Continuidade de atratores para sistemas dinâmicos: decomposição de Morse, equi-atração e domínios ilimitados

Henrique Barbosa da Costa

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Henrique Barbosa da Costa

Continuidade de atratores para sistemas dinâmicos: decomposição de Morse, equi-atração e domínios ilimitados

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

USP – São Carlos
Junho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Costa, Henrique Barbosa da
C834c Continuidade de atratores para sistemas dinâmicos: decomposição de Morse, equi-atração e domínios ilimitados / Henrique Barbosa da Costa; orientador Alexandre Nolasco de Carvalho. - São Carlos - SP, 2016.
120 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Atratores. 2. decomposição de Morse. 3. semifluxos multívocos. 4. equi-atração. 5. semifluxos skew-product. 6. equação de Chafee-Infante. 7. espaços uniformemente locais. 8. continuidade de atratores. I. Carvalho, Alexandre Nolasco de, orient. II. Título.

Henrique Barbosa da Costa

Continuity of attractors for dynamical systems: Morse decomposition, equi-attraction and unbounded domains

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

USP – São Carlos
June 2016

Aos meus pais,
minha irmã e
meu irmão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, ajudaram e apoiaram meu crescimento pessoal e profissional. Meus pais, irmãos, amigos, colegas e professores, que participaram, incentivaram e influenciaram minha trajetória acadêmica. Ao meu orientador, Alexandre Nolasco, exemplo de dedicação e amor pelo trabalho, por acreditar em mim e à minha namorada, Ana, por manter a minha estabilidade.

Agradeço à FAPESP pela confiança e apoio financeiro e à CAPES pelo financiamento ao estágio no exterior.

“O universo é uma harmonia de contrários.”
(Pitágoras)

RESUMO

COSTA, H. B.. **Continuidade de atratores para sistemas dinâmicos: decomposição de Morse, equi-atração e domínios ilimitados**. 2016. 120 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Neste trabalho estudamos a dinâmica assintótica de problemas parabólicos sob vista de diferentes teorias, particularmente interessados na estabilidade das propriedades dinâmicas dos sistemas. Estudamos a equi-atração no caso não autônomo pelos semifluxos skew-product, que transformam o sistema dinâmico não autônomo em um autônomo num espaço de fase conveniente. Para modelos multívocos, em que o semifluxo é uma função cujos valores são conjuntos, desenvolvemos a decomposição de Morse e mostramos sua equivalência com a existência de um funcional de Lyapunov, que é um resultado muito importante na teoria de semigrupos. Também estudamos a continuidade da dinâmica assintótica de um problema parabólico em um domínio ilimitado quando o aproximamos por domínios limitados específicos.

Palavras-chave: Atratores, decomposição de Morse, semifluxos multívocos, equi-atração, semifluxos skew-product, equação de Chafee-Infante, espaços uniformemente locais, continuidade de atratores.

ABSTRACT

COSTA, H. B.. **Continuidade de atratores para sistemas dinâmicos: decomposição de Morse, equi-atração e domínios ilimitados**. 2016. 120 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In this work we study assimptotic properties of parabolic problems under some different view of points, particularlly interested in the stability properties of the systems. We study equi-attraction in the non autonomous case using skew-product semiflows, which transform the non autonomous dynamical system into a autonomous one in a convenient phase space. For multivalued semiflows, in which the semiflow is a set valued function, we develop the Morse decomposition and show its equivalence with admiting a Lyapunov funcional, wich is a important result on the semigroup theory. We also study the continuity of the asymptotic dynamic for a parabolic problem in an unbouded domain when we approach it by bounded ones.

Key-words: Attractors, Morse decomposicion, multivalued semiflows, equi-attraction, skew-product semiflows, Chafee-Infante equation, locally uniform spaces, continuity of attractors.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17

2 PRELIMINARES 19
2.1 Semigrupos, processos e atratores 20
2.2 Continuidade de atratores 25
2.3 Dinâmica gradiente e decomposição de Morse 28
2.4 Equi-atração para sistemas dinâmicos 32
2.5 Semifluxos skew-product 37
2.6 Espaços uniformemente locais 41
2.7 Inclusões diferenciais e semifluxos multívocos 50
2.8 A equação autônoma de Chafee-Infante 56

3 EQUI-ATRAÇÃO E CONTINUIDADE DE SEMIFLUXOS SKEW-PRODUCT 61
3.1 Sobre semifluxos skew-product 64
3.1.1 Equiatração e continuidade 64
3.1.2 Taxas de convergência 67
3.2 Equiatração para sistemas não-autônomos 68
3.2.1 Para atratores uniformes 68
3.2.2 Equiatração para atratores cociclo e pullback 72
3.3 A relação entre continuidade dos distintos atratores 75
3.4 Aplicação 77

4 DECOMPOSIÇÃO DE MORSE MULTÍVOCA 81
4.1 Semifluxos multívocos dinamicamente gradientes, decomposições de Morse e funções de Lyapunov 81
4.1.1 Dinâmica gradiente implica decomposição de Morse 83
4.1.2 Funcional de Lyapunov implica em dinâmica gradiente 86
4.1.3 Decomposição de Morse implica em funcional de Lyapunov 87
4.2 Infinitos componentes de Morse 91
4.2.1 Dinâmica gradiente implica decomposição de Morse 95
4.2.2 Funcional de Lyapunov implica dinâmica gradiente 96
4.2.3 Decomposição de Morse implica em funcional de Lyapunov 98
4.3 Aplicação 99

5 CONTINUIDADE DE ATRATORES PARA CHAFEE-INFANTE . . 105
5.1 A semicontinuidade superior de atratores globais 108
5.2 Sobre a semicontinuidade inferior 110

REFERÊNCIAS 115

CAPÍTULO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de sistemas dinâmicos descreve fenômenos que evoluem com o tempo e, dessa maneira, servem como modelagem para diversas áres da ciência como física, biologia e economia. Estudar a dinâmica assintótica de um sistema dinâmico é avaliar seu comportamento futuro, neste contexto a existência dos chamados atratores nos permite compreender o padrão de um sistema. Neste trabalho estudamos sistemas dinâmicos sob algumas perspectivas, em todas elas a existência de atrator tem papel fundamental.

Como, em modelagem matemática, todas as medidas e relações são feitas com erros, isto é, erros de medição e que simplificação do modelo, devemos estar sempre preocupados se nossos modelos ainda aproximam bem a realidade. Em outras palavras, devemos estar sempre cientes que nossos modelos são estáveis por perturbações, de modo que assim garantimos que os resultados obtidos são confiáveis. Uma modelagem que não garanta esta estabilidade pode assumir grandes erros com variações pequenas dos dados e deixa de ser confiável para previsões a longo prazo. Com isto em vista, estudamos aqui a continuidade sistemas dinâmicos, que, em termos matemáticos, se traduz em semicontinuidade dos conjuntos atratores, ou seja, queremos poder a dinâmica do atrator limite não é perdida quando perturbamos o sistema.

A teoria de Morse apresenta um papel importante para o estudo das estruturas do atrator global, é um resultado bem conhecido para teoria de semigrupos que existe uma decomposição de Morse se e somente se o semigrupo é dinamicamente gradiente (CONLEY, 1978; RYBAKOWSKI, 2012). Foi demonstrado recentemente que estas propriedades são equivalentes também à existência de um funcional de Lyapunov associado ao sistema (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011; PATRÃO, 2007). Esta teoria foi estendida quando o número de compontentes invariantes de Morse é infinito (CARABALLO *et al.*, 2013) enquanto em (CARABALLO *et al.*, 2015) o caso não autônomo é considerado. Sistemas gradientes são importantes pois são uma classe ampla, devido aos resultados citados anteriormente, de sistemas que são estáveis por perturbações (CARVALHO; LANGA, 2009).

Quando tratamos de problemas não autônomos uma importante ferramenta em desenvolvimento para o estudo da dinâmica são os semifluxos skew-product. Tais semifluxos transformam o sistema não autônomo em um sistema autônomo num espaço produto de uma forma bem engenhosa (SACKER; SELL, 1977; SACKER; SELL, 1973; SELL; YOU, 2013). A teoria de Morse e suas equivalências foi descrita para semifluxos skew-product (BORTOLAN; CARVALHO; LANGA, 2014). Contudo, a propriedade de equi-atração, inerente dos sistemas dinâmicos que são estáveis por perturbação (BABIN; VISHIK, 1992; LI, 2007), a relação desta propriedade com a continuidade no contexto de semifluxos skew-product era um problema a ser tratado.

Vamos descrever o conteúdo da tese de doutoramento. No Capítulo 2 enumeramos conhecimentos preliminares que são importantes e foram estudados para o desenvolvimento do restante do trabalho. Há uma grande mistura entre resultados clássicos e novos conceitos, que demonstram nossa abordagem aos problemas.

No Capítulo 3 desenvolvemos a relação entre equi-atração para semifluxos do tipo skew-product e continuidade de atratores globais para estes semifluxos. Ainda tratamos da equi-atração para as diversas noções de atratores para sistemas não autônomos relacionados ao semifluxo skew-product, para ser mais preciso, a equi-atração dos atratoers uniformes e atratores cociclo. Por fim, relacionamos as continuidades dos diferentes conceitos de atratores.

No Capítulo 4 desenvolvemos a teoria de Morse para semifluxos multívocos, originalmente gerados por soluções de problemas de Cauchy cuja unicidade não pode ser garantida. Trabalamos tanto com o caso com finitos ou infinitos componentes de Morse para o sistema.

Finalmente, em 5, estudamos um problema parabólico, investigando a continuidade dos atratores globais do sistema. O problema tratado é uma equação de Chafee-Infante (CHAFEE; INFANTE, 1974). Aproximamos o sistema gerado pelas soluções globais do problema de Chafee-Infante em um domínio ilimitado pelo problema posto em domínios limitados que preenchem o primeiro quando passando ao limite. Obtemos semicontinuidade superior dos atratores globais dos sistemas e uma resposta parcial para a semicontinuidade inferior.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos necessários para o entendimento do trabalho realizado e está aqui de modo que nosso texto seja fechado e o leitor não necessite (tanto quanto for possível) recorrer a textos auxiliares.

Começaremos o capítulo apresentando os sistemas dinâmicos na Seção 2.1, tanto no caso autônomo como não autônomo, e apresentamos a definição de atrator, o conjunto que contém toda a dinâmica assintótica do sistema. Na seção seguinte introduzimos o conceito de continuidade, que nos dirá se nossa estrutura é consistente e estável por perturbações, propriedade vital na modelagem matemática. Vale notar que obter a semicontinuidade inferior requer maior conhecimento das estruturas dos atratores, o que pode ser bastante complexo. Na Seção 2.3 apresentamos condições necessárias e suficientes para que um sistema dinâmico possua a estrutura necessária para se obter a continuidade de atratores, que leva o nome de dinâmica gradiente.

Alternativamente, demonstramos que a continuidade de atratores é equivalente a propriedade de equi-atração da família de atratores do sistema. Na Seção 2.4 comparamos as duas definições.

Dessa forma passamos pelo básico dos sistemas dinâmicos não lineares e entramos em detalhes de seus ramos nas seções seguintes. Na Seção 2.5 apresentamos a definição de semifluxos skew-product, que são uma maneira de converter um sistema não autônomo em um sistema autônomo num espaço de fase conveniente. Estudamos as propriedades assintóticas dos semifluxos skew-product e outros objetos da dinâmica assintótica que surgem naturalmente ao fazermos esta análise.

Na Seção 2.6 desenvolvemos a teoria dos espaços localmente uniformes, que são alternativas para desenvolver semifluxos e resolver sistemas relacionados a equações diferenciais em que o domínio de definição não é limitado, uma vez em que os convencionais espaços de funções Lebesgue integráveis são muito restritos nesse caso.

Estudamos inclusões diferenciais e sua relação com semifluxos multívocos na Seção 2.7. Desenvolvemos esta teoria de semifluxos que surgem nas aplicações quando não podemos garantir unicidade de soluções de uma equação diferencial, por exemplo. Apresentamos conceitos relacionados ao atrator global de um semifluxo multívoco e também sobre estruturas do atrator global.

Finalmente, na Seção 2.8, estudamos a equação de Chafee-Infante autônoma com condições de Dirichlet definidas no domínio $[0,\pi]$ da reta e mostramos as propriedades do seu atrator global, tendo em vista nossa aplicação.

2.1 Semigrupos, processos e atratores

Nesta seção apresentaremos o alicerce do nosso trabalho. A teoria de sistemas dinâmicos não lineares estuda um certo modelo condicionado a uma regra de evolução. As referências para esta seção são inúmeras, recomendamos os trabalhos clássicos (BABIN; VISHIK, 1992; BILLOTTI; LASALLE, 1971; HALE; MAGALHAES; OLIVA, 2013; TEMAM, 2013; LADYZHENSKAYA, 1991) e, mais recentemente, (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012; CHOLEWA; DLOTKO; SOCIETY, 2000; ROBINSON, 2001).

O espaço fase em que a dinâmica ocorre será denotado por X, em geral, (X,d) é um espaço métrico, porém a maioria dos casos trabalhados neste texto nos especificamos a espaços de Banach ou Hilbert. Denotaremos por $\mathscr{C}(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em X.

Um *processo*, ou *processo de evolução*, em X é uma família de aplicações $\{S(t,s):t\geq s\}$ em $\mathscr{C}(X)$ tal que:

1. $S(t,t) = \mathrm{I}$, para todo $t\in\mathbb{R}$,
2. $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, para todo $t\geq\tau\geq s$,
3. $(t,s,x)\mapsto S(t,s)x$ é contínuo, para todo $t\geq s$ e $x\in X$.

Dado um processo, a solução correspondente à condição inicial $x(s)=x_s$ é a aplicação $t\mapsto S(t,s)x_s$ de $[s,\infty]$ em X.

O operador $S(t,s)$ toma a cada dado x em X no tempo inicial s e evolui até o estado $S(t,s)x$ com tempo final t. Sobre hipóteses apropriadas, soluções da equação diferencial não autônoma $\dot{x}=f(t,x)$ gerará um processo pondo $S(t,s)x = x(t,s;x)$, isto é, $S(t,s)x$ é a solução no tempo t com valor initial $x(s)=x$.

Um processo que depende apenas do tempo decorrido, isto é, um processo de evolução para o qual $S(t,s)=S(t-s,0)$, para todo $t\geq s$, é chamado um processo autônomo e a família de operadores $\{T(t):t\geq 0\}$ dada por $T(t):=S(t,0)$, $t\geq 0$, satisfaz

1. $T(0) = \mathrm{I}$,
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t,s \geq 0$,
3. $(t,x) \mapsto T(t)x$ é contínuo, para todo $t \geq 0$ e x em X.

Uma família $\{T(t) : t \geq 0\}$ em $\mathscr{C}(X)$ que verifica as hipóteses acima é chamada de *semigrupo*.

Para um processo autônomo $S(\cdot,\cdot)$ com $S(t,s) = T(t-s)$ para todo $t \geq s$, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$, que é conhecido como *dinâmica forward*, é equivalente ao comportamento das soluções quando $s \to -\infty$, o que é chamado de *dinâmica pullback*. Para processos gerais os limites dinâmicos acima podem não ter relação nenhuma e produzirem propriedades qualitativas completamente diferentes.

Atratores globais desempenham papel fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos e sua dinâmica assintótica. Vamos apresentar aqui os principais resultados e definições sobre os atratores e discutir as diferenças que surgem no caso autônomo e não autônomo.

Começamos introduzindo um significado para o termo atração. Denotamos por $\mathrm{dist}(A,B)$ a *semidistância de Haussdorf* entre os conjuntos A e B, definida por

$$\mathrm{dist}(A,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b).$$

Observamos que $\mathrm{dist}(A,B) = 0$ implica apenas que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

A *distância de Haussdorf*, denotada por $\mathrm{dist_H}(\cdot,\cdot)$, é definida pondo

$$\mathrm{dist_H}(A,B) = \max\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(B,A)\}. \tag{2.1.1}$$

Definição 2.1.1. Dizemos que A atrai B (sob ação de $T(\cdot)$) se $\mathrm{dist}(T(t)B,A) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

Definição 2.1.2. Um conjunto $A \subset X$ é invariante por $T(\cdot)$ se $T(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.

Observamos que um conjunto é invariante não apenas implica que uma solução que comece em A continua em A (i.e. $T(t)A \subseteq A$ para todo $t \geq 0$). Portanto um conhecimento das trajetórias com condições iniciais em A é essencial para o entendimento da dinâmica assintótica, uma vez em que A não "encolhe" quando evolui.

Definição 2.1.3. Uma função contínua $x(\cdot)\colon \mathbb{R} \to X$ é uma solução global de $T(\cdot)$ se satisfaz $T(t)x(s) = x(t+s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

A órbita de uma solução global é o conjunto

$$\Gamma(x(\cdot)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} x(t).$$

O lema abaixo caracteriza os conjuntos invariantes por um semigrupo.

Lema 2.1.4. Um conjunto A é invariante sobre $T(\cdot)$ se e somente se consiste da coleção de órbitas de soluções globais.

Definimos agora um atrator para um semigrupo.

Definição 2.1.5. Um conjunto $\mathscr{A} \subseteq X$ é um atrator global para o semigrupo $T(\cdot)$ se

(i) $\mathscr{A}$ é compacto;

(ii) $\mathscr{A}$ é invariante; e

(iii) $\mathscr{A}$ atrai cada conjunto limitado de X.

Está claro que decorre das propriedades $(i)-(iii)$ que se há um atrator global $\mathscr{A}$ para um semigrupo $T(\cdot)$, então ele é único. Caracterizamos o atrator global com respeito à família de compactos que atraem limitados e, também, com respeito à família de invariantes limitados e fechados. Mais precisamente:

Lema 2.1.6. O atrator global $\mathscr{A}$ de um semigrupo $T(\cdot)$ é o compacto minimal que atrai cada limitado de X e o conjunto invariante limitado e fechado maximal.

Teorema 2.1.7. Se um semigrupo $T(\cdot)$ possui um atrator global $\mathscr{A}$, então

$$\mathscr{A} = \{x \in X : \text{ existe uma solução global limitada } x\colon \mathbb{R} \to X \text{ com } x(0) = x\}. \tag{2.1.2}$$

No contexto de sistemas dinâmicos não autônomos precisamos de mais cuidado para a definição de atrator global pois alguns problemas surgem. Neste caso, em geral, trabalhamos com a atração pullback. Vários trabalhos na literatura trazem interessantes aplicações a respeito dos processos de evolução e os conhecidos atratores pullback. Citamos, por exemplo, (CHEBAN; KLOEDEN; SCHMALFUSS, 2002; CARVALHO *et al.*, 2007; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012) e (KLOEDEN, 2000)

Um *conjunto não autônomo* é uma família de conjuntos indexados em um espaço métrico, isto é, uma coleção $\{Z(\lambda) \subset X : \lambda \in \Lambda\}$. Os elementos individuais do conjunto não autônomo são chamados de “fibras” ou “seções” do conjunto.

Definição 2.1.8. Um conjunto não autônomo $\mathscr{A}(\cdot)$, indexado em $\mathbb{R}$, é invariante pelo processo $S(\cdot,\cdot)$ se

$$S(t,\tau)A(\tau) = A(t), \text{ para todo } t,\tau \in \mathbb{R} \text{ com } t \geq \tau.$$

De modo a abreviar e refletir a terminologia autônoma nos referiremos a tal família também como um conjunto invariante.

Definição 2.1.9. Uma solução global para um processo $S(\cdot,\cdot)$ é uma função $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $S(t,s)\xi(s) = \xi(t)$ para todo $t \geq s$.

Assim como o Lema 2.1.4 no caso não autônomo podemos caracterizar os conjuntos invariantes.

Lema 2.1.10. Uma conjunto não autônomo $A(\cdot)$ é invariante sobre $S(\cdot,\cdot)$ se e somente se consiste de uma coleção de soluções globais.

Vamos definir agora o conceito de atração pullback.

Definição 2.1.11. Seja $S(\cdot,\cdot)$ um processo de evolução. Dado $t \in \mathbb{R}$ dizemos que um conjunto A pullback atrai B no tempo t sob ação de $S(\cdot,\cdot)$ se

$$\lim_{s \to -\infty} \operatorname{dist}(S(t,s)B, A) = 0. \tag{2.1.3}$$

Dizemos ainda que A atrai limitados no tempo t se (2.1.3) é válido para cada limitado B em X. Um conjunto não autônomo $A(\cdot)$ em X *atrai pullback* limitados de X sob o processo $S(\cdot,\cdot)$ se $A(t)$ atrai pullback limitados de X no tempo t sob $S(\cdot,\cdot)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Vamos então apresentar o conceito de atrator pullback.

Definição 2.1.12. Uma família $\{\mathscr{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator pullback para o processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$ se

(i) $\mathscr{A}(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $\mathscr{A}(\cdot)$ é invariante com respeito a $S(\cdot,\cdot)$;

(iii) $\mathscr{A}(\cdot)$ atrai pullback limitados de X; e

(iv) $\mathscr{A}(\cdot)$ é a família minimal de fechados com a propriedade (iii).

A propriedade (iv) em geral é requisitada pois sem ela não há garantias da unicidade do atrator pullback, ver, por exemplo, (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Definition 1.12).

No nosso trabalho de doutoramento sempre supomos como hipótese a existência do atrator global, ou pullback, para o semigrupo, ou processo, em questão. A seguir vamos citar, em virtude da completude da teoria, definições e resultados que caracterizam o atrator de um sistema dinâmico e condições suficientes para um sistema dinâmico possuir atrator.

Vamos assumir que $S(\cdot,\cdot)$ é um processo no espaço métrico (X,d).

Definição 2.1.13. O ω-limite pullback no tempo t de um subconjunto B de X é definido por

$$\omega(B,t) := \bigcap_{\tau \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \tau} S(t,s)B} \tag{2.1.4}$$

ou, equivalentemente,

$$\omega(B,t) = \Big\{ y \in X \ : \text{ existem sequências } \{s_k\} \leq t,\, s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \text{e } \{x_k\} \subset B \text{ tais que } y = \lim_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k \Big\}. \tag{2.1.5}$$

Está claro que se $T(\cdot)$ é um semigrupo e $S_T(\cdot,\cdot)$ o processo correspondente, então $\omega(B,t)$ independe de t e

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq s} T(\tau)B}. \tag{2.1.6}$$

Lema 2.1.14. Se K é compacto em X e $\{x_n\} \in X$ é uma sequência com $\operatorname{dist}(x_n,K) \to 0$, quando $n \to \infty$, então $\{x_n\}$ tem uma subsequência convergente cujo limite está em K.

Definição 2.1.15. Um processo $S(\cdot,\cdot)$ num espaço métrico X é assintoticamente pullback compacto se, para cara $t \in \mathbb{R}$, cada sequência $\{s_k\} \leq t$ com $s_k \to -\infty$, quando $k \to \infty$, e cada sequência limitada $\{x_k\} \in X$ a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}$ possui subsequência convergente.

Se $T(\cdot)$ é um semigrupo, então o processo $S_T(\cdot,\cdot)$ correspondente é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, para cada sequência limitada $\{x_k\} \in X$ e sequência $\{t_k\} \geq 0$ com $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, a sequência $\{T(t_k)x_k\}$ possui subsequência convergente. Neste caso dizemos que $T(\cdot)$ é *assintoticamente compacto*.

Lema 2.1.16. Sejam $S(\cdot,\cdot)$ um processo de evolução assintoticamente compacto e B um subconjunto limitado não vazio de X. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega(B,t)$ é não vazio, compacto, atrai pullback B no tempo t e $S(\tau,t)\omega(B,t) = \omega(B,\tau)$, para todo $\tau \geq t$.

Teorema 2.1.17. São equivalentes:

- O processo $S(\cdot,\cdot)$ possui atrator pullback $\mathscr{A}(\cdot)$.
- Existe uma família de compactos $K(\cdot)$ que pullback atrai limitados de X sob $S(\cdot,\cdot)$.

Em ambos casos

$$\mathscr{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B,t) : B \subset X,\, B \text{ é limitado}\}}, \tag{2.1.7}$$

e $\mathscr{A}(\cdot)$ é minimal no sentido de que se existe outra família de fechados limitados $\widetilde{A}(\cdot)$ que pullback atrai limitados de X sob $S(\cdot,\cdot)$, então $\mathscr{A}(t) \subseteq \widetilde{A}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

No caso autônomo a caracterização do atrator global é um tanto mais simples.

Corolário 2.1.18. Seja $T(\cdot)$ um semigrupo. Existe atrator global $\mathscr{A}$ para $T(\cdot)$ se, e somente se, existe um compacto K de X que atrai todos limitados de X sob ação de $T(\cdot)$. Neste caso, $\mathscr{A} = \omega(K)$.

2.2 Continuidade de atratores

Nesta seção vamos definir o conceito de estabilidade com o qual trabalharemos. Estabilidade significa que nossos modelos são coerentes com falhas de medições e aproximações. Na dinâmica assintótica é comum associar a estabilidade com a continuidade dos atratores globais para sistemas dinâmicos. Usaremos como referência para esta seção os trabalhos (BABIN; VISHIK, 1992; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2009; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012; CARVALHO; LANGA, 2007; HALE; RAUGEL, 1989; HALE; LIN; RAUGEL, 1988) e (HALE, 2010).

Vamos então definir o conceito de continuidade com o qual trabalharemos.

Definição 2.2.1. Sejam (X,d) um espaço métrico e Λ um espaço de parâmetros com uma métrica. Se $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de subconjuntos de X, diremos que

1. $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se
$$\text{dist}(A_\lambda, A_{\lambda_0}) \to 0 \text{ quando } \lambda \to \lambda_0.$$
2. $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se
$$\text{dist}(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \to 0 \text{ quando } \lambda \to \lambda_0.$$
3. Se $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ for simultaneamente semicontínua superior e inferiormente em λ_0, diremos que a família é contínua em λ_0.

O resultado a seguir é bastante utilizado para caracterizar o comportamento semicontínio superior e inferior através de sequências de $\{A_{\lambda_n}\}$ com $\lambda_n \to \lambda_0$.

Lema 2.2.2. Seja X e Λ espaços métricos e $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de compactos de X. Então

- A_λ é semicontínua superiormente em λ_0 se, e somente se, sempre que $\lambda_n \to \lambda_0$, quando $n \to \infty$, qualquer sequência $x_n \in A_{\lambda_n}$ tem uma subsequência convergente cujo limite pertence a A_{λ_0};
- A_λ é semicontínua inferiormente em λ_0 se, e somente se, para todo $x_0 \in A_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \to \lambda_0$ existe uma sequência $x_n \in A_{\lambda_n}$ tal que $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$.

Daremos, no restante da seção, condições suficientes para uma família de sistemas dinâmicos autônomos e não autônomos ser semicontínua superior e inferiormente.

Diremos que a família de semigrupos $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ no espaço de Banach X é *contínua* em $\eta = 0$ se

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in K} \|T_\eta(t,x) - T_0(t,x)\| \to 0 \text{ quando } \eta \to 0, \tag{2.2.1}$$

para quaisquer $T > 0$ e K compacto de X.

Teorema 2.2.3. Seja $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$. Se $T_\eta(\cdot)$ possui um atrator global $\mathscr{A}_\eta$, para cada $\eta \in [0,1]$, e

$$\overline{\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathscr{A}_\eta} \text{ é compacto }, \tag{2.2.2}$$

então a família $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.

Obter a semicontinuidade inferior de atratores globais é uma tarefa muito mais árdua que a semicontinuidade superior. Necessitamos informações a respeito da estrutura do atrator global. Definiremos, então, a variedade instável de um conjunto invariante, a princípio assumiremos que estes são pontos de equilíbrio, por simplicidade.

Seja e_* um ponto de equilíbrio do semigrupo $T(\cdot)$, isto é, existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ de $T(\cdot)$ tal que $\xi(t) \equiv e_*$. A *variedade instável* de e_* é definida por

$$W^u(e_*) = \left\{ y \in X : \text{ existe solução global } \phi : \mathbb{R} \to X \text{ tal que } \phi(0) = y \text{ e } \phi(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} e_* \right\}. \tag{2.2.3}$$

Dada uma vizinhança V de e_*, a *variedade instável local* de e_* é o conjunto dos pontos y de V tais que existe solução gloal $\phi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\phi(0) = y$, $\phi(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} e_*$ e $\phi(t) \in V$, para todo $t \leq 0$. Denotamos tal conjunto por $W^u_{loc}(e_*)$.

Teorema 2.2.4. Seja $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$ que satisfaz:

1. $T_\eta(\cdot)$ tem um atrator global $\mathscr{A}_\eta$, para cada $\eta \in [0,1]$.

2. Se $\mathscr{E}_\eta$ denota o conjunto das soluções estacionárias de $T_\eta(\cdot)$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{E}_\eta \supset \{e_1^{*,\eta}, \ldots, e_p^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0,1]$.

3. Existe $\delta > 0$ para o qual $W^u_\delta(e_j^{*,\eta})$, a variedade instável local tomando $V = B(e_j^{*,\eta}; \delta)$, é tal que a família $\{W^u_\delta(e_j^{*,\eta}) : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua inferiormente.

4. $\mathscr{A}_0 = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{p} W^u(e_j^{*,0})$.

Então a família $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Os resultados acima podem ser generalizados para o caso não-autônomo considerando os atratores pullback.

Consideramos $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de processos de evolução em X tal que, para cada η, existe atrator pullback $\mathscr{A}_\eta(\cdot)$. Assumimos que os processos se comportam *continuamente* em $\eta = 0$, mais precisamente, suponhamos que para cada $t \in \mathbb{R}$, compacto K de X e $T > 0$,

$$\sup_{\tau\in[0,T]}\sup_{x\in K} \mathrm{d}(S_\eta(t,t-\tau)x, S_0(t,t-\tau)x) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0. \tag{2.2.4}$$

Suponhamos que para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta(t)} \text{ é compacto.} \tag{2.2.5}$$

Adicionalmente, suponhamos que a família de atratores pullback seja limitada no passado, isto é,

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]}\bigcup_{s\le t} \mathscr{A}_\eta(s) \text{ é limitado.} \tag{2.2.6}$$

Com estas hipóteses vamos apresentar o resultado de semicontinuidade superior.

Teorema 2.2.5. Seja $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de processos com atrator pullback $\mathscr{A}_\eta(\cdot)$ tal que (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) são satisfeitas. Então $\mathscr{A}_\eta(\cdot)$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$, isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$, a família $\{\mathscr{A}_\eta(t) : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua superiormente.

A fim de falarmos da semicontinuidade inferior no caso autônomo foi preciso entrar em detalhes sobre a estrutura do atrator limite. No caso de semigrupos o ponto chave do Teorema 2.2.4 está na família de variedades instáveis locais dos pontos de equilíbrio do sistema. No caso de processos de evolução a definição de solução estacionária não tem sentido prático e substituímos o conceito de solução estacionária por soluções globais do processo de evolução, ver Definição 2.1.9.

Se $E(\cdot)$ é um conjunto não autônomo limitado no passado, então definimos a variedade instável de $E(\cdot)$ como sendo

$$\begin{aligned} W^u(E(\cdot)) = \big\{(\tau,\zeta) \in \mathbb{R}\times X :\ &\text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \to X \text{ de } S(\cdot,\cdot) \\ &\text{com } \xi(\tau) = \zeta \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(\xi(t), E(t)) = 0\big\}. \end{aligned}$$

A seção da variedade instável no tempo τ é denotado por

$$W^u(E(\cdot))(\tau) = \{\zeta : (\tau,\zeta) \in W^u(E(\cdot))\}.$$

E a variedade instavél local no tempo τ de uma solução global $\xi_*(\cdot)$ é definida pondo

$$\begin{aligned} W^u_\delta(\xi_*(\cdot))(\tau) = \big\{\zeta \in X :\ &\text{existe uma soluçã o global } \xi \text{ para } S(\cdot,\cdot) \text{ com } \xi(\tau) = \zeta, \\ &\mathrm{dist}\,(\xi(s), \xi_*(s)) < \delta \text{ para todo } s \le \tau \text{ e } \mathrm{dist}(\xi(s), \xi_*(s)) \stackrel{s\to-\infty}{\longrightarrow} 0\big\}. \end{aligned}$$

Vejamos então um resultado que garanta a semicontinuidade inferior da família de atratores pullback $\mathscr{A}_\eta(\cdot)$.

Teorema 2.2.6. Seja $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de processos com atratores pullback $\mathscr{A}_\eta(\cdot)$. Assumamos que (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) são satisfeitas. Se

- existe uma sequência de soluções limitadas no passado $\{\xi_*^j(\cdot)\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $S(\cdot,\cdot)$ tal que

$$\mathscr{A}_0(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_*^j(\cdot))(t)}.$$

- para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma família $\{\xi_*^{j,\eta} : \eta \in [0,1]\}$, com $\xi_*^{j,\eta} : \mathbb{R} \to X$ uma solução limitada no passado de $S_\eta(\cdot,\cdot)$ e $t_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{t\leq t_j} \mathrm{d}(\xi_*^{j,\eta}(t), \xi_*^j(t)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

- a variedade instável local de $\xi_*^{j,\eta}(\cdot)$ se comporta continuamente quando $\eta \to 0$, isto é, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\delta_j > 0$ e $t_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{t\leq t_j} \mathrm{dist_H}\left(W^u_{\delta_j}(\xi_*^{j,\eta})(t), W^u_{\delta_j}(\xi_*^j)(t)\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então a família $\{A_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é contínua para $t \in I$, isto é,

$$\sup_{t\in I} \mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta(t), \mathscr{A}_0(t)) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0,$$

onde I é qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

2.3 Dinâmica gradiente e decomposição de Morse

Nesta seção vamos apresentar a decomposição de Morse e mostrar que se um sistema dinâmico admite decomposição de Morse então seu atrator global possui uma dinâmica gradiente e existe um funcional de Lyapunov associado.

Este resultado foi um grande avanço para a área de sistemas dinâmicos não lineares, uma vez em sistemas gradientes são contínuos por perturbações, mas, no geral, é uma tarefa difícil encontrar um funcional de Lyapunov associado. Contudo, demonstrar que o atrator global possui uma dinâmica gradiente pode ser mais simples e, com os resultados que apresentaremos nesta seção, veremos que dinâmica gradiente e existência do funcional de Lyapunov são equivalentes. O que implica diretamente que sistemas dinamicamente gradientes são estáveis por perturbação e, desse modo, uma classe bem ampla de sistemas possui tal propriedade. As referências para esta seção são os trabalhos (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011; ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2012; ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2013; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012; CONLEY, 1978; HALE, 2010) e (RYBAKOWSKI, 2012).

Os resultados aqui apresentados também são verificados em processos de evolução, porém nossa aplicação para semifluxos multívocos é feita a partir da teoria de semigrupos, portanto apresentaremos os resultados mais simples.

Fixemos $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e um semigrupo $T(\cdot)$ em X, o qual possui atrator global $\mathscr{A}$. Usaremos a notação $\mathscr{O}_\varepsilon(B) = \{x \in X : d(x,B) < \varepsilon\}$ para a ε-vizinhança de B em X, mais precisamente

$$\mathscr{O}_\varepsilon(B) = \{z \in X : \|z-b\| < \varepsilon \text{ para algum } b \in B\} = \bigcup_{b\in B} B(b,\varepsilon),$$

onde $B(b,\varepsilon)$ é a bola centrada em b e raio ε.

Definição 2.3.1. Dizemos que $\mathscr{M} = \{M_1,\ldots,M_n\}$ é uma família de invariantes isolados (para $T(\cdot)$) se existe um $\delta > 0$ para o qual

$$\mathscr{O}_\delta(M_j) \cap \mathscr{O}_\delta(M_k) = \emptyset,\ 1 \le j < k \le n,$$

e M_j é o invariante maximal (com respeito a $T(\cdot)$) de $\mathscr{O}_\delta(M_j)$.

Definição 2.3.2. Dizemos que $T(\cdot)$ com atrator global $\mathscr{A}$ e família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1,\ldots,M_n\}$ é um semigrupo gradiente com respeito a $\mathscr{M}$ se existe uma aplicação contínua $\mathscr{L} : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. a aplicação $t \mapsto \mathscr{L}(T(t)x)$ é uma função não-crescente em $t \ge 0$ para cada $x \in X$;
2. $\mathscr{L}$ é constante em cada M_j; e
3. $\mathscr{L}(T(t)x) = \mathscr{L}(x)$ para todo $t \ge 0$ se, e só se, $x \in \bigcup_{j=1}^{n} M_j$.

Um função $\mathscr{L}$ com tais propriedades é dito uma funcional de Lyapunov para $T(\cdot)$ com respeito a $\mathscr{M}$.

Definiremos agora o que seria uma dinâmica gradiente. Para tal, vamos definir formalmente o que seria uma estrutura homoclínica.

Definição 2.3.3. Sejam $T(\cdot)$ um semigrupo e $\mathscr{M} = \{M_1,\ldots,M_n\}$ uma família de invariantes isolados. Uma estrutura homoclínia em $\mathscr{M}$ é uma coleção não vazia $\{M_{l_1},\ldots,M_{l_k}\}$ de $\mathscr{M}$, juntamente com uma coleção de soluções globais $\{\xi_{l_1},\ldots,\xi_{l_k}\}$, tais que

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(\xi_{l_j}(t), M_{l_j}) = 0 \text{ e } \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\xi_{l_j}(t), M_{l_{j+1}}) = 0,\ 1 \le j \le k,$$

em que $E_{l_1} = E_{l_{k+1}}$.

Definição 2.3.4. Um semigrupo $T(\cdot)$ com atrator global $\mathscr{A}$ é dinamicamente gradiente com respeito a família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1,\ldots,M_n\}$, se satisfaz as seguintes propriedades:

G1. Dada solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ em $\mathscr{A}$, existem $j,k \in \{1,\dots,n\}$ para os quais

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(\xi(t),E_j) = 0 \text{ e } \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\xi(t),M_k) = 0.$$

G2. A família $\mathscr{M}$ não possui estruturas homoclínicas.

Podemos então caracterizar os semigrupos gradientes.

