Controlabilidade e estabilização de sistemas de controle hereditários distribuídos lineares a tempo-variando

Andréa Cristina Prokopczyk Arita

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 22 de abril de 2009

Assinatura: ______________________________

Controlabilidade e estabilização de sistemas de controle hereditários distribuídos lineares a tempo-variando

Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Orientador: ***Prof. Dr. Eduardo Alex Hernández Morales***

Co-orientador: ***Prof. Dr. Hernán Roberto Henríquez Miranda***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

USP - São Carlos
Abril/2009

Ao meu marido,
Edinho.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pois "as misericórdias do Senhor são a causa de não sermos consumidos, porque as suas misericórdias não tem fim; renovam-se cada manhã. Grande é a tua fidelidade." Lamentações 3:22-23.

Agradeço também ao meu companheiro de todas as horas, que sempre está ao meu lado esteja eu bem humorada ou não. Edinho, você é o melhor marido do mundo.

Aos meus pais, Silvia e João, pelo amor incondicional e porque, mesmo com a distância, sempre me incentivaram e oraram por mim.

À minha família, tanto a brasileira quanto a japonesa, pelo apoio e por eu poder contar sempre com vocês.

Aos professores do ICMC, que me incentivaram e confiaram em mim. Agradeço em especial ao professor Eduardo Hernández, pela sua orientação, paciência e, além de tudo, sua amizade. Também agradeço ao professor Hernán Henríquez por participar da minha orientação, que esse seja o início de muitos anos de trabalhos.

Aos funcionários do ICMC, pela cordialidade e compromisso em nos atender bem. Em especial, agradeço as secretárias da pós-graduação, Beth, Laura e Ana Paula.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos meus amigos, principalmente a "galera" do ICMC, por tornarem minha vida mais alegre. Em especial agradeço ao amigo Thiago de Melo, pelas muitas risadas e pela ajuda com o LaTeX, e aos amigos Nivaldo, Everaldo e Michelle, pelos anos de amizade e companheirismo.

A todos vocês: muito obrigada!

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo do problema de controlabilidade e estabilização de sistemas de controle descritos por equações diferenciais abstratas com retardo distribuído. São estabelecidas uma propriedade de controlabilidade aproximada e, para sistemas periódicos, uma propriedade de estabilização. Assumindo que o semigrupo de operadores associado a equação não controlável e sem retardo é compacto, e usando a caracterização de estabilidade assintótica em termos do espectro do operador de monodromia do sistema não controlável, mostramos que a propriedade de controlabilidade aproximada é uma condição suficiente para garantir a existência de um controle "feedback" periódico que estabiliza o sistema. Este resultado é estendido para incluir alguns sistemas assintoticamente periódicos.

Abstract

This work is concerned with the controllability and stabilizability problem for control systems described by an abstract differential equations with distributed delay. An approximate controllability property is established and, for periodic systems, the stabilization problem is studied. Assuming that the semigroup of operators associated with the uncontrolled and non delayed equation is compact, and using the characterization of the asymptotic stability in terms of spectrum of the monodromy operator of the uncontrolled system, we show that the approximate controllability property is a sufficient condition for the existence of a periodic feedback control law that stabilizes the system. The result is extended to include some systems which are asymptotically periodic.

Índice

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo da controlabilidade e estabilização de alguns sistemas de controle hereditários lineares do tipo periódico com retardo finito.

Da literatura existente sobre Teoria de Controle, é conhecido que um requisito geral para o desenvolvimento de estratégias de controle é que o sistema seja assintoticamente estável. Por esta razão, a estabilização de sistemas é um assunto importante na Teoria de Controle.

O problema de estabilizar um sistema de controle invariante do tipo linear por uma dinâmica "output feedback" tem uma literatura muito extensa. Atualmente, a teoria para sistemas de controle de dimensão finita está bem estabelecida. Em relação a este caso, citamos os livros de O'Reilly [50], Wonham [69] e Dragan e Halanay [19] como referências básicas para a parte mais importante desta teoria.

Similarmente, o problema de "feedback stabilization" de sistemas de controle periódicos é discutido em vários trabalhos, veja como exemplos [1, 7, 8, 11, 13, 34, 40, 61]. Esses trabalhos consideram o sistema de controle linear

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ denota o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ é o "input" no tempo t e $A(\cdot), B(\cdot)$ são funções matrizes ω-periódicas. Sabemos de [11] que se o sistema (1) é controlável, então existe um "feedback" periódico $F(\cdot)$ tal que os multiplicadores característicos do sistema

$$x'(t) = [A(\cdot) + B(\cdot)F(\cdot)]x(t) \tag{2}$$

podem ser escolhidos arbitrariamente para alguns valores $\mu_1, \ldots, \mu_n$, quando a condição $\mu_1 \ldots \mu_n > 0$ é satisfeita.

Por outro lado, os conceitos de controlabilidade e estabilização para sistemas de controle descritos por equações diferenciais ordinárias com retardo (termo que abreviaremos por EDOR) têm sido estudados por muitos autores. A maioria dos trabalhos referentes a este assunto estão relacionados ao sistema

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + Bu(t),$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o estado, a função $x_t : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ é definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $\theta \in [-r, 0]$, e denota a "história" de x no tempo t, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, A e B são matrizes $n \times m$ e L é uma aplicação linear limitada definida no espaço das funções contínuas $C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$. Aqui, $r > 0$ é uma constante que representa o retardo da equação.

Vários autores têm estudado diferentes aspectos do problema de estabilização para sistemas com retardo numérico fixado ($x(t-n)$), por exemplo, veja [6, 12, 25, 31, 32, 38, 41, 45, 49, 51, 56, 57, 63, 65, 66, 67, 68], enquanto outros autores têm considerado o problema de estabilização independente de retardos, para este caso veja [10, 16, 20, 21, 22, 24, 35, 36, 37, 39, 42, 64]. Por outro lado, alguns desses trabalhos consideram retardos distribuídos. Em particular, a estabilização do sistema

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} d_\theta N(\theta) x(t + \theta) + Bu(t),$$

onde $N(\cdot)$ é uma função de variação limitada em $[-r, 0]$, com valores no espaço das matrizes $n \times n$, foi estudada por Pandolfi em [51]. Especificamente, introduzindo a matriz característica do sistema

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d_\theta N(\theta),$$

foi provado que se o posto de $[\Delta(\lambda), B]$ é igual a n, para $Re(\lambda) \geq 0$, então existe uma função linear limitada $K : C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ tal que o sistema

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} d_\theta N(\theta) x(t + \theta) + BK(x_t)$$

é estável (para o leitor interessado, citamos [28] como referência sobre as propriedades espectrais de equações diferenciais funcionais com retardo). Um resultado similar foi estabelecido em [52] para sistemas descritos por uma equação diferencial funcional do tipo neutra.

Neste trabalho, vamos estudar sistemas de controle lineares que podem ser descritos por uma equação diferencial funcional abstrata com retardo $r > 0$ (termo que abreviaremos por EDFAR). Em ordem para especificar esta classe de sistemas, sejam X e U espaços de Banach e $C = C([-r, 0]; X)$ o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ em X munido da norma da convergência uniforme. Ao longo de todo este trabalho, denotaremos por A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X, $B : U \to X$ será um operador linear limitado que representa a ação de controle e $L(t) : C \to X$ será uma aplicação linear limitada que satisfaz algumas condições que serão especificadas posteriormente. Estudaremos o sistema de controle descrito pela equação

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + Bu(t), \tag{3}$$

onde $x(t) \in X$, $u(t) \in U$ e $x_t : [-r, 0] \to X$ é definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $\theta \in [-r, 0]$.

Mostraremos que os resultados mencionados anteriormente podem ser apropriadamente estendidos para incluir alguns sistemas do tipo (3) com $L(\cdot)$ periódica. Além disso, estabelecemos um critério de controlabilidade aproximada para esta classe de sistemas.

Ao longo deste trabalho, para espaços de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$, denotaremos por $\mathcal{L}(Y; Z)$ o espaço dos operadores lineares limitados de Y em Z, munido da topologia de operadores, e usaremos apenas $\mathcal{L}(Y)$ quando $Y = Z$. O dual topológico de Y será descrito por Y^* e para $y \in Y$, $y^* \in Y^*$, usaremos $\langle y^*, y\rangle$ para denotar o valor de $y^*(y)$. Em particular, denotaremos por $\mathbb{C}^n$ o espaço de n-vetores coluna e por $(\mathbb{C}^n)^*$ o espaço n-vetores linha. Além disso, para um operador linear E com domínio denso, indicamos por E^* seu adjunto. Mais ainda, para um operador linear E com domínio $D(E)$, núcleo $\mathcal{N}(E)$ e imagem $\mathcal{R}(E)$ em Y, representamos por $\sigma(E)$ e $\sigma_p(E)$ o espectro e o espectro pontual de E, respectivamente.

Este trabalho tem dois capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos as ferramentas básicas necessárias para o desenvolvimento de nossos resultados sobre controlabilidade e estabilização de sistemas de controle hereditários lineares. Mais especificamente, na Seção 1.1 fazemos um resumo de alguns resultados da Teoria de Semigrupo. Na Seção 1.2 apresentamos alguns resultados sobre Teoria Espectral. A Seção 1.3 é dedicada às equações diferenciais funcionais abstratas com retardo. Neste caso, consideramos a existência de soluções "fracas" para sistemas com retardo nos casos onde $x_t \in C([-r, 0]; X)$ e $x_t \in L^p([-r, 0]; X)$. Por fim, na Seção 1.4 estudamos o conceito de Sistemas de Evolução.

No segundo capítulo apresentamos alguns resultados sobre controlabilidade e estabilização de sistemas hereditários. Convém ressaltar que esses resultados estão resumidos em um artigo submetido à publicação. Na Seção 2.1 introduzimos conceitos preliminares e as notações que precisaremos para dar continuidade ao estudo. Na Seção 2.2 estudamos a estabilização de sistemas de controle do tipo (3). Mais especificamente, no Teorema 2.2.5 assumimos que o semigrupo de operadores associado ao sistema (3) é compacto e que $L(\cdot)$ é ω-periódica, e mostramos que a controlabilidade aproximada do sistema (3) garante sua estabilização. Este resultado é estendido para uma classe de sistemas assintoticamente periódicos. Já na Seção 2.3, estudamos a controlabilidade aproximada do sistema (3). Em particular, usando [48] e [58] como base, obtemos o Teorema 2.3.9, que compara a controlabilidade aproximada do sistema de controle com retardo

$$\begin{aligned} &x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ &x_0 = \varphi \in C, \end{aligned}$$

com a controlabilidade aproximada do sistema sem retardo

$$\begin{aligned} &x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \\ &x(0) = \varphi(0) \in X. \end{aligned}$$

Finalizamos esta seção com dois exemplos, um deles baseado na equação do calor. Concluímos este trabalho na Seção 2.4, apresentando algumas aplicações dos resultados obtidos nas seções anteriores. Nessa mesma seção, obtemos condições onde os diferentes conceitos de controlabilidade das Seções 2.2 e 2.3 coincidem.

CAPÍTULO

1

Preliminares

Neste capítulo são introduzidos alguns preliminares técnicos necessários no resto da tese. São considerados de maneira especial alguns tópicos de Teoria de Semigrupos de operadores lineares limitados e Teoria Espectral de operadores fechados. Em todo este capítulo, $(X, \|\cdot\|)$ será um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ representará o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X munido da norma da topologia de operadores denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$.

1.1 Teoria de semigrupo

Nesta seção faremos uma revisão básica de alguns conceitos e propriedades da Teoria de Semigrupos de operadores lineares limitados. Por isso, apenas enunciaremos os principais resultados que, em geral, são aqueles usados posteriormente. Para maiores detalhes, citamos [53] e [54].

Definição 1.1.1. *Uma família a um parâmetro $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares em X se*

(i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in [0, \infty)$.

Definição 1.1.2. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares em X e $D(A)$ o conjunto definido por $D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$. O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$, definido por $Ax = \lim_{t\downarrow 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}$, é chamado gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.*

Definição 1.1.3. *Um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares é um semigrupo fortemente contínuo se $\lim\limits_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ para todo $x \in X$. Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado de C_0-semigrupo.*

Teorema 1.1.4. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. Então, existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \in [0,\infty)$.*

O próximo resultado resume algumas propriedades básicas de um C_0-semigrupo.

Teorema 1.1.5. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então, as seguintes propriedades são verificadas:*

- **(i)** *A função $t \mapsto T(t)x$ pertence a $C([0,\infty); X)$ para todo $x \in X$;*
- **(ii)** *Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$;*
- **(iii)** *Para $x \in X$ e $t \geq 0$, $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e $A\displaystyle\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$;*
- **(iv)** *Para $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$ e $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$;*
- **(v)** *Para $x \in D(A)$ e $t \geq s \geq 0$, $T(t)x - T(s)x = \displaystyle\int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$;*
- **(vi)** *A é um operador linear fechado e $D(A)$ é denso em X.*

Proposição 1.1.6. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e $f : [0,\infty) \to X$ uma função localmente integrável. Então, a função $t \mapsto \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s)ds$ é contínua de $[0,\infty)$ em X.*

Uma classe de C_0-semigrupos que serão importantes neste trabalho, são os semigrupos compactos.

Definição 1.1.7. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X é chamado compacto para $t > t_0$, se $T(t)$ é um operador compacto para todo $t > t_0$. O semigrupo é chamado compacto se $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$.*

Note que se $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t \geq 0$, então o operador identidade em X é compacto e consequentemente, X é um espaço de dimensão finita. Além disso, se $T(t_0)$ é compacto para algum $t_0 > 0$, então $T(t)$ é compacto para todo $t \geq t_0$, pois $T(t) = T(t-t_0)T(t_0)$.

Teorema 1.1.8. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t > t_0$, então $T(\cdot) \in C((t_0,\infty); \mathcal{L}(X))$.*

Concluímos esta seção com um importante resultado, conhecido como Teorema de Hille-Yosida, que garante quando um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ (não necessariamente limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Porém, antes de enunciarmos tal resultado, precisamos de algumas definições.

Definição 1.1.9. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. Se $M \geq 1$ e $w \geq 0$ são tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para todo $t \geq 0$, então dizemos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe (M, w). Se $M = 1$ e $w = 0$, então $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado de semigrupo de contrações.*

Seja $B : D(B) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto resolvente de B é definido por $\rho(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B) \text{ tem inversa e } (\lambda I - B)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$. O conjunto $\sigma(B) = \rho(B)^c$ é chamado espectro de B. Além disso, para $\lambda \in \rho(B)$, representamos $R(\lambda : B)$ pelo operador $(\lambda I - B)^{-1}$. O operador $R(\lambda : B)$ é chamado operador resolvente de B.

Teorema 1.1.10. (Teorema de Hille-Yosida)*[53, Teorema 3.1] Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$ em X se, e somente se,*

(i) *A é um operador fechado em X e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *$\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$.*

Como consequência direta do Teorema 1.1.10 temos o seguinte resultado.

Corolário 1.1.11. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, então $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\}$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{Re(\lambda)}$ para todo λ tal que $Re(\lambda) > 0$.*

A partir do Teorema 1.1.10 é possível mostrar a seguinte caracterização.

Proposição 1.1.12. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de classe $(1, w)$ se, e somente se,*

(i) *A é um operador fechado em X e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > w\}$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - w}$ para todo $\lambda > w$.*

No que se segue, consideremos alguns exemplos de C_0-semigrupos.

Definição 1.1.13. *Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Z é uma base de Riesz para Z se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\overline{Span\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}} = Z$;

(ii) Existem constantes positivas m e M tais que

$$m\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 \leq \Big\| \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\phi_n\Big\|_Z^2 \leq M\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$.

Definição 1.1.14. *Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset Z \to Z$ um operador linear fechado com autovalores simples $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ tais que os autovetores correspondentes formam uma base de Riesz para Z. Dizemos que A é um operador espectral de Riesz se $\overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$ é totalmente desconexo.*

O seguinte resultado estabelece quando um operador espectral de Riesz é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Neste resultado, $\delta_{nm} = 1$ se $m = n$ e $\delta_{nm} = 0$ se $n \neq m$.

Teorema 1.1.15. *[15, Teorema 2.3.5] Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset Z \to Z$ um operador espectral de Riesz com autovalores simples $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ e autovetores correspondentes $\{\phi_n : n \geq 1\}$. Sejam $\{\psi_n : n \geq 1\}$ autovetores do operador adjunto de A tais que $\langle \phi_n, \psi_m\rangle = \delta_{nm}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) $\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf\limits_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\right\}$, $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$ *e*

$$(\lambda I - A)^{-1}z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda - \lambda_n}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n, \text{ para todo } \lambda \in \rho(A),\ z \in Z;$$

(ii) $D(A) = \{z \in Z : \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2|\langle z, \psi_n\rangle|^2 < \infty\}$ *e*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle z, \psi_n\rangle\phi_n, \text{ para todo } z \in D(A);$$

(iii) *A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo se, e somente se,* $\sup\{Re(\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. *Neste caso,*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n t}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n, \quad \text{para todo } t \geq 0,\ z \in Z.$$

Exemplo 1.1.16. Sejam $X = L^2([0, \pi])$, $D(A) = \{x \in X : x(0) = x(\pi) = 0,\ x'' \in X\}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ o operador definido por $Ax = x''$. O operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em X. De fato, podemos facilmente verificar que os autovalores de A são dados por $\lambda_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, e que os autovetores correspondentes $\phi_n(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\sin(nx)$, formam uma base ortonormal de X. Além disso, a condição (ii) da Definição 1.1.13 se verifica com $m = M = 1$. Como consequência do Teorema 1.1.15, temos que

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \langle z, \phi_n \rangle \phi_n$$

para todo $z \in D(A) = \left\{ z \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 < \infty \right\}$ e A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, que é dado por

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n, \quad \text{para todo } \ z \in Z.$$

O semigrupo do exemplo anterior corresponde a uma classe mais geral de C_0-semigrupos, os semigrupos analíticos.

Definição 1.1.17. *Sejam $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ com $\theta_1 < 0 < \theta_2$ e $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$. Uma família de operadores lineares $(T(z))_{z \in \Delta}$ em $\mathcal{L}(X)$ é chamado semigrupo analítico em Δ se*

(i) $z \mapsto T(z)$ *é analítica em* Δ*;*

(ii) $T(0) = I$ *e* $\lim_{z \to 0} T(z)x = x$ *para todo* $x \in X$*;*

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *para todo* $z_1, z_2 \in \Delta$.

1.2 Teoria espectral

A seguir apresentamos alguns resultados sobre Teoria Espectral de operadores lineares fechados. Em toda esta seção, $B : D(B) \subset X \to X$ será um operador linear. No seguinte resultado são apresentadas duas propriedades básicas do operador resolvente. Para a demonstração dessas propriedades citamos [59, Teorema 5.1-C].

Proposição 1.2.1. *Sejam $\lambda, \mu \in \rho(B)$. Então, $R(\lambda : B) - R(\mu : B) = (\mu - \lambda)R(\lambda : B)R(\mu : B)$ e $R(\lambda : B)R(\mu : B) = R(\mu : B)R(\lambda : B)$.*

O espectro de um operador linear B, $\sigma(B) = \rho(B)^c$, dividi-se em três partes, mutuamente exclusivas, descritas na próxima definição.

Definição 1.2.2. *Dizemos que o conjunto*

(a) $\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B) \ \text{não é injetora}\}$ *é o espectro pontual de* B*;*

(b) $\sigma_r(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B)$ *é injetora e* $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - B)} \subsetneq X\}$ *é o espectro residual de* B*;*

(c) $\sigma_c(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B)$ *é injetora,* $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - B)} = X$ *e* $(\lambda I - B)^{-1} \notin \mathcal{L}(X)\}$ *é o espectro contínuo de* B*.*

Definimos agora o raio espectral de um operador linear B. Este conceito é útil para garantir estabilidade de certos tipos de sistemas.

Definição 1.2.3. *O raio espectral de um operador linear* $B : D(B) \subset X \to X$ *é definido por*

$$r_\sigma(B) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}.$$

O próximo resultado considera algumas propriedades do raio espectral de um operador.

Proposição 1.2.4. *Seja* $B \in \mathcal{L}(X)$ *e* X *um espaço de Banach complexo. Então*

(i) $r_\sigma(B) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|B^n\|}$;

(ii) *Se* $S \in \mathcal{L}(X)$*, então* $r_\sigma(BS) = r_\sigma(SB)$*;*

(iii) *Se* B *é auto-adjunto e* X *é um espaço de Hilbert, então* $r_\sigma(B) = \|B\|$*.*

Demonstração: A prova do item **(1)** se encontra em [59, pág. 262]. O item **(2)** está em [15, Lema A.4.15] e o item **(3)** é consequência de [59, Teorema 6.2-B, Teorema 6.11-C].

No próximo resultado, e no restante desta tese, denotaremos por $\mathcal{N}(B)$ e $\mathcal{R}(B)$ o núcleo e a imagem de B, respectivamente.

Definição 1.2.5. *O ascendente de* $B : D(B) \subset X \to X$*, denotado por* $\alpha(B)$*, é o menor inteiro positivo* n *tal que* $\mathcal{N}(B^n) = \mathcal{N}(B^{n+1})$*. O descendente de* B*, denotado por* $\delta(B)$*, é o menor inteiro positivo* n *tal que* $\mathcal{R}(B^n) = \mathcal{R}(B^{n+1})$*.*

Note que $\alpha(B) = 0$ se, e somente se, B^{-1} existe. Por outro lado, $\delta(B) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{R}(B) = X$. O próximo resultado segue de [59, Teorema 5.41-D, Teorema 5.41-E].

Teorema 1.2.6. *Se* $\alpha(B)$ *e* $\delta(B)$ *são finitos, então* $\alpha(B) \leq \delta(B)$*. Além disso, se* $D(B) = X$ *então,* $\alpha(B) = \delta(B)$*.*

Teorema 1.2.7. *Suponha que* $B \in \mathcal{L}(X)$ *e que* B *é compacto. Se* $\lambda \neq 0$*, então* $\mathcal{N}((\lambda I - B)^n)$ *possui dimensão finita e* $\mathcal{R}((\lambda I - B)^n)$ *é um subconjunto fechado de* X *para todo* $n \geq 1$*.*

Demonstração: Para a prova deste resultado veja [59, Teorema 5.5-C] e [59, Teorema 5.5-D].

Teorema 1.2.8. [59, Teorema 5.5-E] *Suponha que o operador $B \in \mathcal{L}(X)$ é compacto. Se $\lambda \neq 0$, então o ascendente e o descendente do operador $(\lambda I - B)$ são finitos.*

Definição 1.2.9. *Sejam $M_1, \dots, M_n$, $n \geq 2$, subespaços lineares de X. Dizemos que a família $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ é linearmente independente, se $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} M_i \cap M_k = \{0\}$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k$.*

Na seguinte definição, $X = M_1 \oplus M_2$ e $P_i : X \to M_i$ são as projeções definidas por $P_i x = x_i$, $i = 1, 2$, onde $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$.

Definição 1.2.10. *O operador B é chamado completamente reduzido por (M_1, M_2) se M_1 e M_2 são subespaços de X linearmente independentes, invariantes por B e $P_i(D(B)) \subset D(B)$ para $i = 1, 2$.*

A prova do próximo resultado pode ser encontrada em [59, Teorema 5.41-G].

Teorema 1.2.11. *Suponha que $D(B) = X$ e que $\alpha(B)$ e $\delta(B)$ são finitos. Então, B é completamente reduzido por $\mathcal{N}(B^{\delta(B)})$ e $\mathcal{R}(B^{\delta(B)})$. Mais ainda, $B : \mathcal{R}(B^{\delta(B)}) \to \mathcal{R}(B^{\delta(B)})$ é um isomorfismo.*

Suponha que X seja um espaço de Banach complexo e que $B : D(B) \subset X \to X$ é fechado, com $\rho(B) \neq 0$. Então $R(\cdot : B)$ é uma função analítica em $\rho(B)$ e

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda : B) = -R(\lambda : B)^2, \quad \lambda \in \rho(B).$$

Assim, um ponto isolado de $\sigma(B)$ é um ponto singular isolado de $R(\cdot, B)$, o que implica que existe uma expansão de Laurent para $R(\lambda : B)$ em potências de $(\lambda - \lambda_0)$, para todo λ_0 ponto singular isolado. Isso significa que

$$R(\lambda : B) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-n} B_n$$

para todo $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$, onde $\sigma(B) \backslash \{\lambda_0\} \nsubseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$,

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{C}} (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} R(\lambda : B) d\lambda \quad \text{e} \quad B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{C}} (\lambda - \lambda_0)^{n-1} R(\lambda : B) d\lambda,$$

com $\widehat{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = h\}$ orientada no sentido anti-horário e $0 < h < \delta$.

Definição 1.2.12. *Dizemos que λ_0 é um polo de ordem m de $\lambda \mapsto R(\lambda : B)$ se $B_m \neq 0$ e $B_n = 0$ para todo $n > m$.*

Os coeficientes A_n e B_n satisfazem as seguintes propriedades:

$$(B - \lambda_0 I) A_{n+1} = A_n; \tag{1.1}$$

$$(B - \lambda_0 I) B_n = B_{n+1} = (B - \lambda_0 I)^n B_1; \tag{1.2}$$

$$(B - \lambda_0 I) A_0 = B_1 - I. \tag{1.3}$$

Consequentemente, λ_0 é um polo de ordem m de $R(\cdot : B)$ se, e somente se, $B_m \neq 0$ e $B_{m+1} = 0$. Note ainda que, neste caso, $B_1, B_2, \ldots, B_m \neq 0$. Apresentamos a seguir dois resultados envolvendo o conceito de polo.

Teorema 1.2.13. *[59, Teorema 5.8-D] Suponha que exista um inteiro n tal que $\mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^n) \cap \mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^n) = \{0\}$, $\mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^n)$ é fechado e $X = \mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^n) \oplus \mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^n)$. Seja $m \geq 1$ o menor inteiro tal que essas propriedades sejam válidas. Então, λ_0 é um polo de ordem m de $R(\cdot : B)$.*

Teorema 1.2.14. *Se $B \in \mathcal{L}(X)$ é um operador compacto, então todo elemento de $\sigma(B)\backslash\{0\}$ é um polo de $R(\cdot : B)$.*

Demonstração: Seja $\lambda_0 \in \sigma(B)$, $\lambda_0 \neq 0$. Pelo Teorema 1.2.8, $\alpha(\lambda_0 I - B) = \delta(\lambda_0 I - B) = m$ para algum inteiro $m \geq 1$. Por outro lado, o Teorema 1.2.7 garante que $\mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^n)$ é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, do Teorema 1.2.11 sabemos que $(\lambda_0 I - B)$ é completamente reduzido por $\mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^m)$ e $\mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^m)$, o que implica que esses subespaços são linearmente independentes, invariantes por $(\lambda_0 I - B)$ e que $X = \mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^m) \oplus \mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^m)$. Agora, o resultado segue diretamente do Teorema 1.2.13. ■

Além do conceito de espectro de um operador B, precisaremos do conceito de espectro estendido.

