Curvas em espaços homogêneos

VANDERLEI MARCOS DO NASCIMENTO

Orientador: PROF. DR. WASHINGTON LUIZ MARAR

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos

Junho de 1998

Agradecimentos

O prof. J.W.Bruce, da Universidade de Liverpool[1], sugeriu-me investigar o contato de curvas com órbitas por ação de subgrupos a um parâmetro dando ênfase ao papel da álgebra de Lie. Isso deu origem a este trabalho. Agradeço ao prof. Bruce pela sugestão.

Agradeço ao prof. Ton Marar pela confiança em meu trabalho e por todo apoio que isso trouxe, por ter falado e escutado sempre, e pelas críticas a primeira versão do texto.

Por gentileza sua, e com tamanha dedicação, o prof. Osamu Saeki, da Universidade de Hiroshima, tornou este trabalho realidade. Muito obrigado, Saeki.

Agradeço a profª. Maria del Carmen Romero pelo incentivo constante, ao prof. Luiz San Martin pelos comentários e sugestões, e a Célia Junko pelo auxílio na pesquisa bibliográfica.

Foi vital o apoio que sempre tive no Departamento de Matemática da UNESP-Rio Claro. Agradeço muito a todos de lá. Em especial, agradeço a profª Alice Libardi que até paciência em ensinar-me o Latex teve.

Durante todo o tempo de meus estudos, tive muita atenção dos professores e funcionários do ICMC-USP. Sou grato a todos; em especial, aos prof. Antonio Conde, Luiz Arraut e Maria Ruas, pelas várias sugestões, ao Ozíride Neto pelo apoio sempre e a Elisabeth Moretti pela prontidão sempre.

[1] Este trabalho teve apoio financeiro do CNPq, no programa de doutorado-sanduíche no exterior.

À

Valdemir Zaffalon

(in memoriam)

Resumo

Seja G/H um espaço homogêneo. Neste trabalho estudamos o contato entre órbitas por ação de subgrupos a um parâmetro de G e curvas em G/H. Como um resultado, desenvolvemos um método que permite determinar os elementos na álgebra de Lie de G que dão origem a uma órbita que está em contato de ordem k com uma dada curva em G/H, para k arbitrário. Também apresentamos algumas aplicações em questões de congruência.

Abstract

Let G/H be a homegeneous space. In this work we study the contact between orbits by one-parameter subgroups of G and curves in G/H. As a result we develop a method that allows one to find the elements in the Lie algebra of G that give rise to an orbit being in contact of any order with a given curve in G/H. Some applications to questions of congruence are also presented.

Índice

INTRODUÇÃO

A geometria de curvas em espaços euclidianos tem sido estudada com sucesso, usando teoria das Singularidades, particularmente no que diz respeito a invariantes por difeomorfismos do espaço ambiente. Uma das noções fundamentais que viabilizou esse sucesso é, com certeza, aquela de *contato* entre duas curvas, a ordem de contato sendo o mais básico invariante. A idéia por tras dessa noção, como é bem conhecido, é a de definir um modo de "comparar" duas curvas em pontos onde elas se tocam. Sendo assim, não devemos nos surpreender com o fato de que resultados interessantes surgem quando comparamos uma curva com outras curvas tomadas como modelos por suas características mais "simples". Assim, por exemplo, as retas e os círculos servem de modelos no caso de curvas planas.

[3] explora vários aspectos da geometria de curvas utilizando a noção de contato. No caso de curvas no plano euclidiano, a maioria desses aspectos emergem do estudo das singularidades das funções, assim chamadas, *altura* e *quadrado da distância*, restritas a uma dada curva; nesse caso essas singularidades medem o contato entre a dada curva e retas e círculos, respectivamente. Neste ponto, colocamos a seguinte questão: como poderíamos ampliar a classe de curvas-modelo? Noutras palavras, devemos dar significado ao termo *simples* que utilizamos acima. É esperado que isso traga novos entendimentos sobre a geometria das curvas. De fato, em [7] e [19], por exemplo, podemos ver vários resultados nesse sentido, obtidos pela inclusão das demais cônicas na classe das curvas-modelo. Vale observar que os resultados em [19] foram obtidos utilizando as, assim chamadas, *função altura afim* e *cubo da distância afim*, que são

generalizações das funções *altura* e *quadrado da distância*. Para nós, preocupados com a questão que pusemos, o mais importante agora é notar que, na verdade, tais generalizações têm como suporte outras generalizações já conhecidas. A saber, a geometria afim unimodular plana (Ver [10], por exemplo), contendo generalizações de conceitos da geometria euclidiana tais como *comprimento de arco*, *curvatura* e *referencial de Frenet*. Nessa geometria, as cônicas, com excessão das retas, são as curvas de *curvatura afim* constante. Tal como cada círculo e cada reta pode ser obtido pela ação, no plano, de um subgrupo a um parâmetro do grupo de movimentos euclidianos, cada cônica pode ser obtida pela ação de um subgrupo a um parâmetro do grupo $SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ (produto semi direto).

Com base nas discussões acima, vamos contentar-nos em entender por mais *simples*, curvas numa variedade diferenciável M, que sejam órbitas pela ação de subgrupos a um parâmetro de um grupo de Lie G agindo sobre M. Essas passam, portanto, a ser nossas curvas-modelo. Nossa tarefa, então, é dizer sobre o contato entre uma dada curva em M e as curvas-modelo. Claro, não devemos esperar poder dizer algo quando M ou G forem arbitrários. Contudo, se M é um espaço homogêneo, $M = G/H$, então bastante pode ser dito. Isso ocupará metade deste trabalho, e o resultado principal é o que chamamos de teorema da Estratificação. Trata-se da resposta para a seguinte pergunta: dada uma curva em G/H, dado um ponto p dessa curva e dado um inteiro $k \geq 1$, quais são os elementos na Álgebra de Lie de G que geram um subgrupo a um parâmetro cuja órbita passando por p está em contato de ordem k com a curva dada? Observamos que, portanto, esse resultado pode ser considerado como uma generalização dos resultados fornecidos pelas funções altura e quadrado da distância. Nesse sentido ele as unifica. Quanto ao método que desenvolvemos para obter isso, queremos destacar o seguinte: na verdade, não se faz necessário determinar os subgrupos a um parâmetro de G, uma vez conheçamos um levantamento (qualquer) da curva a G; de posse de um tal levantamento, o resultado final pode ser obtido utilizando apenas Álgebra Linear elementar. Uma boa razão, talvez, para acreditarmos no método em sua generalidade, seja o teorema da Estabilização, cujo resultado, foi-nos uma boa surpresa. Diz que se o conjunto de curvas-modelo que estão em contato de ordem k com uma dada curva, coincide com aquele das que estão em contato de ordem $k+1$, então ou não existe curva-modelo estando em contato de ordem $k+2$ ou, se existir, o conjunto delas coincide com os anteriores. Como consequência desse resultado, pudemos dar uma interpretação geométrica de certas condições de regularidade exigidas no método de Cartan ([4]), diferente da interpretação tradicional em termos da não existência de *referenciais canônicos*.

Os exemplos que apresentamos, ainda que simples, mostram que o método é trabalhoso mas permite que reconheçamos pontos singulares da curva a partir de desvios de certo padrão da estratificação. Contudo, essa observação ainda está restrita aos exemplos, uma vez que até o momento não fomos capazes de discutir questões de genericidade, que justificassem o termo *padrão*.

Passaremos agora a introduzir a segunda parte do trabalho. Dadas duas subvariedades, X e Y, de G/H, a questão *congruência* é poder decidir sobre a existência de movimento de G/H, por um elemento de G, que leva X em Y. É uma questão clássica em geometria, remontando a Frenet, e foi longamente explorada por Cartan com seu método do Referencial Móvel. A literatura disponível sobre o assunto é vastíssima, provavelmente devido a dois fatos principais: o primeiro seria que não existe um método propriamente dito, e talvez pudéssemos dizer *dicas de Cartan* no lugar da estabelecida denominação *método de Cartan*; o segundo fato seria o da grande força dos resultados que se obtem quando se consegue por em prática tais dicas. Uma referência bastante interessante, contendo um panorama geral, é [9]. É curioso observar que, contudo, na situação em que X e Y são unidimensionais há menos literatura disponível. Para que possamos situar-nos melhor, é necessário não tardar em comentar o aspecto de congruência de aplicações versus congruência de subvariedades, comumente conhecidos como problemas de equivalência *parametrizada* e *não parametrizada*, respectivamente. Denotemos por l_g a translação em G/H definida por $g \in G$. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\alpha, \beta : I \longrightarrow G/H$ são duas imersões, então diz-se que α e β são congruentes se existe $g \in G$ tal que $(l_g \circ \alpha)(t) = \beta(t)$, para todo $t \in I$. Esse é, na verdade, o problema discutido em [9]. Ver também [1] e [17] para congruência parametrizada e [16], [12] e [2] para congruência não parametrizada. Parece inevitável termos que considerar os dois problemas quando, em termos práticos, pensamos em variedades como sendo descritas por parametrizações locais. Em [18], Weyl chama atenção para como esses dois problemas foram tratados por CARTAN. Basicamente, no caso de curvas, os dois problemas são unificados quando se introduz uma parametrização "canônica". Em [12] encontramos outras discussões sobre esses dois problemas de congruência.

Claro, estamos longe de poder entender todas as sutilezas do assunto, mesmo na situação unidimensional que é a que consideramos neste trabalho. Contudo, acreditamos que nossa discussão sobre o assunto põe sobre ele alguma luz. A pergunta que nos guiou foi a seguinte: até que ponto o conhecimento do contato entre curvas e órbitas de subgrupos a um parâmetro fornece informações sobre congruência? Bem, agora necessitamos dizer a qual dos dois tipos de congruência estamos nos referindo. Trata-se de congruência não parametrizada. No entanto, estaremos sempre considerando questões locais e as subvariedades serão pensadas como imagens de mergulhos. A possibilidade de tratar o problema não parametrizado mesmo considerando essas parametrizações locais, vem da definição de contato entre dois mergulhos, que tomamos. De fato, ela impõe condições não sobre os k-jatos desses mergulhos mas, sim, de possíveis reparametrizações deles. Ou seja, estamos considerando os *elementos de contato* (no sentido de Ehresmann, [6]) de ordem k e dimensão 1, definidos pela imagem de dado mergulho. Dito desse modo, os *subespaços associados* (Definição 2.2) que criamos, os quais ao final levam ao teorema da estratificação, são modelos na Álgebra de Lie, para os elementos de contato definidos por órbitas de subgrupos a um parâmetro. A ação de G sobre G/H induz uma ação natural de G sobre a variedade $E_k(G/H)$ dos elementos de contato sobre G/H de ordem k e dimensão 1. Restrita aos modelos na Álgebra de Lie, essa ação corresponde à ação adjunta de G sobre sua Álgebra de Lie. Dizemos que uma subvariedade unidimensional X de G/H é k-comparável, se X define mesmos elementos de contato de ordem k e dimensão 1 que uma família (indexada por X) de órbitas. A idéia agora é olhar para a situação quando tal família é únicamente determinada, para algum k; é a situação ideal. Isso cria um objeto a ser associado a cada subvariedade X, que nos aprouve chamar de *evoluta de Lie* de X (Definição 3.2). Que o objeto assim criado tem características desejadas para ser utilizado em questões de congruência, isso está revelado no Teorema 3.9. Finalmente, devemos observar que, na prática, quando queremos indexar por X a família a que nos referimos, surge novamente a questão de uma parametrização dada a X. Na situação ideal, essa questão é resolvida pela introdução de uma parametrização "canônica", tendo assim uma analogia com o método de Cartan.

Capítulo 1

Conceitos fundamentais e notação

Os conceitos e resultados que compõem este capítulo estão, desde há muito, bem estabelecidos, de modo que quase sempre vamos limitar-nos a enunciá-los e fornecer uma bibliografia. Assim, o objetivo é mesmo fixar linguagem e notação.

Entenderemos por *diferenciável*, classe de diferenciabilidade infinita. Consideraremos apenas variedades diferenciáveis reais, de dimensão finita. Se M e N são variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então escreveremos $D_xF : T_xM \to T_{F(x)}N$ a derivada de F em $x \in M$. Na maioria das vezes, confiantes de que isso não trará confusão, abusaremos da notação e escreveremos $D_xF\mathrm{v}$ no lugar de $D_xF(\mathrm{v})$, para a derivada de F no ponto x avaliada em $\mathrm{v} \in T_xM$. No caso particular em que M é um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, diremos que F é uma *curva* em N. Nesse caso, identificaremos T_xI com $\mathbb{R}$ para cada $x \in I$, do modo usual, e escreveremos simplesmente $F'(x)$ para a derivada de F em $x \in I$. No caso mais particular ainda em que N é um espaço vetorial V, identificaremos os fibrados tangentes de V de ordem mais alta com o próprio V, também do modo usual, e escreveremos $F^{(n)}(x)$ a n-ésima derivada de F em $x \in I$.

1.1 Generalidades sobre grupos de Lie

Quando K denotar um grupo de Lie, a álgebra de Lie dos campos de vetores sobre K, invariantes à esquerda, será denotada por $\mathcal{K}$, a letra caligráfica correspondente. Além disso, $\mathcal{K}$ será identificada de modo usual com o espaço tangente a K em seu elemento identidade e.

Por todo o trabalho, G denotará um grupo de Lie. Os difeomorfismos

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ k &\mapsto gk \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} R_g : G &\to G \\ k &\mapsto kg \end{aligned}$$

são denominados as *translações à direita* e *à esquerda* em G, por g, respectivamente.

Para $g \in G$, a aplicação

$$\begin{aligned} I(g) : G &\to G \\ k &\mapsto gkg^{-1} \end{aligned}$$

é um isomorfismo analítico de G sobre si mesmo. Notemos, $I(g) = L_g \circ R_g^{-1}$.

Teorema 1.1 *Para cada $g \in G$,* $\mathrm{Ad}(g) = D_e(I(g))$ *é um automorfismo de álgebras de Lie.* ([11], Lema 1.12, p.110)

Portanto, para cada $g \in G$, $\mathrm{Ad}(g)$ é um elemento do grupo (de Lie), $\mathrm{GL}(\mathcal{G})$ dos automorfismos (de álgebras de Lie) de $\mathcal{G}$.

Definição 1.1 O homomorfismo (de grupos de Lie)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}: G &\rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{G}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}(g) \end{aligned}$$

é chamado a *representação adjunta* de G.

Lembramos que estaremos abusando da notação, escrevendo $\mathrm{Ad}(g)\mathrm{v} = D_e(I(g))\mathrm{v}$, para $\mathrm{v} \in \mathcal{G}$, no lugar de $\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{v})$; também de acordo com nossa convenção acima, a álgebra de Lie de $GL(\mathcal{G})$, isto é o espaço vetorial de todos os endomorfismos de $\mathcal{G}$ munido da operação colchete, deve ser denotada por $\mathcal{GL}(\mathcal{G})$.

Dado $\mathbf{X} \in \mathcal{G}$, consideremos $\mathrm{ad}(\mathbf{X}) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, definida por $\mathrm{ad}(\mathbf{X})(\mathbf{Y}) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, o colchete de Lie dos campos de vetores $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$. Então, para cada $\mathbf{X} \in \mathcal{G}$ temos o endomorfismo $\mathrm{ad}(\mathbf{X})$ de $\mathcal{G}$.

Definição 1.2 O homomorfismo (de álgebras de Lie),

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}: \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{G}) \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathrm{ad}(\mathbf{X}), \end{aligned}$$

é chamado a *representação adjunta de* $\mathcal{G}$.

Seja $\exp : T_eG = \mathcal{G} \rightarrow G$ a aplicação exponencial do grupo de Lie G e, para cada $\mathrm{v} \in \mathcal{G}$, consideremos o subgrupo a um parâmetro de G, gerado por v, isto é, consideremos

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{v}} : \ \mathbb{R} &\to G \\ s &\mapsto exp(s\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Dada uma ação diferenciável de G sobre uma variedade diferenciável M, $\Phi : G \times M \to M$, podemos definir naturalmente a $\mathbb{R}$-ação

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times M &\to M \\ (s, x) &\mapsto \Phi\left(\exp(s\mathbf{v}), x\right), \end{aligned}$$

simplesmente restringindo a ação Φ, de G a seu subgrupo $\{\exp(s\mathbf{v}), s \in \mathbb{R}\}$. Assim, fixado $x \in M$, a órbita de x por essa ação ϕ tem uma parametrização natural:

$$\beta_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \to M, \quad \beta_{\mathbf{v}}(s) = \phi(s, x).$$

Definição 1.3 A curva $\beta_{\mathbf{v}}$ justo descrita, será chamada a *trajetória* passando por x, determinada por $\mathbf{v}$.

Seja $H \subset G$ um subgrupo. Denotemos por G/H o conjunto das classes laterais, à esquerda, de H em G. Denotando a classe de $g \in G$ por gH, temos a ação natural, à esquerda, de G sobre G/H

$$\begin{aligned} \Phi : G \times G/H &\to G/H \\ (\overline{g}, gH) &\mapsto (\overline{g}g)H\,. \end{aligned}$$

Mantendo essa notação, temos:

Teorema 1.2 *Se H é fechado em G e a G/H é dada a topologia quociente, então existe uma única estrutura de variedade analítica em G/H tal que Φ é uma ação diferenciável. Também,* $\dim G/H = \dim G - \dim H$. ([11], Teorema 4.2, p.123).

A existência de um a ação transitiva de um grupo de Lie sobre G/H já habilitaria dizer que G/H é uma variedade *homogênea*. Quando se deseja deixar claro que se está considerando exatamente ação Φ, diz-se que G/H é um *espaço homogêneo*.

Teorema 1.3 *Seja G/H um espaço homogêneo. A projeção canônica $\pi : G \to G/H$, é a projeção de um fibrado principal de grupo estrutural H.* ([13], p.117).

Dada uma ação diferenciável (ação, para ser breve) de um grupo de Lie G sobre uma variedade diferenciável M, $\Psi : G \times M \to M$, muitas vezes escreveremos $\Psi(g, x) = g \cdot x$. O subgrupo de *isotropia* de G em $x \in M$, será denotado G_x. Ou seja, $G_x = \{g \in G;\, g \cdot x = x\}$. Notando que G_x é um subgrupo fechado de G, podemos considerar em G/G_x a estrutura de variedade obtida no Teorema 1.2.

Teorema 1.4 *Se $G \times M \to M$ é uma ação transitiva, então, uma vez escolhido $x \in M$, podemos identificar M com G/G_x no sentido seguinte: a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \to & M \\ gG_x & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

é um difeomorfismo G-equivariante. ([15], Teorema 3.3, p.18).

Os espaços homogêneos, em muitos casos, como serão os dos nossos exemplos, surgem via a identificação dada nesse último teorema. Reforçamos, contudo, que a identificação não é canônica, devido a escolha do ponto x.

1.2 Congruência

Definição 1.4 i) Sejam S_1, S_2 subconjuntos de G/H. Dizemos que S_1, S_2 são *congruentes*, se existe $g \in G$ tal que $S_2 = g \cdot S_1$.

ii) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e sejam $\alpha, \gamma : I \to G/H$ duas curvas. Dizemos que α, γ são *congruentes*, se existe $g \in G$ tal que $\gamma = g \cdot \alpha$, isto é, $\gamma(t) = g \cdot \alpha(t)$, para todo $t \in I$.

Observação 1.5 É fácil verificar que congruência é uma relação de equivalência nos respectivos conjuntos. Assim, por exemplo, também diremos γ é congruente a α, para dizer que γ e α são congruentes.

Podemos pensar no próprio grupo G como sendo o espaço homogêneo G/H, com $H = \{e\}$, onde $e \in G$ é o elemento identidade. Com isso em mente, temos:

Teorema 1.6 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e sejam $f, \overline{f} : I \to G$, curvas no grupo de Lie G. Então $\overline{f}$ e f são congruentes se, e somente se,*

$$D_{\overline{f}(t)} L_{\overline{f}(t)^{-1}} \overline{f}'(t) = D_{f(t)} L_{f(t)^{-1}} f'(t)$$

para todo $t \in I$. ([9])

Corolário 1.7 *Duas curvas $\alpha, \gamma : I \to G/H$ são congruentes se, e somente se, algum levantamento de α a G é congruente a algum levantamento de β a G.*

Observação 1.8 Se $f : I \to G$ é um levantamento a G de $\alpha : I \to G/H$, então gf é um levantamento a G de uma curva congruente a α, a saber, $g \cdot \alpha$. Portanto, segue-se do corolário acima que a curva

$$D_f L_{f^{-1}} f' : I \to \mathcal{G}$$

pode ser associada à classe de todas as curvas congruentes a α. Noutras palavras, pelos menos em teoria, é sempre possível obtermos condição necessária para congruência. Dissemos *teoria*, porque dependendo do levantamento, tal condição pode não trazer informação interessante; ver [9] para uma discussão sobre isso.

Teorema 1.9 *Seja $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de um grupo de Lie G e seja $\mathrm{v} : I \to \mathcal{G}$ uma curva. Fi–xados $t_o \in I$ e $g_o \in G$, existe uma única curva $l(t)$ $(resp. r(t))$ em G, tal que $l(t_o) = g_o$ $(resp. r(t_o) = g_o)$ e $D_l L_{l^{-1}} l' = \mathrm{v}$ $(resp. D_r R_{r^{-1}} r' = \mathrm{v})$.* ([14], p.29).

1.3 Contato

Definição 1.5 Seja M uma variedade diferenciável. Sejam $\alpha : I_1 \to M$ e $\beta : I_2 \to M$ mergulhos, onde $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos. Sejam $t_o \in I_1$ e $s_o \in I_2$ tais que $\alpha(t_o) = \beta(s_o)$. Dizemos que *α e β estão em contato de ordem k* $(k = 1, 2, \ldots)$, *em $\alpha(t_o) = \beta(s_o)$*, quando vale o seguinte: existe um difeomorfismo local $\varphi : I_1, t_o \to I_2, s_o$ tal que α e $\beta \circ \varphi$ definem o mesmo k-jato em $t = t_o$ $(j^k\alpha(t_o) = j^k(\beta \circ \varphi)(t_o)$, para ser breve).

Na definição acima há a consideração da reparametrização $\beta \circ \varphi$ de β e não se considera reparametrização de α. Não obstante, diz-se α e β *estão* em contato, sem distinção ou ordem. O Corolário 1.11, abaixo, assegura que isso pode ser desse modo.

Proposição 1.10 *Seja* N, P, Q *variedades diferenciáveis. Sejam* $f_1, f_2 : N \to P$ *e* $g_1, g_2 : P \to Q$ *aplicações diferenciáveis e seja* $x \in N$. *Suponhamos que* $j^k(f_1)(x) = j^k(f_2)(x)$ *(portanto,* $f_1(x) = f_2(x)$*) e* $j^k(g_1)(f_1(x)) = j^k(g_2)(f_2(x))$. *Então* $j^k(g_1 \circ f_1)(x) = j^k(g_2 \circ f_2)(x)$.

