

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Controlabilidade e observabilidade em equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações

Fernanda Andrade da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Fernanda Andrade da Silva

Controlabilidade e observabilidade em equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson

USP – São Carlos
Novembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A586c Andrade da Silva, Fernanda
Controlabilidade e observabilidade em equações
diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações /
Fernanda Andrade da Silva; orientadora Márcia
Cristina Anderson Braz Federson. -- São Carlos,
2017.
87 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Controlabilidade. 2. Observabilidade. 3.
Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas. 4.
Integral de Kurzweil. 5. Integral de Perron. I.
Cristina Anderson Braz Federson, Márcia , orient.
II. Título.

Fernanda Andrade da Silva

**Controllability and observability in generalized ordinary
differential equations and applications**

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz
Federson

**USP – São Carlos
November 2017**

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sempre me iluminar e não me deixar desistir diante das dificuldades, permitindo assim que eu alcançasse todos os meus objetivos.

Aos meus pais, José e Teresinha, e ao meu irmão, Tiago, que sempre acreditaram no meu potencial e não mediram esforços para que eu pudesse chegar até aqui.

A professora Marta Cilene Gadotti pelo incentivo e apoio desde a graduação até hoje.

A todos os demais amigos e colegas que contribuíram, direta ou indiretamente, para que eu superasse todos os obstáculos, em especial, agradeço ao Thiago Ramos pela paciência e pelo companheirismo na fase final da minha dissertação e ao Gabriel Escalera, que me acompanha, mesmo que à distância, nos momentos bons e ruins desde 1994.

A professora Márcia Federson, não apenas pela orientação, mas por toda a confiança, conselhos, paciência e dedicação neste período. A sua contribuição foi muito importante para o meu crescimento acadêmico, muito obrigada por sempre acreditar em mim.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

SILVA, F. A. **Controlabilidade e observabilidade em equações diferenciais generalizadas e aplicações**. 2017. 87 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste trabalho, introduzimos os conceitos de controlabilidade e de observabilidade para equações diferenciais ordinárias generalizadas, apresentamos resultados inéditos sobre condições suficientes e necessárias para controlabilidade e para observabilidade para estas equações e também apresentaremos uma aplicação.

Utilizando teoremas de correspondência entre equações diferenciais ordinárias generalizadas e outras equações diferenciais, traduzimos os resultados obtidos para os casos particulares de controlabilidade e observabilidade para equações diferenciais em medida e equações diferenciais com impulsos. O fato de trabalharmos no ambiente das equações diferenciais ordinárias generalizadas permitiu que os resultados obtidos pudessem envolver funções com muitas descontinuidades e muito oscilantes, ou seja, de variação ilimitada.

Os resultados novos apresentados aqui estão contidos no artigo [21] que se encontra em fase final de redação e será submetido à publicação em breve.

Palavras-chave: Controlabilidade, Observabilidade, Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas, Integral de Kurzweil, Integral de Perron-Stieltjes, Equações Diferenciais em Medida, Equações Diferenciais Impulsivas.

ABSTRACT

SILVA, F. A. **Controllability and observability in generalized ordinary differential equations and applications**. 2017. 87 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

In this work, we introduce concepts of controllability and observability for generalized ordinary differential equations, we present new results on necessary and sufficient conditions for controllability and observability for these equations and we also present an application.

Using theorems of correspondence between generalized ordinary differential equations and other differential equations, we translate the results obtained for the particular cases of controllability and observability for measure differential equations and differential equations with impulses. The fact that we work in the framework of generalized ordinary differential equations allows us to obtain results where the functions involved can have many discontinuities and be highly oscillating, that is, of unbounded variation.

The new results presented here are contained in the preprint [21] which is under final revision and will soon be submitted for publication.

Keywords: Controllability, Observability, Generalized Ordinary Differential Equations, Kurzweil Integral, Perron-Stieltjes Integral, Measure Differential Equations, Impulsive Differential Equations.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Fundamentos da Teoria de Controle | 5 |
| 1.1 Controlabilidade e observabilidade para sistemas com coeficientes constantes | 5 |
| 1.1.1 Invariância sob transformações não singulares | 12 |
| 1.2 Teorema da Decomposição de Kalman | 13 |
| 1.2.1 Aplicação do Teorema da Decomposição de Kalman | 19 |
| 1.3 Conceitos de controlabilidade diferencial e observabilidade diferencial . | 26 |
| 1.3.1 Dualidade dos resultados principais | 29 |
| 1.4 Controlabilidade para sistemas diferenciais com retardo | 30 |
| 1.4.1 Controlabilidade e observabilidade para sistemas diferenciais não lineares | 32 |
| 2 As integrais de Kurzweil e de Perron-Stieltjes | 35 |
| 3 Equações diferenciais ordinárias generalizadas | 43 |
| 3.1 Soluções de EDOs generalizadas | 43 |
| 3.2 EDOs generalizadas lineares | 46 |
| 3.3 EDOs generalizadas lineares perturbadas | 51 |
| 4 Controlabilidade e observabilidade para EDOs generalizadas | 55 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.1 | Controlabilidade e observabilidade | 56 |
| 4.2 | Controlabilidade em um modelo de sobrevivência de glóbulos vermelhos | 61 |
| 4.2.1 | Alguns fatos sobre hemácias | 62 |
| 4.2.2 | Descrição do modelo | 63 |
| 5 | Aplicações | 67 |
| 5.1 | Equações diferenciais em medida | 67 |
| 5.1.1 | Controlabilidade e observabilidade para EDMs | 71 |
| 5.2 | Equações diferenciais ordinárias com impulsos | 73 |
| 5.2.1 | Controlabilidade e observabilidade para EDIs | 76 |
| A | Apêndice | 79 |
| | Referências Bibliográficas | 81 |
| | Índice Remissivo | 85 |

Introdução

Todos nós já tentamos, numa ou noutra ocasião, manter em equilíbrio uma caneta sobre o dedo indicador (i.e., resolver o problema do pêndulo invertido). A teoria de controle permite fazê-lo sob a condição de dispormos de um bom modelo matemático.

Um sistema de controle é um sistema, que evolui no tempo, sobre o qual podemos agir através de uma função de entrada ou controle. Um computador, que permite a um utilizador efetuar uma série de comandos, um ecossistema sobre o qual podemos agir favorecendo esta ou aquela espécie, os tecidos nervosos que formam uma rede controlada pelo cérebro e realizam a transformação de estímulos provenientes do exterior em ações do organismo, um robô que deve efetuar uma tarefa bem precisa, um satélite ou uma nave espacial, são todos exemplos de sistemas controláveis, os quais podem ser modelados e estudados pela teoria dos sistemas de controle.

A teoria de controle analisa as propriedades de tais sistemas, com o intuito de conduzi-los de um determinado estado inicial a um dado estado final, respeitando possivelmente certas restrições. A origem de tais sistemas pode ser muito diversa: mecânica, elétrica, biológica, química, econômica, etc. O objetivo pode ser o de estabilizar o sistema, tornando-o insensível a certas perturbações (problema de estabilização por perturbação) ou, ainda, determinar as soluções ótimas relativamente a um determinado critério de otimização (problema de controlo ótimo).

Observabilidade, na teoria de controle, é uma medida para avaliar quão bem os estados de um sistema podem ser inferidos a partir do conhecimento de suas saídas externas. Grosseiramente falando, observabilidade significa que, a partir de saídas do sistema, é possível determinar o comportamento de todo o sistema.

Para modelar sistemas de controle, podemos recorrer a diversos tipos de equações: diferenciais, integrais, funcionais, a diferenças finitas, a derivadas parciais, etc. Em

relação ao problema de controlabilidade e observabilidade, R. Kalman demonstrou, em 1949, alguns resultados importantes que caracterizam os sistemas lineares controláveis e/ou observáveis de dimensão finita (veja [14], por exemplo, e também os Teoremas 1.3, 1.5 e [14] do presente texto).

A fim de generalizar certos resultados na dependência contínua da solução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) em relação aos dados iniciais, J. Kurzweil introduziu, em 1957, a noção de equações diferenciais ordinárias generalizadas para funções que tomam valores em espaços euclidianos e de Banach. Referimo-nos a estas equações como EDOs generalizadas. Veja [15, 16, 21].

O presente trabalho introduz os conceitos de controlabilidade e de observabilidade no âmbito das EDOs generalizadas, apresenta resultados inéditos sobre condições necessárias e suficientes para controlabilidade e para observabilidade de EDOs generalizadas e aplica os resultados obtidos às equações diferenciais ordinárias em medida (EDMs) e às equações diferenciais ordinárias impulsivas (EDIs).

Esse texto está organizado em cinco capítulos que compõem os resultados preliminares, resultados principais e aplicações. No Capítulo 1, relembramos os conceitos de controlabilidade e observabilidade já existentes na literatura para EDOs clássicas e apresentaremos uma aplicação sobre o aumento da pupila após ser submetida a um feixe de luz.

Nos Capítulos 2 e 3, apresentamos as teorias das integrais de Kurzweil e de Perron-Stieltjes e a teoria das EDOs generalizadas.

No Capítulo 4 dedicamo-nos ao estudo da teoria de controlabilidade e de observabilidade para EDOs generalizadas. A Seção 4.1, apresenta os conceitos de controlabilidade e de observabilidade para o sistema de EDO generalizadas lineares da forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + B(t)u(t)] \\ y(t) &= C(t)x, \end{aligned} \tag{1}$$

em que X, U, Y são espaços de Banach, $A : [0, +\infty) \rightarrow L(X)$, $B : [0, +\infty) \rightarrow L(U, X)$, $C : [0, +\infty) \rightarrow L(X, Y)$ e $u : [0, +\infty) \rightarrow U$ são operadores satisfazendo condições particulares. O Teorema 4.3, na Seção 4.1, apresenta condições necessárias e suficientes para o sistema (1) ser controlável e/ou observável. Na Seção 4.2, propomos que o volume, em ml, de glóbulos vermelhos (hemácias) no sangue de um paciente possa ser descrito por uma equação diferencial com retardo. Estudamos condições de controlabilidade para o caso em que o paciente sofre de hemoglobinopatia, doença que afeta a hemoglobina. Em alguns casos, verificamos que não somos capazes de resol-

ver o problema de controlabilidade usando a teoria para EDOs clássicas e precisamos recorrer aos resultados obtidos na Seção 4.1.

Finalizamos esse trabalho com o Capítulo 5 que consiste em aplicar os resultados obtidos às EDMs e EDIs.

Fundamentos da Teoria de Controle

Este capítulo é dedicado a um exame detalhado dos conceitos e propriedades fundamentais de controlabilidade e observabilidade conhecidos na literatura. As principais referências para este capítulo são [4, 14, 24, 25].

1.1 Controlabilidade e observabilidade para sistemas com coeficientes constantes

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}\tag{1.1}$$

em que, para $t \in \mathbb{R}^+$,

- $\dot{x} = dx/dt$;
- $x(t)$ é um **vetor de estado** (n -dimensional);
- $u(t)$ é um **vetor de entrada** (r -dimensional) e $u(\cdot)$ é diferenciável sobre \mathbb{R}^+ ;
- $y(t)$ é um **vetor de saída** (p -dimensional);
- A , B , C e D são matrizes constantes de dimensões $n \times n$, $n \times r$, $p \times n$ e $p \times r$ respectivamente.

Denotamos o **espaço de estado** por $X = \mathbb{R}^n$, o **espaço de entrada ou espaço de controle** por $U = \mathbb{R}^r$ e o **espaço de observação ou espaço de saída** por $Y = \mathbb{R}^p$.

A seguir, apresentamos os conceitos de controlabilidade e de observabilidade para o sistema (1.1).

Definição 1.1. Diremos que um vetor de estado $x(t_1) \in X$ é **controlável** no instante t_0 para o ponto \tilde{x} , se existir um vetor de entrada $u(t) \in U$, definido no intervalo finito $[t_0, t_1]$, tal que $x(t_1) = \tilde{x}$. O sistema (1.1) será dito **controlável** no instante t_0 , se todos os vetores de estado $x \in X$ forem controláveis no instante t_0 para todos os pontos de X .

Definição 1.2. Um vetor de estado $x \in X$ será dito **observável**, se for unicamente determinado a partir de algum vetor de saída, $y(t)$, conhecido para algum intervalo de tempo finito. O sistema (1.1) será dito **observável**, se todos os vetores de estado forem observáveis.

Pelas definições acima, é de se esperar que a controlabilidade e a observabilidade do sistema (1.1) dependam, de alguma forma, de algumas propriedades das matrizes A, B, C e D .

Primeiramente, trataremos da controlabilidade. Observe que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \ddot{x} &= A^2x + ABu + B\dot{u} \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= A^n x + A^{n-1}Bu + A^{n-2}B\dot{u} + \dots + Bu^{n-1}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

em que a última equação de (1.2) pode ser reescrita como

$$x^{(n)}(t) - A^n x(t) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(n-1)}(t) \\ u^{(n-2)}(t) \\ \vdots \\ \dot{u}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Seja \mathcal{C} a **matriz de controle** do sistema (1.1), dada por

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{n \times rn} \tag{1.4}$$

Então a não singularidade de \mathcal{C} implica na existência de um vetor de entrada $u(t)$ e de suas $n - 1$ derivadas, para todo $t_0 < t < t_1 < \infty$.

Para um vetor de entrada $u(t)$ em (1.1), a discussão acima produz uma relação entre a matriz de controle \mathcal{C} e o vetor $u(t)$, isto é

$$\mathcal{C}^{n \times rn} \begin{bmatrix} u^{(n-1)}(t) \\ u^{(n-2)}(t) \\ \vdots \\ \dot{u}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^{rn \times 1} = x^{(n)}(t) - A^n x(t) \quad (1.5)$$

e, da Álgebra Linear, sabemos que, para se resolver (1.5), é suficiente que

$$\text{posto } \mathcal{C} = n. \quad (1.6)$$

As equações (1.3) e (1.5) estabelecem relações entre o vetor de estado $x(t)$ e vetor de entrada $u(t)$. No entanto, de (1.3) e (1.5), não temos uma resposta explícita sobre a existência de um vetor de entrada $u(t)$ que transfira o sistema (1.1) de qualquer vetor de estado inicial $x(t_0)$ para qualquer vetor de estado final $x(t_1)$, em que $t \in [t_0, t_1]$. Verifiquemos, agora, essa situação.

Sabemos, pelo Teorema de Existência e Unicidade para EDOs clássicas, que uma solução de (1.1), com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser escrita na forma

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0. \quad (1.7)$$

Substituindo t por t_1 e multiplicando ambos os lados da equação (1.7) por e^{-At_1} , obtemos

$$e^{-At_1}x(t_1) - e^{-At_0}x_0 = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \quad (1.8)$$

O Teorema de Cayley-Hamilton (consulte o Apêndice para uma prova) diz que qualquer matriz satisfaz seu próprio polinômio característico, isto é, se $p(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$ for o polinômio característico da matriz A , então $p(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI = 0$. Uma consequência desse fato é que A^n é uma combinação linear de $\{A^j, j = 0, \dots, n-1\}$ e, portanto, A^k , $k \geq n$ também o é. Como

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m t^m}{m!},$$

o Teorema de Cayley-Hamilton nos permite concluir que

$$e^{-A\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\tau)A^i, \quad (1.9)$$

em que $f_i(\tau)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, são funções contínuas. Substituindo (1.9) em (1.8), obtemos

$$e^{-At_1}x(t_1) - e^{-At_0}x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_{t_0}^{t_1} f_i(\tau)u(\tau)d\tau$$

ou

$$e^{-At_1}x(t_1) - e^{-At_0}x_0 = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} f_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_{t_0}^{t_1} f_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} f_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Note que, no lado esquerdo de (1.10), todas as quantidades são conhecidas, isto é, temos um vetor constante. No lado direito de (1.10), a matriz de controle é multiplicada por um vetor cujas componentes são funções da entrada requerida. Assim, temos a seguinte equação funcional

$$\text{const} = \mathcal{C}^{n \times rn} \begin{bmatrix} \alpha_1(u(\tau)) \\ \alpha_2(u(\tau)) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(u(\tau)) \end{bmatrix}^{rn \times 1}, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \quad (1.11)$$

Novamente, pela Álgebra Linear, uma solução da equação (1.11) existirá, se tivermos

$$\text{posto } \mathcal{C} = n. \quad (1.12)$$

Portanto, pelas equações (1.6) e (1.12), podemos enunciar o resultado seguinte.

Teorema 1.3 ([4], Teorema 6.1). *O sistema (1.1) será controlável se, e somente se,*

$$\text{posto } \mathcal{C} = n,$$

em que a matriz de controle \mathcal{C} é definida em (1.4). Neste caso, diremos que o par (A, B) é controlável.

A seguir, daremos um exemplo de um sistema controlável.

Exemplo 1.4. Controlabilidade de um oscilador harmônico (caso linear).

Consideremos uma partícula pontual de massa m ligada a uma mola, cujo movimento está restrito a um eixo Ox (veja a Figura 1.1).

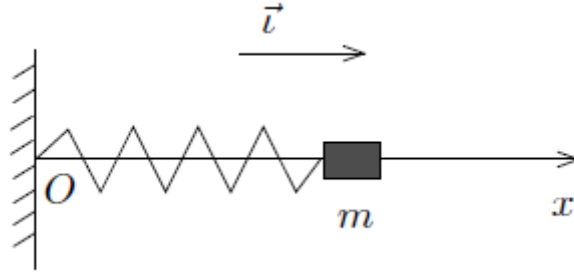


Figura 1.1: sistema massa mola.

A partícula sai da origem por uma força, que supomos igual a

$$-k_1(x - l) - k_2(x - l)^3,$$

em que l é o comprimento da mola em repouso. Aplicamos a essa partícula uma força exterior horizontal $u(t)$. Pela segunda Lei de Newton, que diz que a força resultante que atua sobre o corpo é igual ao produto da massa do corpo por sua aceleração, obtemos

$$m\ddot{x}(t) + k_1(x(t) - l) + k_2(x(t) - l)^3 = u(t). \tag{1.13}$$

Para simplificar o exemplo, vamos considerar $m = 1$ Kg, $k_1 = 1$ N/m e $l = 0$ m (passamos a $l = 0$ por translação). A equação do movimento (1.13) é, então, equivalente ao sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) - k_2x(t)^3 + u(t), \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Como estamos tratando do caso linear, temos $k_2 = 0$ (na Seção 1.4.1, adiante, onde abordamos controlabilidade para sistemas não lineares, vamos considerar o caso $k_2 \neq 0$). Escrevendo (1.14) na notação matricial, obtemos

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X(0) = X_0, \tag{1.15}$$

em que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Então a matriz de controle do sistema (1.15) é dada por

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como posto $C = 2$, concluímos que, no caso linear, o sistema do oscilador harmônico (1.14) é controlável.

Agora, vamos tratar da observabilidade do sistema (1.1). Assumiremos as matrizes A, B, C, D e o vetor de entrada $u(t)$ conhecidos ao longo do intervalo finito $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$.

Como A, B, C e D são constantes, podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$. Substituindo (1.7) em (1.1), obtemos

$$y(t) = Ce^{At_1}x_0 + C \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (1.16)$$

Assumindo que a entrada e os parâmetros do sistema (1.1) sejam conhecidos, os segundo e terceiro termos à direita na equação (1.16) também serão conhecidos. Então o sistema será observável se, e somente se, conhecermos o vetor

$$Z(t) = Ce^{At}x_0$$

durante o intervalo $[0, t_1]$, isto é, se o vetor de estado inicial x_0 puder ser unicamente determinado por

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t)CA^i x_0, \quad (1.17)$$

para algum $t \in [0, t_1]$.

Seja \mathcal{O} a **matriz de observação** do sistema (1.1), dada por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

O próximo resultado trata das condições necessárias e suficientes para a observabilidade do sistema (1.1).