Definição 1.2.15. *O espectro estendido de B, denotado por $\sigma_e(B)$, é definido por $\sigma_e(B) = \sigma(B)$ se $B \in \mathcal{L}(X)$ e $\sigma_e(B) = \sigma(B) \cup \{\infty\}$ quando $B \notin \mathcal{L}(X)$.*

Definição 1.2.16. *Um subconjunto σ de $\sigma_e(B)$ é chamado conjunto espectral de B se σ é aberto e fechado na topologia de $\sigma_e(B)$.*

Seja σ um conjunto espectral de B e defina uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ por

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{para } \lambda \text{ em uma vizinhança de } \sigma \\ 0, & \text{para } \lambda \text{ em uma vizinhança de } \sigma_e(T)\backslash\sigma. \end{cases}$$

Segundo [59] Seção 5.7, podemos associar a $f(\cdot)$ um operador E_σ tal que $E_\sigma E_\sigma = E_\sigma$ e assim, dizemos que E_σ é a projeção associada a σ. Da mesma forma, a função $1 - f(\cdot)$ está relacionada com o conjunto $\sigma_e(T)\backslash\sigma$, o que implica que $E_{\sigma_e(T)\backslash\sigma} = (I - E_\sigma)$ é a projeção associada ao conjunto espectral $\sigma_e(T)\backslash\sigma$. Além disso, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $E_\sigma + E_{\sigma_e(T)\backslash\sigma} = I$;

(ii) $E_\sigma E_{\sigma_e(T)\backslash\sigma} = E_{\sigma_e(T)\backslash\sigma} E_\sigma = 0$;

(iii) $\mathcal{R}(E_\sigma)$ e $\mathcal{R}(E_{\sigma_e(T)\backslash\sigma})$ são subconjuntos fechados;

(iv) $\mathcal{R}(E_\sigma) \cap \mathcal{R}(E_{\sigma_e(T)\backslash\sigma}) = \{0\}$;

(v) $X = \mathcal{R}(E_\sigma) \oplus \mathcal{R}(E_{\sigma_e(T)\setminus\sigma})$.

Quando pensamos no coeficiente B_1 da expansão de Laurent de $R(\lambda : B)$, temos que B_1 se comporta como a projeção E_σ para o caso onde $\sigma = \{\lambda_0\}$. Além disso, se $\sigma \neq \emptyset$, então $B_1 \neq 0$.

No teorema a seguir apresentamos outro resultado sobre conjunto espectral.

Teorema 1.2.17. *Sejam σ um conjunto espectral de B e $\widehat{B} = B|_{\mathcal{R}(E_\sigma)}$. Então,*

(i) $\sigma = \sigma_e(\widehat{B})$*;*

(ii) $\sigma \cap \sigma_p(B) = \sigma_p(\widehat{B})$*;*

(iii) $\sigma \cap \sigma_r(B) = \sigma_r(\widehat{B})$*;*

(iv) $\sigma \cap \sigma_c(B) = \sigma_c(\widehat{B})$*;*

(v) *Se $\infty \notin \sigma$, então $\mathcal{R}(E_\sigma) \subset D(B^n)$ para todo $n \geq 1$ e $\widehat{B}$ é contínua em $\mathcal{R}(E_\sigma)$.*

Demonstração: Este resultado está provado em [59, teorema 5.7 -Ba].

Agora estamos prontos para enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 1.2.18. *Seja λ_0 um polo de ordem m de $\lambda \mapsto R(\lambda : B)$. Então, λ_0 é um autovalor de B, $\alpha(\lambda_0 I - B) = \delta(\lambda_0 I - B) = m$, $\mathcal{R}(B_1) = \mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^m)$ e $\mathcal{R}(I - B_1) = \mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^m)$, onde B_1 é o coeficiente da expansão de Laurant de $R(\lambda : B)$. Além disso,*

$$X = \mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^m) \oplus \mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^m)$$

e o operador B é completamente reduzido por $\mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^m)$ e $\mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^m)$.

Demonstração: Sejam $X_1 = \mathcal{N}(B_1)$ e $X_2 = \mathcal{R}(B_1)$. Como B_1 é uma projeção associada ao conjunto espectral $\{\lambda_0\}$, temos que

(a) X_1 e X_2 são subespaços fechados e linearmente independentes,

(b) $X = X_1 \oplus X_2$,

(c) $P_i(D(B)) \subset D(B)$, onde $P_i : D(B) \to X$ é a projeção definida por X_i, para $i = 1, 2$,

(d) $B(X_i) \subset X_i$, $i = 1, 2$,

o que implica que B é completamente reduzido por (X_1, X_2).

Para facilitar a notação, defina $N^k = \mathcal{N}((\lambda_0 I - B)^k)$ e $R^k = \mathcal{R}((\lambda_0 I - B)^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando as propriedades (1.1)-(1.3) e o fato de B comutar com os coeficientes A_n e B_n, podemos mostrar que $X_2 = N^n$ para todo $n \geq m$. Além disso, temos que $N^{m-1} \subsetneq N^m$ pois, se $N^{m-1} = N^m$ então, $N^{m-1} = X_2$, o que implica que $B_m = 0$, contrariando o fato de λ_0 ser polo de ordem m de $R(\cdot, B)$.

Pelo anterior e pela igualdade (1.2) temos que $\alpha(\lambda_0 I - B) = m$ e λ_0 é autovalor de B.

Consideremos agora as restrições $B|_{X_1}$ e $B|_{X_2}$. Pelo Teorema 1.2.17, temos que $\lambda_0 \in \sigma_e(B|_{X_2})$ e $\lambda_0 \notin \sigma_e(B|_{X_1})$. Dessa forma, segue que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - B|_{X_1}) = X_1$. Como $(\lambda_0 - B|_{X_1})^0 = I|_{X_1}$ e $\mathcal{R}(\lambda_0 - B|_{X_1})^n = \mathcal{R}(\lambda_0 - B|_{X_1})^{n+1}$, o descendente de $(\lambda_0 - B|_{X_1})$ é zero, $\mathcal{R}(\lambda_0 I - B|_{X_1})^n = X_1$ e $X_1 \subset R^n$, para todo $n \geq 1$.

Além disso, $N^n \cap R^n = \{0\}$ para todo $n \geq m$ pois, se $x \in N^n \cap R^n$ então, $(\lambda_0 I - B)^n x = 0$ e existe $y \in X$ tal que $x = (\lambda_0 I - B)^n y$, implicando que $y \in N^{2n} = N^n$ e assim, que $x = 0$.

Sejam $n \geq m$ e $x \in R^n$. Pelo item (b), podemos escrever $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, o que implica que $x_2 \in R^n$. Como $X_2 = N^n$, temos que $x_2 \in R^n \cap N^n$, isto é, $x_2 = 0$. Assim, segue que $x \in X_1$. Com isso provamos que $R^n = X_1$ para todo $n \geq m$. Mais ainda, usando o Teorema 1.2.6, concluímos que $\delta(\lambda_0 I - B) = m$. A prova está agora completa. ■

1.3 Equações diferenciais funcionais abstratas com retardo

Nesta seção consideramos alguns resultados sobre a existência e a unicidade de soluções fracas para uma classe de equações diferenciais funcionais descritas na forma abstrata

$$x'(t) = Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \geq \sigma, \tag{1.4}$$

$$x_\sigma = \varphi \in C = C([-r, 0]; X), \tag{1.5}$$

onde $\sigma > 0$, $x(t) \in X$, $x_t \in C$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ para todo $\theta \in [-r, 0]$, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X e $F : [\sigma, \infty) \times C \to X$ é uma função com propriedades que especificaremos posteriormente.

Definição 1.3.1. *Uma função $x : [\sigma - r, a] \to X$, $a > \sigma$, é chamada solução fraca de (1.4)-(1.5) em $[\sigma, a]$ se $x_\sigma = \varphi$, $x(\cdot) \in C([\sigma - r, a]; X)$ e*

$$x(t) = T(t-\sigma)\varphi(0) + \int_\sigma^t T(t-s)F(s, x_s)ds, \quad t \in [\sigma, a]. \tag{1.6}$$

Definição 1.3.2. *Uma função $x : [\sigma - r, \infty) \to X$ é chamada solução fraca de (1.4)-(1.5) se x é solução fraca de (1.4)-(1.5) em $[\sigma, a]$ para todo $a > \sigma$.*

O problema de Cauchy (1.4)-(1.5) tem sido estudado em numerosos trabalhos, mencionamos, entre outros, [47, 60, 70]. Em [60, Proposição 2.1] encontramos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução fraca.

Proposição 1.3.3. *Suponha que $F \in C([\sigma, a] \times C; X)$ e que existe $L > 0$ tal que*

$$\|F(t, \psi) - F(t, \phi)\| \leq L\|\psi - \phi\|_C, \quad \forall\, t \in [\sigma, a], \ \psi, \phi \in C. \tag{1.7}$$

Então, para cada $\varphi \in C$ existe uma única solução fraca de (1.4)-(1.5) em $[\sigma, a]$.

No que segue, consideremos o problema da existência global de soluções para o caso onde

$$F(t,\psi) = L(t)(\psi) + f(t), \tag{1.8}$$

sendo $f : [\sigma,\infty) \to X$ uma função localmente integrável e $(L(t))_{t\geq 0}$ uma família fortemente contínua de operadores lineares limitados de C em X.

Procedendo como na demonstração da Proposição 1.3.3 podemos estabelecer o seguinte resultado.

Proposição 1.3.4. *Seja $f : [\sigma,\infty) \to X$ uma função localmente integrável, $(L(t))_{t\geq 0}$ uma família fortemente contínua de operadores lineares limitados de C em X e $F(t,\psi) = L(t)(\psi) + f(t)$. Então, para toda $\varphi \in C$ existe uma única solução fraca de (1.4)-(1.5) em $[\sigma,\infty)$.*

Demonstração: Como consequência do Teorema da Limitação Uniforme, para cada $b > \sigma$ existe $L_b > 0$ tal que $\|L(t)\|_{\mathcal{L}(C,X)} \leq L_b$ para todo $t \in [\sigma,b]$. Consequentemente, temos que

$$\|F(t,\psi_1) - F(t,\psi_2)\| \leq L_b\|\psi_1 - \psi_2\|_C$$

para todo $t \in [\sigma,b]$ e $\psi_1,\psi_2 \in C$.

Como f é integrável em $[\sigma,b]$, a função $t \mapsto \displaystyle\int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds$ é contínua em $[\sigma,b]$ (ver Proposição 1.1.6) e assim, procedendo como na demonstração da Proposição 1.3.3 podemos mostrar a existência de uma única solução fraca para a equação (1.4)-(1.5) em $[\sigma,b]$. Isto permite completar a prova, pois $b > \sigma$ é arbitrário. ■

No restante desta seção, para $\sigma > 0$ e $\varphi \in C$, denotemos por $x(\cdot,\sigma,\varphi,f)$ a única solução fraca de (1.4)-(1.5).

Se, além das hipóteses da Proposição 1.3.4, assumirmos que o C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto, então podemos concluir que a função $\varphi \mapsto x_t(\cdot,\sigma,\varphi,f)$ é compacta para todo $t > r+\sigma$.

Lema 1.3.5. [70, Lema 2.1.6] *Assuma que o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto em X. Se $B \subset X$ é limitado e $\{g_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ é uma família de funções em $C([a,b];B)$, então o conjunto $K = \left\{\displaystyle\int_a^b T(s)g_\gamma(s)ds : \gamma \in \Gamma\right\}$ é relativamente compacto em X.*

Lema 1.3.6. [55, Teorema 33] *Se $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset C$ é equicontínuo e $\{f_\gamma(\theta) : \gamma \in \Gamma\}$ é relativamente compacto em X para todo $\theta \in [-r,0]$, então o conjunto $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ é relativamente compacto em C.*

Na demonstração do próximo resultado usaremos as notações

$$\widehat{L}_t = \sup\{\|L(s)\|_{\mathcal{L}(C;X)} : s \in [\sigma,t]\} \ \text{ e } \ \widehat{f}_t = \|f\|_{L^1([\sigma,t];X)}.$$

Proposição 1.3.7. *Suponha que o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto. Então, a função $\varphi \mapsto x_t(\cdot,\sigma,\varphi,f)$ é compacta de C em C para todo $t > r+\sigma$.*

Demonstração: Sejam $t > r + \sigma$ fixo e $\Psi_t : C \to C$ a função definida por $\Psi_t(\varphi) = x_t(\cdot, \sigma, \varphi, f)$. No que se segue, mostraremos que para cada $k > 0$, o conjunto $\Psi_t(B_k(0, C))$ é relativamente compacto em C, onde $B_k(0, C)$ é a bola de centro em zero e raio k em C. Para isso, mostraremos separadamente que $\Psi_t(B_k(0, C))$ é limitado, que $\Psi_t(B_k(0, C))$ é equicontínuo e que $\Psi_t(B_k(0, C))(\theta) = \{\Psi_t(\varphi)(\theta) : \varphi \in B_k(0, C)\}$ é relativamente compacto em X para todo $\theta \in [-r, 0]$.

Para começar, observamos que para $\varphi \in C$ e $\theta \in [-r, 0]$,

$$\begin{aligned} \Psi_t(\varphi)(\theta) &= T(t+\theta-\sigma)\varphi(0) + \int_\sigma^{t+\theta} T(t+\theta-s)L(s)(x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f))ds \\ &\quad + \int_\sigma^{t+\theta} T(t+\theta-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

(1) O conjunto $\Psi_t(B_k(0, C))$ é limitado.

Para $\theta \in [-r, 0]$ e $\varphi \in B_k(0, C)$, vemos que

$$\|\Psi_t(\varphi)(\theta)\| \leq Me^{w(t-\sigma)}[k + \widehat{f_t}] + Me^{w(t-\sigma)}\widehat{L}_t \int_\sigma^t \|x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f)\|_C ds,$$

o que implica que

$$\|x_t(\cdot, \sigma, \varphi, f)\|_C \leq Me^{w(t-\sigma)}[k + \widehat{f_t}] + Me^{w(t-\sigma)}\widehat{L}_t \int_\sigma^t \|x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f)\|_C ds.$$

Agora, pela Desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$\|x_t(\cdot, \sigma, \varphi, f)\|_C \leq Me^{w(t-\sigma)}[k + \widehat{f_t}]e^{\int_\sigma^t Me^{w(t-\sigma)}ds},$$

o que prova que o conjunto $\{\Psi_t(\varphi) : \varphi \in B_k(0, C)\}$ é limitado.

(2) O conjunto $\{\Psi_t(\varphi) : \varphi \in B_k(0, C)\}$ é equicontínuo em $[-r, 0]$.

Seja $\widehat{N}_t > 0$ tal que $\|\Psi_t(\varphi)\| \leq \widehat{N}_t$ para todo $\varphi \in B_k(0, C)$. Para $\varphi \in B_k(0, C)$, $0 < c < (t - r - \sigma)$ e $\theta, \eta \in [-r, 0]$ com $\theta > \eta$, vemos que

$$\begin{aligned} \|\Psi_t(\varphi)(\theta) - \Psi_t(\varphi)(\eta)\| &\leq \|T(t+\theta-\sigma)\varphi(0) - T(t+\eta-\sigma)\varphi(0)\| \\ &+ \left\| \int_\sigma^{t+\theta} T(t+\theta-s)L(s)(x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f))ds - \int_\sigma^{t+\eta} T(t+\theta-s)L(s)(x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f))ds \right\| \\ &+ \left\| \int_{t+\eta-c}^{t+\eta} [T(t+\theta-s) - T(t+\eta-s)]L(s)(x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f))ds \right\| \\ &+ \left\| \int_\sigma^{t+\eta-c} [T(t+\theta-s) - T(t+\eta-s)]L(s)(x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f))ds \right\| \\ &+ \left\| \int_\sigma^{t+\theta} T(t+\theta-s)f(s)ds - \int_\sigma^{t+\eta} T(t+\eta-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq \|T(t+\theta-\sigma) - T(t+\eta-\sigma)\|\|\varphi\|_C + \int_{t+\eta}^{t+\theta} Me^{w(t+\theta-s)}\widehat{L}_t\|x_s(\cdot, \sigma, \varphi, f)\|_C ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_{t+\eta-c}^{t+\eta} \|T(t+\theta-s) - T(t+\eta-s)\| \widehat{L}_t \|x_s(\cdot,\sigma,\varphi,f)\|_C ds \\
& + \int_{\sigma}^{t+\eta-c} \|T(t+\theta-s) - T(t+\eta-s)\| \widehat{L}_t \|x_s(\cdot,\sigma,\varphi,f)\|_C ds \\
& + \left\| \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) f(s) ds - \int_{\sigma}^{t+\eta} T(t+\eta-s) f(s) ds \right\| \\
\leq \; & \|T(t+\theta-\sigma) - T(t+\eta-\sigma)\| k + \int_{t+\eta}^{t+\theta} M e^{w(t+\theta-s)} \widehat{L}_t \widehat{N}_t ds \\
& + \int_{t+\eta-c}^{t+\eta} 2M e^{w(t+\theta-s)} \widehat{L}_t \widehat{N}_t ds + \int_{\sigma}^{t+\eta-c} \|T(t+\theta-s) - T(t+\eta-s)\| \widehat{L}_t \widehat{N}_t ds \\
& + \left\| \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) f(s) ds - \int_{\sigma}^{t+\eta} T(t+\eta-s) f(s) ds \right\| \\
\leq \; & \|T(t+\theta-\sigma) - T(t+\eta-\sigma)\| k + M e^{w(\theta-\eta)} \widehat{L}_t \widehat{N}_t (\theta-\eta) \\
& + 2M e^{w(\theta-\eta+c)} \widehat{L}_t \widehat{N}_t c + \widehat{L}_t \widehat{N}_t \int_{\sigma}^{t+\eta-c} \|T(t+\theta-s) - T(t+\eta-s)\| ds \\
& + \left\| \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) f(s) ds - \int_{\sigma}^{t+\eta} T(t+\eta-s) f(s) ds \right\|.
\end{aligned}
$$

Logo, como $s \mapsto T(s)$ é uniformemente contínua em $[c,t]$ e $\theta \mapsto \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) f(s) ds$ é contínua, da desigualdade anterior podemos afirmar que $\{\Psi_t(\varphi) : \varphi \in B_k(0,C)\}$ é equicontínuo em $[-r,0]$.

(3) O conjunto $\{\Psi_t(\varphi)(\theta) : \varphi \in B_k(0,C)\}$ é relativamente compacto em X para todo $\theta \in [-r,0]$.

Para $\theta \in [-r,0]$ vemos que

$$
\begin{aligned}
\{\Psi_t(\varphi)(\theta) : \varphi \in B_k(0,C)\} \;\subseteq\; & \{T(t+\theta-\sigma)\varphi(0) : \varphi \in B_k(0,C)\} \\
& + \left\{ \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) L(s)(x_s(\cdot,\sigma,\varphi,f)) ds : \varphi \in B_k(0,C) \right\} \\
& + \left\{ \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) f(s) ds : \varphi \in B_k(0,C) \right\}.
\end{aligned}
$$

É obvio que o primeiro e o terceiro conjunto da direita são relativamente compactos em X. Por outro lado, do Lema 1.3.5, inferimos que

$$
K = \left\{ \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) L(s)(x_s(\cdot,\sigma,\varphi,f)) ds : \varphi \in B_k(0,C) \right\}
$$

também é relativamente compacto em X. Assim, obtemos que $\Psi_t(B_k(0,C))(\theta)$ é relativamente compacto em X para todo $\theta \in [-r,0]$.

Finalmente, como consequência do Lema 1.3.6 e dos passos anteriores, podemos concluir que Ψ_t é um operador compacto. A prova está completa. ■

Continuando com nossos preliminares, estudaremos agora o sistema

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + f(t), \quad t \geq \sigma, \tag{1.9}$$

$$(x(\sigma), x_\sigma) = (z,\varphi) \in X \times L^p([-r,0];X), \tag{1.10}$$

onde A, L e f são como antes.

Seja $M^p(X) = X \times L^p([-r,0];X)$, para $1 \leq p < \infty$, munido da norma

$$\|(z,\psi)\| = \|z\|_X + \left(\int_{-r}^{0} \|\psi(\theta)\|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = \|z\|_X + \|\psi\|_{L^p}.$$

Começamos considerando o seguinte conceito de solução fraca para (1.9)-(1.10).

Definição 1.3.8. *Uma função $x : [\sigma - r, \infty) \to X$ é uma solução fraca de (1.9)-(1.10) se $x_\sigma(\theta) = \varphi(\theta)$ para $-r \leq \theta < 0$, $x(\sigma) = z$, $x(\cdot)$ é contínua em $[\sigma,\infty)$ e satisfaz a seguinte equação integral*

$$x(t) = T(t-\sigma)z + \int_{\sigma}^{t} T(t-s)[L(s)(x_s) + f(s)]ds, \quad t \geq \sigma. \tag{1.11}$$

Note que nas condições anteriores, $x_t(\cdot)$ não é necessariamente uma função contínua em $[-r,0]$. Porém, é obvio que $x_t(\cdot) \in L^p([-r,0];X)$.

Nosso próximo passo é estudar a existência e unicidade de soluções fracas para (1.9)-(1.10). Considere inicialmente o seguinte lema.

Lema 1.3.9. *Existe uma única extensão de $L(t)$ sobre $L^p([-r,0];X)$.*

Demonstração: Seja $C_c([-r,0];X)$ o espaço das funções em C que possuem suporte compacto. Como $L(t)$ é contínua para todo $t \geq 0$, a propriedade segue diretamente do fato que $C_c([-r,0];X)$ é denso em $L^p([-r,0];X)$. ■

No que se segue, usaremos a mesma notação para a extensão de $L(t)$.

Lema 1.3.10. *Sejam $a > \sigma$ e $z \in C([\sigma - r, a];X)$. Então, a função $t \mapsto L(t)(z_t)$ pertence a $L^1([\sigma,a];X)$.*

Demonstração: Seja $\Gamma : [\sigma,a] \to C$ a função definida por $\Gamma(t) = z_t$. Como z é contínua, é fácil ver que $\Gamma \in C([\sigma,a];C)$. Do anterior, existe uma sequência de funções simples $y_n : [\sigma,a] \to C$ tais que $y_n \to \Gamma$ pontualmente para $t \in [\sigma,a]$ e $y_n \to \Gamma$ em $L^1([\sigma,a];C)$.

Assuma que

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^n \chi_{A_i^n}(t),$$

onde $a_i \in C$, $k_n \in \mathbb{N}$, $A_i^n \subset [\sigma, a]$ são mensuráveis com $\bigcup_{i=1}^{k} A_i^n = [\sigma, a]$. Defina agora $L_n : [\sigma, a] \to C$ por

$$L_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} L(t) a_i^n \chi_{A_i^n}(t).$$

É claro que $L(\cdot)a_i^n$ é contínua, de onde obtemos que $L_n(\cdot)$ é mensurável. Observando que $L_n(t) \to L(t)\Gamma(t)$ quase sempre em $[\sigma, a]$ e que

$$\int_\sigma^a \|L(t)\Gamma(t))\|dt \le \int_\sigma^a \|L(t)\|\|z_t\|_C dt \le \int_\sigma^a \widehat{L}_a \|z\|_{C([\sigma-r,a];X)} dt = a\widehat{L}_a \|z\|_{C([\sigma-r,a];X)},$$

onde $\widehat{L}_a = \sup\{\|L(s)\| : s \in [\sigma, a]\}$, concluímos que $L(\cdot)\Gamma(\cdot) \in L^1([\sigma, a]; X)$. A prova está completa. ■

Observação 1.3.11. Por causa da extensão de $L(t)$ para o espaço $L^p([-r, 0]; X)$, temos que o Lema anterior continua válido em $L^p([-r, 0]; X)$. Assim, se $z \in L^p([\sigma - r, a]; X)$ então, $t \mapsto L(t)(z_t)$ pertence a $L^1([\sigma, a]; X)$.

Proposição 1.3.12. *Suponha que todas as condições anteriores são verificadas. Então, para todo $(z, \varphi) \in M^p(X)$ existe uma única solução fraca de (1.9)-(1.10).*

Demonstração: Procedendo como na demonstração da Proposição 1.3.3, para $(z, \varphi) \in M^p(X)$, defina uma a sequência de funções $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço $L^p_{loc}([\sigma - r, \infty); X)$ por

$$x^0(t) = \begin{cases} \varphi(t-\sigma), & \sigma - r \le t < \sigma, \\ T(t-\sigma)z, & \sigma \le t < \infty, \end{cases}$$

e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n(t) = \begin{cases} \varphi(t-\sigma), & \sigma - r \le t < \sigma, \\ T(t-\sigma)z + \displaystyle\int_\sigma^t T(t-s)[L(s)(x_s^{n-1}) + f(s)]ds, & \sigma \le t < \infty. \end{cases}$$

Afirmamos que a sequência $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pontualmente convergente em X para todo $t \in [\sigma - r, \infty)$ e uniformemente convergente em subintervalos compactos de $[\sigma - r, \infty)$. Para provar esta afirmação, para $t > \sigma - r$ introduzimos as constantes,

$$\widehat{L}_t = \sup\{\|L(s)\| : s \in [\sigma, t]\},$$

$$\widehat{F}_t = \int_\sigma^t \|f(s)\|ds,$$

$$\widehat{L}_t^{x^0} = \int_\sigma^t \|L(s)(x_s^0)\|ds.$$

Note que $\|x^n(t) - x^{n-1}(t)\| = 0$ para todo $t \in [\sigma - r, \sigma)$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|x^1(t) - x^0(t)\| &\leq \int_\sigma^t \|T(t-s)\|\|L(s)(x_s^0)\|ds + \int_\sigma^t \|T(t-s)\|\|f(s)\|ds \\ &\leq Me^{w(t-\sigma)}[\widehat{L}_t^{x^0} + \widehat{F}_t]. \end{aligned}$$

Usando um processo indutivo, obtemos que

$$\|x^n(t) - x^{n-1}(t)\| \leq M^n r^{\frac{n-1}{p}} e^{nw(t-\sigma)} \widehat{L}_t^{n-1}[\widehat{L}_t^{x^0} + \widehat{F}_t]\frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

o que nos permite concluir que $\|x^n(t) - x^{n-1}(t)\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso, é fácil deduzir do anterior que x^n é uniformemente convergente sobre compactos.