DEMONSTRAÇÃO: ([13], Proposição 12.3, página 118). ■

Corolário 1.11 *Sejam* M, α *e* β *como na Definição 1.5, e seja* $\varphi : I_1, t_o \to I_2, s_o$ *um difeomorfismo local. Então* $j^k\alpha(t_o) = j^k(\beta \circ \varphi)(t_o)$ *se, e somente se,* $j^k\beta(s_o) = j^k(\alpha \circ \varphi^{-1})(s_o)$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta considerar a Proposição 1.10 nas situações em que:

a) $N = I_2$, $P = I_1$, $Q = M$, $f_1 = f_2 = \varphi^{-1}$, $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta \circ \varphi$;

b) $N = I_1$, $P = I_2$, $Q = M$, $f_1 = f_2 = \varphi$, $g_1 = \beta$, $g_2 = \alpha \circ \varphi^{-1}$. ■

Corolário 1.12 *Sejam* M, α *e* β *como na Definição 1.5. Sejam* Z *uma variedade diferenciável e* $f : M \to Z$ *um difeomorfismo. Então* α *e* β *estão em contato de ordem* k*, em* $\alpha(t_o) = \beta(s_o)$ *se, e somente se,* $f \circ \alpha$ *e* $f \circ \beta$ *estão em contato de ordem* k *em* $f(\alpha(t_o)) = f(\beta(s_o))$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que α e β estejam em contato de ordem k em $\alpha(t_o) = \beta(s_o)$. Seja $\varphi : I_1, t_o \to I_2, s_o$ difeomorfismo tal que $j^k(\alpha)(t_o) = j^k(\beta \circ \varphi)(s_o)$. Tomando, na Proposição 1.10, $N = I_1, P = M, Q = Z, f_1 = \alpha, f_2 = \beta \circ \varphi$ e $g_1 = g_2 = f$, obtemos $j^k(f \circ \alpha)(t_o) = j^k(f \circ \beta\varphi)(t_o)$, dizendo-nos que $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$

estão em contato de ordem k em $f(\alpha(t_o)) = f(\beta(s_o))$. A recíproca segue-se de modo análogo, já que f é difeomorfismo. ∎

Uma consequência imediata do Corolário 1.11 é:

Corolário 1.13 *Seja M uma variedade diferenciável e seja $p \in M$. Seja A o conjunto de todos os mergulhos $\alpha : I \to M$ tais que $\alpha(t_o) = p$ para algum $t_o \in I$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é algum intervalo aberto. A relação em A que relaciona dois mergulhos se eles estão em contato de ordem k em p, é uma relação de equivalência.* ∎

Definição 1.6 Cada classe de equivalência estabelecida no Corolário 1.13 é chamada um *elemento de contato* de dimensão 1 e ordem k sobre M, em p. O elemento de contato definido por um mergulho $\alpha : I \to M$ em $p = \alpha(t_o)$, será denotado por $C_k^{\alpha(t_o)}$.

Denotemos por $E_k(G/H)$ o conjunto de todos os elementos de contato de ordem k e dimensão 1 sobre G/H. Esse conjunto tem uma estrutura natural de variedade diferenciável. Além disso, a ação de G sobre G/H, induz uma ação natural de G sobre $E_k(G/H)$. A saber,

$$\begin{array}{ccc} G \times E_k(G/H) & \to & E_k(G/H) \\ (g, C_k^{\alpha(t_o)}) & \mapsto & C_k^{(g\cdot\alpha)(t_o)} \end{array}.$$

Para esses fatos, ver ([13], p.124).

Capítulo 2

Contato com trajetórias

Seja G um grupo de Lie e seja $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de G. Dado $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$, consideremos o subgrupo a um parâmetro de G, $\phi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \to G$, determinado por $\mathbf{v}$. Isto é, $\phi_{\mathbf{v}}(s) = \exp(s\mathbf{v})$, para $s \in \mathbb{R}$. Para H um subgrupo fechado de G, continuaremos denotando por Φ a ação canônica de G que define o espaço homogêneo G/H, ou seja,

$$\Phi : G \times G/H \to G/H$$

é definida por $\Phi(g_1, g_2H) = (g_1g_2)H$, para $g_1, g_2 \in G$. Lembramos, para $g \in G$ e para $x \in G/H$, também denotaremos $\Phi(g, x) = g \cdot x$.

Seja $\alpha : I \to G/H$ um mergulho do intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, no espaço homogêneo G/H. Uma vez fixado $t \in I$, obtemos de modo natural uma família de curvas passando por $\alpha(t)$, família essa indexada pela álgebra de Lie $\mathcal{G}$. De fato, para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ temos a trajetória

$$\beta_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \to G/H, \text{ definida por } \beta_{\mathbf{v}}(s) = \exp(s\mathbf{v}) \cdot \alpha(t).$$

Como sabemos, β_{v} é uma imersão se, e somente se, $\mathrm{v} \notin \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ (a sub álgebra de isotropia de G em $\alpha(t)$).

Neste capítulo trataremos de medir o contato em cada ponto $\alpha(t)$, entre α e trajetórias passando por $\alpha(t)$. Queremos reforçar que não se trata de medir o contato entre α e uma trajetória particular. O que obteremos (Teorema da Estratificação) é uma descrição capaz de determinar as trajetórias que estão em contato, de dada ordem, com α em cada ponto $\alpha(t)$.

2.1 Construções fundamentais

De agora em diante vamos restringir-nos aos casos em que $\dim G/H \geq 2$. Em tais casos, dado um mergulho $\alpha : I \to G/H$ e fixado $\alpha(t) \in \alpha(I)$, aqueles elementos na álgebra de Lie $\mathcal{G}$ que determinam uma trajetória passando por $\alpha(t)$ e são tangentes a α nesse ponto, estão contidos naturalmente num sub espaço vetorial próprio de $\mathcal{G}$, como veremos na proposição seguinte.

Fixado $\alpha(t) \in G/H$ e dado $\mathbf{w} \in \mathcal{G}$, consideremos $\beta_{\mathbf{w}}$ a trajetória passando por $\alpha(t)$, determinada por $\mathbf{w} \in \mathcal{G}$.

Proposição 2.1 *Seja* $S_1^{\alpha}(t) = \{\mathbf{w} \in \mathcal{G}\, ;\ \beta'_{\mathbf{w}}(0) = \lambda\alpha'(t) \ \ \textit{para algum}\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, *onde "$'$ "denota a derivada com relação ao respectivo parâmetro. Se* $\mathrm{v}_t \in \mathcal{G}$ *é tal que* $\beta'_{\mathrm{v}_t}(0) = \frac{d}{ds}(\exp(s\mathrm{v}) \cdot \alpha(t)) \mid_{s=o} = \alpha'(t)$, *então temos a decomposição (como espaços vetoriais)* $S_1^{\alpha}(t) = \mathcal{G}_{\alpha(t)} \oplus \mathbb{R}\mathrm{v}_t$, *onde* $\mathbb{R}\mathrm{v}_t$ *denota o subespaço de* $\mathcal{G}$, *gerado por* v_t.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\Phi_{\alpha(t)} : G \to M$ definida por $\Phi_{\alpha(t)}(g) = g \cdot \alpha(t)$, $g \in G$.

É bem conhecido ([11], página 124) que $\mathcal{G}_{\alpha(t)} = \operatorname{Ker} D_e\Phi_{\alpha(t)}$, o núcleo da derivada de $\Phi_{\alpha(t)}$ tomada no elemento identidade $e \in G$. O resultado segue-se, então, já que $S_1^{\alpha}(t) = (D_e\Phi_{\alpha(t)})^{-1}(\mathbb{R}\alpha'(t))$. ■

Seja $\pi : G \to G/H$ a projeção canônica. Lembramos que π é uma fibração (Teorema 1.3) e que, portanto, podemos levantar α a G. Isto é, existe $g : I \to G$ diferenciável, tal que

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "\pi"] \\
I \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\alpha"] & G/H
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Seja g um tal levantamento. Então

$$\Phi_{\alpha(t)}(\exp(s\mathbf{v})) = \exp(s\mathbf{v}) \cdot \alpha(t) = \exp(s\mathbf{v}) \cdot \pi(g(t)) = \pi(\exp(s\mathbf{v})g(t)),$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$. Lançando mão das translações à direita em G, podemos reescrever a expressão acima na forma

$$\Phi_{\alpha(t)}(\exp(s\mathbf{v})) = \left(\pi \circ R_{g(t)}\right)(\exp(s\mathbf{v})).$$

Como isso é verdadeiro para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ e como $\exp(s\mathbf{v})$ é a curva em G que em $s = 0$ passa pelo elemento identidade $e \in G$ com velocidade $\mathbf{v}$, obtemos

$$D_e\Phi_{\alpha(t)} = D_{g(t)}\pi D_e R_{g(t)}.$$

Agora, $\mathbf{v}(t) = D_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}g'(t)$ é um elemento de $\mathcal{G}$, para todo $t \in I$, e temos

$$\begin{aligned} D_e\Phi_{\alpha(t)}(\mathbf{v}(t)) &= D_{g(t)}\pi D_e R_{g(t)}\mathbf{v}(t) \\ &= D_{g(t)}\pi D_e R_{g(t)} D_{g(t)} R_{g(t)^{-1}} g'(t) \\ &= D_{g(t)}\pi g'(t) \\ &= \alpha'(t), \end{aligned}$$

mostrando que a escolha de $\mathbf{v}_t$ na Proposição 2.1 pode ser feita diferenciavelmente quando t varia em I. A saber, $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}(t) = D_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}g'(t)$. Também, $\mathbf{v}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, visto que $\alpha'(t) \neq 0$. Portanto, pela própria proposição, temos

$$\dim S_1^\alpha(t) = \dim \mathcal{G}_{\alpha(t)} + 1.$$

Observação 2.2 Uma consequência imediata das considerações acima é a seguinte: se α é ela própria uma trajetória, isto é, se $\alpha(t) = \exp(t\mathbf{w}) \cdot p$, para algum $p \in G/H$ e algum $\mathbf{w} \notin \mathcal{G}_p$, então $\mathbf{w} \in S_1^\alpha(t)$ para todo $t \in I$. De fato, se, digamos, $p = g_o H$ para algum $g_o \in G$, então $g(t) = \exp(t\mathbf{w})g_o$ é um levantamento de α a G. Agora,

$$\mathbf{v}(t) = D_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}g'(t) = D_{\exp(t\mathbf{w})}R_{\exp(t\mathbf{w})^{-1}}(\exp(t\mathbf{w}))' = \mathbf{w},$$

pela própria definição de $\exp(t\mathbf{w})$, o que mostra o que afirmamos. Assim, no caso presente, a Proposição 2.1 toma a forma seguinte: $S_1^\alpha(t) = \mathcal{G}_{\alpha(t)} \oplus \mathbb{R}\mathbf{w}$, para todo t.

Bem mais adiante utilizaremos a próxima proposição. Vamos estabelecê-la agora para aproveitarmos de imediato a notação.

Proposição 2.3 *Para $t \in I$, seja $W(t) \subset S_1^\alpha(t)$ um subespaço vetorial unidimensional. Se $W(t)$ não está contido em $\mathcal{G}_\alpha(t)$, então existe $\mathbf{w}(t) \in W(t)$ tal que*

$$D_{g(t)}\pi D_e R_{g(t)}\mathbf{w}(t) = \alpha'(t),$$

qualquer que seja o levantamento $g : I \to G$ de α. Consequentemente,

$$D_e R_{g(t)}\mathbf{w}(t) - g'(t) \in \mathrm{Ker} D_{g(t)}\pi.$$

Além disso, $\mathbf{w}(t)$ é único com tais propriedades.

DEMONSTRAÇÃO: Desde já, observamos que a unicidade está garantida, pois $W(t)$ é unidimensional e $D_{g(t)}\pi D_e R_{g(t)}$ é linear.

Seja g um levantamento qualquer de α a G. Como $S_1^\alpha(t) = (D_e\Phi_{\alpha(t)})^{-1}(\mathbb{R}\alpha'(t))$, temos duas possibilidades:

1) se $S_1^\alpha(t) = W(t)$, então segue-se que $(D_e\Phi_{\alpha(t)})^{-1}(\alpha'(t))$ é constituido de um único ponto, $\mathbf{w}(t)$, já que $S_1^\alpha(t)$ é unidimensional se, e somente se, $\mathcal{H}_{\alpha(t)} = \{\mathbf{0}\}$;

2) se $S_1^\alpha(t) \neq W(t)$ então $(D_e\Phi_{\alpha(t)})^{-1}(\alpha'(t))$ é um hiperplano de $S_1^\alpha(t)$, paralelo a $(D_e\Phi_{\alpha(t)})^{-1}(0) = \mathcal{G}_{\alpha(t)}$. Seja $\mathbf{w}(t)$ a intersecção desse hiperplano com $W(t)$.

Já vimos que

$$D_e\Phi_{\alpha(t)} = D_{g(t)}\pi D_e R_{g(t)}.$$

Portanto, como g é um levantamento de α, obtemos

$$D_{g(t)}\pi(g'(t)) = \alpha'(t) = D_e\Phi_{\alpha(t)}(\mathbf{w}(t)) = D_{g(t)}\pi D_e R_{g(t)}(\mathbf{w}(t)),$$

donde o resultado em ambos os casos. ∎

2.2 Os subespaços associados

Dotemos $\mathcal{G}$ com um produto interno (arbitrário) e denotemo-lo $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definição 2.1 *i)*Um *campo transverso* ao longo de $\alpha : I \to G/H$, em torno de $t_o \in I$, é uma curva $N : I_o \to \mathcal{G}$ tal que, para cada $t \in I_o$, $\mathrm{N}(t) \neq \mathbf{0}$ e $\mathrm{N}(t)$ é $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ortogonal a $S_1^\alpha(t)$, onde $I_o \subset I$ é alguma vizinhança de t_o.

*ii)*Sejam $\mathrm{N}_1(t),\ldots,\mathrm{N}_r(t) : I_o \to \mathcal{G}$ campos transversos ao longo de α em torno de t_o. Diremos que $\{\mathrm{N}_1(t),\ldots,\mathrm{N}_r(t)\}$ é um *referencial transverso* ao longo de α em torno de t_o, se for um conjunto linearmente independente que gera o complemento ortogonal de $S_1^\alpha(t)$ em $\mathcal{G}$. (Assim, $r = \dim G - \dim S_1^\alpha(t) = \dim G - (\dim H + 1)$.)

Proposição 2.4 *Dado $t_o \in I$ existe um referencial transverso ao longo de α em torno de t_o.*

DEMONSTRAÇÃO: Dado $t_o \in I$, seja $g(t)$ um levantamento de α a G em torno de t_o. Seja $\mathrm{v}(t) = D_{g(t)}R_{g(t)^{-1}}g'(t)$ e consideremos $h(t) = g(t)g(t_o)^{-1}$. Então $h(t)\cdot g(t_o)H = g(t)H$, isto é $h(t)\cdot\alpha(t_o) = \alpha(t)$. Segue-se que $\mathcal{G}_{\alpha(t)} = \mathrm{Ad}(h(t))\mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$. Isso permite transportarmos (diferenciavelmente) qualquer base de $\mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$, para obtermos uma base de $\mathcal{G}_{\alpha(t)}$, a qual, juntamente com $\mathrm{v}(t)$, fornece uma base, digamos $\{\mathrm{e}_1(t),\ldots,\mathrm{e}_{\dim H+1}(t)\}$, de $S_1^\alpha(t)$.

Escolhamos $\{\mathrm{w}_1,\ldots,\mathrm{w}_r\} \subset \mathcal{G}$, um conjunto linearmente independente, cujos elementos não pertençam a $S_1^\alpha(t_o)$. Claramente, existe uma vizinhança de t_o tal que, se t pertence a essa vizinhança, então w_i não pertence $S_1^\alpha(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Segue-se que, para cada $i = 1, \ldots, r$, o produto vetorial

$$\mathrm{N}_i(t) = \mathbf{e}_1(t) \times \cdots \times \mathbf{e}_{\dim H+1}(t) \times \mathbf{w}_1 \times \cdots \times \hat{\mathbf{w}}_i \times \cdots \times \mathbf{w}_r,$$

onde $\hat{\mathbf{w}}_i$ denota a ausência do fator $\times \mathbf{w}_i$, fornece um campo transverso ao longo de α. Além disso, é fácil ver, $\{\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_r\}$ é linearmente independente. Temos, assim, um referencial transverso ao longo de α em torno de t_o. ∎

Lembrete: Temos dotado $\mathcal{G}$ com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Isso nos permite definir, depois de orientar $\mathcal{G}$, a forma determinante (det) como sendo aquela multilinear cujo valor numa base ortonormal positiva é igual a 1. O produto vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{\dim G-1}$ é o único elemento em $\mathcal{G}$ tal que $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{G}$.

Convencão: De agora em diante, exceto onde haja possibilidade de confusão, vamos referir-nos a um campo transverso ao longo de α em torno de algum ponto relevante t_o, dizendo simplesmente um campo transverso ao longo de α. Noutras palavras, estaremos sempre contraindo o intervalo de definição de α a um intervalo apropriado para a construção local.

Seja $\{\mathrm{N}_1(t), \ldots, \mathrm{N}_r(t)\}$ um referencial transverso ao longo de α. Para cada $t \in I$, consideremos os subespaços vetoriais de $\mathcal{G}$, definidos pela regra indutiva

$$S_k^\alpha(t) = \{\mathbf{v} \in S_{k-1}^\alpha(t); \quad \langle \mathbf{v}, \mathrm{N}_i^{(k-1)}(t) \rangle = 0, \, i = 1, \ldots, r\},$$

onde $N_i^{(k-1)}(t)$ denota a $(k-1)$-ésima derivada de N_i em $t \in I$. Assim, para cada $t \in I$, obtemos uma cadeia

$$S_1^\alpha(t) \supseteq S_2^\alpha(t) \supseteq \cdots .$$

Definição 2.2 Cada subespaço $S_k^\alpha(t) \subset \mathcal{G}$ será dito *associado* a α (em $\alpha(t)$).

Na definição acima, não fizemos menção ao produto interno considerado em $\mathcal{G}$, nem ao referencial transverso ao longo de α, utilizado na construção dos subespacos associados. Em seguida, veremos que, de fato, não é necessário mencionar tais coisas.

Proposição 2.5 *Dados produtos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, em $\mathcal{G}$, sejam $\{N_1(t),\dots,N_r(t)\}$ e $\{\overline{N}_1(t),\dots,\overline{N}_r(t)\}$ referenciais transversos ao longo de α, obtidos de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, respectivamente. Isto é, para cada t, $N_i(t)$ é $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ortogonal a $S_1^\alpha(t)$ e $\overline{N}_i(t)$ é $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$-ortogonal a $S_1^\alpha(t)$, para $i=1,\dots,r$. Consideremos o funcionais lineares sobre $\mathcal{G}$, (omitindo o parâmetro t)*

$$\phi_i = \langle N_i, \cdot\rangle,\ \ \phi_i' = \langle N_i', \cdot\rangle, \cdots, \phi_i^{(k)} = \langle N_i^{(k)}, \cdot\rangle,\ i=1,\dots,r.$$

Analogamente, consideremos

$$\overline{\phi}_i = \langle \overline{N}_i, \cdot\rangle,\ \ \overline{\phi}_i' = \langle \overline{N}_i', \cdot\rangle, \cdots, \overline{\phi}_i^{(k)} = \langle \overline{N}_i^{(k)}, \cdot\rangle,\ i=1,\dots,r.$$

Então, para $v \in \mathcal{G}$, temos

$$\phi_i(v) = \cdots = \phi_i^{(k)}(v) = 0, \quad i=1,\dots,r$$

se, e somente se,

$$\overline{\phi}_i(v) = \cdots = \overline{\phi}_i^{(k)}(v) = 0, \quad i=1,\dots,r.$$

Para demonstrar a proposição acima, necessitaremos do resultado seguinte, de Álgebra Linear.

Lema 2.6 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\phi_1, \ldots, \phi_r, \phi$ funcionais lineares sobre V. Se $\cap_{i=1}^r \mathrm{Ker}\phi_i \subset \mathrm{Ker}\phi$, então existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tais que $\phi = \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_r\phi_r$. Portanto, se $\{\phi_1, \cdots, \phi_r\}$, é um conjunto linearmente independente, como subconjunto de V^*, o espaço dual de V, então $\{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$ é uma base do subespaço vetorial de V^*, formado pelos funcionais lineares que se anulam sobre $\cap_{i=1}^r \mathrm{Ker}\phi_i$.*

DEMONSTRAÇÃO (do Lema): Sejam

$$T : V \to \mathbb{R}^r \quad \text{e} \quad L : T(V) \to \mathbb{R}$$

definidos por

$$T(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \phi_r(\mathbf{x})) \quad \text{e} \quad L(\phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \phi_r(\mathbf{x})) = \phi(\mathbf{x}).$$

L está bem definido já que

$$\text{se } (\phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \phi_r(\mathbf{x})) = (\phi_1(\mathbf{y}), \ldots, \phi_r(\mathbf{y})), \quad \text{então} \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \cap_{i=1}^r \mathrm{Ker}\,\phi_i \subset \mathrm{Ker}\,\phi.$$

Como L é um funcional linear sobre $T(V)$, sabemos que podemos estendê-lo a um funcional linear, digamos $\overline{L}$, sobre $\mathbb{R}^r$. Agora, todo funcional linear sobre $\mathbb{R}^r$ tem a forma $\overline{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r) = \lambda_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \lambda_r\mathbf{y}_r$, para certos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Em particular, para $\mathbf{y}_i = \phi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, r$, obtemos

$$\phi(\mathbf{x}) = \overline{L}(\phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \phi_r(\mathbf{x})) = \lambda_1\phi_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_r\phi_r(\mathbf{x}).$$

A última conclusão no enunciado é imediata. ∎

DEMONSTRAÇÃO (da Proposição 2.5): Pela própria definição de um referencial transverso ao longo de α, temos que $\cap_{i=1}^{r}\mathrm{Ker}\,\phi_i = S_1^\alpha = \cap_{i=1}^{r}\mathrm{Ker}\,\overline{\phi}_i$. Agora, sabemos da Álgebra Linear que o fato de cada conjunto $\{\mathbf{N}_1,\ldots,\mathbf{N}_r\}$ e $\{\overline{\mathbf{N}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{N}}_r\}$ ser linearmente independente garante que também o é cada conjunto $\{\phi_1,\ldots,\phi_r\}$ e $\{\overline{\phi}_1,\ldots,\overline{\phi}_r\}$. Pelo Lema acima, esses conjuntos são bases do sub espaço vetorial, digamos W, do - dual $\mathcal{G}^*$, formado pelos funcionais lineares que se anulam sobre S_1^α. Portanto, existem escalares $\lambda_{ij}(=\lambda_{ij}(t))$, $i,j=1,\ldots,r$, tais que

$$\overline{\phi}_i = \sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}\phi_j, \text{ isto é,}$$

$$\langle\langle\overline{\mathbf{N}}_i,\cdot\rangle\rangle = \sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}\langle\mathbf{N}_j,\cdot\rangle, \quad i=1,\ldots,r. \qquad (*)$$

Pela mesma razão, existem escalares $\delta_{ij}(=\delta_{ij}(t))$, tais que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{r}\delta_{ij}\overline{\phi}_j.$$

Claro também, a matriz (λ_{ij}) é invertível e tem (δ_{ij}) como sua inversa.

Utilizando a expressão $(*)$ acima para avaliar $\langle\langle\overline{\mathbf{N}}_i,\mathbf{N}_j\rangle\rangle$, obtemos a identidade matricial $\left(\langle\langle\overline{\mathbf{N}}_j,\mathbf{N}_i\rangle\rangle\right) = \left(\langle\mathbf{N}_i,\mathbf{N}_j\rangle\right)(\lambda_{ji})$, ou seja, $(\lambda_{ji}) = \left(\langle\mathbf{N}_j,\mathbf{N}_i\rangle\right)^{-1}\left(\langle\langle\overline{\mathbf{N}}_i,\mathbf{N}_j\rangle\rangle\right)$. É claro, portanto, que cada λ_{ij}, bem como cada δ_{ij}, é diferenciável.