Teorema 2.3.5. Um semigrupo $T(\cdot)$ é gradiente com respeito a uma família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1,\dots,M_n\}$ se, e somente se, é dinamicamente gradiente com respeito a $\mathscr{M}$.

Apresentaremos a noção de par atrator-repulsor.

Definição 2.3.6. Diremos que um subconjunto não vazio A de $\mathscr{A}$ é um atrator local se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A)) = A$. O repulsor A^* associado ao atrator local A é o conjunto definido por

$$A^* = \{x \in \mathscr{A} : \omega(x) \cap A = \emptyset\}. \tag{2.3.1}$$

O par (A,A^*) é chamado um par atrator-repulsor para $T(\cdot)$.

Não é difícil ver que se (A,A^*) é um par atrator-repulsor então A^* é fechado, invariante e disjunto de A.

Observamos que A é um atrator local se, e somente se, é compacto invariante e atrai uma ε-vizinhança de si mesmo, para algum $\varepsilon > 0$. Notamos também que a definição de atrator local pedimos que A atraia uma vizinhança de A em X, mas isto equivale a atrair uma vizinhança de A em $\mathscr{A}$, como veremos nos lemas a seguir, em que supomos que $T(\cdot)$ é um semigrupo em X com atrator global $\mathscr{A}$.

Lema 2.3.7. Se A é compacto e invariante por $T(\cdot)$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que A atrai $\mathscr{O}_\varepsilon(A) \cap \mathscr{A}$ então dado $\delta > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathscr{O}_\delta(A)$, onde $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(A)) = \bigcup_{x\in\mathscr{O}_{\delta'}(A)} \bigcup_{t\geq 0} T(t)x$, a órbita positiva da vizinhança.

Lema 2.3.8. Seja $S(t) := T(t)|_{\mathscr{A}}$. Claramente $S(\cdot)$ é um semigrupo no espaço métrico $\mathscr{A}$. Se A é um atrator local para $S(\cdot)$ no espaço métrico $\mathscr{A}$ e K é um compacto de $\mathscr{A}$ tal que $K \cap A^* = \emptyset$, então A atrai K. Além disso, A é um atrator local para $T(\cdot)$ em X.

Com a noção de atrator local podemos definir a decomposição de morse de um atrator global $\mathscr{A}$.

Definição 2.3.9. Dada uma família crescente $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = \mathscr{A}$ de atratores locais, para $j = 1,\dots,n$ defina $M_j := A_j \cap A^*_{j-1}$. A n-upla ordenada $\mathscr{M} := (M_1,\dots,M_n)$ é chamada uma decomposição de Morse de $\mathscr{A}$.

Lema 2.3.10. Seja $T(\cdot)$ um semigrupo dinamicamente gradiente com respeito à família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Então existe um $1 \leq k \leq n$ tal que M_k é um atrator local para $T(\cdot)$ em X.

Seja $T(\cdot)$ um semigrupo dinamicamente gradiente com respeito à família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ e assumamos que M_1 seja um atrator local para $T(\cdot)$. Segue que cada M_j, com $j > 1$, está contido em M_1^*, o repulsor associado a M_1.

Considerando a restrição $T_1(\cdot)$ de $T(\cdot)$ a $M_{1,0}^* := M_1^*$, então $T_1(\cdot)$ é um semigrupo dinamicamente gradiente em M_1^* relativo à família de invariantes isolados $\{M_2, \ldots, M_n\}$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que M_2 é um atrator local para $T_1(\cdot)$ em M_1^*. Se $M_{2,1}^*$ é o repulsor associado ao conjunto invariante isolado M_2 de $T_1(\cdot)$ em M_1^* podemos prosseguir e considerar a restrição $T_2(\cdot)$ do semigrupo $T_1(\cdot)$ a $M_{2,1}^*$ e $T_2(\cdot)$ será um semigrupo dinamicamente grandiente com respeito à família de invariantes isolados $\{M_3, \ldots, M_n\}$.

Repetindo o processo, após um número finito de passos, obtemos uma reordenação de $\mathscr{M}$ de modo que M_j é um atrator local para a restrição de $T(\cdot)$ a $M_{j,j-1}^*$.

Nestas condições, defina $A_0 = \emptyset$, $A_1 = M_1$ e para $j = 2, 3, \ldots, n$

$$A_j = A_{j-1} \cup W^u(M_j) = \bigcup_{k=1}^{j} W^u(M_k), \tag{2.3.2}$$

em que $W^u(M) = \{x \in \mathscr{A} : \text{ existe solução global limitada } \xi : \mathbb{R} \to \mathscr{A} \text{ com } \xi(0) = x \text{ e } \alpha(\xi) \subset M\}$, a *variedade instável* do subconjunto invariante M de $\mathscr{A}$ e

$$\alpha(\xi) = \{z \in X : \text{ existe uma sequência } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ tal que } z = \lim_{n\to\infty} \xi(-t_n)\},$$

denota o α-limite de uma solução global ξ. Fica claro que $A_n = \mathscr{A}$.

Teorema 2.3.11. Seja $T(\cdot)$ um semigrupo dinamicamente gradiente com respeito à família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ reordenada de maneira que M_j é um atrator local para a restrição de $T(\cdot)$ a $M_{j-1,j-2}^*$. Então a família A_j definida em (2.3.2) é um atrator local para $T(\cdot)$ em X,

$$M_j = A_j \cap A_{j-1}^*$$

e $\mathscr{M}$ é uma decomposição de Morse de $\mathscr{A}$.

Proposição 2.3.12. Seja $T(\cdot)$ um semigrupo dinamicamente gradiente com respeito à família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ reordenados de maneira que constituam uma decomposição de Morse do atrator global $\mathscr{A}$. Então

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} M_j. \tag{2.3.3}$$

A fim de fecharmos o ciclo de equivalências, devemos construir uma função de Lyapunov a partir de uma decomposição de Morse.

Lema 2.3.13. Se $T(\cdot)$ é um semigrupo com atrator global $\mathscr{A}$, a função $h\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \sup_{t\geq 0} d(T(t), \mathscr{A}) \tag{2.3.4}$$

para $x \in X$, está bem definida, é contínua e a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é não crescente para cada $x \in X$. Ainda mais, $h^{-1}(0) = \mathscr{A}$.

Lema 2.3.14. Sejam $T(\cdot)$ um semigrupo com atrator global $\mathscr{A}$ e (A, A^*) um par atrator-repulsor em $\mathscr{A}$. Existe uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $[0,\infty) \ni t \mapsto f(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é descrescente para cada $x \in X$.
2. $f^{-1}(0) = A$ e $f^{-1}(1) = A^*$.
3. Dado $x \in X$, se $f(T(t)x) = f(x)$ para todo $t \geq 0$, então $x \in A \cup A^*$.

Os lemas anteriores são uma inspiração para a construção do funcional de Lyapunov.

Teorema 2.3.15. Sejam $T(\cdot)$ um semigrupo com atrator global $\mathscr{A}$ e uma família de invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Se existe uma família crescente de atratores globais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = \mathscr{A}$ que constitui uma decomposição de Morse de $\mathscr{A}$, então o semigrupo $T(\cdot)$ é gradiente relativamente a $\mathscr{M}$. Isto é, existe um funcional de Lyapunov relativo à família $\mathscr{M}$. Ainda mais, o funcional $\mathscr{L}\colon X \to \mathbb{R}$ pode ser escolhido de modo que $\mathscr{L}(M_j) = j-1$, $j = 1, \ldots, n$.

2.4 Equi-atração para sistemas dinâmicos

Nesta seção discutiremos a continuidade de atratores para sistemas dinâmicos, o que é uma maneira de garantir que nossa modelagem é consistente perante perturbações. As referências básicas para esta seção são (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2009; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012; LI; KLOEDEN, 2004). Apresentaremos resultados para semigrupos e processos de evolução e também algumas das provas do caso de semigrupos. Optamos por estas provas pela simplicidade, a generalização para processos de evolução pode ser vista, por exemplo, em (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Secction 3.4).

Sejam X um espaço de Banach e $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de semigrupos em X e suponhamos que para cada η exista atrator global $\mathscr{A}_\eta$ em X.

Diremos que $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é *coletivamente assintoticamente compacta* em $\eta = 0$ se, dadas uma sequência $\{\eta_k\}$ com $\eta_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, uma sequência limitada $\{x_k\} \in X$ e uma sequência $\{t_k\} \geq 0$ com $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ para a qual $\{T_{\eta_k}(t_k)x_k\}$ é limitada em X, então $\{T_{\eta_k}(t_k)x_k\}$ é relativamente compacta.

Definição 2.4.1. Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathscr{A}_\eta$, para cada $\eta \in [0,1]$, diremos que a família de atratores $\{A_\eta : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrai subconjuntos limitados de X se

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\eta\in[0,1]} \mathrm{dist_H}(T_\eta(t)B, \mathscr{A}_\eta) = 0, \tag{2.4.1}$$

para cada subconjunto limitado B de X.

Mostraremos como este conceito é equivalente à continuidade de atratores.

Teorema 2.4.2. Seja $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de semigrupos que é contínua (como em (2.2.1)) e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que $T_\eta(\cdot)$ tem um atrator global $\mathscr{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e que $\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta$ seja limitado. Se $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrai limitados, então

$$\mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \to 0 \text{ quando } \eta \to 0.$$

Demonstração. Seja

$$\mathscr{B} = \bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta \tag{2.4.2}$$

que é limitado em X.

Dado $\varepsilon > 0$, da equi-atração existe $t_0 = t_0(\varepsilon, \mathscr{B})$ tal que

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \mathrm{dist}(T_\eta(t)\mathscr{B}, \mathscr{A}_\eta) \leq \varepsilon, \text{ para todo } t \geq t_0. \tag{2.4.3}$$

Dos fatos de que a família $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e $\mathscr{B}$ é limitado, existe $\eta_0 \in (0,1]$ tal que

$$\mathrm{dist}(T_\eta(t_0)\mathscr{A}_\eta, T_0(t_0)\mathscr{A}_\eta) \leq \varepsilon, \text{ para todo } \eta \leq \eta_0. \tag{2.4.4}$$

De (2.4.3) e (2.4.4), obtemos

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq \mathrm{dist}(T_\eta(t_0)\mathscr{A}_\eta, T_0(t_0)\mathscr{A}_\eta) + \mathrm{dist}(T_0(t_0)\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq 2\varepsilon. \tag{2.4.5}$$

De maneira análoga obtemos, de (2.4.3),

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_\eta) \leq 2\varepsilon. \tag{2.4.6}$$

O que completa a prova da continuidade dos atratores. □

Apresentaremos uma recíproca do Teorema 2.4.2. Para tal, diremos que uma família de semigrupos $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é *uniformemente limitada* se

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \bigcup_{t\geq 0} T_\eta(t)B \text{ é limitada}$$

sempre que B é limitado de X.

Teorema 2.4.3. Seja $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se $T_\eta(\cdot)$ tem atrator global $\mathscr{A}_\eta$, para cada $\eta \in [0,1]$, a família $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é uniformemente limitada e que

$$\mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0, \tag{2.4.7}$$

então para cada sequência $\{\eta_k\}$ com $\eta_k \to 0$, quando $k \to \infty$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_{\eta_k}$ é relativamente compacto e $\{\mathscr{A}_{\eta_k} : k \in \mathbb{N}\}$ equi-atrai limitados. Consequentemente, existe $\eta_0 \in (0,1]$ tal que $\bigcup_{\eta\in[0,\eta_0]} \mathscr{A}_\eta$ é limitado e $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,\eta_0]\}$ equi-atrai limitados.

Demonstração. A compacidade de $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_{\eta_k}}$ segue imediatamente da continuidade dos atratores globais. Provaremos a equi-atração por contradição. Suponhamos, então, que existam $\varepsilon > 0$, sequências $\{t_k\} \geq 0$ com $t_k \to \infty$, quando $k \to \infty$, e $\{x_k\}$ limitada em X tal que

$$\mathrm{dist}(T_{\eta_k}(t_k), \mathscr{A}_{\eta_k}) \geq 2\varepsilon.$$

De (2.4.7) podemos assumir que

$$\mathrm{dist}(T_{\eta_k}(t_k)x_k, \mathscr{A}_0) \geq \varepsilon.$$

Da limitação uniforme da família $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$, segue que

$$B = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\geq 0} T_{\eta_k}(t)x_k}$$

é limitado. A continuidade e compacidade assintótica coletiva em $\eta = 0$ implicam que para cada $t \geq 0$, exite $b \in B$ tal que

$$\mathrm{dist}(T_0(t)b, \mathscr{A}_0) \geq \varepsilon$$

o que contradiz o fato de que $\mathscr{A}_0$ atrai limitados de X sob $T_0(\cdot)$. Mostramos assim que a família $\{\mathscr{A}_{\eta_k} : k \in \mathbb{N}\}$ equi-atrai limitados de X. A existência de η_0 pode ser facilmente demonstrada por um argumento de contradição. □

Um fato interessante da equi-atração é que se tivermos uma estimativa para a continuidade dos semigrupos então podemos passar essa estimativa para medirmos a distância entre os atratores globais. O que segue no teorema a seguir.

Teorema 2.4.4. Seja $\{T_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de semigrupos para os quais existe atrator global $\mathscr{A}_\eta$, para cada $\eta \in [0,1]$. Denote $B = \bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta$ e suponha que existe função contínua e estritamente decrescente $\gamma\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \mathrm{dist}(T_\eta(t)B, \mathscr{A}_\eta) \leq \gamma(t), t \geq 0 \tag{2.4.8}$$

e

$$\sup_{x\in D} \mathrm{dist}(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \leq E_\eta(t), \text{ para todo } t \geq 0 \tag{2.4.9}$$

onde $E_\eta(t) \to 0$, quando $\eta \to 0$, para cada $t \geq 0$. Dessa maneira, vale a estimativa

$$\mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq \inf_{\varepsilon \in \gamma([0,\infty))} 2\left\{E_\eta(\gamma^{-1}(\varepsilon) + \varepsilon)\right\}. \tag{2.4.10}$$

Demonstração. Para cada $t \geq 0$,

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq \mathrm{dist}(T_\eta(t), \mathscr{A}_\eta, T_0\mathscr{A}_\eta) + \mathrm{dist}(T_0(t)\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0). \tag{2.4.11}$$

De (2.4.9) temos

$$\mathrm{dist}(T_\eta(t)\mathscr{A}_\eta, T_0(t)\mathscr{A}_\eta) \leq \sup_{x \in \mathscr{A}_\eta} \mathrm{d}(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \leq E_\eta(t).$$

Unindo (2.4.9) e (2.4.11) obtemos

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq E_\eta(t) + \gamma(t).$$

Portanto, para $\varepsilon \in \gamma([0,\infty))$ e $t = \gamma^{-1}(\varepsilon)$,

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq E_\eta(\gamma^{-1}(\varepsilon)) + \varepsilon.$$

De maneira semelhante obtemos

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_\eta) \leq E_\eta(\gamma^{-1}(\varepsilon)) + \varepsilon$$

e (2.4.10) está provada. □

Corolário 2.4.5. Suponha que as condições do Teorema 2.4.4 estão satisfeitas com

- $\gamma(t) = c\,\mathrm{e}^{-\nu t}$ para algum $c \geq 1$, $\nu > 0$ e para todo $t \geq 0$;
- $E_\eta(t) = \rho(\eta)\mathrm{e}^{Lt}$, $t \geq 0$, onde $L > 0$ e $\rho\colon [0,1] \to [0,\infty)$ é contínua com $\rho(0) = 0$.

Então existe uma constante $\tilde{c} > 0$ tal que

$$\mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq \tilde{c}\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}.$$

Demonstração. No Teorema 2.4.4 tomamos $\gamma^{-1}(\varepsilon) = \log(c/\varepsilon)^{\frac{1}{\nu}}$, de maneira que (2.4.10) leia-se

$$\mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq 2 \inf_{\varepsilon \in (0,c]} \left\{\rho(\eta)\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{\frac{L}{\nu}} + \varepsilon\right\}.$$

Minimizamos o lado direito da inequação acima e obtemos

$$\mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq 2c^{\frac{L}{L+\nu}}\left(\left(\frac{L}{\nu\,\mathrm{e}^\nu}\right)^{\frac{-L}{\nu+L}} + \left(\frac{L\mathrm{e}^L}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+L}}\right)\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}$$

e a prova está completa. □

Para processos de evolução podemos recriar resultados análogos aos anteriores, que mostram que equi-atração pullback é equivalente à continuidade de atratores pullback. Vamos considerar aqui $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de processos de evolução e para cada $\eta \in [0,1]$ suporemos que existe atrator pullback $\{\mathscr{A}_\eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Assumimos, ainda, que para cada $t \in \mathbb{R}$ a família de atratores pullback $\{\mathscr{A}_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ satisfaz

$$\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta(t)} \text{ é compacto.} \tag{2.4.12}$$

Definição 2.4.6. Diremos que a família $\{\mathscr{A}_\eta(t_0) : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrai pullback limitados de X no tempo t_0 se

$$\lim_{s\to-\infty} \sup_{\eta\in[0,1]} \operatorname{dist}(S_\eta(t_0,s)B, \mathscr{A}_\eta(t_0)) = 0 \tag{2.4.13}$$

para cada limitado B de X.

Teorema 2.4.7. Seja $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de processos em X com correspondentes atratores pullback $\{\mathscr{A}_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$. Assumamos que (2.2.4), (2.2.6) e (2.4.12) são satisfeitas. Se, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é contínua no tempo t_0 e em $\eta = 0$ e a família de atratores $\{\mathscr{A}_\eta(t_0) : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrai pullback limitados de X, então

$$\operatorname{dist_H}(\mathscr{A}_\eta(t_0), \mathscr{A}_0(t_0)) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0.$$

Novamente, para fazermos a recíproca do Teorema 2.6.11 se faz necessário mais hipóteses sobre os processos de evolução.

Definição 2.4.8. Dizemos que a família de processos $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é uniformemente pullback limitada no tempo t se

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \bigcup_{\tau\le t} \bigcup_{s\le\tau} S_\eta(\tau,s)B$$

for limitado, sempre que B é um limitado de X.

Definição 2.4.9. Seja $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que a família de processos $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é coletivamente pullback assintoticamente compacta no tempo t e em $\eta = 0$ se, sempre que $\{\eta_k\}$ é uma sequência com $\eta_k \to 0$, $\{s_k\} \le t$ é uma sequência com $s_k \to -\infty$, $\{x_k\}$ é uma sequência limitada em X e $\{S_{\eta_k}(t,s_k)x_k\}$ é limitada, implicar que a sequência $\{S_{\eta_k}(t,s_k)x_k\}$ possui subsequência convergente.

Podemos ver facilmente a relação entre as definições acima e as respectivas definições no caso de semigrupos.

Teorema 2.4.10. Seja $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de processos em X com correspondentes atratores pullback $\{\mathscr{A}_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$. Assuma que para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ a família de processos

$\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é contínua em t_0 e em $\eta = 0$, úniformemente pullback limitada em t_0, coletivamente pullback assintoticamente compacta em t_0 e

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\mathscr{A}_\eta(t_0), \mathscr{A}_0(t_0)) \to, \text{ quando } \eta \to 0,$$

então $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta(t_0)}$ é compacto e $\{\mathscr{A}_\eta(t_0) : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrai pullback no tempo t_0.

Teorema 2.4.11. Seja $\{S_\eta(\cdot,\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de processos com atratores pullback $\{\mathscr{A}_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$. Assumamos que

- as hipóteses (2.2.4), (2.2.6) e (2.4.12) estão satisfeitas;
- existe uma função estritamente descrescente $\zeta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ com $\zeta(0) = \zeta_0$ e tal que $\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 0$ para a qual vale a estimativa

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \mathrm{dist}\left(S_\eta(t,s) \bigcup_{\substack{\eta\in[0,1]\\ \tau\le t}} \mathscr{A}(\tau), \mathscr{A}_\eta(t)\right) \le \zeta(t-s),$$

  para todo $s \le t$;
- existem constantes $c, L > 0$ e sequência $\{\rho_k\} > 0$ com $\rho_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(S_\eta(t,s)x, S_0(t,s)y) \le ce^{L(t-s)}(d(x,y) + \rho_k).$$

Então

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta(t), \mathscr{A}_0(t)) \le h(\rho_k) := \min_{\varepsilon\in(0,\zeta_0]} 2\left\{c\,\mathrm{e}^{L\zeta^{-1}(\varepsilon)}\rho_k + \varepsilon\right\}.$$

Corolário 2.4.12. Assuma as condições do Teorema 2.4.11 são satisfeitas e que existe $\nu > 0$ tal que $\zeta(t-s) = c\,\mathrm{e}^{-\nu(t-s)}$ para todo $s \le t$. Então existe uma constrante $\tilde{c} > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\mathscr{A}_\eta(t), \mathscr{A}_0(t)) \le \tilde{c}\rho_k^{\frac{\nu}{\nu+L}}.$$

2.5 Semifluxos skew-product

Nesta seção falaremos sobre os semifluxos skew-product. Como motivação para sua definição vamos considerar uma equação diferencial não autônoma num espaço de Banach X

$$\begin{cases} x_t = f(t,x), \\ x(0) = x_0 \in X. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Consideremos o espaço $\mathscr{C}_b := \mathscr{C}_b(\mathbb{R}\times X, X)$ das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}\times X$ em X munido de uma métrica ρ que o deixa completo e o grupo das translações $\theta(\cdot)$ agindo em $\mathscr{C}_b$, isto é,

$$\theta(t)f(s,x) = f(t+s,x),\, t,s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in X.$$

Suponhamos que $f \in \mathscr{C}_b$ e seja Σ_f o fecho da órbita de f por $\theta(\cdot)$, ou seja, $\Sigma_f = \overline{\{\theta(t)f : t \in \mathbb{R}\}}$ no espaço métrico $\mathscr{C}_b$.

Dado $\sigma \in \Sigma_f$ consideramos o sistema

$$\begin{cases} x_t = \sigma(t,x), \\ x(0) = x_0 \in X \end{cases} \tag{2.5.2}$$

e para $x_0 \in X$ seja $x(t,x_0,\sigma)$ a solução de (2.5.2) no tempo $t \in \mathbb{R}$ com função não autônoma $\sigma \in \Sigma_f$ e condição inicial $x(0) = x_0$. Usaremos a notação $\varphi(t,\sigma)x_0 := x(t,x_0,\sigma)$. Observe que tais soluções satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\varphi(0,\sigma)x_0 = x_0$;

2. $[0,\infty) \times X \times \Sigma_f \ni (t,x_0,\sigma) \mapsto \varphi(t,\sigma)x_0 \in X$ é contínua; e

3. (a propriedade do cociclo) $\varphi(t+s,\sigma)x_0 = \varphi(t,\theta(s)\sigma)\varphi(s,\sigma)x_0$.

Devido a esta propriedade a aplicação φ é conhecida como *semifluxo cociclo*.

Uma aplicação $\varphi\colon [0,\infty) \times X \times \Sigma \to X$ juntamente com um grupo $\theta(\cdot)$ com as propriedades acima é chamado de um *sistema dinâmico não autônomo* (ou nds para abreviar) e denotaremos por $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$. Contudo podemos ter estes mesmos elementos sem que haja uma equação diferencial envolvida. Por isso vamos apresentar a teoria de forma abstrata, com motivação a aplicação em equações diferenciais não autônomas. As referências desta seção são (BORTOLAN *et al.*, 2013; BORTOLAN; CARVALHO; LANGA, 2014; SELL; YOU, 2013) e (SELL, 1967).

Suponhamos que $(\mathscr{C},\rho)$ é um espaço métrico completo com um grupo $\theta(\cdot)$ agindo em $\mathscr{C}$, o qual é chamado de *grupo diretor*.

Fixamos $\sigma_0 \in \mathscr{C}$. Denotamos $\Gamma = \{\theta(t)\sigma_0 : t \in \mathbb{R}\}$, a órbita de σ_0 por $\theta(\cdot)$ em $\mathscr{C}$ e por Σ o fecho de Γ, o qual suporemos ser compacto em $\mathscr{C}$. Por fim, sejam X um espaço de Banach e $\varphi\colon [0,\infty) \times X \times \Sigma \to X$ um semifluxo cociclo e consideremos o nds $(\varphi,\theta)_{X,\Sigma_0}$.

A seguir vamos explorar as diversas propriedades de atração de um sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$. Mais precisamente, vamos definir os atratores uniforme e cociclo e apresentaremos o semifluxo skew-product, que é um semigrupo em um espaço de fase específico.

Definição 2.5.1. Seja $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é um sistema dinâmico não autônomo. Um atrator uniforme $\mathscr{A}_\eta$ (se existir) para o sistema é o fechado minimal de X tal que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B, \mathscr{A}_\eta) \to 0, \text{ quando } t \to \infty,$$

para cada limitado B de X.

O atrator uniforme performa uma atração forward no tempo uniformemente com respeito a σ no grupo diretor, citamos (CHEPYZHOV; VISHIK, 2002), e uma caracterização é dada pela propriedade de *invariância levantada*. Como visto no caso de semigrupos e processos de evolução, soluções globais e a propriedade de ser invariante estão bem conectadas.

Uma *solução global por x e σ do nds* $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é uma aplicação $\xi:\mathbb{R}\to X$ que satisfaz, para todo $t\geq s$,

$$\varphi(t-s,\theta(s)\sigma)\xi(s)=\xi(t) \text{ e } \xi(0)=x.$$

Definição 2.5.2. Dizemos que $M\subset X$ é levantado invariante pelo nds $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ se para cada x em M existe $\sigma\in\Sigma$ e uma solução global $\xi:\mathbb{R}\to X$ passando por x e σ cuja imagem está contida em M.

Dizemos ainda que M é um levantado invariante isolado se existe uma vizinhança $\mathscr{U}$ de M para a qual M é o levantado invariante maximal em $\mathscr{U}$.

Proposição 2.5.3. O atrator uniforme para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$, se existir, é o levantado invariante limitado maximal em X.

Vamos definir agora o semifluxo skew-product. Seja $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ um sistema dinâmico não autônomo em (X,Σ). Associamos a ele o sistema dinâmico autônomo ou semigrupo $\pi(\cdot)$ em $\mathbb{X}=X\times\Sigma$, com a mética da soma, pondo

$$\pi(t)(x,\sigma)=(\varphi(t,\sigma)x,\theta(t)\sigma)\,,t\geq 0. \tag{2.5.3}$$

Não é difícil ver que $\pi(\cdot)$ definido como acima é um semigrupo, conhecido como *semifluxo skew-product*.

Como semigrupo, o semifluxo skew-product pode possuir atrator global $\mathbb{A}$ em $\mathbb{X}$. A seguir, apresentaremos definições a fim de relacionar o atratores uniformes com o atrator global para o semifluxo skew-product.

Definição 2.5.4. Dizemos que o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é uniformemente assintoticamente compacto se existe um compacto $K\subset X$ tal que

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\sigma\in\Sigma}\operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B,K)=0, \tag{2.5.4}$$

para todo limitado B de X.

Proposição 2.5.5. Sejam $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é um sistema dinâmico não autônomo com Σ compacto e $\pi(\cdot)$ o semifluxo skew-product correspondente. São equivalentes:

1. existe um compacto $\mathbb{K}$ de $X\times\Sigma$ tal que para todo limitado $\mathbb{B}$ de $X\times\Sigma$

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}(\pi(t)\mathbb{B},\mathbb{K})=0.$$

2. existe um compacto K de X tal que para todo limitado B de X

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\sigma\in\Sigma}\operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B,K)=0.$$

É consequência direta da proposição acima que a compacidade assintótica uniforme do nds $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ implica na existência de um atrator global para o semifluxo skew-product $\pi(\cdot)$.

Teorema 2.5.6. Se $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é uniformemente assintoticamente compacto e Σ é compacto, então $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ tem um atrator uniforme.

Vamos finalizar a seção falando do semifluxo cociclo e fazendo uma relação entre os possíveis tipos de estruturas assintóticas apresentadas.

Diremos que um conjunto não autônomo $\{A(\sigma):\sigma\in\Sigma\}$, com $A(\sigma)\subset X$ para todo $\sigma\in\Sigma$, é limitado, fechado ou compacto se cada fibra $A(\sigma)$ é limitada, fechada ou compacta em X, respectivamente.

Definição 2.5.7. Suponhamos que $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ seja um sistema dinâmico não autônomo. Dizemos que o conjunto não autônomo compacto $\{A(\sigma):\sigma\in\Sigma\}$ é um atrator cociclo para o sistema dinâmico não autônomo se

(i) $A(\cdot)$ é invariante, isto é, para todo $t\geq 0$ e $\sigma\in\Sigma$

$$\varphi_\eta(t,\sigma)A(\sigma)=A(\theta(t)\sigma).$$

(ii) $A(\cdot)$ Σ-pullback atrai limitados de X, isto é, para cada limitado B de X, temos

$$\operatorname{dist}(\varphi(t,\theta(-t))B,A(\sigma))\to 0,\ \text{quando}\ t\to\infty. \tag{2.5.5}$$

Teorema 2.5.8. Seja $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ um sistema dinâmico não autônomo com Σ compacto. Se $\pi(\cdot)$, o semifluxo skew-product associado, possui atrator global $\mathbb{A}$, então o conjunto não autônomo $\{A(\sigma):\sigma\in\Sigma\}$ definido como $A(\sigma)=\{x\in X:(x,\sigma)\in\mathbb{A}\}$ é o atrator cociclo para $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$.

Sem hipóteses adicionais a recíproca do teorema anterior não é verdadeira, a princípio o atrator cociclo não é necessariamente limitado em geral. Apresentamos, então, a definição de atração uniforme para obtermos um resultado recíproco.

Definição 2.5.9. Suponhamos que $A(\cdot)$ é o atrator cociclo para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$, com Σ compacto. Dizemos que $A(\cdot)$ uniformemente equi-atrai limitados de X se

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\sigma\in\Sigma}\operatorname{dist}(\varphi(t,\theta(-t)\sigma)B,A(\sigma))=0,$$

para todo limitado B de X.

Teorema 2.5.10. Se $A(\cdot)$ é o atrator cociclo para o nds $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ uniformemente equi-atrai limitados de X e $\cup_{\sigma\in\Sigma}A(\sigma)$ é precompacto em X, então o conjunto $\mathbb{A}$ associado a $A(\cdot)$, dado por

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} A(\sigma)\times\{\sigma\}$$

é o atrator global para o semifluxo skew-product $\pi(\cdot)$ em $\mathbb{X}$.

Teorema 2.5.11. Suponhamos que o nds $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ seja uniformemente assintoticamente compacto, então existe um atrator uniforme $\mathscr{A}$ e um atrator cociclo $\{A(\sigma):\sigma\in\Sigma\}$ e vale

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma} A(\sigma) = \mathscr{A}. \tag{2.5.6}$$

Vamos agora rapidamente relacionar o semifluxo cociclo de um sistema dinâmico não autônomo com processos de evolução.

Dado um σ em Σ construímos um processo de evolução da seguinte maneira: para $t\geq s\in\mathbb{R}$, defina

$$S_\sigma(t,s) = \varphi(t-s,\theta(s)\sigma). \tag{2.5.7}$$

Se $\{A(\sigma):\sigma\in\Sigma\}$ é o atrator cociclo para o nds $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$, então o conjunto não autônomo $\{A(\theta(t)\sigma):t\in\mathbb{R})\}$ é o atrator pullback do processo definido em (2.5.7).

2.6 Espaços uniformemente locais

Nesta seção vamos explorar os espaços conhecidos como uniformemente locais e geração de semigrupos por operadores elípticos nos mesmos. As referências para esta seção são os trabalhos (ARRIETA *et al.*, 2004; ARRIETA *et al.*, 2007; ARRIETA *et al.*, 2004; CHOLEWA; RODRÍGUEZ-BERNAL, 2009; MIELKE, 1997; WANG, 1999) e (ZELIK, 2003).

Para $1\leq p<\infty$ defina $L^p_U(\mathbb{R}^n) = \{u\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n): \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|u\|_{L^p(B(x,1))}<\infty,\}$, onde $B(x,1)$ denota a bola de centro em x e raio 1, com norma

$$\|u\|_{L^p_U(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|u\|_{L^p(B(x,1))}. \tag{2.6.1}$$

Para $p=\infty$ a definição análoga seria: $u\in L^\infty_U(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|u\|_{L^\infty(B(x,1))}<\infty$ e isto implica que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|<\infty$, isto é, $L^\infty_U(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observamos que $L^p_U(\mathbb{R}^n)$ contém $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $L^q(\mathbb{R}^n)$ e $L^q_U(\mathbb{R}^n)$, sempre que $q\geq p$.

Na definição de $L^p_U(\mathbb{R}^n)$ o fato de tomarmos a bola de raio 1 em x é puramente instrumental. Tomando o raio $r>0$ geraríamos os mesmos espaços com normas equivalentes, com constantes que dependem apenas de n e não de p.

Considere o grupo das translações $\{\tau_y : y \in \mathbb{R}^n\}$, $\tau_y u(x) = u(x-y)$, para $y \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\dot{L}^p_U(\mathbb{R}^n)$ o subespaço das funções de $L^p_U(\mathbb{R}^n)$ que são contínuas por translações com respeito à norma $\|\cdot\|_{L^p_U(\mathbb{R}^n)}$. Isto é,

$$\|\tau_y u - u\|_{L^p_U(\mathbb{R}^n)} \to 0, \text{ quando } \|y\| \to 0.$$

Note que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \dot{L}^p_U(\mathbb{R}^n)$ e portanto $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \dot{L}^p_U(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$. Se $p = \infty$ temos $\dot{L}^\infty_U(\mathbb{R}^n) = BUC(\mathbb{R}^n) = \{u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u \text{ é uniformemente contínua e limitada}\}$. Observamos também que $BUC(\mathbb{R}^n) \subset \dot{L}^p_U(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$.

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio ilimitado arbitrário, a definição de $L^p_U(\Omega)$ também faz sentido e geram espaços diferentes dos $L^p(\Omega)$ usuais, tomando $B(x,1) \cap \Omega$, $x \in \Omega$, no supremo em (2.6.1) anterior.

A seguir daremos outra caracterização dos espaços uniformemente locais. Ambas as definições se mostram importantes para entendimento de diferentes propriedades, a anterior, na opinião do autor, sendo mais intuitiva e a seguinte tendo muita importância analítica. Para tal vamos utilizar funções peso e espaços L^p com peso.

Seja $\rho \colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ uma função peso. Denotamos como o espaço com peso, para $1 \leq p < \infty$,

$$L^p_\rho(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \rho(x) dx < \infty \right\} \tag{2.6.2}$$

com a norma dada por $\|u\|_{L^p_\rho(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \rho(x) dx)^{1/p}$.

Consideramos os pesos transladados $\rho_y(x) := \tau_y \rho(x) = \rho(x-y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, e o espaço com peso correspondente $L^p_{\tau_y \rho}(\mathbb{R}^n) = L^p_{\rho_y}(\mathbb{R}^n)$.

Desse modo, definimos o *espaço uniformemente local*

$$L^p_{lu}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n); \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|u\|_{L^p_{\rho_y}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}, \tag{2.6.3}$$

com a norma dada por $\|u\|_{L^p_{lu}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|u\|_{L^p_{\rho_y}(\mathbb{R}^n)}$.

Primeiramente, observamos que se $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $L^p(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{lu}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_\rho(\mathbb{R}^n)$.

Consideramos também o subespaço $\dot{L}^p_{lu}(\mathbb{R}^n)$ das funções contínuas por translação com respeito à norma $\|\cdot\|_{L^p_{lu}(\mathbb{R}^n)}$. Isto é,

$$\dot{L}^p_{lu}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^p_{lu}(\mathbb{R}^n) : \|\tau_y u - u\|_{L^p_{lu}(\mathbb{R}^n)} \to 0, \text{ quando } \|y\| \to 0 \right\}.$$

Os espaços definidos acima dependem da função peso que escolhida, contudo este detalhe é comumente omitido da notação. Definiremos uma classe de funções peso para as quais os espaços $L^p_{lu}(\mathbb{R}^n)$ coincidem. Na literatura comumente fixa-se um peso que faz parte desta classe, o mais usual em $\mathbb{R}^n$ é a função $\rho(x) = \left(1+|x|^2\right)^{-\nu}$, com $\nu > n/2$.

Definição 2.6.1. A classe $\mathscr{I}$ consiste dos pesos contínuos, estritamente positivos ρ que satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

(ii) existem constantes $\lambda, c > 0$ e $r \geq 0$ tais que, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $|\xi| \geq r$

$$\rho(\xi) \leq c \min_{|x-\xi|\leq\lambda} \rho(x). \tag{2.6.4}$$

Observamos que:

1. Se $\rho \in \mathscr{I}$, então $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \rho(x) \leq \frac{c}{V(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx, \tag{2.6.5}$$

onde $V(\lambda) = V(1)\lambda^n$ denota o volume da bola n-dimensional de raio λ.

2. Se $\rho \in \mathscr{I}$, então $\rho^\alpha \in \mathscr{I}$ desde que $\alpha \geq 1$.

3. A condição (ii) é equivalente ao seguinte: "para todo $\lambda > 0$, existe $c = c(\lambda) > 0$ tal que $\rho(\xi) \leq c \min_{|x-\xi|\leq\lambda} \rho(x)$, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$".

Em particular, se $\rho \in \mathscr{I}$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, o peso $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\varepsilon x) \in \mathscr{I}$ e os espaços $L^p_{\rho_\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ e $L^p_\rho(\mathbb{R}^n)$ coincidem com normas equivalentes.

Proposição 2.6.2. Assuma que $\rho\colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ é uma função peso contínua e estritamente positiva. Então $L^p_{lu}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_U(\mathbb{R}^n)$ com inclusão contínua. O mesmo é válido para $\dot{L}^p_{lu}(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{L}^p_U(\mathbb{R}^n)$.

Se, em adição, $\rho \in \mathscr{I}$, então os espaços $L^p_{lu}(\mathbb{R}^n)$ e $L^p_U(\mathbb{R}^n)$ coincidem algébrica e topologicamente. O mesmo vale para $\dot{L}^p_{lu}(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{L}^p_U(\mathbb{R}^n)$.

Lembramos que $W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ cujas derivadas distribucionais $D^\sigma u$ estão em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para todo σ multi-índice com $|\sigma| \leq k$.