Definimos agora $x : [\sigma - r, \infty) \to X$ por

$$x(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x^n(t), & \text{para } t \in [\sigma, \infty), \\ \\ \varphi(t-\sigma), & \text{para } \ t \in [\sigma - r, \sigma). \end{cases} \tag{1.12}$$

Mostremos que $x(\cdot)$ é uma solução fraca de (1.9)-(1.10). Obviamente, $x_\sigma = \varphi$ em $[-r, 0)$ e $x(\cdot)$ é contínua para todo t em $[\sigma, \infty)$, pois $x^n \to x$ uniformemente sobre compactos.

Mais ainda, para $t \geq \sigma$

$$\begin{aligned} &\left\| x(t) - T(t-\sigma)z - \int_\sigma^t T(t-s)L(s)(x_s)ds - \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq \|x(t) - x^n(t)\| + \left\| \int_\sigma^t T(t-s)L(s)[x_s^{n-1} - x_s]ds \right\| \\ &\leq \|x(t) - x^n(t)\| + Me^{w(t-\sigma)}\widehat{L}_t \int_\sigma^t \|x_s^{n-1} - x_s\|_{L^p([-r,0];X)}ds. \end{aligned}$$

Como $x^n \to x$ uniformemente em $[\sigma, t]$ quando $n \to \infty$, temos que $x_s^n \to x_s$ em $L^p([-r, 0]; X)$ uniformemente para $s \in [\sigma, t]$ quando $n \to \infty$, o que implica que os termos da direita da desigualdade acima convergem para zero quando $n \to \infty$. Consequentemente, temos que

$$x(t) = T(t-\sigma)z + \int_\sigma^t T(t-s)L(s)(x_s)ds + \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds, \quad \text{para todo } \ t \geq \sigma,$$

e que $x(\sigma) = z$. Isto prova que $x(\cdot)$ é solução fraca de (1.9)-(1.10).

Para finalizar, mostremos que $x(\cdot)$ é única. Para isso, suponha que $v(\cdot)$ também é uma solução fraca de (1.9)-(1.10). Definamos

$$\widehat{L}_t^x = \int_\sigma^t \|L(s)(x_s)\|ds,$$

$$\widehat{K}_t = \int_\sigma^t \|L(s)[v_s - x_s]\|ds.$$

Para $t \in [\sigma, \infty)$, temos que

$$\begin{aligned}\|v(t) - x(t)\| &\leq \int_\sigma^t \|T(t-s)\| \|L(s)[v_s - x_s]\| ds \\ &\leq M e^{w(t-\sigma)} \widehat{K}_t,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\|v(t) - x^0(t)\| &= \|v(t) - T(t-\sigma)z\| \\ &= \left\| v(t) - \left(x(t) - \int_\sigma^t T(t-s)L(s)(x_s)ds - \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds \right) \right\| \\ &\leq M e^{w(t-\sigma)} [\widehat{K}_t + \widehat{L}_t^x + \widehat{F}_t].\end{aligned}$$

Procedendo por indução, obtemos que

$$\|v(t) - x^n(t)\| \leq M^{n+1} r^{\frac{n}{p}} e^{(n+1)w(t-\sigma)} \widehat{L}_t^n [\widehat{K}_t + \widehat{L}_t^x + \widehat{F}_t] \frac{(t-\sigma)^n}{n!}, \quad \text{para todo } t \geq \sigma, \ n \in \mathbb{N}.$$

Esta desigualdade mostra que $x^n(t) \to v(t)$ para todo $t \in [\sigma, \infty)$ quando $n \to \infty$ e portanto, $x(t) = v(t)$ em $[\sigma - r, \infty)$. A prova está completa. ■

Se acrescentarmos às hipóteses da Proposição 1.3.12 que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto, podemos provar de maneira similar ao que foi feito no estudo do sistema (1.4)-(1.5), que a função $(z, \varphi) \mapsto \big(x(t, \sigma, (z, \varphi), f), x_t(\cdot, \sigma, (z, \varphi), f)\big)$ é compacta para todo $t > r + \sigma$.

1.4 Sistemas de evolução

Para lidar com a teoria desenvolvida no próximo capítulo, precisamos considerar alguns conceitos e propriedades relativas a famílias de evolução.

Definição 1.4.1. *Uma família a dois parâmetros de operadores lineares limitados $U(t, s)$, $t \geq s$, $t, s \in [0, a]$, em $\mathcal{L}(X)$ é chamada de sistema de evolução, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $U(s, s) = I$, *para todo* $0 \leq s \leq a$;

(ii) $U(t, s) = U(t, r)U(r, s)$, *para todo* $0 \leq s \leq r \leq t \leq a$;

(iii) A função $(t, s) \mapsto U(t, s)$ *é fortemente contínua para* $0 \leq s \leq t \leq a$, *isto é,* $(t, s) \mapsto U(t, s)x$ *é contínua para todo* $x \in X$.

Assuma que $(L(t))_{t\geq 0}$ é uma família fortemente contínua em C. Da Proposição 1.3.4 sabemos que para todo $\sigma > 0$ e $\varphi \in C$ existe uma única solução fraca $x = x(\cdot, \sigma, \varphi, f)$ da equação

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + f(t), \quad t \geq \sigma, \tag{1.13}$$

$$x_\sigma = \varphi \in C. \tag{1.14}$$

Assim, para $t \geq s \geq 0$ podemos definir o operador $V(t,s) : C \to C$ por

$$V(t,s)\varphi = x_t(\cdot, s, \varphi), \tag{1.15}$$

onde, para abreviar a escrita, temos usado a notação $x(\cdot, s, \varphi) = x(\cdot, s, \varphi, 0)$. O operador $V(\cdot)$ é chamado de operador solução de (1.13)-(1.14) e, como veremos a seguir, $V(\cdot)$ é um sistema de evolução.

No próximo resultado, para $a > 0$, M_a e $\widehat{L}_a$ são constantes positivas tais que $\|T(t)\| \leq M_a$ e $\|L(t)\| \leq \widehat{L}_a$ para todo $t \in [0, a]$.

Proposição 1.4.2. *A família de operadores* $\{V(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq a\}$ *é um sistema de evolução no espaço* C.

Demonstração: Da unicidade de soluções de (1.13)-(1.14) e da linearidade de $L(t)$, segue facilmente que para $\varphi, \psi \in C$ e α escalar, $\alpha x(\cdot, s, \varphi) + x(\cdot, s, \psi)$ é a única solução fraca de (1.13) com condição inicial $\alpha\varphi + \psi$, o que mostra que

$$V(t,s)(\alpha\varphi + \psi) = x(\cdot, s, \alpha\varphi + \psi) = \alpha x(\cdot, s, \varphi) + x(\cdot, s, \psi) = \alpha V(t,s)\varphi + V(t,s)\psi,$$

de modo que $V(t,s)$ é linear. Mais ainda, da prova da Proposição 1.3.7 segue que $V(t,s) \in \mathcal{L}(X)$ e que $\|V(t,s)\| \leq \widehat{C}_a$ para todo $t, s \in [0,a]$, $t \geq s$, com $\widehat{C}_a = M_a e^{aM_a\widehat{L}_a}$.

É obvio que $V(t,t)\varphi = \varphi$ para todo $\varphi \in C$ e $t \in [0,a]$. Mostrar que $V(t,u)V(u,s) = V(t,s)$, $0 \leq s \leq u \leq t \leq a$, é equivalente a provar que

$$x_t(\cdot, u, x_u(\cdot, s, \varphi)) = x_t(\cdot, s, \varphi), \tag{1.16}$$

para todo $\varphi \in C$. Veja agora que para $\theta \in [-r, 0]$,

$$x_t(\theta, u, x_u(\cdot, s, \varphi)) = x_u(t + \theta - u, s, \varphi), \quad \text{se } \theta \in [-r, u - t]$$

$$\begin{aligned} x_t(\theta, u, x_u(\cdot, s, \varphi)) &= T(t+\theta-s)x_u(0, s, \varphi) + \int_u^{t+\theta} T(t+\theta-\eta)L(\eta)(x_\eta(\cdot, u, x_u(\cdot, s, \varphi)))d\eta \\ &= T(t+\theta-s)\varphi(0) + \int_s^{t+\theta} T(t+\theta-\eta)L(\eta)(x_\eta(\cdot, u, x_u(\cdot, s, \varphi)))d\eta, \end{aligned}$$

se $\theta \in [u - t, 0]$, de onde segue (1.16).

Para finalizar, mostremos que a função $(t,s) \mapsto V(t,s)$ é fortemente contínua. Sejam $\varphi \in C$, $t, s \in [0,a]$ e $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $s \leq t$, $t+h, s+k \in [0,a]$ e $s+k \leq t+h$. Suponha ainda que $k \leq h$.

Sejam $u(\cdot) = x(\cdot, s+k, \varphi)$ e $v(\cdot) = x(\cdot, s, \varphi)$. Então,

$$u(\tau) = T(\tau - s - k)\varphi(0) + \int_{s+k}^{\tau} T(\tau - \eta)L(\eta)(u_\eta)d\eta, \quad \tau \geq s+k,$$

$$v(\tau) = T(\tau - s)\varphi(0) + \int_{s}^{\tau} T(\tau - \eta)L(\eta)(v_\eta)d\eta, \quad \tau \geq s.$$

No que se segue, estimaremos a diferença $\|u(t+h) - v(t)\|$. Primeiramente, suponha que $t \geq \tau \geq s$. Como, $\tau + h \geq s + k$ segue que

$$\begin{aligned}
\|u(\tau+h) - v(\tau)\| &\leq \|T(\tau + h - s - k)\varphi(0) - T(\tau - s)\varphi(0)\| \\
&\quad + \left\| \int_{s+k}^{\tau+h} T(\tau + h - \eta)L(\eta)(u_\eta)d\eta - \int_{s}^{\tau} T(\tau - \eta)L(\eta)(v_\eta)d\eta \right\| \\
&\leq \|[T(\tau + h - s - k) - T(\tau - s)]\varphi(0)\| \\
&\quad + \int_{s+k-h}^{s} \|T(\tau - \eta)\| \|L(\eta + h)\| \|(u_{\eta+h})\|_C d\eta \\
&\quad + \int_{s}^{\tau} \|T(\tau - \eta)\| \|L(\eta + h)(u_{\eta+h}) - L(\eta)(v_\eta)\| d\eta \\
&\leq \|[T(\tau + h - s - k) - T(\tau - s)]\varphi(0)\| + \int_{s+k-h}^{s} M_a \widehat{L}_a \widehat{C}_a d\eta \\
&\quad + \int_{s}^{\tau} M_a \widehat{L}_a \|u_{\eta+h} - v_\eta\|_C d\eta + \int_{s}^{\tau} M_a \|[L(\eta + h) - L(\eta)](v_\eta)\| d\eta.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u(\tau+h) - v(\tau)\| \leq \widehat{C}_1(\varphi, h, k) + \widehat{C}_1 \int_{s}^{\tau} \|u_{\eta+h} - v_\eta\|_C d\eta,$$

onde $\widehat{C}_1(\varphi, h, k) \to 0$ quando $h, k \to 0$ e $\widehat{C}_1$ é uma constante que independe de φ, h e k.

Por outro lado, se $\tau \leq s$, então $\tau + h \leq s + h$. Se $\tau + h \leq s + k$, note que

$$\|u(\tau+h) - v(\tau)\| = \|\varphi(\tau + h - s - k) - \varphi(\tau - s)\|.$$

Se $s + k \leq \tau + h \leq s + h$,

$$\begin{aligned}
\|u(\tau+h) - v(\tau)\| &= \left\| T(\tau + h - s - k)\varphi(0) + \int_{s+k}^{\tau+h} T(\tau + h - \eta)L(\eta)(u_\eta)d\eta - \varphi(\tau - s) \right\| \\
&= \left\| \left(v(\tau + h - k) - \int_{s}^{\tau+h-k} T(\tau + h - k - \eta)L(\eta)(v_\eta)d\eta \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_{s+k}^{\tau+h} T(\tau + h - \eta)L(\eta)(u_\eta)d\eta - \varphi(\tau - s) \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|v(\tau+h-k)-\varphi(\tau-s)\| + \left\|\int_s^{\tau+h-k} T(\tau+h-k-\eta)L(\eta)(v_\eta)d\eta\right.\\
&\quad \left. - \int_s^{\tau+h-k} T(\tau+h-k-\eta)L(\eta+h)(u_{\eta+h})d\eta\right\|\\
&\leq \|v(\tau+h-k)-\varphi(\tau-s)\| + \int_s^{\tau+h-k} M_a\|[L(\eta)-L(\eta+h)](v_\eta)\|d\eta\\
&\quad + \int_s^{\tau+h-k} M_a\widehat{L}_a\|v_\eta-u_{\eta+h}\|_C d\eta
\end{aligned}$$

de modo que

$$\|u(\tau+h)-v(\tau)\| \quad \leq \quad \widehat{C}_2(\varphi,h,k)+\widehat{C}_2\int_s^{\tau+h-k}\|v_\eta-u_{\eta+h}\|_C d\eta,$$

onde $\widehat{C}_2(\varphi,h,k)\to 0$ quando $h,k\to 0$ e $\widehat{C}_2$ é uma constante que independe de φ, h e k

Das estimativas anteriores, podemos concluir que

$$\|u(\tau+h)-v(\tau)\| \quad \leq \quad \widehat{C}_3(\varphi,h,k)+\widehat{C}_3\int_s^{\tau}\|v_\eta-u_{\eta+h}\|_C d\eta, \quad \text{para todo } s-r\leq\tau\leq t,$$

onde $\widehat{C}_3(\varphi,h,k)\to 0$ quando $h,k\to 0$. Assim,

$$\|u_{t+h}-v_t\|_C \quad \leq \quad \widehat{C}_3(\varphi,h,k)+\widehat{C}_3\int_s^{\tau}\|v_\eta-u_{\eta+h}\|_C d\eta.$$

Usando agora a Desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$\|u_{t+h}-v_t\|_C \quad \leq \quad \widehat{C}_3(\varphi,h,k)e^{a\widehat{C}_3},$$

o que implica que $\|u_{t+h}-v_t\|_C\to 0$ quando $h,k\to 0$. Isto prova que $(t,s)\mapsto V(t,s)\varphi$ é contínua. A demonstração está completa. ∎

Procedendo como antes, podemos definir um sistema de evolução no espaço $M^p(X)$ associado às soluções fracas da equação (1.9)-(1.10). Pela Proposição 1.3.12, para cada $\sigma>0$ e $(z,\varphi)\in M^p(X)$, existe uma única solução fraca $x=x(\cdot,\sigma,\varphi)$ de

$$x'(t) = Ax(t)+L(t)(x_t), \quad t\geq\sigma \tag{1.17}$$

$$(x(\sigma),x_\sigma) = (z,\varphi)\in M^p(X). \tag{1.18}$$

Definamos o operador $\widehat{V}(t,s): M^p(X)\to M^p(X)$ por

$$\widehat{V}(t,s)(z,\varphi) = (x(t),x_t) = (x(t,s,(z,\varphi)),x_t(\cdot,s,(z,\varphi))). \tag{1.19}$$

Proposição 1.4.3. *A família de operadores $\{\widehat{V}(t,s): 0\leq s\leq t\leq a\}$ é um sistema de evolução no espaço $M^p(X)$.*

Demonstração: A linearidade de $\widehat{V}(t,s)$, para $0 \leq s \leq t \leq a$, segue como na prova da Proposição 1.4.2. Vejamos agora que $\widehat{V}(t,s)$ é limitado. Primeiro observamos que $x(\theta,s,(z,\varphi)) = \varphi(\theta - s)$ para $\theta \in [s-r,s)$. Por outro lado, para $\theta \in [s,t]$

$$x(\theta,s,(z,\varphi)) \;=\; T(\theta-s)z + \int_s^\theta T(\theta-\tau)L(\tau)[x_\tau(\cdot,s,(z,\varphi))]d\tau,$$

de onde obtemos que

$$\|x(\theta,s,(z,\varphi))\| \;\leq\; M_a\|z\|_X + M_a\widehat{L}_a\int_s^t \|x_\tau(\cdot,s,(z,\varphi))\|_{L^p([-r,0];X)}d\tau.$$

Do anterior, se $t-r \leq s$ segue que

$$\begin{aligned}\|x_t(\cdot,s,(z,\varphi))\|^p_{L^p([-r,0]:X)} &= \int_{-r}^0 \|x_t(\theta,s,(z,\varphi))\|^p d\theta\\ &= \int_{t-r}^s \|x(\theta,s,(z,\varphi))\|^p d\theta + \int_s^t \|x(\theta,s,(z,\varphi))\|^p d\theta.\end{aligned}$$

Veja agora que

$$I_1 \;=\; \int_{t-r}^s \|x(\theta,s,(z,\varphi))\|^p d\theta \;=\; \int_{t-r}^s \|\varphi(\theta-s)\|^p d\theta \;\leq\; \int_{-r}^0 \|\varphi(\theta)\|^p d\theta \;=\; \|\varphi\|^p_{L^p([-r,0];X)},$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_s^t \|x(\theta,s,(z,\varphi))\|^p d\theta\\ &\leq \int_s^t \left[M_a\|z\|_X + M_a\widehat{L}_a\int_s^t \|x_\tau(\cdot,s,(z,\varphi))\|_{L^p([-r,0];X)}d\tau\right]^p d\theta\\ &\leq \left[M_a\|z\|_X + M_a\widehat{L}_a\int_s^t \|x_\tau(\cdot,s,(z,\varphi))\|_{L^p([-r,0];X)}d\tau\right]^p a.\end{aligned}$$

Se $t-r \geq s$, obtemos uma desigualdade como no caso de I_2. Logo, das desigualdades anteriores, obtemos que

$$\begin{aligned}\|x_t(\cdot,s,(z,\varphi))\|_{L^p([-r,0];X)} &\leq \|\varphi\|_{L^p([-r,0];X)} + M_a a^{\frac{1}{p}}\|z\|_X +\\ &\quad + M_a a^{\frac{1}{p}}\widehat{L}_a\int_s^t \|x_\tau(\cdot,s,(z,\varphi))\|_{L^p([-r,0];X)}d\tau.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Gronwall, concluímos que

$$\|x_t(\cdot,s,(z,\varphi))\|_{L^p([-r,0];X)} \;\leq\; \left(\|\varphi\|_{L^p([-r,0];X)} + M_a a^{\frac{1}{p}}\|z\|_X\right)e^{M_a a^{\frac{1+p}{p}}\widehat{L}_a}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\|\widehat{V}(t,s)(z,\varphi)\| &= \|x(t,s,(z,\varphi))\|_X + \|x_t(\cdot,s,(z,\varphi))\|_{L^p([-r,0];X)}\\ &\leq \left(M_a + M_a^2 a^{\frac{1+p}{p}}\widehat{L}_a e^{M_a a^{\frac{1+p}{p}}\widehat{L}_a} + M_a a^{\frac{1}{p}} e^{M_a a^{\frac{1+p}{p}}\widehat{L}_a}\right)\|z\|_X\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(M_a a\widehat{L}_a e^{M_a a^{\frac{1+p}{p}}\widehat{L}_a} + e^{M_a a^{\frac{1+p}{p}}\widehat{L}_a}\right)\|\varphi\|_{L^p([-r,0];X)} \\
\leq\ & \widehat{C}_a(\|z\|_X + \|\varphi\|_{L^p([-r,0];X)}) \ = \ \widehat{C}_a\|(z,\varphi)\|_{M^p(X)},
\end{aligned}
$$

onde $\widehat{C}_a$ é uma constante positiva independente de s, t e (z,φ). Isto prova que $\widehat{V}(t,s) \in \mathcal{L}(M^p(X))$.

A prova das propriedades restantes segue procedendo como na demonstração da Proposição 1.4.2. A demonstração está completa. ■

CAPÍTULO

2

Controlabilidade e estabilização de sistemas de controle hereditários

Neste capítulo estudamos a estabilização de sistemas hereditários periódicos e a controlabilidade de sistemas com retardo. Na parte final do capítulo, são apresentadas algumas aplicações concretas dos resultados abstratos.

Ao longo este capítulo, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $C = C([-r, 0]; X)$, $r > 0$ e $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X.

2.1 Resultados preliminares

Nesta seção introduzimos algumas terminologias, notações e propriedades referentes à equações diferenciais funcionais abstratas com retardamento. Em geral, usaremos as terminologias e notações de [47]. No que se segue, consideraremos o problema de Cauchy abstrato

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + f(t), \quad t \geq \sigma, \tag{2.1}$$

$$x_\sigma = \varphi \in C, \tag{2.2}$$

onde $f : [0, \infty) \to X$ é uma função localmente integrável e $(L(t))_{t\geq 0}$ é uma família fortemente contínua em C.

Pela Proposição 1.3.4 sabemos que o sistema (2.1)-(2.2) possui uma única solução fraca $x = x(\cdot, \sigma, \varphi, f)$ definida em $[\sigma, \infty)$. Para simplificar notações, no que se segue $x(\cdot, \sigma, \varphi) = x(\cdot, \sigma, \varphi, 0)$. Como na Seção 1.4, $V(t, s)$ representa o operador $V(t, s) : C \to C$ definido por $V(t, s)\varphi = x_t(\cdot, s, \varphi)$.

A seguir, consideramos a situação especial onde $L(\cdot)$ é ω-periódica para algum $\omega > 0$. Como veremos, neste caso o sistema de evolução $V(\cdot)$ é ω-periódico, ou seja, $V(t+\omega, s+\omega) = V(t,s)$ para todo $t \geq s \geq 0$. Para mostrar a periodicidade de $V(\cdot)$, fixemos $\varphi \in C$, $0 \leq s \leq t$, e seja $z : [-r,t] \to X$ a função $z(\tau) = x(\tau+\omega, s+\omega, \varphi)$. É claro que $z_s = \varphi$. Mais ainda, para $\nu \geq s$ segue que

$$\begin{aligned} z(\nu) &= T(\nu+\omega-s-\omega)\varphi(0) + \int_{s+\omega}^{\nu+\omega} T(\nu+\omega-\tau)L(\tau)(x_\tau(\cdot, s+\omega, \varphi))d\tau \\ &= T(\nu-s)\varphi(0) + \int_s^\nu T(\nu-\tau)L(\tau+\omega)(x_{\tau+\omega}(\cdot, s+\omega, \varphi))d\tau \\ &= T(\nu-s)\varphi(0) + \int_s^\nu T(\nu-\tau)L(\tau)(z_\tau)d\tau, \end{aligned}$$

o que implica que $z(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.1)-(2.2). Logo, da unicidade de soluções, concluímos que $x(\cdot+\omega, s+\omega, \varphi) = x(\cdot, s, \varphi)$ em $[-r,t]$ e assim que, $V(t+\omega, s+\omega)\varphi = V(t,s)\varphi$ para todo $t \geq s$.

Definimos agora a família de operadores $(W(t))_{t\geq 0}$ em C por

$$W(t)\varphi = V(t+\omega, t)\varphi.$$

Definição 2.1.1. *O operador $W = W(0)$ é chamado de operador monodromia do sistema homogêneo associado a (2.1).*

No que se segue, $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto, M e N são constantes positivas tais que $\|T(t)\| \leq M$ e $\|V(t,s)\| \leq N$ para todo $0 \leq s \leq t \leq \omega$ e $B_\rho(z, Z)$ representa a bola de raio ρ e centro z em um espaço normado Z. Mais ainda, como estamos interessados no comportamento assintótico de soluções, assumiremos, sem perda de generalidade, que $\omega > r$. Pela Proposição 1.3.7, sabemos que a função $\varphi \mapsto x_\tau(\cdot, t, \varphi)$ é compacta para $\tau > t + r$, o que implica que $W(t) = V(t+\omega, t)$ é compacto para todo $t \geq 0$. Adicionalmente, a família $(W(t))_{t\geq 0}$ possui a seguinte propriedade.