Derivando

$$\overline{\phi}_i = \sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}\phi_j, \quad i=1,\ldots,r,$$

sucessivamente, obtemos

$$\overline{\phi}_i' = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij}'\phi_j + \sum_{j=1}^r \lambda_{ij}\phi_j'$$

$$\vdots$$

$$\overline{\phi}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij}^{(k)}\phi_j + \sum_{j=1}^r A_{ij}^{k,1}\phi_j' + \cdots + \sum_{j=1}^r A_{ij}^{k,k-1}\phi_j^{(k-1)} + \sum_{j=1}^r \lambda_{ij}\phi_j^{(k)},$$

onde $A_{ij}^{k,l} = \binom{k}{l}\lambda_{ij}^{(k-l)}$, $l = 1, \ldots, k-1$. Analogamente, derivando

$$\phi_i = \sum_{j=1}^r \delta_{ij}\overline{\phi}_j$$

sucessivamente, obtemos

$$\phi_i' = \sum_{j=1}^r \delta_{ij}'\overline{\phi}_j + \sum_{j=1}^r \delta_{ij}\overline{\phi}_j';$$

$$\vdots$$

$$\phi_i^{(k)} = \sum_{j=1}^r \delta_{ij}^{(k)}\overline{\phi}_j + \sum_{j=1}^r B_{ij}^{k,1}\overline{\phi}_j' + \cdots + \sum_{j=1}^r B_{ij}^{k,k-1}\overline{\phi}_j^{(k-1)} + \sum_{j=1}^r \delta_{ij}\overline{\phi}_j^{(k)},$$

onde $B_{ij}^{k,l} = \binom{k}{l}\delta_{ij}^{(k-l)}$, $l = 1, \ldots, k-1$. Podemos agora verificar facilmente que

$$\phi_i(\mathrm{v}) = \cdots = \phi_i^{(k)}(\mathrm{v}) = 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

se, e somente se,

$$\overline{\phi}_i(\mathrm{v}) = \cdots = \overline{\phi}_i^{(k)}(\mathrm{v}) = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

tal como queríamos. Notemos, noutras palavras, que ambos esses conjuntos de equações definem o mesmo subespaço de $\mathcal{G}$, o qual é justamente $S_{k+1}^{\alpha}(t)$. ∎

Está claro na demonstração acima que, essencialmente, o que devemos garantir é que temos duas bases para o subespaço vetorial W, de $\mathcal{G}^*$, formado pelos funcionais lineares que se anulam sobre S_1^α. Os demais argumentos são usuais. Sendo assim, e para evitar repetições, observamos que se $\{\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_r\}$ e $\{\overline{\mathbf{N}}_1, \dots, \overline{\mathbf{N}}_r\}$ são referenciais transversos ao longo de α, então

$$\{\langle \mathbf{N}_1, \cdot \rangle, \cdots, \langle \mathbf{N}_r, \cdot \rangle\} \quad \text{e} \quad \{\langle \overline{\mathbf{N}}_1, \cdot \rangle, \cdots, \langle \overline{\mathbf{N}}_r, \cdot \rangle\}$$

são, claramente, bases de W. Podemos, portanto, estabelecer a seguinte

Proposição 2.7 *Dois referenciais transversos ao longo de $\alpha : I \to G/H$ definem a mesma cadeia $S_1^\alpha(t) \supseteq S_2^\alpha(t) \supseteq \cdots$, de subespaços associados a α, em cada $t \in I$.* ∎

De agora em diante, salvo mencão em contrário, estaremos considerando que um produto interno está fixado em $\mathcal{G}$. Esse continuará sendo denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

A próxima proposição estabelece o comportamento dos subespaços associados a α, quando de uma reparametrização de α. Esse será o significado que daremos para a frase *os subespaços associados a α, são invariantes por reparametrizações de α.*

Proposição 2.8 *Seja $t : t^{-1}(I) \subset \mathbb{R} \to I$ um difeomorfismo e consideremos a reparametrização γ de α, definida por $\gamma(s) = \alpha(t(s))$, $s \in t^{-1}(I)$. Então, $S_j^\gamma(s) = S_j^\alpha(t(s))$, para todo $s \in t^{-1}(I)$ e todo $j = 1, 2, \dots$.*

DEMONSTRAÇÃO: Segue-se diretamente da definição (Proposição 2.1) e da regra da cadeia, que $S_1^\gamma(s) = S_1^\alpha(t(s))$, para todo $s \in t^{-1}(I)$. Portanto, se $\{\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_r\}$ é um referencial transverso ao longo de α, e se $\mathbf{n}_i$ é definido por $\mathbf{n}_i(s) = \mathbf{N}_i(t(s))$ para todo $s \in t^{-1}(I)$, então $\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r\}$, é um referencial transverso ao longo de γ.

Agora, para cada $i = 1, \ldots, r$, a k-ésima derivada $\mathbf{n}_i^{(k)}(s)$ tem a forma

$$\mathbf{n}_i^{(k)}(s) = a_{k1}(s)\mathbf{N}_i'(t(s)) + a_{k2}(s)\mathbf{N}_i''(t(s)) + \cdots + a_{kk}(s)\mathbf{N}_i^{(k)}(t(s))$$

para certas funções diferenciáveis $a_{kj}(s)$, com $a_{kk}(s) = (t'(s))^k \neq 0$.

Por um lado, segue-se imediatamente que se $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ é tal que

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_i(t(s)) \rangle = \cdots = \langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_i^{(k)}(t(s)) \rangle = 0, \quad \text{então}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_i(s) \rangle = \cdots = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_i^{(k)}(s) \rangle = 0.$$

Por outro lado, considerando que $a_{kk}(s) \neq 0$, para todo k, um argumento simples de indução mostra que se $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ é tal que

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_i(s) \rangle = \cdots = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_i^{(k)}(s) \rangle = 0, \text{ então}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_i(t(s)) \rangle = \cdots = \langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_i^{(k)}(t(s)) \rangle = 0.$$

Como ambas as conclusões são válidas para todo $i = 1, \ldots, r$, obtemos $S_{k+1}^{\alpha}(t(s)) = S_{k+1}^{\gamma}(s)$. ■

As propriedades dos sub espaços associados que temos obtido até agora, já dão esperanças de que eles contenham informações interessantes sobre o mergulho que lhes dá origem. O próximo teorema relaciona os sub espaços associados de mergulhos congruentes.

Teorema 2.9 *Seja $\alpha : I \to G/H$ um mergulho, e seja $g_o \in G$. Consideremos $\gamma = g_o{\cdot}\alpha$. Então os sub espaços associados a α e a γ satisfazem*

$$S_k^\gamma(t) = \mathrm{Ad}(g_o)S_k^\alpha(t), \quad k = 1, 2 \ldots.$$

DEMONSTRAÇÃO: Inicialmente mostraremos que $S_1^\gamma(t) = \mathrm{Ad}(g_o)S_1^\alpha(t)$. Seja $\mathbf{v}(t) \in \mathcal{G}$ tal que

$$S_1^\alpha(t) = \mathcal{G}_{\alpha(t)} \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}(t),$$

como na Proposição 2.1. Vimos que se $g(t)$ é um levantamento de α a G, então podemos tomar $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v} = D_g R_{g^{-1}} g'$. Como $(g_o g)(t)$ é um levantamento de γ a G, temos, pela mesma razão,

$$S_1^\gamma(t) = \mathcal{G}_{\gamma(t)} \oplus \mathbb{R}\mathbf{w}(t),$$

onde $\mathbf{w} = D_{g_o g} R_{(g_o g)^{-1}} (g_o g)'$. Afirmamos que $\mathbf{w} = \mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{v}$, o que passamos a demonstrar. Por um lado temos

$$\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{v} = D_{g_o} R_{g_o^{-1}} D_e L_{g_o} D_g R_{g^{-1}} g'$$

e, por outro lado, temos

$$\mathbf{w} = D_{g_o g} R_{(g_o g)^{-1}} (g_o g)' = D_{g_o} R_{g_o^{-1}} D_{g_o g} R_{g^{-1}} D_g L_{g_o} g'.$$

Agora, de $R_{g^{-1}} = L_{g_o^{-1}} R_{g^{-1}} L_{g_o}$, obtemos

$$D_g R_{g^{-1}} = D_{g_o} L_{g_o^{-1}} D_{g_o g} R_{g^{-1}} D_g L_{g_o}.$$

A afirmação segue-se, substituindo esta última expressão na primeira e comparando com a segunda expressão. Ora, como $\mathrm{Ad}(g_o)$ é linear e como $\mathcal{G}_\gamma = \mathrm{Ad}(g_o)\mathcal{G}_\alpha$, concluimos que $S_1^\gamma(t) = \mathrm{Ad}(g_o)S_1^\alpha(t)$.

Seja $\{N_1(t), \ldots, N_r(t)\}$ um referencial transverso ao longo de α. Para $i = 1, \ldots, r$, definamos $\mathbf{n}_i(t) = \mathrm{Ad}(g_o)N_i(t)$, para todo t. Além disso, consideremos em $\mathcal{G}$ o produto interno

$$\langle\langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle\rangle = \langle \mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathrm{v}, \mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathrm{w} \rangle, \ \forall\, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{G}.$$

A relação $S_1^\gamma(t) = \mathrm{Ad}(g_o)S_1^\alpha(t)$ que obtivemos, assegura que $\{\mathbf{n}_1(t), \ldots, \mathbf{n}_r(t)\}$ é um referencial transverso ao longo de γ, segundo o produto interno $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$. Podemos, portanto, aplicar a Proposição 2.5 para concluir que $\mathrm{v} \in S_k^\gamma(t)$ se, e somente se,

$$\langle\langle \mathbf{n}_i(t), \mathrm{v} \rangle\rangle = \ldots = \langle\langle \mathbf{n}_i^{(k-1)}(t), \mathrm{v} \rangle\rangle = 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, r$. Agora, pela definição de $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, temos:

$$\langle\langle \mathbf{n}_i^{(j)}(t), \mathrm{v} \rangle\rangle = \langle \mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathbf{n}_i^{(j)}, \mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathrm{v} \rangle = \langle N_i^{(j)}(t), \mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathrm{v} \rangle,$$

qualquer seja o natural j. Segue-se que $\mathrm{v} \in S_k^\gamma(t)$ se, e somente se, $\mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathrm{v} \in S_k^\alpha(t)$, que é equivalente a $\mathrm{v} \in \mathrm{Ad}(g_o)S_k^\alpha(t)$. ∎

Observação 2.10 Dado $t \in I$, seja $d = \dim S_k^\alpha(t)$. Seja $Gr(d)$ a variedade de Grassmann dos d-sub espaços de $\mathcal{G}$. A ação adjunta de G sobre $\mathcal{G}$ induz naturalmente uma ação de G sobre $Gr(d)$. O teorema acima diz, noutras palavras, que os sub espaços $S_k(t)$ associados a mergulhos congruentes, residem todos na mesma órbita por essa ação. Não deixa de ser, desde já, condição necessária para congruência. Talvez seja interessante comparar com a Observação 1.8.

Proposição 2.11 *Seja* $\mathbf{u} : I \to \mathcal{G}$ *uma curva tal que* $\mathbf{u}(t) \in S_1^\alpha(t)$, *para todo* $t \in I$. *Se* $\mathbf{u}'(t_o) = \cdots = \mathbf{u}^{(k)}(t_o) = 0$ *para algum* $t_o \in I$, *então* $\mathbf{u}(t_o) \in S_{k+1}^\alpha(t_o)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{\mathbf{N}_1(t), \ldots, \mathbf{N}_r(t)\}$ um referencial transverso ao longo de α. Então, $\langle \mathbf{N}_i(t), \mathbf{u}(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$ e todo $i = 1, \ldots, r$. Agora, a n-ésima derivada de $\langle \mathbf{N}_i(t), \mathbf{u}(t)\rangle = 0$ é

$$\sum_{l+j=n} a_{lj} \langle \mathbf{N}_i^{(j)}(t), \mathbf{u}^{(l)}(t)\rangle = 0,$$

onde a_{lj} são os inteiros $a_{lj} = \binom{n}{l} = \binom{n}{j}$. Portanto, se $n \leq k$, o anulamento em t_o das derivadas de $\mathbf{u}$ de ordem 1 até ordem n leva ao anulamento também de $\langle \mathbf{N}_i^{(n)}(t_o), \mathbf{u}(t_o)\rangle$. Como isso vale para $i = 1, \ldots, r$, o resultado segue-se, então, fazendo n variar de 1 até k. ■

Temos agora o seguinte refinamento da Observação 2.2:

Corolário 2.12 *Se $\alpha(t) = \exp(t\mathbf{v}) \cdot p$, para algum $p \in G/H$ e algum $\mathbf{v} \notin \mathcal{G}_p$, então $\mathbf{v} \in S_k^\alpha(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k = 1, 2, \ldots$.*

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos pela Observação 2.2 que $\mathbf{v} \in S_1^\alpha(t)$ para todo t. Assim, basta tomar $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}$ na proposição acima. ■

Para ilustrar o corolário, adiantamos (ver Secção 4.1 para detalhes) que, no caso da ação do grupo euclidiano $G = E(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$, temos o seguinte. Dado $p \in \mathbb{R}^2$ e dado $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$, com $\mathbf{v} \notin \mathcal{G}_p$, consideremos a trajetória de p determinada por $\mathbf{v}$, isto é, $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{v}) \cdot p$. Lembramos que a dimensão de $\mathcal{G}$ é igual a 3. Em conformidade com a Proposição 2.1, temos que $S_1^\alpha(t)$ é um plano de $\mathcal{G}$, passando pela origem. Quanto a $S_2^\alpha(t)$, esse coincide com a reta gerada por $\mathbf{v}$, para todo t. Assim, temos uma família de planos $\{S_1^\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, tendo $S_2^\alpha(t)$ como reta comum.

2.3 A estratificação

De certa forma o corolário acima é o ponto de partida de nossas investigações. Ora, a idéia por trás da noção de contato nalgum ponto é justamente a de definir uma medida de quanto as curvas (os traços, na verdade) podem ser consideradas a mesma, numa vizinhança do ponto de contato. A idéia agora é tomar como padrão de medida as trajetórias (traços dessas, na verdade) de subgrupos a um parâmetro. Veremos nesta secção que o Corolário 2.12 pode ser considerado como uma primeira caracterização desse padrão ou, pelo menos, de algo associado a ele na álgebra de Lie do grupo em questão. Por sua vez, a escolha dessa última como ambiente para as investigações é natural, já que em geral um grupo de Lie é menos tratável que sua álgebra de Lie.

Para $\mathbf{X} \in \mathcal{G}$, consideremos $\mathrm{ad}(\mathbf{X}) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ dada por $\mathrm{ad}(\mathbf{X})(\mathbf{Y}) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Ou seja, $\mathrm{ad} : \mathcal{G} \to \mathcal{GL}(\mathcal{G})$ é a representação adjunta de $\mathcal{G}$. (Definição 1.2).

Lema 2.13 *Suponhamos que* $\mathbf{w}_\alpha : I \to \mathcal{G}$ *seja uma curva tal que, para todo* $t \in I$, *tenhamos* $\pi\left(\exp\mathbf{w}_\alpha(t)\right) = \alpha(t)$. *Seja*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= \tfrac{e^{\mathrm{ad}\mathbf{w}_\alpha(t)}-1}{\mathrm{ad}\mathbf{w}_\alpha(t)}\left(\mathbf{w}'_\alpha(t)\right) \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ad}(\mathbf{w}_\alpha(t)))^n}{(n+1)!}\left(\mathbf{w}'_\alpha(t)\right) \\
&= \mathbf{w}'_\alpha(t) + \tfrac{1}{2!}[\mathbf{w}_\alpha(t), \mathbf{w}'_\alpha(t)] + \tfrac{1}{3!}[\mathbf{w}_\alpha(t), [\mathbf{w}_\alpha(t), \mathbf{w}'_\alpha(t)]] + \ldots .
\end{aligned}
$$

Então, $\mathbf{u}(t) \in S_1^\alpha(t)$, *para todo* $t \in I$.

DEMONSTRAÇÃO: Para não sobrecarregar a notação, omitiremos o parâmetro t. Por um lado, temos

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{d}{ds}\,(\,\exp(s\mathbf{u})\cdot\alpha\,)\,|_{s=0} \\
= \; & \tfrac{d}{ds}\,(\,(\exp(\mathbf{w}_\alpha)(\exp(\mathbf{w}_\alpha))^{-1}\exp(s\mathbf{u}))\cdot\alpha\,)\,|_{s=0} \\
= \; & \tfrac{d}{ds}\,(\,(\exp(\mathbf{w}_\alpha)(\exp(\mathbf{w}_\alpha))^{-1}\exp(s\mathbf{u}))\cdot\pi(\exp\mathbf{w}_\alpha)\,)\,|_{s=0} \\
= \; & \tfrac{d}{ds}\,\big(\,(\pi\circ L_{\exp(\mathbf{w}_\alpha)})\big((\exp(\mathbf{w}_\alpha))^{-1}\exp(s\mathbf{u})\exp(\mathbf{w}_\alpha)\big)\,\big)\,|_{s=0} \\
= \; & \big(\,D_{\exp\mathbf{w}_\alpha}\pi\circ D_eL_{\exp(\mathbf{w}_\alpha)}\circ\mathrm{Ad}(\exp(\mathbf{w}_\alpha))^{-1}\,\big)\,(\mathbf{u}) \\
= \; & \big(\,D_{\exp\mathbf{w}_\alpha}\pi\circ D_eL_{\exp(\mathbf{w}_\alpha)}\circ e^{\mathrm{ad}(-\mathbf{w}_\alpha)}\,\big)\,(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

e, portanto, ficamos com

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{d}{ds}\,(\exp(s\mathbf{u})\cdot\alpha)\,|_{s=0} \\
= \; & \left(D_{\exp\mathbf{w}_\alpha}\pi\circ D_eL_{\exp(\mathbf{w}_\alpha)}\circ\tfrac{1-e^{-ad(\mathbf{w}_\alpha)}}{ad(\mathbf{w}_\alpha)}\right)(\mathbf{w}'_\alpha).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Por outro lado, derivando $\pi(\exp(\mathbf{w}_\alpha))=\alpha$, obtemos

$$
(D_{\exp\mathbf{w}_\alpha}\pi\circ D_{\mathbf{w}_\alpha}\exp)\,(\mathbf{w}'_\alpha)=\alpha'. \tag{2}
$$

Agora, como ([11], p.105)

$$
D_{\mathbf{w}_\alpha}\exp=D_eL_{\exp(\mathbf{w}_\alpha)}\circ\frac{1-e^{-\mathrm{ad}(\mathbf{w}_\alpha)}}{\mathrm{ad}(\mathbf{w}_\alpha)}, \tag{3}
$$

podemos combinar as equações (1), (2) e (3) para obter

$$
\frac{d}{ds}\,(\exp(s\mathbf{u})\cdot\alpha)\,|_{s=0}=\alpha',
$$

donde $\mathbf{u}\in S_1^\alpha$. ■

Corolário 2.14 *Nas condições do Lema 2.13, suponhamos que* $\mathbf{w}_\alpha(t_o)=0$ *para algum* $t_o\in I$. *Se* $\mathbf{w}'_\alpha(t_o),\ldots,\mathbf{w}_\alpha^{(j)}(t_o)$ *são múltiplos de* $\mathbf{w}'_\alpha(t_o)$, *então* $\mathbf{u}^{(j-1)}(t_o)=\mathbf{w}_\alpha^{(j)}(t_o)$, *qualquer que seja* $j\geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Primeiro observamos que a j-ésima derivada em $t = t_o$ do primeiro termo da expansão de $\mathbf{u}$, é justamente $\mathrm{w}_\alpha^{(j+1)}(t_o)$. Portanto, se mostrarmos que as derivadas em $t = t_o$ dos demais termos anulam-se uma a uma, e se mostrarmos que podemos derivar termo a termo para obtermos as derivadas de $\mathbf{u}$, então teremos demonstrado o lema. Suponhamos, por enquanto, que isso último seja permitido. Consideremos, então, apenas os termos outros que o primeiro termo. Pela bilinearidade do colchete, temos que a j-ésima derivada de cada desses termos é uma soma termos envolvendo no máximo a j-ésima derivada de w_α, com um termo envolvendo a $(j+1)$-ésima derivada de w_α. Agora, em $t = t_o$, todos os termos envolvendo no máximo a j-ésima derivada $\mathrm{w}_\alpha^{(j)}(t_o)$ são nulos, pois a hipótese sobre essas derivadas diz que teremos colchetes de vetores paralelos. Quanto ao termo que envolve a $(j+1)$-ésima derivada $\mathrm{w}_\alpha^{(j+1)}(t_o)$, ele só aparece na forma $[\mathrm{w}_\alpha(t_o), \mathrm{w}_\alpha^{(j+1)}(t_o)]$, sendo nulo, portanto, pela hipótese $\mathrm{w}_\alpha(t_o) = \mathbf{0}$.

Vamos mostrar em seguida que a série derivada da série que define $\mathbf{u}$ converge uniformemente e, portanto, que $\mathbf{u}'$ é a série derivada. O mesmo fato segue-se analogamente para as derivadas de ordem mais alta. Consideremos uma vizinhança de t_o na qual $\| \mathrm{w}_\alpha \|$, $\| \mathrm{w}'_\alpha \|$ e $\| \mathrm{w}_\alpha \|$ são limitadas por, digamos, $K \in \mathbb{R}$. A bilinearidade do colchete garante que existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\| [\mathrm{x}, \mathrm{y}] \| \leq c \| \mathrm{x} \| \| \mathrm{y} \|$, para todo x, $\mathrm{y} \in \mathcal{G}$. Seja $f_n = \left(\frac{(\mathrm{ad}(\mathrm{w}_\alpha(t)))^n}{(n+1)!} (\mathrm{w}'_\alpha(t)) \right)'$. Então, $\| f_0 \| = \| \mathrm{w}''_\alpha \| \leq K$ e, para $n \geq 1$ temos:

$$\| \left(\frac{(\mathrm{ad}(\mathrm{w}_\alpha(t)))^n}{(n+1)!} (\mathrm{w}'_\alpha(t)) \right)' \| \leq n \frac{c^n K^{n+1}}{(n+1)!} \leq (n+1) \frac{c^n K^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c^n K^{n+1}}{n!}.$$

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n K^n}{n!} = K e^{(cK)}$. A convergência uniforme da série derivada segue-se, então, pelo critério de Weierstrass. ■

Teorema 2.15 *(da Estratificação) Seja $\alpha : I \to G/H$ um mergulho. Fixado $t_o \in I$, seja $\mathrm{v} \in \mathcal{G}$, $\mathrm{v} \notin \mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$ e consideremos $\beta(s) = (\exp(s\mathrm{v})) \cdot \alpha(t_o)$. Então: α e β estão em contato de ordem k em $\alpha(t_o) = \beta(0)$ se, e somente se, $\mathrm{v} \in S_k^{\alpha}(t_o)$.*

A demonstração do teorema acima é um tanto extensa. Um guia bom talvez seja ter a idéia geral da mesma. É a seguinte: para $n = \dim G/H$, podemos encontrar um difeomorfismo F entre $\mathbb{R}^n$ e uma vizinhança de $p = \alpha(t_o) = \beta(0)$ em G/H tal que $F \circ \beta$ seja uma parametrização de um segmento de reta em $\mathbb{R}^n$. Pelo Corolário 1.12 podemos medir o contato entre α e β, em p, medindo o contato entre $F \circ \alpha$ e $F \circ \beta$ em $F(p)$. A idéia agora é buscar um subespaço apropriado, de $\mathcal{G}$, que será identificado com $\mathbb{R}^n$, no qual reside a um segmento da reta $\{s\mathrm{v},\ s \in \mathbb{R}\}$, sendo que este último será parametrizado por $F \circ \beta$.