Definiremos agora os espaços de Sobolev uniformemente locais. Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

1. $u \in W^{k,p}_\rho(\mathbb{R}^n)$ se e só se $u \in W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|u\|_{W^{k,p}_\rho(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\sigma|\leq k} \|D^\sigma u\|_{L^p_\rho(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

2. $u \in W^{k,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)$ se e só se $u \in W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e
$$\|u\|_{W^{k,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\sigma|\leq k} \|D^\sigma u\|_{L^p_{lu}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$
Também consideramos o subespaço das funções contínuas por translações na norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)}$, denotado, como antes, por $\dot{W}^{k,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)$.

3. $u \in W^{k,p}_{U}(\mathbb{R}^n)$ se e só se $u \in W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e
$$\|u\|_{W^{k,p}_{U}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\sigma|\leq k} \|D^\sigma u\|_{L^p_{U}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$
ou, equivalentemente,
$$\|u\|_{W^{k,p}_{U}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|u\|_{W^{k,p}(B(x,1))} < \infty.$$
De maneira completamente análoga definimos o subespaço das funções contínuas por translações denotado por $\dot{W}^{k,p}_{U}(\mathbb{R}^n)$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $h \in B_{\mathbb{R}^n}(0;1)$, se $u \in W^{1,p}(B(x,2))$ então podemos escrever $u(x+h)-u(x) = \int_0^1 \nabla u(x+sh)\cdot h ds$ e, dessa maneira,
$$\int_{B_1(x)} |u(x+h)-u(x)|^p dx \leq \int_{B_1(x)}\int_0^1 \|\nabla u(x+sh)\|^p \|h\|^p ds dx$$
portanto
$$\|u(\cdot+h)-u\|_{L^p(B(x,1))} \leq c\|h\| \tag{2.6.6}$$
em que $c = \|\nabla u\|_{L^p(B(x,2))}$. Isto é, $W^{k+1,p}_U(\mathbb{R}^n) \subset \dot{W}^{k,p}_U(\mathbb{R}^n)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

É importante considerarmos espaços intermediários em adição aos que definimos acima. Para isto considere $((\cdot,\cdot))_\theta$ qualquer functor de interpolação.

Definição 2.6.3. Para $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{Z}_+$ e $s \in (k,k+1)$ ponha $\theta \in (0,1)$ dado por $s = \theta(k+1)+(1-\theta)k$, Isto é, $\theta = s-k$. Definimos os espaços intermediários:

(i) Para $\Omega = B(y,1)$, $y \in \mathbb{R}^n$, ou qualquer domínio suave em $\mathbb{R}^n$, definimos
$$W^{s,p}(\Omega) = \Big(\big(W^{k+1,p}(\Omega), W^{k,p}(\Omega)\big)\Big)_\theta,$$
$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \Big(\big(W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n), W^{k,p}(\mathbb{R}^n)\big)\Big)_\theta$$
e
$$W^{s,p}_\rho(\mathbb{R}^n) = \Big(\big(W^{k+1,p}_\rho(\mathbb{R}^n), W^{k,p}_\rho(\mathbb{R}^n)\big)\Big)_\theta.$$

(ii)
$$W^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n) = \Big(\big(W^{k+1,p}_{lu}(\mathbb{R}^n), W^{k,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)\big)\Big)_\theta$$
e
$$\dot{W}^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n) = \Big(\big(\dot{W}^{k+1,p}_{lu}(\mathbb{R}^n), \dot{W}^{k,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)\big)\Big)_\theta.$$

(iii) Alternativamente, podemos definir o espaço ${}^{A}W^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções tais que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|u\|_{W^{s,p}_{\rho_y}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

com norma dada por

$$\|u\|_{{}^{A}W^{k,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|u\|_{W^{s,p}_{\rho_y}(\mathbb{R}^n)}.$$

E, considerando os elementos contínuos por translações, temos ${}^{A}\dot{W}^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)$.

(iv)

$$W^{s,p}_U(\mathbb{R}^n) = \Big(\big(W^{k+1,p}_U(\mathbb{R}^n), W^{k,p}_U(\mathbb{R}^n)\big)\Big)_\theta$$

e

$$\dot{W}^{s,p}_U(\mathbb{R}^n) = \Big(\big(\dot{W}^{k+1,p}_U(\mathbb{R}^n), \dot{W}^{k,p}_U(\mathbb{R}^n)\big)\Big)_\theta.$$

(v) Como anteriormente, podemos definir o espaço ${}^{A}W^{s,p}_U(\mathbb{R}^n)$ como o espaço das funções tais que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|u\|_{W^{s,p}(B(y,1))} < \infty$$

com norma dada por

$$\|u\|_{{}^{A}W^{s,p}_U(\mathbb{R}^n)} = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|u\|_{W^{s,p}(B(y,1))}.$$

E considerando os elementos que são contínuos por translações temos o subespaço ${}^{A}\dot{W}^{s,p}_U(\mathbb{R}^n)$.

As famílias de espaços definidos acima dependem do functor de interpolação e são decrescentes à medida em que aumentamos s e/ou p.

Lema 2.6.4. Os elementos de $\dot{W}^{s,p}_U(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{W}^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)$ são contínuos por translação na norma de cada espaço respectivamente.

Em adição aos resultados anteriores, para qualquer functor de interpolação $\big((\cdot,\cdot)\big)_\theta$, $\theta \in (0,1)$:

Proposição 2.6.5. Seja $\rho : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ uma função peso contínua e estritamente positiva. Para $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\theta \in [0,1)$ e pondo $s = k+\theta$ temos

(1) para cada $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccccc} W^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n) & \subset & {}^{A}W^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n) & \subset & W^{s,p}_{\rho_y}(\mathbb{R}^n) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ W^{s,p}_U(\mathbb{R}^n) & \subset & {}^{A}W^{s,p}_U(\mathbb{R}^n) & \subset & W^{s,p}(B(y,1)) \end{array}$$

em que cada inclusão é contínua. O mesmo vale para os espaços com pontos.

(2) Assuma que $\rho \in \mathscr{I}$, então os espaços $W_U^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e $W_{lu}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ coincidem algébrica e topologicamente. O mesmo vale para os espaços $\dot{W}_U^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{W}_{lu}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Vamos estender a desigualdade de Nirenberg-Gagliardo e as imersões de Sobolev para os espaços uniformemente locais definidos acima.

Vamos, primeiro, fixar algumas notações. Se $k \in \mathbb{Z}^+$ denotamos por $C_{bd}^k(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções com todas derivadas parciais contínuas e limitadas até a ordem k, $C_{bd}^\infty = \bigcap_{k=0}^\infty C_{bd}^k(\mathbb{R}^n)$ e $BUC^k(\mathbb{R}^n) \subset C_{bd}^k(\mathbb{R}^n)$ é o subespaço das funções com todas derivadas parciais uniformemente contínuas e limitadas até a ordem k.

Para $k \in \mathbb{N}$ e $\mu \in (0,1)$, $C^{k+\mu}(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de Banach das funções $u \in BUC^k(\mathbb{R}^n)$ uniformemente Hölder contínuas em $\mathbb{R}^n$ juntamente com suas derivadas até ordem k, embutido com a norma

$$\|u\|_{C^{k+\mu}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\sigma|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\sigma u(x)| + \sum_{|\sigma|=k} \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x-y|^\mu}.$$

Observamos que as seguintes inclusões $C^{k+\mu}(\mathbb{R}^n) \subset BUC^k(\mathbb{R}^n) \subset C_{bd}^k(\mathbb{R}^n) \subset BUC^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ são válidas.

Para obtermos melhores resultados devemos considerar o functor de interpolação na definição dos espaços acima como sendo o functor de interpolação complexa, usualmente denotado por $[\cdot,\cdot]_\theta$, $\theta \in (0,1)$. A interpolação complexa dos espaços de Sobolev de ordem inteira resulta nos chamados *espaços de potenciais de Bessel*.

Lema 2.6.6.

(i) Se $s_1 \ge s_2 \ge 0$, $1 \le p_1 \le p_2 < \infty$ e $s_1 - \frac{n}{p_1} \ge s_2 - \frac{n}{p_2}$, então

$${}^A W_U^{s_1,p_1}(\mathbb{R}^n) \subset {}^A W_U^{s_2,p_2}(\mathbb{R}^n)$$

e se $s_1 > s_2$ e $p_1 \le p_2$ as inclusões são localmente compactas, Isto é, para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e suave as inclusões

$${}^A W_U^{s_1,p_1}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_2,p_2}(\Omega)$$

são compactas. Mais ainda,

$$\|u\|_{{}^A W_U^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \|u\|^\theta_{{}^A W_U^{s_1,p_1}(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{{}^A W_U^{s_2,p_2}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\theta \in [0,1]$, $\frac{1}{p} \le \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$, $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ e

$$s - \frac{n}{p} \le \theta\left(s_1 - \frac{n}{p_1}\right) + (1-\theta)\left(s_2 - \frac{n}{p_2}\right).$$

(ii) Se $1 \le p < \infty$ e $s \ge 0$, seja $k = [s - n/p]$, a parte inteira de $s - n/p$, e $0 < \mu < s - n/p - k < 1$, então a inclusão

$${}^A W_U^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^{k+\mu}(\mathbb{R}^n)$$

é contínua e localmente compacta. Mais ainda,

$$\|u\|_{C^{k+\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|^{\theta}_{{}^{A}W^{s,p}_{U}(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q_U(\mathbb{R}^n)}$$

com $0<\mu<1$, $\theta\in[0,1]$ e $1<p,q<\infty$ e, ainda,

$$k+\mu \leq \theta\left(s-\frac{n}{p}\right)+(1-\theta)\frac{n}{q}.$$

(iii) Se $\rho\in\mathscr{I}$, a inclusão ${}^{A}W^{s_1,p_1}_{U}(\mathbb{R}^n)\subset W^{s_2,p_2}_{\rho}(\mathbb{R}^n)$ é compacta, desde que $s_2\in\mathbb{N}$, $s_1>s_2$, $1<p_1\leq p_2<\infty$ e $s_1-\frac{n}{p_1}>s_2-\frac{n}{p_2}$.

A parte (iii) do Lema 2.6.6 é verdadeiro para os espaços $W^{s,p}_{U}(\mathbb{R}^n)$ com $s\in\mathbb{N}$, contudo podemos estendê-lo para os espaços intermediários pela interpolação.

Sobre a densidade de espaços de funções nos uniformemente locais enunciamos o seguinte lema.

Lema 2.6.7. Se $\rho\in\mathscr{I}$ e $1\leq p<\infty$, então $C^{\infty}_{bd}(\mathbb{R}^n)\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\dot{W}^{k,p}_{U}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto denso de $\dot{W}^{s,p}_{U}(\mathbb{R}^n)$, para cada $s\geq 0$.

Vamos terminar esta seção apresentando alguns resultados que garantem que operadores de segunda ordem elípticos geram semigrupos analíticos tanto em espaços com peso quanto em espaços uniformemente locais. Os resultados foram extraídos de (ARRIETA *et al.*, 2004).

Seja

$$A := -\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x)\partial_k\partial_l+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j+c(x), \tag{2.6.7}$$

um operador diferencial de ordem dois com coeficientes a valores complexos satisfazendo fracas condições de regularidade.

Considere as diferenciações parciais $D_j=-i\partial_j$ e, renomeando as funções coeficientes em (2.6.7) teremos

$$A=\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x)D_kD_l+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)D_j+c(x) \tag{2.6.8}$$

Dizemos que um operador A como em (2.6.8) é elíptico se satisfaz a condição:

Definição 2.6.8 (Condição de elipticidade uniforme (M,θ_0))**.** Denotemos por

$$A_0(x,\xi)=\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x)\xi_k\xi_l,\ x,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

o termo principal de A. Assumimos que os coeficientes a_{kl} são limitados e que exitem constantes $M>0$ e $\theta_0\in(0,\pi/2)$ tais que para todo $x,\xi\in\mathbb{R}^n$ com $|\xi|=1$ valem:

$$A_0(x,\xi)\geq\frac{1}{M}>0, \tag{2.6.9}$$

$$|\arg(A_0(x,\xi))| \le \theta_0. \tag{2.6.10}$$

Definição 2.6.9 (Operador setorial)**.** Sejam $K \ge 1$, $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0,\pi/2)$. Dizemos que um operador linear $\Lambda\colon D(\Lambda) \subset Y \to Y$ é $(K,\theta,a)-$setorial no espaço de Banach Y se o resolvente de Λ contém o setor $S_{a,\theta} = \{z \in \mathbb{C}; \theta \le |\arg(z-a)| \le \pi\} \cup \{a\}$ do plano complexo e para todo $\lambda \in S_{a,\theta}$

$$\|(\lambda-\Lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y)} \le \frac{K}{1+|\lambda-a|}.$$

Note que $D(\Lambda)$ não precisa ser denso em Y, mas Λ é necessariamente fechado.

Se Λ é setorial, então $-\Lambda$ gera um semigrupo analítico, contínuo até $t=0$ se o domínio de Λ for denso em Y.

Vamos definir uma segunda classe de pesos que será utilizada nos resultados do final da seção.

Definição 2.6.10. Dizemos que uma função peso $\rho : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ está na classe $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{\rho_0,\rho_1}$ se:

(i) $\rho \in C^2(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $|\partial_j \rho(x)| \le \rho_0 \rho(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $j = 1,\dots,n$, onde $\rho_0 > 0$ é uma constante;

(iii) $|\partial_j\partial_k \rho(x)| \le \rho_1 \rho(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $j,k = 1,\dots,n$, onde $\rho_1 > 0$ é uma constante.

Observe que se $\rho \in \mathscr{R}$ então $\dfrac{|\nabla\rho(x-ty)|}{\rho(x-ty)} \le \sqrt{n}\rho_0$, o que leva a estimativa

$$\rho(x) \le \rho(x-y)e^{\sqrt{n}\rho_0|y|},\ x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6.11}$$

Particularmente, se $\rho \in \mathscr{R}$, então

$$\rho(x) \le c \min_{|y-x|\le\lambda} \rho(y),$$

com $\lambda, c > 0$ para $|x| \ge r$ e algum $r > 0$. E, dessa maneira, se $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{R}$, então $\rho \in \mathscr{I}$.

Teorema 2.6.11. Sejam $1 < p < \infty$, $M > 0$, $\theta_0 \in (0,\pi/2)$, $\theta \in (\theta_0,\pi/2)$ e $\rho_0,\rho_1 > 0$ dados. Existem constantes $C,K \ge 1$ e $\mu > 0$ tais que dado qualquer operador elíptico $A \in \mathscr{E}(M,\theta_0,p)$ define um operador $(K,\theta,-\mu)-$setorial no espaço $X = L^p_\rho(\mathbb{R}^n)$, para qualquer $\rho \in \mathscr{R}_{\rho_0,\rho_1}$, com domínio $D_X(A) = W^{2,p}_\rho(\mathbb{R}^n)$. Ainda mais, $A_\mu := \mu I + A$ é um isomorfismo linear de $D_X(A)$ em X e

$$\|A_\mu\|_{\mathscr{L}(D_X(A),X)} + \|A_\mu^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,D_X(A))} \le C. \tag{2.6.12}$$

Teorema 2.6.12. Sejam $1 < p < \infty$, $M > 0$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $\theta \in (\theta_0, \pi/2)$ e $\rho_0, \rho_1 > 0$ dados. Existem constantes $C, K \geq 1$ e $\mu > 0$ para os quais qualquer operador elíptico $A \in \mathscr{E}(M, \theta_0, p)$ define um operador $(K, \theta, -\mu)$-setorial no espaço $X = L^p_U(\mathbb{R}^n)$ com domínio $D_X(A) = W^{2,p}_U(\mathbb{R}^n)$.

Ainda mais, $A_\mu := \mu I + A$ é um isomorfismo linear de seu domínio, $D_X(A)$ em X e vale (2.6.12).

Além disso, para $\lambda \in S_{-\mu,\theta} \cup \{-\mu\}$,

$$\|\lambda I - A\|_{\mathscr{L}(W^{2,p}_U(\mathbb{R}^n), L^p_U(\mathbb{R}^n))} + \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^p_U(\mathbb{R}^n), W^{2,p}_U(\mathbb{R}^n))} \leq C(\lambda, \mu, K). \tag{2.6.13}$$

Então $-A$ gera um semigrupo analítico $\{S(t); t \geq 0\}$ em $L^p_U(\mathbb{R}^n)$ e a equação linear

$$\begin{cases} u_t + \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x) D_k D_l u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x) u = 0 \\ u(0) = u_0 \in L^p_U(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

tem uma única solução $u(t) = S(t)u_0$, para $t \geq 0$.

Note que o Teorema 2.6.12 é verdadeiro assumindo apenas que $\rho \in \mathscr{R}$ - podendo assim assumir pesos que crescem no infito. Neste caso, devemos substituir, no enunciado do teorema, os espaços $W^{s,p}_U(\mathbb{R}^n)$ pelos espaços $W^{s,p}_{lu}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.6.13. Seja $\{S(t); t \geq 0\}$ um semigrupo analítico no espaço de Banach X. Suponhamos que para algum espaço de Banach Y e para $t > 0$ a aplicação

$$S(t) \colon X \to Y$$

seja contínua. Então, para cada $u_0 \in X$, a curva do semigrupo $(0, \infty) \ni t \mapsto S(t)u_0$ é analítica em Y. Mais ainda, para cada t_0 o raio de convergência da série de Taylor em Y não é menor do que em X.

Em particular, se $Y \subset X$ com imersão contínua, então $\{S(t); t \geq 0\}$ define um semigrupo analítico em Y.

Corolário 2.6.14. Assuma que A é um operador diferencial como em (2.6.8) com coeficientes $a_{kl} \in BUC(\mathbb{R}^n)$, $b_j \in L^{p_j}_U(\mathbb{R}^n)$ e $c \in L^{p_0}_U(\mathbb{R}^n)$ onde $p_j > n$ e $p_0 > \frac{n}{2}$. Então, para qualquer $1 < r \leq \infty$ e qualquer $u_0 \in L^r_U(\mathbb{R}^n)$, existe uma única solução da equação linear

$$\begin{cases} u_t + \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x) D_k D_l u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x) u = 0 \\ u(0) = u_0 \in L^r_U(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

dada por $u(t) = S(t)u_0$, $t \geq 0$, que satisfaz

$$(0, \infty) \ni t \mapsto S(t)u_0 \in BUC(\mathbb{R}^n)$$

é analítica.

Ainda mais, existem constantes μ, K e $\alpha \geq 0$ tais que vale a estimativa

$$\|S(t)u_0\|_{BUC(\mathbb{R}^n)} \leq K \frac{e^{\mu t}}{t^\alpha} \|u_0\|_{L^r_U(\mathbb{R}^n)}, \text{ para } t > 0. \tag{2.6.14}$$

Teorema 2.6.15. Sejam, como no Teorema 2.6.12, $1 < p < \infty$, $M > 0$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $\theta \in (\theta_0, \pi/2)$, $\rho_0, \rho_1 > 0$ dados e assuma as condições de regularidade mais fortes $b_j \in \dot{L}_U^{p_j}(\mathbb{R}^n)$ e $c \in \dot{L}_U^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, onde p_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, satisfazem as relações:

$$p_j = \begin{cases} p, & \text{se } p > n, \\ p_j > n, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.6.15}$$

e

$$p_0 = \begin{cases} p, & \text{se } p > n/2, \\ p_0 > n, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.6.16}$$

Então $-A$, com domínio $D(A) = \dot{W}_U^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, gera um semigrupo analítico fortemente contínuo em $\dot{L}_U^p(\mathbb{R}^n)$.

2.7 Inclusões diferenciais e semifluxos multívocos

Nesta seção iremos discutir propriedades e características de funções avaliadas a conjuntos e também apresentaremos algo sobre inclusões diferenciais e discutiremos semifluxos multívocos, citando algumas propriedades que os diferem dos semifluxos usuais.

Vamos ver algumas propriedades interessantes de funções cujos valores são conjuntos, também conhecidas como multifunções, funções multívocas.

As referências básicas utilizadas nesta seção são (AUBIN; FRANKOWSKA, 2009; AUBIN; CELLINA, 2012; VALERO, 2001) e (TOLSTONOGOV; UMANSKIÎ, 1992).

Definição 2.7.1. Seja X e Y espaços métricos. Uma função multívoca F de X em Y é caracterizada pelo seu gráfico $G(F)$, o subconjunto do espaço produto $X \times Y$ definido por

$$G(F) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

Dizemos que $F(x)$ é a imagem ou o valor de F em x. Quando existe pelo menos um ponto $x \in X$ para o qual $F(x)$ é não vazio, dizemos que F é não trivial e quando $F(x) \neq \emptyset$ para todo x, então F é dita estrita. O domínio de F, denotado por $D(F)$, é o subconjunto

$$D(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

Dizemos que uma aplicação multívoca entre os espaços métricos, X e Y, é *semicontínua superiormente* em $x \in D(F)$ se para qualquer vizinhança U de $F(x)$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $y \in B_X(x, \delta)$, $F(y) \subset U$. Quando F é semicontínua superiormente em todo ponto $x \in D(F)$, dizemos que F é semicontínua superiormente.

Quando $F(x)$ é compacto, F é semicontínua superiormente em x se, e só se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B_X(x, \delta)$, $F(y) \subset B_Y(F(x), \varepsilon)$.

Por outro lado, uma aplicação multívoca $F: X \to Y$ é dita *semicontínua inferiormente* em $x \in D(F)$ se para todo $z \in F(x)$ e qualquer sequência $\{x_n\} \in D(F)$ convergindo à x em X, existir uma sequência $z_n \in F(x_n)$ que converge para z em Y. Quando F é semicontínua inferiormente em todo ponto $x \in D(F)$, dizemos que F é semicontínua inferiormente.

No caso unívoco as duas definições são equivalentes à continuidade da aplicação em x. Porém, há exemplos simples de funções multívocas que satisfazem um sem satisfazer o outro, e vice-versa.

Exemplo 2.7.2. Considere a função multívoca $F_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_1(x) = \begin{cases} [-1,+1], & \text{se } x \neq 0 \\ \{0\}, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

é semicontínua inferiormente em zero mas não é semicontínua superiormente em zero.

Por outro lado, a função multívoca $F_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } x \neq 0 \\ [-1,1], & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

é semicontínua superiormente em zero porém não semicontínua inferiormente em $x = 0$.

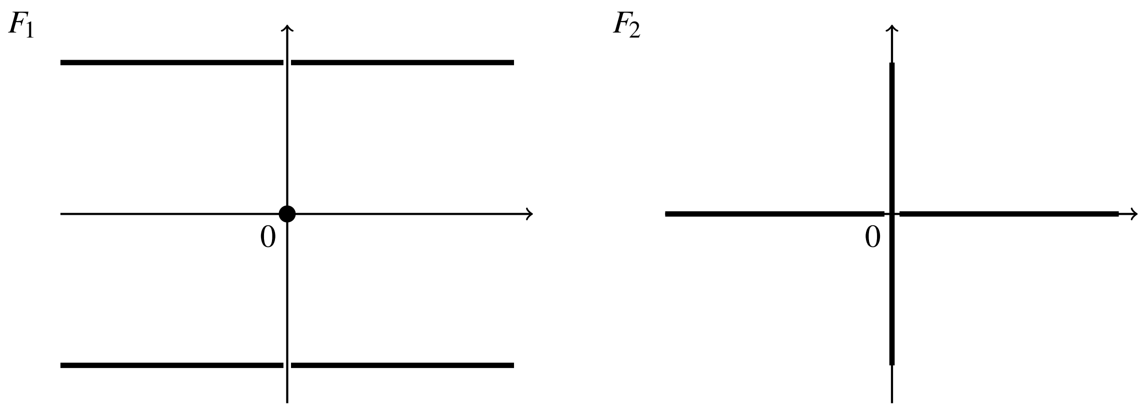

Figura 1 – Funções semicontínuas porém não contínuas

Definição 2.7.3. Se F é semicontínua superiormente e inferiormente em $x \in X$, então dizemos que F é contínua em x.

Vamos agora discutir brevemente inclusões diferenciais, algumas propriedades e resultados de existência serão enunciados sem provas. Trabalhamos com inclusões diferenciais da forma

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.7.1}$$

Vamos assumir que as imagens $F(x)$ são convexas. O caso não autônomo também pode ser tratado, porém como nosso trabalho foi voltado para o caso autônomo não iremos considerá-lo explicitamente.

Uma solução para o problema de Cauchy (2.7.1) no intervalo $[0,T]$ é uma função $x\colon [0,T] \to X$ absolutamente contínua para a qual (2.7.1) está satisfeita.

Se K é um fechado convexo, definimos por

$$m(K) \text{ é o elemento de } K \text{ com a menor norma.} \tag{2.7.2}$$

Diremos que uma solução da inclusão diferencial (2.7.1) é uma solução devagar se para quase todo $t \in [0,T]$, $x'(t) = m(F(x(t)))$. Uma aplicação φ é *localmente compacta* (respectivamente *localmente limitada*) se para cada ponto no domínio $D(\varphi)$ existe uma vizinhança que cuja imagem é um compacto (respectivamente um limitado).

Teorema 2.7.4. (AUBIN; CELLINA, 2012, Theorem 3, Chapter 2) Sejam X um espaço de Hilbert e $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ um aberto contendo $(0,x_0)$. Seja F uma aplicação semicontínua superiormente de Ω nos subconjuntos não vazios, fechados e convexos de X. Assumimos que $x \mapsto m(F(x))$ é localmente compacta. Então existe $T > 0$ e uma função absolutamente contínua x definida em $[0,T]$, solução para a inclusão diferencial (2.7.1).

Agora, vamos falar um pouco sobre semifluxos multívocos de forma abstrata. Também definiremos atratores globais neste contexto, a definição difere um pouco da usual. A construção abaixo pode ser encontrada, por exemplo, em (BALL, 1997; CARABALLO; MARÍN-RUBIO; ROBINSON, 2003; KAPUSTYAN; KASYANOV; VALERO, 2014) e (KAPUSTYAN; PANKOV; VALERO, 2012).

Seja X um espaço de Banach, em que 2^X denota o conjunto das partes de X e $\mathscr{P}(X)$ denota a coleção de todos subconjuntos não vazios de X. Considere $W^+ = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, X) = \{f\colon [0,\infty) \to X :\ \text{f é contínua}\}$ e seja $\mathscr{R} \subset W^+$ uma família de funções que satisfazem as seguintes hipóteses:

H1. Para cada $x \in X$ existe $\varphi \in \mathscr{R}$ tal que $\varphi(0) = x$.

H2. $\varphi^\tau(\cdot) = \varphi(\cdot + \tau) \in \mathscr{R}$, se $\varphi \in \mathscr{R}$, para todo $\tau \geq 0$;

H3. se φ_1, $\varphi_2 \in \mathscr{R}$ são tais que $\varphi_2(0) = \varphi_1(s)$, $s > 0$, então φ definida pondo

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & \text{se } t \leq s \\ \varphi_2(t-s), & \text{se } t > s, \end{cases}$$

pertence a $\mathscr{R}$;

H4. Se $\{\varphi_n\} \in \mathscr{R}$ é uma sequência tal que $\varphi_n(0) \to x_0$, para algum $x_0 \in X$, então existem uma subsequência e $\varphi_0 \in \mathscr{R}$ tal que $\varphi_{n_k}(t) \to \varphi_0(t)$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^+$.

Um semifluxo multívoco, ou m-semifluxo para encurtar, é uma aplicação $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ tal que

1. $G(0,x) = \{x\}$, para todo $x \in X$;
2. $G(t+s,x) \subseteq G(t,G(s,x))$, para todo $t,s \geq 0$ e $x \in X$.

Dizemos que o semifluxo multívoco é *estrito* se $G(t+s,x) = G(t,G(s,x))$, para todo $t,s \geq 0$ e x em X.

Dada uma família $\mathscr{R}$ em W^+ satisfazendo as hipóteses (H1)-(H2) podemos associar um m-semifluxo da seguinte maneira:

$$y \in G(t,x) \text{ se existir } \varphi \in \mathscr{R} \text{ tal que } y = \varphi(t) \text{ e } \varphi(0) = x. \tag{2.7.3}$$

Se (H3) for verdadeira também então G será um semifluxo multívoco estrito e se (H4) valer então $G(t,\cdot)\colon X \to \mathscr{P}(X)$ será semicontínua superiormente, assumindo valores compactos para cada $t \geq 0$.

Nesse sentido podemos ter duas definições de soluções globais, uma para a família de aplicações e outra para o semifluxo multívoco G. Veremos que elas coincidem, desde que as hipóteses (H1)-(H4) estejam satisfeitas.

Uma aplicação $\Phi\colon \mathbb{R} \to X$ é uma *solução global*, ou *trajetória completa*, de $\mathscr{R}$ se

$$\Phi(\cdot + h)|_{[0,\infty)} \in \mathscr{R}, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

Diremos que uma aplicação $\Phi\colon \mathbb{R} \to X$ é uma *solução global*, ou *trajetória completa*, de G se

$$\Phi(t+s) \in G(t,\Phi(s)) \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } t \geq 0.$$

Proposição 2.7.5. Se (H1)-(H2) são satisfeitas, então qualquer trajetória completa de $\mathscr{R}$ é uma trajetória completa de G. Reciprocamente, se (H1)-(H4) valem, então uma aplicação $\Phi\colon \mathbb{R} \to X$ é uma solução global de $\mathscr{R}$ se, e somente se, é um solução global de G.

Nosso intuito agora é definir atratores globais para m-semifluxos e, após isso, vamos definir o par atrator-repulsor no caso multívoco e propriedades que serão importantes no desenvolvimento da teoria.

Seja A um subconjunto de X. Então diremos que A é

- *invariante* se $A = G(t,A)$, para todo $t \geq 0$.
- *fracamente invariante*, ou *quasi-invariante*, se para todo $x \in A$, existe uma trajetória completa Φ de $\mathscr{R}$ cuja imagem está contida em A.
- *negativamente (positivamente) invariante* se $A \subset G(t,A)$ $(A \supset G(t,A))$ para todo $t \geq 0$.

Com isso, diremos que $\mathscr{A} \subset X$ é um *atrator global* para o semifluxo multívoco G se

(i) $\mathscr{A}$ é negativamente invariante;

(ii) $\mathscr{A}$ atrai qualquer limitado B de X, isto é,

$$\text{dist}(G(t,B),\mathscr{A}) \to 0, \text{ quando } t \to \infty;$$

(iii) é o conjunto fechado minimal que atrai limitados em X.

Observamos que se G é um m-semifluxo estrito, então o atrator global $\mathscr{A}$ é invariante. Mais ainda, se assumirmos as hipóteses (H1)-(H2) valem e ou (H3) ou (H4) é satisfeita, então podemos caracterizar o atrator global como a união das soluções globais limitadas. Mais precisamente, se $\mathbb{K}$ denota o subconjunto das soluções globais e limitadas de $\mathscr{R}$, então

$$\mathscr{A} = \{\Psi(0) : \Psi \in \mathbb{K}\}. \tag{2.7.4}$$

As definições de ω-limite e α-limite são similares ao caso unívoco. Se B é um subconjunto de X, então

$$\omega(B) = \{y \in X : \text{ existem sequências } t_n \to \infty \text{ e } y_n \in G(t_n,B) \text{ para a qual } y_n \to y\}.$$

Se $\varphi \in \mathscr{R}$, então $\omega(\varphi) = \{y \in X : \text{ existe uma sequência } t_n \to \infty \text{ tal que } \varphi(t_n) \to y\}$. E definimos o α-limite de uma solução global de maneira análoga, tomando sequências $t_n \to -\infty$.

Proposição 2.7.6. (BALL, 1997, Lemma 3.4 and Proposition 4.1) Seja G um m-semifluxo com atrator global $\mathscr{A}$. Se B é um subconjunto não vazio e limitado de X, então $\omega(B) \subset \mathscr{A}$ é não vazio, compacto, fracamente invariante e atrai B com sob ação de G.

É interessante e inerente dos semifluxos multívocos que os conjuntos ω-limite não sejam invariantes e sim fracamente invariantes, como pode ser visto na proposição acima. O exemplo abaixo diz respeito a este fato.

Exemplo 2.7.7. Considere a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in f(x(t)), \tag{2.7.5}$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} [-8x(x+1)^2, 2], & \text{se } x \in [-1,0], \\ -8x(x+1)^2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil ver que soluções de (2.7.5) geram um m-semifluxo G em $\mathbb{R}$ o qual possui dois pontos de fixos, a saber -1 e 0, isto é, a aplicação constante $\psi(t) \equiv 0$ é uma trajetória completa de G.

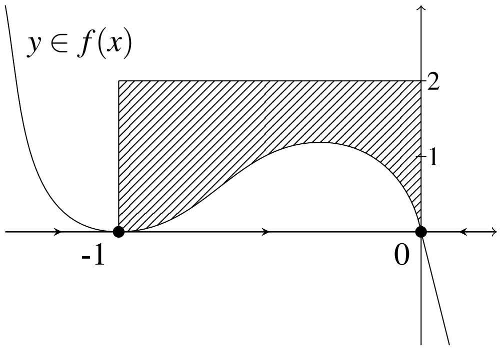

Figura 2 – O sistema (2.7.5)

Podemos verificar que G possui atrator global, que é o intervalo $\mathscr{A} = [-1,0]$. Definimos a trajetória γ em $[0,\infty)$, pondo

$$\gamma(t) = \begin{cases} -1+2t, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{se } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Não é difícil ver que γ é uma trajetória de G, que $\gamma(0) = -1$, porém $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$, isto implica que $0 \in \omega(-1)$. Em outras palavras, -1 é um ponto fixo do sistema mas mesmo assim o conjunto $\{-1\}$ não é invariante.

No restante da seção vamos assumir que G é um semifluxo multívoco definido por (2.7.3) e $\mathscr{R}$ é uma família satisfazendo as hipóteses (H1)-(H4). Suponhamos que G possui um atrator global compacto e invariante $\mathscr{A}$.

Agora vamos introduzir o conceito de atrator local. Dados um semifluxo multívoco G com atrator global $\mathscr{A}$, dizemos que um compacto A em $\mathscr{A}$ é um *atrator local* de G em $\mathscr{A}$, se existe uma vizinhança aberta $\mathscr{U}$ de A em $\mathscr{A}$ tal que $\omega(\mathscr{U}) = A$. Nestas condições vale que um atrator local A em $\mathscr{A}$ é invariante.

Definimos o *repulsor*, A^* associado ao atrator local A como

$$A^* = \{x \in \mathscr{A} : \omega(x) \backslash A \neq \emptyset\}.$$

A definição no caso multívoco foi dada primeiramente em (LI, 2007) e notemos que há uma diferença entre esta definição e a definição de repulsor no caso de semigrupos unívocos em (2.3.1). O mesmo se dá pois, em geral, a propriedade de invariância é mais rara nos semifluxos multívocos e os conjuntos limites são apenas fracamente invariantes, como visto no Exemplo 2.7.7. Observamos que quando G é um semifluxo unívoco, ou um semigrupo, as definições são equivalentes.

Terminaremos a seção com alguns lemas imporantes para o nosso desenvolvimento. As provas dos resultados abaixo podem ser encontradas em (COSTA; VALERO, 2016a).

Lema 2.7.8. Suponhamos que $\varphi_n \colon [-t_n,\infty) \to X$, em que a sequência $\{t_n\} \geq 0$ com $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ tais que $\varphi_n(\cdot - t_n)|_{[0,\infty)} \in \mathscr{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, suponhamos que $\{\varphi_n(t)\}$ é relativamente compacto para todo $t \in (-\infty, 0]$. Então existe uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ e uma trajetória completa Ψ de $\mathscr{R}$ tal que $\Psi = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t)$ uniformemente para limitados de $\mathbb{R}$.

Lema 2.7.9. Se $K \subset \mathscr{A}$ é um compacto invariante para o qual existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathscr{O}_\varepsilon(K) \cap \mathscr{A}$ é atraído por K, então dado $\delta \in (0, \varepsilon)$ existe um $0 < \delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathscr{O}_\delta(A)$.

Lema 2.7.10. Suponhamos que (A, A^*) seja um par atrator-repulsor em $\mathscr{A}$. As afirmações a seguri são verdadeiras:

- Se $M \subset \mathscr{A}$ um compacto para o qual $M \cap A^* = \emptyset$, então

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(G(t, M), A) = 0.$$

- A é um atrator local em X.

Lema 2.7.11. Suponhamos que (A, A^*) seja um par atrator repulsor em $\mathscr{A}$. Seja B é um fechado disjunto de A. Dado $\varepsilon > 0$, existe um $t_0 = t_0(\varepsilon, B)$ tal que quaisquer $x \in \mathscr{A}$ e $t \geq 0$ para os quais $G(t, x) \cap B \neq \emptyset$ temos $\operatorname{dist}(x, A^*) < \varepsilon$.

Lema 2.7.12. Suponhamos que (A, A^*) é um par atrator-repulsor no atrator global $\mathscr{A}$ e $\psi \in \mathbb{K}$ uma solução global limitada. Então valem:

1. se $x \notin A^*$, então $\omega(x) \subset A$;
2. se $\psi(0) \notin A$, então $\alpha(\psi) \subset A^*$;
3. se $\omega(\psi) \cap A^* \neq \emptyset$, então $\psi(\mathbb{R}) \subset A^*$;
4. se $\alpha(\psi) \cap A \neq \emptyset$, então $\psi(\mathbb{R}) \subset A$.

Diremos que um conjunto invariante fraco M é *isolado* em X se existe $\delta > 0$ tal que M é o invariante maximal em $\mathscr{O}_\delta(M)$. Para finalizar vamos enunciar mais dois resultados importantes sobre os repulsores de um par atrator-repulsor (A, A^*).

Lema 2.7.13. Seja (A, A^*) um par atrator-repulsor. Então A^* é compacto e fracamente invariante.

Lema 2.7.14. Se M é um isolado fracamente invariante em $\mathscr{A}$, então M é compacto.