Proposição 2.1.2. *Suponha que $L(\cdot) \in C([0,\omega]; \mathcal{L}(C;X))$. Então $W(\cdot) \in C([0,\infty); \mathcal{L}(C))$.*

Demonstração: Como $W(\cdot)$ é ω-periódica, é suficiente mostrar que $W(\cdot)$ é contínua em $[0,\omega]$. Para simplificarmos a escrita, mostraremos a continuidade em $\xi = 0$. Sejam $\varphi \in C$, $u(\cdot) = x(\cdot, 0, \varphi)$ e $v(\cdot) = x(\cdot, h, \varphi)$, com $h > 0$. Para $t \geq 0$ vemos que

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)L(s)(u_s)ds, \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

$$v(t) = T(t-h)\varphi(0) + \int_h^t T(t-s)L(s)(v_s)ds, \quad t \geq h. \tag{2.4}$$

Assim, para $\theta \in [-r, 0]$ obtemos que

$$\begin{aligned}
u(\omega+\theta) - v(\omega+\theta+h) &= \int_0^{\omega+\theta} T(\omega+\theta-s)L(s)(u_s)ds \\
&\quad - \int_h^{\omega+\theta+h} T(\omega+\theta+h-s)L(s)(v_s)ds \\
&= \int_0^{\omega+\theta} T(\omega+\theta-s)L(s)(u_s)ds \\
&\quad - \int_0^{\omega+\theta} T(\omega+\theta-s)L(s+h)(v_{s+h})ds.
\end{aligned}$$

Como $L(\cdot)$ é contínua em $[0, \omega]$, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|L(s+h) - L(s)\| \leq \varepsilon$ para todo $s \in [0, \omega]$ e todo $|h| < \delta$. Do anterior, para $0 < h < \delta$ segue que

$$\begin{aligned}
\|u(\omega+\theta) - v(\omega+\theta+h)\| &\leq \int_0^{\omega+\theta} \|T(\omega+\theta-s)\|\|L(s) - L(s+h)\|\|u_s\|_C ds \\
&\quad + \int_0^{\omega+\theta} \|T(\omega+\theta-s)\|\|L(s+h)\|\|u_s - v_{s+h}\|_C ds \\
&\leq \int_0^{\omega+\theta} M\varepsilon N ds + \int_0^{\omega+\theta} M \sup_{s\in[0,\omega]}\{\|L(s)\|\}\|u_s - v_{s+h}\|_C ds \\
&\leq \varepsilon M N\omega + M \sup_{s\in[0,\omega]}\{\|L(s)\|\} \int_0^{\omega+\theta} \|u_s - v_{s+h}\|_C ds \\
&\leq \varepsilon\widetilde{C} + \widetilde{C}\int_0^{\omega+\theta} \|u_s - v_{s+h}\|_C ds,
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{C} = \max\{MN\omega, M\sup_{s\in[0,\omega]}\|L(s)\|\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_\omega - v_{\omega+h}\|_C &= \sup_{\theta\in[-r,0]}\{\|u_\omega(\theta) - v_{\omega+h}(\theta)\|\} \\
&\leq \varepsilon\widetilde{C} + \widetilde{C}\int_0^{\omega} \|u_s - v_{s+h}\|_C ds.
\end{aligned}$$

Aplicando agora a Desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$\|u_\omega - v_{\omega+h}\|_C \leq \varepsilon\widehat{C},$$

onde $\widehat{C} = \widetilde{C}e^{\widetilde{C}\omega}$ independe de φ. Portanto, para $0 < h < \delta$

$$\begin{aligned}
\|W(h)\varphi - W(0)\varphi\| &= \|V(h+\omega, h)\varphi - V(\omega, 0)\varphi\| \\
&= \|x_{\omega+h}(\cdot, h, \varphi) - x_\omega(\cdot, 0, \varphi)\|_C \\
&= \|v_{\omega+h} - u_\omega\|_C \leq \varepsilon\widehat{C},
\end{aligned}$$

o que prova que $W(\cdot)$ é contínua em zero na norma de operadores. A prova está completa. ■

Consideremos o sistema homogêneo associado ao sistema (2.1)

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t), \quad t \geq \sigma, \tag{2.5}$$

$$x_\sigma = \varphi \in C. \tag{2.6}$$

Definição 2.1.3. *Um valor $0 \neq \mu \in \sigma_p(W)$ é chamado multiplicador característico do sistema (2.5).*

Observamos que, como W é compacto, $\sigma(W)\backslash\{0\} = \sigma_p(W)\backslash\{0\}$.

Tomando o capítulo 8 de [28] como base e fazendo adaptações para nosso caso, obtemos alguns resultados que serão de grande importância no desenvolvimento do restante do trabalho. Resumimos isto através dos lemas e observações seguintes.

Lema 2.1.4. *Sejam $s \geq 0$ e $\mu \in \sigma_p(W(s))$ com $\mu \neq 0$. Então, existem subespaços fechados $E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$ de C tais que*

(i) *$E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$ são invariantes por $W(s)$ e $C = E_{\mu(s)} \oplus Q_\mu(s)$;*

(ii) *$\sigma(W(s)|_{E_\mu(s)}) = \{\mu\}$;*

(iii) *$E_\mu(s)$ tem dimensão finita;*

(iv) *Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $E_\mu(s) = \mathcal{N}\left((\mu I - W(s))^k\right)$ e $Q_\mu(s) = \mathcal{R}\left((\mu I - W(s))^k\right)$;*

(v) *$V(t,s)E_\mu(s) \subseteq E_\mu(t)$ e $V(t,s)Q_\mu(s) \subseteq Q_\mu(t)$ para todo $t \geq s$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.2.14, sabemos que μ é um polo de $R(\cdot : W(s))$. Digamos que μ é um polo de ordem m. Do Teorema 1.2.18 segue que

(1) μ é um autovalor de $W(s)$;

(2) $\alpha(\mu I - W(s)) = \delta(\mu I - W(s)) = m$;

(3) $\mathcal{R}(B_1) = \mathcal{N}\left((\mu I - W(s))^m\right)$;

(4) $\mathcal{R}(I - B_1) = \mathcal{N}(B_1) = \mathcal{R}\left((\mu I - W(s))^m\right)$;

(5) $C = \mathcal{R}\left((\mu I - W(s))^m\right) \oplus \mathcal{N}\left((\mu I - W(s))^m\right)$;

(6) $W(s)$ é completamente reduzido por $\mathcal{R}\left((\mu I - W(s))^m\right)$ e $\mathcal{N}\left(((\mu I - W(s))^m\right)$,

onde B_1 é definida na Seção 1.2. Sejam $E_\mu(s) = \mathcal{N}((\mu I - W(s))^m)$ e $Q_\mu(s) = \mathcal{R}((\mu I - W(s))^m)$.

Como $E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$ são imagens das projeções B_1 e $I - B_1$, temos que $E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$ são subespaços fechados de C (veja o item (a) da demonstração do Teorema 1.2.18).

Visto que $W(s)$ é completamente reduzido por $E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$, temos que $E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$ são invariantes por $W(s)$, o que mostra a primeira parte de *(i)*. A segunda parte, segue diretamente de (5).

Para provar o item *(ii)* é suficiente aplicar o Teorema 1.2.17 com $B = W(s)$ e $\sigma = \{\mu\}$. De fato, seja $\widehat{B} = W(s)|_{E_\mu(s)}$. Do Teorema 1.2.17 obtemos que $\{\mu\} = \sigma_e(W(s)|_{E_\mu(s)})$ e, como $W(s) \in \mathcal{L}(C)$, temos que $\sigma_e(W(s)|_{E_\mu(s)}) = \sigma(W(s)|_{E_\mu(s)})$, o que implica que $\sigma(W(s)|_{E_\mu(s)}) = \{\mu\}$.

Por outro lado, como $E_\mu(s) = \mathcal{N}((\mu I - W(s))^m)$, $W(s)$ é um operador compacto e $\mu \neq 0$, o Teorema 1.2.7 nos permite concluir que $E_\mu(s)$ tem dimensão finita, o que mostra o *(iii)*.

As propriedades em *(iv)* seguem diretamente da definição de $E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$, com $k = m$.

Para finalizar, mostraremos *(v)*. Note que um processo indutivo permite mostrar que

$$[\mu I - W(t)]^k V(t,s) \;=\; V(t,s)[\mu I - W(s)]^k, \quad \forall \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Seja $\psi \in V(t,s)E_\mu(s)$ e $\varphi \in E_\mu(s)$ tal que $\psi = V(t,s)\varphi$. Como $E_\mu(s) = \mathcal{N}((\mu I - W(s))^m)$, segue que

$$\begin{aligned}
(\mu I - W(t))^m \psi &= (\mu I - W(t))^m [V(t,s)\varphi] \\
&= V(t,s)(\mu I - W(s))^m \varphi \\
&= V(t,s)0 = 0,
\end{aligned}$$

de onde segue que $\psi \in \mathcal{N}((\mu I - W(t))^m) = E_\mu(t)$. Isto mostra que $V(t,s)E_\mu(s) \subseteq E_\mu(t)$. Para provar que $V(t,s)Q_\mu(s) \subseteq Q_\mu(t)$, seja $\psi \in V(t,s)Q_\mu(s)$ e $\varphi \in Q_\mu(s)$ tal que $\psi = V(t,s)\varphi$. Como $Q_\mu(s) = \mathcal{R}((\mu I - W(s))^m)$, temos que existe $\phi \in C$ tal que $\varphi = (\mu I - W(s))^m \phi$. Consequentemente,

$$\psi = V(t,s)\varphi = V(t,s)[(\mu I - W(s))^m \phi] = (\mu I - W(t))^m V(t,s)\phi,$$

o que implica que $\psi \in \mathcal{R}((\mu I - W(t))^m) = Q_\mu(t)$. Isso mostra *(v)*. A prova está completa. ■

Os multiplicadores característicos do sistema (2.5) foram definidos em termos do operador $W(0)$. Como veremos, os multiplicadores característicos não dependem do tempo inicial $s = 0$.

Lema 2.1.5. *Se μ é um multiplicador característico de (2.5), então $\mu \in \sigma_p(W(\tau))$ para todo $\tau \in [0,\omega]$.*

Demonstração: Sejam $0 \leq s \leq \omega$ e $\mu \in \sigma_p(W(s))$, $\mu \neq 0$. Pelo Lema 2.1.4, existem subespaços fechados, $E_\mu(s)$ e $Q_\mu(s)$ tais que $C = E_\mu(s) \oplus Q_\mu(s)$ e $\dim E_\mu(s) = d\mu(s) < \infty$. Seja $\Phi(s) = \{\phi_1,\, \phi_2,\, \ldots,\, \phi_{d\mu(s)}\}$ uma base para $E_\mu(s)$. Como $W(s)E_\mu(s) \subseteq E_\mu(s)$, existe uma matriz $M(s)$ de dimensão $d\mu(s) \times d\mu(s)$, tal que $W(s)\Phi(s) = \Phi(s)M(s)$. Agora, pela propriedade *(ii)* do Lema 2.1.4 temos que $\sigma(M(s)) = \{\mu\}$. Além disso, existe uma matriz $B(s)$ de ordem $d\mu(s) \times d\mu(s)$ tal que $B(s) = \omega^{-1}\log M(s)$. Para $t \geq s$ definamos $P(t) = V(t,s)\Phi(s)e^{-B(s)t}$. Então,

$$\begin{aligned}
P(t+\omega) &= V(t+\omega, s+\omega)V(s+\omega, s)\Phi(s)e^{-B(s)\omega}e^{-B(s)t} \\
&= V(t,s)W(s)\Phi(s)e^{-B(s)\omega}e^{-B(s)t}
\end{aligned}$$

$$= \quad V(t,s)\Phi(s)M(s)e^{-B(s)\omega}e^{-B(s)t}$$

$$= \quad P(t),$$

o que implica que $P(\cdot)$ é ω-periódico. Definamos agora uma extensão de $P(\cdot)$ (que ainda denotaremos por P) da seguinte forma: se $t < s$, então $P(t) = P(t + k\omega)$, sendo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $t + k\omega > s$. A função $t \mapsto x_t(\cdot, s, \Phi(s)) = V(t,s)\Phi(s) = P(t)e^{B(s)t}$ está bem definida para $t \in \mathbb{R}$ e é fácil ver que cada coluna da matriz $x_t(\cdot, s, \Phi(s))$ é uma solução fraca da equação (2.5).

Para todo $\tau \in [0, \omega]$,

$$\begin{aligned} W(\tau)V(\tau,s)\Phi(s) &= V(\tau+\omega,\tau)V(\tau,s)\Phi(s) \\ &= V(\tau+\omega,s)\Phi(s) \\ &= V(\tau,s)V(s+\omega,s)\Phi(s) \\ &= V(\tau,s)\Phi(s)M(s). \end{aligned}$$

Se $N(s) = \mu I - M(s)$, então $N(s)$ é uma matriz nilpotente para o expoente m e

$$[\mu I - W(\tau)]V(\tau,s)\Phi(s) \;=\; V(\tau,s)\Phi(s)N(s). \tag{2.7}$$

Suponha que $V(\tau,s)\Phi(s)b = 0$. Como $W(s)\Phi(s)b = V(s+\omega,\tau)V(\tau,s)\Phi(s)b = 0$ e $W(s)|_{E_\mu(s)}$ é injetor, obtemos que $b = 0$. Consequentemente, aplicando $N(s)^{m-1}$ em ambos os lados de (2.7), segue que

$$[\mu I - W(\tau)]V(\tau,s)\Phi(s)N(s)^{m-1} \;=\; V(\tau,s)\Phi(s)N(s)^m \;=\; 0,$$

com $V(\tau,s)\Phi(s)N(s)^{m-1} \neq 0$, o que implica que $\mu \in \sigma_p(W(\tau))$. Isto permite concluir que $\sigma_p(W(s)) \subset \sigma_p(W(\tau))$ para todo $\tau \in [0,\omega]$. A prova está completa. ■

Lema 2.1.6. *Um número complexo $\mu \neq 0$ é um multiplicador característico do sistema (2.5) se, e somente se, existe $\varphi \in C$, $\varphi \neq 0$, tal que $V(t+\omega, 0)\varphi = \mu V(t,0)\varphi$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Seja μ um multiplicador característico de (2.5). Então, $\mu \in \sigma_p(W)$ e existe $\varphi \in C$, $\varphi \neq 0$, tal que $(\mu I - W)\varphi = 0$. Logo, para $t \geq 0$ obtemos que

$$V(t+\omega,0)\varphi \;=\; V(t+\omega,\omega)V(\omega,0)\varphi \;=\; V(t,0)W\varphi \;=\; \mu V(t,0)\varphi.$$

Suponha agora que existem $\varphi \in C$, com $\varphi \neq 0$, e $\mu \neq 0$ tais que $V(t+\omega,0)\varphi = \mu V(t,0)\varphi$ para todo $t \geq 0$. Então, para $t \geq 0$ vemos que

$$\mu V(t,0)\varphi \;=\; V(t+\omega,0)\varphi \;=\; V(t+\omega,\omega)V(\omega,0)\varphi \;=\; V(t,0)W\varphi.$$

Em particular, para $t = 0$, temos que $W\varphi = \mu\varphi$, o que permite concluir que $\mu \in \sigma_p(W)$. Isto completa a prova. ■

O seguinte resultado é essencial em nosso estudo sobre a estabilização de sistemas hereditários. Primeiramente, definamos o seguinte conceito.

Definição 2.1.7. *O sistema (2.5)-(2.6) é dito exponencialmente estável se existem constantes positivas K e β tais que $\|x_t(\cdot,\sigma,\varphi)\| \leq Ke^{-\beta(t-\sigma)}\|\varphi\|$ para todo $t \geq \sigma$.*

Lema 2.1.8. *O sistema (2.5) é assintoticamente (exponencialmente) estável se, e somente se, os multiplicadores característicos de (2.5) possuem norma menor que um.*

O termo "exponencialmente" aparece acima entre parênteses pois, no caso de sistemas lineares como os que usamos neste trabalho, é possível mostrarmos (com base em [27, pág. 43]) que a estabilidade assintótica equivale a estabilidade exponencial.

Demonstração do Lema 2.1.8: Suponha que o sistema (2.5) é assintoticamente estável. Então, existem constantes positivas K e γ tais que $\|x_t(\cdot,s,\varphi)\| = \|V(t,s)\varphi\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}\|\varphi\|$ para todo $s \leq t$ e $\varphi \in C$. Sejam μ um multiplicador característico de (2.5) e $\phi \in C$, $\phi \neq 0$, tal que $W\phi = \mu\phi$. Como $V(n\omega,0)\phi = W^n\phi = \mu^n\phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $|\mu^n|\|\phi\| = \|V(n\omega,0)\phi\| \leq Ke^{-\gamma n\omega}\|\phi\|$, o que implica que $|\mu| < 1$.

Suponha agora que todo multiplicador característico de (2.5) tem norma menor do que um. Como W é um operador compacto, $r_\sigma(W) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(W)\} < 1$. Seja $\beta = \omega^{-1}\log r_\sigma(W)$. Pelo item (i) da Proposição 1.2.4, sabemos que $e^{\beta\omega} = r_\sigma(W) = \lim\limits_{n\to\infty}\|W^n\|^{\frac{1}{n}}$. Mais ainda, para todo $\gamma > 0$, $e^{-\gamma\omega} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-(\beta+\gamma)\omega}\|W^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Das observações anteriores, existem $N \in \mathbb{N}$ e $L \in (0,1)$ tais que $e^{-(\beta+\gamma)\omega}\|W^n\|^{\frac{1}{n}} = e^{-\gamma\omega} + \varepsilon_n$ e $e^{-\gamma\omega} + \varepsilon_n \leq L < 1$ para todo $n \geq N$. Logo, temos que $e^{-(\beta+\gamma)n\omega}\|W^n\| = (e^{-\gamma\omega} + \varepsilon_n)^n$, o que permite concluir que $e^{-(\beta+\gamma)n\omega}\|W^n\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Defina agora

$$K(\gamma) = N^2 e^{|\beta+\gamma|2\omega} \max_{n\geq 0}\{e^{-(\beta+\gamma)n\omega}\|W^n\|\}.$$

Se $t - s \leq \omega$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\omega \leq s \leq t \leq (n+1)\omega$ e assim,

$$\begin{aligned}
\|V(t,s)\| &\leq Ne^{-(\beta+\gamma)(t-s)}e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \\
&\leq Ne^{|\beta+\gamma|(t-s)}e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \\
&\leq Ne^{|\beta+\gamma|2\omega}e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \\
&\leq N^2 e^{|\beta+\gamma|2\omega}\max_{n\geq 0}\{e^{-(\beta+\gamma)n\omega}\|W^n\|\}e^{(\beta+\gamma)(t-s)}
\end{aligned}$$

$$= \quad K(\gamma)e^{(\beta+\gamma)(t-s)}.$$

Isto prova que $\|V(t,s)\varphi\| \leq K(\gamma)e^{(\beta+\gamma)(t-s)}\|\varphi\|$ para todo $\varphi \in C$ e todo $t \geq s$ em intervalos da forma $[n\omega,(n+1)\omega]$, $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, se $0 \leq s \leq p\omega \leq t$ para algum $p \in \mathbb{N}$, então existem $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $(k-1)\omega \leq s \leq k\omega$ e $m\omega \leq t \leq (m+1)\omega$, com $k \leq m$. Tomando $i = m-k$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|V(t,s)\| &\leq \|V(t,m\omega)\|\|V(m\omega,s)\| \\
&\leq N\|V(m\omega,(m-1)\omega)V((m-1)\omega,(m-2)\omega)\ldots V((m-i)\omega,s)\| \\
&= N\|W^i\|\|V(k\omega,s)\| \\
&\leq N^2e^{-(\beta+\gamma)(t-s-i\omega)}e^{-(\beta+\gamma)i\omega}\|W^i\|e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \\
&\leq N^2e^{-(\beta+\gamma)2\omega}e^{-(\beta+\gamma)i\omega}\|W^i\|e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \\
&\leq N^2e^{|\beta+\gamma|2\omega}\max_{n\geq 0}\{e^{-(\beta+\gamma)n\omega}\|W^n\|\}e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \\
&= K(\gamma)e^{(\beta+\gamma)(t-s)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|x_t(\cdot,s,\varphi)\| = \|V(t,s)\varphi\| \leq K(\gamma)e^{(\beta+\gamma)(t-s)}\|\varphi\|$ para todo $s \leq t$, $\varphi \in C$ e $\gamma > 0$, o que mostra que (2.5) é assintoticamente (exponencialmente) estável. A prova está completa. ■

Nossos próximos resultados são baseados na Fórmula da Variação das Constantes para a equação não-homogênea (2.1). Para estabelecer apropriadamente essa fórmula é conveniente trabalharmos no espaço $M^p(X) = X \times L^p([-r,0],X)$, $1 \leq p < \infty$, munido da norma

$$\|(z,\psi)\| = \|z\| + \left(\int_{-r}^{0}\|\psi(\theta)\|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = \|z\|_X + \|\psi\|_{L^p}.$$

No restante desta seção, assumiremos que $L(t)$ é da forma

$$L(t)\varphi = A_1(t)\varphi(-r) + \int_{-r}^{0}\eta(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta, \quad \varphi \in C, \tag{2.8}$$

onde $\eta : [0,\infty)\times[-r,0] \to \mathcal{L}(X)$ e $A_1 : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ são funções fortemente contínuas e $\eta(t,\theta)$ é de variação limitada em θ para todo $t \geq 0$.

Considere o problema de Cauchy abstrato,

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + f(t),\ t \geq \sigma \tag{2.9}$$

$$(x(\sigma),x_\sigma) = (z,\varphi) \in M^p(X). \tag{2.10}$$

Como já vimos na Seção 1.3, o sistema (2.9)-(2.10) tem uma única solução fraca para cada função localmente integrável f. Para $t \geq s \geq 0$ definimos o operador $\widehat{V}(t,s) : M^p(X) \to M^p(X)$ por $\widehat{V}(t,s) = (x(t), x_t)$, onde $x = x(\cdot, s, (z, \varphi))$ representa a solução fraca da equação homogênea associada a (2.9). Sabemos da Seção 1.4 que $(\widehat{V}(t,s))$, $t \geq s$, é um sistema de evolução em $M^p(X)$. Considere agora a decomposição $\widehat{V}(t,s) = (\widehat{V}_1(t,s), \widehat{V}_2(t,s))$. Note que, para $\varphi \in C$, $V(t,\sigma)\varphi = \widehat{V}_2(t,\sigma)(\varphi(0),\varphi)$. De fato, das definições de V e $\widehat{V}$ temos que

$$\widehat{V}_2(t,\sigma)(\varphi(0),\varphi) \;=\; x_t(\cdot,\sigma,(\varphi(0),\varphi)) \;=\; x_t(\cdot,\sigma,\varphi) \;=\; V(t,\sigma)\varphi.$$

Do anterior, temos o seguinte resultado.

Lema 2.1.9. *Seja $f : [0,\infty) \to X$ localmente integrável e $\varphi \in C$. Então,*

$$x(t,\sigma,\varphi,f) = [V(t,\sigma)\varphi](0) + \int_\sigma^t \widehat{V}_1(t,s)(f(s),0)ds, \tag{2.11}$$

$$x_t(\cdot,\sigma,\varphi,f) = V(t,\sigma)\varphi + \int_\sigma^t \widehat{V}_2(t,s)(f(s),0)ds, \tag{2.12}$$

para todo $t \geq \sigma$.

Demonstração: Seja $u : [\sigma - r, \infty) \to X$ definida por $u_\sigma = \varphi$ e

$$u(t) = [V(t,\sigma)\varphi](0) + \int_\sigma^t \widehat{V}_1(t,s)(f(s),0)ds, \quad \text{para} \quad t \geq \sigma.$$

Mostraremos que $u(\cdot)$ é solução fraca de (2.1)-(2.2). Das definições de $u(\cdot)$, $V(\cdot)$ e $\widehat{V}(\cdot)$ segue que

$$\begin{aligned} u(t) &= [V(t,\sigma)\varphi](0) + \int_\sigma^t \widehat{V}_1(t,s)(f(s),0)ds \\ &= x(t,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t x(t,s,(f(s),0))ds. \end{aligned}$$

Para $\theta \in [-r, 0]$ com $t + \theta \geq \sigma$, temos que

$$\begin{aligned} u_t(\theta) &= x(t+\theta,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^{t+\theta} x(t+\theta,s,(f(s),0))ds \\ &= x_t(\theta,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t x_t(\theta,s,(f(s),0))ds - \int_{t+\theta}^t x_t(\theta,s,(f(s),0))ds \\ &= x_t(\theta,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t x_t(\theta,s,(f(s),0))ds, \end{aligned}$$

pois $x(t+\theta,s,(f(s),0)) = 0$ para $s \in [t+\theta, t]$. Se $\theta \in [-r,0]$ com $t + \theta < \sigma$ segue que,

$$\begin{aligned} u_t(\theta) &= \varphi(t+\theta-\sigma) \\ &= x_\sigma(t+\theta-\sigma,\sigma,\varphi) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_t(\theta,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t x_s(t+\theta-s, s, (f(s),0))ds \\
&= x_t(\theta,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t x_t(\theta, s, (f(s),0))ds.
\end{aligned}
$$

Segue agora das observações anteriores que

$$
u_t(\cdot) = x_t(\cdot,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t x_t(\cdot, s, (f(s),0))ds. \tag{2.13}
$$

Usando agora (2.13), vemos que para $t \geq \sigma$

$$
\begin{aligned}
T(t-\sigma)\varphi(0) &+ \int_\sigma^t T(t-s)L(s)(u_s)ds + \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds \\
&= T(t-\sigma)\varphi(0) + \int_\sigma^t T(t-s)L(s)(x_s(\cdot,\sigma,\varphi))ds \\
&\quad + \int_\sigma^t T(t-s)L(s)\left(\int_\sigma^s x_s(\cdot,\tau,(f(\tau),0))d\tau\right)ds + \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds \\
&= x(t,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t \int_\sigma^s T(t-s)L(s)\Big(x_s(\cdot,\tau,(f(\tau),0))\Big)d\tau ds + \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds \\
&= x(t,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t \int_\tau^t T(t-s)L(s)\Big(x_s(\cdot,\tau,(f(\tau),0))\Big)ds d\tau + \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds \\
&= x(t,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t \left[x(t,\tau,(f(\tau),0)) - T(t-\tau)f(\tau)\right]d\tau + \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds \\
&= x(t,\sigma,\varphi) + \int_\sigma^t x(t,\tau,(f(\tau),0))d\tau,
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
u(t) = T(t-\sigma)\varphi(0) + \int_\sigma^t T(t-s)L(s)(u_s)ds + \int_\sigma^t T(t-s)f(s)ds, \quad \text{para } t \geq \sigma.
$$

Mais ainda, como $u_\sigma = \varphi$, temos que $u(\cdot)$ é uma solução fraca para (2.1)-(2.2), o que implica que $u(t) = x(t,\sigma,\varphi,f)$ para $t \geq \sigma - r$. Isso prova a representação (2.11).

Mostremos agora (2.12). Para começar note que, $\widehat{V}_2(t,s)(z,\varphi) = x_t(\cdot,s,(z,\varphi))$ para $t \geq s$ e $\varphi \in C$. Assim, por (2.13) temos que

$$
x_t(\cdot,\sigma,\varphi,f) = u_t(\cdot) = V(t,\sigma)\varphi + \int_\sigma^t \widehat{V}_2(t,s)(f(s),0)ds, \quad \text{para } t \geq \sigma,
$$

o que prova (2.12). A prova está completa. ∎

Seja $X_0 : X \to M^p(X)$ a função definida por $X_0 x = (x, 0)$. É claro que X_0 é uma aplicação linear limitada e que $\widehat{V}_2(t,s)(x,0)$ é uma função contínua para $t - s \geq r$. Assim, fazendo uso da notação $V(t,s)X_0 x = \widehat{V}_2(t,s)(x,0)$, podemos reescrever (2.11) e (2.12) na forma

$$x(t,\sigma,\varphi,f) = [V(t,\sigma)\varphi](0) + \int_\sigma^t [V(t,s)X_0 f(s)](0)ds, \tag{2.14}$$

$$x_t(\cdot,\sigma,\varphi,f) = V(t,\sigma)\varphi + \int_\sigma^t V(t,s)X_0 f(s)ds. \tag{2.15}$$

Como primeira aplicação de (2.14), estabelecemos a seguinte propriedade de estabilidade, a qual generaliza [27, Teorema 1.11]. Antes porém, precisamos introduzir algumas terminologias. Daqui para frente, assumiremos que toda aplicação de $[0,\infty)$ em $\mathcal{L}(C,X)$ é da forma (2.8).