DEMONSTRAÇÃO (do Teorema 2.15) Começamos com a seguinte afirmação:

AFIRMAÇÃO 1: É suficiente demonstrar o teorema na situação em que $\alpha(t_o) = eH \in G/H$. Vejamos porque. Digamos que $\alpha(t_o) = g_o H$. Consideremos $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ obtidas de α e β, respectivamente, pelo difeomorfismo $x \mapsto g_o^{-1} \cdot x$, de G/H sobre si mesmo. Isto é, $\overline{\alpha}(t) = g_o^{-1} \cdot \alpha(t)$ e

$$\begin{aligned} \overline{\beta}(s) = g_o^{-1} \cdot \beta(s) &= g_o^{-1} \cdot ((\exp(s\mathrm{v})) \cdot g_o H) \\ &= (g_o^{-1}(\exp(s\mathrm{v}))g_o)H \\ &= \exp(s\mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathrm{v})H. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 1.12, temos que α e β estão em contato de ordem k em $\alpha(t_o) = \beta(0)$ se, e somente se, $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ estão em contato de ordem k em $g_o^{-1} \cdot \alpha(t_o) = g_o^{-1}\beta(0) = eH$. Portanto, dizer que o teorema é verdadeiro para $\overline{\alpha}$ é dizer que α e β estão em contato de ordem k se, e somente se, $\mathrm{Ad}(g_o^{-1})\mathbf{v} \in S_k^{\overline{\alpha}}(t_o)$. Mas, pelo Teorema 2.9 temos $S_k^{\overline{\alpha}}(t_o) = \mathrm{Ad}(g_o^{-1})S_k^{\alpha}(t_o)$, do que segue-se a afirmação.

Primeiro observamos que para $k = 1$ o teorema segue-se imediatamente da Proposição 2.1. Suponhamos, então, $k > 1$.

Seja $\{\mathbf{N}_1(t), \ldots, \mathbf{N}_r(t)\}$ um referencial transverso ao longo de α e seja $W \subset \mathcal{G}$ o sub espaço vetorial gerado por $\{\mathbf{v}, \mathbf{N}_1(t_o), \ldots, \mathbf{N}_r(t_o)\}$. Segue-se da própria definição de um referencial transverso, e da Proposição 2.1 mais uma vez, que

$$\mathcal{G}_{\alpha(t_o)} \oplus W = \mathcal{G}.$$

Com base na afirmação que fizemos, suponhamos que $\alpha(t_o) = eH$. É conhecido ([11], 123-124) que existe uma vizinhança, digamos U_o, de $\mathbf{0}$ em W, a qual é difeomorfa a uma vizinhança, digamos $U_{\alpha(t_o)}$, de $\alpha(t_o)$ em G/H. Além disso, se $\pi : G \to G/H$ denota, como antes, a projeção canônica e exp denota a restrição a U_o da aplicação exponencial de G, então $\pi \circ \exp : U_o \to U_{\alpha(t_o)}$ é um difeomorfismo.

Seja $\mathbf{w}_\alpha(t)$ a curva em U_o tal que $(\pi \circ \exp)(\mathbf{w}_\alpha(t)) = \alpha(t)$. Então, $\mathbf{w}_\alpha(t_o) = \mathbf{0}$.

Claramente, $\mathbf{w}_\beta(s) = s\mathbf{v}$ é a curva em U_o tal que

$$(\pi \circ \exp)(\mathbf{w}_\beta(s)) = \beta(s),$$

para s numa vizinhança de 0 em $\mathbb{R}$. Pelo Corolário 1.12 temos que α e β estão em contato de ordem k em $\alpha(t_o) = \beta(0)$ se, e somente se, $\mathbf{w}_\alpha$ e $\mathbf{w}_\beta$ estão em contato de ordem k em $\mathbf{w}_\alpha(t_o) = \mathbf{w}_\beta(t_o) = \mathbf{0}$. Portanto, a tese no Teorema é equivalente a: $\mathbf{v} \in S_k^\alpha(t_o)$ se, e somente se, existe um difeomorfismo local $\varphi : \mathbb{R}, 0 \to I, t_o$ tal que a reparametrização $\mathbf{w}_\gamma = \mathbf{w}_\alpha \circ \varphi$ de $\mathbf{w}_\alpha$ satisfaz

$$\mathbf{w}'_\gamma(0) = \mathbf{w}'_\beta(0) = \mathbf{v} \;\text{ e }\; \mathbf{w}_\gamma^{(j)}(0) = \mathbf{w}_\beta^{(j)}(0) = \mathbf{0},$$

para $j = 2, \ldots, k$. Suponhamos que exista uma tal reparametrização e consideremos, então,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u} &= \tfrac{e^{\operatorname{ad}\mathbf{w}_\gamma} - 1}{\operatorname{ad}\mathbf{w}_\gamma}\left(\mathbf{w}'_\gamma\right) \\ &= \mathbf{w}'_\gamma + \tfrac{1}{2!}[\mathbf{w}_\gamma, \mathbf{w}'_\gamma] + \tfrac{1}{3!}[\mathbf{w}_\gamma, [\mathbf{w}_\gamma, \mathbf{w}'_\gamma]] + \cdots . \end{aligned}$$

Como $\mathbf{w}_\gamma(0) = \mathbf{w}_\alpha(t_o) = \mathbf{0}$, e como $\mathbf{w}'_\gamma(0), \ldots, \mathbf{w}_\gamma^{(k)}(0)$ são múltiplos de $\mathbf{w}'_\gamma(0)$, podemos aplicar o Corolário 2.14 (com $\mathbf{w}_\gamma$ no lugar de $\mathbf{w}_\alpha$) para obtermos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0) &= \mathbf{w}'_\gamma(0) &= \mathbf{v} \\ \mathbf{u}'(0) &= \mathbf{w}''_\gamma(0) &= \mathbf{0} \\ &\vdots & \\ \mathbf{u}^{(k-1)}(0) &= \mathbf{w}_\gamma^{(k)}(0) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Podemos, assim, aplicar a Proposição 2.11 para assegurar que $\mathbf{v} = \mathbf{u}(0) \in S_k^\gamma(0)$. Além disso, pela Proposição 2.8, temos $\mathbf{v} \in S_k^\gamma(0) = S_k^\alpha(t_o)$, que era desejado mostrar.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{v} \in S_k^\alpha(t_o)$. Introduzamos coordenadas em U_o escrevendo um elemento $\mathbf{w} \in U_o$ na forma $\mathbf{w} = a_o\mathbf{v} + a_1\mathbf{N}_1(t_o) + \ldots + a_r\mathbf{N}_r(t_o)$. Assim, $\mathbf{w}_\alpha(t) = a_o(t)\mathbf{v} + a_1(t)\mathbf{N}_1(t_o) + \ldots + a_r(t)\mathbf{N}_r(t_o)$, com $a_o(t_o) = a_1(t_o) = \ldots = a_r(t_o) = 0$. Além disso, vale lembrar, $\mathbf{w}'_\alpha(t_o) \neq \mathbf{0}$, já que α é mergulho.

AFIRMAÇÃO 2: $\mathbf{w}_\alpha^{(p)}(t_o) = a_o^{(p)}(t_o)\mathbf{v}$, para $p = 1, \ldots, k$.

Para que não haja descontinuidade na linha de raciocínio, adiamos um pouco a demontração da afirmação. Como, conforme já lembrado, $\mathbf{w}'_\alpha(t_o) \neq \mathbf{0}$, segue-se da afirmação 2 que $a'_o(t_o) \neq 0$. Seja, então, $\varphi : \mathbb{R}, 0 \to I, t_o$ um difeomorfismo local tal que $\varphi'(0) = \frac{1}{a'_o(t_o)}$. Claramente, $\mathbf{w}_\gamma = \mathbf{w}_\alpha \circ \varphi$ satisfaz $\mathbf{w}'_\gamma(0) = \mathbf{v}$. Utilizando novamente a afirmação 2, podemos escrever

$$\mathbf{w}''_\gamma(0) = \mathbf{w}''_\alpha(t_o)\varphi'^2(0) + \mathbf{w}'_\alpha(t_o)\varphi''(0) = \Big(\varphi'^2(0)a''_o(t_o) + a'_o(t_o)\varphi''(0)\Big)\,\mathbf{v}.$$

Isso mostra que se tomarmos φ satisfazendo também

$$\varphi''(0) = -\frac{a''_o(t_o)}{(a'_o(t_o))^3},$$

então teremos $\mathbf{w}''_\gamma(0) = \mathbf{0}$, conforme desejado. Assim, não é difícil ver, esse é o primeiro passo para um argumento de indução mostrando que podemos tomar $\varphi(s) = t_o + \sum_{i=1}^{k} \varphi^{(i)}(0)\frac{s^i}{i!}$ com derivadas em 0 prescritas de modo a termos $\mathbf{w}''_\gamma(0) = \ldots = \mathbf{w}^{(k)}_\gamma(0) = \mathbf{0}$.

DEMONSTRAÇÃO da AFIRMAÇÃO 2: Procederemos por indução. Seja $\mathbf{u}(t)$ como no Lema 2.13, com $\mathbf{w}_\alpha$ lá coincidindo com $\mathbf{w}_\alpha$ que introduzimos acima. Então, $\langle \mathbf{u}(t), \mathrm{N}_i(t)\rangle = 0$, para todo t e para $i = 1, \ldots, r$. Em particular, em $t = t_o$, pelo caso a) do Corolário 2.14, temos:

$$\begin{aligned}
0 = \langle \mathbf{u}(t_o), \mathrm{N}_1(t_o)\rangle &= \langle \mathbf{w}'_\alpha(t_o), \mathrm{N}_1(t_o)\rangle \\
&= a'_o(t_o)\langle \mathbf{v}, \mathrm{N}_1(t_o)\rangle + \textstyle\sum_{i=1}^{r} a'_i(t_o)\langle \mathrm{N}_i(t_o), \mathrm{N}_1(t_o)\rangle, \\
\vdots \\
0 = \langle \mathbf{u}(t_o), \mathrm{N}_r(t_o)\rangle &= \langle \mathbf{w}'_\alpha(t_o), \mathrm{N}_r(t_o)\rangle \\
&= a'_o(t_o)\langle \mathbf{v}, \mathrm{N}_r(t_o)\rangle + \textstyle\sum_{i=1}^{r} a'_i(t_o)\langle \mathrm{N}_i(t_o), \mathrm{N}_r(t_o)\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{v} \in S_k^\alpha(t_o) \subset S_1^\alpha(t_o)$, sabemos que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_i(t_o)\rangle = 0$, para $i = 1, \ldots, r$; como $\{\mathbf{N}_1(t_o), \ldots, \mathbf{N}_r(t_o)\}$ é um conjunto linearmente independente, concluímos que $a_i'(t_o) = 0$, para $i = 1, \ldots, r$.

Isso mostra que a afirmação é verdadeira para $p = 1$. Suponhamos que ela seja verdadeira para $p = 1, 2, \ldots, l < k$. Então, pelo Corolário 2.14, obtemos

$$\mathbf{u}'(t_o) = \mathbf{w}_\alpha''(t_o), \ldots, \mathbf{u}^{(l)}(t_o) = \mathbf{w}_\alpha^{(l+1)}(t_o). \qquad (*)$$

Derivando $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{N}_i(t)\rangle = 0$, sucessivamente l vezes, obtemos

$$0 = \langle \mathbf{u}^{(l)}(t), \mathbf{N}_i(t)\rangle + \sum_{j=1}^{l} m_j \langle \mathbf{u}^{(l-j)}(t), \mathbf{N}_i^{(j)}(t)\rangle,$$

onde $m_j = \binom{l}{j}$, para $i = 1, \ldots, r$. Avaliando essa expressão em $t = t_o$, e utilizando $(*)$, obtemos

$$0 = \langle \mathbf{w}_\alpha^{(l+1)}(t_o), \mathbf{N}_i(t_o)\rangle + \sum_{j=1}^{l} m_j \langle \mathbf{w}_\alpha^{(l+1-j)}(t_o), \mathbf{N}_i^{(j)}(t_o)\rangle$$

A hipótese de indução permite-nos reescrever isso como

$$0 = \langle \mathbf{w}_\alpha^{(l+1)}(t_o), \mathbf{N}_i(t_o)\rangle + \sum_{j=1}^{l} m_j \langle a_o^{(l+1-j)}(t_o)\mathbf{v}, \mathbf{N}_i^{(j)}(t_o)\rangle.$$

Da hipótese $\mathbf{v} \in S_k^\alpha(t_o)$ temos o anulamento de cada termo sob o sinal somatório, já que l é estritamente menor que k. Assim, obtivemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{w}_\alpha^{(l+1)}(t_o), \mathbf{N}_i(t_o)\rangle = \langle \textstyle\sum_{j=0}^{r} a_j^{(l+1)}(t_o)\mathbf{N}_j(t_o), \mathbf{N}_i(t_o)\rangle \\ &= a_o^{(l+1)}(t_o)\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_i(t_o)\rangle + \textstyle\sum_{j=1}^{r} a_j^{(l+1)}(t_o)\langle \mathbf{N}_j(t_o), \mathbf{N}_i(t_o)\rangle \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{r} a_j^{(l+1)}(t_o)\langle \mathbf{N}_j(t_o), \mathbf{N}_i(t_o)\rangle \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, r$.

Portanto, o mesmo argumento utilizado no caso $p = 1$ pode ser aplicado agora, do qual obtemos $a_j^{(l+1)}(t_o) = 0$ para $j = 1, \ldots, r$. Isso mostra que a afirmação feita é verdadeira também para $p = l + 1$, o que completa o passo de indução e finaliza a demonstração do teorema. ∎

Definição 2.3 Dizemos que $\alpha : I \to G/H$ é *k-comparável em* $t \in I$, se $S_k^\alpha(t)$ não está contido em $\mathcal{G}_{\alpha(t)}$; noutras palavras, se existe uma trajetória passando por $\alpha(t)$ e estando em contato de ordem k com α em $\alpha(t)$. Quando isso vale para todo $t \in I$, dizemos que α é *k-comparável*.

O teorema da estratificação não relaciona de modo direto os sub espaços associados a α, com aqueles associados a trajetória β, mesmo porque a hipótese $\mathbf{v} \notin \mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$ já exclui elementos dos espaços associados a α em $\alpha(t_o)$. No entanto, basta observarmos alguns detalhes para obtermos tal relação. Na verdade, sob a hipótese de k-comparabilidade, podemos obter essa relação para dois mergulhos quaisquer, como veremos em seguida.

Proposição 2.16 *Sejam* $\alpha : I_1 \to G/H$ *e* $\gamma : I_2 \to G/H$, *mergulhos k-comparáveis em* t_1 *e* t_2, *respectivamente, com* $\alpha(t_1) = \gamma(t_2)$. *Então,* α *e* γ *estão em contato de ordem* k, *em* $\alpha(t_1) = \gamma(t_2)$, *se, e somente se* $S_k^\alpha(t_1) = S_k^\gamma(t_2)$, *que também é equivalente a* $S_1^\alpha(t_1) = S_1^\gamma(t_2), \ldots, S_k^\alpha(t_1) = S_k^\gamma(t_2)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja C_α o conjunto complementar de $S_k^\alpha(t_1) \cap \mathcal{G}_\alpha(t_1)$ em $S_k^\alpha(t_1)$. Analogamente, seja C_γ o conjunto complementar de $S_k^\gamma(t_1) \cap \mathcal{G}_\gamma(t_2)$ em $S_k^\gamma(t_2)$. A hipótese de k-comparabilidade garante que C_α e C_γ são, ambos, não vazios. Além disso, pela Proposição 2.1, temos que dim$S_k^\alpha(t_1) = \dim\left(S_k^\alpha(t_1) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t_1)}\right) + 1$. Portanto, C_α é um subconjunto denso do subespaço vetorial $S_k^\alpha(t_1)$. Claro, afirmação correspondente vale com relação a C_γ e $S_k^\gamma(t_2)$.

Agora, por um lado, segue-se do Teorema da estratificação e do Corolário 1.13 (a transitividade da relação de equivalência, especificamente), que α e γ estão em contato de ordem k em $\alpha(t_1) = \gamma(t_2)$ se, e somente se, $C_\alpha = C_\gamma$.

Por outro lado, invocando a densidade de $C_\alpha = C_\gamma$, conforme estabelecida acima, temos: $C_\alpha = C_\gamma$ se, e somente se, $S_k^\alpha(t_1) = S_k^\gamma(t_2)$.

Para finalizar a demonstração, observamos que k-comparabilidade implica em j-comparabilidade para $j = 1, \ldots, k$. ■

A demonstração acima confirma que, tratando-se de contato com trajetórias, podemos tomar como padrão de comparação os subespaços associados as trajetórias. Esses, por vez deles, pelo menos localmente, são de certo modo mais "tratáveis". Os resultados de agora até o final deste capítulo tendem a dar melhor sentido a isso.

Proposição 2.17 *Seja $p \in G/H$ e seja $\mathrm{v} \in \mathcal{G}$, $\mathrm{v} \notin \mathcal{G}_p$. Consideremos a trajetória passando por p, $\beta(s) = \exp(s\mathrm{v}) \cdot p$. Seja, ainda, $\{\mathbf{n}_1(0), \ldots, \mathbf{n}_r(0)\}$ um conjunto linearmente independente que gera o complemento ortogonal de $S_1^\beta(0)$. Se, para cada $i = 1, \ldots r$, $\mathrm{N}_i(s)$ é definido por*

$$\langle \mathrm{N}_i(s), \mathrm{w}\rangle = \langle \mathbf{n}_i(0), \mathrm{Ad}(\exp(-s\mathrm{v}))\mathrm{w}\rangle, \quad \forall \mathrm{w} \in \mathcal{G},$$

então $\{\mathrm{N}_1(s), \ldots, \mathrm{N}_r(s)\}$ é um referencial transverso ao longo de β. (Para s numa *vizinhança de $s = 0$).*

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos pela Observação 2.2 que $S_1^\beta(s) = \mathcal{G}_{\beta(s)} \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}$. Agora, por um lado, como $\beta(s) = \exp(s\mathbf{v}) \cdot p = \exp(s\mathbf{v}) \cdot \beta(0)$, temos

$$\mathcal{G}_{\beta(s)} = \mathrm{Ad}(\exp(s\mathbf{v}))\mathcal{G}_p.$$

Por outro lado, como $\mathrm{Ad}(\exp(s\mathbf{v}))\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{G}$, obtemos

$$S_1^\beta(s) = \mathrm{Ad}(\exp(s\mathbf{v}))S_1^\beta(0).$$

Assim, se $\mathbf{w}(s) \in S_1^\beta(s)$, então $\mathbf{w}(s) = \mathrm{Ad}(\exp(s\mathbf{v}))\mathbf{w}_o$, para certo $\mathbf{w}_o \in S_1^\beta(0)$. Segue-se que

$$\langle \mathbf{N}_i(s), \mathbf{w}(s)\rangle = \langle \mathbf{n}_i(0), \mathbf{w}_o\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, r.$$

Para concluirmos a demonstração, observamos que $\{\mathbf{N}_1(s), \ldots, \mathbf{N}_r(s)\}$ é linearmente independente numa vizinhança de $s = 0$, o que segue-se de $\mathbf{N}_i(0) = \mathbf{n}_i(0)$, $i = 1, \ldots, r$, invocando a continuidade das aplicações envolvidas. ∎

Corolário 2.18 *Sejam β e $\{\mathbf{N}_1(s), \ldots, \mathbf{N}_r(s)\}$ o referencial transverso ao longo de β tais como na Proposição 2.17. Para $i = 1, \ldots, r$, a j-ésima derivada $\mathbf{N}_i^{(j)}(0)$, $j \geq 1$, satisfaz*

$$\langle \mathbf{N}_i^{(j)}(0), \mathbf{w}\rangle = (-1)^j \langle \mathbf{N}_i(0), \underbrace{[\mathbf{v}, [\mathbf{v}[\cdots, [\mathbf{v},}_{j} \mathbf{w}]]\cdots]]]\rangle,$$

qualquer que seja $\mathbf{w} \in \mathcal{G}$. (Como usual, $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de Lie.)

DEMONSTRAÇÃO: O corolário segue diretamente quando avaliamos a j-ésima derivada de

$$\langle \mathbf{N}_i(s), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{n}_i(0), \mathrm{Ad}(\exp(-s\mathbf{v}))\mathbf{w}\rangle,$$

valendo-nos da relação bem conhecida

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\,(exp(s\mathbf{x}))\,\mathbf{y} &= \exp\,(s\,\mathrm{ad}(\mathbf{x}))\,\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y} + s[\mathbf{x},\mathbf{y}] + \tfrac{s^2}{2!}[\mathbf{x},[\mathbf{x},\mathbf{y}]] + \cdots, \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

■

Lema 2.19 *Seja* $\alpha : I \to G/H$ $(k+1)$*-comparável em* $t_o \in I$ *e seja* $\mathbf{v} \in S^{\alpha}_{k+1}(t_o)$*, com* $\mathbf{v} \notin \mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$*. Se* $\mathbf{u} \in S^{\alpha}_{k+1}(t_o)$*, então*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}] \in S^{\alpha}_k(t_o).$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a trajetória $\beta(s) = \exp(s\mathbf{v})\cdot\alpha(t_o)$. Pela Proposição 2.16, temos

$$S^{\alpha}_1(t_o) = S^{\beta}_1(0), \ldots, S^{\alpha}_{k+1}(t_o) = S^{\beta}_{k+1}(0),$$

de modo que devemos mostrar que se $\mathbf{u} \in S^{\beta}_{k+1}(0)$, então $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] \in S^{\beta}_k(0)$.