2.8 A equação autônoma de Chafee-Infante

Vamos exemplificar a teoria exibida acima com a clássica equação de Chafee-Infante no domínio um-dimensional $[0, \pi]$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \lambda u - u^3, \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases} \tag{2.8.1}$$

Observamos que $f(s) := s - s^3$ satisfaz propriedades de crescimento comuns, como $sf(s) < 0$, para $s > 1$. Então a equação (2.8.1) gera um semigrupo em $H_0^1(0,\pi)$ e o funcional

$$\mathscr{L}(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2} - \int_\Omega F(u(x))dx, \text{ com } F(s) = \int_0^s f(r)dr, \tag{2.8.2}$$

é contínua de $H_0^1(0,\pi)$ em $\mathbb{R}$, não crescente ao longo de trajetórias e se $\mathscr{L}(u(t))$ é constante $u(t)$ também será constante. Isto é, $\mathscr{L}$ é um funcional de Lyapunov para o semigrupo das soluções de (2.8.1) e este é um sistema gradiente, o que significa que entenderemos a estrutura do atrator global se entendermos seu conjunto de equilíbrios.

Um equilíbrio de (2.8.1) deve ser uma solução da equação elíptica

$$\begin{cases} -u_{xx} = \lambda u - u^3 \\ u(0,t) = u(\pi,t) \end{cases} \tag{2.8.3}$$

e somos capazes de achar soluções para a equação acima considerando soluções da equação diferencial ordinária de dimensão dois

$$\begin{cases} u_x = v \\ v_x = -\lambda u + u^3. \end{cases} \tag{2.8.4}$$

Utilizaremos o plano de fase para estudarmos a equação acima, considerando x como uma variável de tempo. Primeiro observamos que

$$E(u,v) := \frac{v^2}{2} + \lambda u^2 - \frac{u^4}{4} \tag{2.8.5}$$

é constante ao longo de qualquer solução. O retrato de fase de (2.8.4) é mostrado na Figura 3, são trajetórias fechadas enquanto $0 \leq E(u,v) < \lambda^2/2$.

Devemos achar uma solução de (2.8.4) que satisfaça as condições de fronteira de (2.8.3), ou seja, precisamos de trajetórias que comecem com $u = 0$ (isto é, no eixo v) em $x = 0$ e que retornem ao eixo v quando $x = \pi$. Para um dado valor de energia E a velocidade na coordenada u é dada por

$$u_x = v = \sqrt{2E - \lambda u^2 + \frac{u^4}{2}}$$

e uma solução começando com $u = 0$ e $v = \sqrt{2E}$ move-se no sentido horário até atingir o eixo u em $u = u_0$, em que

$$E = \lambda\frac{u_0^2}{2} - \frac{u_0^4}{4}.$$

O 'tempo' $x(E)$ que a solução leva para atingir este ponto é dado por

$$x(E) = \int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2E - \lambda u^2 + \frac{u^4}{2}}} du. \tag{2.8.6}$$

Os pontos fixos de (2.8.4) satisfazem as seguintes propriedades da integral $x(E)$:

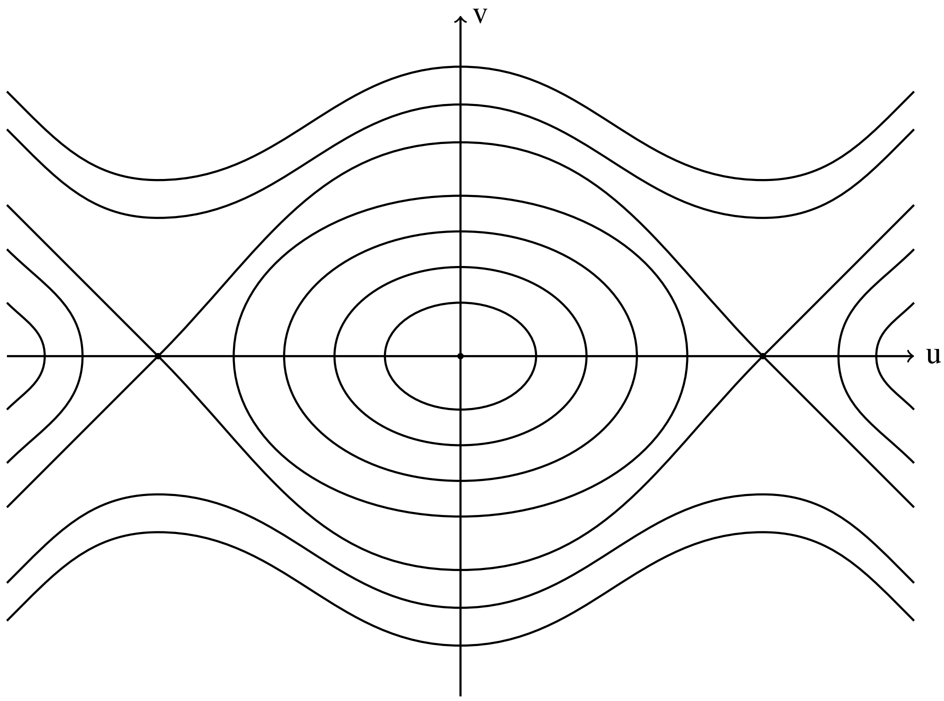

Figura 3 – Retrato de fase de (2.8.4)

1. $x(E) \to \infty$, quando $E \to \frac{\lambda^2}{4}$;
2. $x(E) \to \dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, quando $E \to 0^+$;
3. $x(E)$ é uma função estriamente crescente em E.

Em particular, segue que para $E \in (0, \frac{\lambda^2}{4})$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} < x(E) < \infty.$$

Para obter uma solução de (2.8.3) através de uma solução de (2.8.4), precisamos de uma solução com $2nx(E) = \pi$, para algum inteiro n: circulamos ao redor da origen $n/2$ vezes, terminando a trajetória de volta no eixo v. Para encontrar o número de pontos fixos da equação (2.8.1), devemos então encontrar o número de distintos E para os quais $2nx(E) = \pi$.

Primeiramente, se $\lambda < 1$, então $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} > \pi$, portanto a única solução que satisfaz os critérios é a origem. Isto corresponde ao equilíbrio $u \equiv 0$, o qual será denotado por ϕ_0.

Se $1 < \lambda < 2^2$, então os valores de $x(E)$ são limitados por baixo por $\pi/4$ mas incluem o valor $\pi/2$. Logo existem dois novos pontos fixos, correspondentes a órbitas que fazem meia volta. Denominamos tais soluções por $\phi_1^{\pm}$. Similarmente, se $2^2 < \lambda < 3^2$, então também temos órbitas que dão $3/2$ voltas em torno da origem, pois uma das órbitas possui $x(E) = \pi/6$, chamamos estas soluções de $\phi_2^{\pm}$ e temos cinco equilíbrios ao todo.

Continuamos esse processo e temos uma descrição completa dos pontos de equilíbrios do sistema.

Teorema 2.8.1. Se $n^2 < \lambda \leq (n+1)^2$, então existem $2n+1$ equilíbrios para a equação de Chafee-Infante (2.8.1), ϕ_0 e os n pares $\phi_j^{\pm}$, $j = 1, \ldots, n$. A função $\phi_j^{\pm}$ tem j zeros em $(0, \pi)$.

Como vimos que o sistema gerado pela equação de Chafee-Infante é gradiente, podemos afirmar então que seu atrator global, $\mathscr{A}$, é dado por

$$\mathscr{A} = \bigcup_{j=0}^{n} W^u(\phi_j^{\pm}),$$

com a convenção de que $\phi_0^{\pm} = 0$.

CAPÍTULO

3

EQUI-ATRAÇÃO E CONTINUIDADE DE SEMIFLUXOS SKEW-PRODUCT

No trabalho (BORTOLAN; CARVALHO; LANGA, 2014) os autores dão hipóteses que garantem a existência de atratores globais para semifluxos skew-product e relacionam tais atratores com as demais características assintóticas existentes no sistema, os atratores uniformes e atratores cociclo, por exemplo. No mesmo trabalho os autores também demonstram existência de estruturas do atrator global do semifluxo skew-product e dão condições para que estas estruturas sejam estáveis. Neste capítulo, alternativamente, demonstramos como obter estabilidade dos atratores globais do semifluxo skew-product através do conceito de equi-atração, o qual generalizamos para semifluxos skew-product, e comparamos a continuidade dos atratores para o semifluxo skew-product com a continuidade dos atratores uniformes e atratores de cociclo.

Na Seção 3.1 apresentamos uma definição de equi-atração para semifluxos skew-product e demonstramos a equivalência entre continuidade de atratores globais, incluindo resultados sobre taxas de convergência de atratores, na Subseção 3.1.2. Na Seção 3.2 desenvolvemos a definição de equi-atração em outros contextos de atratores não autônomos, na Subseção 3.2.1 apresentamos e demonstramos a relação entre equi-atração e continuidade para atratores uniformes, já na Subseção 3.2.2 tratamos dos atratores cociclo, que muito lembram os atratores pullback. Finalmente, na Seção 3.3 comparamos a continuidade das diferentes formas de estabilidade assintótica apresentada nas seções anteriores.

Começamos fixando a notação e hipóteses assumidas durante o capítulo. Sejam X um espaço de Banach e $(\mathscr{C},\rho)$ um espaço métrico completo em que atua um grupo $\{\theta(t): t\in\mathbb{R}\}$. Em $\mathscr{C}$ tomamos uma família de elementos, os quais denotamos por $\{\sigma_\eta\in\mathscr{C}:\eta\in[0,1]\}$, que satisfaz

$$\theta(t)\sigma_\eta\to\theta(t)\sigma_0,\ \text{quando}\ \eta\to 0^+,\ \text{uniformemente para}\ t\in\mathbb{R}. \tag{3.0.1}$$

Para $\eta\in[0,1]$, denotamos por $\Gamma_\eta=\{\theta(t)\sigma_\eta: t\in\mathbb{R}\}$ a órbita de σ_η por $\theta(\cdot)$. Seja Σ_η o fecho de Γ_η. Assumimos que

$$\Sigma := \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \Sigma_\eta} \text{ é compacto em } \mathscr{C}. \tag{3.0.2}$$

De (3.0.1) é fácil ver que a família de fechados $\{\Gamma_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é contínua em $\eta = 0$ em $\mathscr{C}$, isto é,

$$\operatorname{dist}_H(\Gamma_\eta, \Gamma_0) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0.$$

Suponhamos então que $\{(\varphi_\eta, \sigma)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ seja uma família de sistemas dinâmicos não-autônomos e definamos o semifluxo skew-product em $\mathbb{X}_\eta := X \times \Sigma_\eta$, $\pi_\eta(t)\colon \mathbb{X}_\eta \to \mathbb{X}_\eta$ como usual

$$\pi_\eta(t)(x,\sigma) = (\varphi_\eta(t,\sigma)x, \theta(t)\sigma).$$

Para cada $\eta \in [0,1]$ assumimos que existe atrator global $\mathbb{A}_\eta$ para o semifluxo skew-product correspondente. Consequentemente existe um atrator uniforme $\mathscr{A}_\eta = \Pi_X \mathbb{A}_\eta$, em que $\Pi_X\colon X \times \Sigma \to X$ denota a projeção na primeira coordenada, para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi_\eta, \theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$ em X.

Também podemos expressar o atrator global do semifluxo skew-product $\mathbb{A}_\eta$ no espaço cartesiano $\mathbb{X}_\eta$ por meio dos atratores cociclo. Para cada $\eta \in [0,1]$, sabemos que $\mathbb{A}_\eta \subset \mathscr{A}_\eta \times \Sigma_\eta$, contudo a igualdade em geral não é verdadeira. Suponhamos que exista atrator cociclo o para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi_\eta, \theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$, o qual é denotado por $\{A_\eta(\sigma) : \sigma \in \Sigma_\eta\}$, então (veja Teoremas 2.5.10 e 2.5.11 ou (CARABALLO *et al.*, 2013, Theorem 3.4) ou (KLOEDEN; RASMUSSEN, 2011, Propositions 3.30 e 3.31))

$$\mathbb{A}_\eta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} A_\eta(\sigma) \times \{\sigma\}.$$

Assumimos também que para a família $\{\sigma_\eta : \eta \in [0,1]\}$ temos, para cada $\eta \in [0,1]$

$$\mathbb{A}_\eta = \overline{\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta) \times \{\theta(\tau)\sigma_\eta\}}. \tag{3.0.3}$$

Observamos que a identidade (3.0.3) não precisa necessariamente ser satisfeita, pois não temos um controle sobre como se comportam elementos de Γ_η nem os atratores cociclo correspondentes. Contudo, o Lema abaixo nos dá uma condição suficiente para (3.0.3).

Lema 3.0.1. Com a nomenclatura acima, assumamos que (3.0.1) e (3.0.2) são satisfeitas e, ainda mais,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}(\varphi_\eta(t, \theta(\tau - t)\sigma_\eta)B, A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta)) = 0, \tag{3.0.4}$$

para qualquer limitado B em X. Então, o atrator global para o semifluxo skew-product é dado por

$$\mathbb{A}_\eta = \overline{\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta) \times \{\theta(\tau)\sigma_\eta\}}.$$

Demonstração. Uma das inclusões é trivial, uma vez que $A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta) \times \{\theta(\tau)\sigma_\eta\} \subset \mathbb{A}_\eta$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{A}_\eta$ é fechado em $X \times \Sigma_\eta$.

Reciprocamente, fixemos $(x,\sigma) \in \mathbb{A}_\eta$. Note que, da definição de Σ_η, existe uma sequência $\tau_k \in \mathbb{R}$ tal que $\theta_{\tau_k}\sigma_\eta \to \sigma$ em Σ_η. Devemos mostrar, então, que existe uma sequência $x_k \in A_\eta(\theta_{\tau_k}\sigma_\eta)$ de forma que $x_k \to x$ em X quando $k \to \infty$.

De fato, se $\{S^\eta_\sigma(t,s) : t \geq s\}$ denota o processo de evolução definido em (2.5.7), sabemos que $x \in A_\eta(\sigma)$, que é o atrator pullback para o processo de evolução $S^\eta_\sigma(\cdot,\cdot)$, no tempo $t=0$, portanto existe uma solução global $\gamma \colon \mathbb{R} \to X$ para $\{S^\eta_\sigma(t,s) : t \geq s\}$ tal que $\gamma(t) \in A_\eta(\theta(t)\sigma)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(0) = x$ e

$$S^\eta_\sigma(t,s)\gamma(s) = \gamma(t), \text{ para qualquer } t \geq s. \tag{3.0.5}$$

Observe que $\Gamma := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \gamma(t)$ é limitado. Logo de (3.0.4)

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}(\varphi_\eta(t,\theta(-t)\theta(\tau)\sigma_\eta)\Gamma, A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta)) = 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\Gamma,\varepsilon) > 0$ tal que para $t \geq t_0$

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \sup_{r\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}\big(\varphi_\eta(t,\theta(-t)\theta(\tau)\sigma_\eta)\gamma(r), A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta)\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para todo $r \in \mathbb{R}$, existe $x^k_r \in A_\eta(\theta(\tau_k)\sigma_\eta)$ com

$$\left\| \varphi_\eta(t_0,\theta(-t_0)\theta(\tau_k)\sigma_\eta)\gamma(r) - x^k_r \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.0.6}$$

Como $\theta(\tau_k)\sigma_\eta \to \sigma$ em Σ_η e para cada $\eta \in [0,1]$ o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$ é uniformemente contínuo em compactos de X, obtemos

$$\varphi_\eta(t_0,\theta(-t_0)\theta(\tau_k)\sigma_\eta)\gamma(r) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_\eta(t_0,\theta(-t_0)\sigma)\gamma(r)$$

uniformemente em $r \in \mathbb{R}$. Consequentemente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_0$,

$$\sup_{r\in\mathbb{R}} \left\| \varphi_\eta(t_0,\theta(-t_0)\theta(\tau_k)\sigma_\eta)\gamma(r) - \varphi_\eta(t_0,\theta(-t_0)\sigma)\gamma(r) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.0.7}$$

Unindo (3.0.6) e (3.0.7), escolhemos $r = -t_0$ e tomamos $x_k := x^k_{-t_0} \in A_\eta(\theta(\tau_k)\sigma_\eta)$, obtendo

$$\|\varphi_\eta(t_0,\theta(-t_0)\sigma)\gamma(-t_0) - x_k\| < \varepsilon. \tag{3.0.8}$$

Enfim, de (3.0.5), observando que $x = S^\eta_\sigma(0,-t_0)\gamma(-t_0) = \varphi_\eta(t_0,\theta(-t_0)\sigma)\gamma(-t_0)$, substituindo em (3.0.8) concluímos a prova do resultado. $\square$

3.1 Sobre semifluxos skew-product

Podemos agora, enunciar um conceito análogo para equi-atração no contexto de semifluxos skew-product. Observamos que semifluxos skew-product são, na verdade, semigrupos no espaço produto $X \times \Sigma_\eta$ e é possível que nos perguntemos se não podemos simplesmente aplicar os resultados conhecidos para semigrupos vistos na Seção 2.4 e, assim, continuidade e equi-atração seriam equivalentes. A diferença aqui é devida ao fato de que a família $\pi_\eta(\cdot)$ atua num espaço de fase que varia juntamente com o parâmetro $\eta \in [0,1]$.

É crucial na nossa análise que todos os espaços Σ_η em questão sejam subespaços de um espaço métrico fixo (que no caso das equações diferenciais não-autônomas é $\mathscr{C}_b(\mathbb{R} \times X, X)$), logo podemos comparar seus elementos em uma métrica convenientemente.

3.1.1 Equiatração e continuidade

Apresentaremos aqui resultados relativos à equivalência entre equi-atração e continuidade para semifluxos de tipo skew-product.

Suponhamos que os semifluxos skew-product safisfazem a seguinte hipótese de continuidade

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in K} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{d}(\pi_\eta(t)(x,\theta(\tau)\sigma_\eta), \pi_0(t)(x,\theta(\tau)\sigma_0)) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0, \tag{3.1.1}$$

para qualquer compacto K de X e $T > 0$.

Observe que $\pi_\eta(t)(x,\theta(\tau)\sigma_\eta)$ é um elemento de $\mathbb{X}_\eta$ enquanto $\pi_0(t)(x,\theta(\tau)\sigma_0)$ pertence a $\mathbb{X}_0$. Dessa maneira, como discursamos anteriormente, compararemos os elementos em $\mathbb{X} := X \times \Sigma$. Ainda mais, suponhamos que

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathbb{A}_\eta \text{ seja precompacto em } \mathbb{X}. \tag{3.1.2}$$

Definição 3.1.1. Dizemos que a família de atratores globais $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ da família de semifluxos skew-product $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrai limitados de X se para cada subconjunto limitado B de X tivermos

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\eta\in[0,1]} \sup_{x\in B} \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \mathrm{dist}(\pi_\eta(t)(x,\sigma), \mathbb{A}_\eta) \to 0. \tag{3.1.3}$$

Teorema 3.1.2. Suponhamos que a família de semifluxos skew-product $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ com atratores globais $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ satisfaça (3.1.1) e (3.1.2). Se $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrair limitados de X, então a família de atratores globais será contínua em $\eta = 0$, isto é,

$$\lim_{\eta\to 0} \mathrm{dist_H}(\mathbb{A}_\eta, \mathbb{A}_0) = 0.$$

Demonstração. Defina $\mathscr{B} = \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \Pi_X \mathbb{A}_\eta} \subset X$, de (3.1.2) sabemos que $\mathscr{B}$ é compacto em X. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\mathscr{B}, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \sup_{x\in\mathscr{B}} \operatorname{dist}(\pi_\eta(t)(x,\sigma), \mathbb{A}_\eta) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.1.4}$$

para $t \geq t_0$, da equiatração dos atratores globais.

Por outro lado, a pressuposição de continuidade (3.1.1) sobre os semifluxos implica que

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\mathbb{A}_\eta, \mathbb{A}_0) &\leq \operatorname{dist}(\pi_\eta(t_0)\mathbb{A}_\eta, \pi_0(t_0)[\mathscr{B}\times\Sigma_0]) + \operatorname{dist}(\pi_0(t_0)[\mathscr{B}\times\Sigma_0], \mathbb{A}_0) \\
&\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}\left(\pi_\eta(t_0)[\overline{A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta)\times\{\theta(\tau)\sigma_\eta\}}], \pi_0(t_0)[\mathscr{B}\times\Sigma_0]\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para o termo simétrico da distância de Hausdorff, note que

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_\eta) &= \operatorname{dist}(\pi_0(t_0)\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_\eta) \\
&\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}\left(\pi_0(t_0)[\overline{A_0(\theta(\tau)\sigma_0)\times\{\theta(\tau)\sigma_0\}}], \pi_\eta(t_0)[\mathscr{B}\times\Sigma_\eta]\right) \\
&\quad + \operatorname{dist}(\pi_\eta(t_0)[\mathscr{B}\times\Sigma_\eta], \mathbb{A}_\eta) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Devido a ambas desigualdades o teorema está provado. □

Enfatizamos novamente que não é uma tarefa fácil definir e provar um resultado como o anterior no caso em que a família de semigrupos é definida sobre espaços fase que variam com respeito ao parâmetro. O problema surge, no caso mais geral, do fato de que não é possível definir uma noção de continuidade de semigrupos. Uma característica do problema aqui abordado é que mesmo que o espaço de fase varie, existe um "supespaço" comum, o qual podemos fixar.

Tanto no caso de semigrupos quanto no de processos de evolução continuidade de atratores globais, em geral, não implica em equiatração. Para tal necessitamos informações adicionais sobre os semigrupos. A seguir adaptaremos tais definições para o caso de semifluxos skew-product.

Definição 3.1.3. A família de semifluxos skew-product $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ será dita uniformemente limitada se

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \bigcup_{t\geq 0} \pi_\eta(t)\,[B\times\Upsilon_\eta] \text{ for limitado em } X\times\Sigma \tag{3.1.5}$$

sempre que $B\subset X$ e $\Upsilon_\eta \subset \Sigma_\eta$ também forem limitados.

Observemos que no caso trabalhado pedimos para que $\bigcup_{\eta\in[0,1]}\Sigma_\eta$ seja precompacto em $\mathscr{C}$, logo também será limitado. Como cada Σ_η é invariante pela ação de $\theta(\cdot)$, se

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \bigcup_{t\geq 0} \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \varphi_\eta(t,\sigma)B \text{ for limitado,}$$

para todo B subconjunto limitado de X, então a família $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ será uniformemente limitada.

Definição 3.1.4. A família de semifluxos skew-product $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é dita coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ se, para quaisquer sequências $\{t_k\} > 0$, com $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{\eta_k\} \in (0,1]$, com $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{x_k\}$ limitada em X e $\sigma_k \in \Sigma_{\eta_k}$ para as quais a correspondente sequência $\{\pi_{\eta_k}(t_k)(x_k,\sigma_k)\}$ é limitada em $X \times \Sigma$, então a sequência $\{\pi_{\eta_k}(t_k)(x_k,\sigma_k)\}$ possui pelo menos uma subsequência convergente.

Novamente, como $\bigcup_{\eta\in[0,1]} \Sigma_\eta$ é precompacto em $\mathscr{C}$ e Σ_η é invariante pela ação de $\theta(\cdot)$, toda sequência $\{\sigma_k\}$ (ou $\{\theta(\tau_k)\sigma_k\}$) possui subsequência convergente. Com isto em vista, para verificar compacidade assintótica coletiva podemos nos preocupar apenas com o termo de $\{\pi_{\eta_k}(t_k)(x_k,\sigma_k)\}$ que está em X. Mais precisamente, se para quaisquer sequências $t_k \to \infty$ e $\{x_k\}$ limitada em X, para as quais a sequência correspondente $\{\varphi_{\eta_k}(t_k,\sigma_k)x_k\}$ seja limitada em X, tivermos que a sequência $\{\varphi_{\eta_k}(t_k,\sigma_k)x_k\}$ admite uma subsequência convergente, então a família de semifluxos skew-product será coletivamente assintoticamente compacta.

O resultado a seguir é a recíproca do Teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.5. Suponhamos que a família $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ seja uniformemente limitada e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e que a família de atratores globais correspondente, $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$, seja contínua em $\eta = 0$. Então a família de atratores globais $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ será equi-atratora.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que exista um $\varepsilon > 0$, sequências $\eta_k \to 0$, $t_k \to \infty$, $\tau_k \in \mathbb{R}$ e $\{x_k\} \subset X$ limitada tais que

$$\operatorname{dist}(\pi_{\eta_k}(t_k)(x_k,\theta(\tau_k)\sigma_\eta),\mathbb{A}_0) \geq \varepsilon, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1.6}$$

Note que a sequência pode ser tomada em $\{\theta(\tau)\sigma_{\eta_k} : \tau \in \mathbb{R}\}$ pois este conjunto é denso em Σ_{η_k} e os semifluxos skew-product são contínuos.

Observemos que

$$\mathscr{B} = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\geq 0} \pi_{\eta_k}(t)(x_k,\sigma_k)}$$

é limitado em $\mathbb{X}$ uma vez em que a família de semifluxos skew-product é uniformente limitada.

Fixemos $t > 0$. Seja $s_k := t_k - t > 0$, como a família de semifluxos skew-product é coletivamente assintoticamente compacta segue que $\{\pi_{\eta_k}(s_k)(x_k,\theta(\tau_k)\sigma_{\eta_k}) : k \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto. Assumamos então que $\pi_{\eta_k}(s_k)(x_k,\theta(\tau_k)\sigma_{\eta_k}) \to (b,\xi) \in \mathbb{X}_0$, na topogolgia de $X \times \Sigma$, quando $k \to \infty$.

Daí, por (3.1.1) e do anterior,

$$\begin{aligned}\pi_0(t)(b,\xi) &= \lim_{k\to\infty} \pi_{\eta_k}(t)\pi_{\eta_k}(s_k)(x_k,\theta(\tau_k)\sigma_{\eta_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \pi_{\eta_k}(t_k)(x_k,\theta(\tau_k)\sigma_{\eta_k}).\end{aligned}$$

Isto é, para qualquer $t>0$ dado, existe $(b,\xi)\in X\times\Sigma_0$ tal que $\operatorname{dist}(\pi_0(t)(b,\xi),\mathbb{A}_0)\geq\varepsilon$ e isso contradiz o fato de que $\mathbb{A}_0$ é o atrator global para o semifluxo $\pi_0(\cdot)$, concluindo a prova. $\square$

3.1.2 Taxas de convergência

Podemos usufruir da equi-atração para obter uma melhor estimativa e taxas sobre a convergência dos atratores globais no caso de semifluxos skew-product. Uma consequência do teorema para semigrupos.

Teorema 3.1.6. Suponhamos que $\pi_\eta(\cdot)$ é um semifluxo skew-product no espaço $\mathbb{X}_\eta$, com atrator global $\mathbb{A}_\eta$, $\eta\in[0,1]$, tal que $\mathbb{B}=\bigcup_{\eta\in[0,1]}\mathbb{A}_\eta\subset X\times\Sigma$ seja precompacto e definamos $\mathscr{B}=\Pi_X(\mathbb{B})\subset X$. Assuma que existe uma função decrescente $\zeta\colon[0,\infty)\to(0,\infty)$ tal que $\zeta(0)=\zeta_0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t)=0$ e

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \operatorname{dist}(\pi_\eta(t)[\mathscr{B}\times\Sigma_\eta],\mathbb{A}_\eta)\leq\zeta(t), \tag{3.1.7}$$

para todo $t\geq 0$.

Suponhamos também que

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\sup_{x\in\mathscr{B}} \mathrm{d}(\pi_\eta(t)(x,\theta(\tau)\sigma_\eta),\pi_0(t)(x,\theta(\tau)\sigma_0))\leq E_\eta(t), \text{ para todo } t\geq 0, \tag{3.1.8}$$

em que $E_\eta(t)\to 0$, quando $\eta\to 0$, para cada $t\geq 0$.

Então

$$\operatorname{dist}(\mathbb{A}_\eta,\mathbb{A}_0)\leq \inf_{\varepsilon\in(0,\zeta_0)} 2\left\{E_\eta(\zeta^{-1}(\varepsilon))+\varepsilon\right\}. \tag{3.1.9}$$

Demonstração. Fixemos $t\geq 0$. Lembremos que $\mathbb{A}_\eta=\pi_\eta(t)\mathbb{A}_\eta$ e que $\mathscr{B}=\Pi_X\mathbb{B}$ é precompacto em X. Logo

$$\operatorname{dist}(\mathbb{A}_\eta,\mathbb{A}_0)\leq\operatorname{dist}(\pi_\eta(t)\mathbb{A}_\eta,\pi_0(t)\mathbb{B})+\operatorname{dist}(\pi_0(t)\mathbb{B},\mathbb{A}_0).$$

Do Lema 3.0.1

$$\operatorname{dist}(\pi_\eta(t)\mathbb{A}_\eta,\pi_0(t)\mathbb{B})=\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\operatorname{dist}(\pi_\eta(t)\left[A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta)\times\{\theta(\tau)\sigma_\eta\}\right],\pi_0(t)\mathbb{B}).$$

Uma vez em que $\mathbb{B}\subset\bigcup_{\eta\in[0,1]}\mathscr{B}\times\Sigma_\eta$, as desigualdades acima asseguram-nos que

$$\operatorname{dist}(\mathbb{A}_\eta,\mathbb{A}_0)\leq E_\eta(t)+\zeta(t). \tag{3.1.10}$$

Analogamente, temos

$$\mathrm{dist}(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_\eta) \leq \mathrm{dist}(\pi_0(t)\mathbb{A}_0, \pi_\eta(t)[\mathscr{B} \times \Sigma_\eta]) + \mathrm{dist}(\pi_\eta(t)[\mathscr{B} \times \Sigma_\eta], \mathbb{A}_\eta). \tag{3.1.11}$$

Para completar a prova do teorema, de (3.1.10) e (3.1.11), escolhemos $\varepsilon \leq \zeta_0$ e $t = \zeta^{-1}(\varepsilon)$. □

Corolário 3.1.7. (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Corollary 3.20) Suponhamos, em adição às hipóteses do teorema anterior, que existam $c > 0$ e $v > 0$ para os quai $\zeta(t) = c\,\mathrm{e}^{-vt}$, $t \geq 0$, e que $E_\eta(t) = \rho(\eta)\mathrm{e}^{Lt}$, com $L > 0$ e $\rho\colon [0,1] \to [0,\infty)$ seja contínua com $\rho(0) = 0$.

Nesse caso, existe uma constante $\overline{c} > 0$ tal que

$$\mathrm{dist_H}(\mathbb{A}_\eta, \mathbb{A}_0) \leq \overline{c}\rho(\eta)^{\frac{v}{v+L}}.$$

3.2 Equiatração para sistemas não-autônomos

Nesta seção iremos tratar de equi-atração para duas interpretações de sistemas dinâmicos não autônomos, a saber: equi-atração no contexto de atratores uniformes, isto é, da dinâmica forward, e equi-atração para atratores cociclo, que está relacionado à dinâmica pullback do sistema. Ambos casos estão conectados à estrutura do atrator global do semifluxo skew-product, como pode ser observado pelos Teoremas 2.5.10 e 2.5.11.

3.2.1 Para atratores uniformes

O significado de equi-atração utilizado para atratores uniformes associados a uma família de sistemas dinâmicos não autônomos é definido a seguir:

Definição 3.2.1. Seja $\{(\varphi_\eta, \theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ uma família de sistemas dinâmicos não autônomos com atratores uniformes $\mathscr{A}_\eta$. Dizemos que a família $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ uniformemente equi-atrai limitados de X, se para todo subconjunto limitado $B \subset X$ tivermos

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\eta\in[0,1]} \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \mathrm{dist}(\varphi_\eta(t,\sigma)B, \mathscr{A}_\eta) = 0. \tag{3.2.1}$$

Chamamos de equi-atração uniforme uma vez em que o atrator uniforme de $(\varphi_\eta, \theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$ é o menor fechado de X que atrai uniformemente (para $\sigma \in \Sigma_\eta$) todos limitados de X.

Consideraremos uma família de sdn $\{(\varphi_\eta, \theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ com atratores uniformes $\mathscr{A}_\eta$, $\eta \in [0,1]$, e assumiremos que

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta \text{ é precompacto em } X. \tag{3.2.2}$$

Ainda mais, suponhamos que para todo compacto K de X e qualquer $T > 0$ vale uma hipótese de continuidade

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} \mathrm{d}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau)\sigma_\eta)x, \varphi_0(t,\theta(\tau)\sigma_0)x) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0^+. \tag{3.2.3}$$

A prova do resultado a seguir segue os mesmos passos do Teorema 3.1.2. Entretando há algumas diferenças sutis que requerem atenção. Vamos, por esta razão, prová-la.

Teorema 3.2.2. Suponhamos que a família de atratores uniformes $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ associada aos sistemas dinâmicos não autônomos $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ uniformemente equi-atrai limitados de X, ainda mais, assumamos que (3.2.2) e (3.2.3) são satisfeitas. Então a família de atratores uniformes é contínua em $\eta = 0$, isto é,

$$\mathrm{dist_H}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \to 0 \text{ quando } \eta \to 0. \tag{3.2.4}$$

Demonstração. Primeiramente, observamos que o subconjunto $\mathscr{B} = \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta}$ é limitado em X. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\varepsilon,\mathscr{B}) \geq 0$ tal que

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \mathrm{dist}(\varphi_\eta(t,\sigma)\mathscr{B}, \mathscr{A}_\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } t \geq t_0. \tag{3.2.5}$$

De (3.2.3) existe $0 < \eta_0 < 1$ tal que, para todo $\eta \leq \eta_0$,

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}\left(\varphi_\eta(t_0,\theta(\tau)\sigma_\eta)\mathscr{A}_\eta, \varphi_0(t_0,\theta(\tau)\sigma_0)\mathscr{B}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da propriedade da invariância elevada dos atratores uniformes (Definição 2.5.2) e o Lema 3.0.1, está claro que $\mathscr{A}_\eta \subseteq \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \varphi_\eta(t,\sigma)\mathscr{A}_\eta$, da continuidade do sistema dinâmico não autônomo $(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$ temos

$$\mathscr{A}_\eta \subseteq \overline{\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \varphi_\eta(t_0,\theta(\tau)\sigma_\eta)\mathscr{A}_\eta}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta,\mathscr{A}_0) &\leq \mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta, \cup_{\sigma\in\Sigma_0}\varphi_0(t_0,\sigma)\mathscr{B}) + \mathrm{dist}(\cup_{\sigma\in\Sigma_0}\varphi_0(t_0,\sigma)\mathscr{B}, \mathscr{A}_0)\\
&\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}(\varphi_\eta(t_0,\theta(\tau)\sigma_\eta)\mathscr{A}_\eta, \cup_{\sigma\in\Sigma_0}\varphi_0(t_0,\sigma)\mathscr{B}) + \sup_{\sigma\in\Sigma_0} \mathrm{dist}(\varphi_0(t_0,\sigma)\mathscr{B},\mathscr{A}_0)\\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para provar que $\mathrm{dist}(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\eta) \to 0$ quando $\eta \to 0$, usaremos argumentos similares. Como anteriormente, temos

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\eta) \leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}(\varphi_0(t_0,\theta(\tau)\sigma_0)\mathscr{A}_0, \cup_{\sigma\in\Sigma_\eta}\varphi_\eta(t_0,\sigma)\mathscr{A}_0) + \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \mathrm{dist}(\varphi_\eta(t_0,\sigma)\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\eta).$$

Atentamos de que, como em (3.2.5), equiatração implica que $\operatorname{dist}(\varphi_\eta(t_0,\sigma)\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\eta)\leq \varepsilon/2$, para todo $\sigma\in\Sigma_\eta$ e $\eta\in[0,1]$ e o primeiro termo da desigualdade pode ser estimado analogamente utilizando a hipótese de continuidade sobre os sistemas.

Por fim, teorema está demonstrado. $\square$

No intuito de provar a recíproca, como feito anteriormente, precisamos de mais uniformidade nas hipóteses sobre os sistemas dinâmicos não autônomos. A seguir iremos apresentar as definições necessárias para o resultado.

Definição 3.2.3. Uma família de sistemas dinâmicos não autônomos $\{(\varphi_\eta,\theta)_{X,\Sigma_\eta}:\eta\in[0,1]\}$ é chamada de uniformemente limitada se

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]}\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta}\bigcup_{t\geq 0}\varphi_\eta(t,\sigma)B \text{ for limitado,} \tag{3.2.6}$$

para qualquer limitado B de X.

Definição 3.2.4. Uma família de sistemas dinâmicos não autônomos $\{(\varphi_\eta,\theta)_{X,\Sigma_\eta}:\eta\in[0,1]\}$ é dita coletivamente assintoticamente compacta em $\eta=0$ se para quaisquer sequências $\eta_k\to 0$, $t_k\to\infty$, $\sigma_k\in\Sigma_{\eta_k}$ e $\{x_k\}\subset X$ limitada tais que $\{\varphi_{\eta_k}(t_k,\sigma_k)x_k\}$ também é limitado em X, então o conjunto $\{\varphi_{\eta_k}(t_k,\sigma_k)x_k:k\in\mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em X.

Mais precisamente, a compacidade e invariância de Σ implicam que as definições acima são equivalentes às definições para o semifluxo skew-product, como discutimos anteriormente na Seção 3.1.

Teorema 3.2.5. Considere uma família de sdn $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}:\eta\in[0,1]\}$ cujos atratores uniformes são denotados por $\mathscr{A}_\eta$, $\eta\in[0,1]$. Suponhamos que (3.2.3) é satisfeita e que a família de sdn é uniformemente limitada e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta=0$ e ademais que

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{H}}(\mathscr{A}_\eta,\mathscr{A}_0)\to 0, \text{ quando } \eta\to 0. \tag{3.2.7}$$

Então, para toda sequência $\{\eta_k\}$, com $\eta_k\xrightarrow{k\to\infty}0$, $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{A}_{\eta_k}}$ é compacto e a sequência $\{\mathscr{A}_{\eta_k}:k\in\mathbb{N}\}$ uniformemente equi-atrai limitados de X. Consequentemente, existe $\eta_0>0$ para o qual $\bigcup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathscr{A}_\eta$ é precompacto e a família $\{\mathscr{A}_\eta:\eta\in[0,\eta_0]\}$ uniformemente equi-atrai limitados de X.