Definição 2.1.10. *Uma função $F : [0,\infty) \to \mathcal{L}(C,X)$ é chamada S-assintoticamente ω-periódica se existem funções $G, R : [0,\infty) \to \mathcal{L}(C,X)$ tais que $G(\cdot)$ é ω-periódica, $\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} \|R(s)\|ds \to 0$ quando $n \to \infty$ e $F = G + R$.*

Nas condições da definição acima, é claro que a decomposição de F como soma de G e R é única. Por isso, chamaremos a função G de parte periódica de F.

Teorema 2.1.11. *Suponha que o sistema (2.5) é assintoticamente estável. Seja $F : [0,\infty) \to \mathcal{L}(C;X)$ S-assintoticamente ω-periódica com parte periódica G tal que $\int_0^\omega \|G(s)\|ds \leq \varepsilon$. Então, para ε suficientemente pequeno, o sistema*

$$x'(t) = Ax(t) + (L(t) + F(t))(x_t), \quad t \geq 0 \tag{2.16}$$

é assintoticamente estável.

Demonstração: Para abreviar a prova, consideraremos somente o caso $\sigma = 0$. Seja $x(\cdot)$ a solução fraca do sistema (2.16) com $x_0 = \varphi$. Fazendo uso da Fórmula da Variação das Constantes (2.14), podemos escrever

$$x(t) = [V(t,0)\varphi](0) + \int_0^t [V(t,s)X_0 F(s)(x_s)](0)ds, \quad \text{para } \; t \geq 0.$$

Como o sistema (2.5) é assintoticamente estável, do Lema 2.1.8 existem constantes $C_1 \geq 1$ e $\beta > 0$ tais que $\|x_t(\cdot,s,\varphi)\|_C \leq C_1 e^{-\beta(t-s)}\|\varphi\|_C$ para todo $0 \leq s \leq t$. Assim, para $t \geq 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|V(t,0)\varphi\|_C + \int_0^t \|V(t,s)X_0 F(s)(x_s)\|_C ds \\ &\leq C_1 e^{-\beta t}\|\varphi\|_C + \int_0^t C_1 e^{-\beta(t-s)}\|F(s)\|\|x_s\|_C ds. \end{aligned}$$

Da desigualdade anterior, para $\theta \in [-r, 0]$ com $t + \theta \geq 0$ vemos que

$$\begin{aligned} \|x_t(\theta)\| &\leq C_1 e^{-\beta(t+\theta)}\|\varphi\|_C + C_1 \int_0^{t+\theta} e^{-\beta(t+\theta-s)}\|F(s)\|\|x_s\|_C ds \\ &\leq C_1 e^{-\beta(t+\theta)}\|\varphi\|_C + C_1 \int_0^{t} e^{-\beta(t+\theta-s)}\|F(s)\|\|x_s\|_C ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $t + \theta < 0$

$$\|x_t(\theta)\| = \|\varphi(t+\theta)\| \leq C_1 e^{-\beta(t+\theta)}\|\varphi\|_C + C_1 \int_0^{t} e^{-\beta(t+\theta-s)}\|F(s)\|\|x_s\|_C ds.$$

Das desigualdades anteriores obtemos que

$$\|x_t\|_C \leq C_1 e^{-\beta(t-r)}\|\varphi\|_C + C_1 \int_0^{t} e^{-\beta(t-r-s)}\|F(s)\|\|x_s\|_C ds.$$

Se definirmos $v(t) = e^{\beta t}\|x_t\|_C$ então,

$$\begin{aligned} v(t) &\leq e^{\beta t}\left[C_1 e^{-\beta(t-r)}\|\varphi\|_C + C_1 \int_0^{t} e^{-\beta(t-r-s)}\|F(s)\|\|x_s\|_C ds\right] \\ &= C_2\|\varphi\|_C + C_2 \int_0^t \|F(s)\| v(s) ds, \end{aligned}$$

onde $C_2 = C_1 e^{\beta r}$. Agora, da Desigualdade de Gronwall, segue que $v(t) \leq C_2\|\varphi\|_C e^{C_2 \int_0^t \|F(s)\|ds}$ para todo $t \geq 0$.

Em particular, temos que

$$v(n\omega) \leq C_2\|\varphi\|_C e^{C_2 \int_0^{n\omega} \|F(s)\|ds}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e

$$\|x_{n\omega}\|_C = e^{-\beta n\omega} v(n\omega) \leq C_2\|\varphi\|_C e^{-\beta n\omega + C_2 \int_0^{n\omega} \|F(s)\|ds}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como F é S-assintoticamente ω-periódica e $\int_0^\omega \|G(s)\|ds \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \int_0^{n\omega} \|F(s)\|ds &\leq \int_0^{n\omega} \|G(s)\|ds + \int_0^{n\omega} \|R(s)\|ds \\ &= n\int_0^{\omega} \|G(s)\|ds + \int_0^{n_0\omega} \|R(s)\|ds + \int_{n_0\omega}^{n\omega} \|R(s)\|ds \\ &\leq n\varepsilon + C_3 + (n - n_0)\varepsilon \\ &\leq 2n\varepsilon + C_3, \end{aligned}$$

para alguma constante C_3 e n suficientemente grande. Usando o anterior, obtemos que

$$\|x_{n\omega}\|_C \ \leq \ C_2\|\varphi\|_C e^{n(-\beta\omega+2C_2\|\varphi\|_C\varepsilon+\frac{C_2\|\varphi\|_C C_3}{n})},$$

para n suficientemente grande. Portanto, se $\varepsilon < \dfrac{\beta\omega}{2C_2\|\varphi\|_C}$ e n é suficientemente grande de modo que $\gamma = -\beta\omega + 2C_2\|\varphi\|_C\varepsilon + \dfrac{C_2\|\varphi\|_C C_3}{n} < 0$, obtemos que $e^{n\gamma} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que mostra que $\|x_{n\omega}\|_C$ converge exponencialmente para zero quando $n \to \infty$. Isto nos permite completar a prova do resultado. ■

No restante desta seção, assumiremos que $A_1(t)$ e $\eta(t,\theta)$ são ω-periódicas em t.

Observação 2.1.12. As propriedades para sistemas periódicos consideradas nos Lemas 2.1.4 e 2.1.5 dependem basicamente da teoria espectral de operadores compactos. Consequentemente, essas propriedades ainda são válidas em $M^p(X)$. Especificamente, para cada multiplicador característico μ do sistema (2.5), existem subespaços $\widehat{E}_\mu(s)$ e $\widehat{Q}_\mu(s)$ com as propriedades do Lema 2.1.4 com $M^p(X)$ no lugar de C. Além disso, da propriedade *(iv)* do Lema 2.1.4, temos que os elementos de $\widehat{E}_\mu(s)$ são do tipo $(\varphi(0),\varphi)$ com $\varphi \in C$. Por esta razão, identificaremos $(\varphi(0),\varphi)$ com φ, e assim podemos considerar $\widehat{E}_\mu(s) = E_\mu(s) \subseteq C$.

Sejam $\Lambda = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ um conjunto de multiplicadores característicos do sistema (2.5) e $E_\Lambda(s) = \oplus_{i=1}^n E_{\mu_i}(s)$. Então, o espaço $M^p(X)$ é decomposto por

$$M^p(X) = E_\Lambda(s) \oplus \widehat{Q}_\Lambda(s),$$

onde $E_\Lambda(s)$ e $\widehat{Q}_\Lambda(s)$ são invariantes por $\widehat{W}(s)$ e $\dim E_\Lambda(s) < \infty$. Seja $\Phi(s) = \{\varphi^1(s), \ldots, \varphi^d(s)\}$ uma base de $E_\Lambda(s)$. Se $\Phi(t) = V(t,s)\Phi(s)$, então $V(t,0)E_\Lambda(0) = E_\Lambda(t)$ e $\widehat{V}(t,0)\widehat{Q}_\Lambda(0) \subseteq \widehat{Q}_\Lambda(t)$ para todo $t \geq 0$. Além disso, $E_\Lambda(t+\omega) = E_\Lambda(t)$ e $\widehat{Q}_\Lambda(t+\omega) = \widehat{Q}_\Lambda(t)$.

Denotemos por $M(b \times b)$ o espaço das matrizes de ordem $b \times b$. Sejam $\varphi^{E_\Lambda(t)}$ e $\varphi^{\widehat{Q}_\Lambda(t)}$ as projeções de φ em $E_\Lambda(t)$ e $\widehat{Q}_\Lambda(t)$, respectivamente. Como $W(s)E_\Lambda(s) \subseteq E_\Lambda(s)$, existe uma matriz $H(s) \in M(d \times d)$, tal que $W(s)\Phi(s) = \Phi(s)H(s)$ e $\sigma(H(s)) = \Lambda$. Existe também uma matriz $R(s) \in M(d \times d)$ tal que $H(s) = e^{\omega R(s)}$. Dessa forma, a função $P : [0,\infty) \to (C^d)^*$ definida por

$$P(t) = V(t,0)\Phi(0)e^{-tR(0)},$$

é ω-periódica e contínua. Mais ainda, segue de [28, Seção 8.1] que $P(t) : C^d \to E_\Lambda(t)$ tem uma inversa contínua.

Sejam $\psi^j(t) \in (M^p(X))^*$, $j = 1, 2, \ldots, d$, tais que $\langle \psi^j(t), \varphi^i(t) \rangle = \delta_{i,j}$ para $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ e $\langle \psi^j(t), \varphi \rangle = 0$ para todo $\varphi \in \widehat{Q}_\Lambda(t)$ e definamos $\Psi_\Lambda^*(t) = col(\psi^1(t), \psi^2(t), \ldots, \psi^d(t))$.

Lema 2.1.13. *Nas condições anteriores as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $\Psi_\Lambda^*(t) = \widehat{V}(t,s)^*\Psi_\Lambda^*(s)$ *para todo* $s \leq t$*;*

(ii) *Para todo* $s \leq t$ *e* $\psi \in M^p(X)$, $\Phi(t)\langle \Psi_\Lambda^*(t), \widehat{V}(t,s)\psi\rangle = V(t,s)\Phi(s)\langle \Psi_\Lambda^*(s), \psi\rangle$.

Demonstração: Mostremos **(i)**. Da definição de $\Psi_\Lambda^*(t)$ obtemos que

$$\langle \widehat{V}(t,s)^*\Psi_\Lambda^*(t), \Phi(s)\rangle \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(t), V(t,s)\Phi(s)\rangle \;=\; I \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(s), \Phi(s)\rangle, \tag{2.17}$$

onde I é o operador identidade. Além disso, para $\varphi \in \widehat{Q}_\Lambda(s)$,

$$\langle \widehat{V}(t,s)^*\Psi_\Lambda^*(t), \varphi\rangle \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(t), \widehat{V}(t,s)\varphi\rangle \;=\; 0 \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(s), \varphi\rangle. \tag{2.18}$$

Como $M^p(X) = E_\Lambda(s) + \widehat{Q}_\Lambda(s)$, de (2.17) e (2.18) segue que

$$\langle \widehat{V}(t,s)^*\Psi_\Lambda^*(t), \varphi\rangle \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(s), \varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in M^p(X)$, o que nos permite concluir que $\widehat{V}(t,s)^*\Psi_\Lambda^*(t) = \Psi_\Lambda^*(s)$ para todo $t \geq s$.

Vejamos agora **(ii)**. Da propriedade **(i)**, vemos que para $\psi \in M^p(X)$,

$$\begin{aligned}
\Phi(t)\langle \Psi_\Lambda^*(t), \widehat{V}(t,s)\psi\rangle &= V(t,s)\Phi(s)\langle \Psi_\Lambda^*(t), \widehat{V}(t,s)\psi\rangle \\
&= V(t,s)\Phi(s)\langle \widehat{V}(t,s)^*\Psi_\Lambda^*(t), \psi\rangle \\
&= V(t,s)\Phi(s)\langle \Psi_\Lambda^*(s), \psi\rangle.
\end{aligned}$$

A demonstração está completa. ■

Lema 2.1.14. *Se* $\eta \in C([0,\infty) \times [-r,0]; \mathcal{L}(X))$ *e* $A_1 \in C([0,\infty); \mathcal{L}(X))$, *então a função* $\Psi_\Lambda^*(\cdot) \in C([0,\infty); \mathcal{L}(X))$.

Demonstração: Sejam $\Pi^E(s)$ e $\Pi^Q(s)$ as projeções lineares de $M^p(X)$ em $E_\Lambda(s)$ e $\widehat{Q}_\Lambda(s)$, respectivamente. O mesmo argumento usado na prova da Proposição 2.1.2 nos permite concluir que $\widehat{W}(\cdot) \in C([0,\infty); \mathcal{L}(M^p(X)))$. Combinando esta propriedade com o cálculo operacional de Dunford-Taylor, veja [59], obtemos que $\Pi^E(s)$ e $\Pi^Q(s)$ são funções contínuas em s na norma de operadores. Além disso, como $\Pi^E(t)M^p(X) \subset E_\Lambda(t)$, temos que para $\psi \in M^p(X)$, $\Pi^E(t)\psi$ é uma combinação linear dos elementos da base de $E_\Lambda(t)$. Assim $\Pi^E(t)\psi = \Phi(t)c(t)$, onde $c(t) \in M(d \times 1)$. Mais ainda, como $\Phi(t) = V(t,0)\Phi(0)$, segue que

$$\Pi^E(t)\psi \;=\; \Phi(t)c(t) \;=\; V(t,0)\Phi(0)c(t). \tag{2.19}$$

Vejamos agora algumas propriedades do operador $V(t,0)$.

(a) $V(t,0) : E_\Lambda(0) \to E_\Lambda(t)$ é um isomorfismo entre espaços de dimensão finita.

Para provar este fato, mostremos que $V(t,0)$ é injetora e sobrejetora. Suponha que $\varphi \in E_\Lambda(0)$ é tal que $V(t,0)\varphi = 0$. Como $\Phi(0)$ é base para $E_\Lambda(0)$, existe $b \in M(d \times 1)$ tal que $\varphi = \Phi(0)b$. Fixemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\omega \geq t$. Nestas condições, temos que

$$V(m\omega,0)\Phi(0)b \;=\; V(m\omega,t)V(t,0)\Phi(0)b \;=\; 0.$$

Mais ainda, como $W(t)$ é ω-periódica, temos que

$$0 \;=\; V(m\omega,0)\Phi(0)b \;=\; W(0)^m\Phi(0)b \;=\; \Phi(0)H(0)^m b.$$

Como os autovalores de $H(0)^m$ são da forma μ_i^m, com $0 \neq \mu_i \in \Lambda$, $i = 1,2,\ldots,n$, obtemos que $0 \in \rho(H(0)^m)$, de onde concluímos que $b = 0$ e que $\varphi = 0$. Portanto, $V(t,0)$ é injetora.

Provemos agora que $V(t,0)$ é sobrejetora. Seja $\psi \in E_\Lambda(t)$ e $b \in M(d \times 1)$ tal que $\psi = \Phi(t)b$. Como $\Phi(t) = V(t,0)\Phi(0)$, segue que $\psi = \Phi(t)b = V(t,0)\Phi(0)b$, o que mostra que $V(t,0)$ é sobrejetora. Isto completa a prova de que $V(t,0)$ é um isomorfismo.

(b) A função $V(\cdot,0)|_{E_\Lambda(0)} \in C([0,\infty);\mathcal{L}(E_\Lambda(0))$.

Esta propriedade segue diretamente do fato que $E_\Lambda(0)$ é de dimensão finita e que $V(\cdot,0)|_{E_\Lambda(0)}$ é uma família fortemente contínua.

De (2.19) e das propriedades (a) e (b), é fácil ver que

$$V(t,0)^{-1}\Pi^E(t)\psi \;=\; \Phi(0)c(t)$$

é uma função contínua em t na norma de operadores. Além disso, como $c(\cdot)$ é contínua e

$$\begin{aligned} c(t) &= \langle \Psi_\Lambda^*(0), \Phi(0)c(t)\rangle \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(0), V(t,0)^{-1}\Pi^E(t)\Psi\rangle \\ &= \langle \widehat{V}(t,0)^*\Psi_\Lambda^*(t), V(t,0)^{-1}\Pi^E(t)\psi\rangle \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(t), \Pi^E(t)\psi\rangle \\ &= \langle \Psi_\Lambda^*(t), \Pi^E(t)\psi + \Pi^Q(t)\psi\rangle \;=\; \langle \Psi_\Lambda^*(t), \psi\rangle, \end{aligned}$$

segue que a função $t \mapsto \Psi_\Lambda^*(t)$ é contínua na norma de operadores, como queríamos demonstrar.

Observação 2.1.15. (Fórmula da Variação das Constantes no espaço $E_\Lambda(t)$.) Sejam $\varphi \in C$ e $x(\cdot) = x(\cdot,\sigma,\varphi,f)$ a solução fraca de (2.1)-(2.2). Então

$$(x(t),x_t) = \Pi^E(t)(x(t),x_t) + \Pi^Q(t)(x(t),x_t).$$

Denotemos por $w(t)$ a segunda componente de $\Pi^E(t)(x(t),x_t)$. Usando as Fórmulas da Variação das Constantes (2.11)-(2.12), a Observação 2.1.12 e o Lema 2.1.13 obtemos que

$$w(t) = V(t,\sigma)w(\sigma) + \int_\sigma^t V(t,s)\Phi(s)\langle \Psi_\Lambda^*(s), X_0 f(s)\rangle ds. \tag{2.20}$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned} w(t) &= \Phi(t)\langle \Psi_\Lambda^*(t), (x(t),x_t)\rangle \\ &= \Phi(t)\langle \Psi_\Lambda^*(t), (V(t,\sigma)\varphi(0), V(t,\sigma)\varphi)\rangle \\ &\quad + \Phi(t)\left\langle \Psi_\Lambda^*(t), \int_\sigma^t \left(\widehat{V}_1(,s), \widehat{V}_2(t,s)\right)(f(s),0)ds\right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi(t)\langle\Psi_\Lambda^*(t), V(t,\sigma)(\varphi(0),\varphi)\rangle + \Phi(t)\left\langle \Psi_\Lambda^*(t), \int_\sigma^t \widehat{V}(t,s)(f(s),0)ds \right\rangle \\
&= \Phi(t)\langle\Psi_\Lambda^*(t), V(t,\sigma)(\varphi(0),\varphi)\rangle + \int_\sigma^t \Phi(t)\langle\Psi_\Lambda^*(t), \widehat{V}(t,s)(f(s),0)\rangle ds \\
&= V(t,\sigma)\Phi(\sigma)\langle\Psi_\Lambda^*(\sigma), (x(\sigma),x_\sigma)\rangle + \int_\sigma^t V(t,s)\Phi(s)\langle\Psi_\Lambda^*(s), (f(s),0)\rangle ds \\
&= V(t,\sigma)w(\sigma) + \int_\sigma^t V(t,s)\Phi(s)\langle\Psi_\Lambda^*(s), X_0 f(s)\rangle ds,
\end{aligned}
$$

o que mostra (2.20).

Assuma agora que $w(t) = \Phi(t)c(t)$, com $c(t) \in \mathbb{C}^d$ e seja $z(t) = e^{R(0)t}c(t)$. Assim, temos que $c(t) = e^{-R(0)t}z(t)$. Substituindo $c(t)$ em (2.20), obtemos que

$$
\begin{aligned}
w(t) &= \Phi(t)e^{-R(0)t}z(t) \\
&= V(t,\sigma)\Phi(\sigma)e^{-R(0)\sigma}z(\sigma) + \int_\sigma^t V(t,s)\Phi(s)\langle\Psi_\Lambda^*(s), X_0 f(s)\rangle ds \\
&= \Phi(t)e^{-R(0)\sigma}z(\sigma) + \int_\sigma^t \Phi(t)\langle\Psi_\Lambda^*(s), X_0 f(s)\rangle ds \\
&= \Phi(t)e^{-R(0)\sigma}z(\sigma) + \Phi(t)\int_\sigma^t \langle\Psi_\Lambda^*(s), X_0 f(s)\rangle ds.
\end{aligned}
$$

Se $\Gamma(t) : X \to \mathbb{C}^d$ é a aplicação linear definida por

$$
\Gamma(t)x = e^{R(0)t}\langle\Psi_\Lambda^*(t), X_0 x\rangle, \tag{2.21}
$$

então

$$
z(t) = e^{R(0)(t-\sigma)}z(\sigma) + \int_\sigma^t e^{R(0)(t-s)}\Gamma(s)f(s)ds,
$$

o que implica que $z(\cdot)$ é solução da equação diferencial ordinária

$$
x'(t) = R(0)x(t) + \Gamma(t)f(t), \quad t \geq \sigma. \tag{2.22}
$$

Completamos a construção anterior mostrando que (2.22) é um sistema ω-periódico.

Proposição 2.1.16. *Suponha que todas as condições anteriores são verificadas. Então, a função* $\widetilde{\Gamma}(t)\psi = e^{R(0)t}\langle\Psi_\Lambda^*(t), \psi\rangle$ *é* ω*-periódica para todo* $\psi \in M^p(X)$.

Demonstração: Seja $\psi \in M^p(X)$ e considere a decomposição

$$
\psi = \Phi(t)c(t) + \varphi^1,
$$

onde $\Phi(t)c(t) \in E_\Lambda(t)$ e $\varphi^1 \in \widehat{Q}_\Lambda(t) = \widehat{Q}_\Lambda(t+\omega)$. Usando que $c(t) = \langle \Psi^*_\Lambda(t), \psi\rangle$ para todo $t \geq 0$, segue que

$$\widetilde{\Gamma}(t)\psi \;=\; e^{R(0)t}\langle \Psi^*_\Lambda(t), \psi\rangle \;=\; e^{R(0)t}\langle \Psi^*_\Lambda(t), \Phi(t)c(t)\rangle \;+\; e^{R(0)t}\langle \Psi^*_\Lambda(t), \varphi^1\rangle \;=\; e^{R(0)t}c(t).$$

Como $P(t) = V(t,0)\Phi(0)e^{-R(0)t}$, temos que $\Phi(t) = P(t)e^{R(0)t}$ e

$$\begin{aligned}
\psi &= P(t)e^{R(0)t}c(t) + \varphi^1 \\
&= P(t+\omega)e^{R(0)(t+\omega)}e^{-R(0)\omega}c(t) + \varphi^1 \\
&= \Phi(t+\omega)e^{-R(0)\omega}c(t) + \varphi^1.
\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão na definição de $\widetilde{\Gamma}(\cdot)$, vemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}(t+\omega)\psi &= e^{R(0)(t+\omega)}\langle \Psi^*_\Lambda(t+\omega), \psi\rangle \\
&= e^{R(0)(t+\omega)}\langle \Psi^*_\Lambda(t+\omega), \Phi(t+\omega)e^{-R(0)\omega}c(t) + \varphi^1\rangle \\
&= e^{R(0)t}c(t) \\
&= \widetilde{\Gamma}(t)\psi,
\end{aligned}$$

o que implica que $\widetilde{\Gamma}(t)$ é ω-periódica. ■

Corolário 2.1.17. *Sob as condições anteriores, temos que* $\Gamma(t+\omega) = \Gamma(t)$ *para todo* $t \geq 0$.

Demonstração: Note que para $x \in X$, $\Gamma(t)x = e^{R(0)t}\langle \Psi^*_\Lambda(t), X_0x\rangle = \widetilde{\Gamma}(t)(X_0x)$. Logo, como $X_0x = (x, 0)$ e $\widetilde{\Gamma}(t)$ é ω-periódica, segue que

$$\Gamma(t+\omega)x = \widetilde{\Gamma}(t+\omega)(X_0x) = \widetilde{\Gamma}(t)(X_0) = \Gamma(t)x,$$

o que mostra que $\Gamma(\cdot)$ também é ω-periódica. ■

2.2 Estabilização

Nesta seção, voltamos nossa atenção para o problema da estabilização do sistema

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \tag{2.23}$$

$$x_0 = \varphi \in C, \tag{2.24}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ compacto em X, $U = \mathbb{C}^m$, $u(t) \in U$, $B : U \to X$ é um operador linear limitado, $L(t) : C \to X$ é ω-periódica com $\omega > r$ e

$$L(t)\varphi = A_1(t)\varphi(-r) + \int_{-r}^{0} \eta(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta,$$

com $\eta : [0,\infty) \times [-r, 0] \to \mathcal{L}(X)$ e $A_1 : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ funções contínuas na norma de operadores e $\eta(t,\theta)$ de variação limitada em θ para todo $t \geq 0$. No que se segue, consideramos como controles admissíveis as funções localmente integráveis.

Para começar, introduzimos o seguinte conceito de estabilização.

Definição 2.2.1. *O sistema (2.23) é dito estabilizável se existe $K \in C([0,\infty); \mathcal{L}(C, \mathbb{C}^m))$ tal que*

$$x'(t) = Ax(t) + \big(L(t) + BK(t)\big)(x_t), \quad t \geq 0, \tag{2.25}$$

é assintoticamente estável.

Como na Seções 1.4, $\widetilde{V}(\cdot)$ denotará o sistema de evolução associado a (2.25) e $x(\cdot, \varphi, u)$ será a solução de (2.23)-(2.24). A seguir consideraremos (2.23) como um sistema de controle com histórias em C.

Definição 2.2.2. *O sistema (2.23) é chamado controlável na origem em tempo finito se para toda $\varphi \in C$ existem $t_1 > 0$ e um controle admissível $u \in L^2([0, t_1]; U)$ tais que $x_{t_1}(\cdot, \varphi, u) = 0$.*

Definição 2.2.3. *O sistema (2.23) é chamado aproximadamente controlável na origem em tempo finito se para toda $\varphi \in C$ e todo $\varepsilon > 0$ existem $t_1 > 0$ e um controle admissível $u \in L^2([0, t_1]; U)$ tais que $\|x_{t_1}(\cdot, \varphi, u)\| \leq \varepsilon$.*

No que se segue, usaremos as notações introduzidas na Observação 2.1.12 e $\Lambda = \{\lambda \in \sigma_p(W) : |\lambda| \geq 1\}$. Segue de (2.22) que $x_t^{E_\Lambda(t)} = P(t)z(t)$ para todo $t \geq 0$, onde $x_t^{E_\Lambda(t)}$ é a projeção de x_t em $E_\Lambda(t)$ e $z(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$z'(t) = R(0)z(t) + \Gamma(t)Bu(t). \tag{2.26}$$

Como consequência do Corolário 2.1.17, sabemos que o sistema (2.26) é ω-periódico.