Teorema 1.5 ([4], Teorema 6.4). *O sistema (1.1) será observável se, e somente se, o posto da matriz transposta de \mathcal{O} for igual a n . Neste caso, diremos que o par (A, C) é observável.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja \mathcal{O}' a matriz transposta de \mathcal{O} . Suponha que o posto de \mathcal{O}' seja menor do que n . Então existe algum vetor a no espaço de estado que é ortogonal a todas as colunas de \mathcal{O}' , ou seja,

$$[A^i C']' a = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.19)$$

A equação (1.19) pode ser interpretada como um conjunto de np produtos escalares, cada um dos quais é igual a zero. Estas equações podem ser escritas na forma

$$C A^i a = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.20)$$

Comparando (1.20) e (1.17), se o estado inicial x_0 estiver na direção do vetor a , a saída resultante desse estado será igual a zero. Isto quer dizer que o estado inicial não pode ser unicamente determinado através de $Z(t)$ e, portanto, o sistema não será observável.

(\Leftarrow) Suponha que o posto de \mathcal{O}' seja igual a n . Mostremos que o vetor de estado inicial pode ser encontrado a partir do vetor de saída $Z(t)$ durante o intervalo de tempo $[0, t_1]$. Para isto, mostremos que os $f_i(t)$ na equação (1.9) são linearmente independente sobre qualquer intervalo de tempo finito. De fato, podemos descrever a equação (1.17) por j -ésimas componentes

$$Z_j(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t) c_j A^i x_0 \quad j = 1, \dots, p, \quad (1.21)$$

em que c_j é a j -ésima linha da matriz C .

Multiplicando ambos os lados da equação (1.21) por $f_k(t)$ e integrando de 0 a t_1 , obtemos

$$\int_0^{t_1} f_k(t) Z_j(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{t_1} f_i(t) f_k(t) dt c_j A^i x_0, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.22)$$

em que p é o número de componentes de y (ou, equivalentemente, o número de linhas de C).

Conhecendo todos os $Z_j(t)$ e os $f_k(t)$, as equações (1.22) representam np equações nas quais os np escalares $c_j A^i x_0$ podem ser encontrados. Cada um desses escalares pode ser expresso por

$$c_j A^i x_0 = [(A^i)' c_j'] x_0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.23)$$

Como o vetor coluna $(A^i)'c_j$ é a j -ésima coluna da matriz $(A^i)'C'$, a solução de (1.22) nos dá os np produtos escalares de np vetores $(A^i)'C'$ ($i = 0, \dots, n-1$) e o vetor x_0 . Esses np vetores são os vetores coluna de \mathcal{O}' . Além disso, como o posto de \mathcal{O}' é igual a n , as colunas de \mathcal{O}' contém o conjunto de n vetores linearmente independentes. Portanto, como podemos calcular o produto escalar de x_0 por um conjunto de n vetores linearmente independentes, podemos determinar o estado inicial x_0 unicamente a partir da observação da saída y ao longo do intervalo $[0, t_1]$. \square

1.1.1 Invariância sob transformações não singulares

Nesta subseção, apresentaremos vários resultados interessantes e importantes relacionados à controlabilidade e observabilidade do sistema (1.1). Começamos apresentando o conceito de transformação de similaridade.

Definição 1.6. *Dada duas matrizes A e B , uma **transformação de similaridade** é uma transformação efetuada por alguma matriz não singular, P , tal que*

$$A = PBP^{-1} \iff B = P^{-1}AP, \quad \det P \neq 0.$$

Consideremos o sistema (1.1) e a transformação de similaridade

$$\hat{x} = Px, \tag{1.24}$$

com

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} &= \hat{C}\hat{x}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

em que $\hat{A} = PAP^{-1}$, $\hat{B} = PB$ e $\hat{C} = CP^{-1}$.

Mostraremos que os resultados sobre a controlabilidade e observabilidade do sistema (1.1) são invariantes sob transformação de similaridade, isto é, o sistema (1.1) será controlável (observável) se, e somente se, o sistema (1.25) for controlável (observável), independente da transformação de similaridade P .

Nas condições acima, temos os resultados seguintes conhecidos na literatura.

Teorema 1.7 ([4], Teorema 6.2). *O par (A, B) será controlável se, e somente se, o par (\hat{A}, \hat{B}) for controlável.*

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\widehat{A}, \widehat{B}) &= \begin{bmatrix} \widehat{B} & \widehat{A}\widehat{B} & \cdots & \widehat{A}^{n-1}\widehat{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PB & PAP^{-1}PB & \cdots & PA^{n-1}P^{-1}PB \end{bmatrix} \\ &= P \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= PC(A, B).\end{aligned}$$

Como P é uma matriz não singular, ela não altera o posto do produto PC e, então,

$$\text{posto } \mathcal{C}(\widehat{A}, \widehat{B}) = \text{posto } \mathcal{C}(A, B)$$

e a prova está completa □

Teorema 1.8 ([4], Teorema 6.02). *O par (A, C) será observável se, e somente se, o par $(\widehat{A}, \widehat{C})$ for observável.*

Demonstração. Temos

$$\mathcal{O}(\widehat{A}, \widehat{C}) = \begin{bmatrix} \widehat{C} \\ \widehat{C}\widehat{A} \\ \widehat{C}\widehat{A}^2 \\ \vdots \\ \widehat{C}\widehat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}PAP^{-1} \\ CP^{-1}PA^2P^{-1} \\ \vdots \\ CP^{-1}PA^{n-1}P^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1},$$

isto é,

$$\mathcal{O}(\widehat{A}, \widehat{C}) = \mathcal{O}(A, C)P^{-1}.$$

A não singularidade de P implica na igualdade

$$\text{posto } \mathcal{O}(\widehat{A}, \widehat{C}) = \text{posto } \mathcal{O}(A, C)$$

e terminamos a prova. □

1.2 Teorema da Decomposição de Kalman

O Teorema de Decomposição de Kalman nos dá uma única condição tanto para a controlabilidade quanto para a observabilidade para o sistema (1.1). Tal decomposição exhibe as partes de um sistema que são:

- a) não observável e controlável;

- b) observável e controlável;
- c) não observável e não controlável
- d) observável e não controlável.

Mostraremos, a partir da Decomposição de Kalman, que somente as partes observável e controlável contribuem para a função de transferência do sistema e que tal função será irredutível (isto é, não possuirá polos) se, e somente se, o sistema for controlável e observável. Os resultados descritos nesta seção foram baseados no Capítulo 4 de [14].

Consideremos o sistema linear

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ x(t_0) &= x_0, t \leq t_0, \end{aligned} \quad (A,B,C,D)$$

em que $A : X \rightarrow X$, $B : U \rightarrow X$, $C : X \rightarrow Y$, e $D : U \rightarrow Y$ são transformações contínuas e X , U , e Y são espaços vetoriais de dimensões n, r, p respectivamente.

Suponhamos que

$$\text{posto } \mathcal{C}(A, B) = \text{posto } [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n_1 < n$$

e

$$\text{posto } \mathcal{O}(A, C) = \text{posto } \begin{bmatrix} C \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_2 < n.$$

Podemos definir uma matriz $n \times n$

$$P_1^{-1} = [q_1 \ \cdots \ q_{n_1} \ \cdots \ q_n],$$

em que as n_1 primeiras colunas são quaisquer n_1 colunas linearmente independentes de $\mathcal{C}(A, B)$ e as $n - n_1$ colunas restantes podem ser tomadas arbitrariamente, desde que P_1 seja não singular. Então, utilizando a transformação de similaridade $\hat{x} = P_1 x$, obtemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_c \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}, \\ y &= [\hat{C}_c \ \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du, \end{aligned}$$

em que \hat{A}_c é a matriz $n_1 \times n_1$ e $\hat{A}_{\bar{c}}$ é a matriz de ordem $(n - n_1) \times (n - n_1)$.

Pelo Teorema 1.3, o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_c &= \hat{A}_c \hat{x}_c + \hat{B}_c u \\ y &= \hat{C}_c \hat{x}_c + Du\end{aligned}$$

é controlável, uma vez que posto $\mathcal{C}(\hat{A}_c, \hat{B}_c) = n_1$ por construção.

Da mesma forma, podemos definir uma matriz $n \times n$

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n_2} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},$$

em que as n_2 primeiras linhas são quaisquer n_2 linhas linearmente independentes de $\mathcal{O}(A, C)$ e as $n - n_2$ linhas restantes podem ser tomadas arbitrariamente, desde que P_2 seja não singular. Então, pela transformação de similaridade $\hat{x} = P_2 x$, podemos determinar o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_c \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_o & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_o \\ \hat{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u, \\ y &= [\hat{C}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du,\end{aligned}$$

em que \hat{A}_o é a matriz $n_2 \times n_2$ e $\hat{A}_{\bar{o}}$ é a matriz de ordem $(n - n_2) \times (n - n_2)$.

Pelo Teorema 1.5, o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_c &= \hat{A}_o \hat{x}_c + \hat{B}_o u \\ y &= \hat{C}_o \hat{x}_c + Du\end{aligned}$$

é observável, uma vez que posto $\mathcal{O}(\hat{A}_o, \hat{C}_o) = n_2$ por construção.

Assim, podemos determinar os subespaços

- $X_c \subset X$ subespaço controlável;
- $X_{\bar{o}} \subset X$ subespaço não observável,

ambos são A -invariantes, em que a imagem da função B é um subconjunto de X_c (i.e. $\text{IM}(B) \subset X_c$) e $X_{\bar{o}}$ é um subconjunto do núcleo de C (i.e. $X_{\bar{o}} \subset \text{N}(C)$). Assim $X_c \cap X_{\bar{o}}$ e $X_c + X_{\bar{o}}$ também são A -invariantes.

Seja $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ uma base para $X_c \cap X_{\bar{o}}$. Como $X_c \cap X_{\bar{o}} \subset X_c$ e $X_c \cap X_{\bar{o}} \subset X_{\bar{o}}$, pelo Teorema do Completamento, podemos construir uma base para X_c da forma $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s\}$, em que $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s\}$ é um subconjunto da base de X_c , e podemos construir uma base para $X_{\bar{o}}$ da forma $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p\}$, em que $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p\}$ é um subconjunto da base de $X_{\bar{o}}$. Logo

$$S = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p\}$$

é uma base para $X_c \oplus X_{\bar{o}}$. Completando S , obtemos

$$S' = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p, x_1, x_2, \dots, x_r\}$$

que é uma base para X .

Defina os seguintes subespaços:

$X_{c\bar{o}}$ gerado por $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, **subespaço controlável e não observável** (A_{11});

X_{co} gerado por $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s\}$, **subespaço controlável e observável** (A_{22});

$X_{\bar{c}\bar{o}}$ gerado por $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p\}$, **subespaço não controlável e não observável** (A_{33});

$X_{\bar{c}o}$ gerado por $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, **subespaço não controlável e observável** (A_{44}).

O próximo resultado é conhecido como Teorema da Decomposição de Kalman. Sua demonstração segue os passos encontrados em [14], Teorema 1, página 8.

Teorema 1.9 (Teorema da Decomposição de Kalman). *Escrevendo o sistema (A, B, C, D) na base S' de X , temos o seguinte sistema $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$, denominado **Decomposição de Kalman***

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4]$$

$$\hat{D} = D,$$

em que o par

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

é controlável (parte controlável do sistema) e o par

$$\begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

é observável (parte observável do sistema).

Demonstração. Apresentaremos apenas as ideias principais da prova.

Os zeros matriciais que estão abaixo de A_{11} são consequência do fato de $X_{c\bar{o}} = X_o \cap X_{\bar{o}}$ ser A -invariante. Os quatro zeros matriciais abaixo da submatriz $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ são consequência do fato de $X_o = X_{c\bar{o}} + X_{co}$ ser A -invariante. A forma de \hat{B} é consequência de $\text{IM}(B) \subset X_o = X_{c\bar{o}} + X_{co}$. Como $X_o = X_{c\bar{o}} + X_{co}$, segue que (1.26) é a parte controlável do sistema.

Os três zeros matriciais da última linha de \hat{A} decorrem da A -invariância de $X_o + X_{\bar{o}} = X_{c\bar{o}} + X_{co} + X_{\bar{c}o}$. Levando em conta a A -invariância de $X_{\bar{o}} = X_{c\bar{o}} + X_{\bar{c}o}$, a submatriz A_{23} (da segunda linha e terceira coluna) de \hat{A} é nula. Os dois zeros matriciais de \hat{C} decorrem do fato de que $X_{\bar{o}} = X_{c\bar{o}} + X_{\bar{c}o} \subset \text{N}(C)$. Como $X_{\bar{o}} = X_{c\bar{o}} + X_{\bar{c}o}$, segue que (1.27) é a parte observável do sistema e terminamos a prova. \square

Proposição 1.10 ([14], Proposição 1). *A função de transferência*

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

do sistema (A,B,C,D) depende somente da parte (A_{22}, B_2, C_2, D) , isto é, da parte controlável e observável do sistema.

Demonstração. Sabemos que $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}$. Note que

$$\begin{aligned} & \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} = \\ & = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_{11}) & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ 0 & (sI - A_{22}) & 0 & -A_{24} \\ 0 & 0 & (sI - A_{33}) & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & (sI - A_{44}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_{11})^{-1} & X & X & X \\ 0 & (sI - A_{22})^{-1} & X & X \\ 0 & 0 & (sI - A_{33})^{-1} & X \\ 0 & 0 & 0 & (sI - A_{44})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2 \end{aligned}$$

e a prova está completa. \square

Observação 1.11. *Pelo Teorema da Decomposição de Kalman, (Teorema 1.9) e pela Proposição 1.10, a função de transferência H , dada pela Proposição 1.10, é determinada unicamente por X_{co} .*

Definição 1.12. *Seja $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a função de transferência de um sistema linear. Os números (**matrizes**) de **Markov** associados a esta função de transferência são dados por*

$$M_{-1} = D$$

$$M_k = CA^k B, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$(sI - A)^{-1} = \mathcal{L}(e^{At}) = \mathcal{L}\left[\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(At)^k}{k!}\right] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{s^{k+1}},$$

em que \mathcal{L} representa a transformada de Laplace. Em particular, vale

$$H(s) = D + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{CA^k B}{s^{k+1}} = \sum_{k > -1} \frac{M_k}{s^{k+1}}.$$

Assim, as matrizes de Markov determinam completamente a função de transferência.

Para demonstrar o resultado principal desta seção, precisaremos do seguinte resultado auxiliar da Álgebra Linear.

Lema 1.13. *Sejam $O : X \rightarrow V$ e $C : W \rightarrow X$ transformações lineares. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *O posto da transformação composta será menor ou igual ao mínimo dos postos.*
- (ii) *Se O for injetora, então o posto da composição de O com C coincidirá com o posto de C .*

Teorema 1.14 ([14], Teorema 2). *A função de transferência $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ do sistema linear (A, B, C, D) será irredutível se, e somente se, o sistema for controlável e observável.*

Demonstração. A necessidade decorre da Decomposição de Kalman.

Para mostrar a suficiência, suponha que (A, B, C, D) seja um sistema diferencial linear de ordem n com função de transferência $H(s)$ tal que (C, A) é observável e (A, B) é controlável. Suponha, por absurdo, que $H(s)$ seja redutível. Em outras palavras, existe um sistema linear $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$, de ordem $\hat{n} < n$, com função de transferência $H(s)$.

Como as funções de transferência dos sistemas (A, B, C, D) e $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D})$ coincidem, as matrizes de Markov também coincidem, ou seja,

$$CA^k B = \widehat{C}\widehat{A}^k\widehat{B}.$$

Sejam \mathcal{O} e \mathcal{C} as matrizes de observação e de controle de (A, B, C, D) respectivamente. Defina

$$M = \mathcal{O}\mathcal{C} \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \dots & CA^{2(n-1)}B \end{bmatrix}.$$

e

$$\widehat{M} = \widehat{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \widehat{C}\widehat{B} & \widehat{C}\widehat{A}\widehat{B} & \dots & \widehat{C}\widehat{A}^{n-1}\widehat{B} \\ \widehat{C}\widehat{A}\widehat{B} & \widehat{C}\widehat{A}^2\widehat{B} & \dots & \widehat{C}\widehat{A}^n\widehat{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{C}\widehat{A}^{n-1}\widehat{B} & \widehat{C}\widehat{A}^n\widehat{B} & \dots & \widehat{C}\widehat{A}^{2(n-1)}\widehat{B} \end{bmatrix}.$$

Então $M = \widehat{M}$.

Como o par (C, A) é observável, $N(\mathcal{O}) = \{0\}$. Como (A, B) é controlável, o posto de \mathcal{C} é igual n . Portanto, pela parte (ii) do Lema 1.13, o posto de M é igual a n . Por outro lado, como \widehat{n} é menor que n e os postos de $\widehat{\mathcal{O}}$ e de $\widehat{\mathcal{C}}$ são limitados superiormente por \widehat{n} , pela parte (i) do Lema 1.13, o posto de \widehat{M} é menor ou igual a \widehat{n} , o que é uma contradição. \square

1.2.1 Aplicação do Teorema da Decomposição de Kalman

Consideremos a análise de sistemas de equações diferenciais ordinárias em que o valor de uma variável de estado $x(t)$ depende de seu valor em algum momento τ no passado, ou seja, $x(t - \tau)$, para $\tau > 0$ fixado. Referimo-nos a τ como **latência** ou **retardo**. Nossos resultados são discutidos com referência a estudos sobre o reflexo de luz na pupila humana. O leitor pode consultar [17] para obter mais detalhes sobre a modelagem do reflexo de luz na pupila humana.

Os retardos surgem, por exemplo, no sistema nervoso devido aos tempos de condução e integração axonais, na biologia celular devido ao tempo de maturação celular, na biologia molecular devido ao tempo necessário para a transcrição e tradução e em diversas outras áreas. Assim, os modelos matemáticos que descrevem estes sistemas

fisiológicos assumem a forma de uma equação diferencial com retardo do tipo

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (1.28)$$

em que α é uma taxa constante.

Deve-se notar que, para resolver a equação (1.28), não é suficiente um valor inicial de $x(0) = x_0$. Em vez disso, devemos especificar uma função inicial, isto é, todos os valores de $x(s)$ que se encontram no intervalo $[-\tau, 0]$.

Voltando ao problema do reflexo de luz na pupila humana, o tamanho da pupila reflete um equilíbrio entre dois grupos musculares opostos localizados na íris. A contração da pupila é devida ao aumento da tensão no compressor pupilar. O músculo compressor é inervado pelo sistema nervoso parassimpático e seu núcleo motor, chamado de **núcleo de Edinger-Westphal ou núcleo do mesencéfalo**, o qual está localizado no mesencéfalo.

Existem dois mecanismos de dilatação pupilar:

- (1) Dilatação pelo reflexo ativo que é devido à contração do compressor pupilar;
- (2) Dilatação pelo reflexo passivo que é devido à inibição da atividade do núcleo de Edinger-Westphal.

O músculo dilatador pupilar é disposto radialmente e é inervado pelo sistema nervoso simpático; seus núcleos motores estão localizados no hipotálamo.

É ingênuo pensar no tamanho da pupila como simplesmente um equilíbrio entre as forças de compressão e de dilatação. Obviamente, o tamanho da pupila não é determinado exclusivamente por estas forças de equilíbrio. Para cada força de dilatação, existe uma força de contração que a equilibra para dar o mesmo tamanho de pupila. Em outras palavras, para medir o tamanho da pupila não é suficiente determinar, de forma única, a atividade nos músculos dilatadores e compressores. É somente através das observações da dinâmica da mudança do tamanho da pupila que essas forças podem ser estimadas.

O termo **reflexo de luz na pupila** refere-se à alteração no tamanho da pupila que ocorre em resposta a um pulso ou pulsos de luz. O fotorreceptor para esta via não visual é uma célula ganglionar retiniana contendo melanopsina. Estas células ganglionares especializadas absorvem energia luminosa em escalas de tempo muito longas e respondem mal a estímulos breves. Entretanto, a luz não é a única entrada que influencia o tamanho da pupila. Aqui, nos concentraremos nas oscilações do tamanho da pupila que ocorrerão quando o ganho no arco reflexo for alto.

A figura abaixo mostra as mudanças no tamanho da pupila que ocorrem após um único pulso de luz.