Demonstração. Suponhamos por contradição que existem $\varepsilon>0$ e sequências $\eta_k\to 0$, $t_k\to\infty$, quando $k\to\infty$, $\tau_k\in\mathbb{R}$ e $\{x_k\}$ limitada em X tais que $\operatorname{dist}(\varphi_{\eta_k}(t_k,\theta(\tau_k)\sigma_{\eta_k})x_k,\mathscr{A}_0)\geq\varepsilon$, para todo $k\in\mathbb{N}$.

A família de sistemas dinâmicos não autônomos é uniformemente limitada, logo

$$B=\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{t\geq 0}\varphi_{\eta_k}(t,\theta(\tau_k)\sigma_{\eta_k})x_k} \text{ é limitado.}$$

Fixemos $t > 0$ e definamos a sequência $s_k := t_k - t > 0$. Da compacidade assintótica coletiva a sequência $\{\varphi_{\eta_k}(s_k, \theta_{\tau_k}\sigma_{\eta_k})x_k : k \in \mathbb{N}\}$ possui pelo menos uma subsequência convergente. Assuma, sem perda de generalidade, que $\varphi_{\eta_k}(s_k, \theta(\tau_k)\sigma_{\eta_k})x_k \to b$ em X, quando $k \to \infty$.

Segue da compacidade assintótica uniforme dos sistemas dinâmicos não-autônomos e de (3.2.3), que para todo $t > 0$ existem $b \in B$ e $\sigma \in \Sigma_0$ tais que

$$\mathrm{dist}(\varphi_0(t,\sigma)b, \mathscr{A}_0) \geq \varepsilon.$$

Isso contradiz o fato de que $\mathscr{A}_0$ é o atrator uniforme para o sdn $(\varphi_0, \theta)_{X,\Sigma_0}$ em X e conclui a prova do teorema. □

Uma interessante característica da equi-atração é que se tivermos uma limitação explícita para a atração, somos capazes de transferí-la e obtermos uma cota superior na distância de Haussdorf entre os atratores. Como esperado, também podemos provar um resultado similar no caso dos atratores uniformes.

Teorema 3.2.6. Consideremos uma família de sdn $\{(\varphi_\eta, \theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ com atratores uniformes $\mathscr{A}_\eta$ que verificam que $\mathscr{B} = \bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta$ é precompacto em X. Assumamos que existe uma função estritamente decrescente $\zeta : [0,\infty) \to (0,\infty)$ com $\zeta(0) = \zeta_0$ e $\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 0$ para a qual

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \mathrm{dist}(\varphi_\eta(t,\sigma), B, \mathscr{A}_\eta) \leq \zeta(t) \tag{3.2.8}$$

para todo $t \geq 0$. Suponhamos também que

$$\sup_{x\in\mathscr{B}} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{d}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau)\sigma_\eta)x, \varphi_0(t,\theta(\tau)\sigma_0)x) \leq E_\eta(t), \text{ para todo } t \geq 0, \tag{3.2.9}$$

em que $E_\eta(t) \to 0$, quando $\eta \to 0$, para cada t.

Então

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq \inf_{\varepsilon\in(0,\zeta_0]} 2\left\{E_\eta(\zeta^{-1}(\varepsilon)) + \varepsilon\right\}.$$

Demonstração. Primeiramente, fixamos $t \geq 0$. Note que $\mathscr{A}_\eta \subset \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \varphi_\eta(t,\sigma)\mathscr{A}_\eta$, então temos

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau)\sigma_\eta)\mathscr{A}_\eta, \cup_{\sigma\in\Sigma_0}\varphi_0(t,\sigma)\mathscr{B}) + \mathrm{dist}(\cup_{\sigma\in\Sigma_0}\varphi_0(t,\sigma)\mathscr{B}, \mathscr{A}_0).$$

De (3.2.9) obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau)\sigma_\eta)\mathscr{A}_\eta, \cup_{\sigma\in\Sigma_0}\varphi_0(t,\sigma)\mathscr{B}) &\leq \sup_{x\in\mathscr{B}} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathrm{d}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau)\sigma_\eta)x, \varphi_0(t,\theta(\tau)\sigma_0)x) \\ &\leq E_\eta(t).\end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathrm{dist}(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) \leq E_\eta(t) + \zeta(t)$.

Observe também que

$$\operatorname{dist}(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\eta) \leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}}\sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \operatorname{dist}(\varphi_0(t,\theta(\tau)\sigma_0)\mathscr{A}_0, \varphi_\eta(t,\sigma)\mathscr{A}_0) + \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \operatorname{dist}(\varphi_\eta(t,\sigma)\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_\eta).$$

Escolhendo $\varepsilon \leq \zeta_0$ e fazendo $t = \zeta^{-1}(\varepsilon)$ combinamos as desigualdades acima para deduzir

$$\operatorname{dist}_H(\mathscr{A}_\eta,\mathscr{A}_0) \leq \inf_{\varepsilon\in(0,\zeta_0]} 2\left\{E_\eta(\zeta^{-1}(\varepsilon))+\varepsilon\right\},$$

como foi afirmado. □

Corolário 3.2.7. Em adição às hipóteses do teorema anterior, suponhamos que existam $c > 0$ e $\nu > 0$ tais que $\zeta(t) = c\,\mathrm{e}^{-\nu t}$, $t \geq 0$, e $E_\eta(t) = \rho(\eta)\mathrm{e}^{Lt}$, com $L > 0$ e $\rho\colon [0,1] \to [0,\infty)$ uma função contínua com $\rho(0) = 0$. Então, existe uma constante $\bar{c} > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{H}}(\mathscr{A}_\eta,\mathscr{A}_0) \leq \bar{c}\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}. \tag{3.2.10}$$

3.2.2 Equiatração para atratores cociclo e pullback

Nesta seção discutiremos equi-atração agora no contexto dos atratores cociclo. Alguns resultados neste tópico já foram obtidos e podem ser encontrados na literatura, veja, por exemplo, (CARABALLO *et al.*, 2013; CARABALLO; MARÍN-RUBIO; ROBINSON, 2003; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012; CHEPYZHOV; VISHIK, 2002; LI; KLOEDEN, 2004; KLOEDEN, 2003; KLOEDEN; RASMUSSEN, 2011; ROBINSON, 2001).

Assumiremos que $\{\theta(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo sobre Σ_η, para cada $\eta \in [0,1]$, o qual é compacto e invariante. Suponhamos também que $\bigcup_{\eta\in[0,1]}\Sigma_\eta$ é precompacto e que o conjunto não autônomo compacto $\{A_\eta(\sigma) : \sigma \in \Sigma_\eta\}$ denota o atrator cociclo para cada $\eta \in [0,1]$. Lembramos que, nestas condições, $\mathscr{A}_\eta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} A_\eta(\sigma)$.

A equi-atração uniforme dos atratores cocilco é de certa forma mais forte que a atração dos atratores uniformes. Isso ficará claro adiante, uma vez em que a continuidade de atratores cociclo implica na continuidade dos atratores uniformes, porém a recíproca em geral não é verdadeira.

Uma família de atratores cociclo está muito relacionada com os atratores pullback. Para ser mais preciso, se consideramos, para $\sigma \in \Sigma_\eta$, o processo de evolução

$$S^\eta_\sigma(t,s) = \varphi_\eta(t-s,\theta(s)\sigma), \text{ para } t \geq s, \tag{3.2.11}$$

então se $S^\eta_\sigma(\cdot,\cdot)$ tem um único atrator pullback $\{A_\sigma(t) : t \in \mathbb{R}\}$, não é difícil ver que $A_\sigma(t) = A_\eta(\theta(t)\sigma)$, em que o da direita denota o atrator cociclo descrito anteriormente.

Vamos definir equi-atração para uma família de atratores cociclo $\{A_\eta(\sigma) : \sigma \in \Sigma_\eta\}$. De fato, esta não é a mesma equi-atração para processos de evolução (Definição 2.4.6), uma vez em que pedimos uma uniformidade com respeito à família de processos. Por sua vez, isso garantirá uniformidade na continuidade dos atratores.

Definição 3.2.8. Sejam $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ uma família de sistemas dinâmicos não autônomos e para cada $\eta \in [0,1]$ o conjunto não autônomo $\{A_\eta(\sigma) : \sigma \in \Sigma_\eta\}$ denota o correspondente atrator cociclo. Dizemos que a família de atratores cociclo $\{A_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$, uniformemente pullback equi-atrai limitados de X se

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\eta\in[0,1]} \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \operatorname{dist}(\varphi_\eta(t,\theta(-t)\sigma)D, A_\eta(\sigma)) = 0, \tag{3.2.12}$$

para todo subconjunto limitado $D \subset X$.

Ainda mais, podemos relacionar a Definição 3.2.8 com a Definição 3.2.1, uma vez em que $\mathscr{A}_\eta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} A_\eta(\sigma)$. Lembre que $\theta(\cdot)$ é um grupo sobre Σ_η, que é invariante. Portanto, para todo t fixado, conforme variamos $\theta(-t)$ em Σ_η, estamos percorrendo todo Σ_η, e podemos muito bem trocar o supremo de $\theta(-t)\sigma$ em (3.2.12) por $\sigma \in \Sigma_\eta$ para obter que a família de atratores uniformes $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ equi-atrai limitados de X. A recíproca, entretanto, não é essencialmente verdadeira, pois a atração da união $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} A_\eta(\sigma)$ não garante que cada fibra do conjunto não autônomo $A_\eta(\sigma)$ atrai limitados pela ação de σ.

Como anteriormente, equi-atração pullback implica em continuidade de atratores cociclo.

Teorema 3.2.9. Suponhamos que a família $\{A_\eta(\theta_\tau\sigma_\eta) : \tau \in \mathbb{R}, \eta \in [0,1]\}$ uniformemente pullback equi-atrai conjuntos limitados de X, que $\bigcup_{\eta\in[0,1]}\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta} A_\eta(\sigma)$ é precompacto em X e que para todo subconjunto compacto $K \subset X$ temos

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} \mathrm{d}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau)\sigma_\eta)x, \varphi_0(t,\theta(\tau)\sigma_0)x) \to 0 \text{ quando } \eta \to 0^+. \tag{3.2.13}$$

Então

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}_{\mathrm{H}} \left(A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta), \mathscr{A}_0(\theta(\tau)\sigma_0)\right) \to 0, \text{ quando } \eta \to 0.$$

Para a prova do teorema acima referimos o leitor a (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2009) ou (LI; KLOEDEN, 2004), pois ela é de certa forma análoga às provas dos teoremas 3.1.2 e 3.2.2. Observemos que utilizando processos de evolução é fácil mostrar que a família $\{A_\eta(\sigma_\eta) : \eta \in [0,1]\}$ é contínua em $\eta = 0$. Portanto, por (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2009, Theorems 2.11 e 3.3) e pela hipótese de uniformidade, obtemos que a família $\{A_\eta(\theta(t)\sigma_\eta) : \eta \in [0,1]\}$ é contínua em $\eta = 0$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.10. Dizemos que uma família de sdn $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ é coletivamente pullback assintoticamente compacta em $\eta = 0$ se para quaisquer sequências $\eta_k \to 0$, $t_k \to \infty$, $\sigma_k \in \Sigma_{\eta_k}$ e $\{x_k\} \subset X$ limitada tais que $\{\varphi_{\eta_k}(t_k,\theta(-t_k)\sigma_k)x_k\}$ também é limitada em X, então o conjunto $\{\varphi_{\eta_k}(t_k,\theta(-t_k)\sigma_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em X.

Teorema 3.2.11. Seja $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta \in [0,1]\}$ uma família de sistemas dinâmicos não autônomos com atratores cociclo denotados por $\{A_\eta(\sigma) : \sigma \in \Sigma_\eta\}$, $\eta \in [0,1]$. Suponhamos que (3.2.13) valha para cada compacto K de X e $T > 0$.

Se $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}:\eta\in[0,1]\}$ é uma família uniformemente limitada (Definição 3.2.3) e coletivamente pullback assintoticamente compacta e além disso

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{dist_H}(A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta),\mathscr{A}_0(\theta(\tau)\sigma_0))\to 0,\text{ quando }\eta\to 0,\tag{3.2.14}$$

então existe $\eta_0>0$ tal que

$$\bigcup_{\eta\in[0,\eta_0]}\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}}A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta)\text{ é precompacto,}$$

e a família de atratores cociclo $\{A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta):\tau\in\mathbb{R},\eta\in[0,\eta_0]\}$ uniformemente pullback equi-atrai limitados de X.

Como a prova do teorema acima segue os mesmos passos do que já fizemos aqui, nos Teoremas 3.1.5 e 3.2.5, não a apresentaremos.

Como era de se esperar, a taxa da equi-atração também é transferida para a proximidade dos atratores cociclo. Isso é o que enuncia o próximo teorema.

Teorema 3.2.12. Seja $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}:\eta\in[0,1]\}$ uma família de sistemas dinâmicos não autônomos tal que $\theta(\cdot)$ é um grupo em Σ_η para cada $\eta\in[0,1]$. Suponhamos que $\{A_\eta(\sigma):\sigma\in\Sigma_\eta\}$ denote o atrator cociclo para $(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$ e que $\mathscr{B}=\bigcup_{\eta\in[0,1]}\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\eta}A_\eta(\sigma)$ seja precompacto em X.

Assuma que exista uma função estritamente decrescente $\zeta:[0,\infty)\to(0,\infty)$ com $\zeta(0)=\zeta_0$ e $\lim_{s\to\infty}\zeta(s)=0$ tal que

$$\sup_{\eta\in[0,1]}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{dist}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau-t)\sigma\eta)\mathscr{B},A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta))\leq\zeta(t),\tag{3.2.15}$$

para todo $t\geq 0$. Ademais, suponha que

$$\sup_{x\in\mathscr{B}}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{d}(\varphi_\eta(t,\theta(\tau-t)\sigma_\eta)x,\varphi_0(t,\theta(\tau-t)\sigma_0)x)\leq E_\eta(t),\text{ para todo }t\geq 0,\tag{3.2.16}$$

com $E_\eta(t)\to 0$, quando $\eta\to 0$, para cada $t\geq 0$.

Então

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{dist_H}(A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta),\mathscr{A}_0(\theta(\tau)\sigma_0))\leq\inf_{\varepsilon\in(0,\zeta_0]}2\left\{E_\eta(\zeta^{-1}(\varepsilon))+\varepsilon\right\}.\tag{3.2.17}$$

A demonstração do teorema é análoga às provas dos Teoremas 3.1.6 e 3.2.6.

Corolário 3.2.13. Em adição às hipóteses do teorema anterior, suponhamos que existam $c>0$ e $\nu>0$ tais que $\zeta(t)=c\mathrm{e}^{-\nu t}$, $t\geq 0$, e que $E_\eta(t)=\rho(\eta)\mathrm{e}^{Lt}$, com $L>0$ e $\rho:[0,1]\to[0,\infty)$ é uma função contínua com $\rho(0)=0$. Então existe uma constante $\bar{c}>0$ tal que

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{dist_H}(A_\eta(\theta(\tau)\sigma_\eta),A_0(\theta(\tau)\sigma_0))\leq\bar{c}\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}.\tag{3.2.18}$$

3.3 A relação entre continuidade dos distintos atratores

Nesta seção compararemos a continuidade entre os diferentes tipos de atratores mencionados anteriormente. Sabemos como a existência de atratores globais para semifluxos skew-product são quase equivalentes à existência de atratores uniformes e cociclo para sistemas dinâmicos não autônomos. Nosso interesse agora é, se todos eles existem, continuidade global de atratores para semifluxos skew-product implica em continuidade para a família de atratoers uniformes? Certamente a recíproca também é uma questão interessante.

Dada uma família de sistemas dinâmicos não autônomos $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)} : \eta\in[0,1]\}$ seja $\{\pi_\eta(\cdot):\eta\in[0,1]\}$ a família de semifluxos skew-produt associada. Assumamos que para cada $\eta\in[0,1]$ existe atrator global para o semifluxo skew-product $\mathbb{A}_\eta\subset X\times\Sigma_\eta$ e que existe um espaço $\mathscr{C}$ tal que $\Sigma_\eta\subset\mathscr{C}$, para todo η. Isso implica que $\mathscr{A}_\eta=\Pi_X\mathbb{A}_\eta$ é o atrator uniforme para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$ e que o conjunto não autônomo $\{A_\eta(\sigma):\sigma\in\Sigma\}$ definido por $A_\eta(\sigma):=\{x\in X:(x,\sigma)\in\mathbb{A}_\eta\}$ é o atrator cociclo (ver Teoremas 2.5.10 e 2.5.11 ou (CARABALLO *et al.*, 2013, Theorem 3.4)).

O espaço fase Σ_η é definido como o fecho de uma dada órbita, isto é, existe $\sigma_\eta\in\Sigma_\eta$ para o qual $\Sigma_\eta=\overline{\{\theta(t)\sigma_\eta : t\in\mathbb{R}\}}$ e, ainda mais, $\Sigma=\bigcup_{\eta\in[0,1]}\Sigma_\eta$ é compacto. Também assumimos que

$$\theta(t)\sigma_\eta\to\theta(t)\sigma_0,\ \text{quando}\ \eta\to 0, \tag{3.3.1}$$

uniformemente em $t\in\mathbb{R}$. Daí, é fácil ver que a família $\{\Sigma_\eta:\eta\in[0,1]\}$ é contínua em $\eta=0$.

Finalmente, suponhamos que para cada $\eta\in[0,1]$ temos

$$\mathbb{A}_\eta=\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}}A_\eta(\theta(t)\sigma_\eta)\times\{\theta(t)\sigma_\eta\}}. \tag{3.3.2}$$

Assumimos que o semifluxo skew-product desfruta de um tipo de continuidade quando $\eta\to 0$, mais precisamente, suponhamos que para cada compacto K de X e $T>0$

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in K}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{d}\big(\pi_\eta(t)(x,\theta(\tau)\sigma_\eta),\pi_0(t)(x,\theta(\tau)\sigma_0)\big)\to 0,\ \text{quando}\ \eta\to 0. \tag{3.3.3}$$

Ainda mais, assuma que

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]}\mathbb{A}_\eta\subset X\times\Sigma\ \text{é precompacto.} \tag{3.3.4}$$

Lema 3.3.1. Se $\{\pi_\eta(\cdot):\eta\in[0,1]\}$ é uma família de semifluxos skew-product associada aos sistemas dinâmicos não autônomos $\{(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}:\eta\in[0,1]\}$ com atratores globais $\mathbb{A}_\eta$, $\eta\in[0,1]$, que satisfazem (3.3.3) e (3.3.4), então a família $\{\mathbb{A}_\eta:\eta\in[0,1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta=0$.

O lema anterior é uma consequência do resultado para semigrupos, ver Teorema 2.2.3.

Proposição 3.3.2. Suponhamos que a família de atratores globais $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ para o semifluxo skew-product seja contínua em $\eta = 0$. Então a família de atratores uniformes $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ também será contínua em $\eta = 0$. O mesmo vale para o semigrupo diretor, isto é, $\mathrm{dist}_\mathrm{H}(\Sigma_\eta, \Sigma_0) = 0$.

Demonstração. Note que para cada $\eta \in [0,1]$ temos $\mathbb{A}_\eta \subset \mathscr{A}_\eta \times \Sigma_\eta$. Daí,

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(\mathbb{A}_\eta, \mathbb{A}_0) &\geq \mathrm{dist}(\mathbb{A}_\eta, \mathscr{A}_0 \times \Sigma_0)\\ &= \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \sup_{x\in A_\eta(\sigma)} \mathrm{dist}\big((x,\sigma), \mathscr{A}_0 \times \Sigma_0\big)\\ &= \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \sup_{x\in A_\eta(\sigma)} [\mathrm{dist}(x, \mathscr{A}_0) + \mathrm{dist}(\sigma, \Sigma_0)]\end{aligned}$$

Portanto, como a família $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua superiormente devemos ter $\mathrm{dist}(\Sigma_\eta, \Sigma_0) \to 0$, e também $\mathrm{dist}(\cup_{\sigma\in\Sigma_\eta} A_\eta(\sigma), \mathscr{A}_0) \to 0$. Isto é, as famílias $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ e $\{\Sigma_\eta : \eta \in [0,1]\}$ são semicontínuas superiormente.

Na equação acima, note que podemos trocar $\mathbb{A}_\eta$ com $\mathbb{A}_0$ e obter as mesmas estimativas. Assim sendo, semicontinuidade inferior da família $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ implica em semicontinuidade inferior das famílias $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ e $\{\Sigma_\eta : \eta \in [0,1]\}$. Concluindo, dessa maneira, a prova do lema. □

Corolário 3.3.3. Suponhamos que $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ é uma família de semifluxos skew-product, com atratores globais $\mathbb{A}_\eta$, que verificam (3.3.2), (3.3.3) e (3.3.4). Então a família de atratores uniformes, $\mathscr{A}_\eta$, para o sistema dinâmico não-autônomo $(\varphi_\eta, \theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. A prova é uma consequência imediata do Lema 3.3.1 e da Proposição 3.3.2. □

Contudo, para assegurar que a família de atratores globais $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ para o semifluxo skew-product seja semicontínua inferiormente em termos dos atratores uniformes precisamos de mais informações sobre a estrutura dos atratores cociclo.

Proposição 3.3.4. Seja $\{\pi_\eta(\cdot) : \eta \in [0,1]\}$ uma família de semifluxos skew-product, com atratores globais $\mathbb{A}_\eta$, que satisfazem (3.3.2), (3.3.3) e (3.3.4). Mais ainda, suponhamos que a família $\{A_\eta(\theta(t)\sigma_\eta) : \eta \in [0,1]\}$ de atratores cociclo seja semicontínua inferiormente em $\eta = 0$ uniformemente com respeito a $t \in \mathbb{R}$. Então a família de atratores globais para o semifluxo skew-product $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ será semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Note que, de (3.3.2), temos

$$\mathrm{dist}(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_\eta) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}(A_0(\theta(t)\sigma_0) \times \{\theta(t)\sigma_0\}, \mathbb{A}_\eta) \tag{3.3.5}$$

Como as famílias $\{\Sigma_\eta : \eta \in [0,1]\}$ e $\{\mathbb{A}_\eta(\theta_t\sigma_\eta) : \eta \in [0,1]\}$ são semicontínuas inferiormente em $\eta = 0$, uniformemente em $t \in \mathbb{R}$, somos capazes de concluir que $\operatorname{dist}(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_\eta) \to 0$, quando $\eta \to 0$, uma vez em que o lado direito de (3.3.5) é controlado pela semicontinuidade inferior dos atratores cociclo. $\square$

A proposição anterior mostra mais uma vez o quão é delicado a prova da semicontinuidade inferior. É necessário que tenhamos como hipótese que o atrator global do semifluxo skew-product se decomponha em conjuntos e que por sua vez estes se comportem de forma semicontínua inferior. Há então uma grande relação com a Proposição 3.3.4 com os Teoremas 2.2.4 e 2.2.6.

3.4 Aplicação

Finalizaremos o capítulo com uma aplicação da teoria anterior a uma perturbação não autônoma de um sistema dinâmico autônomo.

Mais precisamente, considere o problema semilinear no espaço de Banach X

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\eta(t,x) \\ x(0) = x_0 \in X. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Assumimos que para cada $\eta \in [0,1]$ a função $f_\eta : \mathbb{R} \times X \to X$ é contínua e uniformemente Lipschitz para $t \in \mathbb{R}$ em limitados de X. Logo o problema (3.4.1) é localmente bem posto. Ainda mais, $f_\eta \in C_b(\mathbb{R} \times X, X)$ e para $\tau \in \mathbb{R}$ definamos

$$\theta(\tau)f(t,x) := f(t+\tau,x), \text{ para } (t,x) \in \mathbb{R} \times X$$

e defina $\Sigma_\eta := \overline{\{\theta(t)f_\eta : t \in \mathbb{R}\}}$.

Assuma que $f_0(t,x) = f_0(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$ (logo $\Sigma_0 = \{f_0\}$), que $\theta(\cdot)$ seja um grupo em cada Σ_η, que é compacto para todo $\eta \in [0,1]$ e que

$$\bigcup_{\eta \in [0,1]} \Sigma_\eta \text{ é precompacto em } C_b(\mathbb{R} \times X, X).$$

Ainda mais, assumamos que a perburbação satisfaça, para cada $r > 0$,

$$\limsup_{\eta \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in B(0,r)} \|f_\eta(t,x) - f_0(x)\|_X + \|D_x f(t,x) - D_x f_0(x)\|_{\mathscr{L}(X)} = 0. \tag{3.4.2}$$

Segue de (3.4.2) que

$$\limsup_{\eta \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in B(0,r)} \sup_{\sigma_\eta \in \Sigma_\eta} \|\sigma_\eta(t,x) - f_0(x)\|_X + \|D_x \sigma(t,x) - D_x f_0(x)\|_{\mathscr{L}(X)} = 0. \tag{3.4.3}$$

Consideramos então o problema não autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(t,x) \\ x(0) = x_0 \in X, \end{cases} \tag{3.4.4}$$

para $\sigma \in \Sigma_\eta$ e denotamos por $\varphi_\eta(t,\sigma)x_0 := x(t,\sigma,x_0)$ a solução de (3.4.4) no tempo t com função não autônoma σ. Portanto, por (3.4.2), é simples ver que para cada $T > 0$ e B limitado em X, temos

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\sigma\in\Sigma_\eta} \sup_{x\in B} \|\varphi_\eta(t,\sigma)x - \sigma_0(t)x\|_X \to 0, \text{ quando } \eta \to 0. \tag{3.4.5}$$

Podemos então definir o semifluxo skew-product $\pi_\eta(\cdot)\colon X\times\Sigma_\eta \to X\times\Sigma_\eta$ de maneira usual, isto é, para $(x,\sigma)\in X\times\Sigma_\eta$ e $t > 0$

$$\pi_\eta(t)(x,\sigma) = (\varphi(t,\sigma)x, \theta(t)\sigma).$$

Suponhamos, então, que existe atrator global, $\mathbb{A}_\eta$, associado a cada semifluxo skew-product $\pi_\eta(\cdot)$, $\eta\in[0,1]$. Consequentemente, sabemos que existe atrator uniforme para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi_\eta,\theta)_{(X,\Sigma_\eta)}$, $\mathscr{A}_\eta$, e ainda, que $\mathscr{A}_\eta = \Pi_X\mathbb{A}_\eta$, onde Π_X denota a projeção na primeira coordenada do espaço produto $X\times\Sigma_\eta$.

Ainda mais, podemos considerar o processo de evolução em X

$$S_\sigma^\eta(t,s)x := \varphi_\eta(t-s,\theta(s)\sigma)x, t\geq s. \tag{3.4.6}$$

Para cada $\sigma\in\Sigma_\eta$ existe um único atrator pullback, que coincide com a família de atratores cociclo, $\{A_\eta(\theta(t)\sigma) : t\in\mathbb{R}\}$ para (3.4.6).

Com estas hipóteses, denotando por $\varphi_0(\cdot)$ o semigrupo limite, isto é, gerado por (3.4.1) com $\eta = 0$, em X. Suponhamos que $\varphi_0(\cdot)$ seja gradiente, como na Definição 2.3.2, e que cada invariante isolado seja uma solução estacionária, denotaremos por $\{e_j^* : 1\leq j\leq n\}$. Se para a variedade instável de e_j^* vale que existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$ para o qual todo $0 < \eta < \eta_0$ existe uma solução global hiperbólica $\xi_{j,n}^*(\cdot)$ de $S_{f_\eta}^\eta$ com

$$\sup_{1\leq j\leq n} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi_{j,\eta}^*(t) - e_j^*\|_X < \varepsilon,$$

e para a variedade instável local de e_j^* vale que

$$\sup_{1\leq j\leq n} \operatorname{dist_H}\left(W_\delta^u(\xi_{j,\eta}^*(\cdot))(t), W_\delta^u(e_j^*)\right) < \varepsilon, \text{ para todo } t\in\mathbb{R},$$

isto é, as variedades insáveis locais se comportam de forma contínua. Então

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{dist_H}(A_\eta(\theta(t)f_\eta), \mathscr{A}_0) \to 0, \text{ quando } \eta\to 0. \tag{3.4.7}$$

Veja, por exemplo, (CARVALHO; LANGA, 2007, Theorem 8)

Portanto, como (3.4.7) vale, o Teorema 3.2.11 implica que a família $\{A_\eta(\theta(t)f_\eta) : t \in \mathbb{R}, \eta \in [0,1]\}$ uniformemente equi-pullback atrai limitados de X (como na Definição 3.2.8). Logo, a hipótese do Lema 3.0.1 é satisfeita e para cada $\eta \in [0,1]$, vale

$$\mathbb{A}_\eta = \overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_\eta(\theta(t)f_\eta) \times \{\theta(t)f_\eta\}}.$$

Consequentemente, graças à Proposição 3.3.4, a família de atratores globais para o semifluxo skew-product $\{\mathbb{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é contínua em $\eta = 0$ e, ainda mais, a família de atratores uniformes $\{\mathscr{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é também contínua em $\eta = 0$.

CAPÍTULO

4

DECOMPOSIÇÃO DE MORSE MULTÍVOCA

Neste Capítulo desenvolveremos a teoria dos sistemas dinamicamente gradientes e decomposição de Morse no contexto dos semifluxos multívocos, unindo as teorias apresentadas nas Seções 2.3 e 2.7. Saber a estrutura do atrator global é o primeiro passo para se obter estabilidade assintótica do sistema.

Na Seção 4.1 desenvolvemos a teoria com finitos compontentes de Morse e na Seção 4.2 desenvolvemos a teoria supondo um quantidade enumerável de invariantes fracos isolados.

Os trabalhos desenvolvidos nesta seção deram origem aos artigos (COSTA; VALERO, 2016a) e (COSTA; VALERO, 2016b) e abrem uma porta para a continuidade de atratores multívocos, uma vez em que com a estrutura de atratores para processos unívocos em (CARVALHO; LANGA, 2009) os autores demonstram continuidade dos atratores assumindo que o atrator limite é dinamicamente gradiente, tanto no caso autônomo quanto no caso não autônomo.

4.1 Semifluxos multívocos dinamicamente gradientes, decomposições de Morse e funções de Lyapunov

Assumiremos que X é um espaço de Banach e $\mathscr{R}$ uma família de funções em $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+,X)$ para a qual as hipóteses (H1)-(H4) da Seção 2.7 são satisfeitas. Ainda mais, supomos que existe um atrator global $\mathscr{A}$ para o semifluxo multívoco G, que é definido por (2.7.3). Relembramos que o atrator satisfaz (2.7.4), isto é, $\mathscr{A}$ é dado pela união de todas trajetórias completas e limitadas de $\mathscr{R}$. Nesta seção apresentaremos a prova da equivalência entre os três características dinâmicas de um semifluxo multívoco: a existência de uma função de Lyapunov conveniente, a propriedade da dinâmica gradiente e a existência de uma decomposição de Morse.

Suponhamos que exista uma família disjunta de isolados fracamente invariantes $\mathscr{M} = \{M_1,\dots,M_n\}$ em $\mathscr{A}$. Isto é, para cada $j \in \{1,\dots,n\}$ existe $\delta_j > 0$ para o qual $M_j \subset \mathscr{A}$ é o invariante fraco maximal em $\mathscr{O}_{\delta_j}(M_j)$ e existe $\delta > 0$ tal que $\mathscr{O}_\delta(M_j) \cap \mathscr{O}_\delta(M_k) = \emptyset$, se $j \neq k$.

Definição 4.1.1. Diremos que o m-semifluxo $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ é dinamicamente gradiente com respeito à família de invariantes fracos isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ se para cada trajetória completa e limitada ψ de $\mathscr{R}$ ou $\psi(\mathbb{R}) \subset M_j$, para algum j, ou $\alpha(\psi) \subset M_k$ e $\omega(\psi) \subset M_j$ com $1 \leq j < k \leq n$.

Definição 4.1.2. Diremos que o m-semifluxo $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ com uma família disjunta de fracamente invariantes isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ no atrator global $\mathscr{A}$ admite uma decomposição de Morse se existir uma sequência de atratores locais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = \mathscr{A}$ que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ satisfaz

$$M_k = A_k \cap A_{k-1}^*.$$

As definições acima são bem semelhantes às do caso singular e para provarmos a equivalência entre elas, como era-se de esperar, não precisamos de nenhum truque novo. No contexto de sistemas dinâmicos generalizados este resultado é visto em (LI, 2007).

Contudo, para definirmos corretamente uma função de Lyapunov precisamos lembrar que um semifluxo multívoco não é contínuo no sentido usual e graças a esse fato a construção de uma função de Lyapunov contínua se mostra uma tarefa extremamente complicada (apesar da função aparecer naturalmente em algumas aplicações (ARRIETA; RODRÍGUEZ-BERNAL; VALERO, 2006)). Portanto, definimos uma função de Lyapunov num sentido mais fraco do que no caso unívoco, pedimos apenas a semicontinuidade superior da aplicação e a continuidade é apenas verificada nos componentes M_k. Com tal definição somos capazes de demonstrar a equivalência entre os três conceitos dinâmicos.

Definição 4.1.3. Diremos que o m-semifluxo $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ associado à família disjunta de invariantes fracos isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ em $\mathscr{A}$ possui uma função de Lyapunov se existir uma aplicação $\mathscr{L}\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. para cada trajetória completa e limitada $\psi \in \mathbb{K}$ a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathscr{L}(\psi(t))$ é não decrescente;

2. $\mathscr{L}$ é constante em cada componente de Morse M_k;

3. $\mathscr{L}$ é semicontínua superiormente em qualquer $x \in \mathscr{A}$ e contínua em qualquer $x \in M_k$;

4. Se $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ for uma trajetória completa e limitada para a qual ou $\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}(\psi(0))$, para todo $t \geq 0$, ou $\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}(\psi(0))$, para todo $t \leq 0$, então necessariamente $\psi(0) \in M_k$, para algum $1 \leq k \leq n$.

Dividiremos a seção em três subseções. Em cada uma provaremos uma etapa da equivalência desejada. O objetivo principal é obter o teorema a seguir.

Teorema 4.1.4. Sejam G um semifluxo multívoco com atrator global $\mathscr{A}$ e $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ uma família disjunta de invariantes fracos isolados em $\mathscr{A}$. As seguintes propriedades são equivalentes:

1. G é dinamicamente gradiente com respeito a $\mathscr{M}$.
2. A família $\mathscr{M}$ gera uma decomposição de Morse para o atrator global $\mathscr{A}$.
3. Existe um funcional de Lyapunov $\mathscr{L} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ associado à família $\mathscr{M}$.

4.1.1 Dinâmica gradiente implica decomposição de Morse

Teorema 4.1.5. Suponhamos que G seja dinamicamente gradiente com respeito à família disjunta de invariantes fracos isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Então existe uma sequência de atratores locais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = \mathscr{A}$ que define uma decomposição de Morse de $\mathscr{A}$. Em particular, $M_1 = A_1$ é um atrator local.

Demonstração. Defina $A_0 = \emptyset$, $A_1 = M_1$ e para $k \geq 2$

$$A_k = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(M_j),$$

em que

$$W^u(M) = \{x \in \mathscr{A} : \text{ existe uma trajetória completa } \psi \in \mathbb{K} \text{ por } x \text{ tal que } \alpha(\psi) \subset M\}, \quad (4.1.1)$$

denota a variedade instável do conjunto M. Como G é dinamicamente gradiente, segue que $M_1 = W^u(M_1) = A_1$.

Passo 1. Começamos a prova mostrando que os conjuntos A_k definidos acima são invariantes para qualquer k. De fato, se $y \in A_k$, existe uma trajetória completa $\psi \in \mathbb{K}$ através de y tal que $\alpha(\psi) \subset \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Portanto, $\psi(\mathbb{R}) \subset A_k$. Isto é, $y \in G(t, \psi(\mathbb{R})) \subset G(t, A_k)$, para todo $t > 0$.

Reciprocamente, seja $y \in G(t, A_k)$, para algum $t > 0$. Logo existem $x \in A_k$ e $\varphi \in \mathscr{R}$ tais que $\varphi(0) = x$, $\varphi(t) = y$ e $\varphi(\mathbb{R}^+) \subset \mathscr{A}$, uma vez em que $\mathscr{A}$ é invariante. Como $x \in A_k$, existe uma trajetória completa de $\mathscr{R}$ por x, $\psi \in \mathbb{K}$, tal que $\alpha(\psi) \subset \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Defina então a concatenação $\widetilde{\psi}$ de ψ e φ e observe que $\widetilde{\psi} \in \mathbb{K}$ é uma trajetória completa por y satisfazendo $\alpha(\widetilde{\psi}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} M_j$, ou seja, $y \in A_k$.

Passo 2. Os conjuntos A_k são fechados. É claro que $A_n = \mathscr{A}$ é fechado. Prosseguimos indutivamente assumindo que A_{k+1} é fechado e provamos que A_k é fechado. Seja $x_m \in A_k$ com $x_m \to x$ em $\mathscr{A}$. Como $A_k \subset A_{k+1}$ e A_{k+1} é fechado, segue que $x \in A_{k+1}$. Portanto, para cada x_m existe uma trajetória completa $\gamma_m : \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ com $\gamma_m(0) = x_m$ e $\alpha(\gamma_m) \subset (M_1 \cup \ldots \cup M_k)$. Pela propriedade (H4), existe uma subsequência de γ_m, que ainda denotaremos por γ_m, que converge uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$ para uma trajetória completa $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ por x. Afirmamos que $\alpha(\gamma) \subset (M_1 \cup \ldots \cup M_k)$, e dessa maneira $x \in A_k$.

Com efeito, como $\gamma_m(\mathbb{R}) \subset A_{k+1}$ que é fechado, segue que $\gamma(\mathbb{R}) \subset A_{k+1}$ e $\alpha(\gamma) \subset A_{k+1}$. Por hipótese, sabemos que $\alpha(\gamma) \subset M_j$, para algum j e do anterior, segue que $\alpha(\gamma) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k \cup M_{k+1}$. Isto é, ou $\alpha(\gamma) \subset (M_1 \cup \ldots \cup M_k)$ ou $\alpha(\gamma) \subset M_{k+1}$. Vamos mostrar que a segunda opção não pode acontecer.