Proposição 2.2.4. *Seja $\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que o produto $\mu_1 \ldots \mu_d > 0$. Se o sistema (2.23) é aproximadamente controlável na origem em tempo finito, então existem funções $F \in C([0,\infty); \mathbb{C}^m)$ e $z \in C([0,\infty); \mathbb{C}^m)$ tais que $F(\cdot)$ é ω-periódica e o conjunto dos multiplicadores característicos de (2.26), com $u(t) = F(t)z(t)$, é Ω.*

Demonstração: Sejam $c_1 \in \mathbb{C}^d$ e $\psi^1 = P(0)c_1$. Como (2.23) é aproximadamente controlável na origem em tempo finito, para $\varepsilon > 0$ existem $\tau > 0$ e um controle admissível $u \in L^2([0, \tau]; U)$ tais que $\|x_\tau(\cdot,\psi^1,u)\| \leq \varepsilon$. Como foi observado anteriormente, $x_t(\cdot,\psi^1,u)^{E_\Lambda(t)} = P(t)z(t)$ para todo $t \geq 0$, o que implica que $x_0(\cdot,\psi^1,u)^{E_\Lambda(0)} = P(0)z(0)$. Mais ainda, como $P(0) : \mathbb{C}^d \to E_\Lambda(0)$, temos que $\psi^1 \in E_\Lambda(0)$. Logo, $x_0(\cdot,\psi^1,u)^{E_\Lambda(0)} = (\psi^1)^{E_\Lambda(0)} = \psi^1$. Dessa forma, segue que $P(0)c_1 = \psi^1 = P(0)z(0)$, o que nos permite concluir que $c_1 = z(0)$, pois $P(t) : \mathbb{C}^d \to E_\Lambda(t)$ possui inversa contínua.

Usando que a projeção $\Pi^E(\tau) : C \to E_\Lambda(\tau)$ e a aplicação $P(\tau) : \mathbb{C}^d \to E_\Lambda(\tau)$ são contínuas e ω-periódicas em τ, bem como o fato de $P(\tau)$ ter inversa contínua, vemos que

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\| &= \|P(\tau)^{-1}\|\|P(\tau)z(\tau)\| \\ &\leq \|P(\tau)^{-1}\|\|\Pi^E(\tau)\|\|x_\tau(\cdot,\psi^1,u)\| \\ &\leq \|P(\tau)^{-1}\|\|\Pi^E(\tau)\|\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $P(\cdot)^{-1}$ e $\Pi^E(\cdot)$ são uniformemente limitadas, a estimativa acima nos permite deduzir que $\|z(\tau)\| \leq \varepsilon$, o que implica que o sistema (2.26) é aproximadamente controlável segundo a definição de controlabilidade aproximada para espaços de dimensão finita. Além disso, podemos concluir que (2.26) é controlável. Agora a propriedade segue do Teorema da página 302 de [11]. ∎

No restante desta seção, fixamos Ω de modo que os números μ_i, $i = 1,\ldots,d$, não sejam multiplicadores característicos do sistema (2.5) e tais que $\mu_1 \ldots \mu_d > 0$. Assim, aplicando a Proposição 2.2.4 podemos selecionar um $F \in C([0,\infty);\mathbb{C}^m)$ tal que o conjunto dos multiplicadores característicos do sistema

$$z'(t) = \big(R(0) + \Gamma(t)BF(t)\big)z(t), \quad t \geq 0, \tag{2.27}$$

seja Ω. Podemos ainda escolher μ_i tal que $|\mu_i| < 1$ para todo $i = 1,\ldots,d$, o que implica que (2.27) é assintoticamente estável.

Definamos $K(t) : C \to \mathbb{C}^m$ por

$$K(t)\varphi = F(t)e^{R(0)t}\langle \Psi_\Lambda^*(t), \varphi\rangle. \tag{2.28}$$

Segue da Observação 2.1.12 e da Proposição 2.1.16 que $K \in C([0,\infty);\mathbb{C}^d)$ e que $K(\cdot)$ é ω-periódica.

A seguir, $\widetilde{x}(\cdot)$ denotará a solução de (2.25) com $K(\cdot)$ dada por (2.28) e $y(\cdot)$ será a solução de (2.5) com condição inicial φ em $t = 0$. Agora, estamos em condições de estabelecer o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.5. *Se o sistema (2.23) é aproximadamente controlável na origem em tempo finito, então o sistema é estabilizável.*

Demonstração: Mostremos inicialmente que se $\varphi \in Q_\Lambda(0)$, então $y(t) = \widetilde{x}(t)$ para todo $t \geq 0$ e $\widetilde{V}(t,s)\varphi = V(t,s)\varphi$ para $t \geq s$. De fato, para $\varphi \in Q_\Lambda(0)$ temos que $V(t,0)\varphi = y_t \in Q_\Lambda(t)$, de onde segue que

$$K(t)y_t \;=\; F(t)e^{R(0)t}\langle\Psi_\Lambda^*(t), V(t,0)\varphi\rangle = 0,$$

para todo $t \geq 0$. Isto implica que $y(\cdot)$ é solução de (2.25) pois,

$$\begin{aligned} y(t) &= T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)L(s)(y_s)ds \\ &= T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)\left[L(s) + BK(s)\right](y_s)ds. \end{aligned}$$

Agora, da unicidade de soluções concluímos que $y(t) = \widetilde{x}(t)$ para todo $t \geq 0$. Mais ainda, como $\widetilde{V}(t,s)$ é o sistema de evolução associado a $\widetilde{x}(\cdot)$, segue que $\widetilde{V}(t,0)\varphi = \widetilde{x}_t = y_t = V(t,0)\varphi$.

Agora, mostraremos que se μ é multiplicador característico do sistema (2.25) então, $|\mu| < 1$. Sejam μ um multiplicador característico de (2.25) e $\varphi \in C$, $\varphi \neq 0$, um autovetor associado a μ. Considere a decomposição $\varphi = \varphi^{E_\Lambda(0)} + \varphi^{Q_\Lambda(0)}$, com $\varphi^{E_\Lambda(0)} = \Phi(0)v$. Nessas condições temos duas possibilidades:

(i) Se $v = 0$, então $\varphi^{E_\Lambda(0)} = 0$, o que implica que $\varphi = \varphi^{Q_\Lambda(0)} \in Q_\Lambda(0)$. Logo, pelo que provamos inicialmente, segue que $V(\omega,0)\varphi = \widetilde{V}(\omega,0)\varphi = \mu\varphi$, pois $\mu \in \sigma_p(\widetilde{V}(\omega,0))$. Isto mostra que μ é um multiplicador característico de (2.5). Mais ainda, como $\varphi \in Q_\Lambda(0)$ e $\sigma(U|E_\Lambda(0)) = \Lambda$, concluímos que $\mu \notin \Lambda = \{\lambda \in \sigma_p(W) :\ |\lambda| \geq 1\}$, o que implica que $|\mu| < 1$.

(ii) Se $v \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_t^{E_\Lambda(t)} &= P(t)z(t) \\ &= \Phi(t)\langle\Psi_\Lambda^*(t), \widetilde{x}_t\rangle \\ &= P(t)e^{R(0)t}\langle\Psi_\Lambda^*(t), \widetilde{x}_t\rangle, \end{aligned}$$

de onde segue que $z(t) = e^{R(0)t}\langle\Psi_\Lambda^*(t), \widetilde{x}_t\rangle$. Mais ainda, de (2.22) vemos que $z(\cdot)$ é uma solução da equação

$$\begin{aligned} z'(t) &= R(0)z(t) + \Gamma(t)BK(t) \\ &= R(0)z(t) + \Gamma(t)BF(t)e^{R(0)t}\langle\Psi_\Lambda^*(t), \widetilde{x}_t\rangle \\ &= R(0)z(t) + \Gamma(t)BF(t)z(t). \end{aligned}$$

Como φ é um autovalor associado a μ, $\widetilde{V}(t+\omega,0)\varphi = \mu\widetilde{V}(t,0)\varphi$ e assim

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_{t+\omega}^{E_\Lambda(t+\omega)} &= P(t+\omega)z(t+\omega) \\ &= P(t+\omega)e^{R(0)(t+\omega)}\langle\Psi_\Lambda^*(t+\omega), \widetilde{V}(t+\omega,0)\varphi\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu V(t+\omega)\Phi(0)\langle \Psi_\Lambda^*(t+\omega), \widetilde{x}_t\rangle \\
&= \mu\Phi(t+\omega)c(t+\omega) \\
&= \mu(\widetilde{x}_t)^{E_\Lambda(t+\omega)} \\
&= \mu\widetilde{x}_t^{E_\Lambda t} \\
&= \mu P(t)z(t).
\end{aligned}
$$

Do anterior podemos concluir que $P(t+\omega)z(t+\omega) = P(t)z(t+\omega) = \mu P(t)z(t)$, o que por sua vez implica que $z(t+\omega) = \mu z(t)$ para todo $t \geq 0$ e que $\mu \in \Omega$.

Finalmente, pela forma como tomamos o conjunto Ω, segue que o sistema (2.27) é assintoticamente estável e que $|\mu| < 1$. Agora, do Lema 2.1.8 podemos concluir que o sistema (2.25) é assintoticamente estável, o que mostra que o sistema (2.23) é estabilizável. ■

Combinando os Teoremas 2.1.11 e 2.2.5, podemos estabelecer um resultado de estabilização para sistemas que são uma perturbação de sistemas periódicos. No próximo corolário, assumiremos que as funções envolvidas satisfazem as condições gerais consideradas na Seção 2.1.

Corolário 2.2.6. *Suponha que o sistema (2.23) é aproximadamente controlável na origem em tempo finito e que $F : [0,\infty) \to \mathcal{L}(C;X)$ é uma função S-assintoticamente ω-periódica com parte periódica G tal que $\int_0^\omega \|G(s)\|ds \leq \varepsilon$. Então, o sistema*

$$x'(t) = Ax(t) + [L(t) + F(t)](x_t) + Bu(t), \tag{2.29}$$

é estabilizável para ε suficientemente pequeno.

Demonstração: Do Teorema 2.2.5 sabemos que (2.23) é estabilizável. Assim, existe $K \in C([0,\infty); \mathcal{L}(C;\mathbb{C}^m))$ tal que

$$x'(t) = Ax(t) + [L(t) + BK(t)](x_t)$$

é assintoticamente estável. Usando agora o Teorema 2.1.11, obtemos que

$$x'(t) = Ax(t) + [L(t) + BK(t) + F(t)](x_t)$$

é assintoticamente estável para ε suficientemente pequeno. Equivalentemente, existe um operador contínuo K (o mesmo do início) tal que

$$x'(t) = Ax(t) + [(L(t) + F(t)) + BK(t)](x_t)$$

é assintoticamente estável, o que nos permite concluir que

$$x'(t) = Ax(t) + [L(t) + F(t)](x_t) + Bu(t)$$

é estabilizável. Isto completa a prova. ■

2.3 Controlabilidade de sistemas hereditários lineares em espaços de Hilbert

Sabemos que para aplicar o Teorema 2.2.5, precisamos que o sistema (2.23) seja aproximadamente controlável na origem em tempo finito. A controlabilidade aproximada de sistemas de controle abstratos tem sido estudada em numerosos artigos. Para sistemas de controle do tipo considerado neste trabalho citamos [2, 3, 4, 17, 18, 26, 62] e as referências neles citadas. Além disso, existem trabalhos dedicados ao estudo da controlabilidade de sistemas que podem ser considerados como uma perturbação de um sistema linear, neste caso citamos [48, 58, 72]. Entretanto, algumas hipóteses consideradas nos trabalhos citados não são apropriadas quando tratamos de certos tipos de sistemas que aparecem em situações reais. Nosso objetivo nessa seção é estabelecer resultados que sejam aplicáveis a sistemas reais, como por exemplo para a equação do calor.

Nesta parte da tese, consideremos o sistema de controle

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \tag{2.30}$$

$$x_0 = \varphi, \tag{2.31}$$

com $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, X e U espaços de Hilbert e $x_t : [-r, 0] \to X$ a história de $x(\cdot)$ no ponto t, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$. Assumiremos ainda que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, que $L : [0, \infty) \to \mathcal{L}(C, X); X)$ é fortemente contínua, sendo $C = C([-r, 0]; X)$, e que $B : U \to X$ é uma aplicação linear contínua.

O lema a seguir estabelece uma propriedade essencial para nosso estudo de controlabilidade.

Lema 2.3.1. *Sejam H um espaço de Hilbert e H_1, H_2 subespaços fechados de H tais que $H = H_1 + H_2$. Então, existe uma projeção linear limitada $P : H \to H_2$ tal que para cada $x \in H$, $x_1 = x - Px \in H_1$ e*

$$\|x_1\| = \min\{\|y\| : y \in H_1,\ x = y + z,\ z \in H_2\}.$$

Demonstração: Como este resultado é bem conhecido, apresentaremos somente um esboço da prova e um par de propriedades de P para referência futura. Para cada $x \in H$, seja

$$C(x) = \{y \in H_1 : x = y + z,\ z \in H_2\}.$$

Note que $C(x) = H_1 \cap (x + H_2)$ e que $C(x) \neq \emptyset$. É claro que $C(x)$ é convexo e fechado. Logo, existe um único elemento $x_1 \in C(x)$ tal que

$$\|x_1\| = \min\{\|y\| : y \in H_1,\ x = y + z,\ z \in H_2\}.$$

Defina $P : H \to H_2$ por $Px = x - x_1$. Se $x \in H_1$ e $x = y + z$, com $y \in H_1$ e $z \in H_2$, então $z \in H_1 \cap H_2$ e Px é a melhor aproximação de x por elementos de $H_1 \cap H_2$. Seja $Q : H_1 \to H_1 \cap H_2$ a projeção ortogonal sobre $H_1 \cap H_2$. Consequentemente, $Px = Qx$ e P é uma projeção linear limitada com $\|Px\| \leq \|x\|$.

Se $x \in H_2$, então $C(x) = H_1 \cap H_2$. Assim, $x_1 = 0$ e $Px = x$. ■

Para estudar a controlabilidade do sistema (2.30), estudaremos o sistema sem retardo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \tag{2.32}$$

$$x(0) = x^0. \tag{2.33}$$

Tanto a controlabilidade exata como a controlabilidade aproximada do sistema (2.32)-(2.33) têm sido estudadas por vários autores. É bem conhecido, veja ([5, 15, 30, 43]), que muitos dos sistemas distribuídos que aparecem em situações concretas não são exatamente controláveis, mas aproximadamente controláveis. No que resta desta seção, assumiremos que X e U são espaços de Hilbert munidos com um produto interno denotado genericamente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para $\tau > 0$, $L^2([0, \tau]; X)$ e $L^2([0, \tau]; U)$ são munidos com o produto interno

$$\ll f, g \gg = \int_0^\tau \langle f(s), g(s) \rangle ds.$$

Adicionalmente, $S_\tau : L^2([0, \tau]; U) \to X$ é o operador linear definido por

$$S_\tau(u) = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds.$$

Usaremos também a seguinte terminologia.

Definição 2.3.2. *O sistema (2.32)-(2.33) é chamado aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se a imagem do operador S_τ, denotada por $\mathcal{R}(S_\tau)$, é densa em X. Diremos que (2.32)-(2.33) é aproximadamente controlável em tempo finito se $\bigcup_{\tau > 0} \mathcal{R}(S_\tau)$ é denso em X.*

Citamos aqui os trabalhos [5, 14, 15, 29, 46] e as referências nesses trabalhos, em relação ao estudo da controlabilidade aproximada de sistemas distribuídos do tipo (2.32)-(2.33). Considerando esses trabalhos, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 2.3.3. *O conjunto atingível, $\mathcal{R}_0(\tau, x^0)$, do sistema (2.32)-(2.33) é o conjunto*

$$\mathcal{R}_0(\tau, x^0) \; = \; \left\{ T(\tau)x^0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds : \; u \in L^2([0, \tau]; U) \right\}.$$

Segue das Definições 2.3.2 e 2.3.3 que o sistema (2.32)-(2.33) é aproximadamente controlável em $[0,\tau]$ se, e somente se, o conjunto $\mathcal{R}_0(\tau,x^0)$ é denso em X. Um conceito mais fraco de controlabilidade é o seguinte.

Definição 2.3.4. *O sistema (2.32)-(2.33) é chamado aproximadamente controlável na origem em* $[0,\tau]$ *se* $0 \in \overline{\mathcal{R}(\tau,x^0)}$ *para todo* $x_0 \in X$. *O sistema (2.32)-(2.33) é chamado aproximadamente controlável na origem em tempo finito se* $0 \in \overline{\bigcup_{\tau>0} \mathcal{R}(\tau,x^0)}$ *para todo* $x_0 \in X$.

Para sistemas de controle hereditários existem vários conceitos de controlabilidade. A diferença básica é entre controlabilidade pontual (ou euclidiana) e controlabilidade funcional. Nas Definições 2.2.2 e 2.2.3 introduzimos um tipo de controlabilidade funcional. Procedendo agora como nas Definições 2.3.2 e 2.3.4, vamos considerar algumas formas de controlabilidade pontual para o sistema (2.30)-(2.31). No que segue deste trabalho, o conjunto atingível de (2.30)-(2.31) é dado por

$$\mathcal{R}_L(\tau,\varphi) \;=\; \left\{ T(\tau)\varphi(0) + \int_0^\tau T(\tau-s)\Big[L(s)(x_s(\cdot,\varphi,u)) + Bu(s)\Big]ds :\; u \in L^2([0,\tau);U) \right\}.$$

Definição 2.3.5. *Diremos que o sistema (2.30)-(2.31) é:*

(a) X*-aproximadamente controlável em* $[0,\tau]$ *se* $\mathcal{R}_L(\tau,0)$ *é denso em* X*;*

(b) X*-aproximadamente controlável em tempo finito se* $\bigcup_{\tau>0} \mathcal{R}_L(\tau,0)$ *é denso em* X*;*

(c) X*-aproximadamente controlável na origem em* $[0,\tau]$ *se* $0 \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau,\varphi)}$ *para todo* $\varphi \in C$*;*

(d) X*-aproximadamente controlável na origem em tempo finito se* $0 \in \overline{\bigcup_{\tau>0} \mathcal{R}_L(\tau,\varphi)}$ *para todo* $\varphi \in C$.

No que se segue, M e L_0 são as constantes definidas por

$$M = \sup\{\|T(t)\| : 0 \le t \le \tau\} \;\text{ e }\; L_0 = \sup\{\|L(t)\| : 0 \le t \le \tau\}.$$

Note que M e L_0 dependem de τ. A notação $C_0([0,\tau];X)$ representará o subespaço de $C([0,\tau];X)$ formado pelas funções $x(\cdot)$ tais que $x(0)=0$. Adicionalmente, $J : L^2([0,\tau];X) \to C_0([0,\tau];X)$, $J_\tau : L^2([0,\tau];X) \to X$ e $\widehat{B} : L^2([0,\tau];U) \to L^2([0,\tau];X)$ são as funções definidas por

$$J(x)(t) \;=\; \int_0^t T(t-s)x(s)ds, \tag{2.34}$$

$$J_\tau(x) \;=\; \int_0^\tau T(\tau-s)x(s)ds, \tag{2.35}$$

$$(\widehat{B}u)(t) \;=\; Bu(t). \tag{2.36}$$

É fácil ver que J e J_τ são operadores lineares limitados com $\|J\| \leq M\tau^{\frac{1}{2}}$ e $\|J_\tau\| \leq M\tau^{\frac{1}{2}}$. Também usamos a notação $\mathcal{N}(\tau) = \mathcal{N}(J_\tau)$ e para $\tau' < \tau$, $L'(\cdot) : [0, \tau'] \to \mathcal{L}(C; X)$ será o operador definido por $L'(t) = L(\tau - \tau' + t)$ para $0 \leq t \leq \tau'$.

Lema 2.3.6. *Para $\tau' < \tau$ as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $\mathcal{R}_0(\tau, x^0) \subseteq \bigcup\{\mathcal{R}_0(\tau', y) : y \in \mathcal{R}_0(\tau - \tau', x^0)\}$;

(ii) *Se $x = x(\cdot, \varphi, u)$ é a solução fraca de (2.30)-(2.31), então $\mathcal{R}_{L'}(\tau', \psi) \subseteq \mathcal{R}_L(\tau, \varphi)$ com $\psi = x_{\tau-\tau'}$.*

Demonstração: Vejamos **(i)**. Se $a \in \mathcal{R}_0(\tau, x_0)$, então existe $u \in L^2([0, \tau]; U)$ tal que

$$a \;=\; x(\tau) \;=\; T(\tau)x^0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds.$$

Logo, para $\tau' < \tau$ vemos que

$$\begin{aligned} x(\tau) &= T(\tau')T(\tau - \tau')x^0 + \int_0^{\tau-\tau'} T(\tau')T(\tau - \tau' - s)Bu(s)ds + \int_{\tau-\tau'}^{\tau} T(\tau - s)Bu(s)ds \\ &= T(\tau')x(\tau - \tau') + \int_0^{\tau'} T(\tau' - s)Bu(\tau - \tau' + s)ds \\ &= T(\tau')\widehat{y} + \int_0^{\tau'} T(\tau' - s)B\widehat{u}(s)ds, \end{aligned}$$

onde $\widehat{y} = x(\tau - \tau') \in X$ e $\widehat{u}(s) = u(\tau - \tau' + s)$ para $s \in [0, \tau']$. É claro que $\widehat{y} \in \mathcal{R}_0(\tau - \tau' x^0)$, $\widehat{u} \in L^2([0, \tau'], U)$ e $\widehat{x}(t) = T(t)\widehat{y} + \int_0^t T(t - s)B\widehat{u}(s)ds$ é uma solução de (2.32). Como $x(\tau) = \widehat{x}(\tau')$, segue que $x(\tau) \in \mathcal{R}_0(\tau', \widehat{y})$ para $\widehat{y} \in \mathcal{R}_0(\tau - \tau', x^0)$. Portanto, $x(\tau) \in \bigcup\{\mathcal{R}_0(\tau', y) : y \in \mathcal{R}_0(\tau - \tau', x^0)\}$. Isso prova **(i)**.

Mostremos agora **(ii)**. Seja $x(\cdot)$ uma solução fraca de (2.30) com condição inicial $x_0 = \varphi$ e função controle $u \in L^2([0, \tau]; U)$. Assim,

$$x(t) \;=\; T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t - s)[L(s)(x_s) + Bu(s)]ds, \;\; t \in [0, \tau].$$

Seja agora $a \in \mathcal{R}_{L'}(\tau', \psi)$ com $\psi = x_{\tau-\tau'}$. Então, $a = y(\tau')$, onde $y(\cdot) = y(\cdot, \psi, \widetilde{u})$ é solução fraca de (2.30) com $L'(\cdot)$ no lugar de $L(\cdot)$, com condição inicial ψ e função de controle $\widetilde{u}$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= T(t)\psi(0) + \int_0^t T(t - s)[L'(s)(y_s) + B\widetilde{u}(s)]ds \\ &= T(t)x_{\tau-\tau'}(0) + \int_0^t T(t - s)L(\tau - \tau' + s)(y_s)ds + \int_0^t T(t - s)B\widetilde{u}(s)ds, \;\; t \in [0, \tau']. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é construir uma função $z(\cdot)$ em $[-r,\tau]$ tal que $z(\cdot)$ seja solução de (2.30) com condição inicial φ e alguma função de controle $v(\cdot)$ de modo que $y(\tau') = a = z(\tau)$.

Observando que $0 < \tau' < \tau$, definimos

$$z(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -r \leq t \leq 0, \\ x(t), & 0 \leq t \leq \tau - \tau', \\ y(t-\tau+\tau'), & \tau - \tau' \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

Note que, $z_0 = \varphi$ e $z(\cdot)$ está bem definida. Definamos agora $v : [0,\tau] \to U$ por

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau - \tau', \\ \widetilde{u}(t-\tau+\tau'), & \tau - \tau' < t \leq \tau. \end{cases}$$

Mostraremos que $z(\cdot)$ é solução fraca de (2.30) em $[0,\tau]$ com condição inicial φ e função controle $v(\cdot)$. Se $t' \in [\tau-\tau',\tau]$, então existe $t \in [0,\tau']$ tal que $t' = t+\tau-\tau'$, de onde $y(t) = y(t'-\tau+\tau') = z(t')$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} z(t') &= T(t)x_{\tau-\tau'}(0) + \int_0^t T(t-s)L(\tau-\tau'+s)(y_s)ds + \int_0^t T(t-s)B\widetilde{u}(s)ds \\ &= T(t)\left[T(\tau-\tau')\varphi(0) + \int_0^{\tau-\tau'} T(\tau-\tau'-s)L(s)(x_s)ds\right. \\ &+ \left.\int_0^{\tau-\tau'} T(\tau-\tau'-s)Bu(s)ds\right] + \int_0^t T(t-s)L(\tau-\tau'+s)(y_s)ds \\ &+ \int_0^t T(t-s)B\widetilde{u}(s)ds \\ &= T(t')\varphi(0) + \int_0^{\tau-\tau'} T(t'-s)L(s)(x_s)ds + \int_0^{\tau-\tau'} T(t'-s)Bu(s)ds \\ &+ \int_{\tau-\tau'}^{t'} T(t'-s)L(s)(y_{s-\tau+\tau'})ds + \int_{\tau-\tau'}^{t'} T(t'-s)B\widetilde{u}(s-\tau+\tau')ds \\ &= T(t')\varphi(0) + \int_0^{\tau-\tau'} T(t'-s)L(s)(x_s)ds + \int_{\tau-\tau'}^{t'} T(t'-s)L(s)(y_{s-\tau+\tau'})ds \\ &+ \int_0^{t'} T(t'-s)Bv(s)ds. \end{aligned}$$

Note agora que para $s+\theta \leq s \leq \tau-\tau'$, $\theta \in [-r,0]$, temos que $z_s = x_s$. Por outro lado, se $\tau-\tau' \leq s \leq t'$ então, para $\theta \in [-r,0]$,

$$z_s(\theta) = \begin{cases} x(s+\theta), & s+\theta \leq \tau-\tau', \\ y(s+\theta-\tau+\tau'), & \tau-\tau' \leq s+\theta \leq \tau. \end{cases}$$

Se $s+\theta \leq \tau-\tau'$, então

$$x(s+\theta) = x_{\tau-\tau'}(s+\theta-\tau+\tau') = \psi(s+\theta-\tau+\tau') = y_0(s+\theta-\tau+\tau') = y_{s-\tau+\tau'}(\theta),$$

o que implica que $z_s = y_{s-\tau+\tau'}$ se $\tau - \tau' \leq s \leq t'$. Dessas observações temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau-\tau'} T(t'-s)L(s)(x_s)ds + \int_{\tau-\tau'}^{t'} T(t'-s)L(s)(y_{s-\tau+\tau'})ds \\ = \int_0^{\tau-\tau'} T(t'-s)L(s)(z_s)ds + \int_{\tau-\tau'}^{t'} T(t'-s)L(s)(z_s)ds \\ = \int_0^{t'} T(t'-s)L(s)(z_s)ds.\end{aligned}$$

Usando esta última igualdade concluímos que

$$z(t') \;=\; T(t')\varphi(0) + \int_0^{t'} T(t'-s)L(s)(z_s)ds + \int_0^{t'} T(t'-s)Bv(s)ds, \;\; t' \in [\tau-\tau', \tau].$$

Como $z_0 = \varphi$, segue que $z(\cdot)$ é solução fraca de (2.30) com condição inicial φ e função de controle $v(\cdot)$. Isto completa a prova de **(ii)**, pois $a = y(\tau')$ e $z(\tau) = y(\tau - \tau + \tau') = y(\tau')$. ■

A seguir, mostraremos que uma modificação na argumentação de Sukavanam [58] pode ser aplicada para comparar a controlabilidade aproximada dos sistemas (2.30)-(2.31) e (2.32)-(2.33). Antes porém, precisamos de algumas notações. Para $\varphi \in C([-r,0];X)$ e $x \in C([0,\tau];X)$ tais que $x(0) = \varphi(0)$, definimos a função $F : C_0([0,\tau];X) \to L^2([0,\tau];X)$ por

$$F(z)(t) = L(t)(z_t + x_t), \;\; t \in [0,\tau],$$

onde x_t e z_t são definidas por

$$x_t(\theta) = \begin{cases} x(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ \varphi(t+\theta), & t+\theta \leq 0, \end{cases}$$

$$z_t(\theta) = \begin{cases} z(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}$$

Note que F é uma função contínua.