Seja $\{\mathbf{N}_1(s), \ldots, \mathbf{N}_r(s)\}$ o referencial transverso ao longo de β, tal como construido na Proposição 2.17. Para cada $i = 1, \ldots, r$, e para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{G}$ temos, pelo Corolário 2.18,

$$\begin{array}{lrcl} a_1) & \langle \mathbf{N}_i'(0), \mathbf{w}\rangle &=& -\langle \mathbf{N}_i(0), [\mathbf{v}, \mathbf{w}]\rangle \\ a_2) & \langle \mathbf{N}_i''(0), \mathbf{w}\rangle &=& \langle \mathbf{N}_i(0), [\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]]\rangle \\ & &\vdots& \\ a_k) & \langle \mathbf{N}_i^{(k)}(0), \mathbf{w}\rangle &=& (-1)^k \langle \mathbf{N}_i(0), \underbrace{[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, [\cdots, [\mathbf{v}}_{k}, \mathbf{w}] \cdots]]]\rangle. \end{array}$$

Queremos ver que $[\mathbf{v},\mathbf{u}] \in S_k^\beta(0)$. Isto é, queremos

$$\begin{array}{lll} b_o) & \langle \mathbf{N}_i(0), [\mathbf{v},\mathbf{u}]\rangle & = 0 \\ b_1) & \langle \mathbf{N}_i'(0), [\mathbf{v},\mathbf{u}]\rangle & = 0 \\ & & \vdots \\ b_{k-1}) & \langle \mathbf{N}_i^{(k-1)}(0), [\mathbf{v},\mathbf{u}]\rangle & = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, r. \end{array}$$

Tomando $\mathbf{w} = \mathbf{u} \in S_{k+1}^\beta(0)$ em $a_1), \ldots, a_k)$ obtemos, tal como queríamos,

$$c_o) \quad 0 = \langle \mathbf{N}_i'(0), \mathbf{u}\rangle = -\langle \mathbf{N}_i(0), [\mathbf{v},\mathbf{u}]\rangle,$$

$$c_1) \quad 0 = \langle \mathbf{N}_i''(0), \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{N}_i(0), [\mathbf{v},[\mathbf{v},\mathbf{u}]]\rangle = -\langle \mathbf{N}_i'(0), [\mathbf{v},\mathbf{u}]\rangle,$$

$$\vdots$$

$$c_{k-1})\, 0 = \langle \mathbf{N}_i^{(k)}(0), \mathbf{u}\rangle = (-1)^k \langle \mathbf{N}_i(0), \underbrace{[\mathbf{v},[\mathbf{v},[\cdots,[\mathbf{v}}_{k},\mathbf{u}]\cdots]]]\rangle = -1\langle \mathbf{N}_i^{(k-1)}(0), [\mathbf{v},\mathbf{u}]\rangle,$$

onde a última igualdade em cada dessas expressões, exceto na primeira, foi obtida tomando $\mathbf{w} = [\mathbf{v},\mathbf{u}]$ em $a_1), \ldots, a_{k-1})$. ■

Teorema 2.20 *(da Estabilização) Se $\alpha : I \to G/H$ é $(k+2)$-comparável em $t_o \in I$ e se $S_{k+1}^\alpha(t_o) = S_k^\alpha(t_o)$, então $S_{k+2}^\alpha(t_o) = S_{k+1}^\alpha(t_o)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $S_{k+2}^\alpha(t_o) \subset S_{k+1}^\alpha(t_o)$, devemos mostrar que $S_{k+1}^\alpha(t_o) \subset S_{k+2}^\alpha(t_o)$. Seja $\mathbf{v} \in S_{k+2}^\alpha(t_o)$, com $\mathbf{v} \notin \mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$, cuja existência está assegurada pela hipótese de $(k+2)$-comparabilidade. Considerando $\beta(s) = \exp(s\mathbf{v}) \cdot \alpha(t_o)$, sabemos que

$$S_1^\alpha(t_o) = S_1^\beta(0), \ldots, S_{k+2}^\alpha(t_o) = S_{k+2}^\beta(0).$$

Assim, devemos mostrar que $S^{\beta}_{k+1}(0) \subset S^{\beta}_{k+2}(0)$, sabendo que $S^{\beta}_{k+1}(0) = S^{\beta}_{k}(0)$. Seja, então $\mathbf{u} \in S^{\beta}_{k+1}(0)$. Considerando o referencial transverso ao longo de β obtido na Proposição 2.17, temos, pelo Corolário 2.18,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_i^{(k+1)}(0), \mathbf{u}\rangle &= (-1)^{k+1}\langle \mathbf{N}_i(0), \underbrace{[\mathbf{v}, [\mathbf{v}[\cdots, [\mathbf{v}}_{k+1}, \mathbf{u}]]\cdots]]]\rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}_i^{(k)}(0), [\mathbf{v}, \mathbf{u}]\rangle, \end{aligned} \qquad (*)$$

para cada $i = 1, \ldots, r$. Mas, como $\mathbf{v} \in S^{\beta}_{k+2}(0) \subset S^{\beta}_{k+1}(0)$ e $\mathbf{v} \notin \mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$, sabemos pelo Lema 2.19 que $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] \in S^{\beta}_{k}(0)$. Por hipótese temos, então, $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] \in S^{\beta}_{k+1}(0)$. Ora, isso diz justamente que o último termo de $(*)$ é nulo. Portanto,

$$\langle \mathbf{N}_i^{(k+1)}(0), \mathbf{u}\rangle = 0,$$

para $i = 1, \ldots, r$, e concluimos que $\mathbf{u} \in S^{\beta}_{k+2}(0)$. ∎

Observação 2.21 Considerando que uma trajetória, digamos β, é k-comparável para todo k, o Teorema 2.20 diz que, se $S^{\beta}_{k}(s_o) = S^{\beta}_{k+1}(s_o)$ para algum k, então $S^{\beta}_{j}(s_o) = S^{\beta}_{k}(s_o)$ para todo $j \geq k$. Tal fato permitirá (Secção 4.3) uma interpretação geométrica para a exclusão das retas, na geometria afim unimodular. Veremos também (Subsecção 4.3.3), que a hipótese de $(k+2)$-comparabilidade é essencial no Teorema 2.20.

Capítulo 3

Sobre congruência

Dado um mergulho $\alpha : I \to G/H$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, gostaríamos de caracterizar as subvariedades que são congruentes a imagem desse mergulho ou, pelo menos, de alguma restrição sua a um subintervalo de I. Estamos, portanto, utilizando a parte *i*) da Definição 1.4. Contudo, para que possamos utilizar o Cálculo Diferencial, consideraremos primeiro uma situação particular, estudando a congruência de aplicações, de acordo com a parte *ii*) da mesma Definição 1.4. Depois disso é que abordaremos o assunto *parametrização*.

Várias questões ainda não puderam ser resolvidas. Falando em termos gerais, as dificuldades originam-se do seguinte: há situações em que não existe trajetória com a qual o mergulho está em contato de ordem suficientemente alta; também, pode existir trajetória com a qual o mergulho tem toda ordem de contato desejada, mas o traço dessa trajetória não é determinado por uma única reta em $\mathcal{G}$ (ver Observação 3.6).

3.1 Da ação de G sobre $E_k(G/H)$

Comecemos indagando sobre a validade da recíproca do Teorema 2.9. Assim nos perguntamos: dados mergulhos $\alpha, \gamma : I \to G/H$ tais que $S_k^\gamma(t) = \mathrm{Ad}(g_o)S_k^\alpha(t)$, $\forall t \in I$, $k = 1, 2, \ldots$, e para algum $g_o \in G$, seria verdade que $\gamma = g_o \cdot \alpha$?

Desde já, infelizmente, a resposta é negativa. Em termos gerais o que acontece é o seguinte. Suponhamos que para cada $t \in I$ e para todo k, exista $g(t) \in G$ tal que $\mathrm{Ad}(g(t))S_k^\alpha(t) = S_k^\alpha(t)$. Então a hipótese $S_k^\gamma(t) = \mathrm{Ad}(g_o)S_k^\alpha(t)$, é equivalente a $S_k^\gamma(t) = \mathrm{Ad}(g_o g(t))S_k^\alpha(t)$, da qual não devemos, claro, esperar conclusão alguma sobre congruência.

O fenômeno anunciado acima ocorre de fato. Para ver isso, basta considerar um caso em que G é abeliano (o grupo das translações de $\mathbb{R}^n$, por exemplo). Num tal caso $\mathrm{Ad}(g)$ é a identidade, qualquer que seja $g \in G$. Portanto, $S_k^\alpha(t) = \mathrm{Ad}(g)S_k^\alpha(t)$ para todo $t \in I$, para $k = 1, 2, \ldots$, e para todo $g \in G$. Claro, a transitividade da ação não permite $\alpha = g \cdot \alpha$ para todo $g \in G$.

Está claro da discussão acima que devemos, antes de tudo, estudar o conjunto dos elementos $g \in G$ tais que $\mathrm{Ad}(g)S_k^\alpha(t) = S_k^\alpha(t)$, para todo t e cada k. Isso daria uma medida para a obstrução à validade da recíproca do Teorema 2.9. Nesta secção, desenvolveremos ferramentas que ajudam a medir isso. A situação ideal que consideraremos na Secção 3.2 é justamente uma maneira de eliminar tais obstruções, de modo que os resultados que agora estabeleceremos não são essenciais para o que lá será feito. Contudo, claro, são fundamentais para que entendamos o quanto e como a situação ideal é restritiva.

Dado um mergulho $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G/H$ e dado $t \in I$, seja $C_k^{\alpha(t)}$ o elemento de contato de ordem k, em $\alpha(t)$, (Definição 1.6) definido por α. Consideremos $H_k^\alpha(t) \subset G_{\alpha(t)}$ definido por

$$H_k^\alpha(t) = \{g \in G;\ C_k^{\alpha(t)} = C_k^{(g\cdot\alpha)(t)}\}.$$

Em termos da ação natural de G sobre a variedade $E_k(G/H)$ dos elementos de contato de ordem k sobre G/H, temos que $H_k^\alpha(t)$ é justamente o subgrupo de isotropia em $C_k^{\alpha(t)}$. Portanto, $H_k^\alpha(t)$ é um subgrupo de Lie de G. Se α é k-comparável, então podemos dizer sobre a Álgebra de Lie de $H_k^\alpha(t)$:

Proposição 3.1 *Se α é k-comparável em $t \in I$, então a Álgebra de Lie de $H_k^\alpha(t)$ é*

$$\mathcal{H}_k^\alpha(t) = \{\ \mathrm{w} \in \mathcal{G}_{\alpha(t)}\,; [\mathrm{w}, S_k^\alpha(t)] \subset S_k^\alpha(t)\ \}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Primeiro observamos que para todo $g \in G$, temos que $g \cdot \alpha$ é k-comparável em t. Isso é consequência direta do Teorema 2.9 e do fato de $\mathcal{G}_{g\cdot\alpha(t)} = \mathrm{Ad}(g)\mathcal{G}$. Assim, podemos invocar a Proposição 2.16 para garantir que, se $h \in G_{\alpha(t)}$, então

$$h \in H_k^\alpha(t) \quad \text{se, e somente se,} \quad S_k^\alpha(t) = S_k^{h\cdot\alpha}(t).$$

Equivalentemente, pelo Teorema 2.9 novamente, obtemos

$$h \in H_k^\alpha(t) \quad \text{se, e somente se,} \quad h \in G_{\alpha(t)} \text{ e } \mathrm{Ad}(h)S_k^\alpha(t) = S_k^\alpha(t).$$

Segue-se que $H_k^\alpha(t)$ é justamente a intersecção de $G_{\alpha(t)}$ com o normalizador de $S_k^\alpha(t)$ em G. O resultado fica, portanto, conhecido (ver [12] pp.19 e $36-37$, por exemplo.) ■

Corolário 3.2 *Se α é k-comparável em t, então*

$$\mathcal{H}_k^{g\cdot\alpha}(t) = \mathrm{Ad}(g)\mathcal{H}_k^{\alpha}(t)$$

qualquer que seja $g \in G$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_k^{\alpha}(t)$, isto é, $\mathbf{w} \in \mathcal{G}_\alpha(t)$ e $[\mathbf{w}, S_k^{\alpha}(t)] \subset S_k^{\alpha}(t)$. Então $\mathrm{Ad}(g)[\mathbf{w}, S_k^{\alpha}(t)] \subset \mathrm{Ad}(g)S_k^{\alpha}(t) = S_k^{g\cdot\alpha}(t)$. Ora, sabemos (Teorema 1.1) que

$$\mathrm{Ad}(g)[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathrm{Ad}(g)\mathbf{v}, \mathrm{Ad}(g)\mathbf{w}],$$

quaisquer sejam $g \in G$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{G}$. Temos, portanto,

$$[\mathrm{Ad}(g)\mathbf{w}, \mathrm{Ad}(g)S_k^{\alpha}(t)] = [\mathrm{Ad}(g)\mathbf{w}, S_k^{g\cdot\alpha}(t)] \subset S_k^{g\cdot\alpha}(t),$$

donde $\mathrm{Ad}(g)\mathbf{w} \in \mathcal{H}_k^{g\cdot\alpha}(t)$. Assim, $\mathrm{Ad}(g)\mathcal{H}_k^{\alpha}(t) \subset \mathcal{H}_k^{g\cdot\alpha}(t)$. A inclusão contrária é obtida analogamente. ■

Teorema 3.3 *Suponhamos que α seja $(k+1)$-comparável em t. Tomemos $\mathcal{H}_o^{\alpha}(t) = \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ e, para $j \geq 1$, sejam $\mathcal{H}_j^{\alpha}(t)$ como na Proposição 3.1. Então*

$$\mathcal{H}_j^{\alpha}(t) = S_{j+1}^{\alpha}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

DEMONSTRAÇÃO: Procederemos por indução sobre k. O Teorema é verdadeiro para $k = 0$, como consequência da Proposição 2.1. Suponhamos (a hipótese de indução) que α ser k-comparável em t implique em $\mathcal{H}_j^{\alpha}(t) = S_{j+1}^{\alpha}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$, para $j = 0, \ldots, k-1$. Devemos mostrar que o fato de α ser $(k+1)$-comparável em t, implica em

$$\mathcal{H}_j^{\alpha}(t) = S_{j+1}^{\alpha}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}, \quad \text{para}\, j = 0, \ldots, k.$$

Ora, se α é $(k+1)$-comparável em t, então α é m-comparável para $m = 1, \ldots, k+1$, de modo que a hipótese de indução garante ser suficiente mostrar que

$$\mathcal{H}_k^\alpha(t) = \mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}.$$

Primeiro mostraremos que $\mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)} \subset \mathcal{H}_k^\alpha(t)$, sendo que para isso consideraremos 3 casos.

Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$. De acordo com a Proposição 3.1, devemos mostrar que

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in \mathcal{S}_k^\alpha(t), \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k^\alpha(t).$$

CASO 1: $\mathbf{v} \in \mathcal{S}_k^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$. Temos $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_k^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$, já que $\mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t) \subset \mathcal{S}_k^\alpha(t)$. Por hipótese de indução temos que $\mathcal{S}_k^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ é justamente a sub álgebra de Lie $\mathcal{H}_{k-1}^\alpha(t)$; portanto $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in \mathcal{H}_{k-1}^\alpha(t) \subset \mathcal{S}_k^\alpha(t)$.

CASO 2: $\mathbf{v} \in \mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t)$, $\mathbf{v} \notin \mathcal{S}_k^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$. Ora, a situação aqui é justamente a que se apresenta no Lema 2.19 e, portanto, está resolvida.

CASO 3: $\mathbf{v} \notin \mathcal{S}_k^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ e $\mathbf{v} \notin \mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t)$.

Como α é $(k+1)$-comparável em t, podemos escolher $\mathbf{v}_{k+1} \in \mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t)$ tal que $\mathcal{S}_1^\alpha(t) = \mathcal{G}_{\alpha(t)} \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_{k+1}$.

Em particular, todo elemento $\mathbf{v}$ de $\mathcal{S}_k^\alpha(t) \subset \mathcal{S}_1^\alpha(t)$ pode ser escrito na forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k + \lambda \mathbf{v}_{k+1}$, para certos $\mathbf{v}_k \in \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos $\mathbf{v}_k = \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v}_{k+1} \in \mathcal{S}_k^\alpha(t)$, já que $\mathbf{v}_{k+1} \in \mathcal{S}_{k+1}^\alpha(t) \subset \mathcal{S}_k^\alpha(t)$. Obtemos, portanto, $\mathbf{v}_k \in \mathcal{S}_k^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$.

Assim, invocando a linearidade de $[\mathbf{u}, \cdot]$ (para $\mathbf{u}$ fixo), temos reduzido o CASO 3 aos dois casos anteriores. Portanto, solucionamos também este caso. Isso finaliza a demonstração de

$$S^{\alpha}_{k+1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)} \subset \mathcal{H}^{\alpha}_{k}(t).$$

Vejamos a inclusão contrária. Tomemos $\mathbf{u} \in \mathcal{H}^{\alpha}_{k}(t)$, isto é,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{G}_{\alpha(t)} \text{ e } [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in S^{\alpha}_{k}(t), \ \forall \mathbf{v} \in S^{\alpha}_{k}(t).$$

Fixemos $\mathbf{v} \in S^{\alpha}_{k+1}(t)$, $\mathbf{v} \notin \mathcal{G}_{\alpha(t)}$, a existência de um tal elemento estando garantida pela $(k+1)$-comparabilidade de α, como já observamos acima. Considerando a trajetória $\beta(s) = \exp(s\mathbf{v}) \cdot \alpha(t)$, podemos refazer a construção feita na demonstração do Lema 2.19. Desta vez temos que as equações $b_0), \ldots, b_{k-1})$ estarão satisfeitas por hipótese. Tomando $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ em $a_1), \ldots, a_k)$ obtemos o anulamento dessas expressões a partir de $b_0), \ldots, b_{k-1})$. Assim, $\mathbf{u} \in S^{\alpha}_{k+1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ e concluimos, portanto, que $\mathcal{H}^{\alpha}_{k}(t) \subset S^{\alpha}_{k+1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$. ∎

3.2 A evoluta de Lie

O objetivo desta subsecção é discutir o que seria um padrão ideal de comparabilidade entre um dado mergulho e trajetórias. Os resultados que estabeleceremos, ainda nesta Secção, mostrarão que podemos tomar um tal padrão como sendo caracterizado pela definição seguinte.

Definição 3.1 Seja $\alpha : I \to G/H$ um mergulho.

i) Diremos que k é uma *ordem boa de contato* para $\alpha : I \to G/H$, se α é k-comparável e a dimensão de cada $S^{\alpha}_{i}(t)$ é constante quando t varia em I, para $i = 1, \ldots, k$.

ii) Diremos que uma ordem boa de contato para α, k, é a *ordem ideal de contato* para α se $\dim S_k^\alpha(t) = 1$ e k é o menor número natural nestas condições. Quando a ordem de contato para α existir, diremos que α é um *mergulho ideal.*

Seja α um mergulho ideal e seja k a ordem ideal de contato para α. Então, como $S_k^\alpha(t)$ não está contido em $\mathcal{G}_{\alpha(t)}$ (pela k-comparabilidade), podemos invocar a Proposição 2.3 para afirmar: para cada $t \in I$, existe um único $\mathbf{w}_\alpha(t) \in S_k^\alpha(t)$ tal que

$$D_e R_{z(t)}(\mathbf{w}_\alpha(t)) - z'(t) \in \mathrm{Ker} D_{z(t)}\pi,$$

qualquer que seja o levantamento $z : I \to G$ de α. Equivalentemente, pela demonstração da mesma proposição, temos que $\mathbf{w}_\alpha(t)$ é o único elemento em $S_k^\alpha(t)$ tal que $D_e\Phi_{\alpha(t)}(\mathbf{w}_\alpha(t)) = \alpha'(t)$, onde $\Phi_{\alpha(t)} : G \to G/H$ é definida por $\Phi_{\alpha(t)}(g) = g \cdot \alpha(t)$.

Definição 3.2 $\mathbf{w}_\alpha : I \to \mathcal{G}$ tal como construida acima será chamada a *evoluta de Lie* do mergulho ideal α.

Proposição 3.4 *A evoluta de Lie, $\mathbf{w}_\alpha$, de um mergulho ideal $\alpha : I \to G/H$ é diferenciável.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_r\}$ um referencial transverso ao longo de α e seja k a ordem ideal de contato para esse mergulho. Pela definição de um sub espaço associado, temos que $S_k^\alpha(t)$ é o complemento ortogonal do subespaço, digamos $V(t)$, gerado por $\{\mathbf{N}_1(t), \ldots, \mathbf{N}_r(t), \mathbf{N}_1'(t), \ldots, \mathbf{N}_r'(t), \ldots, \mathbf{N}_1^{(k-1)}(t), \ldots, \mathbf{N}_r^{(k-1)}(t)\}$. Fixemos, arbitrariamente, $t_o \in I$ e escolhamos $\{\mathbf{n}_1(t_o), \ldots, \mathbf{n}_{\dim G-1}(t_o)\}$, um subconjunto de $\{\mathbf{N}_1(t_o), \ldots, \mathbf{N}_r(t_o), \mathbf{N}_1'(t_o), \ldots, \mathbf{N}_r'(t_o), \ldots, \mathbf{N}_1^{(k-1)}(t_o), \ldots, \mathbf{N}_r^{(k-1)}(t_o)\}$ que seja uma base de $V(t_o)$. Por continuidade, a escolha correspondente $\{\mathbf{n}_1(t), \dots, \mathbf{n}_{\mathrm{dimG}-1}(t)\}$, subconjunto de $\{\mathbf{N}_1(t), \dots, \mathbf{N}_r(t), \mathbf{N}_1'(t), \dots, \mathbf{N}_r'(t), \dots, \mathbf{N}_1^{(k-1)}(t), \dots, \mathbf{N}_r^{(k-1)}(t)\}$, fornece um subconjunto que haverá de permanecer linearmente independente para t numa vizinhança de t_o e, consequentemente, gerar $V(t)$. Restrigindo nossa atenção a essa vizinhança de t_o, temos que o produto vetorial

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{n}_1(t) \times \cdots \times \mathbf{n}_{\mathrm{dimG}-1}(t)$$

fornece um gerador de $S_k^\alpha(t)$, para cada t. Vemos diretamente que $\mathbf{u}$ é diferenciável. Sendo $\mathbf{u}(t)$ um gerador de $S_k^\alpha(t)$, temos que a evoluta de Lie $\mathbf{w}_\alpha$ escreve-se na forma $\mathbf{w}_\alpha(t) = \lambda(t)\mathbf{u}(t)$, para certa função real λ, nunca nula, é claro. A diferenciabilidade de $\mathbf{w}_\alpha$ seguir-se-á, portanto, se mostrarmos a diferenciabilidade de λ.

Pela definição de $\mathbf{w}_\alpha$ temos que $D_e\Phi_{\alpha(t)}(\mathbf{w}_\alpha(t)) = \alpha'(t)$. Portanto, $D_e\Phi_{\alpha(t)}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \alpha'(t)$. Agora, sabemos que em toda variedade diferenciável podemos definir uma métrica riemanniana (aqui bastaria fazer isso localmente o que, claro, é imediato). Seja, então, $p \mapsto \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_p$, $p \in G/H$, uma tal métrica. Isso nos permite escrever

$$\lambda^2(t)\langle\langle D_e\Phi_{\alpha(t)}\mathbf{u}(t), D_e\Phi_{\alpha(t)}\mathbf{u}(t)\rangle\rangle_{\alpha(t)} = \langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle\rangle.$$

Considerando que λ é nunca nula, é suficiente mostrarmos a diferenciabilidade de λ^2. Considerando a diferenciabilidade da métrica riemanniana, é suficiente mostrarmos a diferenciabilidade de $t \mapsto D_e\Phi_{\alpha(t)}(\mathbf{u}(t))$.

Seja $\Psi : G \times I \to G/H$ definida por $\Psi(g,t) = g \cdot \alpha(t)$, $g \in G, t \in I$. Consideremos as identificações naturais do fibrado tangente $T(G \times I)$:

$$T(G \times I) \approx TG \times TI \approx (G \times \mathcal{G}) \times (I \times \mathbb{R}).$$

Definindo $\Theta : I \to (G \times \mathcal{G}) \times (I \times \mathbb{R})$, por $\Theta(t) = ((e, \mathbf{u}(t)), (t, 0))$, temos, claramente, que Θ é diferenciável. Além disso, se $D\Psi : T(G \times I) \to T(G/H)$ denota a aplicação derivada de Ψ, então

$$(D\Psi \circ \Theta)(t) = D_{(e,t)}\Psi\left((\mathbf{u}(t), 0)\right) = D_e\Phi_{\alpha(t)}(\mathbf{u}(t)),$$

o que mostra a diferenciabilidade de $t \mapsto D_e\Phi_{\alpha(t)}(\mathbf{u}(t)$. ∎

Proposição 3.5 *Seja $\alpha(s) = \exp(s\mathrm{v}) \cdot p$ para algum $p \in G/H$ ($\mathrm{v} \notin \mathcal{G}_p$). Se α é um mergulho ideal, então a evoluta de Lie de α, $\mathbf{w}_\alpha$, é constante; mais precisamente, $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{v}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja k a ordem ideal de contato para α. Então $S_k^\alpha(s)$ é o sub espaço vetorial de $\mathcal{G}$ gerado por $\mathbf{v}$, como consequência do Corolário 2.12. Por outro lado, é claro que $D_e\Phi_{\alpha(s)}(\mathrm{v}) = \alpha'(s)$, de modo que o resultado segue-se diretamente da definição de evoluta de Lie. ∎

Observação 3.6 α pode ser mesmo uma trajetória e, nem assim, existir a ordem de contato ideal, ou seja, sua evoluta de Lie pode não estar definida. Por exemplo, esse é o caso das retas na geometria afim unimodular (Subsecção 4.1.2).