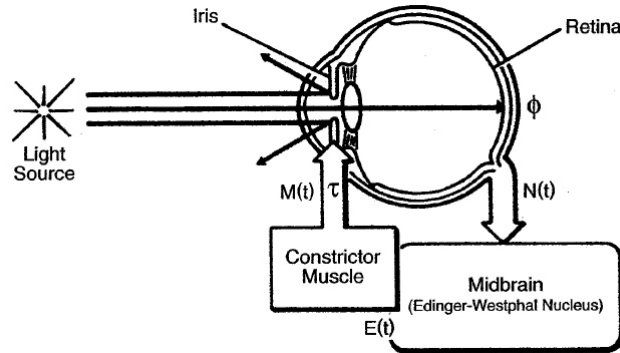


Figura 1.2: Representação do reflexo de luz da pupila.
Adaptado por Longtin e Milton. Veja [17].

Não existem estruturas presentes na musculatura da íris que sejam análogas aos eixos musculares e aos órgãos do tendão de Golgi no músculo esquelético. Isso significa que não há retardo no reflexo de luz da pupila que esteja diretamente relacionado ao tamanho da pupila. Em vez disso, a entrada é a quantidade de luz que cai sobre a retina. Logo, o **fluxo de luz** da retina ϕ é igual a

$$\phi = IA,$$

em que I é a **iluminância retiniana** e A é a **área da pupila**.

A íris age de maneira parecida com a abertura de uma câmera. Se o fluxo de luz da retina ϕ for muito alto, o reflexo de luz da pupila diminuirá a área da pupila A e, portanto, diminuirá ϕ . Por outro lado, se ϕ for bem pequeno, ϕ crescerá pelo aumento de A . Em outras palavras, o reflexo de luz da pupila age como um mecanismo de controle de realimentação negativa. O tamanho da pupila não muda imediatamente em resposta a uma mudança na iluminação, mas começa a mudar após um retardo. Veja a Figura 1.2.

A primeira tentativa de se modelar o reflexo de luz da pupila em termos de uma equação diferencial com retardo foi feita por Longtin e Milton em [17]. Aqui, apresentamos uma dedução mais simples do seu modelo que permite que certos aspectos fisiológicos do reflexo de luz da pupila sejam melhor discutidos.

Há uma compressão de intensidades de luz na retina regida por uma função logarítmica. Isto significa que a saída da retina para um dado fluxo de luz, medida em termos

da frequência de potenciais de ação neural no nervo óptico, $N(t)$, é da forma

$$N(t) = \eta \ln \left[\frac{\phi(t - \tau_r)}{\bar{\phi}} \right],$$

em que

- η é uma constante positiva;
- $\bar{\phi}$ é o nível limiar;
- τ_r é o tempo necessário para o processamento da retina.

A notação $\phi(t - \tau_r)$ indica que $N(t)$ é uma função do fluxo de luz da retina medida em um momento $t - \tau_r$ no passado. Na discussão que se segue, assumiremos que a iluminância retiniana é constante e os efeitos da mudança na área da pupila dependem de ϕ .

As não linearidades no reflexo de luz da pupila surgem ou na retina ou na musculatura da íris. Surpreendentemente, os núcleos do mesencéfalo atuam apenas como um filtro e introduzem um retardo. Então a saída dos núcleos de Edinger-Westphal, $E(t)$, é dada por

$$E(t) = \eta' \ln \left[\frac{\phi(t - (\tau_r + \tau_m))}{\bar{\phi}} \right], \quad (1.29)$$

em que

- τ_m é o retardo introduzido pelos núcleos do mesencéfalo;
- η' é uma constante.

Quando o potencial de ação atinge a junção neuromuscular do músculo compressor da pupila, os núcleos do mesencéfalo iniciam uma sequência complexa de eventos. O resultado final é que a tensão produzida pelo músculo compressor muda. Existe uma relação direta entre a tensão muscular e a área da pupila. Longtin e Milton propuseram que a relação entre a atividade neural e a área da pupila poderia ser determinada em dois passos que descrevemos a seguir.

Passo 1) Determinar a relação entre a atividade neural, $E(t)$, e a atividade da íris, x .

Passo 2) Determinar a relação entre a atividade da íris, x , e a área da pupila, A .

Uma vez que estamos interessados na área da pupila, não é necessário especificar o valor exato de x . Então a relação entre $E(t)$ e a atividade da íris, x , é dada pela aproximação

$$E(t) \simeq k \left(\frac{dx}{dt} + \alpha x \right), \quad (1.30)$$

em que

- α é uma taxa constante para os movimentos da pupila;
- k é uma constante.

Combinando as equações (1.29) e (1.30), obtemos

$$\frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) = \beta \ln \left[\frac{\phi(t - \tau)}{\bar{\phi}} \right], \quad (1.31)$$

em que $\beta = \eta'/k$ e τ é o retardo total do fluxo no arco reflexo de pupila, isto é, τ é a soma de τ_r , τ_m e o tempo tomado pelos eventos que ocorrem na junção neuromuscular.

A fim de escrever a equação (1.31) em termos da área de pupila, é necessário considerarmos uma função $h(x)$ que relaciona a atividade neural, $E(t)$, e a área da pupila, A , isto é,

$$A = h(x).$$

Então podemos definir

$$g(A) = h^{-1}(A)$$

e podemos reescrever (1.31) como

$$\frac{dg}{dA} \frac{dA}{dt} + \alpha g(A) = \beta \ln \left[\frac{\phi(t - \tau)}{\bar{\phi}} \right]. \quad (1.32)$$

Intuitivamente, sabemos que $h(x)$ deve satisfazer:

- (i) a área da pupila deve ser positiva para todo x e limitada por limites finitos;
- (ii) deve refletir o papel desempenhado pelas propriedades elasto-mecânicas da íris.

Assim, uma escolha possível para $h(x)$ é

$$A = h(x) = \frac{\Lambda \Theta^n}{\Theta^n + x^n} + \Lambda',$$

em que

- Λ é a área mínima da pupila;
- $\Lambda + \Lambda'$ é a área máxima da pupila ;
- Θ é o valor x para o qual a área da pupila é de médio alcance.

Então podemos reescrever (1.31), em termos da área da pupila, como

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dA} \frac{dA}{dt} + \alpha g(A) &= \beta \ln \left[\frac{\phi(t - \tau)}{\bar{I}A} \right] \\ &= \beta \ln \left[\frac{I(t - \tau)A(t - \tau)}{\bar{I}A} \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Isto leva a uma descrição fraca da resposta da pupila à entrada sinusoidal. Assim, podemos estender o modelo de Longtin e Milton, introduzindo uma variável dinâmica, $V(t)$, que representa o **potencial da membrana das células ganglionares retinianas**.

Consideremos

$$\frac{dV}{dt} = -\epsilon V(t) + [\phi - \bar{\phi}][K - V(t)], \quad (1.34)$$

em que ϵ é uma taxa de decaimento e K é o potencial de reversão da membrana. A atividade neural, $E(t)$, é levada para uma função não linear de $V(t)$, isto é, $E(t) = f(V(t))$ e temos

$$f(V) = \frac{1}{1 + e^{-K(V - V_{th})}}.$$

Então a equação (1.33) pode ser reescrita como

$$\frac{dA}{dt} \frac{dg}{dA} + \alpha g(A) = \gamma f(V(t - \tau)).$$

Em condições de malha fechada (isto é, a ação de controle dependente da saída), as seguintes equações introduzem um novo sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\epsilon V(t) + [\phi - \bar{\phi}][K - V(t)], \\ \frac{dA}{dt} \frac{dg}{dA} + \alpha g(A) &= \beta f(V(t - \tau)). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Na presença de uma iluminância retiniana I^* constante, existe apenas um ponto de equilíbrio (V^*, A^*) , definido por $\frac{dV}{dt} = 0$ e $\frac{dA}{dt} = 0$, isto é,

$$V^* = \frac{KIA^*}{\epsilon + IA^*}, \quad \alpha g(A^*) = \beta f(V^*).$$

Linearizando as equações em (1.35), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \epsilon^*v(t) + I^*(K - V^*)a(t) + A^*(K - V^*)i(t), \\ \frac{da}{dt} &= -\alpha a(t) + \left(\frac{\gamma^*}{\beta^*}\right)v(t - \tau),\end{aligned}\tag{1.36}$$

em que,

- $v(t) = V(t) - V^*$;
- $a(t) = A(t) - A^*$;
- $i(t) = I(t) - I^*$;
- $\epsilon^* = -\epsilon + I^*A^*$, $\beta^* = g'(A^*)$;
- $\gamma^* = f'(V^*)$.

Utilizando a transformada de Laplace no par de equações (1.36), obtemos a função de transferência em malha fechada definida por

$$H(s) = \frac{[A(s)I^*]}{I(s)A^*},$$

em que

$$A(s) = \int_0^\infty e^{-st}a(t),$$

e

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-st}i(t).$$

Logo

$$H(s) = \frac{-G(s)}{1 + G(s)},$$

em que $G(s)$ é a função de transferência em malha aberta (isto é, a ação de controle independe da saída) e é dada por

$$G(s) = \frac{G^* \exp(-\tau s)}{(s + \alpha)(s + \epsilon)}, \quad \text{com} \quad G^* = \frac{-\gamma^* I^*(K - V^*)}{\beta^*} > 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{-G(s)}{1 + G(s)} = 0 \\ \iff G(s) &= 0 \\ \iff \exp(-\tau s) &= 0.\end{aligned}$$

Concluimos, assim, que a função de transferência do sistema, $H(s)$, não contém polos e, pelo Teorema da Decomposição de Kalman, o sistema que modela o aumento da área da pupila em relação a um reflexo de luz é controlável e observável.

1.3 Conceitos de controlabilidade diferencial e observabilidade diferencial

Já sabemos que se um sistema diferencial linear a coeficientes constantes for controlável, então qualquer variável de estado do sistema poderá ser levada para a origem num intervalo de tempo finito através de uma entrada. Nesta seção, discutiremos as condições sob as quais o mesmo tipo de resultado é válido para sistemas que variam no tempo.

Consideremos o sistema diferencial dependendo do tempo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t),\end{aligned}\tag{1.37}$$

definido na reta real, em que

- $x \in X$ é o vetor de estado (n -dimensional);
- $u \in U$ é o vetor de entrada (p -dimensional);
- $y \in Y$ é o vetor de saída (r -dimensional);
- $A : X \rightarrow X$, $B : U \rightarrow X$, e $C : X \rightarrow Y$ são funções contínuas.
- $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^p$ e $Y = \mathbb{R}^r$ são os espaços de estado, de entrada e de saída respectivamente.

Dada uma condição inicial $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [0, +\infty)$, sabemos que uma solução de (1.37) é unicamente dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \in [0, +\infty),\tag{1.38}$$

em que Φ é a **matriz fundamental** do sistema (1.37) e satisfaz as equações

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0, t_0) = I,\tag{1.39}$$

em que I é a matriz identidade. É fácil verificar que $\Phi(t, \tau)$ tem as seguintes propriedades

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, \tau) \quad (1.40)$$

e

$$\Phi(t, \tau) = \Phi^{-1}(\tau, t),$$

para quaisquer $t, \tau, t_0 \in [0, +\infty)$. Além disso, substituindo (1.38) em (1.37), obtemos

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \in [0, +\infty). \quad (1.41)$$

Para sistemas diferenciais dependentes do tempo, temos as definições que seguem.

Definição 1.15 ([25], Definição 1). *Um vetor de estado $x(t_1)$ do sistema (1.37) será **diferencialmente controlável** em um intervalo de tempo finito, $I = [t_0, t_1]$, se para qualquer subintervalo $K \subset I$ arbitrariamente pequeno, pudermos encontrar uma entrada u , definida em K , tal que $x(t_1) = x(t_0)$. Se todo vetor de estado do sistema (1.37) for diferencialmente controlável em I , então o sistema será **diferencialmente controlável** em I . Se o sistema (1.37) for diferencialmente controlável em toda reta real, então o sistema será **completamente diferencialmente controlável**.*

Definição 1.16 ([25], Definição 2). *Consideremos o sistema (1.37) com $u \equiv 0$. O sistema (1.37) será **diferencialmente observável** no intervalo de tempo I , se o vetor de estado do sistema em qualquer tempo $t \in I$ puder ser unicamente determinado a partir de um vetor de saída conhecido sobre um subintervalo $K \subset I$ arbitrariamente pequeno, em que t é o limitante superior de K . Se o sistema (1.37) for diferencialmente observável na reta real, então o sistema será **completamente diferencialmente observável**.*

Definição 1.17. *Se o sistema (1.37) satisfizer a Definição 1.1 (respectivamente a Definição 1.2), diremos que tal sistema é **controlável (observável)**.*

A seguir, apresentaremos os principais teoremas de controlabilidade e observabilidade para o sistema (1.37).

Teorema 1.18 ([25], Teorema 1). *O sistema (1.37) será diferencialmente controlável sobre um intervalo I se, e somente se, para todo $t_0 \in I$ fixo, as linhas da matriz $\Phi(t_0, \cdot)B(\cdot)$ forem funções linearmente independentes sobre todo subintervalo de I .*

Demonstração. (\Leftarrow) Seja (ξ^-, ξ^+) um intervalo arbitrariamente pequeno contido em I . Se as linhas da matriz $\Phi(t_0, \cdot)B(\cdot)$ forem funções linearmente independentes em (ξ^-, ξ^+) , então a matriz

$$C(\xi^-, \xi^+) = \int_{\xi^-}^{\xi^+} \Phi(\xi^-, t)B(t)B'(t)\Phi'(\xi^-, t)dt,$$

será definida positiva, em que E' indica a transposta de uma matriz E . Se em (1.38), tivermos $t_0 = \xi^-$, $t = \xi^+$ e

$$u(t) = -B'(t)\Phi'(\xi^-, t)C^{-1}(\xi^-, \xi^+)x(\xi^-),$$

então $x(\xi^+) = 0$ e o sistema (1.37) será diferencialmente controlável.

(\Rightarrow) Suponha, por absurdo, que exista um subintervalo $(\xi^-, \xi^+) \subset I$ tal que as linhas de $\Phi(t_0, \cdot)B(\cdot)$ sejam linearmente dependentes. Então existirá um vetor x_1 no espaço de estado X tal que

$$x_1' \Phi(t_0, t)B(t) \equiv 0, \quad \text{para todo } t \in (\xi^-, \xi^+). \quad (1.42)$$

Utilizando (1.38), (1.40) e (1.39), obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t)x(t) &= \Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0)x_0 + \Phi(t_0, t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &\stackrel{(1.40)}{=} \Phi(t_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &\stackrel{(1.39)}{=} x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Então, substituindo t_0 por ξ^- e utilizando (1.42), obtemos

$$\begin{aligned} x_1' \Phi(\xi^-, t)x(t) &= x_1'x_0 + \int_{\xi^-}^t x_1' \Phi(\xi^-, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= x_1'x_0 \quad \forall t \in (\xi^-, \xi^+). \end{aligned}$$

Finalmente, note que $\Phi(\xi^-, t)x(t)$ é um vetor de estado de (1.37), mas sua componente em direção a x_1 não é controlável para todo $t \in (\xi^-, \xi^+)$, o que contradiz a hipótese. \square

Teorema 1.19 ([25], Teorema 2). *Considere o sistema (1.37) com $u(t) \equiv 0$. O sistema será diferencialmente observável sobre um intervalo I se, e somente se, para todo $t_0 \in I$ fixo, as colunas da matriz $C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)$ forem funções linearmente independentes sobre todo subintervalo de I .*

Demonstração. (\Leftarrow) Seja (ξ^-, ξ^+) um intervalo arbitrariamente pequeno contido em I . Por (1.41), o vetor de saída no intervalo I , com $u(t) \equiv 0$, é dado por

$$y(t) = C(t)\Phi(t, \xi^+)x(\xi^+), \quad \xi^- < t < \xi^+. \quad (1.43)$$

Multiplicando ambos os lados de (1.43) por $\Phi'(t, \xi^+)C'(t)$ e integrando sobre (ξ^-, ξ^+) , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \Phi'(t, \xi^+)C'(t)y(t)dt &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \Phi'(t, \xi^+)C'(t)C(t)\Phi(t, \xi^+)dt x(\xi^+) \\ &= D(\xi^+, \xi^-)x(\xi^+), \end{aligned}$$

em que

$$D(\xi^+, \xi^-) = \int_{\xi^-}^{\xi^+} [C(t)\Phi(t, \xi^+)]'C(t)\Phi(t, \xi^+)dt.$$

Claramente, se D for não singular, então $x(\xi^+)$ poderá ser identificado pelo conhecido vetor de saída, $y(\cdot)$, sobre (ξ^-, ξ^+) . Por outro lado, a não singularidade de D seguirá de (1.43), se as colunas de $C(\cdot)\Phi(\cdot, \xi^+)$ (e, portanto, as colunas de $C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)$) forem funções linearmente independentes em (ξ^+, ξ^-) .

(\Rightarrow) Suponha, por absurdo, que exista um subintervalo $(\xi^+, \xi^-) \subset I$ cujas colunas de $C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)$ (e, portanto, as colunas de $C(\cdot)\Phi(\cdot, \xi^+)$) sejam funções linearmente dependentes em (ξ^+, ξ^-) . Então, pela equação (1.43), existirá um vetor de estado $x(\xi^+)$ tal que $y(t) \equiv 0$, para todo $t \in (\xi^+, \xi^-)$. Logo, o sistema não será diferencialmente observável, o que contradiz a hipótese. \square

Observação 1.20. *Pelo Teorema 1.18, podemos concluir que o sistema (1.37) será controlável no instante $t < \infty$ se, e somente se, as linhas da matriz $\Phi(t_0, t)B(t)$ forem linearmente independentes e, pelo Teorema 1.19, o sistema (1.37) será observável no instante $t < \infty$ se, e somente se, as colunas da matriz $C(t)\Phi(t, t_0)$ forem linearmente independentes, em que $x(t_0)$ é a condição inicial de (1.37).*

1.3.1 Dualidade dos resultados principais

A natureza da dualidade dos dois conceitos discutidos nesta seção é evidente. De fato, se considerarmos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{ds} &= A'(s)\hat{x} + C'(s)\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= B'(s)\hat{x}(s), \end{aligned} \quad (1.44)$$

definido na reta real, em que \hat{x} é n -dimensional, \hat{u} é r -dimensional, \hat{y} é p -dimensional, A, B, C são como em (1.37) e a escala s é ordenada no sentido oposto à escala de tempo em (1.37), então todas as declarações feitas neste seção sobre a controlabilidade diferencial de (1.37) se tornarão declarações sobre a observabilidade diferencial de (1.44) e vice-versa.

1.4 Controlabilidade para sistemas diferenciais com retardo

Nesta seção, discutiremos a noção de controlabilidade para um sistema diferencial linear com retardo da forma

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + C(t)u(t), \quad (1.45)$$

em que

- $h > 0$ é constante;
- $x \in \mathbb{R}^n$,
- $u \in \mathbb{R}^p$;
- $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ e $C(\cdot)$ são funções matriciais contínuas de ordem $n \times n$, $n \times n$ e $n \times p$ respectivamente.

A principal referência para esta seção é [24].

Consideremos a equação da forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x(\cdot)) + u(t), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad h > 0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

com espaço de função inicial $\mathcal{B} = C([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$ (espaço das funções contínuas definidas em $[t_0 - h, t_0] \subset \mathbb{R}$ a valores em \mathbb{R}^n), em que $f(t, x(\cdot))$ é linear em $x(\cdot)$ e depende somente dos valores de $x(s)$ para $t - h \leq s \leq t$. Além disso, assumiremos que $\|f(t, \phi(\cdot))\| \leq L(t)\|\phi\|_{[t-h, t]}$ para todo $\phi \in \mathcal{B}$ e para todo t , com $L(\cdot)$ contínua e positiva. A função de controle $u(\cdot)$ pertence à classe de funções mensuráveis e limitadas em todo intervalo finito de \mathbb{R} e a chamaremos de **controle admissível**.

Note que (1.46) é equivalente à equação integral funcional

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t), & t \in [t_0 - h, t_0] \\ x(t) = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + \int_{t_0}^t u(s)ds + \phi(t_0), & t \geq t_0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Denotaremos a solução x de (1.46), com condição inicial $x(t) = \phi(t)$, para $t \in [t_0 - h, t_0]$, por $x(t) = x(t, t_0, \phi, u)$.