Assuma que $\overline{\mathcal{N}(\tau) + \mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0,\tau],X)$ e denotemos por P a projeção construída no Lema 2.3.1, com $H_1 = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$ e $H_2 = \mathcal{N}(\tau)$. Considere também o espaço

$$Z = \{z \in C_0([0,\tau];X) : z = J(n), \; n \in \mathcal{N}(\tau)\},$$

e seja $\Gamma : \overline{Z} \to Z \subseteq C_0([0,\tau],X)$ a função definida por $\Gamma = J \circ P \circ F$. A seguir, estudaremos a existência de pontos fixos para Γ. No próximo resultado, $\gamma = M\|P\|L_0$.

Lema 2.3.7. *Se $\gamma\tau < 1$, então Γ tem um ponto fixo.*

Demonstração: Para provar esta propriedade, mostraremos que Γ é uma contração. Para isso, dado $z \in \overline{Z}$, sejam $F_0(z)(t) = L(t)(z_t)$ e $\Gamma_0 = J \circ P \circ F_0$. Como J, P e F_0 são funções lineares limitadas, temos que Γ_0 também é linear e limitada. Além disso, fazendo $f = (P \circ F_0)(z)$, vemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_0(z)(t)\| &= \|J \circ f(t)\| \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\|\|f(s)\|ds \\
&\leq Mt^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|f(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Mt^{\frac{1}{2}} \|P\| L_0 \left(\int_0^\tau \|z_s\|_C^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Mt^{\frac{1}{2}} \|P\| L_0 \left(\int_0^\tau \|z\|^2_{C_0([0,\tau];X)} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \gamma\tau \|z\|_{C_0([0,\tau];X)},
\end{aligned}$$

de modo que $\|\Gamma_0(z)(t)\| \leq \gamma\tau\|z\|_{C_0([0,\tau];X)}$ para todo $z \in \overline{Z}$ e todo $t \in [0,\tau]$, o que mostra que Γ_0 é uma contração. Veja agora que para $z, \widetilde{z} \in \overline{Z}$,

$$\Gamma(z)(t) - \Gamma(\widetilde{z})(t) = J \circ P[F(z)(t) - F(\widetilde{z})(t)] = J \circ P[L(t)(z_t - \widetilde{z}_t)] = \Gamma_0(z - \widetilde{z})(t),$$

de modo que

$$\|\Gamma(z)(t) - \Gamma(\widetilde{z})(t)\| \leq \gamma\tau\|z - \widetilde{z}\|_{C_0([-r,0];X)}, \quad t \in [0,\tau].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(z) - \Gamma(\widetilde{z})\|_{C_0([-r,0];X)} &= \sup\{\|\Gamma(z)(t) - \Gamma(\widetilde{z})(t)\| : t \in [0,\tau]\} \\
&\leq \gamma\tau\|z - \widetilde{z}\|_{C_0([-r,0];X)},
\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Sob certas condições podemos modificar a hipótese $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0,\tau];X)$.

Lema 2.3.8. *Suponha que* $\mathcal{R}(\widehat{B}) \subseteq [\mathcal{R}(\widehat{B}) \cap \mathcal{N}(\tau)] \oplus \mathcal{N}(\tau)^\perp$ *e que o espaço* $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$ *é denso em* $L^2([0,\tau];X)$. *Então,* $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0,\tau];X)$.

Demonstração: Obviamente $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} \subset L^2([0,\tau];X)$. Mostremos a inclusão contrária. Seja $x \in L^2([0,\tau];X)$, então existem sequências $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{N}(\tau)$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^2([0,\tau];U)$ tais que $\widehat{B}u_n + y_n \to x$ quando $n \to \infty$. Seja $Q : L^2([0,\tau];X) \to L^2([0,\tau];X)$ a projeção ortogonal sobre $\mathcal{N}(\tau)$. Nessas condições, $(I-Q)\widehat{B}u_n + Q\widehat{B}u_n + y_n \to x$ quando $n \to \infty$. Note ainda que $(I-Q)\widehat{B}u_n \in \mathcal{R}(\widehat{B}) \cap \mathcal{N}(\tau)^\perp$ e $Q\widehat{B}u_n + y_n \in \mathcal{N}(\tau)$. Como Qx_n é convergente quando

$n \to \infty$, temos que $Q\widehat{B}u_n + y_n$ converge para algum elemento $y_2 \in \overline{\mathcal{N}(\tau)}$ quando $n \to \infty$. Consequentemente, $(I - Q)\widehat{B}u_n$ também é convergente, com limite $y_1 \in \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$. Isso implica que $x = y_1 + y_2 \in \mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$. A prova está completa. ■

Em relação aos resultados anteriores, é importante ressaltar que se $\mathcal{N}(B) = 0$ e $\mathcal{R}(B)$ é um subespaço fechado (fato que ocorre, por exemplo, se U tem dimensão finita), então o espaço $\mathcal{R}(\widehat{B})$ também é fechado. De fato, se $(\widehat{B}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f \in L^2([0,\tau];X)$ quando $n \to \infty$, então existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $Bu_n(s) \to f(s)$ quase-sempre em $[0,\tau]$ quando $n \to \infty$. Portanto, $f(s) \in \mathcal{R}(B)$ quase sempre e podemos escrever f na forma $f(s) = Bu(s)$ para algum $u(s) \in U$. Além disso, se R denota a inversa à esquerda de B, então $u(s) = Rf(s)$, o que implica que $u \in L^2([0,\tau];U)$ e $\widehat{B}u(s) = f(s)$.

O próximo resultado estabelece um critério de comparação para os conjuntos atingíveis dos sistemas (2.30) e (2.32).

Teorema 2.3.9. *Suponha que $\gamma\tau < 1$ e que $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0,\tau];X)$. Então, $\mathcal{R}_0(\tau,\varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau,\varphi)}$ para todo $\varphi \in C([-r,0];X)$.*

Demonstração: Sejam $u(\cdot)$ uma função de controle e $x(\cdot)$ a solução fraca de (2.32) com condição inicial $x(0) = \varphi(0)$. Do Lema 2.3.7 sabemos que existe um único ponto fixo $z \in Z \subseteq C_0([0,\tau];X)$ de Γ. Logo, $z(0) = 0$ e $z = J(n)$ para algum $n \in \mathcal{N}(\tau)$. Mais ainda,

$$0 = J(n)(\tau) = z(\tau) = \Gamma(z)(\tau) = \int_0^\tau T(\tau - s)(P \circ F)(z)(s)ds = J_\tau(P(F(z))),$$

de modo que $z(\tau) = 0$.

Por outro lado, do Lema 2.3.1, com $H_1 = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$ e $H_2 = \mathcal{N}(\tau)$, temos que $q = F(z) - P(F(z)) \in \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$. Definamos agora $y : [-r,\tau] \to X$ por $y_0 = \varphi$ e $y(t) = z(t) + x(t)$ para $t \in [0,\tau]$. Das propriedades de $x(\cdot)$ e $z(\cdot)$, vemos que $y(\tau) = x(\tau)$ e que

$$\begin{aligned}
y(t) &= \Gamma(z)(t) + x(t) \\
&= \int_0^t T(t-s)[P(F(z))](s)ds + T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds \\
&= \int_0^t T(t-s)[F(z)(s) - q(s)]ds + T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds \\
&= \int_0^t T(t-s)[L(s)(z_s + x_s) - q(s)]ds + T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$y(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(s)(y_s) - q(s) + Bu(s)]ds. \tag{2.37}$$

Como $q \in \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$, temos que existe uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^2([0,\tau];U)$ tal que $\widehat{B}v_n \to q$ quando $n \to \infty$. Denotemos por $y^n(\cdot)$ a solução fraca do sistema

$$\begin{aligned} &x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + B(u(t) - v_n(t)), \quad t \geq 0, \\ &x_0 = \varphi. \end{aligned}$$

É claro que $y^n(\tau) \in \mathcal{R}_L(\tau,\varphi)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $y^n(\tau) \to y(\tau)$ quando $n \to \infty$. De fato, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|Bv_n - q\|_{L^2} \leq \dfrac{\varepsilon}{M\tau^{\frac{1}{2}}}$ para todo $n \geq N$. Usando agora a Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|y^n(t) - y(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\|\|L(s)\|\|y_s^n - y_s\|_C ds + \int_0^t \|T(t-s)\|\|Bv_n(s) - q(s)\|ds \\ &\leq \int_0^t ML_0\|y_s^n - y_s\|_C ds + \int_0^\tau M\|Bv_n(s) - q(s)\|ds \\ &\leq ML_0 \int_0^t \|y_s^n - y_s\|_C ds + M\tau^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|Bv_n(s) - q(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ML_0 \int_0^t \|y_s^n - y_s\|_C ds + M\tau^{\frac{1}{2}} \|Bv_n - q\|_{L^2}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|y^n(t) - y(t)\| \leq \int_0^t ML_0\|y_s^n - y_s\|_C ds + \varepsilon,$$

se $n \geq N$. Como $(y^n)_0 = y_0$, desta última desigualdade segue que para $n \geq N$,

$$\|y_t^n - y_t\|_C \leq ML_0 \int_0^t \|y_s^n - y_s\|_C ds + \varepsilon,$$

o que implica que $\|y_t^n - y_t\|_C \leq \varepsilon e^{M\tau L_0}$ se $n \geq N$ e que $y_t^n \to y_t$ quando $n \to \infty$. Assim, $y^n(\tau) \to y(\tau)$ o que mostra que $y(\tau) \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau,\varphi)}$. Portanto, $x(\tau) \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau,\varphi)}$, o que permite concluir que

$$\mathcal{R}_0(\tau,\varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau,\varphi)}.$$

Isto completa a prova. ■

Estamos em condições agora de estabelecer um critério para a controlabilidade do sistema (2.30). O seguinte resultado segue diretamente do Teorema 2.3.9.

Corolário 2.3.10. *Suponha que $\gamma\tau < 1$, que o sistema (2.32) é aproximadamente controlável em $[0,\tau]$ e que $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0,\tau];X)$. Então, o sistema (2.30) é X-aproximadamente controlável em $[0,\tau]$.*

Demonstração: Seja $\varphi \in C$. Como o sistema (2.32) é aproximadamente controlável em $[0,\tau]$, temos que $\overline{\mathcal{R}_0(\tau,\varphi(0))} = X$.

Como $\gamma\tau < 1$ e $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0,\tau];X)$, o Teorema 2.3.9 garante que $\mathcal{R}_0(\tau,\varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau,\varphi)}$, o que implica que $\mathcal{R}_L(\tau,\varphi)$ é denso em X. Em particular, se $\varphi = 0$, segue que $\mathcal{R}_L(\tau,0)$ é denso em X e portanto, o sistema (2.30) é X-aproximadamente controlável em $[0,\tau]$. ■

Por causa da condição $\gamma\tau = M\|P\|L_0\tau < 1$, o corolário acima é aplicável à sistemas onde o operador $L(t)$ é uma "pequena" perturbação. Nosso próximo objetivo é enfraquecer essas hipóteses. É óbvio que a projeção P depende de τ. Por essa razão, no que se segue, usaremos a notação P_τ para essa projeção.

Procedendo como na demonstração do Lema 2.3.7, é claro que

$$\|\Gamma_0(z)(t)\| \leq M\tau^{\frac{1}{2}}\|P_\tau\| \left(\int_0^\tau \|L(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \|z\|_\infty.$$

Nos próximos resultados usaremos a translação $L_\xi(t) = L(\xi + t)$. Seja também $\nu_\xi(\tau) = \|\Gamma_0\|$, onde Γ_0 é definida como no Lema 2.3.7 com L_ξ no lugar de L. Observe que, $\nu_\xi(\tau) \leq M\tau^{\frac{1}{2}}\|P_\tau\| \left(\int_0^\tau \|L(\xi+s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$. Estamos agora aptos a estabelecer o seguinte resultado.

Corolário 2.3.11. *Seja $\tau > 0$ e suponha que as seguintes condições são válidas:*

(a) O sistema (2.32) é aproximadamente controlável em $[0,\tau]$;

(b) Para todo $0 < t \leq \tau$, $\mathcal{N}(t) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0,t];X)$;

(c) $\nu_\xi(t) \to 0$ quando $t \to 0^+$ uniformemente para ξ em conjuntos limitados.

Então, o sistema (2.30) é X-aproximadamente controlável em $[0,\tau]$.

Demonstração: Para $\varphi \in C$, seja $I = \{0 < t \leq \tau : \mathcal{R}_0(t,\varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(t,\varphi)}\}$. Do Teorema 2.3.9, segue que $t \in I$ para $t > 0$ suficientemente pequeno. Suponha que $0 < \tau_0 \in I$ e escolha $\varepsilon > 0$ tal que $\sup\limits_{0\leq t\leq\tau} \nu_t(\varepsilon) < 1$.

Sejam $x(\cdot,\varphi(0),u)$ a solução fraca do problema (2.32)-(2.33) para uma função de controle $u(\cdot)$ definida em $[0,\tau_0+\varepsilon]$ e $x^1 = x(\tau_0+\varepsilon,\varphi(0),u) \in \mathcal{R}_0(\tau_0+\varepsilon,\varphi(0))$. Do item **(i)** do Lema 2.3.6, temos que $x^1 \in \mathcal{R}_0(\varepsilon,x^2)$ com $x^2 = x(\tau_0,\varphi(0),u)$ e $x^1 = x(\varepsilon,x^2,u(\cdot+\tau_0))$. Além disso, pela escolha de τ_0, obtemos que

$$x^2 \in \mathcal{R}_0(\tau_0,\varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau_0,\varphi)}.$$

Consequentemente, podemos escrever $x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} z^n$, onde $z^n = y(\tau_0,\varphi,u^n)$ e $y(\cdot,\varphi,u^n)$ denota a solução fraca da equação (2.30) com condição inicial $y_0 = \varphi$ e função controle $u(\cdot) = u^n(\cdot)$ definida em $[0,\tau_0]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para abreviarmos o texto, escrevemos $y^n(\cdot) = y(\cdot,\varphi,u^n)$. Assim, segue que $x(\tau',z^n,u(\cdot+\tau')) \to x^1$ quando $n \to \infty$.

Definamos $L'(t) = L(t+\tau_0)$. Aplicando novamente o Teorema 2.3.9, temos que $x(\varepsilon, z^n, u(\cdot + \tau_0)) \in \overline{\mathcal{R}_{L'}(\varepsilon, y^n_{\tau_0})}$. De fato, como $z^n = y(\tau_0, \varphi, u^n) = y^n_{\tau_0}(0)$,

$$x(\varepsilon, z^n, u(\cdot + \tau_0)) \;=\; T(\varepsilon)y^n_{\tau_0}(0) + \int_0^{\varepsilon} T(\varepsilon - s)Bu(\tau_0 + s)ds \;\in\; \mathcal{R}_0(\varepsilon, y^n_{\tau_0}(0)).$$

Do Teorema 2.3.9 temos que $\mathcal{R}_0(\varepsilon, y^n_{\tau_0}(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_{L'}(\varepsilon, y^n_{\tau_0})}$, o que implica que $x(\varepsilon, z^n, u(\cdot + \tau_0)) \in \overline{\mathcal{R}_{L'}(\varepsilon, y^n_{\tau_0})}$.

Por outro lado, usando o item **(ii)** do Lema 2.3.6, vemos que $\mathcal{R}_{L'}(\varepsilon, y^n_{\tau_0}) \subseteq \mathcal{R}_L(\tau_0 + \varepsilon, \varphi)$, o que nos permite concluir que $x(\varepsilon, z^n, u(\cdot + \tau_0)) \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau_0 + \varepsilon, \varphi)}$. Como $x(\varepsilon, z^n, u(\cdot + \tau_0)) \to x^1$, segue que $x^1 \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau_0 + \varepsilon, \varphi)}$ e, consequentemente, que $\mathcal{R}_0(\tau_0 + \varepsilon, \varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau_0 + \varepsilon, \varphi)}$. Assim podemos afirmar que $\tau_0 + \varepsilon \in I$ e, como ε é independente de τ_0, podemos concluir que $\tau \in I$. Combinando a condição *(a)* com esta propriedade, concluímos que o sistema (2.30) é X-aproximadamente controlável em $[0, \tau]$, o que completa a prova. ■

Corolário 2.3.12. *Suponha que as seguintes condições são válidas.*

(a) O sistema de controle (2.32) é aproximadamente controlável em tempo finito;

(b) Para todo $t \geq 0$, $\mathcal{N}(t) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0, \tau]; X)$*;*

(c) $\nu_\xi(t) \to 0$ *quando* $t \to 0^+$ *uniformemente para* ξ *em intervalos limitados.*

Então, o sistema (2.30) é X*-aproximadamente controlável em tempo finito.*

Demonstração: Argumentando como na prova do Corolário 2.3.11, segue que $\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)}$ para todo $\tau > 0$ e $\varphi \in C$. Dessa forma,

$$\bigcup_{\tau > 0} \mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0)) \;\subseteq\; \bigcup_{\tau > 0} \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)} \;\subseteq\; \overline{\bigcup_{\tau > 0} \mathcal{R}_L(\tau, \varphi)}.$$

Usando agora que (2.32) é aproximadamente controlável, obtemos que $\bigcup_{\tau > 0} \mathcal{R}_L(\tau, \varphi)$ é denso em X para todo $\varphi \in C$. Em particular, para $\varphi = 0$ temos que $\bigcup_{\tau > 0} \mathcal{R}_L(\tau, 0)$ é denso em X. Isto prova que o sistema (2.30) é X-aproximadamente controlável em tempo finito. ■

Resultados similares para controlabilidade aproximada na origem podem ser estabelecidos usando essas mesmas ideias. Finalizamos esta seção com uma aplicação desses resultados.

Exemplo 2.3.13. Este exemplo se refere a uma classe de sistemas que satisfazem as condições consideradas previamente. O gerador infinitesimal A é dado por

$$Ax = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, z_n \rangle z_n,$$

onde $D(A) \subset X$, $-\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, são os autovalores distintos de A e $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X formada por autovetores de A correspondentes aos autovalores $-\lambda_n$. Suponha que a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e que $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. É bem conhecido que A é um operador auto-adjunto que gera um semigrupo analítico e compacto $(T(t))_{t\geq 0}$, o qual pode ser expresso por

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\langle z, z_n\rangle z_n, \quad z \in X.$$

Segue do anterior que $\|T(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}$ para todo $t \geq 0$. Para maiores detalhes, veja [23].

Sejam $U = \mathbb{R}$ e $B : U \to X$ definida por $Bu = bu$, onde $b \in X$ é um vetor tal que $\langle b, z_n\rangle \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam $X_n = Span\{z_1, \ldots, z_n\}$ e $\pi_n : X \to X_n$ a projeção ortogonal em X_n. Definamos ainda $B_n = \pi_n \circ B$ e $L_n(t) = \pi_n \circ L(t)$. Como X_n é invariante por A, podemos considerar o sistema

$$x'(t) = Ax(t) + B_n u(t), \quad t \geq 0, \tag{2.38}$$

com $x \in X_n$, o qual é a restrição do sistema (2.32) ao espaço X_n. É conhecido que o sistema (2.38) é exatamente controlável em $[0, \tau]$, para todo $\tau > 0$. Além disso, $L^2([0, \tau], X_n) = \mathcal{N}(\tau) + \mathcal{R}(\widehat{B_n})$. De fato, esta propriedade é equivalente a $\mathcal{R}(J_\tau) \subseteq \mathcal{R}(J_\tau \circ \widehat{B_n})$. Para mostrar esta inclusão, observe que $T(t)$ é auto-adjunto, $J^*x = T(\tau - \cdot)x$ e $B^*x = \langle x, b\rangle$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\|J_\tau^* x\|^2_{L^2([0,\tau];X)} &= \left\| T(\tau - \cdot)\sum_{i=1}^{n}\langle x, z_i\rangle z_i \right\|^2_{L^2([0,\tau];X)} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s)}\langle x, z_i\rangle z_i \right\|^2_{L^2([0,\tau];X)} \\
&= \int_0^\tau \left\| \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s)}\langle x, z_i\rangle z_i \right\|^2 ds \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_0^\tau e^{-2\lambda_i(\tau - s)} ds |\langle x, z_i\rangle|^2.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{B}^* J_\tau^* x\|^2_{L^2([0,\tau])} &= \left\| \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s)}\langle x, z_i\rangle\langle b, z_i\rangle z_i \right\|^2_{L^2([0,\tau])} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_0^\tau e^{-2\lambda_i(\tau - s)} ds |\langle x, z_i\rangle|^2 |\langle b, z_i\rangle|^2.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

De (2.39) e (2.40) podemos afirmar que existe $\beta > 0$ tal que $\|J_\tau^* x\|_{L^2([0,\tau];X)} \leq \beta\|\widehat{B}^* J_\tau^* x\|_{L^2([0,\tau])}$ para todo $x \in X_n$. A afirmação agora é consequência de [71, Teorema IV.2.2].

Podemos também considerar o sistema com retardo

$$x'(t) = Ax(t) + L_n(t)(x_t) + B_n u(t), \quad t \geq 0, \tag{2.41}$$

em X_n. Denotemos por $\nu_0^n = \|\Gamma_0\|$ a constante definida antes do Corolário 2.3.11 mas agora para o sistema (2.41). Denotemos por $\mathcal{R}_0(\tau, X_n)$, $\mathcal{R}_L(\tau, X_n)$ os conjuntos atingíveis com condição inicial zero dos sistemas (2.38) e (2.41), respectivamente. Podemos agora estabelecer o seguinte resultado.

Corolário 2.3.14. *Seja $\tau > 0$. Se $\nu_0^n(\tau) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e existem ε, $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\|L(t)\| \leq \varepsilon$ para $0 \leq t \leq \tau$, $\|B_n - B\| \leq \varepsilon_n$ e $\|L_n(t) - L(t)\| \leq \varepsilon_n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq t \leq \tau$, então o sistema (2.30) é X-aproximadamente controlável em $[0, \tau]$.*

Demonstração: É claro que o sistema (2.41) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3.9. Então, $X_n = \mathcal{R}_0(\tau, X_n) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau, X_n)}$. Como $\mathcal{R}_L(\tau, X_n)$ é subespaço vetorial de X_n, segue que $\mathcal{R}_L(\tau, X_n) = X_n$. Seja $\Phi_n : L^2([0, \tau]) \to X_n$ definida por $\Phi_n(u) = x(\tau, 0, u)$ (Φ_n é a aplicação solução correspondente a equação (2.41)). Como $\mathcal{R}(\Phi_n) = X_n$ podemos selecionar $\mu_n > 0$ tal que para $w_n \in X_n$ existe $u \in L^2([0, \tau])$ tal que $w_n = \Phi_n(u)$ e $\|u\|_{L^2([0,\tau])} \leq \mu_n \|w_n\|$.