Lema 3.7 *Seja z um levantamento de $\alpha : I \to G/H$ a G e fixemos $t_o \in I$. Suponhamos α ideal e consideremos $\mathbf{w}_\alpha$ a evoluta de Lie de α. Se, de acordo com o Teorema 1.9, $g : I \to G$ é a única curva tal que $g(t_o) = z(t_o)$ e $D_g R_{g^{-1}} g' = \mathbf{w}_\alpha$, então g é um levantamento de α.*

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que

$$D_e R_z \mathbf{w} - z' \in \mathrm{Ker} D_z \pi.$$

Como $\mathrm{Ker} D_z \pi = D_e L_z \mathcal{H}$, obtemos

$$(D_e L_z)^{-1}(z' - D_e R_z \mathbf{w}) = D_z L_{z^{-1}} z' - \mathrm{Ad}(z^{-1})\mathbf{w} \in \mathcal{H}.$$

Agora, pelo fato de $\mathcal{H}$ ser a álgebra de Lie do subgrupo $H \subset G$, podemos, de acordo com o mesmo Teorema 1.9, considerar a curva $h : I \to H$, tal que $h(t_o) = e$ e

$$D_h L_{h^{-1}} h' = D_z L_{z^{-1}} z' - \mathrm{Ad}(z^{-1})\mathbf{w}.$$

Consideremos agora a curva $x(t) = g(t)^{-1} z(t)$, $t \in I$. Afirmamos que $x = h$, o que passamos a demonstrar . Considerando $h(t)$ como uma curva em G temos, pelo Teorema 1.6,

$$x = h \quad \text{se, e somente se,} \quad D_x L_{x^{-1}} x' = D_h L_{h^{-1}} h',$$

já que $x(t_o) = h(t_o) = e$. Utilizando a regra de Leibniz, obtemos que a derivada do produto $gx = z$ é

$$D_z L_{z^{-1}} z' = \mathrm{Ad}(x^{-1}) D_g L_{g^{-1}} g' + D_x L_{x^{-1}} x',$$

como é bem conhecido ([14], p.30). Então, substituindo $x^{-1} = z^{-1}g$ nessa expressão, obtemos

$$D_x L_{x^{-1}} x' = D_z L_{z^{-1}} z' - \mathrm{Ad}(z^{-1}) D_g R_{g^{-1}} g',$$

e, pela escolha de g, podemos escrever

$$D_x L_{x^{-1}} x' = D_z L_{z^{-1}} z' - \mathrm{Ad}(z^{-1})\mathbf{w}.$$

Ora, pela escolha de h, o que obtivemos é $D_h L_{h^{-1}} = D_x L_{x^{-1}} x'$ e, portanto, segue-se a afirmação feita. Finalmente, como h é uma curva em H, temos

$$\pi(g) = \pi(gh) = \pi(z) = \alpha,$$

o que conclui a demonstração. ■

Temos agora a recíproca da Proposição 3.5.

Corolário 3.8 *Seja $\alpha : \mathbb{R} \to G/H$ um mergulho ideal. Se a evoluta de Lie de α é constante, digamos $\mathbf{w}_\alpha(s) = \mathbf{v}$ para todo s, então $\alpha(s) = \exp(s\mathbf{v}) \cdot p$ para algum $p \in G/H$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja z um levantamento de α e seja $p = \pi(z(0)) = \alpha(0) \in G/H$. Pelo Lema 3.7, temos que a curva em G que satisfaz $D_g R_{g^{-1}} g' = \mathbf{v}$ e $g(0) = z(0)$ é um levantamento de α. Ora, pela definição de $\exp(s\mathbf{v})$ temos que $g(s) = \exp(s\mathbf{v})z(0)$ é justamente tal curva. ■

Teorema 3.9 *Sejam $\alpha, \gamma : I \to G/H$ mergulhos ideais e sejam $\mathbf{w}_\alpha$ e $\mathbf{w}_\gamma : I \to \mathcal{G}$, as evolutas de Lie de α e γ, respectivamente. Se $g_o \in G$ é um elemento fixo, então*

$$\gamma = g_o \cdot \alpha$$

se, e somente se,

$$\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{w}_\gamma \text{ e } \gamma(t_o) = g_o \cdot \alpha(t_o) \text{ para algum } t_o \in I.$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos $\gamma = g_o \cdot \alpha$. Seja k a ordem ideal de contato para α (e, portanto, para γ, pelo Teorema 2.9). Fixemos um levantamento z, qualquer, de α a G. Por definição, $\mathbf{w}_\alpha$ é o único elemento $\mathbf{w} \in S_k^\alpha$ tal que $D_z\pi D_e R_z \mathbf{w} = \alpha'$. Como $g_o z$ é um levantamento de γ a G, temos que $\mathbf{w}_\gamma$ é o único elemento $\mathbf{w} \in S_k^\gamma$ tal que $D_{g_o z}\pi D_e R_{g_o z}\mathbf{w} = \gamma'$. Por outro lado, pelo Teorema 2.9, temos $S_k^\gamma = \mathrm{Ad}(g_o) S_k^\alpha$. Portanto, para mostrar que $\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{w}_\gamma$ devemos mostrar que

$$D_{g_o z}\pi D_e R_{g_o z}\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha = \gamma'.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned}
D_{g_o z}\pi D_e R_{g_o z}\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha &= D_{g_o z}\pi D_{g_o} R_z D_e R_{g_o}\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha \\
&= D_{g_o z}\pi D_{g_o} R_z D_e R_{g_o} D_{g_o} R_{g_o^{-1}} D_e L_{g_o}\mathbf{w}_\alpha \\
&= D_{g_o z}\pi D_{g_o} R_z D_e L_{g_o}\mathbf{w}_\alpha \\
&= D_{g_o z}\pi D_z L_{g_o} D_e R_z \mathbf{w}_\alpha \\
&= D_{g_o z}\pi D_z L_{g_o}(z' + K),
\end{aligned}$$

onde, pela Proposição 2.3, K é certo elemento de $\mathrm{Ker} D_z\pi$. Por outro lado, como $Ker D_{g_o z}\pi = D_z L_{g_o}(\mathrm{Ker} D_z \pi)$, o que temos é

$$D_{g_o z}\pi D_e R_{g_o z}\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha = D_{g_o z}\pi D_z L_{g_o}(z' + K) = D_{g_o z}\pi D_z L_{g_o} z'.$$

O que se encontra no lado direito dessa expressão é exatamente γ', já que $\gamma = \pi(g_o z)$.

Reciprocamente, suponhamos $\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{w}_\gamma$ e $\gamma(t_o) = g_o \cdot \alpha(t_o)$. Seja g um levantamento de α a G, satisfazendo $D_g R_{g^{-1}} g' = \mathbf{w}_\alpha$, o qual sabemos existir, pelo Lema 3.7. Então $r = g_o g$ satisfaz $D_r R_{r^{-1}} r' = \mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha$, o que pode ser extraído da afirmação no início da demonstração do Teorema 2.9. Portanto, $\mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{w}_\gamma$ garante que r satisfaz $D_r R_{r^{-1}} r' = \mathbf{w}_\gamma$. Mas, como $\gamma(t_o) = g_o \cdot \alpha(t_o)$, sabemos que existe um levantamento de γ, passando por $g_o g(t_o) = r(t_o)$. Assim, podemos utilizar novamente o Lema 3.7 para garantir que r é um levantamento de γ. Segue-se que

$$\gamma = \pi(r) = \pi(g_o g) = g_o \cdot \alpha.$$

■

3.3 A questão do parâmetro

Proposição 3.10 *Sejam $\overline{\alpha} : I_1 \to G/H$, $\overline{\gamma} : I_2 \to G/H$ mergulhos. Para $g_o \in G$, temos: $\overline{\gamma}(I_2) = g_o \cdot \overline{\alpha}(I_1)$ se, e somente se, existem reparametrizações $\alpha = \overline{\alpha} \circ \varphi_1 : I \to G/H$ e $\gamma = \overline{\gamma} \circ \varphi_2 : I \to G/H$, tais que $\gamma = g_o \cdot \alpha$. (Obviamente, $\varphi_1^{-1}(I_1) = I = \varphi_2^{-1}(I_2)$.)*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos $\overline{\gamma}(I_2) = g_o \cdot \overline{\alpha}(I_2)$. Seja $I = I_1$ e seja φ_1 a identidade em I_1. Como $\overline{\gamma}$ e $g_o \cdot \overline{\alpha}$ são mergulhos, temos que se $\varphi_2 : I \to I_2$ é definido por $\varphi_2(s) = \overline{\gamma}^{-1}\left((g_o \cdot \overline{\alpha}(s))\right)$, então γ e α satisfazem $\gamma = g_o \cdot \alpha$.

A recíproca é imediata. ■

Como vemos, o papel da Proposição 3.10 é mudar o problema da congruência dos traços $\overline{\gamma}(I_2) = g_o \cdot \overline{\alpha}(I_2)$, para um problema de congruência de aplicações. Na prática, porém, o avanço é pequeno, haja imaginado todas as possibilidades de reparametrizações que teríamos que considerar. Nessa direção, portanto, o que se deseja é reduzir tais possibilidades. Ora, a introdução do parâmetro comprimento de arco na geometria euclidiana não desempenha esse papel de redução? A questão natural é, portanto, sobre a possibilidade de introdução de um parâmetro que venha desempenhar, de alguma forma, o papel do parâmetro comprimento de arco. Veremos, em seguida, algumas respostas para essa questão.

Proposição 3.11 *Se $k \geq 2$ e se $\mathbf{v} : I \to \mathcal{G}$ é uma curva tal que $\mathbf{v}(t) \in S_k^\alpha(t)$ para todo $t \in I$, então $\mathbf{v}'(t) \in S_{k-1}^\alpha(t)$, para todo $t \in I$.*

DEMONSTRAÇÃO: Procederemos por indução sobre k. Seja $\{\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_r\}$ um referencial transverso ao longo de α. Tomemos $k = 2$. Então, para cada $i = 1, \ldots, r$, temos

$$\langle \mathbf{N}_i, \mathbf{v} \rangle = 0 \qquad (1)$$

$$\langle \mathbf{N}_i', \mathbf{v} \rangle = 0. \qquad (2)$$

Derivando (1), obtemos

$$\langle \mathbf{N}_i', \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{N}_i, \mathbf{v}' \rangle = 0.$$

Substituindo (2) nessa última expressão, obtemos

$$\langle \mathbf{N}_i, \mathbf{v}' \rangle = 0.$$

Como isso é verdadeiro para $i = 1, \ldots, r$, concluimos que $\mathbf{v}' \in S_1^\alpha$, o que mostra que a proposição é verdadeira para $k = 2$. Suponhamos que esse também seja o caso para $k = 2, \ldots, m$. Mostraremos que se $\mathbf{v} \in S_{m+1}^\alpha$, então $\mathbf{v}' \in S_m^\alpha$. Ora, se $\mathbf{v} \in S_{m+1}^\alpha$, então $\mathbf{v} \in S_j^\alpha$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Portanto, a hipótese de indução garante que $\mathbf{v}' \in S_{m-1}^\alpha$. Assim, para mostrarmos que $\mathbf{v}' \in S_m^\alpha$, falta mostrarmos que

$$\langle \mathrm{N}_i^{(m-1)}, \mathbf{v}' \rangle = 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, r$. Como $\mathbf{v} \in S_{m+1}^\alpha \subset S_m^\alpha$, temos

$$\langle \mathrm{N}_i^{(m-1)}, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

para $i = 1, \ldots, r$. Derivando essa expressão, obtemos

$$\langle \mathrm{N}_i^{(m)}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathrm{N}_i^{(m-1)}, \mathbf{v}' \rangle = 0.$$

O primeiro termo no lado esquerdo dessa equação é nulo para todo $i = 1, \ldots, r$, já que $\mathbf{v} \in S_{m+1}^\alpha$. Portanto, $\langle \mathrm{N}_i^{(m-1)}, \mathbf{v}' \rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, r$, que é justamente o que faltava mostrarmos. ∎

Proposição 3.12 *Seja $\alpha : I \to G/H$ um mergulho ideal e seja $\mathbf{w}_\alpha : I \to \mathcal{G}$ a evoluta de Lie de α. Se $\gamma = \alpha \circ \varphi : \varphi^{-1}(I) \to G/H$, é uma reparametrização de α, então a evoluta de Lie de γ é dada por*

$$\mathbf{w}_\gamma(s) = \varphi'(s)\mathbf{w}_\alpha(\varphi(s)) \text{ para todo } s \in \varphi^{-1}(I),$$

isto é, $\mathbf{w}_\gamma = \varphi' \mathbf{w}_\alpha \circ \varphi$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja k a ordem ideal de contato para α. Lembramos que $\mathbf{w}_\alpha$ é justamente a intersecção de S_k^α com $(D_e\Phi_\alpha)^{-1}(\alpha')$, onde $\Phi_{\alpha(t)} : G \to G/H$ é dada por $\Phi_{\alpha(t)}(g) = g \cdot \alpha(t)$, para $g \in G$.

Agora, pela Proposição 2.8, sabemos que os subespaços associados a α são invariantes por reparametrização de α. Em particular, $S_k^\gamma(s) = S_k^\alpha(\varphi(s))$. Assim,

$$\mathbf{w}_\gamma(s) = \left(\left(D_e\Phi_{\gamma(s)}\right)^{-1}(\gamma'(s))\right) \cap S_k^\gamma(s) = \left(\left(D_e\Phi_{\gamma)(s)}\right)^{-1}(\gamma'(s))\right) \cap S_k^\alpha(\varphi(s)).$$

Portanto, o resultado será obtido se mostrarmos que

$$\left(D_e\Phi_{\gamma(s)}\right)^{-1}(\gamma'(s)) = \varphi'(s)\left(D_e\Phi_{\alpha(\varphi(s))}\right)^{-1}(\alpha'(\varphi(s))).$$

Isso é conseqüência da regra da cadeia e do fato de φ' nunca anular-se. ∎

Lema 3.13 *Seja $\alpha : I \to G/H$ um mergulho ideal e seja $\mathbf{w}_\alpha$ a evoluta de Lie de α. Também, seja k a ordem ideal de contato para α. Se $k \geq 2$ e $t_o \in I$ é dado, então existe uma vizinhança I_o de t_o e uma reparametrização $\gamma = \alpha \circ \varphi : \varphi^{-1}(I_o) \to G/H$, de α, tal que a evoluta de Lie de γ satisfaz*

$$\mathbf{w}'_\gamma(s) \in \mathcal{H}_{k-2}^\gamma(s) \ (= S_{k-1}^\gamma(s) \cap \mathcal{G}_{\gamma(s)}),$$

para todo $s \in \varphi^{-1}(I_o)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $\mathbf{w}_\alpha(t) \in S_k^\alpha(t)$ para todo t, a Proposição 3.11 garante que $\mathbf{w}'_\alpha(t) \in S_{k-1}^\alpha(t)$ para todo t. Podemos, portanto, escrever

$$\mathbf{w}'_\alpha(t) = \lambda(t)\mathbf{w}_\alpha(t) + \mathbf{v}(t), \qquad (*)$$

com $\mathbf{v}(t) \in S^{\alpha}_{k-1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ $(= \mathcal{H}^{\alpha}_{k-2}(t))$, para todo t e para certa função $\lambda(t)$. Afirmamos que a função λ é diferenciável. De fato, como a dimensão de $\mathcal{H}^{\alpha}_{k-2}(t)$ é constante quando t varia, podemos escolher uma base, digamos $\{\mathbf{v}_1(t), \ldots, \mathbf{v}_n(t)\}$, de $\mathcal{H}^{\alpha}_{k-2}(t)$, variando diferenciavelmente com t. Isso, juntamente com a diferenciabilidade de $\mathbf{w}_\alpha$, garante que os coeficientes da expansão de $\mathbf{w}'_\alpha(t)$ na base $\{\mathbf{w}_\alpha(t), \mathbf{v}_1(t), \ldots, \mathbf{v}_n(t)\}$ de $S^{\alpha}_{k-1}(t)$ variam diferenciavelmente. Ora, $\lambda(t)$ é um desses coeficientes.

Fixemos $t_o \in I$ e consideremos ψ a solução da equação diferencial

$$\psi''(t) - \psi'(t)\lambda(t) = 0$$

com condições iniciais $\psi(t_o) = 0$ e $\psi'(t_o) = c \neq 0$. Então ψ é um difeomorfismo de uma vizinhança I_o de t_o, numa vizinhança de 0.

Seja $\gamma = \alpha \circ \psi^{-1}$. Então $\alpha = \gamma \circ \psi$ e segue-se, pela Proposição 3.12, que

$$\mathbf{w}_\alpha(t) = \psi'(t)\mathbf{w}_\gamma(\psi(t)), \qquad (**)$$

para todo $t \in I_o$. Derivando essa expressão, obtemos

$$\mathbf{w}'_\alpha(t) = (\psi'(t))^2\mathbf{w}'_\gamma(\psi(t)) + \psi''(t)\mathbf{w}_\gamma(\psi(t)), \qquad (***)$$

para todo $t \in I_o$. Substituindo $(*)$ em $(***)$ temos

$$\lambda(t)\mathbf{w}_\alpha(t) + \mathbf{v}(t) = (\psi'(t))^2\mathbf{w}'_\gamma(\psi(t)) + \psi''(t)\mathbf{w}_\gamma(\psi(t)).$$

Mais uma substituição, agora de $(**)$, e obtemos

$$\mathbf{v}(t) = (\psi''(t) - \lambda(t)\psi'(t))\,\mathbf{w}_\gamma(\psi(t)) + (\psi'(t))^2\mathbf{w}'_\gamma(\psi(t)).$$

Pela escolha que fizemos de ψ, ficamos com

$$\mathbf{w}'_\gamma(\psi(t)) = \frac{\mathbf{v}(t)}{(\psi'(t))^2} \in S^\alpha_{k-1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)} = S^\gamma_{k-1}(\psi(t)) \cap \mathcal{G}_{\gamma(\psi(t))}.$$

O lema segue-se, portanto, tomando $\varphi = \psi^{-1}$. ■

Definição 3.3 Diremos que $\alpha : I \to G/H$ é uma *parametrização natural*, se α é um mergulho ideal tal que a evoluta de Lie de α, $\mathbf{w}_\alpha : I \to \mathcal{G}$, satisfaz $\mathbf{w}'_\alpha(t) \in \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$. (Observamos, não estamos supondo que a ordem ideal de contato para α seja maior que 1)

Observação 3.14 Segue-se da Proposição 3.5 que se uma trajetória é um mergulho ideal, então é uma parametrização natural.

Observação 3.15 Um fato bastante conhecido (ver [3], p.37) na geometria euclidiana plana, é que os pontos extremos da função curvatura de uma curva parametrizada por comprimento de arco, correspondem exatamente aos pontos de cúspide da evoluta dessa curva. Nos exemplos com $\dim G/H = 2$ que apresentaremos, veremos que podemos considerar uma função que desempenha papel que a curvatura desempenha e é tal que, quando se trata de uma parametrização natural, então os pontos extremos dessa função correspondem exatamente aos pontos onde a evoluta de Lie deixa de ser uma imersão. Justificamos assim a escolha de nome que fizemos.

Corolário 3.16 *(do Teorema 3.9) Ser uma parametrização natural é uma propriedade G-invariante.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $\gamma = g_o \cdot \alpha$, então as evolutas de Lie $\mathbf{w}_\gamma$ e $\mathbf{w}_\alpha$ de γ e α, respectivamente, satisfazem $\mathbf{w}_\gamma = \mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}_\alpha$, pelo Teorema 3.9. Como $\mathcal{G}_{\gamma(t)} = \mathrm{Ad}(g_o)\mathcal{G}_{\alpha(t)}$, para todo t, temos que se $\mathbf{w}'_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$, então $\mathbf{w}'_\gamma = \mathrm{Ad}(g_o)\mathbf{w}'_\alpha \in \mathcal{G}_\gamma$. Isto é, se α é uma parametrização natural, então γ também é uma parametrização natural. ∎

Corolário 3.17 *Se $\alpha : I \to G/H$ é uma parametrização natural e se $\gamma = \alpha \circ \varphi : \varphi^{-1}(I) \to G/H$ é uma reparametrização de α, então γ também é uma parametrização natural se, e somente se, φ é da forma $\varphi(s) = as + b$ com $a\,(\neq 0)$ e b constantes.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja k a ordem de contato ideal para α. Consideraremos dois casos:

Caso 1: $k \geq 2$. Sabemos que $\mathbf{w}_\gamma(s) = \varphi'(s)\mathbf{w}_\alpha(\varphi(s))$ e, portanto,

$$\mathbf{w}'_\gamma(s) = (\varphi'(s))^2\mathbf{w}'_\alpha(\varphi(s)) + \varphi''(s)\mathbf{w}_\alpha(\varphi(s)).$$

Agora, se γ é uma parametrização natural, então

$$\mathbf{w}'_\gamma(s) \in S^\gamma_{k-1}(s) \cap \mathcal{G}_{\gamma(s)} = S^\alpha_{k-1}(\varphi(s)) \cap \mathcal{G}_{\alpha(\varphi(s))}.$$

Portanto, como α é parametrização natural, obtemos

$$\varphi''(s)\mathbf{w}_\alpha(\varphi(s)) = \mathbf{w}'_\gamma(s) - (\varphi'(s))^2\mathbf{w}'_\alpha(\varphi(s)) \in S^\alpha_{k-1}(\varphi(s)) \cap \mathcal{G}_{\alpha(\varphi(s))}.$$

Assim, $\varphi''(s)$ deve anular-se em todo s pois, do contrário teríamos que $\mathbf{w}_\alpha(\varphi(s_o)) \in S^\alpha_{k-1}(\varphi(s_o)) \cap \mathcal{G}_{\alpha(\varphi(s_o))}$ para algum s_o, o que é impossível já que α é k-comparável. Claro, portanto, $\varphi(s) = as + b$ com $a \neq 0$, já que é um difeomorfismo.

Caso 2: $k = 1$. Dizer que a ordem de contato ideal para α é $k = 1$ é equivalente a dizer que $\dim S_1^\alpha(t) = 1$ para todo t. Portanto, se, além disso, α é uma parametrização natural, então $\mathbf{w}'_\alpha(t) \in \mathcal{H}_0^\alpha(t) = S_1^\alpha(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)} = \{0\}$, para todo t. Isso diz que $\mathbf{w}_\alpha$ é constante. Como,

$$\mathbf{w}'_\gamma(s) = (\varphi'(s))^2\mathbf{w}'_\alpha(\varphi(s)) + \varphi''(s)\mathbf{w}_\alpha(\varphi(s)),$$

obtemos $\mathbf{w}'_\gamma(s) = \varphi''(s)\mathbf{w}_\alpha(\varphi(s))$. Assim, se γ também é uma parametrização natural, devemos ter $\varphi''(s) = 0$ para todo s.