As hipóteses sobre f nos permitem aplicar o Teorema de Representação de Riesz para estabelecer a existência de uma matriz funcional η de dimensão $n \times n$ definida em $(-\infty, \infty) \times [-h, 0]$ tal que

$$f(t, \psi(\cdot)) = \int_{-h}^0 [d_\tau \eta(t, \tau)] \psi(\tau), \quad \psi \in \mathcal{B},$$

em que $\eta(t, \cdot)$ é de variação limitada em $[-h, 0]$ para cada $t \in (-\infty, \infty)$ e a integral acima é do tipo Riemann-Stieltjes.

Denotaremos por $L_1([t_0, t], \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções de $[t_0, t]$ em \mathbb{R}^n que são Lebesgue integráveis, com respeito à norma $\|\cdot\|_1$, isto é,

$$f \in L_1([t_0, t], \mathbb{R}^n) \iff \|f\|_1 = \int |f(x)|d\mu < \infty,$$

em que μ é a medida de Lebesgue e denotaremos por $L_\infty((t_0, t], \mathbb{R}^{2n})$ o espaço das funções de $[t_0, t]$ em \mathbb{R}^{2n} que são Lebesgue integráveis, com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$, isto é,

$$f \in L_\infty([t_0, t], \mathbb{R}^{2n}) \iff \|f\|_\infty = \sup_{t \in (t_0, t]} |f(t)| < \infty.$$

O próximo teorema trata da existência de solução para a equação (1.46). A demonstração desse resultado é análoga à prova do Teorema 3.1 apresentado em [24].

Teorema 1.21. *Seja $x(\cdot, t_0, \phi, u)$ uma solução de (1.46) (ou de (1.47)) com controle $u \in L_1([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)$ para todo $\tau \geq t_0$ e com $\phi \in B$. Então*

$$x(t, t_0, \phi, u) = x(t, t_0, \phi, 0) + \int_{t_0}^t K(t, s)u(s)ds, \quad t \geq t_0, \quad (1.48)$$

em que $K(t, s)$ é definido para $s \leq t - h$, $h > 0$ fixo, $K(t, \cdot) \in L_\infty((t_0, t], \mathbb{R}^{n^2})$, para cada $t \geq t_0$, e $K(t, s) = \frac{\partial W(t, s)}{\partial s}$ quase sempre com respeito à medida de Lebesgue, em que $W(t, s)$ é a única solução da equação

$$\begin{cases} W(t, s) = 0, & t \in [s - h, s], \\ W(t, s) = \int_s^t \int_{-h}^0 [d_\tau \eta(\xi, \tau)] W(t + \xi, \xi) d\xi - (t - s)I, & t \geq s. \end{cases} \quad (1.49)$$

Pelo Teorema 1.21, a solução de (1.45) pode ser representada como em (1.48) e é fácil verificar que a função $K(t, s)$ satisfaz as equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial K(t, s)}{\partial s} = -K(t, s)A(s) - K(t, s+h)B(s+h), & t_0 \leq s < t-h, \\ \frac{\partial K(t, s)}{\partial s} = -K(t, s)A(s), & t-h \leq s \leq t, \\ K(t, t) = I. \end{cases}$$

A seguir, enunciaremos definições de controlabilidade para o sistema (1.45) análogas às Definições 1.1 e 1.2.

Definição 1.22 ([24], Definição 4.1). *O sistema (1.45) será \mathbb{R}^n -controlável se, para qualquer $\phi \in \mathcal{B}$, existir $t_1 = t_1(\phi) \in (t_0, \infty)$ e um controle admissível, u , definido em $[t_0, t_1]$, tal que $x(t_1, t_0, \phi, u) = 0$.*

Definição 1.23 ([24], Definição 4.2). *O sistema (1.45) será **controlável para a origem** com respeito ao espaço das funções iniciais \mathcal{B} (escrevemos \mathcal{B} -controlável para origem) se, para todo $\phi \in \mathcal{B}$, existir $t_1 = t_1(\phi) \in (t_0, \infty)$ e um controle admissível, u , definido em $[t_0, t_1 + h]$, tal que $x(t, t_0, \phi, u) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_1 + h]$.*

O próximo resultado trata das condições para o sistema (1.45) ser controlável. A demonstração desse resultado é análoga a prova do Teorema 1.18 e pode ser encontrada em [24], Lema 5.1.

Lema 1.24. *O sistema (1.45) será \mathbb{R}^n -controlável se, e somente se, existir $t_1 > t_0$ tal que*

$$\text{posto} \left(\int_{t_0}^{t_1} K(t_1, \eta)C(\eta)C'(\eta)K'(t_1, \eta)d\eta \right) = n. \quad (1.50)$$

1.4.1 Controlabilidade e observabilidade para sistemas diferenciais não lineares

Apresentaremos, agora, algumas técnicas para a análise de problemas de controle para sistemas diferenciais não lineares. O exemplo da massa mola não linear será tratado no final dessa seção.

Consideremos o sistema diferencial não linear

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.51)$$

em que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, com derivadas parciais contínuas (i.e. $f \in C^1$), $f(t, 0, 0) = 0$ para todo t e $u(\cdot)$ é um controle admissível.

Definição 1.25. *O sistema diferencial não linear (1.51) será **localmente** \mathbb{R}^n -controlável, se o sistema*

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

for \mathbb{R}^n -controlável para a origem, em que

$$\begin{cases} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, 0), \\ B(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, 0, 0). \end{cases}$$

Analogamente, podemos apresentar o conceito de controlabilidade local para um sistema diferencial não linear com retardo da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \geq t_0, \quad (1.52)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ e u é admissível. O retardo é representado por um escalar real $h > 0$ e assumimos que $f \in C^1$ e $f(t, 0, 0, 0) = 0$ para todo t . O espaço de função inicial é o espaço \mathcal{B} como definido na Seção 1.4.

Definição 1.26 ([24], Definição 6.1). *O sistema diferencial não linear (1.52) será **localmente** \mathbb{R}^n - controlável para a origem, se o sistema*

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)x(t-h)C(t)u(t)$$

for \mathbb{R}^n -controlável para a origem, em que

$$\begin{cases} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, 0, 0) \\ B(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_d}(t, 0, 0, 0), \text{ com } x_d = x(t-h), \\ C(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, 0, 0, 0). \end{cases}$$

Retomemos o exemplo da mola descrito no Exemplo 1.4.

Exemplo 1.27. **Controlabilidade de um oscilador harmônico (caso não linear)**

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -x(t) - k_2x(t)^3 + u(t), \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= y_0. \end{cases} \quad (1.53)$$

Podemos reescrever (1.53) como

$$\dot{z} = Cz(t) + F(t) + Du(t) = f(t, v(t)), \quad (1.54)$$

em que

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 x(t)^3 \end{pmatrix}$$

e $v(t) = F(t) + Du(t)$. Sabemos que (1.54) será controlável para a origem se, e somente se, o sistema

$$\dot{z} = Az(t) + Bv(t) \quad (1.55)$$

for controlável para a origem, em que

$$A = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$B = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 3k_2 y_0 x_0^2 \end{pmatrix}.$$

Calculando a matriz de controle do sistema (1.55), obtemos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 3k_2 y_0 x_0^2 \\ 1 - 3k_2 y_0 x_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como posto $C = 2$, concluímos que o sistema (1.53) é controlável para a origem.

As integrais de Kurzweil e de Perron-Stieltjes

Neste capítulo, apresentaremos a definição da integral de Kurzweil e algumas de suas propriedades que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Um leitor mais interessado no tema pode consultar [21], por exemplo. Como casos particulares da integral de Kurzweil, mencionaremos resultados para as integrais de Perron e de Perron-Stieltjes.

Por todo esse capítulo, a menos que seja dito o contrário, X e Y denotarão espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ respectivamente. O conjunto de todas as transformações lineares limitadas de X em Y será denotado por $L(X, Y)$. No caso particular em que $X = Y$, escreveremos apenas $L(X)$ no lugar de $L(X, X)$.

Antes de introduzirmos a definição da integral de Kurzweil, vamos mencionar algumas definições necessárias.

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto, com $a < b$. Uma **partição marcada** do intervalo $[a, b]$ é uma coleção finita de pares, $D = \{(\tau_i, [t_{i-1}, t_i]), i = 1, \dots, |D|\}$, tal que $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{|D|} = b$ e $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, |D|$, em que $|D|$ denota o número de subintervalos na qual a partição marcada é dividida. Os elementos τ_i são ditos **marcas** dos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, |D|$, de $[a, b]$.

Uma função positiva $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ é chamada de **calibre** de $[a, b]$. Sejam $[a, b]$ um intervalo e δ um calibre de $[a, b]$, uma partição marcada

$$D = \{(t_0, \tau_1, t_1, \dots, t_{|D|-1}, \tau_{|D|}, t_{|D|})\}$$

será dita **δ -fina**, se tivermos

$$[t_{i-1}, t_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)),$$

para cada $i = 1, 2, \dots, |D|$.

A seguir, vamos enunciar um lema que será importante na definição da integral de Kurzweil. A demonstração desse resultado é análoga à prova do Lema 1.4 apresentado em [21].

Lema 2.1 (Lema de Cousin). *Dado um calibre δ de $[a, b]$, existe uma partição marcada δ -fina de $[a, b]$.*

No que segue, apresentaremos a definição da integral de Kurzweil de uma função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$.

Definição 2.2. *Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ uma função. Diremos que U é **Kurzweil integrável**, se existir $I \in X$ com a seguinte propriedade: dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ de $[a, b]$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I \right\| < \epsilon$$

para toda partição marcada δ -fina de $[a, b]$, $D = \{(t_0, \tau_1, t_1, \dots, t_{|D|-1}, \tau_{|D|}, t_{|D|})\}$. O elemento $I \in X$ será chamado de **integral de Kurzweil** de U sobre o intervalo $[a, b]$ e será denotado por $I = \int_a^b DU(\tau, t)$. Denotaremos por $\mathcal{K}([a, b], X)$ o espaço das funções de $[a, b] \times [a, b]$ em X que são Kurzweil integráveis.

Observação 2.3. *O Lema de Cousin garante que a integral de Kurzweil esteja bem definida.*

Observação 2.4. *É fácil verificar que a integral de Kurzweil é única quando existir.*

Observação 2.5. *Quando $\int_a^b DU(\tau, t)$ existir, definiremos*

$$\int_b^a DU(\tau, t) = - \int_a^b DU(\tau, t)$$

e usaremos a convenção $\int_a^b DU(\tau, t) = 0$ quando $a = b$.

Exemplo 2.6. Seja $f : [a, b] \rightarrow X$ e considere $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ uma função dada por $U(\tau, t) = f(\tau)t$. Neste caso particular,

$$\sum_i [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] = \sum_i f(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

e, quando existir, a integral de Kurzweil $\int_a^b DU(\tau, t)$ coincidirá com a **integral de Perron** a qual é usualmente denotada por

$$\int_a^b f(s)ds.$$

Exemplo 2.7. Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ uma função dada por $U(\tau, t) = F(t)g(\tau)$ com $F : [a, b] \rightarrow L(X)$ e $g : [a, b] \rightarrow X$. Neste caso particular,

$$\sum_i [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] = \sum_i [F(t_i) - F(t_{i-1})]g(\tau_i)$$

e a integral de Kurzweil $\int_a^b DU(\tau, t)$, quando existir, coincidirá com a **integral de Perron-Stieltjes** a qual é usualmente denotada por

$$\int_a^b d[F(s)]g(s).$$

Observação 2.8. Para estendermos a integral de Kurzweil a intervalos ilimitados, precisamos definir as δ -vizinhanças de $-\infty$ e ∞ . Tome $\delta(-\infty), \delta(\infty) > 0$ arbitrários e considere $\left[-\infty, -\frac{1}{\delta(-\infty)}\right)$ e $\left(\frac{1}{\delta(\infty)}, \infty\right]$. Podemos afirmar que $-\infty$ e ∞ são especiais em relação a qualquer calibre definido em $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, a reta estendida. De fato, sejam δ um calibre definido em $[-\infty, \infty]$ e $D = \{(\tau_i, [t_{i-1}, t_i]) \mid i = 1, \dots, n\}$ uma partição marcada δ -fina. Seja $[t_{n-1}, \infty]$ o último intervalo de D . Assim, $\tau_n \in [t_{n-1}, \infty] \subset \left(\frac{1}{\delta(\infty)}, \infty\right]$, pois D é δ -fina. Se $\tau_n \neq \infty$ então $\tau_n + \delta(\tau_n) < \infty$, o que contradiz a sentença anterior. Portanto $\tau_n = \infty$, ou seja, δ é ∞ -especial. Analogamente, demonstra-se que δ é $(-\infty)$ -especial.

Vamos, agora, apresentar algumas propriedades da integral de Kurzweil. Começaremos exibindo resultados que mostram que esta integral possui as propriedades de linearidade, aditividade com respeito a intervalos adjacentes e integrabilidade em subintervalos. Suas demonstrações podem ser encontradas em [21], nos Teoremas 1.9, 1.10, 1.11 e 1.14, respectivamente. Cabe observar que, apesar de em [21] os resultados estarem enunciados para o caso em que X possui dimensão finita, as demonstrações seguem de modo análogo para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 2.9. *Sejam $U, V \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Então $c_1U + c_2V \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e teremos*

$$\int_a^b D[c_1U(\tau, t) + c_2V(\tau, t)] = c_1 \int_a^b DU(\tau, t) + c_2 \int_a^b DV(\tau, t).$$

Teorema 2.10. *Se $c \in (a, b)$ e $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ for tal que $U \in \mathcal{K}([a, c], X)$ e $U \in \mathcal{K}([c, b], X)$, então $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e valerá a igualdade*

$$\int_a^b DU(\tau, t) = \int_a^c DU(\tau, t) + \int_c^b DU(\tau, t).$$

O próximo resultado é conhecido como Teorema de Hake para a integral de Kurzweil.

Teorema 2.11. *Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ uma função tal que $U \in \mathcal{K}([a, c], X)$ para todo $c \in [a, b)$ e suponha que o limite*

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \left[\int_a^c DU(\tau, t) - U(b, c) + U(b, b) \right] = I$$

exista. Então $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e valerá a igualdade

$$\int_a^b DU(\tau, t) = I.$$

Observação 2.12. *Vale um resultado análogo ao teorema acima para o caso em que $U \in \mathcal{K}([c, b], X)$ para todo $c \in (a, b]$. Assim, fica claro que as integrais de Kurzweil “impróprias” também são integrais de Kurzweil, ou seja, a integral de Kurzweil é invariante por extensões de Cauchy.*

Observação 2.13. *Como caso particular da integral de Kurzweil, a integral de Perron-Stieltjes é linear, aditiva em intervalos subjacentes e contém suas “integrais impróprias”.*

As provas dos próximos resultados para o caso em que X é um espaço de Banach de dimensão finita podem ser encontradas em [21] no Lema 1.13 e no Teorema 1.16 respectivamente. As provas correspondentes para X com dimensão infinita são análogas.

Lema 2.14 (Saks-Henstock). *Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ uma função tal que $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$. Dado $\epsilon > 0$, suponha que exista um calibre δ de $[a, b]$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| < \epsilon$$

para toda partição marcada δ -fina $D = \{t_0, \tau_1, t_1, \dots, t_{|D|-1}, \tau_{|D|}, t_{|D|}\}$ de $[a, b]$. Se

$$a \leq \beta_1 \leq \xi_1 \leq \gamma_1 \leq \beta_2 \leq \xi_2 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \beta_m \leq \xi_m \leq \gamma_m \leq b$$

for tal que $[\beta_i, \gamma_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$, para $i = 1, 2, \dots, m$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^m \left\{ [U(\xi_i, \gamma_i) - U(\xi_i, \beta_i)] - \int_{\beta_i}^{\gamma_i} DU(\tau, t) \right\} \right\| < \epsilon.$$

Teorema 2.15. *Sejam $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ uma função tal que $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e $c \in [a, b]$. Então*

$$\lim_{s \rightarrow c} \left[\int_a^s DU(\tau, t) - U(c, s) + U(c, c) \right] = \int_a^c DU(\tau, t)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow c} \left[\int_s^b DU(\tau, t) + U(c, s) - U(c, c) \right] = \int_c^b DU(\tau, t).$$

Observação 2.16. *O Teorema 2.15 nos mostra que a função*

$$s \in [a, b] \mapsto \int_a^s DU(\tau, t),$$

isto é, a integral indefinida de U não é necessariamente contínua. A integral indefinida será contínua em $c \in [a, b]$ se, e somente se, a função $U(c, \cdot) : [a, b] \rightarrow X$ for contínua em c . Em particular, a integral indefinida de Perron-Stieltjes não é necessariamente contínua.

Recordamos que uma função $f : [a, b] \rightarrow X$ é dita **regrada**, se os limites laterais $\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) = f(t^-) \in X$, para $t \in (a, b]$ e $\lim_{s \rightarrow t^+} f(s) = f(t^+) \in X$, para $t \in [a, b)$ existirem. Neste caso, escreveremos $f \in G([a, b], X)$. Além disso, diremos que f é de **variação limitada** no intervalo $[a, b]$, se

$$\text{var}_a^b f = \sup_{d \in \mathcal{D}[a, b]} \sum_{i=1}^{|D|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_X < \infty,$$

em que $\mathcal{D}[a, b]$ denota o conjunto de todas as partições de $[a, b]$, $|D|$ é o número de subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$ de uma partição d de $[a, b]$. Representaremos o espaço de todas funções $f : [a, b] \rightarrow X$ de variação limitada por $BV([a, b], X)$. É sabido que $BV([a, b], X)$ munido com a norma da variação,

$$\|f\|_{BV} = \|f(a)\| + \text{var}_a^b f,$$

é um espaço de Banach.

Observação 2.17. *São bem conhecidos os seguintes resultados sobre funções regradas:*

- (i) $G([a, b], X)$ munido com a norma usual do supremo, $\|\cdot\|_\infty$, definida por $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|_X$, é um espaço de Banach;
- (ii) $G([a, b], X) \supset BV([a, b], X)$ e $G([a, b], X) \supset C([a, b], X)$ em que $C([a, b], X)$ denota o espaço das funções de $[a, b]$ em X que são contínuas;
- (iii) Se $f \in G([a, b], X)$, então para todo $\varepsilon > 0$, os conjuntos

$$\{t \in [a, b] : \|f(t^+) - f(t)\| \geq \varepsilon\} \quad e \quad \{t \in (a, b] : \|f(t) - f(t^-)\| \geq \varepsilon\}$$

são finitos.

As provas das afirmações acima podem ser encontradas em [13].

O resultado a seguir apresenta condições que garantem a existência da integral de Perron-Stieltjes em espaços de Banach. Para uma demonstração, o leitor pode consultar [20], Proposição 15.

Teorema 2.18. *Se $g : [a, b] \rightarrow X$ for uma função regrada e $F : [a, b] \rightarrow L(X)$ for uma função de variação limitada em $[a, b]$, então a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b d[F(s)]g(s)$ existirá.*

Apresentaremos, agora, uma versão do Teorema de Integração por Partes para funções Perron-Stieltjes integráveis e uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para funções Perron integráveis. Suas demonstrações podem ser encontradas em [9], Teorema 6 e Corolário 5 respectivamente.

Teorema 2.19 (Teorema de Integração por Partes). *Se $f \in BV([a, b], L(X, Y))$ e $g : [a, b] \rightarrow X$ for Perron integrável, então $f \cdot g : [a, b] \rightarrow Y$ será Perron integrável e as igualdades*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b f(t)d\tilde{g}(t) \tag{2.1}$$

$$\int_a^b f(t)d\tilde{g}(t) = \tilde{f}(b)g(b) - \tilde{f}(a)g(a) - \int_a^b df(t)\tilde{g}(t) \tag{2.2}$$

serão válidas, em que

$$\tilde{g}(t) = \int_a^t g(s)ds \quad e \quad \tilde{f}(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Teorema 2.20 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se $F : [a, b] \rightarrow X$ for contínua e existir sua derivada, $F'(t) = f(t)$, para todo $t \in [a, b]$, então $f : [a, b] \rightarrow X$ será Perron integrável e teremos*

$$\int_a^t f(s)ds = F(t) - F(a), \quad t \in [a, b].$$

Equações diferenciais ordinárias generalizadas

Neste capítulo, vamos apresentar a teoria fundamental das equações diferenciais ordinárias generalizadas (escrevemos EDOs generalizadas). Em seguida, vamos nos restringir às EDOs generalizadas lineares e exibiremos algumas propriedades de suas soluções. As principais referências para este capítulo são [3], [11], [16] e [21].