Sejam agora $w \in X$, $w_n = \pi_n(w)$ e $u_n \in L^2([0, \tau])$ escolhidos como acima. Denotemos por $x^n(\cdot)$ e $y^n(\cdot)$ as soluções fracas com condição inicial zero e função de controle u_n das equações (2.41) e (2.30), respectivamente. É fácil de ver que existe uma constante $C_n > 0$ tal que $\|x^n(t)\| \leq C_n \|w\|$ para todo $w \in X$. Além disso, das expressões

$$\begin{aligned} x^n(t) &= \int_0^t T(t-s) L_n(s)(x_s^n) ds + \int_0^t T(t-s) B_n u_n(s) ds \\ y^n(t) &= \int_0^t T(t-s) L(s)(y_s^n) ds + \int_0^t T(t-s) B u_n(s) ds, \end{aligned}$$

segue que

$$\|y^n(t) - x^n(t)\| \leq \varepsilon M \int_0^t \|y_s^n - x_s^n\| ds + M\tau C_n \|w\| \varepsilon_n + M\tau^{\frac{1}{2}} \mu_n \|w\| \varepsilon_n.$$

Podemos assumir que $\mu_n \varepsilon_n \to 0$ e $C_n \varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Usando agora a Desigualdade de Gronwall concluímos que $\|y^n(t) - x^n(t)\| \to 0$ quando $n \to \infty$ uniformemente para $t \in [0, \tau]$. Em particular, $\|y^n(\tau) - x^n(\tau)\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $x^n(\tau) = w_n \to w$ quando $n \to \infty$, deduzimos que $w = \lim_{n \to \infty} y^n(\tau) \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau, 0)}$, o que completa a prova. ■

Estimemos agora $\nu_0^n(\tau)$ em um caso particular. Suponha que

$$L(t)\psi = A_1(t)\psi(-r),$$

onde $A_1 : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ é contínua. Definamos as funções $\widetilde{L} : L^2([0, \tau]; X) \to L^2([0, \tau]; X)$ e $\widetilde{L}_n : L^2([0, \tau]; X_n) \to L^2([0, \tau]; X_n)$ por

$$(\widetilde{L}x)(t) = \begin{cases} A_1(t)x(t-r), & t \geq r, \\ 0, & t < r, \end{cases}$$

$$(\widetilde{L}_n z)(t) = \begin{cases} A_1(t)z(t-r), & t \geq r, \\ 0, & t < r, \end{cases}$$

para $x \in L^2([0,\tau];X)$ e $z \in L^2([0,\tau];X_n)$. É fácil ver que o operador adjunto $\widetilde{L}^* : L^2([0,\tau];X) \to L^2([0,\tau];X)$ é dado por

$$(\widetilde{L}^* x)(t) \quad = \quad \begin{cases} A_1^*(t+r)x(t+r), & 0 \le t \le \tau - r, \\ 0, & t > \tau - r, \end{cases}$$

e que uma expressão similar vale para $\widetilde{L}_n^*$. Seja agora $C : X \to X$ o operador definido por $Cx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, z_i \rangle \langle b, z_i \rangle z_i$. É claro que C é auto-adjunto. Consideremos agora a seguinte hipótese:

Hipótese: $\mathcal{R}(A_1(t)) \subseteq \mathcal{R}(C)$.

Segue desta hipótese e de [71, Teorema IV.2.2], que existe $\rho > 0$ tal que $\|A_1^*(t)x\| \le \rho(t)\|C^* x\|$ para $x \in X$.

Sejam J^n, J_τ^n e P_τ^n as funções J, J_τ e P_τ correspondentes a equação (2.38). Aplicando a decomposição $\widetilde{L}_n z = P_\tau^n \widetilde{L}_n z + B_n u$ para $z \in L^2([0,\tau];X_n)$ obtemos que $\mathcal{R}(J_\tau^n \widetilde{L}_n) \subseteq \mathcal{R}(J_\tau^n B_n)$. Mais ainda, usando novamente [71, Teorema IV.2.2] garantimos que se existe $\beta > 0$ tal que

$$\|\widetilde{L}_n^* (J_\tau^n)^* x\|_{L^2([0,\tau];X_n)} \le \beta \|B_n^* (J_\tau^n)^* x\|_{L^2([0,\tau];X_n)},$$

então podemos escolher $u(\cdot) \in L^2([0,\tau])$ com $\|u\|_{L^2([0,\tau])} \le \beta \|z\|_{L^2([0,\tau];X_n)}$. Procedendo como acima obtemos (2.39) e usando (2.40) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\widetilde{L_n}}^* (J_\tau^n)^* x\|^2_{L^2([0,\tau];X_n)} &= \left\| \widetilde{\widetilde{L_n}}^* T(\tau - s) \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \right\|^2_{L^2([0,\tau];X)} \\
&= \left\| \widetilde{\widetilde{L_n}}^* \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s)} \langle x, z_i \rangle z_i \right\|^2_{L^2([0,\tau];X)} \\
&= \int_0^{\tau - r} \left\| \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s - r)} \langle x, z_i \rangle A_1^*(s+r) z_i \right\|^2 ds \\
&= \int_0^{\tau - r} \left\| A_1^*(s+r) [\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s - r)} \langle x, z_i \rangle z_i] \right\|^2 ds \\
&\le \int_0^{\tau - r} \rho(s+r)^2 \left\| C^* [\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s - r)} \langle x, z_i \rangle z_i] \right\|^2 ds \\
&\le \int_0^{\tau - r} \rho(s+r)^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(\tau - s - r)} \langle x, z_i \rangle \langle b, z_i \rangle z_i \right\|^2 ds \\
&\le \int_0^{\tau} \rho(s)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} e^{-2\lambda_i(\tau - s)} |\langle x, z_i \rangle|^2 \, |\langle b, z_i \rangle z_i|^2 \right) ds \\
&\le \sup_{0 \le s \le \tau} \rho(s)^2 \, \|\widehat{B}^* (J_\tau^n)^* x\|^2_{L^2([0,\tau])}.
\end{aligned}$$

Do que foi feito anteriormente concluímos que

$$\|J^n P_\tau^n \widetilde{L}_n z\| \;=\; \|J^n B_n u - J^n \widetilde{L}_n z\| \;\leq\; k\tau \|z\|_{L^2([0,\tau],X_n)},$$

para alguma constante $k > 0$. Isso implica que $\nu_0^n(\tau) \leq k\tau$ independente de $n \in \mathbb{N}$.

Uma situação particular do exemplo anterior aparece em sistemas de controle associados a equação da distribuição de calor em uma barra de metal. Trataremos deste caso no próximo exemplo.

Exemplo 2.3.15. *Controle da equação do calor.*

Neste exemplo, estudamos a distribuição de temperatura em uma barra de metal de comprimento π. Assumiremos que as extremidades da barra permaneçam com a mesma temperatura e que a barra é aquecida por uma fonte de calor com retardo r. Este problema pode ser descrito pelas equações

$$\frac{\partial w(t,\xi)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,\xi)}{\partial \xi^2} + \int_0^\pi a(t,\xi,\eta) w(t-r,\eta)d\eta + b(\xi)u(t), \quad (t,\xi) \in (0,\infty)\times(0,\pi), \tag{2.42}$$

$$w(t,0) \;=\; w(t,\pi) \;=\; 0, \;\; t \geq 0, \tag{2.43}$$

$$w(\theta,\xi) \;=\; \varphi(\theta,\xi), \;\; -r \leq \theta \leq 0, \; 0 \leq \xi \leq \pi. \tag{2.44}$$

Para modelar esse sistema na forma abstrata (2.30), escolhemos $X = L^2([0,\pi])$ e $A : D(A) \subset X \to X$ o operador $Ax = x''$ definido sobre $D(A) = \{z \in X : z'' \in X, z(0) = z(\pi) = 0\}$. É conhecido ([15, 33]) que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Mais ainda, o espectro de A está formado por elementos da forma $-n^2$ com autovetores correspondentes $z_n = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \sin(nt)$. O conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal para X e para todo $t \geq 0$ e $z \in X$, $T(t)z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle z, z_n\rangle z_n$. É fácil ver desta representação que $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto, analítico e que $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ para todo $t \geq 0$.

Assuma que $b(\cdot) \in X$, que $\varphi \in C([-r,0];X)$, onde $\varphi(\theta,\xi) = \varphi(\theta)(\xi)$ e que a função $a : [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) a função $t \mapsto a(t,\xi,\eta)$ é contínua para quase-todo (ξ,η) e a função $(\xi,\eta) \mapsto a(t,\xi,\eta)$ é mensurável para cada t;
(ii) existe uma função mensurável e positiva $\beta \in L^2([0,\pi]^2)$ tal que $|a(t,\xi,\eta)| \leq \beta(\xi,\eta)$ para todo $t \geq 0$. Seja

$$L_0 = \sup_{t\geq 0} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi a(t,\xi,\eta)^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $A_1(t) : X \to X$ dado por

$$A_1(t)z(\xi) = \int_0^\pi a(t,\xi,\eta) z(\eta) d\eta.$$

É fácil ver que $A_1(t)$ é linear e limitado e que $A_1(\cdot) \in C([0,\infty);\mathcal{L}(X))$. Para $t \geq 0$ definimos $L(t) : C([-r,0];X) \to X$ por $L(t)(\psi) = A_1(t)\psi(-r)$. Das propriedades de A_1 é fácil ver que $L \in C([0,\infty);\mathcal{L}(C([-r,0];X);X))$ e que $\|L(t)\| \leq L_0$ para todo $t \geq 0$.

Como espaço de controle usamos $U = \mathbb{R}$ e $B : U \to X$ será o operador definido por $Bu = b(\cdot)u$. É fácil ver que B é um operador linear limitado com $\|B\| \leq \|b(\cdot)\|_{L^2([0,\pi])}$.

Nas condições anteriores, o problema (2.42)-(2.44) pode ser modelado na forma abstrata (2.30)-(2.31). Como consequência de nossos resultados abstratos, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.3.16. *Seja $\tau > 0$. Suponha que $\langle b, z_n\rangle \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que $a(t,\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t,\eta)z_n(\xi)$ com $a_n(t,\eta) \in \mathbb{R}$, e que as seguintes condições são verificadas:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t,\eta)^2 < \infty$ *para todo* $t \in [0,\tau]$ *e* $\eta \in [0,\pi]$*;*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a_n(t,\cdot)\|^2_{L^2([0,\pi])}}{|\langle b, z_n\rangle|^2} < \infty$*;*

(c) $\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i(t,\eta)|^2 < \varepsilon_n^2$ *para* $n \in \mathbb{N}$*;*

(d) $\|B_n - B\| \leq \varepsilon_n$*,*

para algum $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Então, o sistema (2.42)-(2.44) é X-aproximadamente controlável em tempo finito.

Demonstração: A afirmação é consequência direta do Exemplo 2.3.13. A maioria das condições necessárias para usar o Corolário 2.3.14 são imediatas. De *(c)* é claro que, para $n = 0$, $\|L(t)\| \leq \pi^{\frac{1}{2}}\varepsilon_0$. Para estimar $\|L_n(t) - L(t)\|$, note que

$$(L(t) - L_n(t))\psi \;=\; A_1(t)\psi(-r) - \pi_n A_1(t)\psi(-r) \;=\; \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_0^{\pi} a_i(t,\eta)\psi(-r,\eta)d\eta z_i(\xi).$$

Logo, aplicando a condição *(c)*,

$$\|(L(t) - L_n(t))\psi\|^2_{L^2([0,\pi])} \;\leq\; \pi\varepsilon_n^2 \int_0^{\pi} \psi(-r,\eta)^2 d\eta.$$

Resta mostrar que $\mathcal{R}(A_1(t)) \subseteq \mathcal{R}(C)$. Para $z \in L^2([0,\pi])$, defina a função

$$w(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle a_n(t,\cdot), z(\cdot)\rangle}{\langle b, z_n\rangle} z_n(\eta).$$

É imediato que $A_1(t)z = Cw$. Então, para ε_0 suficientemente pequeno, temos que $\nu_0^n(\tau) < 1$. ■

É importante ressaltar que a condição

$$L^2([0,\tau],X) = \mathcal{N}(\tau) + \mathcal{R}(\widehat{B}), \tag{2.45}$$

que é usada em vários trabalhos, veja como exemplo [48], não é válida em nosso caso. De fato, se assumirmos que (2.45) é válida, então $\mathcal{R}(J_\tau) \subseteq \mathcal{R}(J_\tau \circ \widehat{B})$, o que implica que existe $\beta > 0$ tal que $\|J_\tau^* x\|_{L^2([0,\tau];X)} \leq \beta \|\widehat{B}^* J_\tau^* x\|_{L^2([0,\tau];X)}$ para todo $x \in X$. Logo, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é auto-adjunto, para $x = z_n$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\|J_\tau^* z_n\|^2_{L^2([0,\tau];X)} &= \|T(\tau - \cdot) z_n\|^2_{L^2([0,\tau];X)} \\
&= \int_0^\tau \|e^{-n^2(\tau - s)} z_n\|^2 ds \\
&= \int_0^\tau e^{-2n^2(\tau - s)} ds \\
&\leq \beta^2 \int_0^\tau |\widehat{B}^* T(\tau - s) z_n|^2 ds \\
&= \beta^2 \int_0^\tau |e^{-n^2(\tau - s)} \langle b, z_n \rangle|^2 ds \\
&= \beta^2 \int_0^\tau e^{-n^2(\tau - s)} ds |\langle b, z_n \rangle|^2,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição pois $\langle b, z_n \rangle \to 0$ quando $n \to \infty$.

2.4 Aplicações

Para finalizar esta capítulo, estudaremo estabilização do sistema de controle

$$x'(t) = Ax(t) + A_1(t) x(t - r) + Bu(t), \quad t \geq 0, \tag{2.46}$$

onde $x(t) \in X$, $u(t) \in \mathbb{C}^m$, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo compacto de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ em X, $A_1 \in C([0, \infty); \mathcal{L}(X))$ é ω-periódico e $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m; X)$.

Para aplicar o Teorema 2.2.5, precisamos garantir que o sistema (2.46) é aproximadamente controlável na origem, no sentido da Definição 2.2.3. Porém, os resultados estabelecidos na Seção 2.3 nos permitem somente concluir a controlabilidade X-aproximada de (2.46). É claro que todo sistema aproximadamente controlável é também X-aproximadamente controlável. De forma similar ao que é válido para sistemas de dimensão finita ([44]), o próximo resultado estabelece um caso onde a propriedade inversa também é válida.

Corolário 2.4.1. *Suponha que $B : \mathbb{C}^m \to X$ tem uma inversa à esquerda contínua. Se o sistema (2.46) é X-aproximadamente controlável na origem, então o sistema é aproximadamente controlável na origem.*

Demonstração: Seja $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $0 \leq t \leq \omega$. Pela Definição 2.3.5, para $\varepsilon > 0$, existe $\tau > 0$ e uma função $u \in L^2([0,\tau];\mathbb{C}^m)$ tal que $\|x(\tau,\varphi,u)\| \leq \varepsilon$. Para $\tau \leq t \leq \tau + r$, existe uma função $u \in C([\tau,\tau+r];\mathbb{C}^m)$ tal que

$$A_1(t)x(t-r,\varphi,u) + Bu(t) \;=\; 0.$$

Consequentemente, o sistema (2.46) é reduzido a equação homogênea

$$z'(t) = Az(t), \quad \text{para } \tau \leq t \leq \tau + r, \tag{2.47}$$

$$z(\tau) = x(\tau,\varphi,u). \tag{2.48}$$

A solução fraca de (2.47) é $x(t) = T(t-\tau)x(\tau)$ de modo que $\|x(t)\| \leq M\varepsilon$ para todo $t \in [\tau,\tau+r]$. Mais ainda, como

$$\|x_{\tau+r}\| \quad = \quad \sup\{\|x_{\tau+r}(\theta)\| : \theta \in [-r,0]\} \quad \leq \quad M\varepsilon,$$

podemos concluir que o sistema (2.46) é aproximadamente controlável. ■

A seguinte propriedade é uma consequência imediata do Teorema 2.2.5 e do Corolário 2.4.1.

Corolário 2.4.2. *Suponha que $B : \mathbb{C}^m \to X$ possui inversa contínua à esquerda. Se o sistema (2.46) é X-aproximadamente controlável na origem, então ele é estabilizável.*

Podemos aplicar este resultado no estudo do Exemplo 2.3.15. Em adição as condições consideradas no Exemplo 2.3.15, suponha que a função $t \mapsto a(t,\xi,\eta)$ é ω-periódica. Isto implica que o operador $A_1(\cdot)$ também é ω-periódico. Agora, dos Corolários 2.4.2 e 2.3.16 podemos estabelecer o seguinte resultado de estabilização.

Corolário 2.4.3. *Suponha que as condições consideradas no Exemplo 2.3.15 são verificadas e que $a(\cdot,\xi,\eta)$ é ω-periódica. Então o sistema de controle (2.42)-(2.44) é estabilizável.*

Referências Bibliográficas

[1] BACCIOTTI, A.; MAZZI, L. *Floquet theory and stabilization of periodic solutions*. Rev. Roumaine Math. Pures et Appliquées. V. 39, n. 4, p. 285-293. 1994.

[2] BALACHANDRAN, K.; DAUER, J. P. *Controllability of nonlinear evolution delay integrodifferential systems*. Applied Mathematics and Computation. V. 139, p. 63-84. 2003.

[3] BALACHANDRAN, K.; SAKTHIVEL, R. *Controllability of functional semilinear integrodifferential systems in Banach spaces*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. V. 255, p. 447-457. 2001.

[4] BALASUBRAMANIAM, P.; DAUER, J. P.; LOGANATHAN, C. *Local controllability of functional integrodifferential equations in Banach space*. Journal of Optimization Theory and Applications. V. 114, n. 2, p. 273-286. 2002.

[5] BENSOUSSAN, A.; PRATO, G.; DELFOUR, M. C.; MITTER, S. K. *Representation and control of infinite dimensional systems, I, II*. Boston: Birkhäuser, 1993.

[6] BHAT, K. P. M.; KOIVO, H. N. *An observer theory for time-delay systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 21, p. 266-269. 1976.

[7] BITTANTI, S.; BOLZERN, P. *Stabilizability and detectability of linear periodic systems*. Systems and Control Letters. V. 6, p. 141-145. 1985.

[8] BITTANTI, S.; BOLZERN, P.; COLANERI, P.; GUARDABASSI, G. *Comments on "Controllability, stabilizability and matrix Riccati equations for periodic systems" and on "On solution of periodic Riccati equations"*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 32, n. 3, p. 270-271. 1987.

[9] BRÉZIS, H. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

[10] BRIERLEY, S. D.; CHIASSON, J. N.; LEE, E. B.; ZAK, S. H. *On stability independent of delay for linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 27, n. 1, p. 252-254. 1982.

[11] BRUNOVSKY, P. *Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems*. Journal of Differential Equations. N. 6, p. 296-313. 1969.

[12] CHEN, B-S.; WANG, S-S.; LU, H-C. *Stabilization of time-delay systems containing saturating actuators*. International Journal of Control. V. 47, n. 3, p. 867-881. 1988.

[13] CHEN, M-S.; CHEN, Y-Z. *Static output feedbach control for periodically time-varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 44, n. 1, p. 218-222. 1999.

[14] CURTAIN, R. F.; PRITCHARD, A. J. *Infinite dimensional linear systems theory*. Lectures Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

[15] CURTAIN, R.F.; ZWART, H. J. *An introduction to infinite dimentional linear systems theory*. New York: Springer-Verlag, 1995.

[16] DATKO, R. *Remarks concerning the asymptotic stability and stabilization of linear delay differential equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. V.111, p. 571-584. 1985.

[17] DAUER, J. P.; MAHMUDOV, N. I. *Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert sapaces*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. V. 273, p. 310-327. 2002.

[18] DELFOUR, M. C.; MITTER, S. K. *Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems*. SIAM Journal on Control and Optimization. V. 10, n. 2, p. 298-328. 1972.

[19] DRAGAN, V.; HALANAY, A. *Stabilization of linear systems*. Boston: Birkhäuser, 1999.

[20] EMRE, E. *Regulation of linear systems over rings by dynamic output feedback*. Systems and Control Letters. V. 3, p. 57-62. 1983.

[21] EMRE, E.; KHARGONEKAR, P. P. *Regulation of split linear systems over rings: coefficient-assignment and observers*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 27, n. 1, p. 104-113. 1982.

[22] EMRE, E.; KNOWLES, G. J. *Control of linear systems with fixed noncommensurate point delays*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 29, n. 12, p. 1083-1090. 1984.

[23] ENGEL, K. J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York: Springer-Verlag, 2000.

[24] FAIRMAN, F. W.; KUMAR, A. *Delayless observers for systems with delay*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 31, n. 3, p. 258-259. 1986.

[25] FIAGBEDZI, Y. A.; PEARSON, A. E. *Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 31, n. 9, p. 847-855. 1986.

[26] FU, X. L. *Controllability of non-densely defined functional differential systems in abstract spaces*. Applied Mathematics Letters. V. 19, n. 4, p. 369-377. 2006.

[27] HALANAY, A. *Differential equations*. New York: Academic Press, 1966.

[28] HALE, J.; VERDUN LUNEL, S. M. *Introduction to functional differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1993.

[29] HENRÍQUEZ, H. R. *Approximate controllability of linear distributed control systems*. Applied Mathematics Letters. To appear.

[30] HENRÍQUEZ, H. R. *On non exact controllable systems*. International Journal of Control. V. 42, n. 1, p. 71-83. 1985.

[31] HENRÍQUEZ, H. R. *Regulator problem for linear distributed control systems with delays in outputs*. Lecture Notes in Pure and Applied Math. V. 155, p. 259-273. 1994.

[32] HEWER, G. A.; NAZAROFF, G. J. *Observer theory for delayed differential equations*. Internatinal Journal of Control. V. 18, p. 1-7. 1973.

[33] HINRICHSEN, D.; PRITCHARD, A. J. *Mathematical systems theory I*. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[34] KABAMBA, P. T. *Monodromy eigenvalue assignment in linear periodic systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 31, n. 10, p. 950-952. 1986.

[35] KAMEN, E. W. *On the relationship between zero criteria for two-variable polynomials and asymptotic stability of delay differential equations*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 25, n. 5, p. 983-984. 1980.

[36] KAMEN, E. W. *Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 27, n. 2, p. 367-375. 1982.

[37] KAMEN, E. W. *Correction to: "Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay"*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 28, n. 2, p. 248-249. 1983.

[38] KAMEN, E. W.; KHARGONEKAR, P. P.; TANNENBAUM, A. *Stabilization of time-delay systems using finite-dimentional compensators*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 30, n. 1, p. 75-78. 1985.

[39] KAMEN, E. W.; KHARGONEKAR, P. P.; TANNENBAUM, A. *Proper stable Bezout factorization and feedback control of linear time-delay systems*. International Journal of Control. V. 43, n. 3, p. 837-857. 1986.

[40] KANO, H.; NISHIMURA, T. *Controllability, stabilizability and matrix Riccati equations for periodic systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 30, n. 11, p. 1129-1131. 1985.

[41] KLAMKA, J. *Observer for linear feedback control systems with distributed delays in controls and outputs*. Systems and Control Letters. V. 1, n. 5, p. 326-331. 1982.

[42] LEWIS, R. M.; ANDERSON, B. *Necessary and sufficient conditions for delay-independent stability of linear autonomous systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 25, n. 4, p. 735-739. 1980.

[43] LOUIS, J. C.; WEXLER, D. *On exact controllability in Hilbert spaces*. Journal of Differential equations. N. 49, n. 2, p. 258-269. 1983.

[44] MALEK-ZAVAREI, M.; JAMSHIDI, M. *Time-delay systems*. Amsterdam: North-Holland, 1987.

[45] MANITIUS, A. Z.; OLBROT, A. W. *Finite spectrum assignment problem for systems with delays*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 24, n. 4, p. 541-553. 1979.

[46] MARKUS, L. *Introduction to the theory of distributed control systems*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. V. 128, p. 1-60. 1991.

[47] MEMORY, M. C. *Stable and unstable manifolds for partial functional differential equations*. Nonlinear Analysis. V. 16, n. 2, p. 131-142. 1991.

[48] NAITO, K. *Controllability of semilinear control systems dominated by the linear part*. SIAM Journal on Control and Optimization. V. 25, n. 3, p. 715-722. 1987.

[49] OLBROAT, A. W. *Stabilizability, detectability and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 23, p. 887-890. 1978.

[50] O'REILLY, J. *Observers for linear systems*. London: Academic Press, 1983.

[51] PANDOLFI, L. *On feedback stabilization of functional differential equations*. Boll. Un. Mat. Ital. (4). V. 11, n. 3, p. 626-635. 1975.

[52] PANDOLFI, L. *Stabilization of neutral functional differential equations*. Journal of Optimization Theory and Applications. V. 20, n. 2, p. 191-204. 1976.

[53] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1983.

[54] PROKOPCZYK, A. C. *Teoria de semigrupos e aplicações à equações diferenciais funcionais com retardamento dependendo do estado*. Dissertação de mestrado, ICMC/USP. 2005.

[55] ROYDEN, H. *Real analysis*. New York: Macmillan, 1963.

[56] SALAMON, D. *Observers and duality between observation and state feedback for time delays systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 25, n. 6, p. 1187-1192. 1980.

[57] SCHUMACHER, J. M. *A direct approach to compensator desing for distributed parameter systems*. SIAM Journal on Control and Optimization. V. 21, n. 6, p. 823-836. 1983.

[58] SUKAVANAM, N. *Approximate controllability of semilinear control systems with growing non-linearity*. Lecture notes in Pure and Apllied Mathematics. V. 142, p. 353-357. 1993.

[59] TAYLOR, A. E. *Introduction to functional analysis*. New York: Wiley, 1958.

[60] TRAVIS, C. C.; WEBB, G. F. *Existence and stability for partial functional differential equations*. Transactions of the American Mathematical Society. V. 200, p. 395-418. 1974.

[61] TONKOV, E. L. *A criterion for the uniform controllability and stability of a linear recurrent systems*. Differentsial'nye Uravneniya. V. 15, n. 10, p. 1804-1813. 1979.

[62] WANG, L. W. *Approximate controllability of delayed semilinear control systems*. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. n. 1, p. 67-76. 2005.

[63] WANG, Q-G.; SUN, Y. X.; ZHOU, C. H. *Finite spectrum assignment for multivariable delay systems in the frequency domain*. International Journal of Control. V. 47, n. 3, p. 729-734. 1988.

[64] WATANABE, K. *Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays*. IEEE Transactions on Automatic Control. V. 31, n. 6, p. 543-550. 1986.

[65] WATANABE, K.; ITO, M. *An observer for linear feedback control laws of multivariable systems with multiple delays in control and outputs*. Systems and Control Letters. V. 1, n. 1, p. 54-59. 1981.

[66] WATANABE, K.; ITO, M.; KANEKO, M. *Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables*. International Journal of Control. V. 38, n. 5, p. 913-926, 1983.

[67] WATANABE, K.; ITO, M.; KANEKO, M. *Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in states and control*. International Journal of Control. V. 39, n. 5, p. 1073-1082. 1984.

[68] WATANABE, K.; OUCHI, T. *An observer of systems with delays in state variables*. International Journal of Control. V. 41, n. 1, p. 217-229. 1985.

[69] WONHAM, W. M. *Linear multivariable control: a geometric approach*. Berlin: Springer-Verlag, 1979.

[70] WU, J. *Theory and applications of partial functional differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1996.

[71] ZABCZYK, J. *Mathematical control theory: an introduction*. Boston: Birkhäuser, 1995.

[72] ZHOU, H. X. *Controllability properties of linear and semilinear abstract control systems*. SIAM Journal on Control and Optimization. V.22, n. 3, p. 405-422. 1984.

Índice Remissivo