Se $\alpha(\gamma) \subset M_{k+1}$, tomamos vizinhanças abertas de M_{k+1}, U e V, tais que $\overline{U} \subset V$ e $\overline{V} \cap M_j = \emptyset$, para $j \neq k+1$. Como $\alpha(\gamma) \subset M_{k+1}$, existe $\tau > 0$ tal que $\gamma((-\infty, -\tau]) \subset U$. E podemos assumir, tomando m suficientemente grande, que $\gamma(-\tau) \in V$, para todo m. Seja

$$s_m = \sup\{s > \tau : \gamma_m([-s, -\tau]) \subset V\}.$$

Então $\gamma_m(-s_m) \in \partial V$. Observe que $s_m \to \infty$ e defina $\sigma_m(t) = \gamma(-s_m + t)$, $t \in [0, s_m - \tau_m]$. Pela propriedade (H4), σ_m converge uniformemente para uma trajetória $\sigma\colon [0, \infty) \to \overline{V}$ e $\sigma(0) \in \partial V$. Como A_{k+1} é fechado e $\gamma_m(\mathbb{R}) \subset A_k \subset A_{k+1}$, concluímos que $\sigma(t) \in A_{k+1}$, para $t \geq 0$. Em particular, $\sigma(0) \in A_{k+1}$ e, pela definição de A_{k+1}, existe uma trajetória completa $\widetilde{\sigma}\colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ por $\sigma(0)$ tal que $\alpha(\widetilde{\sigma}) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k \cup M_{k+1}$. Concatenamos as trajetórias σ e $\widetilde{\sigma}$ para criar uma trajetória completa $\sigma'\colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ tal que $\alpha(\sigma') \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k \cup M_{k+1}$ e $\sigma'(\mathbb{R}^+) \subset \overline{V}$, daí $\omega(\sigma') \subset M_{k+1}$. Consequentemente, por hipótese, devemos ter necessariamente $\sigma'(\mathbb{R}) \subset M_{k+1}$, o que contraria o fato de que $\sigma'(0) = \sigma(0) \in \partial V$.

Passo 3. Afirmamos que $A_k \cap M_j = \emptyset$, se $j > k$.

De fato, se $x \in A_k \cap M_j$, então existem $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{K}$ tais que $\psi_1(0) = \psi_2(0) = x$, $\alpha(\psi_1) \subset \bigcup_{l=1}^k M_l$ e $\psi_2(\mathbb{R}) \subset M_j$. Se $\psi \in \mathbb{K}$ denota a concatenação das trajetórias anteriores, por (H3), então ψ é tal que $\alpha(\psi) \subset \bigcup_{l=1}^k M_l$ e $\omega(\psi) \subset M_j$. Entretanto, como G é dinamicamente gradiente e $j > k$ isso não é possível.

Passo 4. Existe $\delta > 0$ para o qual

$$\mathscr{O}_\delta(A_k) \cap \bigcup_{j=k+1}^{n} M_j = \emptyset. \tag{4.1.2}$$

Se a afirmação não fosse verdadeira, haveria uma sequência x_m tal que $dist(x_m, A_k) \leq 1/m$ e $x_m \in \bigcup_{j=k+1}^n M_j$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Existiriam, assim, $k+1 \leq j_0 \leq n$ para o qual infinitos índices $m_l \in \mathbb{N}$ são tais que x_{m_l} pertence a M_{j_0}. A menos de uma subsequência, do Lema 2.7.14, segue que $x_{m_l} \to x_0 \in M_{j_0}$, e também $x_0 \in A_k$, pois A_k é fechado, o que contradiz o fato de que $A_k \cap M_j = \varnothing$ para $j > k$.

Passo 5. Provaremos agora que para todo $\delta' \in (0, \delta)$, em que δ é tomado de (4.1.2), existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A}) \subset \mathscr{O}_{\delta'}(A_k)$, o que implica que $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A}) \subset \overline{\mathscr{O}_{\delta'}(A_k)} \subset \mathscr{O}_\delta(A_k)$.

Suponhamos, por contradição que esse não é o caso. Então existem $\delta' \in (0,\delta)$ e sequências $t_n > 0$, $x_n \in \mathscr{A}$ e $\varphi_n \in \mathscr{R}$ com $\varphi_n(0) = x_n$ tais que

$$\operatorname{dist}(x_n, A_k) < \frac{1}{n}, \tag{4.1.3}$$

$$\operatorname{dist}(\varphi_n(t_n), A_k) = \delta' \text{ e} \tag{4.1.4}$$

$$\operatorname{dist}(\varphi_n(t), A_k) < \delta', \text{ para qualquer } t \in [0, t_n). \tag{4.1.5}$$

Se existir $T > 0$ tal que $t_n \leq T$, para todo $n \in \mathbb{N}$, nós teríamos $t_n \to t_0 \in [0,T]$, quando $n \to \infty$, e por (H4), passando por uma subsequência, se necessário, existe $\varphi \in \mathscr{R}$ tal que $\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_n(t)$, uniformemente em compactos de $[0,\infty)$. Note que $\varphi(0) \in A_k$, pois A_k é compacto. Da invariância de A_k, $\varphi(t) \in A_k$ para todo $t \geq 0$. Contudo, $\varphi(t_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi_n(t_n) \notin A_k$, o que é uma contradição.

Portanto, suponhamos que $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Defina $\psi_n(t) := \varphi_n(t + t_n)$. Observe que $\psi_n(0) \in \{x \in \mathscr{A} : \operatorname{dist}(x, A_k) = \delta'\}$, que é fechado, e pelo Lema 2.7.8, existe $\psi \in \mathbb{K}$ tal que, tomando uma subsequência, $\psi_n(t) \to \psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então como

$$\operatorname{dist}(\psi(t), A_k) \leq \delta', \text{ para todo } t \leq 0, \tag{4.1.6}$$

$$\operatorname{dist}(\psi(0), A_k) = \delta'. \tag{4.1.7}$$

Daí, como G é dinamicamente gradiente, segue que $\alpha(\psi) \subset M_j$, para algum $j = 1, \ldots, n$. Por (4.1.2) e (4.1.6) temos $1 \leq j \leq k$, logo $\psi(\mathbb{R}) \subset A_k$. Mas isso contradiz (4.1.7).

Passo 6. Podemos, agora, provar que A_k é um atrator local em $\mathscr{A}$.

Uma vez em que $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$ é fracamente invariante, para qualquer $y \in \omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$ existe uma trajetória completa limitada ψ passando por y contida em $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$. Portanto, $\alpha(\psi) \subset \mathscr{O}_\delta(A_k)$, então, novamente, $\alpha(\psi) \subset \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Daí $y \in A_k$, isto é, $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A}) \subset A_k$. A contenção inversa é verdadeira uma vez em que A_k é invariante. Concluindo, enfim, que $A_k = \omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$, como desejávamos.

Passo 7. Finalmente, mostraremos que $M_k = A_k \cap A^*_{k-1}$.

De fato, se $x \in M_k$, eixte uma trajetória completa $\psi \in \mathbb{K}$ que passa por x com $\psi(\mathbb{R}) \subset M_k$. Logo, por definição $x \in W^u(M_k) \subset A_k$. Se $x \notin A^*_{k-1}$, então $\omega(x) \subset A_{k-1}$. Portando, $\omega(\psi) \subset M_j$, para algum $1 \leq j \leq k-1$. Isso contradiz $\omega(\psi) \subset M_k$. Consequentemente, $x \in A^*_{k-1}$ e daí $M_k \subset A_k \cap A^*_{k-1}$.

Reciprocamente, seja $x \in A_k \cap A^*_{k-1}$. Pelo Lema 2.7.13, como os conjuntos A^*_{k-1} são compactos e fracamente invariantes, existe uma trajetória completa $\psi_1 \in \mathbb{K}$ por x tal que $\omega(\psi_1) \subset A^*_{k-1}$, logo $\omega(\psi_1) \subset M_j$, para algum $j \geq k$. Por outro lado, $x \in A_k$ implica na existência de uma trajetória completa $\psi_2 \in \mathbb{K}$ por x tal que $\alpha(\psi_2) \subset M_l$, para algum $1 \leq l \leq k$. Concatenando as trajetórias ψ_1 e ψ_2 por (H3), obtemos $\psi \in \mathbb{K}$ que satisfaz $\omega(\psi) \subset M_j$, com $j \geq k$, e $\alpha(\psi) \subset M_l$, com $1 \leq l \leq k$. Como G é dinamicamente gradiente e $l > j$ não pode ocorrer, resta a opção em que $j = l = k$ e, daí, $\psi(\mathbb{R}) \subset M_k$, o que implica $x \in M_k$, como desejado. $\square$

Corolário 4.1.6. Nas mesmas condições do Teorema 4.1.5, o conjunto M_1 é um atrator local de G em $\mathscr{A}$.

4.1.2 Funcional de Lyapunov implica em dinâmica gradiente

Vamos agora demonstrar que a existência de um funcional de Lyapunov para um semifluxo multívoco implica que o atrator possui estrutura de dinamicamente gradiente.

Teorema 4.1.7. Suponhamos que o semifluxo multívoco G possui um funcional de Lyapunov $\mathscr{L}\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ associado com a família disjunta de invariantes fracos isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Então G é dinamicamente gradiente com respeito a $\mathscr{M}$.

Demonstração. Para $1 \le j \le n$ seja $V_j = \mathscr{L}(x)$, para $x \in M_j$, e reordenamos os conjuntos M_j de tal forma que $V_1 \le V_2 \le \ldots \le V_n$.

Seja $\psi \in \mathbb{K}$ uma trajetória completa de G. Devemos mostrar que ou $\psi(\mathbb{R}) \subset M_k$, para algum k, ou $\alpha(\psi) \subset M_k$ e $\omega(\psi) \subset M_j$ com $1 \le j < k \le n$.

Se $\mathscr{L}(\psi(t))$ for constante para todo $t \in \mathbb{R}$, então existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\psi(\mathbb{R}) \subset M_k$. De fato, sabemos que $\psi(\mathbb{R}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} M_j$ e a continuidade de $\psi(t)$ impede que a trajetória pule de um componente M_k para outro, uma vez em que eles são isolados.

Suponhamos agora que $\mathscr{L}(\psi(t))$ não é constante e provemos que $\alpha(\psi) \subset M_k$ e $\omega(\psi) \subset M_j$ com $1 \le j < k \le n$. A semicontinuidade superior de $\mathscr{L}$ implica que $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Então, como $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathscr{L}(\psi(t))$ é não crescente, existem os limites

$$\lim_{t\to+\infty} \mathscr{L}(\psi(t)) := \mathscr{L}_+ \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \mathscr{L}(\psi(t)) := \mathscr{L}_-.$$

Sejam $\beta_1 = \sup_{y\in\omega(\psi)} \mathscr{L}(y)$ e $y_n^1 \in \omega(\psi)$ uma sequência tal que $\mathscr{L}(y_n^1) \to \beta_1$. Como $\mathscr{A}$ é compacto, passando possivelmente para uma subsequência, obtemos que $y_n^1 \to y_1 \in \omega(\psi)$. Da semicontinuidade superior de $\mathscr{L}$, $\lim_{n\to\infty} \mathscr{L}(y_n^1) \le \mathscr{L}(y_1)$, então $\beta_1 = \mathscr{L}(y_1)$. Como $\omega(\psi)$ é fracamente invariante, existe uma solução $\gamma \in \mathbb{K}$ tal que $\gamma(0) = y_1$ e $\gamma(t) \in \omega(\psi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Porém, como $\mathscr{L}$ é não crescente sobre ψ, segue que devemos ter $\mathscr{L}(\gamma(t)) = \beta_1$, para $t \le 0$. Portanto $y_1 \in M_k$, para algum k.

De maneira análoga, se $\beta_2 = \inf_{y\in\omega(\psi)} \mathscr{L}(y)$, demonstramos que $y_2 \in \omega(\psi)$ tal que $\beta_2 = \mathscr{L}(y_2)$ e $y_2 \in M_j$ para algum j.

Devemos verificar agora que $\mathscr{L}(y_2) = \mathscr{L}(y_1)$. Com efeito, a definição de $\omega(\psi)$ e a continuidade de $\mathscr{L}$ nos conjuntos M_k implicam na existência de sequências $t_n \to +\infty$ e $t_m \to +\infty$ tais que

$$\psi(t_n) \to y_1,\ \psi(t_m) \to y_2,$$

e

$$\mathscr{L}(\psi(t_n)) \to \mathscr{L}(y_1),\ \mathscr{L}(\psi(t_m)) \to \mathscr{L}(y_2).$$

Entretanto $\lim_{t\to+\infty}\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}_+$, daí

$$\mathscr{L}(y_1) = \mathscr{L}(y_2) = \mathscr{L}_+.$$

Isso implica que $\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}_+$ para todo $y \in \omega(\psi)$. Novamente, como $\omega(\psi)$ é fracamente invariante, para qualquer $y \in \omega(\psi)$ existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tal que $\gamma(0) = y$ e $\gamma(t) \in \omega(\psi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos então $\mathscr{L}(\gamma(t)) = \mathscr{L}_+$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $y = \psi(0) \in M_j$, para algum $j \in \{1,\dots,n\}$. Como $\omega(\psi)$ é conexo (ver Lemma 2.7.6) e os conjuntos M_k são dois a dois disjuntos, obtemos $\omega(\psi) \subset M_j$.

Analogamente, $\alpha(\psi) \subset M_k$, para algum $k \in \{1,\dots,n\}$, e uma vez que $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathscr{L}(\psi(t))$ é não crescente e não constante, devemos ter $V_k > V_j$, isto é, $1 \leq j < k \leq n$. O que conclui a prova do teorema. $\square$

4.1.3 Decomposição de Morse implica em funcional de Lyapunov

Finalmente, para concluirmos o ciclo, provaremos que se um semifluxo multívoco, G, possui uma decomposição de Morse associada à família disunta de invariantes fracamente isolados $\mathscr{M} = \{M_1,\dots,M_n\}$, então existe um funcional de Lyapunov $\mathscr{L}\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ no sentido da Definição 4.1.3.

O procedimento se dará seguindo alguns lemas.

Lema 4.1.8. Seja (A,A^*) um par atrator-repulsor no atrator global $\mathscr{A}$. Existe uma função $h : \mathscr{A} \to [0,1]$ tal que:

1. h é semicontínua superiormente para qualquer $x \in \mathscr{A}$, e é contínua para $x \in A \cup A^*$;
2. Para qualquer trajetória completa limitada $\psi \in \mathbb{K}$ a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto h(\psi(t))$ é não crescente;
3. $h^{-1}(0) = A$ e $h^{-1}(1) = A^*$;
4. Se $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ é uma trajetória completa limitada tal que $h(\psi(t)) = h(\psi(0))$, para todo $t \geq 0$, ou $h(\psi(t)) = h(\psi(0))$, para todo $t \leq 0$, então $\psi(0) \in A \cup A^*$.

Demonstração. Consideraremos a função Urysohn $f\colon \mathscr{A} \to [0,1]$ com respeito aos fechados disjuntos A e A^*, dada por

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,A)}{\operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(x,A^*)}. \tag{4.1.8}$$

Sabemos que f é contínua para $x \in \mathscr{A}$ e também que $f^{-1}(0) = A$ e $f^{-1}(1) = A^*$. Considere agora a função $h\colon \mathscr{A} \to [0,1]$ pondo

$$h(x) = \sup_{t\geq 0}\ \sup_{y\in G(t,x)} f(y). \tag{4.1.9}$$

Nós afirmamos que esta função satisfaz todas as propriedades do Lema. Provaremos este fato em etapas.

Passo 1. Para qualquer trajetória completa limitada $\psi \in \mathbb{K}$ a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto h(\psi(t))$ é não crescente.

Se $t_1 \leq t_2$ temos

$$\begin{aligned}
h(\psi(t_2)) &= \sup_{t\geq 0} \sup_{y\in G(t,\psi(t_2)))} f(y) \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \sup_{y\in G(t+t_2-t_1,\psi(t_1)))} f(y) \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \sup_{y\in G(t,\psi(t_1)))} f(y) = h(\psi(t_1)).
\end{aligned}$$

Passo 2. $h^{-1}(0) = A$ e $h^{-1}(1) = A^*$.

A primeira igualdade segue do fato de que o atrator local A é invariante.

Como $0 \leq h(x) \leq 1$, para $x \in A^*$, temos $h(x) = 1$ por definição.

Reciprocamente, seja $x \in h^{-1}(1)$. Queremos exibir $y \in \omega(x)$ com $y \in A^*$. De fato, existe uma sequência de trajetórias, $\varphi_n \in \mathscr{R}$ com $\varphi_n(0) = x$, e uma sequência de tempos, $t_n \geq 0$, para as quais $1 = h(x) = \lim_{n\to\infty} f(\varphi_n(t_n))$. Pela hipótese (H4) podemos assumir que, a menos de subsequência, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ uniformemente em compactos de $[0,\infty)$ e $\varphi \in \mathscr{R}$.

Primeiramente, suponhamos que $0 \leq t_n \leq T$. Passando para uma subsquência, obtemos $t_n \to t' \in [0,T]$. A continuidade de f implica que $f(\varphi_n(t_n)) \to f(\varphi(t'))$, portanto $f(\varphi(t')) = 1$. Isto é, $\varphi(t') \in A^*$. Logo $\omega(\varphi(t')) \cap A^* \neq \emptyset$ e consequentemente, como $\omega(\varphi(t')) \subset \omega(x)$, obtemos o desejado.

Suponhamos agora que $t_n \to +\infty$. Considere uma sequência $y_n = \varphi_n(t_n) \in G(t_n, x)$, que podemos assumir ser convergente para algum y devido à compacidade do atrator global $\mathscr{A}$. Então $y \in \omega(x) \subset A$, e, pela continuidade de f temos $f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, isto é, $y \in A^*$, o que finaliza esta etapa.

Passo 3. A aplicação h é contínua em qualquer $x \in A \cup A^*$.

Seja $x \in A$. Da continuidade de f, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(\mathscr{O}_\delta(A)) \subset [0,\varepsilon)$. Como A é um atrator local, pelo Lema 2.7.9 existe $\delta' \in (0,\delta)$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathscr{O}_\delta(A)$, então $h(\mathscr{O}_{\delta'}(A)) \subset [0,\varepsilon]$. A continuidade para x em A está provada.

Agora, consideremos $x \in A^*$. Observe que para todo $y \in \mathscr{A}$ temos $f(y) \leq h(y) \leq 1$ e portanto

$$|h(x) - h(y)| = 1 - h(y) \leq 1 - f(y),$$

e a continuidade de f implica o resultado.

Passo 4. h é semicontínua superiormente em qualquer $x \in \mathscr{A}$.

Uma vez que h é contínua em $A \cup A^*$, resta mostrarmos para $x \in \mathscr{A} \backslash (A \cup A^*)$. Para tal x, sabemos que $\omega(x) \subset A$ e $0 < h(x) < 1$. Seja $\delta > 0$ tal que $f(\mathscr{O}_\delta(A)) \subset [0, f(x)/2)$. Pelo Lema 2.7.9 dado δ, existe $\delta' \in (0,\delta)$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathscr{O}_\delta(A)$.

Seja $t_0 > 0$ tal que $G(t,x) \subset \mathscr{O}_{\delta'/2}(A)$ para todo $t \geq t_0$. Da semicontinuidade superior da aplicação $G(t_0,\cdot)$ existe uma vizinhança U_1 de x em $\mathscr{A}$ para a qual $G(t_0,U_1) \subset \mathscr{O}_{\delta'}(A)$. Logo

$$G(t,U_1) \subset G(t-t_0, G(t_0,U_1)) \subset \gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathscr{O}_\delta(A) \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Da continuidade de f seja U_2 uma vizinhança de x em $\mathscr{A}$ tal que $U_2 \subset \mathscr{A} \backslash (A \cup A^*)$ e $f(y) > \frac{f(x)}{2}$ para todo $y \in U_2$. Consideremos então $U = U_1 \cap U_2$. Daí, para $y \in U$ temos

$$h(y) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} \sup_{w \in G(t,y)} f(w).$$

Agora vamos provar a semicontinuidade superior de h. Caso contrário, existiriam $\varepsilon > 0$ e uma sequência $x_n \to x$ tal que

$$h(x_n) > h(x) + \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.10}$$

Podemos assumir que $x_n \in U$, se n for suficientemente grande, e para qualquer $\varepsilon_n > 0$ existem $\varphi_n \in \mathscr{R}$ e $t_n \in [0,t_0]$ tais que $\varphi_n(0) = x_n$ e

$$|h(x_n) - f_n(\varphi(t_n))| = h(x_n) - f_n(\varphi(t_n)) \leq \varepsilon_n.$$

Graças a (H4), passando para uma subsequência, temos $t_{n_k} \to t'$, $\varphi_{n_k}(t_{n_k}) \to \varphi(t')$, em que $\varphi \in \mathscr{R}$ e $\varphi(0) = x$. Portanto, $\varphi(t') \in G(t',x)$. A continuidade de f implica que

$$f_{n_k}(\varphi(t_{n_k})) \to f(\varphi(t')) \leq h(x).$$

Consequentemente, tomando $\varepsilon_n \to 0$ obtemos

$$\left|f(\varphi(t')) - h(x_{n_k})\right| \leq \left|f(\varphi_{n_k}(t_{n_k})) - f(\varphi(t'))\right| + |h(x_{n_k}) - f(\varphi_{n_k}(t_{n_k}))| \to 0,$$

logo

$$\lim_{k\to\infty} h(x_{n_k}) = f(\varphi(t')) \leq h(x),$$

o que contradiz (4.1.10) e conclui o passo 4.

Passo 5. Se $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ é uma trajetória limitada tal que ou $h(\psi(t)) = h(\psi(0))$, para todo $t \geq 0$, ou $h(\psi(t)) = h(\psi(0))$, para todo $t \leq 0$, então $\psi(0) \in A \cup A^*$.

Primeiramente, seja $h(\psi(t)) = h(\psi(0))$, para todo $t \geq 0$. Assumamos o contrário, isto é, $\psi(0) \notin A \cup A^*$. Logo $0 < h(\psi(0)) = h(\psi(t)) < 1$, para $t \geq 0$. Mas sabemos do Lema 2.7.12 que $\omega(\psi(0)) \subset A$, portanto $\operatorname{dist}(\psi(t),A) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Tomando alguma subsequência $\psi(t_n)$ convergindo a $x \in \omega(\psi(0)) \subset A$, da continuidade de h em $x \in A$, obtemos que

$$h(\psi(t_n)) \to 0,$$

o que é uma contradição.

Por outro lado, seja $h(\psi(t)) = h(\psi(0))$, para $t \leq 0$. Pelo Lema 2.7.12, temos $\alpha(\psi(0)) \subset A^*$ e provamos de forma análoga a anterior.

Com a finalização do passo acima concluímos a prova do lema. $\square$

Para definirmos um funcional de Lyapunov para uma decomposição de Morse usaremos o Lema a seguir, cuja prova será omitida por ser similar ao caso singular, que pode ser encontrada em (ARAGÃO-COSTA *et al.*, 2011, Proposition 2.19). A versão unívoca está enunciada na Proposição 2.3.12.

Lema 4.1.9. Seja $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ uma decomposição de Morse para o atrator global $\mathscr{A}$ com sequência de atratores locais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = \mathscr{A}$. Então

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} M_j.$$

Teorema 4.1.10. Se o semifluxo multívoco G admite uma decomposição Morse para o atrator global $\mathscr{A}$ com sequência de atratores locais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = \mathscr{A}$, então existe um funcional de Lyapunov $\mathscr{L} \colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ associado com a família disjunta de invariantes fracos isolados $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$.

Demonstração. Para cada $j = 1, \ldots, n$, seja $h_j \colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ a função definida anteriormente no Lema 4.1.8 para o par atrator-repulsor (A_j, A_j^*).

Defina a função $\mathscr{L} \colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ pondo

$$\mathscr{L}(z) := \sum_{j=1}^{n} h_j(z), \; z \in \mathscr{A}.$$

Afirmamos que $\mathscr{L} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ é um funcional de Lyapunov com respeito a $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$.

Primeiramente, como para toda $\psi \in \mathbb{K}$ a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto h_j(\psi(t)) \in [0, \infty)$ é não crescente, para cada $j = 1, \ldots, n$, segue que $\mathscr{L}(\psi(t))$ é também não crescente.

Ainda mais, seja $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ uma trajetória completa e limitada tal que $\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}(\psi(0))$, para todo $t \geq 0$. Como as funções $h_j(\psi(\cdot))$ são positivas e não crescentes, segue que $h_j(\psi(t)) = h_j(\psi(0))$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $t \geq 0$. Portanto, $\psi(0) \in A_j \cup A_j^*$ para cada $j = 1, \ldots, n$ e pelo Lema 4.1.9 obtemos

$$x \in \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} M_j.$$

De maneinra totalmente similar nós provamos o segundo caso.

Como as funções h_j são semicontínuas superiormente, $\mathscr{L}$ também o é. Se $x \in \cup_{j=1}^{n} M_j$, note que $x \in A_j \cup A_j^*$ para todo $j = 0, \ldots, n$, pelo Lema 4.1.9, daí cada função h_j é contínua em x e, consequentemente, $\mathscr{L}$ é contínuo em x.

Finalmente, se $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $z \in M_k = A_k \cap A^*_{k-1}$, segue que $z \in A_k \subset \ldots \subset A_n = \mathscr{A}$ e $z \in A^*_{k-1} \subset \ldots \subset A^*_0 = \mathscr{A}$. Portanto $h_j(z) = 0$ se $j \geq k$ e $f_j(z) = 1$ se $1 \leq j \leq k-1$. Daí,

$$\mathscr{L}(z) = \sum_{j=1}^{n} h_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} f_j(z) + \sum_{j=k}^{n} h_j(z) = k-1.$$

E isso conclui que o funcional $\mathscr{L}$ é constante em cada componente M_k.

O que finaliza todas as propriedades do funcional de Lyapunov $\mathscr{L}$ e conclui a prova do teorema. $\square$

Unimos os resultados estabelecidos nos Teoremas 4.1.5, 4.1.7 e 4.1.10 e obtemos a equivalência dos três conceitos dinâmicos, provando o Teorema 4.1.4.

4.2 Infinitos componentes de Morse

Consideraremos, nesta seção, o caso em que a família de conjuntos fracamente invariantes é infinita. Desenvolvemos e provamos o teorema de equivalência, como o Teorema 4.1.4, para esse novo caso.

Começamos com $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ um m-semifluxo associado com a família $\mathscr{R} \subset \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, X)$ satisfazendo as condições (H1)-(H4) da Seção 2.7. Como anteriormente, assumimos que G possui um atrator global compacto e invariante que será denotado, novamente, por $\mathscr{A}$.

Sejam $\mathbf{M}_\infty = \{M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots, M_\infty\} = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$ uma família enumerável de invariantes fracos de $\mathscr{A}$. Dizemos que esta família é *disjunta* se para todo $j \in \mathbb{N}$ existe δ_j para o qual

$$\mathscr{O}_{\delta_j}(M_j) \cap \mathscr{O}_{\delta_j}(M_k) = \emptyset, \text{ para todo } k \neq j,\, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{4.2.1}$$

Nesta seção, assumiremos que para qualquer $j \in \mathbb{N}$ também existe $\delta_j > 0$ tal que M_j é o invariante fraco maximal em $\mathscr{O}_{\delta_j}(M_j)$, ou seja, o invariante fraco M_j é *isolado*. Numa família disjunta em que os invariantes fracos são isolados, assumiremos que o valor de δ_j é escolhido satisfazendo as duas definições. Observemos que as definições acima não dizem respeito ao conjunto M_∞, isto é, M_∞ não precisa ser isolado nem satisfazer (4.2.1). Que é motivado pelas aplicações, em geral o conjunto M_∞ pode ser um "conjunto de acumulação" da sequência de conjuntos M_n.

Vamos estender as definições introduzidas na seção anterior para o novo caso. O trabalho desta seção foi baseado nos textos (CARABALLO *et al.*, 2013) e (CARABALLO *et al.*, 2015), em que os autores desenvolvem a decomposição de Morse com infinitos componentes para semigrupos. A nomenclatura das definições foi também inspirada em tais artigos, entretanto muitas vezes omitiremos o termo "generalizado" do texto.

Definição 4.2.1 (Dinamicamente gradiente generalizado)**.** Dizemos que o m-semifluxo $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ é dinamicamente gradiente generalizado com respeito à família disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$ tal que cada M_j é isolado, para $j \in \mathbb{N}$, se para cada trajetória completa e limitada ψ de $\mathscr{R}$ tivermos que ou $\psi(\mathbb{R}) \subset M_j$, para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ou $\alpha(\psi) \subset M_k$ e $\omega(\psi) \subset M_j$ com $1 \leq j < k \leq \infty$.

Definição 4.2.2 (Decomposição de Morse generalizada)**.** Dizemos que o m-semifluxo $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ com uma família disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$ tal que M_j é isolado para cada $j \in \mathbb{N}$ admite uma decomposição de Morse generalizada se existe sequência de atratores locais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_\infty = \mathscr{A}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ vale

$$M_k = A_k \cap A_{k-1}^*$$

e para M_∞ temos

$$M_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k^*.$$

Definição 4.2.3 (Funcional de Lyapunov generalizado)**.** Dizemos que um m-semifluxo $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathscr{P}(X)$ com atrator global $\mathscr{A}$, com uma família disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$ em $\mathscr{A}$ tal que M_j é isolado para cada $j \in \mathbb{N}$, possui um funcional de Lyapunov generalizado se existir uma aplicação $\mathscr{L}\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Para cada trajetória completa e limitada ψ em $\mathbb{K}$ a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathscr{L}(\psi(t)) \in \mathbb{R}$ é não crescente;

2. $\mathscr{L}$ é constante em cada componente M_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;

3. $\mathscr{L}$ é semicontínuo superiormente em $x \in \mathscr{A}$ e contínuo em $x \in M_k$, para qualquer $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;

4. Se $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ é uma trajetória completa e limitada tal que ou $\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}(\psi(0))$, para todo $t \geq 0$, ou $\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}(\psi(0))$, para todo $t \leq 0$, então $\psi(0) \in M_k$, para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Se existir tal funcional, dizemos que o semifluxo multívoco G é gradiente com respeito à família $\mathbf{M}_\infty$.

Definição 4.2.4. Nas mesmas condições da Definição 4.2.3, dizemos que a família $\mathbf{M}_\infty$ é ordenada com respeito ao funcional de Lyapunov generalizado $\mathscr{L}$ se

$$L_1 \leq L_2 \leq \ldots \leq L_n \leq \ldots < L_\infty,$$

onde L_j denota o valor de $\mathscr{L}$ no conjunto fracamente invariante M_j, $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ainda mais, não pode haver uma quantidade infinita de conjuntos M_j para os quais o valor L_j coincida.

As definições acima não trazem nenhuma novidade ao que era esperado no caso em que os componentes de Morse são infinitos. A hipótese sobre a ordenação dos invariantes fracos se deve ao fato de que não podemos garantir que não existem órbitas homoclínicas caso contrário.

Para a prova da equivalência devemos entrar em mais detalhes das variedades instáveis de cada conjunto fracamente invariante. A variedade instável, $W^u(M)$ de um subconjunto M do atrator global $\mathscr{A}$ é definido como em (4.1.1). Utilizando o funcional de Lyapunov do caso finito, feito na seção anterior, podemos provar uma condição de separação para as variedades instáveis dos conjuntos M_k, $k \in \mathbb{N}$.

Lema 4.2.5. Suponhamos que G seja um semifluxo multívoco dinamicamente gradiente com respeito a família disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup M_\infty$ tal que M_j é isolado para cada $j \in \mathbb{N}$. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta_k > 0$ tal que

$$W^u(M_k) \cap \mathscr{O}_{\delta_k}\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} M_j \cup M_\infty\right) = \emptyset. \tag{4.2.2}$$

Demonstração. Para cada $n > 1$, consideramos a família finita disjunta de invariantes fracos isolados definida por $\mathscr{M}_n = \{N_1, \dots, N_n\}$ em que

$$N_k = M_k \text{ se } 1 \leq k \leq n-1,$$
$$N_n = \left\{y : \exists \psi \in \mathbb{K} \text{ tal que } \psi(0) = y \text{ e } \omega(\psi),\, \alpha(\psi) \subset \cup_{j=n}^{\infty} M_j \cup \{M_\infty\}\right\}.$$

Os conjuntos N_k são fracamente invariantes, disjuntos e isolados. Em vista do Lema 2.7.14, segue que N_k é compacto para cada k.

É claro que G é dinamicamente gradiente com respeito à família $\mathscr{M}_n$, como na Definição 4.1.1. Portanto, pelo Teorema 4.1.4 existe um funcional de Lyapunov $\mathscr{L}_n$ com respeito a $\mathscr{M}_n$.

Suponhamos então que (4.2.2) não seja verdadeira. Isto é, existe k e uma sequência $y_m \in W^u(M_k)$ tais que

$$\operatorname{dist}(y_m, \bigcup_{j=k+1}^{\infty} M_j \cup M_\infty) \to 0 \text{ quando } m \to \infty. \tag{4.2.3}$$

Escolhemos $n > k$ e (4.2.3) implica que

$$\operatorname{dist}(y_m, \bigcup_{j=k+1}^{n} N_j) \to 0 \text{ quando } m \to \infty. \tag{4.2.4}$$

Seja V_k o valor da função $\mathscr{L}_n$ em N_k. Notamos que, por construção $V_k = k-1$, veja o Teorema 4.1.10, logo $V_k < V_{k+1} < \ldots < V_n$. Tomamos $\psi_m \in \mathbb{K}$ tal que $\psi_m(0) = y_m$ e

$$\operatorname{dist}(\psi_m(t), N_k) \to 0, \text{ quando } t \to -\infty.$$

A continuidade de $\mathscr{L}_n$ em N_k implica que $\mathscr{L}_n(\psi_m(t)) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} V_k$. Como $t \mapsto \mathscr{L}_n(\psi_m(t))$ é não crescente, segue que $\mathscr{L}_n(y_m) \leq V_k$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como N_j é compacto, (4.2.4) implica que existe uma subsequência y_{m_l} convergindo para algum N_r, com $r \geq k+1$. Novamente, da continuidade de $\mathscr{L}_n$ em N_r temos $\mathscr{L}_n(y_{m_l}) \to V_r > V_k$, o que é uma contradição e termina a prova do Lema. □

Corolário 4.2.6. Suponhamos que G seja um m-semifluxo dinamicamenete gradiente generalizado com respeito à família $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^\infty \cup \{M_\infty\}$. Seja $A_k = \cup_{j=1}^k W^u(M_j)$. Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta_k > 0$ para o qual

$$A_k \cap \mathscr{O}_{\delta_k}\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} M_j \cup M_\infty\right) = \emptyset \tag{4.2.5}$$

e

$$\mathscr{O}_{\delta_k}(A_k) \cap \left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} M_j \cup M_\infty\right) = \emptyset. \tag{4.2.6}$$

Demonstração. Como G é dinamicamente gradiente com respeito à família $\mathscr{M}_n$ definida no Lema 4.2.5, segue do Teorema 4.1.4 que M_1 é um atrator local. Portanto para $k = 1$ o resultado é veradeiro, uma vez em que $A_1 = W^u(M_1) = M_1$ e (4.2.2).

Suponhamos por indução que o resultado é válido para todo $1 \leq j \leq k-1$, com $k \in \mathbb{N}$. Provemos que é também verdadeiro para k. Caso contrário, existe uma sequência $x_n \in A_k$ tal que

$$\operatorname{dist}(x_n, \bigcup_{j=k+1}^{\infty} M_j \cup M_\infty) < \frac{1}{n}.$$

Como $A_k = A_{k-1} \cup W^u(M_k)$ e (4.2.5) vale para $k-1$, necessariamente $x_n \in W^u(M_k)$, o que é uma contradição com (4.2.2).

A igualdade (4.2.6) segue facilmente de (4.2.5) e o corolário está demonstrado. □

As provas dos Lemas a seguir são idênticas ao caso unívoco e não as apresentaremos, podem ser encontradas em (CARABALLO *et al.*, 2015), Lemma 3.9 e Proposition 3.13.

Lema 4.2.7. Seja $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^\infty \cup \{M_\infty\}$ uma família de compactos fracamente invariantes tais que $M_j \cap M_k = \emptyset$, se $j \neq k$, para quaisquer $j,k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se o invariante fraco M_∞ é tal que

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{dist}_{\mathrm{H}}(M_j, M_\infty) = 0, \tag{4.2.7}$$

então a família $\mathbf{M}_\infty$ é uma família disjunta de invariantes fracos.

Lema 4.2.8. Sejam G um m-semifluxo com atrator global $\mathscr{A}$ e $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^\infty \cup \{M_\infty\}$ uma decomposição de Morse generalizada em $\mathscr{A}$ com família crescente de atratores locais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_\infty = \mathscr{A}$. Vale

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \cup M_\infty. \tag{4.2.8}$$

4.2.1 Dinâmica gradiente implica decomposição de Morse

Como fizemos na seção anterior, mostraremos que se um semifluxo multívoco G é dinamicamente gradiente generalizado com respeito a família disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$, então existe uma decomposição de Morse generalizada associada.

Teorema 4.2.9. Sejam G um m-semifluxo com atrator global $\mathscr{A}$ e seja $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$ uma família disjunta de invariantes fracos em $\mathscr{A}$ tal que M_j é isolado para cada $j \in \mathbb{N}$. Se G é dinamicamente generalizado com respeito a $\mathbf{M}_\infty$, então existe uma sequência de atratores locais $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_\infty = \mathscr{A}$ que compõe uma decomposição de Morse generalizada relativa à $\mathbf{M}_\infty$.

Demonstração. Definamos $A_0 = \emptyset$, $A_1 = W^u(M_1)$ e, para $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(M_k)$.

Da mesma maneira como na demonstração do Teorema 4.1.5 obtém-se que os conjuntos A_k são invariantes.