3.1 Soluções de EDOs generalizadas

Sejam X um espaço de Banach e $\Omega \subset X \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Suponhamos que $F : \Omega \rightarrow X$ seja uma função $F(x, t)$ definida para $(x, t) \in \Omega$, em que $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1 ([21], Definição 3.1). *Uma função $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ será uma **solução** da equação diferencial ordinária generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t), \quad (3.1)$$

no intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, se $(x(t), t) \in \Omega$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e se

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t)$$

estiver satisfeita para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$, em que a integral do lado direito da equação acima é no sentido da integral de Kurzweil (veja a Definição 2.2).

Observação 3.2. Pelo Lema 6.1 em [21] e pelo Lema 2.11 em [3], se $x : [a, b] \rightarrow X$ for solução do PVI (3.3), então $x \in BV([a, b], X)$.

Observemos que o símbolo $\frac{dx}{d\tau}$ não significa que a solução de (3.1) tenha derivada, como mostra o exemplo a seguir, extraído de [21], Capítulo 3, página 100.

Exemplo 3.3. Seja $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que não possui derivada em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$. Defina $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x(\tau), t) = r(t)$. Neste caso, temos

$$\int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) = \int_{s_1}^{s_2} Dr(t) = r(s_2) - r(s_1),$$

pela definição de integral, o que significa que a função $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $x(s) = r(s)$ para $s \in [0, 1]$, é uma solução da equação

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) = Dr(t),$$

porém x não possui derivada em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$.

A Definição 3.1 não fornece informações sobre propriedades de uma solução $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ da EDO generalizada (3.1). A seguir, apresentaremos uma classe de funções $F : \Omega \rightarrow X$ para a qual é possível obter informações mais específicas sobre as soluções de (3.1). No que segue, consideraremos $\Omega = \mathfrak{D} \times [a, b]$, em que $\mathfrak{D} \subset X$ é um subconjunto aberto e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

Definição 3.4. Diremos que uma função $F : \Omega \rightarrow X$ pertence à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$, se existir uma função não decrescente $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições:

- (i) $\|F(x, t_2) - F(x, t_1)\|_X \leq |h(t_2) - h(t_1)|$, para quaisquer $(x, t_2), (x, t_1) \in \Omega$;
- (ii) $\|F(x, t_2) - F(x, t_1) - F(y, t_2) + F(y, t_1)\|_X \leq \|x - y\|_X |h(t_2) - h(t_1)|$, para quaisquer $(x, t_2), (x, t_1), (y, t_2), (y, t_1) \in \Omega$.

A classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$ definida acima permite obtermos várias propriedades qualitativas das soluções de uma EDO generalizada. No resultado seguinte, exibimos condições suficientes para que a EDO generalizada (3.1) admita uma única solução local.

Teorema 3.5 ([21], Teorema 2.15). *Suponha que $F : \Omega \rightarrow X$ pertença à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$, em que h é uma função não decrescente e contínua à esquerda. Assuma que, para cada $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$, tem-se $(\tilde{x}_+, t_0) \in \Omega$, em que $\tilde{x}_+ = \tilde{x} + F(\tilde{x}, t_0^+) - F(\tilde{x}, t_0)$. Então existem $\Delta > 0$ e uma única solução $x : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow X$ da EDO generalizada (3.1) no intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$ satisfazendo $x(t_0) = \tilde{x}$.*

É importante mencionar que a continuidade à esquerda da função h no Teorema 3.5 garante que as soluções da EDO generalizada (3.1) sejam contínuas à esquerda (veja a Observação 2.16).

Agora, apresentaremos um resultado que trata da existência e da unicidade de uma solução maximal para a EDO generalizada (3.1). Antes de enunciarmos tal resultado, vamos relembrar alguns conceitos preliminares.

Definição 3.6.

- Uma solução $x : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow X$, $\Delta > 0$ de (3.1) será dita **localmente única no futuro**, se para qualquer solução $y : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow X$, $\sigma > 0$ de (3.1) com $y(t_0) = x(t_0)$, existir $\eta > 0$ tal que $x(t) = y(t)$ para $t \in [t_0, t_0 + \Delta] \cap [t_0, t_0 + \sigma] \cap [t_0, t_0 + \eta]$.
- Um ponto $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$ será dito **ponto de existência local no futuro para a equação** (3.1), se toda solução x de (3.1), com $x(t_0) = \tilde{x}$, for localmente única no futuro. Diremos que a equação (3.1) terá **a propriedade de existência local no futuro**, se todo ponto $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$ for um ponto de existência local no futuro para a equação (3.1).
- Seja $x : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow X$, $\Delta > 0$ uma solução da EDO generalizada (3.1) com $x(t_0) = \tilde{x}$. Uma solução $y : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow X$, $\sigma > 0$ de (3.1) será dita **prolongamento** de x , se $[t_0, t_0 + \Delta] \subset [t_0, t_0 + \sigma]$ e $x(t) = y(t)$ para $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$.
- Se $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$, então uma solução x de (3.1), com $x(t_0) = \tilde{x}$, definida para todo $t \geq t_0$ será **maximal**, se existir um valor $b(\tilde{x}, t_0) > t_0$ tal que x existe sobre $[t_0, b(\tilde{x}, t_0))$ e não pode ser prolongada para um intervalo maior do que $[t_0, \beta]$ em que $\beta \geq b(\tilde{x}, t_0)$. Equivalentemente, não existe um prolongamento da solução $x : [t_0, b(\tilde{x}, t_0)) \rightarrow X$ de (3.1).

Proposição 3.7 ([21], Proposição 4.13). *Suponha que $F : \Omega \rightarrow X$ pertença à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$. Se a equação (3.1) tiver a propriedade de existência local no futuro, então existirá um intervalo J com extremo esquerdo t_0 e uma função $x : J \rightarrow X$ tal que $t_0 \in J$, $x(t_0) = \tilde{x}$ e $x : J \rightarrow X$ é uma solução maximal de (3.1). O intervalo J e a função x serão unicamente definidos pela condição inicial \tilde{x} e pela propriedade da solução maximal.*

No resultado seguinte, exibimos condições suficientes para que a EDO generalizada (3.1) admita uma única solução maximal.

Corolário 3.8 ([1], Corolário 4.13). *Suponha que $F : \Omega \rightarrow X$ pertença à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$, em que h é uma função não decrescente e contínua à esquerda. Então para todo $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$, existirá uma única solução maximal definida em $[t_0, +\infty)$ de (3.1) satisfazendo $x(t_0) = \tilde{x}$.*

3.2 EDOs generalizadas lineares

Nesta seção, vamos considerar EDOs generalizadas para o caso particular em que a função $F : X \times J \rightarrow X$ é dada pela lei $F(x, t) = A(t)x$, em que $A : J \rightarrow L(X)$ é um operador localmente de variação limitada em J e $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (limitado ou ilimitado). Neste caso, a equação

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x] \quad (3.2)$$

é conhecida como **EDO generalizada linear**.

De acordo com a Definição 3.1, uma solução de (3.2) no intervalo $[a, b] \subset J$ é uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ que satisfaz a igualdade

$$x(s_2) = x(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} D[A(t)x(\tau)],$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a, b]$.

Note que a integral de Kurzweil da expressão acima é aproximada por somas da forma

$$\sum_j [A(t_j) - A(t_{j-1})]x(\tau_j).$$

Assim, podemos denotar a integral $\int_a^b D[A(t)x(\tau)]$ pela forma convencional $\int_a^b d[A(s)]x(s)$ para a integral de Perron-Stieltjes como já mencionamos no Exemplo 2.7. Portanto x será solução de (3.2) no intervalo $[a, b]$, se tivermos

$$x(s_2) = x(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]x(s),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a, b]$.

No caso de um problema de valor inicial (PVI), dados $t_0 \in [a, b]$ e $\tilde{x} \in X$, diremos que uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ será uma solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(t_0) = \tilde{x}, \end{cases} \quad (3.3)$$

no intervalo $[a, b] \subset J$, se

$$x(t) = \tilde{x} + \int_{t_0}^t d[A(s)]x(s),$$

para qualquer $t \in [a, b]$.

Para obtermos propriedades de existência e unicidade de solução global para o PVI (3.3), vamos assumir que o operador $A : J \rightarrow L(X)$ satisfaça as seguintes condições:

(H1) $A \in BV([a, b], L(X))$ para todo subintervalo compacto $[a, b] \subset J$;

(H2) Para todo $t \in J$, valem

$$(I - [A(t) - A(t^-)])^{-1} = [I - \Delta^- A(t)]^{-1} \in L(X)$$

e

$$(I + [A(t^+) - A(t)])^{-1} = [I + \Delta^+ A(t)]^{-1} \in L(X),$$

em que I denota o operador identidade em $L(X)$.

Observação 3.9. Como $A \in BV([a, b], L(X)) \subset G([a, b], L(X))$, os limites laterais

$$A(t^+) = \lim_{r \rightarrow t^+} A(r) \in L(X), \quad t \in [a, b]$$

e

$$A(t^-) = \lim_{r \rightarrow t^-} A(r) \in L(X), \quad t \in (a, b],$$

existem. Dado $\varepsilon > 0$, segue da Observação 2.17, item (iii), que os conjuntos

$$\{t \in [a, b) : \|A(t^+) - A(t)\| \geq \varepsilon\} \quad \text{e} \quad \{t \in (a, b] : \|A(t) - A(t^-)\| \geq \varepsilon\}$$

são finitos. Desta forma, tomando $\varepsilon = 1$, existe um conjunto finito $\{t_1, \dots, t_m\} \subset [a, b]$ tal que $\|A(t^+) - A(t)\| < 1$ para todo $t \in [a, b)$, com $t \neq t_i$, $i = 1, \dots, m$, e $\|A(t) - A(t^-)\| < 1$ para todo $t \in (a, b]$, com $t \neq t_i$, $i = 1, \dots, m$. Então

$$I + \Delta^+ A(t) \in L(X) \quad t \in [a, b), \quad t \neq t_i, \quad i = 1, \dots, m$$

e

$$I - \Delta^- A(t) \in L(X) \quad t \in (a, b], \quad t \neq t_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Assim, se $A : [a, b] \rightarrow L(X)$ for um operador linear de variação limitada em $[a, b]$, a condição (H2) será válida, exceto por uma quantidade finita de pontos em $[a, b]$. Seja $B = \{t_1, \dots, t_m\}$ e considere $\tilde{A}(t) = A(t)\chi_B(t)$ em que $\chi_B : [a, b] \rightarrow X$ é definida por

$$\chi_B(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in B \\ 0 & \text{se } t \notin B. \end{cases}$$

Então $\tilde{A} \in BV([a, b], L(X))$ e a hipótese (H2) será válida para todo $t \in [a, b]$.

O próximo resultado trata da existência global e unicidade de solução para o PVI (3.3). Esse resultado é consequência das Proposições 6.3 e 6.4 em [21].

Teorema 3.10. *Assuma que o operador $A : J \rightarrow L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então o PVI (3.3) possui uma única solução definida no intervalo $[a, b] \subset J$.*

O teorema a seguir trata da existência de um operador que será bastante utilizado no decorrer desse trabalho e será chamado de **operador fundamental** da EDO generalizada linear (3.2). A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [21], Teorema 6.13, para o caso em que X possui dimensão finita, e em [3], Teorema 2.15, para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 3.11. *Suponha que o operador $A : J \rightarrow L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então existe um único operador $U : J \times J \rightarrow L(X)$ tal que*

$$U(s, t) = I + \int_s^t d[A(r)]U(r, s) \quad (3.4)$$

para quaisquer $t, s \in J$. Além disso, para cada $s \in J$ fixado, $U(\cdot, s)$ será um operador de variação limitada. Este operador é chamado operador fundamental da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x].$$

O próximo resultado relaciona soluções de EDOs generalizadas lineares com o seu operador fundamental correspondente. Uma demonstração para tal resultado pode ser encontrada em [21], Teorema 6.14, para o caso em que X possui dimensão finita, e em [3], Teorema 2.15, para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 3.12. *Suponha que o operador $A : J \rightarrow L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então para todo $s \in [a, b] \subset J$, a única solução $x : [a, b] \rightarrow X$ em $[a, b] \subset J$ do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x], \\ x(s) &= \tilde{x}, \end{cases}$$

será dada pela relação

$$x(t) = U(t, s)\tilde{x}, \quad t \in [a, b], \quad (3.5)$$

em que $U : J \times J \rightarrow L(X)$ é dado por (3.4).

O teorema a seguir mostra algumas propriedades interessantes do operador fundamental U dado por (3.4). Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [21], Teorema 6.15, para o caso em que X possui dimensão finita, e em [3], Teorema 2.15, para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 3.13. *Suponha que $A : J \rightarrow L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então $U : J \times J \rightarrow L(X)$, que é unicamente determinado por (3.4), satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $U(t, t) = I$, para $t \in J$;

(b) Para todo intervalo compacto $[a, b] \subset J$, existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|U(t, s)\| &\leq M, \quad \text{para quaisquer } t, s \in [a, b], \\ \text{var}_a^b U(t, \cdot) &\leq M, \quad \text{para qualquer } t \in [a, b], \\ \text{var}_a^b U(\cdot, s) &\leq M, \quad \text{para qualquer } s \in [a, b]; \end{aligned}$$

(c) Para $r, s, t \in J$, vale

$$U(t, s) = U(t, r)U(r, s),$$

(d) $U(t, s) \in L(X)$ é invertível para quaisquer $t, s \in J$;

(e) Para $t, s \in J$, temos

$$\begin{aligned} U(t^+, s) &= [I + \Delta^+ A(t)]U(t, s), \\ U(t^-, s) &= [I - \Delta^- A(t)]U(t, s), \\ U(t, s^+) &= U(t, s)[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}, \\ U(t, s^-) &= U(t, s)[I - \Delta^- A(t)]^{-1}, \end{aligned}$$

sempre que os limites envolvidos fizerem sentido;

(f) Para $t, s \in J$, vale

$$[U(t, s)]^{-1} = U(s, t).$$

Observação 3.14. *Consideremos uma equação diferencial ordinária da forma*

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{3.6}$$

em que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $f : B \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função. Sabemos que uma solução de (3.6), com condição inicial $x(t_0) = x_0$, poderá ser escrita na forma

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau, \quad t, t_0 \in [a, b], \quad t \geq t_0, \tag{3.7}$$

se a integral existir em algum sentido. Se a integral em (3.7) for considerada no sentido de Riemann, Lebesgue ou Perron, por exemplo, poderemos aproximá-la por uma soma da forma

$$\sum_{i=1}^m f(x(\tau_i), \tau_i)(s_i - s_{i-1}),$$

em que $t_0 = s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m = t$ é uma partição suficientemente fina do intervalo $[t_0, t]$ e $\tau_i \in [s_{i-1}, s_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$. Defina

$$F(x, s) = \int_{s_0}^s f(x, \sigma) d\sigma, \quad (x, s) \in B \times \mathbb{R}.$$

Então, pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 2.14), a integral em (3.7) pode ser aproximada por

$$\sum_{i=1}^m \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(x(\tau_i), \sigma) d\sigma = \sum_{i=1}^m [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})]. \quad (3.8)$$

Neste caso, o lado direito da igualdade (3.8) aproxima a integral de Kurzweil (Definição 2.2) a qual, quando considerada em (3.7), dá origem a uma EDO generalizada da forma

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \quad (3.9)$$

como na Definição 3.1. Logo, se $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma solução para a EDO generalizada (3.9), com condição inicial $y(t_0) = x_0$, teremos

$$x(t) - x_0 \stackrel{(3.7)}{=} \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau \stackrel{(3.8)}{=} \int_{t_0}^t DF(x(\tau), t) = y(t) - x_0.$$

Portanto a solução da EDO (3.6) pode ser identificada como uma solução da EDO generalizada (3.9).

Observação 3.15. Consideremos

$$\dot{x} = F(t)x, \quad (3.10)$$

em que $F : J \subset \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ é localmente Lebesgue ou Perron integrável em J . Dado $a \in J$, defina

$$A(t) = \int_a^t F(s) ds, \quad t \in J. \quad (3.11)$$

Como consequência do Lema de Saks-Henstock (Lema 2.14), a função A , dada em (3.11), é contínua. Então

$$I + \Delta^+ A(t) = I \quad e \quad I - \Delta^- A(t) = I \quad \text{para todo } t \in J.$$

Portanto A satisfaz (H2). Agora, consideremos a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \quad (3.12)$$

e seu operador fundamental $U : J \times J \rightarrow L(X)$ dado por (3.4). Se $s, t, \tau \in J$, então

$$\begin{aligned} U(t, s) &= U(\tau, s) + \int_{\tau}^t d[A(r)]U(r, s) \\ &= U(\tau, s) + \int_{\tau}^t F(r)U(r, s)dr, \end{aligned} \quad (3.13)$$

ou seja,

$$U(t, s) = \Phi(t, \tau)U(\tau, s), \quad (3.14)$$

em que $\Phi : J \times J \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ é a matriz fundamental da EDO linear (3.10) e a segunda igualdade da equação (3.13) segue do Teorema 2.20, já que U é regrada (Teorema 3.11) e A é contínua e, portanto, regrada. Além disso, multiplicando (3.14) por $U(s, t)$ e usando as propriedades do operador fundamental U , dadas no Teorema 3.13, obtemos

$$U(t, \tau) = \Phi(t, \tau), \quad \text{para quaisquer } t, \tau \in J.$$

Assim, a matriz fundamental de uma EDO linear do tipo (3.10) pode ser relacionada com o operador fundamental de uma EDO generalizada como em (3.12) pela igualdade (3.14).

3.3 EDOs generalizadas lineares perturbadas

Dados $A : J \rightarrow L(X)$, um operador localmente de variação limitada em J , e $g : J \rightarrow X$ uma função Perron integrável, consideremos $F : X \times J \rightarrow L(X)$ definida por $F(x, t) = A(t)x + g(t)$. Dizemos que uma EDO generalizada do tipo

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)]$$

é uma **EDO generalizada linear perturbada**.

Dados $t_0 \in [a, b] \subset J$ e $\tilde{x} \in X$, diremos que a função $x : [a, b] \rightarrow X$ é uma solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)], \\ x(t_0) = \tilde{x}, \end{cases} \quad (3.15)$$

no intervalo $[a, b] \subset J$, se tivermos

$$x(t) = \tilde{x} + \int_{t_0}^t D[A(s)x(\tau) + g(s)] = \tilde{x} + \int_{t_0}^t (D[A(s)x(\tau)] + D[g(s)]),$$

para todo $t \in [a, b]$.

Como já foi observado antes, podemos escrever

$$\int_{t_0}^t D[A(s)x(\tau)] = \int_{t_0}^t d[A(s)]x(s) \quad \text{e} \quad \int_{t_0}^t D[g(s)] = g(t) - g(t_0).$$

Portanto $x : [a, b] \rightarrow X$ será solução do PVI (3.15) em $[a, b]$ se, e somente se, tivermos

$$x(t) = \tilde{x} + \int_{t_0}^t d[A(s)]x(s) + g(t) - g(t_0), \quad t \in [a, b]. \quad (3.16)$$

O próximo resultado é conhecido como Fórmula da Variação das Constantes para EDOs generalizadas lineares e sua prova pode ser encontrada em [3], Teorema 2.22.

