots (x^{-1} b x) b = x^{-j} \underbrace{(b x) \dots (b x)}_{(j-1)\text{-vezes}} b.$$

Então

$$\sigma_y^n \rho(g) = \sigma_y(\sigma_y^{n-1} \rho(g)) = \sigma_y([\rho(b_{n-2} \dots b_1 b_0)]^{-1} \sigma_x^{n-1} \rho(g) [\rho(b_{n-2} \dots b_1 b_0)]) =$$

$$\sigma_y([\rho(x^{-(n-2)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-3)\text{-vezes}})]^{-1} \rho(x^{-(n-1)} g x^{n-1}) [\rho(x^{-(n-2)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-3)\text{-vezes}})]) =$$

$$\sigma_y(\rho(b^{-1} \underbrace{(x^{-1} b^{-1}) \dots (x^{-1} b^{-1})}_{(n-3)\text{-vezes}} x^{n-2}) \rho(x^{-(n-1)} g x^{n-1}) [\rho(x^{-(n-2)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-3)\text{-vezes}})]) =$$

$$\sigma_y(\rho(b^{-1} \underbrace{(x^{-1} b^{-1}) \dots (x^{-1} b^{-1})}_{(n-3)\text{-vezes}} x^{n-2} x^{-(n-1)} g x^{n-1} x^{-(n-2)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-3)\text{-vezes}})) =$$

$$\sigma_y(\rho(b^{-1} \underbrace{(x^{-1} b^{-1}) \dots (x^{-1} b^{-1})}_{(n-3)\text{-vezes}} x^{n-1} x^{-n} g x^n x^{-(n-1)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-3)\text{-vezes}})) =$$

$$\rho(y^{-1} b^{-1} \underbrace{(x^{-1} b^{-1}) \dots (x^{-1} b^{-1})}_{(n-3)\text{-vezes}} x^{n-1} x^{-n} g x^n x^{-(n-1)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b y}_{(n-3)\text{-vezes}}) =$$

$$\rho(b^{-1} x^{-1} b^{-1} \underbrace{(x^{-1} b^{-1}) \dots (x^{-1} b^{-1})}_{(n-3)\text{-vezes}} x^{n-1} x^{-n} g x^n x^{-(n-1)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b x b}_{(n-3)\text{-vezes}}) =$$

$$\rho(b^{-1} \underbrace{(x^{-1} b^{-1}) \dots (x^{-1} b^{-1})}_{(n-2)\text{-vezes}} x^{n-1} x^{-n} g x^n x^{-(n-1)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-2)\text{-vezes}}) =$$

$$\rho(b^{-1} \underbrace{(x^{-1} b^{-1}) \dots (x^{-1} b^{-1})}_{(n-2)\text{-vezes}} x^{n-1}) \rho(x^{-n} g x^n) \rho(x^{-(n-1)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-2)\text{-vezes}}) =$$

$$(\rho(x^{-(n-1)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-2)\text{-vezes}}))^{-1} \sigma_x^n \rho(g) (\rho(x^{-(n-1)} \underbrace{(bx) \dots (bx) b}_{(n-2)\text{-vezes}})) =$$

$$(\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0))^{-1} \sigma_x^n \rho(g) (\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0)).$$

De forma análoga mostramos que

$$\sigma_y^{-n} \rho(g) = [\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0)] \sigma_x^{-n} \rho(g) [\rho(b_{n-1} \dots b_1 b_0)]^{-1}.$$

■

Observação 4.3.1. *A demonstração acima mostra mais que a afirmação do Teorema 4.3.1. Existe um shift de tipo finito que se aplica de forma constante a um sobre cada (Φ_r, σ_x) e (Φ_r, σ_y) .*

Definição 4.3.3. *Um sistema de grupo é um par (G, χ) consistindo de um grupo finitamente apresentado G e um epimorfismo $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$. Dois sistemas de grupos (G, χ) e (G', χ') são isomorfos se existir um isomorfismo $h : G \rightarrow G'$ tal que $\chi = \chi' \circ h$.*

Corolário 4.3.1. *Seja (G, χ, x) um sistema aumentado de grupo, e seja r um inteiro positivo. A entropia $h(\Phi_r)$ do shift representação associado (Φ_r, σ_x) é um invariante do sistema de grupo (G, χ) ; ou seja, a entropia depende apenas da classe de isomorfismo do sistema de grupo.*