Vamos provar que os conjuntos A_k são fechados. Fixemos $k \in \mathbb{N}$, escolha $n \in \mathbb{N}$ com $n > k$ e defina a família $\mathscr{M}_n = \{N_1, ..., N_n\}$ como dada na prova do Lema 4.2.5. Segue que $\mathscr{M}_n$ é um família disjunta de invariantes fracos isolados e G é dinamicamente gradiente com respeito a $\mathscr{M}_n$. Novamente do Teorema 4.1.5 segue que $\widetilde{A}_k := \bigcup_{j=1}^{k} W^u(N_k)$ são fechados para $1 \leq k \leq n$. Porém, como $A_k = \widetilde{A}_k$, uma vez em que $k < n$ a afirmação é imediata.

Agora, mostraremos que A_k é um atrator local em $\mathscr{A}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Seja δ_k escolhido de forma que $A_k \cap \mathscr{O}_{\delta_k}\left(\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} M_j\right) \cup M_\infty\right) = \emptyset$, cuja existência é garantida pelo Corolário 4.2.6. Mostraremos que para cada $\delta' \in (0, \delta_k)$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A}) \subset \mathscr{O}_{\delta'}(A_k)$ o que implicará que $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A}) \subset \mathscr{O}_{\delta'}(A_k)$.

Suponhamos por contradição que este não é o caso. Existem, então, $\delta' \in (0, \delta_k)$ e sequências $t_n > 0$, $x_n \in \mathscr{A}$ e $\varphi_n \in \mathscr{R}$, com $\varphi_n(0) = x_n$, tais que

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{dist}(x_n, A_k) < 1/n,\\
&\operatorname{dist}(\varphi_n(t_n), A_k) = \delta',\\
&\operatorname{dist}(\varphi_n(t), A_k) < \delta', \text{ para todo } t \in [0, t_n).
\end{aligned}
$$

Se exitir $T > 0$ tal que $t_n \leq T$, para todo $n \in \mathbb{N}$, teríamos $t_n \to t_0 \in [0, T]$, quando $n \to \infty$ e por (H4), a menos de subsequências, existe $\varphi \in \mathscr{R}$ tal que $\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_n(t)$ uniformemente em compactos de $[0, \infty)$. Note que $\varphi(0) \in A_k$, pois A_k é compacto e, como A_k é também invariante, $\varphi(t) \in A_k$ para todo $t \geq 0$. Entretanto, $\varphi(t_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi_n(t_n) \notin A_k$, o que é uma contradição.

Assumamos então que $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Defina $\psi_n(t) := \varphi_n(t + t_n)$ e obervemos que $\psi_n(0) \in \{x \in \mathscr{A} : \operatorname{dist}(x, A_k) = \delta'\}$, que é fechado em X, do Lema 2.7.8, existe $\psi \in \mathbb{K}$ tal que, tomando uma subsequência, $\psi_n(t) \to \psi(t)$ uniformemente para t em compactos de $\mathbb{R}$.

Observamos então que

$$\operatorname{dist}(\psi(t), A_k) < \delta', \text{ para todo } t \leq 0, \tag{4.2.9}$$

$$\operatorname{dist}(\psi(0), A_k) = \delta'. \tag{4.2.10}$$

Como G é dinamicamente gradiente, temos $\alpha(\psi) \subset M_j$, para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Por (4.2.6) e (4.2.9) devemos ter $1 \leq j \leq k$, daí $\psi(\mathbb{R}) \subset A_k$, o que, por sua vez, contradiz (4.2.10).

Como $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$ é fracamente invariante, para qualquer $y \in \omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$ existe $\psi \in \mathbb{K}$ tal que $\psi(0) = y$ e $\psi(\mathbb{R}) \subset \omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$. Portanto, $\alpha(\psi) \subset \mathscr{O}_{\delta_k}(A_k)$ e por (4.2.6) temos $\alpha(\psi) \subset \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Logo $y \in A_k$, isto é, $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A}) \subset A_k$. A inclusão recíprova vale uma vez em que A_k é invariante. Consequentemente $A_k = \omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_k) \cap \mathscr{A})$, isto é, A_k é um atrator local em $\mathscr{A}$.

Vamos provar agora que M_∞ é dado por $M_\infty = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k^*$.

Seja $x \in M_\infty$. Como M_∞ é fracamente invariante, existe uma trajetória completa e limitada ψ por x cuja imagem está inteiramente contida em M_∞. Isto quer dizer, como M_∞ é compacto, que $\omega(\psi) \subset M_\infty$. Da dinâmica gradiente o anterior implica que x não pode pertencer a $W^u(M_j)$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Ou seja, $x \notin \cup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Como $\omega(x) \cap M_\infty \neq \emptyset$, deduzimos que $\omega(x) \cap (\mathscr{A} \backslash A_j) \neq \emptyset$, isto é, $x \in A_j^*$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $x \in \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j^*$.

Suponhamos agora que $x \in \cap_{k=0}^{\infty} A_k^*$. Pelo Lema 2.7.14 os conjuntos A_n^* são fracamente invariantes, logo existem trajetórias completas ψ_n tais que $\psi_n(\mathbb{R}) \subset A_n^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, do Lema 2.7.8, passando para uma subsequência se necessário, existe uma trajetória completa e limitada ψ tal que $\psi_n(t) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \psi(t)$ para cada t. A cadeia de inclusões $A_1^* \supset \ldots \supset A_n^*$ e o fato de que A_n^* é fechado implicam que $\psi(\mathbb{R}) \subset A_n^*$ e $\omega(\psi) \subset A_n^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\omega(\psi) \cap A_n = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como, por hipótese, devemos ter $\omega(\psi) \subset M_j$ para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, obrigatoriamente temos $\omega(\psi) \subset M_\infty$. Como G é dinamicamente gradiente generalizado, obtemos que, de fato, $\psi(\mathbb{R}) \subset M_\infty$. Concluindo enfim que $x \in M_\infty$.

A fim de terminar a prova, resta notarmos que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale $M_k = A_k \cap A_{k-1}^*$. O que pode ser provado de maneira análoga ao que foi feito no Teorema 4.1.5.

Completando, assim, a prova da existência da decomposição de Morse generalizada. □

4.2.2 Funcional de Lyapunov implica dinâmica gradiente

Seguindo o planejado, demonstraremos nesta subseção que a existência de um funcional de Lyapunov que ordena a família de invariantes fracos implica que o semifluxo multívoco é dinamicamente gradiente.

Teorema 4.2.10. Suponhamos que G é um m-semifluxo com atrator global $\mathscr{A}$ para o qual exista uma família enumerável e disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$ tal que M_j

é isolado para cada $j \in \mathbb{N}$. Se $\mathbf{M}_\infty$ é ordenado por uma funcional de Lyapunov $\mathscr{L}$, então G é dinamicamente gradiente com respeito à família $\mathbf{M}_\infty$.

Demonstração. Seja $\psi \in \mathbb{K}$. Devemos mostrar que ou existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $\psi(\mathbb{R}) \subset M_k$, ou $\alpha(\psi) \subset M_k$ e $\omega(\psi) \subset M_j$ para algum $1 \leq j < k \leq \infty$.

Se $\mathscr{L}(\psi(t))$ é constante para todo $t \in \mathbb{R}$, segue da definição de funcional de Lyapunov que $\psi(\mathbb{R}) \subset \cup_{j=1}^{\infty} M_j \cup M_\infty$ e a continuidade de ψ previne que ela salte de um invariante fraco M_k para outro. Existe então um $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ para o qual $\psi(\mathbb{R}) \subset M_k$.

Suponhamos agora que $\mathscr{L}(\psi(t))$ não é constante e provemos que $\alpha(\psi) \subset M_k$ e $\omega(\psi) \subset M_j$ para algum $1 \leq j < k \leq \infty$. Como $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathscr{L}(\psi(t))$ é semicontínua superiormente e não-crescente, $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ é limitado em $\mathbb{R}$ e temos $\lim_{t \to \pm\infty} \mathscr{L}(\psi(t)) := \mathscr{L}_\pm$, com $\mathscr{L}_+ < \mathscr{L}_- < \infty$.

Denotemos $\beta_1 = \sup_{y \in \omega(\psi)} \mathscr{L}(y)$ e seja $y_n^1 \in \omega(\psi)$ uma sequência tal que $\mathscr{L}(y_n^1) \to \beta_1$. A menos de susequência, como ω-limites são compactos, existe y^1 tal que $y_n^1 \to y^1 \in \omega(\psi)$. Como $\mathscr{L}$ é semicontínua superiormente, temos $\lim_{n\to\infty} \mathscr{L}(y_n^1) \leq \mathscr{L}(y^1)$, logo $\beta_1 = \mathscr{L}(y^1)$. A invariâcia fraca de $\omega(\psi)$ implica que existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tal que $\gamma(0) = y^1$ e $\gamma(t) \in \omega(\psi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Porém, como $\mathscr{L}(\gamma(t)) \geq \mathscr{L}(y^1)$ para $t \leq 0$ temos $\mathscr{L}(\gamma(t)) = \beta_1$ para qualquer $t \leq 0$. Consequentemente, $y^1 \in M_k$ para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Da mesma maneira encontramos $y^2 \in \omega(\psi)$ tal que $\mathscr{L}(y^2) = \beta_2$ e $y^2 \in M_j$ para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, em que $\beta_2 := \inf_{y \in \omega(\psi)} \mathscr{L}(y)$.

Afirmamos que $\mathscr{L}(y^2) = \mathscr{L}(y^1)$. De fato, da definição de $\omega(\psi)$ e da continuidade de $\mathscr{L}$ para qualquer $x \in M_k$, existem sequências $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $t_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que

$$\psi(t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y^1 \qquad \psi(t_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y^2$$
$$\mathscr{L}(\psi(t_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{L}(y^1) \qquad \mathscr{L}(\psi(t_m)) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{L}(y^2)$$

Porém $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}_+$, logo

$$\mathscr{L}(y^1) = \mathscr{L}(y^2) = \mathscr{L}_+.$$

Daí $\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}_+$ para todo $y \in \omega(\psi)$. De modo análogo podemos provar que $\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}_-$ para todo $y \in \alpha(\psi)$.

Ainda mais, como $\omega(\psi)$ e $\alpha(\psi)$ são fracamente invariantes, para qualquer $y \in \omega(\psi)$ e $z \in \alpha(\psi)$ existem $\gamma^+, \gamma^- \in \mathbb{K}$ tais que $\gamma^+(0) = y$, $\gamma^-(0) = z$ e $\gamma^+(t) \in \omega(\psi)$, $\gamma^-(t) \in \alpha(\psi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo, $\mathscr{L}(\gamma^+(t)) = \mathscr{L}_+$ e $\mathscr{L}(\gamma^-(t)) = \mathscr{L}_-$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto implica que $y = \gamma^+(0) \in M_j$ e $z = \gamma^-(0) \in M_k$, para algum $j, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Como $\mathscr{L}_+ < \mathscr{L}_-$, fica claro que $j \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $\omega(\psi) \subset M_j$ de fato. Como a família $\mathbf{M}_\infty$ é disjunta e $j \in \mathbb{N}$, existe δ_j tal que

$$\mathscr{O}_{\delta_j}(M_j) \cap \mathscr{O}_{\delta_j}(M_k) = \emptyset \text{ para todo } k \neq j.$$

Logo, os abertos $U_1 := \mathscr{O}_{\delta_j}(M_j)$ e $U_2 := \cup_{k \neq j} \mathscr{O}_{\delta_j}(M_k)$, em que $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, são disuntos. Desde que $\omega(\psi)$ é conexo, obtemos que $\omega(\psi) \subset U_1$ e $\omega(\psi) \subset M_j$, como desejado.

Por outro lado, se para $z \in \alpha(\psi)$ tivermos $z \in M_k$, com $k \in \mathbb{N}$, os mesmos argumentos anteriores implicam que $\alpha(\psi) \subset M_k$. Caso contrário teremos $\alpha(\psi) \subset M_\infty$.

Finalmente, uma vez em que $\mathscr{L}_k = \mathscr{L}_- > \mathscr{L}_+ = \mathscr{L}_j$ segue que $1 \leq j < k \leq \infty$. E a prova do teorema está completa. □

4.2.3 Decomposição de Morse implica em funcional de Lyapunov

Finalmente vamos mostrar que a existência de uma decomposição de Morse nos permite construir um funcional de Lyapunov que ordena a família enumerável de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty$.

Teorema 4.2.11. Se o semifluxo multívoco G com atrator global $\mathscr{A}$ admite uma decomposição de Morse generalizada para a família enumerável e disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^\infty \cup M_\infty$, em que M_j é isolado, para cada $j \in \mathbb{N}$, então existe um funcional de Lyapunov generalizado $\mathscr{L} \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ associado a $\mathbf{M}_\infty$ que a ordena.

Demonstração. Seja $h_j \colon A \to \mathbb{R}$ a função do Lema 4.1.8 para o par atrator repulsor (A_j, A_j^*), $j \in \mathbb{N}$.

Defina a função $\mathscr{L} \colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ pondo

$$\mathscr{L}(z) := \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} h_j(z),\ z \in \mathscr{A}. \tag{4.2.11}$$

Afirmamos que $\mathscr{L}$ define um funcional de Lyapunov generalizado com respeito a $\mathbf{M}_\infty$.

Primeiro, observamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ e $\psi \in \mathbb{K}$ a função definida por $\mathbb{R} \ni t \mapsto h_j(\psi(t)) \in \mathbb{R}$ é positiva e não crescente, logo $t \mapsto \mathscr{L}(\psi(t))$ é também não crescente.

Ainda mais, se $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ é uma trajetória completa e limitada para a qual $\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}(\psi(0))$, para $t \geq 0$. Como as funções $t \mapsto h_j(\psi(t))$ são não negativas e não crescentes, segue que $h_j(\psi(t)) = h_j(\psi(0))$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Logo, $\psi(0) \in A_j \cup A_j^*$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e do Lema 4.2.8 temos

$$\psi(0) \in \bigcap_{j=0}^\infty (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^\infty M_j \cup M_\infty.$$

De maneira similar provamos o caso em que $\mathscr{L}(\psi(t)) = \mathscr{L}(\psi(0))$, para $t \leq 0$.

Observamos que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ para o qual $\sum_{j=N}^\infty \frac{1}{2^j} h_j(z) < \varepsilon$ para todo $z \in \mathscr{A}$. Logo, da semicontinuidade superior das funções h_j, é fácil verificar que $\mathscr{L}$ é também semicontínua superiormente. Fixe $x \in \bigcup_{j=1}^\infty M_j \cup M_\infty$ e provemos a continuidade de $\mathscr{L}$ em x. Como $x \in A_j \cup A_j^*$, para todo $j \in \mathbb{N}$, segue que todas funções h_j são contínuas em x. Portando a afirmação segue facilmente.

Finalmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $z \in M_k = A_k \cap A^*_{k-1}$, segue que $z \in A_k \subset \ldots \subset A_\infty = \mathscr{A}$ e também $z \in A^*_{k-1} \subset \ldots \subset A^*_0 = \mathscr{A}$. Daí, $h_j(z) = 0$ se $k \leq j$ e $h_j(z) = 1$ para $1 \leq j \leq k-1$. Consequentemente,

$$\mathscr{L}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} h_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} h_j(z) + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} h_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Para $z \in M_\infty$, temos $z \in \bigcap_{j=0}^{\infty} A^*_j$, logo $h_j(z) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e

$$\mathscr{L}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Isto é, a função $\mathscr{L}$ é constante em cada M_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e ordena a família $\mathbf{M}_\infty$. O que completa a prova do teorema. □

Dos resultados provados nos Teoremas 4.2.9, 4.2.10 e 4.2.11 obtemos, assim como no caso em que a família de invariantes fracos é finita, o seguinte resultado de equivalências.

Teorema 4.2.12. Seja G um semifluxo multívoco com atrator global $\mathscr{A}$ e uma família disjunta de invariantes fracos $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup M_\infty$ em $\mathscr{A}$ tal que para M_j é isolado para cada $j \in \mathbb{N}$. As seguintes propriedades são equivalentes:

1. G é dinamicamente gradiente generalido com respeito a $\mathbf{M}_\infty$.
2. A família $\mathbf{M}_\infty$ gera uma decomposição de Morse generalizada para o atrator global $\mathscr{A}$ com respeito a G.
3. Existe um funcional de Lyapunov generalizado $\mathscr{L}: \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ associado à família $\mathbf{M}_\infty$ o qual a ordena.

4.3 Aplicação

Nesta seção vamos aplicar a teoria desenvolvida durante o capítulo para uma inclusão de reação-difusão. Na verdade, esta inequação foi a maior motivação para o estudo das decomposições de Morse de forma abstrata. O exemplo foi tratado em (ARRIETA; RODRÍGUEZ-BERNAL; VALERO, 2006), em que os autores fazem um estudo detalhado da inequação.

Consideremos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H_0(u) + \omega u, \text{ on } \Omega \times (0,T) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4.3.1}$$

em que $\Omega = (0,1)$, $0 \leq \omega < \pi^2$, e H_0 é a função de Heaviside

$$H_0(u) = \begin{cases} -1, & \text{se } u < 0, \\ [-1,1], & \text{se } u = 0, \\ 1, & \text{se } u > 0. \end{cases}$$

Lembramos de (ARRIETA; RODRÍGUEZ-BERNAL; VALERO, 2006) que (4.3.1) pode ser rescrita na forma abstrata

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \partial\psi^1(u) - \partial\psi^2(u) \ni 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

em que $\partial\psi^1$ e $\partial\psi^2$ são subdiferenciais das funções próprias, convexas, semicontínuas inferiormente $\psi^i \colon L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ dadas por

$$\psi^1(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, & \text{se } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\partial\psi^1(u) = \left\{ y \in L^2(\Omega) : y(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x), \text{ q.s. em } \Omega \right\}.$$

$$\psi^2(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left(\omega\frac{u^2}{2} + |u| \right) dx, & \text{se } |u(\cdot)| \in L^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\partial\psi^2(u) = \left\{ y \in L^2(\Omega) : y(x) \in H_0(u(x)) + \omega u(x), \text{ q.s. em } \Omega \right\}.$$

Observamos que $|u| = \int_0^u H_0(s)ds$, mais ainda $D(\partial\psi^1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $D(\partial\psi^2) = L^2(\Omega)$.

Diremos que a função $u \in \mathscr{C}([0,T], L^2(\Omega))$ é uma *solução forte* de (4.3.1) se:

1. $u(0) = u_0$;
2. $u(\cdot)$ é absolutamente contínua em $(0,T)$ e $u(t) \in D(\partial\psi^1)$ para quase todo $t \in (0,T)$;
3. Existe uma função $g \colon \mathbb{R}^+ \to L^2(\Omega)$, tal que $g(t) \in \partial\psi^2(u(t))$, q.s. em $(0,T)$ e

$$\frac{du(t)}{dt} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g(t) = 0, \text{ para quase todo } t \in (0,T), \tag{4.3.2}$$

ou, alternativamente,

$$\frac{du(t)}{dt} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(t) = \omega u, \text{ para quase todo } t \in (0,T) \tag{4.3.3}$$

em que, para quase todo $t > 0$ e $x \in \Omega$, temos $h(t,x) \in H_0(u(t,x))$ e $h(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$, e as igualdades são entendidas no sentido do espaço $L^2(\Omega)$.

Denotemos por $W^+ = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ e por $\mathscr{R} \subset W^+$ o conjunto de todas as soluções fortes de (4.3.1) tais que $g \in L^2_{loc}([0,\infty); L^2(\Omega))$.

Lema 4.3.1. O conjunto $\mathscr{R}$ satisfaz as hipóteses (H1)-(H4).

Demonstração. As provas de (H1), (H2) e (H3) podem ser encontradas em (VALERO, 2001, Lemma 2) e não faremos aqui. Provaremos, então, que vale (H4).

Sejam $x_n \to x$ e $u_n \in \mathscr{R}$ tais que $u_n(0) = x_n$. Como consequência da prova da semicontinuidade superior do semifluxo G, segue de (VALERO, 2001, Prova do Lemma 2.5) que existem $u \in \mathscr{R}$ com $u(0) = x$ e uma subsequência de u_n, a qual ainda será denotada por u_n, tais que

$$u_n \to u \text{ em } C([\varepsilon, T), L^2(\Omega)) \text{ para todo } 0 < \varepsilon < T.$$

Resta mostrarmos que $u(t_n) \to u(0)$ se $t_n \to 0^+$.

Multiplicando (4.3.3) por u_n obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|_{L^2}^2 + \|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 &\leq C_1\|u_n(t)\|_{L^2} + \omega\|u_n(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_2 + \left(\omega + \frac{\pi^2 - \omega}{2}\right)\|u_n(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Como $\|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 \geq \pi^2\|u_n(t)\|_{L^2}^2$, depois de integrarmos, obtemos

$$\|u_n(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_n(s)\|_{L^2}^2 + C_3(t-s), \text{ para todo } t \geq s \geq 0. \tag{4.3.5}$$

A mesma desigualdade vale para a função limite u. Portanto, as funções $J_n(t) := \|u_n(t)\|_{L^2}^2 - C_3 t$ são não crescentes e contínuas. Consequentemente,

$$J_n(t_n) - J(0) \leq J_n(0) - J(0) \to 0.$$

Isso implica que $\limsup_n J_n(t_n) \leq J(0)$, daí $\limsup_n \|u_n(t_n)\|_{L^2}^2 \leq \|u_n(0)\|_{L^2}^2$.

Por outro lado, notamos que, em vista de (4.3.4) e (4.3.5), a sequência u_n é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, a equação (4.3.3) implica que $\frac{du_n}{dt}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Portanto, por (4.3.5) obtemos que $u_n(t_n) \to u(0)$ fracamente em H^1 e, dessa maneira $\|u_n(0)\|_{L^2}^2 \leq \liminf_n \|u_n(t_n)\|_{L^2}^2$.

Obtemos então que $\|u_n(t_n)\|_{L^2}^2 \to \|u_n(0)\|_{L^2}^2$, quando $n \to \infty$, e, finalmente, $u_n(t_n) \to u(0)$ em H^1, como era desajado. $\square$

A aplicação multívoca $G \colon \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega) \to \mathscr{P}(L^2(\Omega))$ definida como em (2.7.3) é um m-semifluxo estrito associado à família $\mathscr{R}$. Mais ainda, o conjunto $G(t,u)$ é compacto e o m-semifluxo é semicontínuo superiormente.

Sabemos também que G possui um atrator global compacto e invariante, $\mathscr{A}$, (ARRIETA; RODRÍGUEZ-BERNAL; VALERO, 2006, p.2968-2069). Mais ainda, $\mathscr{A}$ é conexo e compacto em $H_0^1(\Omega)$.

Para este sistema podemos descrever explicitamente seus pontos fixos. Existem um número infinito, porém enumerável, de equilíbrios. Para $\omega = 0$ os pontos fixos de (4.3.1) são:

$$
\begin{aligned}
& v_0 \equiv 0 \\
& v_1^+(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}, && v_1^-(x) = -v_1(x)^+ \\
& v_2^+(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}, & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{4}, & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} && v_2^-(x) = -v_2^+(x) \\
& \quad \vdots && \quad \vdots \\
& v_n^+(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2n}, & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ -\frac{(x-\frac{k}{n})^2}{2} + \frac{x-\frac{k}{n}}{2n}, & \text{se } \frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n}, k \text{ é par}, \\ \frac{(x-\frac{k}{n})^2}{2} - \frac{x-\frac{k}{n}}{2n} & \text{se } \frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n}, k \text{ é ímpar}. \end{cases} && v_n^-(x) = -v_n^+(x).
\end{aligned}
$$

Para o caso geral $0 < \omega < \pi^2$ os pontos fixos são semelhantes, porém com fórmulas um pouco mais complexas, veja em (ARRIETA; RODRÍGUEZ-BERNAL; VALERO, 2006). Estes são os únicos pontos fixos do sistema.

Diferentemente do caso unívoco, os pontos fixos não são invariantes em geral, como podemos ver no Exemplo 2.7.7, e também no resultado a seguir.

Teorema 4.3.2. (ARRIETA; RODRÍGUEZ-BERNAL; VALERO, 2006, Theorem 6.7) Suponhamos que $\omega = 0$. Para qualquer v_k^+, respectivamente v_k^-, existe uma solução u_k^+, respectivamente u_k^-, tal que $u_k^{\pm}(0) = v_0 = 0$ e $u_k^+(t) \to v_k^+$, respectivamente v_k^-, quando $t \to \infty$.

Portanto o conjunto composto pelo ponto fixo v_0 é fracamente invariante porém não positivamente invariante.

Defina a função contínua $E : H_0^1(\Omega) \to \mathscr{R}$ pondo

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx - \int_0^1 \left(|u| + \frac{\omega}{2}u^2\right) dx.$$

Para uma solução arbitrária u de (4.3.1) as seguintes propriedades são válidas:

1. $(0,\infty) \ni t \mapsto E(u(t))$ é contínua;

2. $E(u(t)) \le E(u(s))$, se $t \ge s > 0$;

3. se $E(u(t)) = E(u(0))$, para algum $t > 0$, então $u(\tau) = u(0)$ para $\tau \in [0,t]$, isto é, $v := u(0)$ é um ponto fixo.

4. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $E(u(t))$ é contínua também em $t = 0$.

No caso em que $\omega = 0$, não é difícil ver que $E(v_0) = 0$ e $E(v_n^+) = E(v_n^-) = -\frac{1}{24n^2}$, para $n \geq 1$. Isto quer dizer que os pontos fixos são ordenados pela função E da seguinte maneira:

$$E(v_0) > \ldots > E(v_n^{\pm}) > \ldots > E(v_1^{\pm}).$$

O mesmo é verdadeiro para qualquer $0 \leq \omega < \pi^2$.

Lema 4.3.3. (ARRIETA; RODRÍGUEZ-BERNAL; VALERO, 2006, Lemma 5.1) Se $\varphi(t)$ é uma solução de (4.3.1), então existe um equilíbrio z tal que $\omega(\varphi) = \{z\}$ e $\varphi(t) \to z$, quando $t \to +\infty$. O mesmo é válido para o α-limite de uma trajetória completa limitada ψ de $\mathscr{R}$.

Obteremos uma decomposição de Morse e um funcional de Lyapunov no espaço $L^2(\Omega)$. Observe que o funcional E satisfaz as propriedades de um funcional de Lyapunov, exceto que é contínuo em $H_0^1(\Omega)$, mas não em $L^2(\Omega)$.

Já vimos que o atrator global $\mathscr{A}$ é composto pelas trajetórias completas e limitadas de $\mathscr{R}$. Mais precisamente, devido ao Lema 4.3.3, $\mathscr{A}$ consiste dos pontos fixos e de trajetórias completas e limitadas ψ que conectam dois pontos fixos. Isto é,

$$z_2 \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \psi(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} z_1 \tag{4.3.6}$$

em que z_1, z_2 são pontos fixos. Segue das propriedades de E que se ψ não é um ponto fixo, então ou $z_2 = v_0$ e $z_1 = v_n^{\pm}$, $n \geq 1$, ou $z_2 = v_k^{\pm}$ e $z_1 = v_n^{\pm}$ com $k > n$. Isto significa que uma conexão saindo de z_2 e chegando em z_1 só é possível se

$$E(z_2) > E(z_1). \tag{4.3.7}$$

Definamos os conjuntos

$$M_k = \{v_k^+, v_k^-\}, k \in \mathbb{N}$$
$$M_\infty = \{v_0\}.$$

Está claro que estes conjuntos são fracamente invariantes. Note que $\max_{x\in[0,1]} |v_n(x)| = \frac{1}{8n^2}$, consequentemente $v_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Também, como $M_k \cap M_j = \emptyset$, para $k \neq j$, e os conjuntos M_k são compactos, por (CARABALLO *et al.*, 2015, Lemma 3.9) para qualquer $k \in \mathbb{N}$ existe um $\delta_k > 0$ tal que

$$\mathscr{O}_{\delta_k}(M_k) \cap \mathscr{O}_{\delta_k}(M_j) = \emptyset, \text{ se } j \neq k. \tag{4.3.8}$$

Afirmamos que, para $k \in \mathbb{N}$, o conjunto M_k é isolado. De fato, escolhendo $\delta_k > 0$ como em (4.3.8), M_k é o invariante fraco maximal em $\mathscr{O}_{\delta_k}(M_k)$, pois, caso contrário, existiria uma trajetória limitada e completa ψ em $\mathscr{O}_{\delta_k}(M_k)$ tal que $\psi(0) \notin M_k$. Mas isso não é possível, uma vez em que neste caso $\psi(t) \to M_j$, com $j < k$, quando $t \to +\infty$, uma contradição.

Concluímos, então, que $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{M_\infty\}$ é uma família disjunta de invariantes fracos tais que M_j é isolado para cada $j \in \mathbb{N}$.

De (4.3.6) segue que o m-semifluxo G é dinamicamente gradiente generalizado com respeito à família $\mathbf{M}_\infty$ e dos Teoremas 4.2.9 e 4.2.11 obtemos:

Teorema 4.3.4. A família $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^\infty \cup \{M_\infty\}$ induz uma decomposição de Morse generalizada para o semifluxo multívoco G, que possui uma função de Lyapunov $\mathscr{L}$ que ordena o conjunto $\mathbf{M}_\infty$. Os atratores locais são dados por

$$A_k = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(M_j),\, k \in \mathbb{N} \tag{4.3.9}$$

$$A_\infty = \mathscr{A} = \bigcup_{j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} W^u(M_j). \tag{4.3.10}$$

Podemos considerar o m-semifluxo G_X definido no espaço $X = \mathscr{A}$ com a norma induzida pela topologia de $H_0^1(\Omega)$. Como $\mathscr{A}$ é compacto em $H_0^1(\Omega)$, (4.3.6) e (4.3.7) são também satisfeitas com respeito à topologia de $H_0^1(\Omega)$. Argumentando como antes, a família $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^\infty \cup \{M_\infty\}$ é uma família disjunta de invariantes fracos tais que M_j é isolado para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Mais ainda, está claro que o m-semifluxo G_X é dinamicamente gradiente generalizado com respeito à família $\mathbf{M}_\infty$. A função E define um funcional de Lyapunov generalizado que ordena os conjuntos de $\mathbf{M}_\infty$.

Teorema 4.3.5. A família $\mathbf{M}_\infty = \{M_j\}_{j=1}^\infty \cup \{M_\infty\}$ induz uma decomposição de Morse generalizada para o semifluxo multívoco G_X. Os tratores locais A_k são dados por (4.3.9).

Observamos, como consideração final, que os atratores locais coincidem em ambos casos, pois as variedades instáveis dos invariantes fracos M_j são as mesmos tanto na topologia de L^2 quanto na de H_0^1. Porém, por outro lado, o funcional de Lyapunov $\mathscr{L}_X$ garantido pelo Teorema 4.2.12 é, a princípio, apenas semicontínuo superiormente e, dessa maneira, pode não ter ligação com E.

CAPÍTULO

5

CONTINUIDADE DE ATRATORES PARA CHAFEE-INFANTE

Neste capítulo estudaremos um problema de continuidade especial. Diferentemente dos exemplos nos capítulos anteriores, neste problema a teoria desenvolvida anteriormente não pode nos auxiliar. Isso se dá, principalmente, ao fato de que os equilíbrios do sistema limite são um conjunto não enumerável, há um contínuo de equilíbrios. Dessa maneira, mesmo que exista uma função que satisfaça alguns dos critérios de um funcional de Lyapunov para o sistema as consequências não serão imediatas (tampouco temos garantia de serem verdadeiras). Analogamente ao caso dos semifluxos skew-product, soluções dos sistemas perturbados não estão no mesmo espaço do sistema dinâmico limite, o que cria outro problema com respeito a como podemos compará-los.

Nossa análise então é diversificada em estratégias. Primeiramente descreveremos explicitamente o problema que nos propomos a investigar. Na Seção 5.1 respondemos se os atratores globais dos sistemas considerados se comportam de maneira semicontínua superior e na Seção 5.2 discutimos a semicontinuidade inferior.

Consideramos um problema de Chafee-Infante definido em $\mathbb{R}$. Mais precisamente,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u - u^3, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{5.0.1}$$

Os resultados da Seção 2.6 garantem que soluções da equação (5.0.1) geram um semigrupo nos espaços localmente uniformes, $\dot{W}_U^{2\alpha,p}(\mathbb{R})$ se $\alpha \in [0,1)$, $2\alpha > \frac{1}{p}$ e $p \geq 2$, ver ainda (CHOLEWA; RODRÍGUEZ-BERNAL, 2009, Theorems 1.1 e 1.2). Mais ainda, tais soluções satisfazem a fórmula da variação das constantes e se $2\alpha - \frac{1}{p} > 1$, então

$$u \in C\big([0,\infty), \dot{W}_U^{2\alpha,p}(\mathbb{R})\big) \cap C\big((0,\infty), \dot{W}_U^{2,p}(\mathbb{R})\big) \cap C^1\big((0,\infty), \dot{W}_U^{s,p}(\mathbb{R})\big)$$

com $0 \leq s < 2$, (ARRIETA *et al.*, 2007, Proposition 1.1).

Disto fica claro o porquê da escolha de trabalharmos nos espaços uniformemente locais. Os espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ são muito restritivos, de modo que as funções constantes e periódicas não são p-integráveis. Isto limitaria a dinâmica do problema, uma vez que, como podemos perceber na Seção 2.8, grande maioria dos equilíbrios de (5.0.1) são periódicos. Trabalhando nos espaços localmente uniforme adicionamos também os equilíbrios constantes $+1$ e -1 à análise.

Há muitas maneiras de abordar o problema do ponto de vista da dinâmica assintótica. Recordaremos um conceito de atrator global fraco, cuja atração é feita numa norma (topologia) mais fraca que a do espaço fase. Mais precisamente, seja $\rho:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ uma função peso pertencente a classe $\mathscr{I}$, Definição 2.6.1. Em adição, suponhamos que

$$|\partial_x\rho(x)|\leq\rho_0\rho(x).$$

Um exemplo comum de ρ em $\mathbb{R}^n$ é a função $\left(1+|x|^2\right)^{-\nu}$, $x\in\mathbb{R}^n$ e $\nu>\frac{n}{2}$. Consideramos, assim, os espaços com peso $W_\rho^{k,p}(\mathbb{R})$:

$$L_\rho^p(\mathbb{R})=\left\{u\in L_{loc}^p(\mathbb{R}):\int_{\mathbb{R}}|u(x)|^p\rho(x)dx<\infty\right\}.$$

Então (5.0.1) possui um $(\dot{W}_U^{2\alpha,p}(\mathbb{R})-W_\rho^{s,p}(\mathbb{R}))$-atrator, o qual denotamos por $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$. Isto quer dizer que

(i) $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ é fechado e limitado em $\dot{W}_U^{2\alpha,p}(\mathbb{R})$ $\big($de fato, $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ é limitado em $\dot{W}_U^{2,p}(\mathbb{R})\big)$;

(ii) $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ é compacto em $W_\rho^{s,p}(\mathbb{R})$; e

(iii) $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ atrai limitados de $\dot{W}_U^{2\alpha,p}(\mathbb{R})$ na topologia de $W_\rho^{s,p}(\mathbb{R})$, com $s<2$.

Lema 5.0.1. (CHOLEWA; DLOTKO, 2004, Theorem 1) O atrator global $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ é invariante pelo grupo de translações de $\mathbb{R}$, isto é,

$$\tau_y\mathscr{A}_{\mathbb{R}}=\mathscr{A}_{\mathbb{R}},\ \text{para todo}\ y\in\mathbb{R}.$$

A função de Lyapunov (2.8.2), utilizada no domínio $(0,\pi)$, poderia ser adaptada para os espaços localmente uniformes e com peso. Porém observamos que há um contínuo de equilíbrios nos espaços localmente uniformes, o que é explicitado pelo Lema 5.0.1. Assim, a teoria que descrevemos no Capítulo 2 não se aplica imediatamente. Nem mesmo os resultados unívocos correspondentes do Capítulo 4 podem ser utilizados, pois é suposto que os equilíbrios sejam uma família enumerável. Consequentemente, não podemos afirmar que o atrator global $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ é a união das variedades instáveis de seus equilíbrios e esta é uma das maiores dificuldades do problema: não somos capazes de caracterizar o atrator global limite.

Aproximaremos o problema (5.0.1) por problemas parabólicos semelhantes em domínios limitados que preenchem a reta conforme passamos o limite. Precisamente, seja $r>0$ e consideramos os intervalos $\Omega_r := (-r,r)$. Temos, então, a equação de Chafee-Infante no domínio limitado Ω_r:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u - u^3 \text{ em } \Omega_r \\ u_x(t,-r) = 0 = u_x(t,r),\ t \geq 0, x \in \partial\Omega_r \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{5.0.2}$$

com condição de fronteira de tipo Neumann homogêneas. Impomos estas condições de fronteira pois as constantes ± 1 pertencem ao atrator $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ e, com condições de Neumann, notamos que tais constantes são também equilíbrios do problema (5.0.2), logo pertencem ao atrator global do sistema, o qual denotamos por $\mathscr{A}_r$.

A fim de aplicarmos as conclusões da Seção 2.8 para o problema (5.0.2) devemos ser capazes de transformar um problema no outro. Mais precisamente, transformar o problema (5.0.2) no problema (2.8.1) definido no intervalo $(0,\pi)$ com $\lambda > 0$. Vamos descrever rapidamente os passos que devem ser feitos.

Primeiramente transladamos o problema de $(-r,r)$ para $(0,2r)$, da maneira usual, definindo $\tilde{u} = \tau_{-r}u = u(\cdot + r)$. O que não influencia as derivações, logo $\tilde{u}$ e u são soluções do mesmo problema com as devidas translações de domínio e condições de fronteira.

Devemos, então, escalonar a variável x definindo $\tilde{x} = \frac{2r}{\pi}x$ e tomando $\tilde{t} = \frac{\pi^2}{4r^2}t$, segue que $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ é solução da equação

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{2r^2}{\pi^2}\left(\tilde{u} - \tilde{u}^3\right)$$

no intervalo $(\tilde{t},\tilde{x}) \in [0,\infty) \times [0,\pi]$.