Teorema 3.16 (Fórmula da Variação das Constantes). *Suponha que $A : J \rightarrow L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2) e $G : X \times J$ seja uma função tal que, para cada $x \in G([a, b], X)$, a integral de Kurzweil $\int_a^b DG(x(\tau), t)$ exista, para todo $[a, b] \subset J$. Se $t_0 \in [a, b]$ e $x \in G([a, b], X)$ for uma solução do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + G(x, t)], \\ x(t_0) &= \tilde{x}, \end{cases}$$

então x poderá ser escrita como

$$x(t) = U(t, t_0)\tilde{x} + \int_{t_0}^t DG(x(\tau), s) - \int_{t_0}^t d_\sigma[U(t, \sigma)] \left(\int_{t_0}^\sigma DG(x(\tau), s) \right), \quad t \in [a, b],$$

em que $U : J \times J \rightarrow L(X)$ é o operador fundamental dado por (3.4).

Note que, no caso particular em que $G(x(\tau), t) = g(t)$, com $g : J \rightarrow X$ uma função, temos

$$\int_{t_0}^t D[G(x(\tau), s)] = \int_{t_0}^t D[g(s)] = g(t) - g(t_0)$$

para quaisquer $t, t_0 \in [a, b] \subset J$ e $x \in G([a, b], X)$. Dessa forma, o resultado a seguir é consequência imediata dos Teoremas 3.16 e 2.18.

Corolário 3.17. *Sejam A satisfazendo as condições (H1) e (H2) e $g : J \rightarrow X$ uma função Perron integrável. Então a única solução $x : [a, b] \rightarrow X$ de*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + g(t)], \\ x(t_0) &= \tilde{x}, \end{cases}$$

em $[a, b] \subset J$, será dada por

$$x(t) = U(t, t_0)\tilde{x} + (g(t) - g(t_0)) - \int_{t_0}^t d_\sigma[U(t, \sigma)](g(\sigma) - g(t_0)), \quad t \in [a, b]. \quad (3.17)$$

Observação 3.18. *Seja $\psi(t) = g(t) - g(t_0)$, com $g : J \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função Perron integrável e $t_0 \in J$. Pelo Teorema de Integração por Partes para a integral de Perron-Stieltjes (Teorema 2.19), temos*

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d_\sigma[U(t, \sigma)](\psi(\sigma)) &\stackrel{(2.2)}{=} U(t, t)(\psi(t)) - \int_{t_0}^t U(t, \sigma) d\tilde{\psi}(\sigma) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} U(t, t)(\psi(t)) - \int_{t_0}^t U(t, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma \\ &= g(t) - g(t_0) - \int_{t_0}^t U(t, \sigma)(g(\sigma) - g(t_0)) d\sigma. \end{aligned}$$

Então, usando as igualdades acima, podemos reescrever (3.17) como

$$x(t) = U(t, t_0)\tilde{x} + \int_{t_0}^t U(t, \sigma)(g(\sigma) - g(t_0)) d\sigma, \quad t \in [a, b].$$

No próximo capítulo, utilizaremos os resultados e propriedades vistos ao longo deste capítulo para estudar a teoria de controlabilidade e de observabilidade para EDOs generalizadas.

Controlabilidade e observabilidade para EDOs generalizadas

A teoria de controlabilidade e observabilidade para EDOs generalizadas é inexistente até o presente. Dedicamos este capítulo à investigação dessa nova teoria, a fim de propor condições mais gerais para as funções $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ e $C(\cdot)$ do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y(t) &= C(t)x,\end{aligned}\tag{4.1}$$

descrito na Seção 1.3.

O capítulo está dividido em duas seções. Na Seção 4.1, iremos introduzir a definição de controlabilidade e de observabilidade para EDOs generalizadas e estenderemos alguns resultados existentes na teoria de controlabilidade e de observabilidade para EDOs clássicas para o caso de EDOs generalizadas. Na Seção 4.2, daremos uma aplicação sobre o número de hemácias no sangue, modelada por uma equação diferencial funcional com retardo.

Os resultados descritos neste capítulo são inéditos e estão contidos no artigo [22]. Várias das técnicas utilizadas nas provas desses resultados podem ser encontradas em [5].

4.1 Controlabilidade e observabilidade

Sejam U, S, X e Y espaços de Banach, em que U é o **espaço de controle**, S é **espaço de estado inicial**, X é o **espaço de evolução** ou **espaço de estado** e Y é o **espaço de observação**. Definimos

- $A : [0, \infty) \rightarrow L(X)$ um operador satisfazendo:

(H1) $A \in BV([a, b], L(X))$ para todo subintervalo compacto $[a, b] \subset [0, +\infty)$;

(H2) Para todo $t \in [0, +\infty)$, temos

$$(I - [A(t) - A(t^-)])^{-1} = [I - \Delta^- A(t)]^{-1} \in L(X)$$

e

$$(I + [A(t^+) - A(t)])^{-1} = [I + \Delta^+ A(t)]^{-1} \in L(X),$$

em que I denota o operador identidade em $L(X)$;

- $B : [0, +\infty) \rightarrow L(U, X)$ e $u : [0, +\infty) \rightarrow U$ são operadores tais que $B(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$;
- Para cada $t \in (0, +\infty)$, a função $C(t) : BV([0, t], X) \rightarrow BV([0, t], Y)$ é regradada em relação à t .

Denotaremos por \mathcal{U} o conjunto de todas as funções de controle $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ tais que $B(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável em $[0, +\infty)$.

Nas condições acima, consideremos o sistema de EDOs generalizadas

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(\tau)x + B(\tau)u(\tau)] \\ y(t) &= C(t)x. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pela Observação 3.18, uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ será solução da EDO generalizada (4.2) em $[a, b] \subset [0, +\infty)$, se tivermos

$$x(t) = U(t, t_0)d + \int_{t_0}^t U(t, \tau)(B(\tau)u(\tau) - B(t_0)u(t_0))d\tau, \quad (4.3)$$

para $t, t_0 \in [a, b]$, em que $U(t, s)$ é dada por (3.4) e $x(t_0) = d \in S$. Denotaremos a solução x de (4.2), com condição inicial $x(t_0) = d$, por $x(t) = x(t, d, u)$ e $y(t) = y(t, d, u) = C(t)x(t, d, u)$.

Na sequência, assumiremos que todas as soluções da EDO generalizada linear (4.2) estão definidas para todo $t \in [0, +\infty)$.

Definição 4.1. A *função de evolução* da EDO generalizada (4.2) no tempo $t \in [0, \infty)$ é dada por

$$(d, u) \mapsto x(t, d, u) = F(t)d + G(t)(u)$$

definida em $S \times \mathcal{U}$ a valores em X , satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para todo $d \in S$, a função $t \in [0, +\infty) \mapsto F(t)d \in X$ é dada por

$$F(t)d = U(t, t_0)d,$$

em que $U(t, t_0)$ é definido em (3.4);

(ii) Para todo $t \in [0, \infty)$, a função $u \in \mathcal{U} \mapsto G(t)u \in X$ é dada por

$$G(t)u = \int_{t_0}^t U(t, \tau)(B(\tau)u(\tau) - B(t_0)u(t_0))d\tau,$$

em que $U(t, \tau)$ é definido em (3.4).

A seguir, vamos apresentar os conceitos de controlabilidade e observabilidade para o sistema (4.2). Relembramos o leitor que os conceitos de controlabilidade e observabilidade para EDOs clássicas estão presentes nas Definições 1.15 e 1.16 da Seção 1.3.

Definição 4.2. Seja $T \in \mathbb{R}$ fixado com $0 < T < \infty$.

(i) O estado inicial $d \in S$ será **controlável no tempo T para o ponto $\tilde{x} \in X$** , se existir uma sequência de funções de controle $\{u_n\}$ em \mathcal{U} tal que $x(T, d, u_n) \rightarrow \tilde{x}$; d será **estritamente controlável no tempo T para \tilde{x}** , se existir uma função de controle $u \in \mathcal{U}$ tal que $x(T, d, u) = \tilde{x}$. O sistema (4.2) será dito **controlável (estritamente controlável) no tempo T** , se todos os pontos de S forem controláveis (estritamente controláveis) no tempo T para todos os pontos de X .

(ii) Dado $u \in \mathcal{U}$, um estado inicial $d \in S$ será **observável no tempo T** , se d for unicamente determinado a partir de u e da observação $y(T, d, u)$. O sistema (4.2) será dito **observável no tempo T** , se todos os estados iniciais em S forem observáveis no tempo T .

Note que, quando X é um espaço de dimensão finita, os conceitos de controlabilidade e controlabilidade estrita coincidem, já que todo subespaço de um espaço de Banach de dimensão finita é fechado.

Agora, vamos investigar condições sob as quais o sistema (4.2) será controlável e observável. Defina

$$\begin{aligned} \bar{F}(T) : S &\rightarrow \text{BV}([0, T]; X) \\ d &\mapsto \bar{F}(T)d : \begin{array}{ll} [0, T] &\rightarrow X \\ t &\mapsto (\bar{F}(T)d)(t) = F(t)d. \end{array} \end{aligned}$$

O teorema a seguir descreve condições necessárias e suficientes para que o sistema (4.2) seja controlável, estritamente controlável e observável.

Teorema 4.3. *Seja $T \in \mathbb{R}$ fixado com $0 < T < \infty$. Considere a função \bar{F} apresentada acima e a função G apresentada na Definição 4.1. Então as seguintes afirmações são válidas:*

- (i) O sistema (4.2) será controlável no tempo T se, e somente se, a imagem de $G(T)$ for densa em X .
- (ii) O sistema (4.2) será estritamente controlável no tempo T se, e somente se, a função $G(T)$ for sobrejetora.
- (iii) O sistema (4.2) será observável no tempo T se, e somente se, a função composta $C(T)\bar{F}(T)$ for injetora.

Demonstração. Vamos provar o item (i). Dado $\tilde{x} \in X$ qualquer, seja $d = 0$. Como (4.2) é controlável no tempo T , existe uma sequência $\{u_n\}$ em \mathcal{U} tal que $x(T, 0, u_n) \rightarrow \tilde{x}$, isto é, $G(T)u_n \rightarrow \tilde{x}$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, a imagem de $G(T)$ é densa em X . Reciprocamente, para $d \in S$ arbitrário e $\tilde{x} \in X$, como a imagem de $G(T)$ é densa em X , existe uma sequência $\{u_n\}$ em \mathcal{U} tal que $G(T)u_n \rightarrow \tilde{x} - F(T)d$, isto é, $x(T, d, u_n) \rightarrow \tilde{x}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Para provar o item (ii), consideremos $\tilde{x} \in X$ dado e $d = 0$. Como (4.2) é estritamente controlável, existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $x(T, 0, u) = \tilde{x}$, isto é, $G(T)u = \tilde{x}$. Assim $G(T)$ é sobrejetora. Reciprocamente, dados $d \in S$ e $\tilde{x} \in X$, seja $z = \tilde{x} - F(T)d$. Como $G(T)$ é sobrejetora, existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $G(T)u = z = \tilde{x} - F(T)d$. Então $x(T, d, u) = \tilde{x}$.

Finalmente, para a prova de (iii), consideremos $d', d \in S$ tais que $d' \neq d$. Como (4.2) é observável no tempo T , por definição, $y(T, d', 0) \neq y(T, d, 0)$, isto é, $C(T)(\bar{F}(T)d) \neq C(T)(\bar{F}(T)d')$. Assim $C(T)\bar{F}(T)$ é injetora. Reciprocamente, dado $d \in S$ arbitrário, suponhamos que o sistema (4.2) não seja observável. Então existirá $d' \neq d \in S$ tal que $y(T, d', 0) = y(T, d, 0)$, para $u = 0$. Logo $C(T)(\bar{F}(T)(d' - d)) = 0$, o que contradiz a hipótese inicial. \square

Prosseguimos para mostrar que quando consideramos o seguinte sistema de EDOs

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}(t)\hat{x} + \hat{B}(t)\hat{u}(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}(t)\hat{x},\end{aligned}\tag{4.4}$$

com $\hat{A}(\cdot)$, $\hat{B}(\cdot)u(\cdot)$ e $\hat{C}(\cdot)$ sendo localmente Perron integráveis sobre $[0, +\infty)$, $X = \mathbb{R}^n = S$, $Y = \mathbb{R}^r$, $U = \mathbb{R}^p$, $u(t) = \hat{u}(t)$,

$$A(t) = \int_{t_0}^t \hat{A}(s)ds, \quad B(t)u(t) = \int_{t_0}^t \hat{B}(s)u(s)ds, \quad C(t) = \int_{t_0}^t \hat{C}(s)ds$$

e o seguinte sistema de EDOs generalizadas

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + B(t)u(t)], \\ y(t) &= C(t)x(t).\end{aligned}\tag{4.5}$$

nós teremos uma generalização dos resultados clássicos para o sistema (4.4).

O próximo resultado relaciona as condições para o sistema (4.5) ser controlável (Teorema 4.3, item (ii)) com as condições para o sistema (4.4) ser controlável (Teorema 1.18, Seção 1.3).

Teorema 4.4. *A função $G(T)$ da Definição 4.1 será sobrejetora se, e somente se, as linhas da matriz $U(t_0, T)B(T)$ forem linearmente independentes.*

Demonstração. Se as linhas da matriz $U(t_0, T)B(T)$ forem linearmente independentes, então a matriz

$$C(t_0, T) = \int_{t_0}^T U(T, \tau)B(\tau)B'(\tau)U'(t_0, \tau),$$

em que E' indica a matriz *transposta* de uma matriz E , será definida positiva. Para todo $x \in X$, tome

$$u(\tau) = B'(\tau)U'(t_0, \tau)C^{-1}(t_0, T)x, \quad \tau \in [t_0, T].$$

Então

$$\begin{aligned}G(T)u &= \int_{t_0}^T U(T, \tau)[B(\tau)u(\tau) - B(t_0)u(t_0)] \\ &= \int_{t_0}^T U(T, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= x.\end{aligned}$$

Assim $G(T)$ é sobrejetora.

Reciprocamente, assumiremos que as linhas da matriz $U(t_0, T)B(T)$ são linearmente dependentes. Então existe $x \in X$, $x \neq 0$, tal que

$$x'U(t_0, \tau)B(\tau) \equiv 0, \quad \tau \in [t_0, T].$$

Como $G(T)$ é sobrejetora, existe u tal que $G(T)u = x$. Assim

$$\int_{t_0}^T U(T, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = x.$$

Multiplicando a equação acima por $x'U(t_0, T)$, obtemos

$$x'U(t_0, T)x = \int_{t_0}^T x'U(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \implies x'U(t_0, T)x = 0,$$

o que contradiz o fato de que U é o operador fundamental fundamental do sistema (4.5). \square

A seguir, relacionaremos as condições para o sistema (4.5) ser observável (Teorema 4.3, item (iii)) com as condições para o sistema (4.4) ser observável (Teorema 1.19, Seção 1.3).

Teorema 4.5. *Seja $u \equiv 0$ em (4.5). Então $C(T)\bar{F}(T)$ será injetora se, e somente se, as colunas da matriz $C(T)U(T, t_0)$ forem linearmente independentes.*

Demonstração. Seja $C(T)\bar{F}(T)$ injetora. Suponha que as colunas da matriz $C(T)U(T, t_0)$ sejam linearmente dependentes. Então existe $d \in S$, com $d \neq 0$, tal que

$$C(T)U(T, t_0)d = 0. \tag{4.6}$$

Por outro lado,

$$C(T)U(T, t_0)d = C(T)(\bar{F}(T)d). \tag{4.7}$$

Então, por (4.6) e (4.7), obtemos

$$C(T)(\bar{F}(T)d) = 0, \quad d \neq 0,$$

em contradição com nossa hipótese.

Reciprocamente, suponha que $C(T)\bar{F}(T)$ não seja injetora. Então existe $d' \neq d \in S$ tal que $C(T)(\bar{F}(T)d) = C(T)(\bar{F}(T)d')$. Assim,

$$C(T)(\bar{F}(T)(d - d')) = 0 \quad \text{implica} \quad C(T)U(T, t_0)\bar{d} = 0, \quad \text{para } \bar{d} = d - d' \neq 0,$$

em contradição com o fato de que as colunas de $C(T)U(T, t_0)$ são linearmente independentes, o que completa a prova. \square

Observação 4.6. *Se $x : [a, b] \rightarrow X$ e $\hat{x} : [a, b] \rightarrow X$ forem soluções de (4.5) e de (4.4) respectivamente, com mesma condição inicial $x(t_0) = x_0 = \hat{x}(t_0)$, para $t_0 \in [a, b]$ então, para todo $t \in [a, b]$, teremos*

$$\begin{aligned} x(t) &= U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)d[B(\tau)u(\tau)] \\ &= \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\widehat{B}(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \widehat{x}(t), \end{aligned}$$

em que a primeira igualdade segue da Observação 3.15, a segunda igualdade segue do Teorema de Integração por Partes para integral de Perron-Stieltjes (Teorema 2.19), $U(t, \tau)$ é dada por (3.4) e $\Phi(t, \tau)$ é a matriz fundamental de (4.4).

Como consequência da Observação 4.6 e dos Teoremas 4.4 e 4.5, temos o resultado seguinte.

Corolário 4.7. *O sistema (4.4) será controlável (observável) se, e somente, se o sistema (4.5) for controlável (observável).*

Pelo Corolário 4.7, podemos considerar condições mais gerais para as funções $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ e $C(\cdot)$ em (4.1), desde que tais funções sejam Perron integráveis.

4.2 Controlabilidade em um modelo de sobrevivência de glóbulos vermelhos

Apresentaremos um exemplo simples que ilustra como uma equação diferencial com retardo pode ser útil para modelar mais concretamente alguns fenômenos biológicos.

Propomos que o volume, em ml, de glóbulos vermelhos (hemácias) no sangue de um paciente possa ser descrito por uma equação diferencial com retardo. Estudaremos condições de controlabilidade para o caso em que o paciente sofre de hemoglobinopatia, doença que afeta a hemoglobina. Em alguns casos, investigaremos equações diferenciais com retardo perturbadas e aplicaremos o conceito de controlabilidade que obtivemos para equações diferenciais ordinárias generalizadas, descrito na seção anterior.

4.2.1 Alguns fatos sobre hemácias

O volume de sangue existente no corpo humano corresponde, em média, a 7% ou 8% do peso corporal de cada pessoa. Por exemplo, uma pessoa com 75 quilos terá, aproximadamente, entre cinco a seis litros de sangue.

As hemácias são produzidas na medula óssea e têm uma vida de apenas 120 dias em média. As hemácias consideradas velhas são destruídas pelo baço. Isso significa que, após quatro meses, nossas hemácias já foram todas renovadas. A produção e a destruição das hemácias são constantes, de modo a se manter sempre um número estável de hemácias circulantes no sangue. Para ficar mais fácil de compreender, vamos explicar do que é feito o sangue.

Didaticamente, o sangue pode ser dividido em duas partes: plasma e células. O plasma sanguíneo é a parte líquida, correspondendo a 55% do volume total de sangue. O plasma é basicamente água (92%), com alguns nutrientes diluídos, como proteínas, anticorpos, enzimas, glicose, sais minerais, hormônios, etc. Os outros 45% do sangue são compostos por células: hemácias, leucócitos e plaquetas. Destas células, 99% são hemácias.

Agora, vamos considerar uma doença que afeta o percentual de hemácias no sangue: a anemia.

A anemia surge quando o percentual de hemácias no sangue fica reduzido, deixando-o mais diluído. O diagnóstico da anemia é feito, basicamente, pela dosagem das hemácias no sangue, realizada através de um exame de sangue chamado hemograma. Na prática, a dosagem das hemácias é feita através dos valores do hematócrito e da hemoglobina. O hematócrito é o percentual do sangue que é ocupado pelas hemácias (glóbulos vermelhos) e será considerado normal, se estiver entre 41% a 54% nos homens, e entre 35% a 47% nas mulheres. O nível baixo de hematócrito pode indicar complicações para o paciente, uma vez que as hemácias são responsáveis pelo transporte de oxigênio e nutrientes pelo corpo.

A anemia pode ser considerada como tendo três causas básicas:

- C1) Perda de hemácias e ferro através de sangramentos;
- C2) Elevada destruição de hemácias pelo corpo (Anemia hemolítica ou Talassemia tipo alpha);
- C3) Pouca produção de hemácias pela medula óssea (Anemia falciforme ou Talassemia tipo beta).