O Corolário 4.3.1 pode ser usado para definir uma seqüência de “invariantes de entropia” para n -nós. Um n -nó é uma n -esfera K mergulhada suavemente na $(n+2)$ -esfera S^{n+2} . Aqui n -nós são assumidos orientados. Seja $N(K)$ uma vizinhança de K que é difeomorfa a $S^n \times D^2$. O fecho $X(K)$ de $S^{n+2} \setminus N(K)$ é chamado exterior de K . Dois n -nós são equivalentes se existir um difeomorfismo de S^{n+2} em S^{n+2} que leva um n -nó no outro (preservando orientações). N -nós equivalentes são identificados. Um invariante de n -nó é uma quantidade que é definida para um n -nó e depende apenas do nó a menos de equivalência.

Todo n -nó K determina um sistema aumentado de grupo (ver [10]). De fato, seja $G = \pi_1(X(K), *)$, onde o ponto base está no bordo $\partial X(K)$, e seja x o elemento de G representado por uma curva fechada simples $m \subset \partial X(K)$ com sua orientação induzida por K (a curva m é chamada um meridiano de K). Pela unicidade a menos de isotopia da vizinhança tubular, o elemento x é bem definido por K . Fazendo $\chi : G \rightarrow \mathbf{Z}$ o homomorfismo abelianização que leva x em 1, obtemos um sistema aumentado de grupo (G, χ, x) . Associado a K fica definida uma seqüência de shifts $\{\Phi_r(K)\}_{r=1}^{\infty}$ e uma seqüência correspondente de entropias $\{h_r(K)\}_{r=1}^{\infty}$.

Estes shifts e entropias são invariantes dos nós. Revertendo a orientação de K produzimos um novo n -nó (orientado) $\mathcal{R}K$. O sistema aumentado de grupo de $\mathcal{R}K$

é $(G, -\chi, x^{-1})$. Para qualquer $r \geq 1$ existe uma bijeção de $\Phi_r(K)$ em $\Phi_r(\mathcal{R}K)$, mandando toda palavra bi-infinita (ρ_j) no seu inverso (ρ_{-j}) . Então segue que as entropias $h_r(K)$ e $h_r(\mathcal{R}K)$ são iguais, ou seja, estes invariantes não detectam a orientação do nó.

Referências Bibliográficas

- [1] BAUMSLAG, G., SOLITAR, D., Some two-generator one-relator non-Hopfian groups, *Bulletin of the American Mathematical Society*, n. 68, p. 199-201, (1962).
- [2] BIERI, R., NEUMANN, W.D., STREBEL, R., A geometric invariant of discrete groups, *Inventiones Mathematicae*, n. 90, p. 451-477, (1987).
- [3] BIERI, R., STREBEL, R., Almost finitely presented soluble groups, *Commentarii Mathematici Helvetici*, n. 53, p. 258-278, (1978).
- [4] CROWELL, R.H., FOX, R.H., *Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag, New York, (1977).
- [5] GONZÁLEZ-ACUNA, F., WHITTEN, W., Imbeddings of 3-manifold groups, *Memoirs of the American Mathematical Society*, n. 474, (1992).
- [6] LIND, D., MARCUS, B., *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
- [7] LYNDON, R.C., SCHUP, P.E., *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, (1977).
- [8] RAPAPORT, E.S., Knot-like groups, *Annals of Mathematical Studies*, n. 84, p. 119-133, (1975).
- [9] ROLFSEN, D., *Knots and Links*, *Mathematics Lecture Series 7*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, (1976).
- [10] SILVER, D.S., Augmented group systems and n-knots, *Mathematische Annalen*, n. 296, p. 585-593, (1993).

- [11] SILVER, D.S., Knot invariants from topological entropy, *Topology and its Applications*, n. 61, p. 159-177, (1995).
- [12] SILVER, D.S., Growth rates of n-knots, *Topology and its Applications*, n. 42, p. 217-230, (1991).
- [13] SILVER, D.S., WILLIAMS, S.G., Augmented group systems and shifts of finite type, *Israel Journal of Mathematics*, n. 95, p. 231-251, (1996).
- [14] THURSTON, W.P., Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society*, n. 6, p. 357-381, (1982).