Finalmente, multiplicamos a solução $\tilde{u}$ por $\frac{2r}{\pi}$ e obtemos a equação como em (2.8.1). Isto é, $v(t,x) := \frac{2r}{\pi}u\left(\frac{\pi^2}{4r^2}t, \frac{2r}{\pi}x + r\right)$ é uma solução de (2.8.1) em $[0,\pi]$ com $\lambda = \frac{4r^2}{\pi^2}$ se u é uma solução de (5.0.2) em $[-r,r]$.

Dessa maneira validamos as conclusões da Seção 2.8, com alguns cuidados, pois as condições de fronteira são distintas. Soluções do problema geram um semigrupo em $W^{1,p}_{\mathscr{N}}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega_r)$, $p \geq 2$, o qual possui um atrator global $\mathscr{A}_r$. As conclusões sobre os equilíbriuos em $\mathscr{A}_r$ continuam válidas, porém estes são transladados uma vez em que devem começar e terminar em eixos diferentes do plano de fase de (2.8.4). Mais ainda, agora as soluções constantes $\phi^+ \equiv +1$ e $\phi^- \equiv -1$ são equilíbrios de (5.0.2). Novamente, o atrator global $\mathscr{A}_r$ é dado pela variedade instável dos equilíbrios do sistema, uma vez em que o semigrupo gerado é gradiente.

Lembramos que equilíbrios de (5.0.2) também possuem energia E, definida como abaixo, constante

$$E(u,u_x) = \frac{u_x^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}. \tag{5.0.3}$$

Da simetria do sistema, e do cálculo do ‘tempo’ $x(E)$ feito em (2.8.6), sempre que $nx(E) = r$, $n \in \mathbb{N}$, existe um equilíbrio com com energia E do problema (5.0.2) em Ω_r.

5.1 A semicontinuidade superior de atratores globais

Nesta seção provamos que os atratores $\mathscr{A}_r$ e $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ descritos na seção anterior se comportam de forma semicontínua superior. Baseamos nosso trabalho no artigo (MIELKE, 1997), em que o autor desenvolve a semicontinuidade superior para uma classe de equações de Ginzburg-Landau um tanto semelhante com o nosso caso.

Introduzimos uma função peso que funciona também como uma função de corte, para compararmos as funções definidas em toda reta apenas nos intervalos Ω_r. Seja $\rho_*\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ o peso auxiliar definido pondo

$$\rho_*(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{se } |x| \le r-1, \\ (r-|x|)^{p+2}\rho(x), & \text{se } |x| \in (r-1,r], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

É fácil verifcar que a derivada de ρ_* satisfaz

$$\frac{\partial \rho_*(x)}{\rho_*(x)} \le \rho_0 + \frac{(p+2)\chi_{(r-1,r)}(|x|)}{r-|x|}, \text{ para } x \in (-r,r), \tag{5.1.2}$$

em que $\chi_{(a,b)}\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ denota a função característica do intervalo (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$, isto é $\chi_{(a,b)}(s) = 1$, se $a<s<b$, e $\chi_{(a,b)}(s) = 0$, caso contrário.

Nosso objetivo é estabelecer o teorema:

Teorema 5.1.1. Com as notações acima, vale que

$$\operatorname{dist}_{\rho_*}(\mathscr{A}_r, \mathscr{A}_{\mathbb{R}}) \to 0 \text{ quando } r \to \infty, \tag{5.1.3}$$

em que $\operatorname{dist}_{\rho_*}(A,B)$ é a semidistância de Hausdorff usual com a seminorma

$$\|u\|_{p,\rho_*} := \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p \rho_*(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 5.1.2. O espaço $L^p_{\rho_*}(\Omega)$ não é um espaço de Banach nem a função auxiliar ρ_* definida é um peso propriamente dito, uma vez que assume valores nulos. Contudo esta é justamente a sua importância, nos permite comparar funções definidas em domínios diferentes.

Demonstração. Começamos estimando a diferença de soluções de (5.0.1) e (5.0.2) na norma de L^p em Ω_r com o peso auxiliar ρ_*.

Denotaremos por $u_1(t) = T_r(t)u_0$ a solução de (5.0.2) com condições iniciais $u_0 \in W^{1,p}_{\mathcal{N}}(\Omega_r) \cap W^{2,p}(\Omega_r)$ e por $u_2(t) = T_{\mathbb{R}}(t)v_0$ a solução de (5.0.1) com condições iniciais $v_0 \in \dot{W}^{s,p}_U(\mathbb{R}^n)$. Seja $w(t) := u_2(t) - u_1(t)$. Observamos que, para $x \in (-r,r)$ temos

$$w_t = w_{xx} + w - (u_1+w)^3 + {u_1}^3.$$

Multiplicando por $w|w|^{p-2}$ obtemos

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}|w|^p = w_{xx}w|w|^{p-2} + |w|^p + w|w|^{p-2}\left(-(u_1+w)^3 + {u_1}^3\right). \tag{5.1.4}$$

Note que $-w|w|^{p-2}((u_1+w)^3 + w{u_1}^3) = |w|^p(-w^2 - 3wu_1 - 3{u_1}^2)$. Maximizando a parábola em u_1 segue que

$$-w|w|^{p-2}\left((u_1+w)^3 + {u_1}^3\right) \leq \frac{-w^{p+2}}{4}.$$

Multiplicando (5.1.4) por ρ_* e integratando sobre $\mathbb{R}$, temos

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w\|^p_{p,\rho_*} \leq \int_{\mathbb{R}} w_{xx}w|w|^{p-2}\rho_* dx + \|w\|^p_{p,\rho_*} - \frac{1}{4}\|w\|^{p+2}_{p+2,\rho_*}.$$

O primeiro termo da desigualdade pode ser estimado integrando por partes, daí

$$\int_{\mathbb{R}} w_{xx}w|w|^{p-2}\rho_* dx = \int_{\mathbb{R}} \left[-(p-1){w_x}^2|w|^{p-2}\rho_* - w_x|w|^{p-2}\partial_x\rho_*\right] dx.$$

Já o segundo termo, maximizamos a parábola em w_x para obtermos

$$-(p-1)w^{p-2}\rho_*\xi^2 - w^{p-1}\partial_x\rho_*\xi \leq \frac{w^{2(p-1)}\partial_x\rho_*^2}{4(p-1)w^{p-2}\rho_*}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} w_{xx}w|w|^{p-2}\rho_* dx &\leq \frac{1}{4(p-1)}\int_{\mathbb{R}} |w|^p\rho_*\frac{|\partial_x\rho_*|^2}{{\rho_*}^2}dx \\
&\leq \frac{\rho_0^2}{2(p-1)}\int_{\mathbb{R}}|w|^p\rho_* dx + \frac{(p+2)^2}{2(p-1)}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{(r-1,r)}(|x|)|w|^p\rho_*}{(r-|x|)^2}dx \\
&\leq \frac{\rho_0^2}{2(p-1)}\|w\|^p_{p,\rho_*} + \frac{(p+2)^2}{2(p-1)}\|w\|^p_{p+2,\rho_*}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{(r-1,r)}\rho_*}{(r-|x|)^{p+2}}dx\right)^{\frac{2}{p+2}} \\
&\leq \frac{\rho_0^2}{2(p-1)}\|w\|^p_{p,\rho_*} + \frac{1}{4}\|w\|^{p+2}_{p+2,\rho_*} + C(p)\int_{|x|\geq r-1}\rho(x)dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w\|^p_{p,\rho_*} \leq \left(1 + \frac{\rho_0^2}{2(p-1)}\right)\|w\|^p_{p,\rho_*} + C(p)\int_{|x|\geq r-1}\rho(x)dx. \tag{5.1.5}$$

Como $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ a integral $\int_{|x|\geq r}\rho(x)dx$ é finita para cada $r > 0$. Aplicando a desigualdade de Gronwall em (5.1.5), obtemos

$$\|u_2(t) - u_1(t)\|_{p,\rho_*} \leq \mathrm{e}^{C(p)t}\left(\|u_2(0) - u_1(0)\|_{p,\rho_*} + C(p)C_*^{1/p}\right) \tag{5.1.6}$$

em que $C_* = \int_{|x|\geq r-1}\rho(x)dx$ e $C(p)$ é uma constante que depende apenas de p.

Com a estimativa acima somos capazes de finalizar a demonstração do teorema.

Fixemos $r > 0$ e seja $u_0 \in \mathscr{A}_r$. Sabemos que $\mathscr{A}_r$ é invariante, logo para todo $t > 0$ existe $u_{-t} \in \mathscr{A}_r$ para o qual $T_r(t)u_{-t} = u_0$. Daí,

$$\mathrm{dist}_{\rho_*}(u_0, \mathscr{A}_{\mathbb{R}}) \leq \|T_r(t)u_{-t} - T_{\mathbb{R}}(t)Eu_{-t}\|_{p,\rho_*} + \mathrm{dist}_{\rho_*}(T_{\mathbb{R}}(t)Eu_{-t}, \mathscr{A}_{\mathbb{R}}), \tag{5.1.7}$$

em que $E\colon W^{1,p}_{\mathscr{N}}(-r,r) \cap W^{2,p}(-r,r) \to \dot{W}^{2,p}_U(\mathbb{R}^n)$, um operador extensão, definido de tal forma que Eu seja periódica com periódo no máximo $2r$.

Como sabemos da existência de um conjunto que absorve conjuntos limitados por (5.0.1) (mais precisamente $\mathscr{B} = \{u \in \dot{W}^{s,p}_U(\mathbb{R}^n); \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\}$ absorve conjuntos limitados sob ação de $T_{\mathbb{R}}$ em $L^p_\rho(\mathbb{R}^n)$, veja, por exemplo, (ARRIETA *et al.*, 2007, Lemma 2.7)), estimamos o segundo termo da desigualdade anterior pela atração de $E\mathscr{A}_r \subset \mathscr{B} \subset \dot{W}^{s,p}_U(\mathbb{R}^n)$ por $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$. De (5.1.6), $\|T_r(t)u_{-t} - T_{\mathbb{R}}(t)Eu_{-t}\|_{p,\rho_*} \leq C\mathrm{e}^{Ct}C_*$, pois as condições iniciais coincidem em Ω_r. Lembramos que t é arbitrário, logo podemos tomar um ótimo que minimize o lado direito da equação. Assim,

$$\mathrm{dist}_{\rho_*}(u_0, \mathscr{A}_{\mathbb{R}}) \leq \min_{t\in\mathbb{R}} \left\{ Ce^{Ct}C_* + \mathrm{dist}_{\rho_*}(T_{\mathbb{R}}(t)\mathscr{B}, \mathscr{A}_{\mathbb{R}}) \right\}. \tag{5.1.8}$$

Ainda mais, quando $r \to \infty$ a integral de $\rho(x)$ tende a zero, pois ρ é positiva e $\rho \in L^1(\mathbb{R})$, consequentemente $C_* \to 0$ quando $r \to \infty$. Portanto o lado direito de (5.1.8) tende a zero quando $r \to \infty$.

Demonstramos então o Teorema 5.1.1, uma vez em que a escolha de $u_0 \in \mathscr{A}_r$ foi arbitrária. □

5.2 Sobre a semicontinuidade inferior

Nesta seção vamos discutir a semicontinuidade inferior dos atratores globais, tratando os novos avanços no assunto e os passos que não fomos capazes de resolver, por questões de grau de dificuldade de análise e tempo, que completariam a análise possivelmente chegando a um resultado positivo. Em (MIELKE, 1997), o autor deixa apenas uma conjectura de que seja verdadeira a semicontinuidade inferior do sistema Ginzburg-Landau trabalhado por ele.

A semicontinuidade inferior é particularmente mais difícil de ser obtida nos sistemas dinâmicos. Resultados que envolvem tal semicontinuidade necessitam um amplo conhecimento do atrator global do problema limite, como pode ser visto nos resultados da Seção 2.2. Nos casos em que o semigrupo limite é de tipo gradiente e as perturbações são pequenas, mesmo que não autônomas, podemos afirmar que há semicontinuidade inferior. Um importante resultado neste sentido supõe que o atrator global limite é dado pela união das variedades instáveis de seus finitos equilíbrios, existem também generalizações para quando o conjunto de equilíbrios é enumerável, porém em ambos casos é suposto que o conjunto de equilíbrios e suas variedades instáveis se comportam continuamente.

O problema limite em $\mathbb{R}$ possui algumas patalogias. A princípio há um contínuo de equilíbrios, uma vez em que cada translação de um equilíbrio em $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ é também um equilíbrio do sistema. Portanto não é possível obter semicontinuidade inferior apenas com problemas do tipo (5.0.2) postos no domínio Ω_r, $r>0$, que são intervalos centrados na origem.

Para ser um pouco mais específico na comparação com o caso dos domínios limitados, seja $E_0 \in (0,1/4)$ e $x(E_0)$ como em (2.8.6). Consideramos o subconjunto da reta

$$R(E_0) := \{x(E_0)j : j \in \mathbb{N}\}.$$

É claro que $R(E_0)$ é enumerável e notemos que existe um equilíbrio u^* de (5.0.2) em Ω_r com energia $E(u^*) = E_0$ se, e somente se, $r \in R(E_0)$. Conforme variamos r, vemos que os equilíbrios que possuem energia E_0 em diferentes domínios Ω_r compartilham o mesmo traço no plano de fase de (2.8.4).

Também sabemos que u_* possui $j-1$ zeros em $(-r,r)$ e eles são dados por $x_k = 2x(E_0)k - r$, $k = 1,2,\ldots,j-1$. Notemos que se $j \in \mathbb{N}$ é par, digamos $j = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, então $x_m = 2x(E_0)m - r = x(E_0)j - r = 0$, consequentemente $u_*(0) = 0$. Se j é ímpar, então $u^*(0) = \pm u_0$, onde u_0 é dado pelas raízes do polinômio $2E_0 + u_0^2 - u_0^4/2 = 0$, e $\partial_x u^*(0) = 0$, isto é, u^* atinge um máximo ou mínimo local em 0. Isto significa, dentre outras coisas, que o valor do equilíbrio em $x = 0$ está preso a um subconjunto finito de possíveis valores.

Disto concluímos que de todas as translações dos equilíbrios que possuem mesmo nível de energia E_0 em $\mathbb{R}$, apenas quatro deles (considerando a simetria do sistema) possuem representante na família de equilíbrios dos domínios limitados.

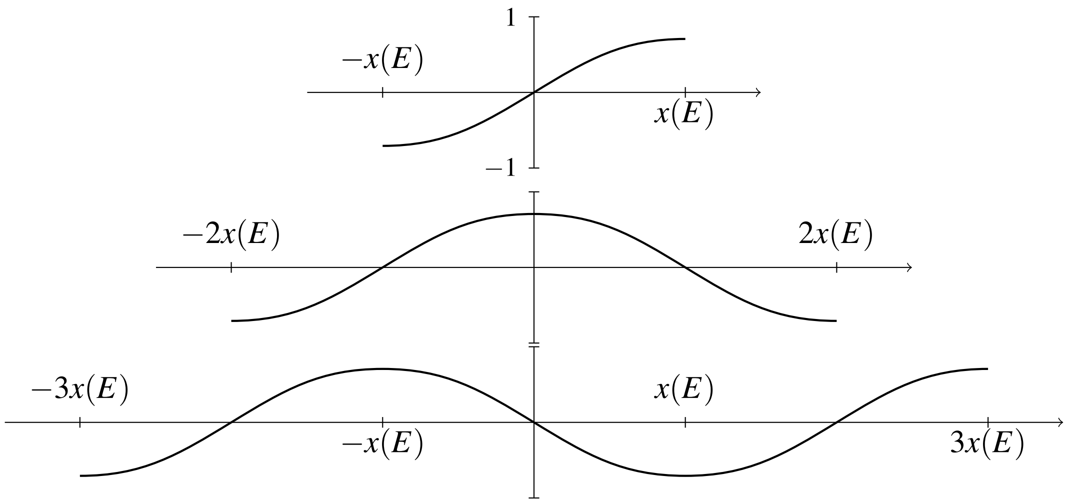

Figura 4 – Gráficos de equilíbrios com mesmo valor de E, porém diferentes domínios

A fim de superar este obstáculo trabalharemos com problemas do tipo (5.0.2) porém incluindo domínios transladados, mais precisamente, dados $r>0$ e $y \in \mathbb{R}$, consideramos o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u - u^3, \text{ em } (-r-y, r-y) \\ u_x(t,-r-y) = u_x(t,r-y) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Equilíbrios do problema (5.2.1) também têm as mesmas propriedades discutidas anteriormente quando o domínio é Ω_r. A única diferença é que agora os equilíbrios estão transladados em x.

Lema 5.2.1. Se denotamos por $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ o conjunto dos equilíbrios de (5.0.1) em $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ e seja

$$\mathscr{E}^*_{\mathbb{R}} := \{u_* \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}} : u_* \text{ é periódico}\},$$

o conjunto dos equilíbrios periódios em $\mathbb{R}$. Então vale que

$$\mathscr{E}^*_{\mathbb{R}}|_{\Omega_s} = \bigcup_{y\in\mathbb{R}} \bigcup_{r>s} \tau_y \mathscr{E}_r|_{\Omega_s}. \tag{5.2.2}$$

Isto é, dado equilíbrio periódico u_* em $\mathscr{E}^*_{\mathbb{R}}$ e $s > 0$, encontramos um $y \in \mathbb{R}$ e um r grande o suficiente, de modo que existe um equilíbrio $u = u(u_*, y, r, s)$ de (5.2.1), tal que as restrições de ambos coincidem em Ω_s.

Demonstração. Dado um equilíbrio periódico u_* em $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$, isto é, $E(u_*) \in (0, 1/4)$, vamos criar uma sequência de equilíbrios do problema nos domínios limitados tal que a sequência coincide com u_* para qualquer intervalo limitado $(-s,s)$, $s > 0$.

Fixemos $u_* \in \mathscr{E}^*_{\mathbb{R}}$ e $s > 0$ e denotemos por $u_0 := u_*(0) \in (-1,1)$. Seja $\{j_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de naturais com $j_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Para n suficientemente grande, seja $r_n := 2j_n x(E_0)$, de modo que $r_n > s + 2x(E_0)$. Logo existe equilíbrio u^n_* em Ω_{r_n} com energia E_0, mais ainda $u^n_*(0) = 0$.

Definamos $y := \min\{x \geq 0; u_*(x) = 0\}$. Afirmamos que $\tau_{-y} u^n_*(x) = \pm u_*(x)$, para todo $x \in \Omega_s$. De fato, ambos possuem o mesmo nível de energia e mesmo traço no plano de fase de (2.8.4). Pela escolha de y, temos $\tau_y u_*(0) = 0 = u^n_*(0)$ e, dessa forma, há apenas duas alternativas: ou $\tau_y u_*(x) = u^n_*(x)$ ou $\tau_y u_*(x) = -u^n_*(x)$, concluindo nossa afirmação.

A fim de escolher a sequência que coincide com u_* em Ω_s, prosseguimos da seguinte maneira: se o primeiro acontece não há o que fazer, caso $\tau_y u_*(x) = -u^n_*(x)$, renomeamos o n-ésimo termo da sequência substituindo-o por $\widetilde{u}^n_* := -u^n_*$,. Garantimos assim que a igualdade das restrições sempre ocorre. Em outras palavras, $u_*(x) = \tau_y u^n_*(x)$, para $x \in \Omega_s$, como era desejado. $\square$

Acima, escolhemos um equilíbrio periódico arbitrário de $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ e mostramos que existem $y \in \mathbb{R}$ e equilíbrios de $\mathscr{A}_r$ que, transladados por y, coincidem quando restritos a um domínio limitado Ω_s, para $s > 0$ arbitrário.

Com isso nós demonstramos a semicontinuidade da família de equilíbrios $\mathscr{E}_r$ e $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ com exceção dos equilíbrios com energia $E(u_*) = 1/4$. Estes equilíbrios não são periódicos e não estão presentes nos atratores do caso dos domínios limitados. Suas trajetórias conectam os equilíbrios -1 a $+1$ (ou vice-versa), isto é,

$$\lim_{x\to-\infty} u_*(x) = -1 \text{ e } \lim_{x\to\infty} u_*(x) = 1. \tag{5.2.3}$$

No lema a seguir demonstraremos a semicontinuidade inferior para pontos de equilíbrio desse tipo.

Lema 5.2.2. Com as notações adotadas neste capítulo, seja u_* um equilíbrio em $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ com $E(u_*) = 1/4$. Existe uma sequência de equilíbrios $\{u_*^n\}$ em $\mathscr{E}_{r_n}$, com $r_n \to \infty$, tal que

$$\|u_* - u_*^n\|_{p,\rho_*} \to 0, \text{ quando } n \to \infty, \tag{5.2.4}$$

em que ρ_* é um peso auxiliar definido como em (5.1.7).

Demonstração. Assumiremos, sem perda de generalidade, que vale (5.2.3) e que $u_*(0) = 0$. Construiremos, então, uma sequência de equilíbrios $\{u_*^n\}$ em $\mathscr{E}_{r_n}$, com $r_n \to \infty$, tal que

$$\|u_* - u_*^n\|_{p,\rho_*} \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{5.2.5}$$

Abusaremos das propriedades do sistema (2.8.4). Sabemos que u_* é solução para o problema de Cauchy

$$u_{xx} = -u + u^3, \tag{5.2.6}$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u_x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{5.2.7}$$

Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos v_ε a solução de (5.2.6) com condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v_x(0) = \frac{\sqrt{2(1-\varepsilon)}}{2} \end{cases} \tag{5.2.7.ε}$$

Observemos que conforme $\varepsilon \to 0$, a energia dos equilíbrios $E(u_\varepsilon) \to E(u_*)$.

Seja $\delta > 0$ dado. Denotamos por $r(\varepsilon)$, o primeiro zero de $\partial_x v_\varepsilon(x)$. Portanto, da fórmula de energia (2.8.5), sabemos que $v_\varepsilon(r(\varepsilon)) = \sqrt{1-\sqrt{\varepsilon}}$. Observamos também que, quando $\varepsilon \to 0$, temos

- $r(\varepsilon) \to \infty$;
- $v_\varepsilon(r(\varepsilon)) \to 1$; e
- $u_*(r(\varepsilon)) \to 1$.

Dessa maneira, seja $\varepsilon_1 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$|1 - u_*(r(\varepsilon))| < \frac{\delta}{2} \text{ e } |1 - v_\varepsilon(r(\varepsilon))| < \frac{\delta}{2}. \tag{5.2.8}$$

Consequentemente, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, temos $|u_*(r(\varepsilon)) - v_\varepsilon(r(\varepsilon))| < \delta$.

Sabemos que u_* é crescente em x ($\partial_x u_*$ é estritamente positiva), logo seja $\bar{x} > 0$, tal que $u_*(x) > 1 - \delta/4$, para qualquer $x \geq \bar{x}$.

Da continuidade dos dados iniciais, seja $\varepsilon_2 > 0$ escolhido de forma que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, tenhamos

$$\sup_{x \in [0, \bar{x}]} |u_*(x) - v_\varepsilon(x)| < \delta/4. \tag{5.2.9}$$

De (5.2.9) temos $|u_*(\bar{x}) - v_\varepsilon(\bar{x})| < \delta/4$. Daí, para $x \in [\bar{x}, r(\varepsilon)]$,

$$|u_*(x) - v_\varepsilon(x)| \leq |1 - u(x)| + |1 - v_\varepsilon(x)| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} < \delta. \tag{5.2.10}$$

O que concluímos das estimativas anteriores é que existe uma sequência de equilíbrios no atrator global $\mathscr{A}_r$ que converge para o equilíbrio $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ que conecta os equilíbrios constantes ± 1 na norma de $L^p_{\rho_*}(\mathbb{R})$, uma vez que, devido a (5.2.8) e (5.2.10)

$$\begin{aligned} \|u_* - v_\varepsilon\|^p_{p,\rho_*} &= \int_{\mathbb{R}} |u_*(x) - v_\varepsilon(x)|^p \rho_*(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega_{r(\varepsilon)}} |u_*(x) - v_\varepsilon(x)|^p \rho(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega_{r(\varepsilon)}} \delta^p \rho(x) dx, \end{aligned}$$

para qualquer $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$. □

Unindo os Lemas 5.2.1 e 5.2.2, provamos:

Teorema 5.2.3. Utilizando a nomenclatura e hipóteses acima, vale

$$\mathrm{dist}_{\rho_*}(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}, \mathscr{E}_r) \to 0, \text{ quando } r \to \infty. \tag{5.2.11}$$

O que é um resultado equivalente ao resultado obtido na seção anterior sobre semicontinuidade superior, exceto que aqui estamos tratando apenas dos equilíbrios do sistema.

A pergunta que nos falta responder é: vale o mesmo para $\mathscr{A}_r$ e $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$? Para respondê-la devemos caracterizar o atrator global $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$, mais precisamente, precisamos caracterizar as variedades instáveis de cada equilíbrio $u_* \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}$. Naturalmente, uma solução $\varphi \in W^u(u_*) \subset \mathscr{A}_{\mathbb{R}}$ deve ser uma heteroclínica conectando dois equilíbrios. Precisaríamos caracterizar quais equilíbrios podem ser conectados por φ e a seguir obter uma sequência de soluções em $\mathscr{A}_r$ que convirjam para φ no espaço de peso $L^p_{\rho_*}(\mathbb{R})$.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO-COSTA, E. R.; CARABALLO, T.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A. Stability of gradient semigroups under perturbations. **Nonlinearity**, v. 24, n. 7, p. 2099–2117, 2011. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0951-7715/24/i=7/a=010>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 28 e 90.

____. Continuity of lyapunov functions and of energy level for a generalized gradient semigroup. **Topol. Methods Nonlinear Anal.**, Nicolaus Copernicus University, Juliusz P. Schauder Centre for Nonlinear Studies, v. 39, n. 1, p. 57–82, 2012. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.tmna/1461184854>. Citado na página 28.

____. Non-autonomous morse-decomposition and lyapunov functions for gradient-like processes. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 365, n. 10, p. 5277–5312, 2013. ISSN 0002-9947. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-05810-2#sthash.hdAKBSH8.dpuf>. Citado na página 28.

ARRIETA, J. M.; CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A. Asymptotic behavior and attractors for reaction diffusion equations in unbounded domains. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, v. 56, n. 4, p. 515 – 554, 2004. ISSN 0362-546X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X03003808>. Citado na página 41.

____. Linear parabolic equations in locally uniform spaces. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 14, n. 02, p. 253–293, 2004. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218202504003234>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 47.

____. Dissipative parabolic equations in locally uniform spaces. **Mathematische Nachrichten**, WILEY-VCH Verlag, v. 280, n. 15, p. 1643–1663, 2007. ISSN 1522-2616. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/mana.200510569>. Citado 3 vezes nas páginas 41, 105 e 110.

ARRIETA, J. M.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A.; VALERO, J. Dynamics of a reaction–diffusion equation with a discontinuous nonlinearity. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 16, n. 10, p. 2965–2984, 2006. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127406016586>. Citado 6 vezes nas páginas 82, 99, 100, 101, 102 e 103.

AUBIN, J.; CELLINA, A. **Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). ISBN 9783642695124. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=rVnsCAAAQBAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 52.

AUBIN, J.; FRANKOWSKA, H. **Set-Valued Analysis**. Birkhäuser Boston, 2009. (Modern Birkhäuser Classics). ISBN 9780817648480. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=cVUl3smcGlcC>. Citado na página 50.

BABIN, A.; VISHIK, M. **Attractors of Evolution Equations**. Elsevier Science, 1992. (Studies in Mathematics and its Applications). ISBN 9780080875460. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6i2ztf8Op5AC>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 20 e 25.

BALL, M. J. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the navier-stokes equations. **Journal of Nonlinear Science**, v. 7, n. 5, p. 475–502, 1997. ISSN 1432-1467. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s003329900037>. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 54.

BILLOTTI, J. E.; LASALLE, J. P. Dissipative periodic processes. **Bull. Amer. Math. Soc.**, American Mathematical Society, v. 77, n. 6, p. 1082–1088, 11 1971. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183533199>. Citado na página 20.

BORTOLAN, M.; CARABALLO, T.; CARVALHO, A.; LANGA, J. Skew product semiflows and morse decomposition. **Journal of Differential Equations**, v. 255, n. 8, p. 2436 – 2462, 2013. ISSN 0022-0396. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039613002660>. Citado na página 38.

BORTOLAN, M.; CARVALHO, A.; LANGA, J. Structure of attractors for skew product semiflows. **Journal of Differential Equations**, v. 257, n. 2, p. 490–522, 2014. ISSN 0022-0396. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039614001521>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 38 e 61.

CARABALLO, T.; JARA, J. C.; LANGA, J. A.; LIU, Z. Morse decomposition of attractors for non-autonomous dynamical systems. **Advanced Nonlinear Studies**, v. 13, n. 2, p. 309–329, 2013. ISSN 2169-0375. Disponível em: <www.degruyter.com/view/j/ans.2013.13.issue-2/ans-2013-0204/ans-2013-0204.xml>. Citado 5 vezes nas páginas 17, 62, 72, 75 e 91.

CARABALLO, T.; JARA, J. C.; LANGA, J. A.; VALERO, J. Morse decomposition of global attractors with infinite components. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 35, n. 7, p. 2845–2861, 2015. ISSN 1078-0947. Disponível em: <http://aimsciences.org/journals/displayArticlesnew.jsp?paperID=10778>. Citado 4 vezes nas páginas 17, 91, 94 e 103.

CARABALLO, T.; MARÍN-RUBIO, P.; ROBINSON, J. C. A comparison between two theories for multi-valued semiflows and their asymptotic behaviour. **Set-Valued Analysis**, v. 11, n. 3, p. 297–322, 2003. ISSN 1572-932X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1024422619616>. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 72.

CARVALHO, A.; LANGA, J.; ROBINSON, J. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**. Springer New York, 2012. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 9781461445814. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1VVJAAAAQBAJ>. Citado 8 vezes nas páginas 20, 22, 23, 25, 28, 32, 68 e 72.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A. Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: Continuity of local stable and unstable manifolds. **Journal of Differential Equations**, v. 233, n. 2, p. 622 – 653, 2007. ISSN 0022-0396. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039606003287>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 78.

____. An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation. **Journal of Differential Equations**, v. 246, n. 7, p. 2646 – 2668, 2009. ISSN 0022-0396. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609000254>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 81.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. On the continuity of pullback attractors for evolution processes. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, v. 71, n. 5–6, p. 1812 – 1824, 2009. ISSN 0362-546X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X09000224>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 32 e 73.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C.; SUÁREZ, A. Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system. **Journal of Differential Equations**, v. 236, n. 2, p. 570 – 603, 2007. ISSN 0022-0396. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039607000332>. Citado na página 22.

CHAFEE, N.; INFANTE, E. F. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. **Applicable Analysis**, v. 4, n. 1, p. 17–37, 1974. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/00036817408839081>. Citado na página 18.

CHEBAN, D. N.; KLOEDEN, P. E.; SCHMALFUSS, B. The relationship between pullback, forward and global attractors of nonautonomous dynamical systems. **Nonlinear Dynamics and Systems Theory**, v. 2, n. 2, p. 9–28, 2002. Disponível em: <http://www.e-ndst.kiev.ua/v2n2/2.pdf>. Citado na página 22.

CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. **Attractors for equations of mathematical physics**. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, RI, USA, 2002. v. 49. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 72.

CHOLEWA, J.; DLOTKO, T.; SOCIETY, L. M. **Global Attractors in Abstract Parabolic Problems**. Cambridge University Press, 2000. (Lecture note series / London mathematical society). ISBN 9780521794244. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=B_rA7OMKIh4C>. Citado na página 20.

CHOLEWA, J. W.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A. Extremal equilibria for dissipative parabolic equations in locally uniform spaces. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 19, n. 11, p. 1995–2037, 2009. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218202509004029>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 105.

CHOLEWA, W. J.; DLOTKO, T. Cauchy problems in weighted lebesgue spaces. **Czechoslovak Mathematical Journal**, v. 54, n. 4, p. 991–1013, 2004. ISSN 1572-9141. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10587-004-6447-z>. Citado na página 106.

CONLEY, C. C. **Isolated invariant sets and the Morse index**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1978. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 28.

COSTA, H. B. da; VALERO, J. Morse decompositions and lyapunov functions for dynamically gradient multivalued semiflows. **Nonlinear Dynamics**, v. 84, n. 1, p. 19–34, 2016. ISSN 1573-269X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-015-2193-z>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 81.

_____. Morse decompositions with infinite components for multivalued semiflows. **Set-Valued and Variational Analysis**, p. 1–17, 2016. ISSN 1877-0541. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11228-016-0363-x>. Citado na página 81.

HALE, J. **Asymptotic Behavior of Dissipative Systems**. American Mathematical Society, 2010. (Mathematical Surveys and Monographs). ISBN 9780821849347. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=A5SiAgAAQBAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.

HALE, J.; MAGALHAES, L.; OLIVA, W. **An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems - Geometric Theory**. Springer New York, 2013. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 9781475744934. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=oAHqBwAAQBAJ>. Citado na página 20.

HALE, J. K.; LIN, X.-B.; RAUGEL, G. Upper semicontinuity of attractors for approximations of semigroups and partial differential equations. **Mathematics of Computation**, American Mathematical Society, v. 50, n. 181, p. 89–123, 1988. ISSN 00255718, 10886842. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2007916>. Citado na página 25.

HALE, J. K.; RAUGEL, G. Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, v. 154, n. 1, p. 281–326, 1989. ISSN 1618-1891. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01790353>. Citado na página 25.

KAPUSTYAN, A. V.; PANKOV, A. V.; VALERO, J. On global attractors of multivalued semiflows generated by the 3d bénard system. **Set-Valued and Variational Analysis**, v. 20, n. 3, p. 445–465, 2012. ISSN 1877-0541. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11228-011-0197-5>. Citado na página 52.

KAPUSTYAN, O. V.; KASYANOV, P. O.; VALERO, J. Structure and regularity of the global attractor of a reaction-diffusion equation with non-smooth nonlinear term. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 34, n. 10, p. 4155–4182, 2014. ISSN 1078-0947. Disponível em: <http://aimsciences.org/journals/displayArticlesnew.jsp?paperID=9809>. Citado na página 52.

KLOEDEN, P.; RASMUSSEN, M. **Nonautonomous Dynamical Systems**. American Mathematical Society, 2011. (Mathematical surveys and monographs). ISBN 9780821868713. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ByCCAwAAQBAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 72.

KLOEDEN, P. E. Pullback attractors in nonautonomous difference equations. **Journal of Difference Equations and Applications**, v. 6, n. 1, p. 33–52, 2000. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/10236190008808212>. Citado na página 22.

____. Pullback attractors of nonautonomous semidynamical systems. **Stochastics and Dynamics**, v. 03, n. 01, p. 101–112, 2003. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219493703000632>. Citado na página 72.

LADYZHENSKAYA, O. **Attractors for Semi-groups and Evolution Equations**. Cambridge University Press, 1991. (Lezioni Lincee). ISBN 9780521399227. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=b_I6AAAAIAAJ>. Citado na página 20.

LI, D. Morse decompositions for general dynamical systems and differential inclusions with applications to control systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 46, n. 1, p. 35–60, 2007. ISSN 03630129. Disponível em: <http://search-ebscohost-com.ez67.periodicos.capes.gov.br/login.aspx?direct=true&db=iih&AN=24818201&lang=pt-br&site=ehost-live>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 55 e 82.

LI, D.; KLOEDEN, P. E. Equi-attraction and the continuous dependence of pullback attractors on parameters. **Stochastics and Dynamics**, v. 04, n. 03, p. 373–384, 2004. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219493704001061>. Citado 3 vezes nas páginas 32, 72 e 73.

MIELKE, A. The complex Ginzburg-Landau equation on large and unbounded domains: sharper bounds and attractors. **Nonlinearity**, v. 10, n. 1, p. 199–222, 1997. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0951-7715/10/i=1/a=014>. Citado 3 vezes nas páginas 41, 108 e 110.

PATRÃO, M. Morse decomposition of semiflows on topological spaces. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, v. 19, n. 1, p. 181–198, 2007. ISSN 1572-9222. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10884-006-9033-2>. Citado na página 17.

ROBINSON, J. **Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors**. Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). ISBN 9780521632041. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=3e4h1j9WNlwC>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 72.

RYBAKOWSKI, K. **The Homotopy Index and Partial Differential Equations**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Universitext). ISBN 9783642728334. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6l7rCAAAQBAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 28.

SACKER, R.; SELL, G. **Lifting Properties in Skew-Product Flows with Applications to Differential Equations**. American Mathematical Society, 1977. (Memoirs Series). ISBN 9780821821909. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=0gjUCQAAQBAJ>. Citado na página 18.

SACKER, R. J.; SELL, G. R. Skew-product flows, finite extensions of minimal transformation groups and almost periodic differential equations. **Bull. Amer. Math. Soc.**, American Mathematical Society, v. 79, n. 4, p. 802–805, 07 1973. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183534771>. Citado na página 18.

SELL, G.; YOU, Y. **Dynamics of Evolutionary Equations**. Springer New York, 2013. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 9781475750379. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Fq_hBwAAQBAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 38.

SELL, G. R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics i. the basic theory. **Transactions of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 127, n. 2, p. 241–262, 1967. ISSN 00029947. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1994645>. Citado na página 38.

TEMAM, R. **Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics**. Springer New York, 2013. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 9781461206453. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=OB_vBwAAQBAJ>. Citado na página 20.

TOLSTONOGOV, A. A.; UMANSKIÎ, Y. I. On solutions of evolution inclusions. ii. **Siberian Mathematical Journal**, v. 33, n. 4, p. 693–702, 1992. ISSN 1573-9260. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00971135>. Citado na página 50.

VALERO, J. Attractors of parabolic equations without uniqueness. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, v. 13, n. 4, p. 711–744, 2001. ISSN 1572-9222. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1016642525800>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 101.

WANG, B. Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 128, n. 1, p. 41 – 52, 1999. ISSN 0167-2789. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278998003042>. Citado na página 41.

ZELIK, S. V. Attractors of reaction-diffusion systems in unbounded domains and their spatial complexity. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 56, n. 5, p. 584–637, 2003. ISSN 1097-0312. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.10068>. Citado na página 41.