Estudaremos os três casos acima para um adolescente do sexo masculino com 40 kg, contendo aproximadamente 2,8 litros de sangue no corpo.

4.2.2 Descrição do modelo

Em [23], M. Wazewska-Czyzewsia e A. Lasota, descreveram um modelo para a sobrevivência dos glóbulos vermelhos pela equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + be^{-\gamma x(t-h)}, \quad t \geq t_0, \quad (4.8)$$

em que $\dot{x} = dx/dt$, $x(t)$ representa o volume (ml) de glóbulos vermelhos no instante t (dias), a (dias) é a probabilidade de morte de um glóbulo vermelho, b (ml/dia), $\gamma > 0$ (ml) são constantes relacionadas à produção de glóbulos vermelhos por unidade de tempo, e o retardo $h > 0$ (dias) é o tempo necessário para produzir glóbulos vermelhos.

Sabemos que a solução de (4.8) com condição inicial

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad (4.9)$$

pode ser escrita na forma

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-h, 0], \\ x(0)e^{-at} + b \int_0^t e^{a(s-t)} e^{-\gamma x(s-h)} ds, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Para $t > 0$, a Figura 4.1 adiante mostra uma família de soluções correspondente ao mesmo valor inicial, $x(0) = 2300$ ml, com coeficientes $a = 0,1$ dias, $b = 724,5$ ml/dia, $\gamma = 0,0015$ ml e $h = 1; 4$ e $6,5$.

Para estudar a controlabilidade da equação de sobrevivência de hemácias, introduziremos uma entrada $u(t)$ em (4.8), em que $u(t)$ representa o volume de hemácias (ml) recebido pelo paciente no instante t , em caso de transfusão de sangue. Assim, consideremos a seguinte equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + be^{-\gamma x(t-h)} + u(t), \quad t \geq t_0, \quad (4.11)$$

Consideremos, agora, que o paciente sofra de anemia causada pelo caso C1). Seja $v(t)$ o volume de hemácias (ml) que o paciente perde no instante t através de um sangramento. Então temos a seguinte EDO

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + be^{-\gamma x(t-h)} - v(t) + u(t), \quad t \geq t_0. \quad (4.12)$$

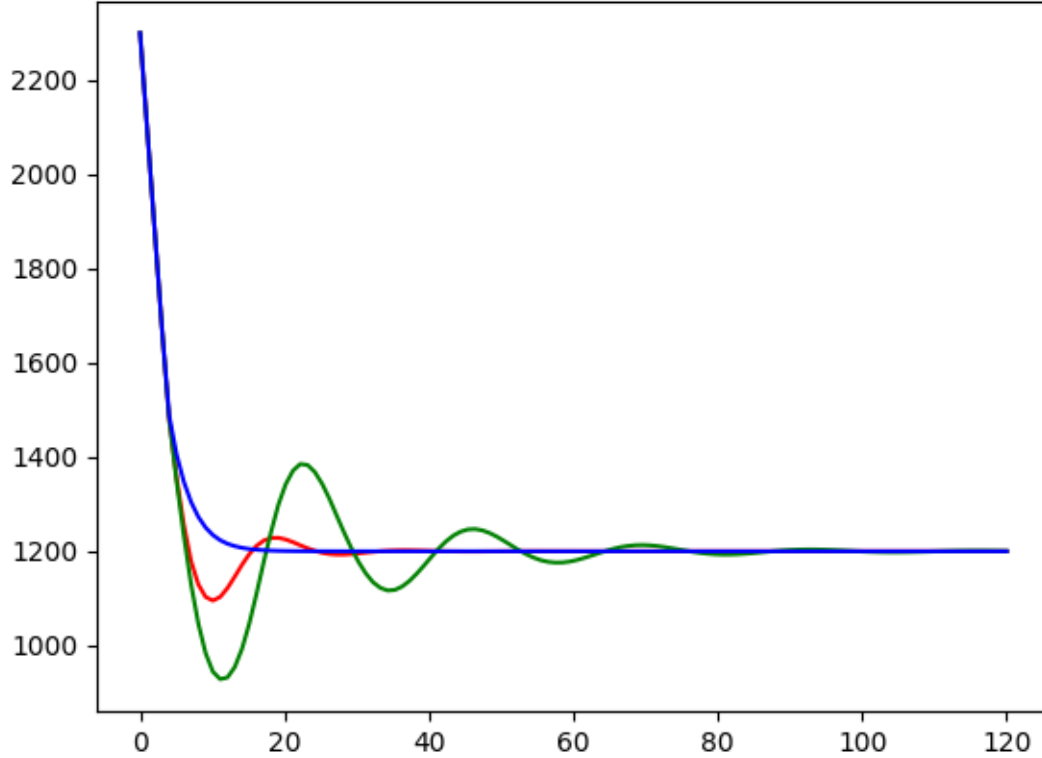


Figura 4.1: (-): $h=4$; (-): $h=6.5$; (-): $h=1$.

Por (4.10), a solução de (4.12), com condição inicial (4.9), é da forma

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-h, 0], \\ x(0)e^{-at} + b \int_0^t e^{a(s-t)} e^{-\gamma x(s-h)} ds + \int_0^t e^{a(s-t)} (u(s) - v(s)) ds, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Observe que, quando $u(t) = -be^{-\gamma x(s-h)} + v(s) + ax(0)$, (4.12) é controlável para a origem (basta substituir $u(t)$ em (4.13)).

Verifiquemos, a partir de um exemplo, qual é a menor quantidade de sangue, em litros, que o paciente deve receber após o sangramento, para evitar a morte.

Consideremos $x(0) = 2300$ ml, $a = 0,1$ dia, $b = 724,5$ ml/dia, $\gamma = 0,0015$ ml, $h = 4$ dias e $v(t) = \frac{t}{100}x(0)$, em que os valores de $x(0)$ e a são normais para uma pessoa saudável e o valor assumido para γ é determinado com base numa comparação da amostra de curvas de experimento teórico. Substituindo tais valores em (4.13), com

$u(t) \equiv 0$, temos as seguintes soluções aproximadas:

| | |
|------|-----------------|
| t=0 | x(t)= 2300 ml |
| t=1 | x(t)= 2058,4 ml |
| t=2 | x(t)= 1793,9 ml |
| t=3 | x(t)= 1545,3 ml |
| t=4 | x(t)= 1308,6 ml |
| t=5 | x(t)= 1078,7 ml |
| t=6 | x(t)= 859 ml |
| t=7 | x(t)= 659 ml |
| t=8 | x(t)= 482,4 ml |
| t=9 | x(t)= 336,8 ml |
| t=10 | x(t)= 231,5 ml |
| t=11 | x(t)= 176,6 ml |
| t=12 | x(t)= 180 ml |
| t=13 | x(t)= 244,2 ml |
| t=14 | x(t)= 359,9 ml |
| t=15 | x(t)= 501,1 ml |
| t=16 | x(t)= 626,3 ml |
| t=17 | x(t)= 688,4 ml |
| t=18 | x(t)= 655,2 ml |
| t=19 | x(t)= 521,5 ml |
| t=20 | x(t)= 308,6 ml |
| t=21 | x(t)= 53,5 ml |

Agora, suponhamos que o paciente venha a óbito, caso o volume de hemácias no sangue seja menor ou igual a 1000 ml, ou seja, se seu hematócrito estiver abaixo de 35%. Nestas condições, o paciente precisará de uma transfusão de sangue em $t \geq 5$. Assim, o menor valor de $u(t)$, para que o paciente sobreviva é dado por

$$u(t) = -be^{-\gamma x(t-h)} + v(s) + ax(5), \quad t \geq 5.$$

Consideremos, agora, que o paciente sofra de anemia causada pelo caso C2). Então $a = a(t)$ poderá variar de acordo com tempo. Por exemplo, a talassemia tipo alpha é uma doença hereditária autossômica recessiva caracterizada por redução da taxa de síntese de uma das cadeias de globina, podendo causar anemia hemolítica (anemia devido à ruptura das hemácias antes da sua vida normal de 120 dias). Tal redução pode ser constante ($a(t) = c$), estável ($a(t)$ contínua) ou oscilar com o tempo ($a(t)$ Perron integrável, por exemplo). Para o último caso, devemos considerar os resultados descritos na Seção 4.1.

Finalmente, se o paciente sofrer de anemia causada pelo caso C3). Então $b = b(t)$ e $\gamma = \gamma(t)$ poderão variar de acordo com tempo. Por exemplo, anemia falciforme é uma doença hematológica hereditária monogênica, caracterizada pela produção anormal de hemoglobinas, podendo comprometer até 3% da produção total de hemoglobinas (proteína encontrada no interior das hemácias). Tal produção anormal pode ser constante ($b(t) = c$), estável ($b(t)$ contínua) ou oscilar com o tempo ($b(t)$ Perron integrável, por exemplo). Assim, para o último caso, devemos investigar resultados sobre controlabilidade para equações diferenciais ordinárias generalizadas não lineares.

Aplicações

Neste capítulo, utilizaremos os resultados de controlabilidade e de observabilidade para equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares para obtermos controlabilidade e de observabilidade para equações diferenciais em medida e equações diferenciais com impulsos. Como consequência dos resultados desse capítulo, obtemos controlabilidade e observabilidade para as equações diferenciais ordinárias lineares clássicas.

5.1 Equações diferenciais em medida

O objetivo principal do conceito de equações diferenciais em medida é a descrição do sistema expondo soluções descontínuas causadas pelo comportamento impulsivo do sistema diferencial. Uma solução de uma equação diferencial em medida é, em geral, uma função descontínua de variação limitada, ou seja, tem propriedades similares às soluções das equações diferenciais ordinárias generalizadas.

Sejam X um espaço de Banach e $\overline{B}_c = \{x \in X : \|x\| \leq c\}$, em que $c > 0$. Sejam $\tilde{A} : [0, +\infty) \rightarrow L(X)$, $g : \overline{B}_c \times [0, +\infty) \rightarrow X$ e $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funções satisfazendo as condições:

(A1) $\tilde{A}(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$;

(A2) v é de variação limitada em $[0, +\infty)$ e contínua à esquerda;

(A3) Para cada $x \in \overline{B}_c$, a função $t \mapsto g(x, t)$ é Perron-Stieltjes integrável em relação à v (i.e. para cada $x \in \overline{B}_c$, existe a integral de Perron-Stieltjes, $\int g(x(t), t)dv(t)$).

Nestas condições, consideremos a equação diferencial da forma

$$Dx = \tilde{A}(t)x + g(x, t)Dv, \quad (5.1)$$

em que Dx e Dv representam as derivadas distribucionais de x e v no sentido de L. Schwartz. A equação (5.1) é chamada de **equação diferencial em medida (EDM)**.

Definição 5.1. Uma função $x : [a, b] \subset [0, +\infty) \rightarrow X$ será chamada de **solução do PVI**

$$\begin{cases} Dx &= \tilde{A}(t)x + g(x, t)Dv \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

em $[a, b]$, com $t_0 \in [a, b]$, se x for uma função contínua à esquerda, de variação limitada, $x(t_0) = x_0$ e a derivada distribucional de x satisfizer a equação (5.1) para quase todo $t \in [a, b]$.

Pelo Teorema da Representação Integral apresentado em [11], Teorema 3.2, podemos estabelecer a seguinte definição equivalente: uma função $x : [a, b] \subset [0, +\infty) \rightarrow X$ será solução do PVI (5.2) se, e somente, se

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \tilde{A}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^t g(x(s), s)dv(s),$$

para todo $t \in [a, b]$ em que, as integrais são no sentido de Perron e Perron-Stieltjes respectivamente.

O próximo resultado, apresenta condições para a existência e para a unicidade de soluções para o PVI (5.2). Para isso, consideremos as seguintes hipóteses adicionais sobre as funções envolvidas na equação (5.2):

(A4) Existe uma função localmente Lebesgue integrável, $m_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$, tem-se $\int_a^b m_1(s)ds < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b \tilde{A}(s)ds \right\| \leq \int_a^b m_1(s)ds;$$

(A5) Existe uma função localmente Lebesgue integrável em relação a v , $m_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$, tem-se $\int_a^b m_2(s)dv(s) < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b g(x, s)dv(s) \right\| \leq \int_a^b m_2(s)dv(s), \quad \text{para todo } x \in \overline{B}_c;$$

(A6) Existe uma função localmente Lebesgue integrável em relação a v , $l : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$, tem-se $\int_a^b l(s)dv(s) < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b g(x, s)dv(s) - \int_a^b g(y, s)dv(s) \right\| \leq \|x - y\| \int_a^b l(s)dv(s)$$

para quaisquer $x, y \in \overline{B}_c$.

Proposição 5.2 ([21], Proposição 5.11). *Sejam $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (A2) e $g : \overline{B}_c \times [0, +\infty) \rightarrow X$ satisfazendo (A3), (A5) e (A6). Então, para $G : \overline{B}_c \times [0, +\infty) \rightarrow X$ definida por*

$$G(x, t) = \int_{t_0}^t g(x, s)dv(s), \quad (5.3)$$

em que $x \in \overline{B}_c$ e $t, t_0 \in [0, +\infty)$, existe uma função não decrescente $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|G(x, t_2) - G(x, t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)|$$

e

$$\|G(x, t_2) - G(x, t_1) - G(y, t_2) + G(y, t_1)\| \leq \|x - y\| |h(t_2) - h(t_1)|$$

para $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ e $x, y \in \overline{B}_c$.

Demonstração. Basta tomar $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ em que

$$h_1(t) = \int_0^t m_2(s)d(\text{var}_0^s v), \quad t \in [0, +\infty);$$

$$h_2(t) = \int_0^t l(s)dv^-(s) + \int_0^t l(s)dv^+(s), \quad t \in [0, +\infty);$$

e $v = v^+ - v^-$ é a decomposição de Jordan da função v em $[0, +\infty)$. \square

Como consequência direta da Proposição 5.2, $G(x, t)$ definido em (5.3) pertence à classe $\mathcal{F}(\overline{B}_c \times [0, +\infty), h)$.

Considerando (5.3), a proposição seguinte diz que, nas condições da Proposição 5.2, $\int_a^b DG(x(\tau), t) = \int_a^b g(x(s), s)ds$ para $[a, b] \subset [0, +\infty)$.

Proposição 5.3 ([21], Proposição 5.12). *Sejam $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (A2) e $g : \overline{B}_c \times [0, +\infty) \rightarrow X$ satisfazendo (A3), (A5) e (A6) e $G : \overline{B}_c \times [0, +\infty) \rightarrow X$ tal que $G(x, t) = \int_{t_0}^t g(x, s)dv(s)$, para $x \in \overline{B}_c$ e $t, t_0 \in [0, +\infty)$. Se $x : [a, b] \rightarrow \overline{B}_c$, com*

$[a, b] \subset [0, +\infty)$, for o limite pontual de uma sequência de funções escadas, então a integral de Kurzweil $\int_a^b DG(x(\tau), t)$ e a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b g(x(s), s)dv(s)$ existirão e terão o mesmo valor.

No que segue, apresentamos o teorema de correspondência entre a EDM (5.1) e sua EDO generalizada correspondente.

Teorema 5.4 ([7], Teorema 3.2). *Uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ será solução do PVI (5.2) em $[a, b] \subset [0, +\infty)$, com as condições adicionais (A4), (A5) e (A6) se, e somente se, x for solução do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[F(t)x + G(x, t)] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

em que $F(t) = \int_{t_0}^t \tilde{A}(s)ds$ e $G(x, t) = \int_{t_0}^t g(x, s)dv(s)$ para quaisquer $t \in [a, b]$ e $x \in \overline{B}_c$.

Observação 5.5. Assumiremos que as soluções da EDM (5.2) estão definidas em todo intervalo $[0, +\infty)$.

O próximo teorema trata da existência e unicidade de um operador fundamental da EDM (5.2). A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [19], Teorema 4.6.

Teorema 5.6. *Seja $\mathcal{G} : [0, +\infty) \rightarrow X$ a restrição de g ao intervalo $[0, +\infty)$. Então, existe um único operador $U : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow L(X)$ tal que*

$$U(t, s) = I + \int_s^t \tilde{A}(r)U(r, s)dr + \int_s^t \mathcal{G}(r)U(r, s)dv(r), \quad (5.5)$$

para quaisquer $t, s \in [0, +\infty)$. Além disso para cada $s \in [0, +\infty)$ fixado, $U(\cdot, s)$ será um operador localmente de variação limitada. Este operador é chamado **operador fundamental** da EDM (5.2) e, dado $t_0 \in J$, a função $x(t) = U(t, t_0)x_0$ é solução da EDM (5.2) satisfazendo a condição $x(t_0) = x_0$, com $x_0 \in X$.

Usando o Teorema 3.13 e um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 5.6, podemos mostrar que o operador U definido em (5.5) satisfaz as condições:

- (a) $U(t, t) = I$, para $t \in [0, +\infty)$;

(b) Para todo intervalo compacto $[a, b] \subset [0, +\infty)$, existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|U(t, s)\| &\leq M, & \text{para quaisquer } t, s \in [a, b], \\ \text{var}_a^b U(t, \cdot) &\leq M, & \text{para qualquer } t \in [a, b], \\ \text{var}_a^b U(\cdot, s) &\leq M, & \text{para qualquer } s \in [a, b]; \end{aligned}$$

(c) Para $r, s, t \in [0, +\infty)$, vale

$$U(t, s) = U(t, r)U(r, s);$$

(d) $U(t, s) \in L(X)$ é invertível para todo $t, s \in [0, +\infty)$;

(e) Para $t, s \in [0, +\infty)$, temos

$$U(t^+, s) = [I + \Delta^+ A(t)]U(t, s),$$

$$U(t^-, s) = [I - \Delta^- A(t)]U(t, s),$$

$$U(t, s^+) = U(t, s)[I + \Delta^+ A(t)]^{-1},$$

$$U(t, s^-) = U(t, s)[I - \Delta^- A(t)]^{-1},$$

sempre que os limites envolvidos fizerem sentido;

(f) Para $t, s \in [0, +\infty)$, vale

$$[U(t, s)]^{-1} = U(s, t).$$

5.1.1 Controlabilidade e observabilidade para EDMs

Sejam U, S, X e Y espaços de Banach. Sejam $\tilde{A} : [0, +\infty) \rightarrow L(X)$, $B : [0, +\infty) \rightarrow L(U, X)$, $u : [0, +\infty) \rightarrow U$, $C : [0, +\infty) \rightarrow L(X, Y)$, $\mathcal{G} : [0, +\infty) \rightarrow X$ e $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funções satisfazendo as condições:

- $\tilde{A}(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$;
- $B : [0, +\infty) \rightarrow L(U, X)$ e $u : [0, +\infty) \rightarrow U$ são tais que $B(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$;
- Para cada $t \in (0, +\infty)$, a função $C(t) : \text{BV}([0, t], X) \rightarrow \text{BV}([0, t], Y)$ é regrada;
- v é localmente de variação limitada em $[0, +\infty)$ e contínua à esquerda;

- Existe uma função localmente Lebesgue integrável, $m_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$, tem-se $\int_a^b m_1(s)ds < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b \tilde{A}(s)ds \right\| \leq \int_a^b m_1(s)ds;$$

- \mathcal{G} é localmente Perron-Stieltjes integrável sobre $[0, +\infty)$ em relação à v ;
- Existe uma função localmente Lebesgue integrável em relação à v , $m_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$ tem-se $\int_a^b m_2(s)dv(s) < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b \mathcal{G}(s)dv(s) \right\| \leq \int_a^b m_2(s)dv(s).$$

Denotaremos por \mathcal{U} o conjunto de todas as funções de controle $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ tais que $B(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$.

Nas condições acima, consideremos o sistema de EDMs

$$\begin{aligned} Dx &= \tilde{A}(t)x + \mathcal{G}(t)x Dv + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x, \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que Dx e Dv representam as derivadas distribucionais de x e v no sentido de L. Schwartz.

Pelo Teorema 5.4, temos o resultado seguinte.