A recíproca em ambos os casos segue-se do mesmo modo, já que α é uma reparametrização de γ. ∎

Sejam $\overline{\alpha} : \overline{I}_1 \to G/H$ e $\overline{\gamma} : \overline{I}_2 \to G/H$ mergulhos ideais de mesma ordem ideal de contato $k \geq 2$. Suponhamos que existam reparametrizações $\alpha : I_1 \to G/H$, $\gamma : I_2 \to G/H$ de $\overline{\alpha}$ e $\overline{\gamma}$, respectivamente, que sejam parametrizações naturais. Vale lembrar, o Lema 3.13 garante que tais reparametrizações existem localmente, pelo menos. Claramente, para $g_o \in G$, temos

$$\overline{\gamma}(\overline{I}_2) = g_o \cdot \overline{\alpha}(\overline{I}_1) \text{ se, e somente se, } \gamma(I_2) = g_o \cdot \alpha(I_1).$$

Sob as condições acima temos o seguinte

Teorema 3.18 *Seja $g_o \in G$. Para que tenhamos $\gamma(I_2) = g_o \cdot \alpha(I_1)$ é necessário e suficiente que exista $\varphi : I_1 \to I_2$ da forma $\varphi(s) = as+b$, com $a \neq 0$, tal que $\gamma \circ \varphi = g_o \cdot \alpha$.*

DEMONSTRAÇÃO: A condição é, claramente, suficiente. Suponhamos $\gamma(I_2) = g_o \cdot \alpha(I_1)$. Pela Proposição 3.10 (melhor, pela demonstração dessa), temos a existência de um difeomorfismo $\varphi : I_1 \to I_2$ tal que $\gamma \circ \varphi = g_o \cdot \alpha$. Então $g_o \cdot \alpha$ é uma reparametrização de γ. Agora, pelo Corolário 3.16 temos que $g_o \cdot \alpha$ é uma parametrização natural. Como γ também é uma parametrização natural, por hipótese, o resultado segue-se diretamente do Corolário 3.17. ∎

Juntando os resultados dos Teoremas 3.9 e 3.18 e da Proposição 3.12 temos

Corolário 3.19 *Sejam $\alpha : I_1 \to G/H$ e $\gamma : I_2 \to G/H$ parametrizações naturais e sejam $\mathbf{w}_\alpha$ e $\mathbf{w}_\gamma$ as evolutas de Lie de α e γ, respectivamente. Então, $\gamma(I_2) = g_o \cdot \alpha(I_1)$ se, e somente se, existem números reais $a \neq 0, b$ tais que $a\mathbf{w}_\gamma(as+b) = \mathbf{w}_\alpha(s), \forall s \in I_1$, e $\gamma(as_o + b) = g_o \cdot \alpha(s_o)$ para algum $s_o \in I_1$.*

Capítulo 4

Exemplos

Além de exemplificar, propriamente dito, os resultados que obtivemos, temos em mente discutir vantagens e desvantagens dos mesmos. Essas aparecem já em casos de espaços bem conhecidos, de modo que vamos restringir-nos a eles.

Queremos lembrar que todos os resultados sobre contato entre trajetórias e um dado mergulho em G/H, podem ser obtidos sem que determinemos explicitamente os subgrupos a um parâmetro de G. Contudo, nas situações que consideraremos é possível determinar tais subgrupos e com isso poderemos reconhecer as trajetórias.

Cada exemplo tornou-se um pouco longo, na medida em que quisemos incluir alguns detalhes e tecer alguns comentários. Por isso, trataremos um exemplo em cada secção. A situação que encontraremos é de que o grupo G é da forma $G = H \times \mathbb{R}^n \quad (n = 2, 3)$, produto semi direto de um subgrupo $H \subset GL(n, \mathbb{R})$ por $\mathbb{R}^n$. Assim, G consiste na variedade diferenciável $H \times \mathbb{R}^n$, munida da multiplicação

$$(A, \mathbf{a})(B, \mathbf{b}) = (AB, A\mathbf{b} + \mathbf{a}),$$

onde AB denota a multiplicação usual das matrizes $A, B \in H$, e onde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ são considerados como vetores-coluna tal que $A\mathbf{b}$ também denota o produto usual de matrizes. Isso faz de G um grupo de Lie. Lembramos, $G = H \times \mathbb{R}^n$ (produto semi direto) pode ser realizado como um grupo de tranformações de $\mathbb{R}^n$: basta considerarmos a ação $G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $(A, a) \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} + \mathbf{a}$ para $(A, \mathbf{a}) \in G$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Vendo assim, temos que H é o subgrupo de isotropia na origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Temos, portanto, a identificação de G/H com $\mathbb{R}^n$, dada pelo Teorema 1.4, a qual, juntamente com o conhecimento dos subgrupos a um parâmetro de G, permite identifiquemos as trajetórias

Seja $I_n \in H$ a matriz identidade, $n \times n$. Identificando, como temos feito, a álgebra de Lie de G com o espaço tangente a G em seu elemento identidade, $e = (I_n, \mathbf{0})$, e fazendo o mesmo para os grupos H e $\mathbb{R}^n$, temos

$$\mathcal{G} = T_e G = T_e(H \times \mathbb{R}^n) = T_{I_n} H \times T_0 \mathbb{R}^n,$$

como espaços vetoriais. Identificando, além disso, $T_0\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$, escreveremos simplesmente $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathbb{R}^n$.

Cada $(\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G}$ determina um subgrupo a um parâmetro de G,

$$\phi(s) = \exp(s(\mathbf{X}, \mathbf{v})) = (\mathrm{e}^{s\mathbf{X}}, (\int_0^s e^{x\mathbf{X}} dx)\mathbf{v}),$$

onde $\mathrm{e}^{s\mathbf{X}}$ denota o subgrupo a um parâmetro de H, determinado por $\mathbf{X} \in \mathcal{H}$. Assim, para conhecermos os subgrupos a um parâmetro de G, basta conhecermos aqueles de $\mathcal{H}$.

4.1 Curvas no plano euclidiano

Este é o caso em que, matendo a notação acima, $H = SO(2)$.

4.1.1 As curvas-modelo

Os subgrupos a um parâmetro de G são aqueles da forma

$$s \mapsto \phi(s) = \exp(s(\mathbf{X}, \mathbf{v})) = (e^{s\mathbf{X}}, (\int_0^s e^{x\mathbf{X}} dx)\mathbf{v}),$$

onde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e $e^{s\mathbf{X}}$ denota o subgrupo a um parâmetro de $SO(2)$, determinado por $\mathbf{X} \in \mathcal{SO}(2)$. Sabemos que $\mathcal{SO}(2)$ consiste nas matrizes 2×2 anti-simétricas e que,

$$\text{se } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}, \text{ então } e^{s\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} cos(s\theta) & -sen(s\theta) \\ sen(s\theta) & cos(s\theta) \end{pmatrix}.$$

(Isso pode ser obtido dos detalhes na Secção 3.3, já que $SO(2)$ é um subgrupo de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$.) De posse disso, podemos falar sobre as trajetórias: fixado $p \in \mathbb{R}^2$, a trajetória

$$\beta(s) = \phi(s) \cdot p = \exp(s(\mathbf{X}, \mathbf{v})) = \left(es\mathbf{X}, (\int_0^s e^{x\mathbf{X}} dx)\mathbf{v}\right) \cdot p = e^{s\mathbf{X}} p + (\int_0^s e^{x\mathbf{X}} dx)\mathbf{v}$$

terá como traço o próprio ponto p se $(\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G}_p$ ou, caso contrário, uma reta ou um círculo. Na verdade, todos os círculos e retas passando por p podem ser obtidos assim.

4.1.2 A estratificação

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ uma curva regular (=imersão) em $\mathbb{R}^2$ e olhemos a estratificação de $\mathcal{G}$ de acordo com contato entre α e trajetórias passando por $\alpha(t)$. Temos

$$S_1^\alpha(t) = \{(\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G}\,;\ \beta'(0) = \mathbf{X}\alpha(t) + \mathbf{v} = \lambda\alpha'(t), \text{ para algum } \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Observação 4.1 Observamos que se fizermos $\lambda = 1$, então obteremos exatamente o hiperplano de $S_1^\alpha(t)$ cuja intersecção com $S_k^\alpha(t)$ apropriado (veremos que esse exite), vai dar-nos a evoluta de Lie de α.

Escrevendo $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}$, temos

$$S_1^\alpha(t) = \{(\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1'(t) - x\alpha_2(t) \\ \lambda\alpha_2'(t) + x\alpha_1(t) \end{pmatrix}); x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Identificando

$$(\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) \in \mathcal{G} \quad \text{com} \quad (x, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3,$$

e tomando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, obtemos:

$$(x, v_1, v_2) \in S_1^\alpha(t) \text{ se, e somente se, } (\alpha(t) \cdot \alpha'(t))x + \alpha_2'(t)v_1 - \alpha_1'(t)v_2 = 0,$$

onde $\alpha(t) \cdot \alpha'(t)$ denota o produto interno usual (em $\mathbb{R}^2$) de $\alpha(t)$ por $\alpha'(t)$. Noutras palavras, $\mathbf{N}(t) = ((\alpha(t) \cdot \alpha'(t)), \alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))$ é um referencial transverso ao longo de α. Assim,

$$(x, v_1, v_2) \in S_2^\alpha(t) \text{ se, e somente se, } \left\{ \begin{array}{rcl} (\alpha(t).\alpha'(t))x + \alpha_2'(t)v_1 - \alpha_1'(t)v_2 & = & 0 \\ (\alpha(t).\alpha'(t))'x + \alpha_2''(t)v_1 - \alpha_1''(t)v_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Portanto, $S_2^\alpha(t)$ é o subespaço de $\mathcal{G}$ gerado por (retornando à notação matricial e omitindo o parâmetro t)

$$\mathbf{w} = (\begin{pmatrix} 0 & -k_f \\ k_f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1' + k_f\alpha_2 \\ \alpha_2' - k_f\alpha_1 \end{pmatrix}),$$

onde $k_f = \frac{\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2'}{\|\alpha'\|^2}$. Claro, qualquer múltiplo não nulo do produto vetorial $\mathbf{N} \times \mathbf{N}'$ serviria como gerador de S_2^α; escolhemos $\mathbf{w}$ justamente porque trata-se da evoluta de Lie de α. Não é difícil verificar que a trajetória passando por $\alpha(t)$, pelo subgrupo a um parâmetro determinado por $\mathbf{w}(t)$ (ou por seus múltiplos não nulos), será

a) a reta tangente a α em $\alpha(t)$, se $k_f(t) = 0$,

b) o círculo osculador a α em $\alpha(t)$, se $k_f(t) \neq 0$.

Prosseguindo, gostaríamos de justificar algo da notação: temos utilizado o índice f (de falsa), em k_f, para distinguí-la da função curvatura $k = \frac{\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2'}{\|\alpha'\|^3}$.

4.1.3 O parâmetro

Finalmente, observamos que α é uma parametrização natural se, e somente se,

$$\mathbf{w}' = (\begin{pmatrix} 0 & -k_f' \\ k_f' & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1'' + (k_f\alpha_2)' \\ \alpha_2'' - (k_f\alpha_1)' \end{pmatrix}) \in \mathcal{G}_\alpha.$$

Como $\mathcal{G}_\alpha$ é o subespaço gerado por

$$(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}),$$

obtemos que α é uma parametrização natural se, e somente se

$$\begin{aligned} \alpha_1'' + k_f\alpha_2' &= 0 \\ \alpha_2'' - k_f\alpha_1' &= 0 \end{aligned}.$$

É fácil verificar que isso acontece se, e somente se, $\| \alpha' \|$ é constante. Em particular, se a constante é escolhida como sendo igual a 1, as equações acima constituem justamente a fórmula de Frenet que relaciona a derivada do vetor tangente $T = (\alpha_1', \alpha_2')$, com o vetor normal $N = (-\alpha_2', \alpha_1')$, e assim define curvatura. É claro, porém, que nenhuma geometria haveria de ser perdida se essa constante fosse fixada em valor diferente de 1; teríamos apenas um reescalonamento do valor da curvatura de um círculo.

4.2 Semelhanças no plano

Este é o caso em que $H = \{\lambda A;\ A \in SO(2), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$.

Dada uma matriz A, denotemos por A^T a matriz transposta de A. Vemos diretamente que H é justamente a componente conexa contendo a identidade do grupo de Lie $\{B \in GL(2, \mathbb{R}); BB^T = \lambda^2 I_2$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}\}$. Isso perminte reconhecermos a álgebra de Lie de H:

$$\mathcal{H} = \{ \begin{pmatrix} \delta & x \\ -x & \delta \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

4.2.1 As curvas-modelo

Dado $\mathbf{u} = (\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathbb{R}^2$, temos o subgrupo a um parâmetro gerado por $\mathbf{u}$, a saber,

$$s \mapsto \phi(s) = (e^{s\mathbf{X}}, (\int_0^s e^{r\mathbf{X}} dr)\mathbf{v}).$$

A exponenciação $e^{s\mathbf{X}}$ é obtida facilmente, bastando observar que podemos escrever

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta & x \\ -x & \delta \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a trajetória passando por $p \in \mathbb{R}^2$ (identificado com G/H, como combinado), determinada por $\mathbf{u} = (\mathbf{X}, \mathbf{v})$, é

$$s \mapsto \beta_{\mathbf{u}}(s) = \phi(s) \cdot p = e^{s\mathbf{X}} p + (\int_0^s e^{r\mathbf{X}} dr)\mathbf{v}.$$

Se $\mathbf{u} \notin \mathcal{G}_p$, então uma tal trajetória descreverá uma reta, um círculo ou uma espiral logarítmica.

Buscando certa simplificação na notação, identificaremos $\mathcal{G}$ com $\mathbb{R}^4$, do modo seguinte: a $\mathbf{u} = (\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G}$ faremos corresponder $(\delta, x, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^4$), onde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta & x \\ -x & \delta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

4.2.2 A estratificação

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \to \mathbb{R}^2$ um mergulho. Dado $t \in I$, temos, por definição,

$$S_{\mathrm{I}}^{\alpha}(t) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{G};\ \beta'_{\mathbf{u}}(0) = \lambda \alpha'(t), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Como $\beta'(0) = \delta\alpha(t) + X\alpha(t) + \mathbf{v}$, obtemos facilmente que (δ, x, v_1, v_2) é um elemento de $S_1^\alpha(t)$ se, e somente se, $v_1 = \lambda\alpha_1'(t) - \delta\alpha_1(t) - x\alpha_2(t)$ e $v_2 = \lambda\alpha_2'(t) - \delta\alpha_2(t) + x\alpha_1(t)$, para algum $\lambda, \delta, x \in \mathbb{R}$. Observamos que, portanto, a evoluta de Lie de α, se existir, será da forma $\mathbf{w}(t) = (\delta, x, \alpha_1'(t) - \delta\alpha_1(t) - x\alpha_2(t), \alpha_2'(t) - \delta\alpha_2(t) + x\alpha_1(t))$, para certos $\delta, x \in \mathbb{R}$.

As considerações acima, noutras palavras, dizem que $S_1^\alpha(t)$ é o sub espaço de $\mathbb{R}^4$, gerado por

$$\{(0, 1, -\alpha_2(t), \alpha_1(t)),\ (1, 0, -\alpha_1(t), -\alpha_2(t)),\ (0, 0, \alpha_1'(t), \alpha_2'(t))\}.$$

Fixemos em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual, que denotaremos $< \cdot, \cdot >$, e, para $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, denotemos por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Alguns cálculos simples mostram que (omitindo o parâmetro t)

$$\mathbf{N} = (\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2', -\alpha \cdot \alpha', -\alpha_2', \alpha_1')$$

é um campo transverso ao longo de α. Temos, então,

$$\mathbf{N}' = (\alpha_2\alpha_1'' - \alpha_1\alpha_2'', -\alpha' \cdot \alpha' - \alpha \cdot \alpha'', -\alpha_2'', \alpha_1''),$$

$$\mathbf{N}'' = (\alpha_2'\alpha_1'' - \alpha_1'\alpha_2'' + \alpha_2\alpha_1''' - \alpha_1\alpha_2''', -3\alpha' \cdot \alpha'' - \alpha \cdot \alpha''', -\alpha_2''', \alpha_1''').$$

De posse disso, se fosse desejado, poderíamos determinar explicitamente os sub espaços associados $S_1^\alpha(t)$, $S_2^\alpha(t)$ e $S_3^\alpha(t)$. Preferimos, no entanto, discutir a respeito da evoluta de Lie de α. Se existir, essa será, para cada $t \in I$, o único elemento $\mathbf{w}(t) \in \mathcal{G}$ da forma $\mathbf{w}(t) = (\delta, x, \alpha_1'(t) - \delta\alpha_1(t) - x\alpha_2(t), \alpha_2'(t) - \delta\alpha_2(t) + x\alpha_1(t)$, satisfazendo

$$< \mathbf{w}(t), \mathbf{N}'(t) > = < \mathbf{w}(t), \mathbf{N}''(t) > = 0.$$

Esse é um sistema de equações lineares nas variáveis x e δ, facilmente discutível. Ele tem solução única se, e somente se, (omitindo t) $k_f = \frac{\alpha_1'\alpha_2''-\alpha_1''\alpha_2'}{\alpha'\cdot\alpha'} \neq 0$, caso em que a solução é $a = -k_f$ e $\delta = \frac{\alpha_2'\alpha_1'''-\alpha_2'''\alpha_1'}{k_f\alpha'\cdot\alpha'} + 3\frac{\alpha'\cdot\alpha''}{\alpha'\cdot\alpha'}$. De agora em diante, neste exemplo, estaremos supondo $k_f \neq 0$. Notemos, então, que podemos escrever

$$\mathbf{w} = (0, -k_f, \alpha_1' + k_f\alpha_2, \alpha_2' - k_f\alpha_1) + \delta(1, 0, -\alpha_1, -\alpha_2), \qquad (*)$$

onde δ está dado acima.

4.2.3 Invariantes e parametrização

Tudo que ainda faremos neste exemplo, tem por objetivo mostrar que k_f e δ são invariantes diferenciais. Mais que isso, por uma reparametrização, se necessária, podemos fazer k_f constante igual a 1, tal como a velocidade na geometria euclidana.

Em seguida utilizaremos o seguinte fato, o qual é bem conhecido (e é fácil ser obtido): para $\overline{g} = (A, \mathbf{v}) \in G$ e $\mathbf{u} = (\mathbf{X}, \mathbf{w}) \in \mathcal{G}$,

$$\mathrm{Ad}(\overline{g})(\mathbf{u}) = (A\mathbf{X}A^{-1}, A\mathbf{w} - A\mathbf{X}A^{-1}\mathbf{v}).$$

Seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to \mathbb{R}^2$ um outro mergulho. Para distinguir os objetos associados a α daqueles associados a γ, utilizaremos essas mesmas letras como índices. Temos, então,

$$\mathbf{w}_\alpha = (0, -k_f^\alpha, \alpha_1' + k_f^\alpha\alpha_2, \alpha_2' - k_f^\alpha\alpha_1) + \delta^\alpha(1, 0, -\alpha_1, -\alpha_2),$$

$$\mathbf{w}_\gamma = (0, -k_f^\gamma, \gamma_1' + k_f^\gamma\gamma_2, \gamma_2' - k_f^\gamma\gamma_1) + \delta^\gamma(1, 0, -\gamma_1, -\gamma_2).$$

Suponhamos que γ e α sejam congruentes, $\gamma = g_o \cdot \alpha$. Digamos que $g_o = (A, \mathrm{v})$. Pelo Teorema 3.9 temos $\mathrm{w}_\gamma = \mathrm{Ad}(g_o)\mathrm{w}_\alpha$, isto é,

$$\begin{pmatrix} \delta^\gamma & -k_f^\gamma \\ k_f^\gamma & \delta^\gamma \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta^\alpha & -k_f^\alpha \\ k_f^\alpha & \delta^\alpha \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{e}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' + k_f^\gamma \gamma_2 - \delta^\gamma \gamma_1 \\ \gamma_2' - k_f^\gamma \gamma_1 - \delta^\gamma \gamma_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1' + k_f^\alpha \alpha_2 - \delta^\alpha \alpha_1 \\ \alpha_2' - k_f^\alpha \alpha_1 - \delta^\alpha \alpha_2 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \delta^\alpha & -k_f^\alpha \\ k_f^\alpha & \delta^\alpha \end{pmatrix} A^{-1}\mathrm{v}.$$

Da primeira dessas expressões, como H é abeliano, obtemos imediatamente que $k_f^\alpha = k_f^\gamma$ e $\delta^\alpha = \delta^\gamma$. Obtivemos assim, dois invariantes diferenciais.

AFIRMAÇÃO:$(1, 0, -\alpha_1, -\alpha_2)$ gera $\mathcal{H}_1^\alpha = S_2^\alpha \cap \mathcal{G}_\alpha$. Demonstraremos isso em seguida. Como $g = (I_2, \alpha) \in G$ é tal que $g \cdot 0 = \alpha$, temos que $\mathcal{G}_\alpha = \mathrm{Ad}(g)\mathcal{G}_0 = \mathrm{Ad}(g)\mathcal{H}$. Assim, como os elementos de $\mathcal{H}$ são aqueles da forma $(\mathbf{X}, 0)$, obtemos que os elementos de $\mathcal{G}_{\alpha(t)}$ são aqueles da forma

$$\mathbf{u} = (\begin{pmatrix} \epsilon & x \\ -x & \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\epsilon\alpha_1 - x\alpha_2 \\ -\epsilon\alpha_2 + x\alpha_1 \end{pmatrix}),$$

para algum $\epsilon, x \in \mathbb{R}$. Com a identificação de $\mathcal{G}$ com $\mathbb{R}^4$ que temos feito, devemos escrever $\mathbf{u} = (\epsilon, x, -\epsilon\alpha_1 - x\alpha_2, -\epsilon\alpha_2 + x\alpha_1)$. Um tal elemento encontra-se também em S_2^α se, e somente se, $< \mathbf{u}, \mathrm{N}' >= 0$ se, e somente se, $x = 0$. Portanto, $\mathcal{H}_1^\alpha = S_2^\alpha \cap \mathcal{G}_\alpha$ é o sub espaço gerado por $(1, 0, -\alpha_1, -\alpha_2)$, como afirmado.

Observação 4.2 *A título de ilustração, lembramos que $\mathcal{H}_1^\alpha(t)$ é a álgebra de Lie do subgrupo de $G_{\alpha(t)}$ formado pelos elementos g tais que α e $g \cdot \alpha$ estão em contato de ordem 1 em $\alpha(t) = g \cdot \alpha(t)$. Aqui, tal grupo consiste nas homotetias de centro em $\alpha(t)$.*

Agora queremos observar que, da expressão (*) para a evoluta de Lie de α e da , obtemos imediatamente uma condição necessária para que α seja uma parametrização natural: devemos ter k_f' identicamente nula. De fato, temos

$$\mathbf{w}' = (0, -k_f', \alpha_1''+k_f'\alpha_2+k_f\alpha_2', \alpha_2''-k_f'\alpha_1-k_f\alpha_1')+\delta(0,0,-\alpha_1', -\alpha_2')+\delta'(1,0,-\alpha_1,-\alpha_2),$$

e, portanto, se $\mathbf{w}' \in S_2^\alpha \cap \mathcal{G}_\alpha$, então $k_f' = 0$.