Teorema 5.7. *Seja $t_0 \in [0, +\infty)$. Uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ será solução de (5.6) em $[a, b] \subset [0, +\infty)$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se e somente se, x for solução do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[F(t)x + G(t)x + B(t)u(t)] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

em que $F(t) = \int_{t_0}^t \tilde{A}(s)ds$ e $G(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{G}(s)dv(s)$ para quaisquer $t \in [a, b]$ e $x \in \overline{B}_c$.

Observação 5.8. *Defina $A : [0, +\infty) \rightarrow L(X)$ por*

$$A(t) = F(t) + G(t). \quad (5.7)$$

Como A definida em (5.7) é localmente de variação limitada em $[0, +\infty)$ e contínua, então

$$I + \Delta^+ A(t) = I \quad e \quad I - \Delta^- A(t) = I \quad \text{para todo } t \in [0, +\infty).$$

Portanto A satisfaz (H2) do Capítulo 4.

O próximo teorema segue imediatamente do Teorema 5.7 e da Observação 5.8.

Teorema 5.9. *Seja $t_0 \in [0, +\infty)$. Uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ será solução da EDM (5.6) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ se, e somente se, x for solução do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + B(t)u(t)] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

em que $A(t) = F(t) + G(t)$, $F(t) = \int_{t_0}^t \tilde{A}(s)ds$, $G(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{G}(s)dv(s)$ e $B(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$.

No que segue, apresentaremos um resultado sobre controlabilidade e observabilidade para a EDM (5.6).

Teorema 5.10. *O sistema (5.6) será controlável (observável) se, e somente se, o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + B(t)u(t)] \\ y(t) &= C(t)x \end{cases}$$

for controlável (observável), em que $A(t) = F(t) + G(t)$, $F(t) = \int_{t_0}^t \tilde{A}(s)ds$, $G(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{G}(s)dv(s)$, $B(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$ e para cada $t \in (0, +\infty)$, a função $C(t) : \text{BV}([0, t], X) \rightarrow \text{BV}([0, t], Y)$ é regrada.

5.2 Equações diferenciais ordinárias com impulsos

Sejam X um espaço de Banach e $\bar{B}_c = \{x \in X : \|x\| \leq c\}$. Consideremos uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow L(X)$ satisfazendo

(B1) $f(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$;

(B2) Existe uma função localmente Lebesgue integrável $m : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$, tem-se $\int_a^b m(s)ds < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b f(s)ds \right\| \leq \int_a^b m(s)ds.$$

Seja $\{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\} \subset [0, +\infty)$ tal que $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ e consideremos operadores $I_i \in L(X)$, $i = 1, 2, \dots$, tais que $[I + I_i]^{-1} \in L(X)$, $i = 1, 2, \dots$, em que I denota o operador identidade em X . Assumiremos $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.

Nas condições acima, consideremos a equação diferencial impulsiva (escrevemos EDI)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x, & t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i x(t_i), & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.8)$$

Definição 5.11. *Suponha que $\{t_1, \dots, t_k\} \subset [a, b]$ e $t_{k+1} > b$. Uma função $x : [a, b] \rightarrow X$, com $[a, b] \subset [0, +\infty)$, será uma **solução** para a EDI (5.8) se, e somente se, valerem as condições:*

- (i) $x(t) \in \overline{B}_c$ para todo $t \in [a, b]$;
- (ii) x é contínua em $[a, t_1]$, em $(t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, e em $[t_k, b]$;
- (iii) $\dot{x}(t) = f(t)x(t)$ para quase todo $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$;
- (iv) $x(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t) = x(t_i) + I_i(x(t_i))$, para todo $i = 1, \dots, k$.

Definição 5.12. *Para cada $d \in [0, +\infty)$, definimos a função de **Heaviside** por*

$$H_d(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq d \\ 1, & \text{se } t > d. \end{cases}$$

No Lema 5.13 e no Teorema 5.14 a seguir, assumiremos que $\{t_1, \dots, t_k\} \subset [a, b] \subset [0, +\infty)$.

Lema 5.13. *Sejam $t_0 \in [a, b]$ e $x_0 \in \overline{B}_c$. Uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ será solução do PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x, & t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i x(t_i), & i = 1, 2, \dots, k, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5.9)$$

se, e somente se, tivermos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s)x(s)dx + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, k\} \\ t > t_i}} I_i(x(t_i))H_{t_i}(t),$$

para todo $t \in [a, b]$.

Veremos, agora, a correspondência entre a EDI (5.9) e sua EDO generalizada associada. A demonstração desse resultado é análoga à prova do Teorema 5.20 apresentando em [21].

Teorema 5.14. *Sejam $t_0 \in [a, b]$ e $x_0 \in \overline{B}_c$. Uma função $x : [a, b] \subset [0, +\infty) \rightarrow X$, será uma solução do PVI (5.9) se, e somente se, x for solução da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$, em que*

$$A(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds + \sum_{i=1}^{+\infty} I_i(x(t_i))H_{t_i}(t), \quad t \in [0, +\infty). \quad (5.10)$$

Observação 5.15. Assumiremos que as soluções da EDI (5.8) estão definidas em todo intervalo $[0, +\infty)$.

Note que o operador A , definido em (5.10), satisfaz as seguintes condições

$$I + \Delta^+ A(t) = I, \quad \text{se } t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \dots$$

e

$$I + \Delta^+ A(t) = I + I_i, \quad \text{se } t = t_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \dots$$

Como A é contínua à esquerda, temos

$$I - \Delta^- A(t) = I, \quad t \in [0, +\infty).$$

Portanto A satisfaz (H2). Veja o Exemplo 6.20 em [21] para mais detalhes.

Seja $\Phi : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow L(X)$ o operador fundamental da EDO $\dot{x} = f(t)x$. Defina o operador $V : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow L(X)$ por

$$V(t, s) = \Phi(t, t_i) \left(\prod_{k=i}^{j+1} [I + I_k] \Phi(t_k, t_{k+1}) \right) [I + I_j] \Phi(t_j, s)$$

se $t \geq s$, $t \in (t_i, t_{i+1}] \cap [0, +\infty)$, $s \in (t_{j-1}, t_j] \cap [0, +\infty)$ ($s \in (-\infty, t_1] \cap [0, +\infty)$, se $j = 1$), e

$$V(t, s) = [V(s, t)]^{-1} = \Phi(t, t_j) [I + I_j]^{-1} \dots [I + I_i]^{-1} \Phi(t_i, s)$$

se $t < s$, $s \in (t_i, t_{i+1}] \cap [0, +\infty)$, $t \in (t_{j-1}, t_j] \cap [0, +\infty)$ ($t \in (-\infty, t_1] \cap [0, +\infty)$ se $j = 1$).

De acordo com o Exemplo 6.20, página 193 em [21], temos o lema seguinte.

Lema 5.16. *O operador $V(t, s)$ será o operador fundamental da EDI (5.8) e $x(t) = V(t, t_0)x_0$ será solução da EDI (5.8) com condição inicial $x(t_0) = x_0$, para $t \geq s$, $t \in (t_i, t_{i+1}] \cap [0, +\infty)$, $s \in (t_{j-1}, t_j] \cap [0, +\infty)$ ($s \in (-\infty, t_1] \cap [0, +\infty)$ se $j = 1$). Além disso $U(t, s) = V(t, s)$ para todo $t, s \in [0, +\infty)$, em que $U(t, s)$ é o operador fundamental da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$ e $A(t)$ é dado por (5.10).*

5.2.1 Controlabilidade e observabilidade para EDIs

Sejam U , S , X e Y espaços de Banach. Sejam $f : [0, +\infty) \rightarrow L(X)$, $B : [0, +\infty) \rightarrow L(U, X)$, $u : [0, +\infty) \rightarrow U$, $C : [0, +\infty) \rightarrow L(X, Y)$ e $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ funções satisfazendo as condições:

- $f(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$;
- Existe uma função localmente Lebesgue integrável $m : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$, tem-se

$$\left\| \int_a^b f(s)ds \right\| \leq \int_a^b m(s)ds;$$

- $\widehat{B} : [0, +\infty) \rightarrow L(U, X)$ e $u : [0, +\infty) \rightarrow U$ são tais que $\widehat{B}(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$;
- Para cada $t \in (0, +\infty)$, a função $C(t) : \text{BV}([0, t], X) \rightarrow \text{BV}([0, t], Y)$ é regrada.

Denotaremos por \mathcal{U} o conjunto de todas as funções de controle $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ tais que $\widehat{B}(\cdot)u(\cdot)$ é localmente Perron integrável sobre $[0, +\infty)$.

Nas condições acima, consideremos o sistema de EDIs

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t)x + \widehat{B}(t)u(t), \quad t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) &= x(t_i^+) - x(t_i) = I_i x(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, \\ y(t) &= C(t)x. \end{cases} \quad (5.11)$$

Agora, defina

$$B(t)u(t) = \int_{t_0}^t \widehat{B}(s)u(s)ds, \quad t_0, t \in [0, +\infty).$$

Então $B(\cdot)u(\cdot) \in C([0, +\infty), X)$. Pelo Teorema 5.14, temos o resultado seguinte.

Teorema 5.17. *Uma função $x : [a, b] \rightarrow X$ será solução de (5.11) em $[a, b] \subset [0, +\infty)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$, para $t_0 \in [a, b]$ se, e somente se, x for solução do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + B(t)u(t)] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

em que A é dada por (5.10) e $B(t)u(t) = \int_{t_0}^t \widehat{B}(s)u(s)ds$, $t \in [0, +\infty)$.

No que segue, apresentaremos o resultado sobre controlabilidade e observabilidade para a EDI (5.11). Sua prova segue imediatamente do Teorema 5.17.

Teorema 5.18. *O sistema impulsivo (5.11) será controlável (observável) se, e somente, se o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + B(t)u(t)] \\ y(t) &= C(t)x \end{cases}$$

for controlável (observável), em que A é dada por (5.10), $B(t)u(t) = \int_{t_0}^t \widehat{B}(s)u(s)ds$, $t_0, t \in [0, +\infty)$ e para cada $t \in (0, +\infty)$, a função $C(t) : \text{BV}([0, t], X) \rightarrow \text{BV}([0, t], Y)$ é regrada.

Apêndice

Neste apêndice, apresentaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, pois achamos pertinente para o entendimento deste trabalho.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$, com coeficientes sobre um corpo \mathbb{K} . Escrevemos $A \in M_n(\mathbb{K})$. O **polinômio característico de A** é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \text{ em que } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Seja A_{ij} o determinante da matriz quadrada de ordem $n-1$ que surge ao eliminarmos a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz A . A **matriz dos cofatores de A** é de tamanho $n \times n$ e definida por $C = (c_{ij})$ com $c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$. A **matriz adjunta de A** é a matriz transposta de C . Usaremos a notação

$$\text{adj}(A) = C'.$$

Para provar o Teorema de Cayley-Hamilton, utilizaremos o seguinte resultado auxiliar sem prová-lo. Uma prova do próximo lema pode ser encontrada em [12].

Lema. *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Então*

$$A \text{adj}(A) = (\det A)I,$$

em que $I = I_n$ é a matriz identidade de ordem n . Em particular, se $\det A \neq 0$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A).$$

Teorema de Cayley-Hamilton. *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$, com polinômio característico $p(\lambda)$. Então*

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0.$$

Demonstração. Considere a matriz $\text{adj}(A - \lambda I)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, com elementos cuja maior potência em λ seja λ^{n-1} . Assim, podemos escrever

$$\text{adj}(A - \lambda I) = B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \dots + B_n, \quad (\text{A.1})$$

em que B_i são $n \times n$ matrizes constantes, isto é, independentes de λ . Usando o lema anterior, temos

$$(A - \lambda I)\text{adj}(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)I \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.1) em (A.2), obtemos

$$\begin{aligned} & (A - \lambda I)(B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \dots + B_n) \\ &= -B_1 \lambda^n + (AB_1 - B_2) \lambda^{n-1} + \dots + (AB_{n-1} - B_n) \lambda + AB_n \\ &= \det(A - \lambda I)I \end{aligned}$$

e usando a equação característica de $\det(A - \lambda I)I$, temos

$$\begin{aligned} & -B_1 \lambda^n + (AB_1 - B_2) \lambda^{n-1} + \dots + (AB_{n-1} - B_n) \lambda + AB_n \\ &= \lambda^n I + a_1 \lambda^{n-1} I + \dots + a_n I. \end{aligned}$$

Agora, igualando os coeficientes de mesma potência em λ , obtemos

$$\begin{aligned} -B_1 &= I \\ AB_1 - B_2 &= a_1 I \\ AB_2 - B_3 &= a_1 I \\ &\vdots \\ AB_{n-1} - B_n &= a_{n-1} I \\ AB_n &= a_n I. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação acima por A^n , a segunda por A^{n-1} , e assim por diante, e somando todas as equações, obtemos

$$\begin{aligned} & (-A^n B_1 + A^n B_1) + (-A^{n-1} B_2 + A^{n-1} B_2) + \dots \\ & \dots + (-A^2 B_{n-1} + A^2 B_{n-1}) + (-AB_n + AB_n) = p(A), \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & (-A^n B_1 + A^n B_1) + (-A^{n-1} B_2 + A^{n-1} B_2) + \dots \\ & \dots + (-A^2 B_{n-1} + A^2 B_{n-1}) + (-AB_n + AB_n) = 0, \end{aligned}$$

então $p(A) = 0$. □

Referências Bibliográficas

- [1] R. G. Acuña, *On qualitative properties of generalized ODEs*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- [2] S. M. Afonso; E. M. Bonotto; M. Federson; Š. Schwabik, Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times, *J. Differential Equations*, 250, (2011), 2969-3001.
- [3] R. Collegari, *Equações Diferenciais Generalizadas Lineares e Aplicações às Equações Diferenciais Funcionais Lineares*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.
- [4] C. T. Chen, *Linear Systems Theory and Design*, 3ª Edição, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [5] M. C. Delfour; S. K. Mitter, Controllability, observability and optimal feedback of affine hereditary differential systems, *SIAM J. Control*, 10(2), (1972), 298-328.
- [6] M. Federson; J. G. Mesquita; E. Toon, *Functional Differential Equations with Impulses*, Class Notes, Universidade de São Paulo, Fevereiro, 2015.
- [7] M. Federson; J. G. Mesquita; E. Toon, Lyapunov theorems for measure functional differential equations via Kurzweil equations, *Mathematische Nachrichten*, v.288, 2015.
- [8] M. Federson; Š. Schwabik, Generalized ODE approach to impulsive retarded differential equations, *Diff. Int. Eq.* 19(11), (2006), 1201-1234.

-
- [9] M. Ferderson, Substitution formulas for the Kurzweil an Henstock vector integrals, *Math. Bohem.*, 127(1), (2002), 15-26.”
- [10] M. Federson; R. Bianconi, Linear Volterra-Stieltjes integral equations in the sense of the Kurzweil-Henstock integral, *Arch. Math.*, 37(4), (2001), 307-328.
- [11] L. Garcia, *Estabilidade para equações diferenciais em medida*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- [12] C. A. Gomes; O. R. Oliveira, *O Teorema de Cayley Hamilton*, Notas de Aula, IME, Universidade de São Paulo, 2005.
- [13] C. S. Höning, Volterra Stieltjes Integral Equations, *North-Holland Publ. Comp.*, Amsterdam, 1975.
- [14] R. E. Kalman, *Lectures on controllability and observability*, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E), Stanford-University, Stanford, Summer School Book Series, vol 46, 1968.
- [15] J. Kurweil, *Generalized Ordinary Differential Equations: Not Absolutely Continuous Solutions*, World Scientific, Singapore, Series in Real Anal., vol 11, 2012.
- [16] J. Kurweil, Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter, *Czech. Math. Journal*, 7(82), (1957), 418-449.
- [17] A. Longtin; J. G. Milton, Modelling Autonomous Oscillations in the Human Pupil Light Reflex Using Non-Linear Delay-Differential Equations, *Bulletin of Mathematical Biology*, 51(5), (1989), 605-624.
- [18] K. M. Naralencov, On Integration by Part for Stieltjes-type Integrals of Banach Space-valued Functions, *Real Analysis Exchange*, 30(1), (2004/2005), 235-260.
- [19] F. L. Santos, *Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- [20] Š. Schwabik, Abstract Perron-Stieltjes integral, *Math.Bohem.*, 121(4), (1996), 425-447.
- [21] Š. Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Singapore, Series in Real Anal., vol 5, 1992.

- [22] F. A. Silva; M. Federson, Controlability and observability for linear systems in Banach Spaces using generalizad ordinary differential equations, preprint.
- [23] M. Wazewska-Czyzewska; A. Lasota, Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells, *Mat. Stos.*, 6, (1976), 23-40.
- [24] L. Weiss, *Lecture on controllability and observability*, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E), University of Maryland, Maryland, 1968.
- [25] L. Weiss, The concepts of Differential Controllability and Differential Observability, *J. Math. Anal. Appl.*, 10, (1965), 442-449.

Índice Remissivo

- A , 5, 26
- B , 5, 26
- $BV([a, b], X)$, 39
- C , 5, 26
- $C([a, b], X)$, 40
- D , 5
- $G([a, b], X)$, 39
- S , 56
- U , 6, 26, 56
- X , 6, 26, 56
- X_c , 15
- $X_{\bar{c}o}$, 16
- $X_{\bar{c}o}$, 16
- $X_{\bar{o}}$, 15
- $X_{\bar{c}o}$, 16
- X_{co} , 16
- Y , 6, 26, 56
- $\mathcal{K}([a, b], X)$, 36
- Ω , 43
- \mathcal{B} , 30
- \mathcal{C} , 6
- $\mathcal{D}[a, b]$, 39
- $\mathcal{F}(\Omega, h)$, 44
- \mathcal{O} , 10
- \mathcal{U} , 56, 72, 76
- \mathfrak{D} , 44
- $L(X)$, 35
- $L(X, Y)$, 35
- calibre, 36
- controle
 - admissível, 30
- derivadas distribucionais, 68
- EDM, 68
- EDO generalizada, 43
 - linear, 46
 - linear perturbada, 51
- espaço
 - de controle, 6, 26
 - de estado, 6, 26
 - de evolução, 56
 - de observação, 6, 26, 56
- estado
 - de controle, 56
- estado inicial
 - controlável, 57
 - estritamente controlável, 57
- função
 - de transferência, 17
 - de variação limitada, 39

- evolução, 57
- Heaviside, 74
- regrada, 39
- integral
 - de Kurzweil, 36
 - de Perron, 37
 - de Perron-Stieltjes, 37
- Lema
 - de Cousin, 36
 - de Saks-Henstock, 39
- marcas, 35
- matriz
 - de controle, 6
 - de Markov, 18
 - de observação, 10
 - fundamental, 26
- operador fundamental
 - EDI, 76
 - EDM, 70
 - EDO generalizada, 48
- par
 - controlável, 8
 - observável, 10
- partição
 - δ -fina, 36
 - marcada, 35
- ponto de existência local no futuro, 45
- propriedade de existência local no futuro, 45
- retardo, 19
- sistema
 - \mathbb{R}^n -controlável, 32
 - \mathcal{B} -controlável, 32
 - completamente diferencialmente controlável, 27
 - completamente diferencialmente observável, 27
 - controlável, 6, 27, 57
 - controlável para origem, 32
 - diferencialmente observável, 27
 - diferencialmente controlável, 27
 - estritamente controlável, 57
 - localmente \mathbb{R}^n -controlável, 33
 - localmente \mathbb{R}^n -controlável para a origem, 33
 - observável, 6, 27, 57
- solução
 - EDI, 74
 - EDM, 68
 - EDO generalizada, 43
 - localmente única no futuro, 45
 - maximal, 45
- subespaço
 - controlável, 15
 - controlável e não observável, 16
 - controlável e observável, 16
 - não controlável e não observável, 16
 - não controlável e observável, 16
 - não observável, 15
- Teorema
 - da Decomposição de Kalman, 16
 - de Hake, 38
 - de Integração por Partes, 40
 - Fundamental do Cálculo, 40
- transformação
 - de similaridade, 12
- transformada de Laplace, 18

vetor

- controlável, 6
- de entrada, 5, 26
- de estado, 5, 26
- de saída, 5, 26
- diferencialmente controlável, 27
- observável, 6