Afirmamos que $k_f' = 0$ é também uma condição suficiente para que α seja uma parametrização natural, o que passamos a argumentar. Na verdade, devemos verificar que se k_f é constante, então

$$\alpha_1'' + k_f\alpha_2' - \delta\alpha_1' = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2'' - k_f\alpha_1' - \delta\alpha_2' = 0.$$

Isso é de verificação simples, sendo conveniente observar que se $k_f = \frac{\alpha_1'\alpha_2''-\alpha_1''\alpha_2'}{\alpha'\cdot\alpha'}$ é constante, então, derivando, obtemos $2k_f\alpha'\cdot\alpha'' = \alpha_1'\alpha_2''' - \alpha_1'''\alpha_2'$ e, portanto, $\delta = \frac{\alpha'\cdot\alpha''}{\alpha'\cdot\alpha'}$.

Observação 4.3 Dentre as curvas parametrizadas por comprimento de arco (no sentido euclidiano), aquelas que têm um círculo como traço, são as únicas que são uma parametrização natural na geometria que ora consideramos. Queremos observar que δ é identicamente nula para tais curvas. Isso tinha que ser assim, considerando a afirmação que fizemos de que δ é um G-invariante e considerando que quaisquer dois círculos são congruentes aqui.

Mesmo que α não seja uma parametrização natural, é possível, pelo Lema 3.13, determinar uma reparametrização, digamos $\overline{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ que o seja. Efetuando alguns cálculos mais e seguindo a demonstração do lema referido, obtemos que $\varphi = \psi^{-1}$, onde

ψ é uma solução de $\psi'' - \frac{k_f'}{k_f}\psi' = 0$, faz de $\overline{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ uma parametrização natural. Assim, basta fixarmos $t_o \in I$ e tomarmos

$$\psi(t) = \int_{t_o}^{t} k_f(r)dr.$$

Como k_f é um invariante pela ação de G, o que temos obtido é um G-invariante *elemento de arco.* Na verdade, tomando $\psi(t)$ da forma descrita acima, obtemos $k_f = \frac{\overline{\alpha}_1'\overline{\alpha}_2'' - \overline{\alpha}_1''\overline{\alpha}_2'}{\overline{\alpha}' \cdot \overline{\alpha}'} = 1$.

Finalmente, observamos que se $\mathbf{w}$ é a evoluta de Lie de uma parametrização natural α, então podemos escrever $\mathbf{w}' = \delta'(1, 0, -\alpha_1, -\alpha_2)$. Portanto, $\mathbf{w}'(t_o) = \mathbf{0}$ se, e somente se, $\delta'(t_o) = 0$. Fato esse que adiantamos na Observação 3.15.

4.3 O caso afim unimodular

Este é o caso em que $H = SL(2, \mathbb{R})$ e $G = H \times \mathbb{R}^2$. Ainda que tal grupo seja bem conhecido, vamos incluir aqui alguns detalhes que facilitarão certas discussões posteriores.

4.3.1 Exponenciação em SL(2,$\mathbb{R}$)

Se $\mathbf{X} \in \mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$ então $e^{s\mathbf{X}}$ é a solução da equação

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = D_e L_{\phi(s)}\mathbf{X} = \phi(s)\mathbf{X},$$

sujeita a condição inicial $\phi(0) = I_2$. Derivando novamente, vemos que $e^{s\mathbf{X}}$ é a solução da equação

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}(s) = \phi(s)\mathbf{X}^2,$$

com $\phi(0) = I_2$ e $\frac{d\phi}{ds}(0) = \mathbf{X}$. Essa equação é fácil de ser resolvida, porque, se

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix},$$

então

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & 0 \\ 0 & x^2 + yz \end{pmatrix} = (x^2 + yz)I_2.$$

Há 3 casos, dependendo do sinal de $(x^2 + yz)$:

(1) $x^2 + yz > 0$: então

$$\phi(s) = e^{s\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} cosh(\Delta s) + \frac{x}{\Delta}senh(\Delta s) & \frac{y}{\Delta}senh(\Delta s) \\ \frac{z}{\Delta}senh(\Delta s) & cosh(\Delta s) - \frac{x}{\Delta}senh(\Delta s) \end{pmatrix},$$

onde $\Delta = \sqrt{x^2 + yz}$.

(2) $x^2 + yz = 0$: então

$$\phi(s) = e^{s\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 + sx & sy \\ sz & 1 - sx \end{pmatrix}.$$

(3) $x^2 + yz < 0$: então

$$\phi(s) = e^{s\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} cos(\Delta s) + \frac{x}{\Delta}sen(\Delta s) & \frac{y}{\Delta}sen(\Delta s) \\ \frac{z}{\Delta}sen(\Delta s) & cos(\Delta s) - \frac{x}{\Delta}sen(\Delta s) \end{pmatrix},$$

onde $\Delta = \sqrt{-(x^2 + yz)}$.

4.3.2 As curvas-modelo

Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e consideremos a trajetória do ponto $\alpha(t)$, pela ação do subgrupo a um parâmetro determinado por $(\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G}$, isto é, consideremos

$$\beta(s) = exp(s(\mathbf{X}, \mathbf{v})) \cdot \alpha(t) = e^{s\mathbf{X}}\alpha(t) + (\int_0^s e^{x\mathbf{X}}dx)\mathbf{v}.$$

Excluamos o caso em que o traço de β reduz-se a $\alpha(t)$, isto é, $(\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G}_{\alpha(t)}$. Utilizando nosso conhecimento da exponenciação em $SL(2, \mathbb{R})$ e efetuando alguns cálculos mais, podemos reconhecer as trajetórias. Temos:

a) se $(\mathbf{X}, \mathbf{v}))$ é tal que $\mathbf{X}$ encontra-se no caso (1), então o traço de β ou é uma hipérbole, ou é uma semi reta (homeomorfa a $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$), ou é uma reta.

b) se $(\mathbf{X}, \mathbf{v})$ é tal que $\mathbf{X}$ encontra-se no caso (2), então o traço de β ou é uma parábola, ou é uma reta;

c) se $(\mathbf{X}, \mathbf{v})$ é tal que $\mathbf{X}$ encontra-se no caso (3), então o traço de β é uma elipse.

4.3.3 A estratificação

Por definição (construção, na verdade), temos

$$S_1^\alpha(t) = \{(\mathbf{X}, \mathbf{v}) \in \mathcal{G}\,;\ \beta'(0) = \mathbf{X}\alpha(t) + \mathbf{v} = \lambda\alpha'(t), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Escrevendo $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}$, temos

$$S_1^\alpha(t) = \{(\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1'(t) - x\alpha_1(t) - y\alpha_2(t) \\ \lambda\alpha_2'(t) - z\alpha_1(t) + x\alpha_2(t) \end{pmatrix}); x, y, z, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Para facilitar a notação, vamos omitir o parâmetro t e vamos identificar $\mathcal{G}$ com $\mathbb{R}^5$ como a seguir.

$$\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right),$$

será identificado com

$$(x, y, z, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^5.$$

Com tal identificação, temos que S_1^α é o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,0,0,-\alpha_1,\alpha_2),\ (0,1,0,-\alpha_2,0),\ (0,0,1,0,-\alpha_1),\ (0,0,0,\alpha_1',\alpha_2')\}.$$

Alguns cálculos a mais e obtemos que

$$\mathbf{N} = (-\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1', -\alpha_2\alpha_2', \alpha_1\alpha_1', -\alpha_2', \alpha_1')$$

é um campo transverso ao longo de α, de acordo como o produto interno usual em $\mathbb{R}^5$. Podemos imaginar, as expressões das derivadas de $\mathbf{N}$, que ao final definem os demais espaços associados a α, são deveras extensas. Claro, são obtidas facilmente com o auxílio do MAPLE, mas preferimos não incluí-las aqui. Mesmo assim, afirmamos:

Se $\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t) \neq 0$, então

$$\{\mathbf{N}(t), \mathbf{N}'(t), \mathbf{N}''(t), \mathbf{N}^{(3)}(t)\} \text{ é linearmente independente.}$$

(Lembremos que a independência linear de $\{\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathbf{N}'', \mathbf{N}^{(3)}\}$ é equivalente a $\dim S_k^\alpha = 5 - k$ para $k = 1, 2, 3, 4$.) Agora, as condições acima são, claramente, invariantes por G. Como rotações e translações do plano estão incluidas nos movimentos de G, podemos supor que a curva α passa pela origem no instante t em questão. Além disso, como as condições também são invariantes por reparametrizações de α, podemos supor que o instante em questão é $t = 0$ e que α tem a forma $\alpha(t) = (t, f(t))$ com $f(0) = f'(0) = 0$. Façamos todas essas suposições. Então temos

$$\mathrm{N}(t) = (-tf'(t) - f(t), -f(t)f'(t), t, -f'(t), 1),$$

e obtemos

$$\mathrm{N}(0) = (0,0,0,0,1),$$

$$\mathrm{N}'(0) = (0,0,1,-f''(0),0),$$

$$\mathrm{N}''(0) = (-3f''(0),0,0,-f^{(3)}(0),0),$$

$$\mathrm{N}^{(3)}(0) = (-4f^{(3)}(0),-3f''(0)^2,0,-f^{(4)}(0),0).$$

A condição $\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha \neq 0$ é agora $f''(0) \neq 0$; vemos facilmente que se ela está satisfeita então temos a independência linear de $\{\mathrm{N}(0), \mathrm{N}'(0), \mathrm{N}''(0), \mathrm{N}^{(3)}(0)\}$.

Se $f''(0) \neq 0$, temos (retornando à notação matricial):

$$S_1^\alpha(0) = \{(\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}); x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

$$S_2^\alpha(0) = \{(\begin{pmatrix} x & y \\ f''(0)w & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}); x, y, w \in \mathbb{R}\},$$

$$S_3^\alpha(0) = \{(\begin{pmatrix} -\frac{f^{(3)}(0)}{3f''(0)}w & y \\ f''(0)w & \frac{f^{(3)}(0)}{3f''(0)}w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}); y, w \in \mathbb{R}\},$$

$$S_4^\alpha(0)=\{(\begin{pmatrix} -\frac{f^{(3)}(0)}{3f''(0)}w & -\frac{f^{(4)}(0)}{3f''(0)^2}w+\frac{4f^{(3)}(0)^2}{9f''(0)^3}w \\ f''(0)w & \frac{f^{(3)}(0)}{3f''(0)}w \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix});w\in\mathbb{R}\}.$$

Consideremos agora o caso singular $f''(0)=0$. Nesse caso temos

$$\mathrm{N}(0)=(0,0,0,0,1), \qquad \mathrm{N}'(0)=(0,0,1,0,0),$$

$$\mathrm{N}''(0)=(0,0,0,-f^{(3)}(0),0), \quad \mathrm{N}^{(3)}(0)=(-4f^{(3)}(0),0,0,-f^{(4)}(0),0).$$

Tal qual em todo caso singular, aqui necessitamos fazer uma análise detalhada. É claro que $S_1^\alpha(0)$ aqui coincide com aquele no caso não singular. Quanto a $S_2^\alpha(0)$, esse é obtido diretamente substituindo $f''(0)=0$ na expressão que define $S_2^\alpha(0)$ no caso não singular. Ou seja, aqui temos

$$S_2^\alpha(0)=\{(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix},\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix});x,y,w\in\mathbb{R}\}.$$

Quanto aos demais subespaços associados temos

Caso 1: $f''(0)=0\neq f^{(3)}(0)$. Então temos

$$S_3^\alpha(0)=\{(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix});x,y\in\mathbb{R}\}.$$

(Obtemos, portanto, $S_3^\alpha(0)\subset\mathcal{H}=\mathcal{G}_{\alpha(0)}$, dizendo-nos que não existe trajetória que esteja em contato de ordem pelo menos 3 com α em $\alpha(0)=0$. Em nossa linguagem, α não é 3-comparável em $\alpha(0)$. Temos também

$$S_4^\alpha(0)=\{(\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix});y\in\mathbb{R}\}.$$

(Mostrando que podemos ter $dimS_k^\alpha = 1$, sem que tenhamos k-comparabilidade.)

Caso 2: $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$.

Subcaso 2.1: $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 = f^{(4)}(0)$. Temos

$$S_3^\alpha(0) = \{(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}); x, y, w \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $S_3^\alpha(0) = S_2^\alpha(0)$, e

$$S_4^\alpha(0) = \{(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}); x, y, w \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $S_4^\alpha(0) = S_3^\alpha(0) = S_2^\alpha(0)$. Notemos, este é o exemplo que prometemos (Observação 2.21), para o Teorema da Estabilização, visto termos 4-comparabilidade neste caso.

Subcaso 2.2: $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 \neq f^{(4)}(0)$. Aqui o que temos é $S_3^\alpha(0) = S_2^\alpha(0)$ e

$$S_4^\alpha(0) = \{(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}); x, y \in \mathbb{R}\},$$

o que nos diz que $S_4^\alpha(0) \subset \mathcal{H}$, ou seja, α não é 4-comparável em $\alpha(0)$. Notando que

$$S_4^\alpha(0) \neq S_3^\alpha(0) = S_2^\alpha(0),$$

temos aqui o exemplo mostrando que a hipótese de $(k+2)$-comparabilidade no Teorema da Estabilização é essencial.

4.3.4 Discussão

Vimos que se $\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2' \neq 0$ (que é equivalente ao não anulamento da curvatura usual de α), então S_4^α é unidimensional e α é 4-comparável, ou seja, 4 é uma ordem ideal de contato para α. Nesse caso, portanto, podemos valer-nos de todos os resultados que obtivemos sobre congruência.

Queremos observar também que não temos prosseguido na construção de outros subspaços associados, justamente porque queríamos falar sobre a evoluta de Lie de α. Contudo, nalgum caso de interesse particular, poderemos continuar a construção, de modo a conhecer condições para que α esteja em contato com alguma trajetória, de qualquer ordem desejada.

Nos pontos $\alpha(t_o)$ em que $\alpha_1'(t_o)\alpha_2''(t_o)-\alpha_1''(t_o)\alpha_2'(t_o) = 0$, algumas possibilidades originam. De interesse particular para nós é aquela onde não há perda de comparabilidade mas que, entretanto, não conseguimos obter a evoluta de Lie de α e, consequentemente, não obtemos resultados de congruência. Essa é a situação no subcaso 2.1. Nesse caso temos $S_4^\alpha(t_o) = S_3^\alpha(t_o) = S_2^\alpha(t_o)$, e tais subespaços têm dimensão igual a 3.

É possível verificar que todos os elementos em $S_2^\alpha(t_o)$ com excessão, é claro, daqueles em $S_2^\alpha(t_o) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t_o)}$, determinam a mesma trajetória, a saber, a reta tangente a α em $\alpha(t_o)$. Sabendo, como sabemos, que as trajetórias possíveis são as cônicas, o resultado acima podia ser esperado, já que ele ocorre na situação $\alpha''(t_o) = \alpha'''(t_o) = \alpha^{(4)}(t_o) = 0$. A novidade é que agora podemos interpretar a exclusão das linhas retas (e de curvas com pontos nos quais a curva e sua reta tangente estão em contato de ordem pelo menos 2) na geometria afim unimodular, sob o ponto de vista de contato: a estabilização dos subespaços associados não permite que consigamos uma trajetória definida canonicamente (=via contato) com a qual a curva teria contato de ordem suficientemente alta.

4.4 Curvas no espaço euclidiano

Aqui $H = SO(2)$, cuja Áalgebra de Lie consiste nas matrizes 3×3 anti-simétricas. Como é bem conhecido (ver [5] p.198, por exemplo), os subgrupos a um parâmetro, de H, dão origem a rotações em torno de algum eixo em $\mathbb{R}^3$. Assim, escolhendo em $\mathbb{R}^3$ um sistema de coordenadas adequado, podemos reconhecer as trajetórias. Dado $\mathbf{u} = (\mathbf{X}, \mathrm{v}) \in \mathcal{G} = \mathcal{SO}(2) \times \mathbb{R}^3$, a trajetória passando por $p \in \mathbb{R}^3$ determinada por u,

$$\beta(s) = \phi(s) \cdot p = \exp(s(\mathbf{X}, \mathrm{v})) = \left(\mathrm{e}^{s\mathbf{X}}, (\int_0^s \mathrm{e}^{x\mathbf{X}} dx)\mathrm{v}\right) \cdot p = \mathrm{e}^{s\mathbf{X}} p + (\int_0^s \mathrm{e}^{x\mathbf{X}} dx)\mathrm{v}$$

terá como traço o próprio ponto p se $(\mathbf{X}, \mathrm{v}) \in \mathcal{G}_p$ ou, caso contrário, uma reta, um círculo ou uma hélice circular.

Identificaremos $\mathcal{G}$ com $\mathbb{R}^6$ como a seguir: para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}(3) \quad \text{e} \quad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

veremos o elemento $(A, v) \in \mathcal{G}$ como $(x, y, z, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^6$, e vice-versa.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma imersão. Com cálculos análogos àqueles nos exemplos anteriores, obtemos que S_1^α é o sub espaço de $\mathcal{G}$ gerado por $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4\}$, onde

$$\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0, -\alpha_2, \alpha_1, 0), \quad \mathrm{n}_2 = (0, 1, 0, -\alpha_3, 0, \alpha_1),$$

$$\mathbf{n}_3 = (0, 0, 1, 0, -\alpha_3, \alpha_2), \quad \mathrm{n}_4 = (0, 0, 0, \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3').$$

Suponhamos que $\alpha_1' \neq 0$; então, por verificação simples, vemos que se

$$N_1 = (\alpha_2\alpha_2' + \alpha_1\alpha_1', \alpha_3\alpha_2', -\alpha_3\alpha_1', \alpha_2', -\alpha_1', 0) \text{ e}$$

$$N_2 = (\alpha_2\alpha_3', \alpha_3\alpha_3' + \alpha_1\alpha_1', \alpha_2\alpha_1', \alpha_3', 0, -\alpha_1'),$$

então $\{N_1, N_2\}$ é um referencial transverso ao longo de α, segundo o produto interno usual em $\mathbb{R}^6$.

Vamos encontrar os sub espaços associados a α em apenas um ponto. Claro, não há perda de generalidade, no caso em questão, em supor que esse ponto é a origem de $\mathbb{R}^3$ e que nesse ponto a curva é tangente ao primeiro eixo coordenado. Também, considerando a invariança dos sub espaços associados, com relação a reparametrizações, suporemos que α tem a forma $\alpha(t) = (t, f(t), g(t))$, com $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$. Para obtermos os sub espaços associados a α em 0, devemos substituir essas condições nas expressões para N_1, N_2 e suas derivadas em, $t = 0$. Isso, claro, é apenas trabalhoso; limitamo-nos a exibir os resultados. Temos:

$$(x, y, z, v_1, v_2, v_3) \in S_1^\alpha(0) \text{ se, e somente se, } v_2 = v_3 = 0,$$

$$(x, y, z, v_1, 0, 0) \in S_2^\alpha(0) \text{ se, e somente se, } \begin{cases} x &= -f''(0)v_1 \\ y &= -g''(0)v_1 \end{cases},$$

$$(-f''(0)v_1, -g''(0)v_1, z, v_1, 0, 0) \in S_3^\alpha(0) \text{ se, e somente se, } \begin{cases} f''(0)z &= -g^{(3)}(0)v_1 \\ g''(0)z &= f^{(3)}(0)v_1 \end{cases}$$

Em seguida, analisaremos esses fatos. Primeiro observamos que não devemos impor condição alguma para α seja 2-comparável nesse ponto, e portanto, em qualquer ponto.

Já para a 3-comparabilidade, temos dois casos, dependendo do anulamento ou não da curvatura de α, $K = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\sqrt{(f'g''-g'f'')^2+f''^2+g''^2}}{(\sqrt{1+f'^2+g'^2})^3}$.

Caso 1) $f''(0) = g''(0) = 0$, o que significa que a curvatura de α é nula em 0: Neste caso, α é 3-comparável em 0 se, e somente se, $g^{(3)}(0) = f^{(3)}(0) = 0$. Isso acontece se, e somente se, α está em contato de ordem 3 com sua reta tangente nesse ponto. Notamos que, então, a reta tangente a α não está determinada por uma única reta na álgebra de Lie, já que $\dim S_3^\alpha(0) = 2$.

O fato de a dimensão de $\mathcal{H}_2^\alpha(0) = S_3^\alpha(0) \cap \mathcal{H}$ ser igual a 1, significa neste caso que qualquer rotação de α em torno da reta tangente no ponto em questão, produzirá uma curva ainda em contato de ordem 2 com α, nesse ponto.

Caso 2) A curvatura de α não é nula em 0: neste caso, α é 3-comparável em 0 se, e somente se, $f^{(3)}(0)f''(0) + g^{(3)}(0)g''(0) = 0$ se, e somente se, $\dim S_3^\alpha(0) = 1$.

De posse da expressão para a curvatura K, podemos verificar que a condição acima é equivalente a dizer que a derivada de K é nula em $t = 0$. Considerando que essa propriedade é G-invariante e invariante por reparametrização de α, podemos dizer que a condição necessária e suficiente para que a evoluta de Lie de α esteja definida é que α tenha curvatura constante.

Observação 4.4 *Queremos chamar a atenção para o fato de não devermos ser tentados a querer unificar os dois casos, dizendo que α é 3-comparável em 0 se, e somente se, $f^{(3)}(0)f''(0) + g^{(3)}(0)g''(0) = 0$. De fato, se $f''(0) = g''(0) = 0$, mas $f^{(3)}(0) \neq 0$ ou $g^{(3)}(0) \neq 0$, então $S_3^\alpha(0)$ não reduz-se a $\{\mathbf{0}\}$, mas está contido em $\mathcal{H}$.*

Sabemos do curso de Geometria Diferencial que se a curvatura de α não for nula, então o círculo osculador a α bem como qualquer hélice que tem este mesmo círculo como osculador, serão as trajetórias que estarão em contato de ordem 2 com a curva. Claro, o círculo é único. Contudo, há infinitas hélices nessa condição. Para vermos isso, basta calcularmos a torção de um elemento de $S_2^\alpha(0)$: Sejam

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -f''(0)v_1 & -g''(0)v_1 \\ f''(0)v_1 & 0 & z \\ g''(0)v_1 & -z & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então $\mathbf{u} = (\mathbf{X}, \mathbf{v_1})$ é a forma geral de um elemento de $S_2^\alpha(0)$. A trajetória $\beta(s) = exp(s\mathbf{u}) \cdot \alpha(0)$ satisfaz

$$\beta'(0) = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(0)v_1 \\ g''(0)v_2 \end{pmatrix}, \quad \beta^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} -(f''^2(0) + g''^2(0))v_1 \\ zg''(0)v_1 \\ -zf''(0)v_1 \end{pmatrix}.$$

Dessas expressões podemos facilmente calcular a torção de β: $\tau = \frac{\beta'(0) \times \beta''(0) \cdot \beta^{(3)}(0)}{\|\beta'(0) \times \beta''(0)\|^2}$. Obtemos $\tau = -\frac{z}{v_1}$. Assim, para cada z não múltiplo de v_1 temos uma hélice distinta (claro, o círculo osculador se $z = 0$).

Por outro lado, se α está em contato de ordem 3 com uma trajetória, então α tem mesmas curvatura e torção que a trajetória. Contudo, o que o caso 2 está dizendo é que a condição de estar em contato de ordem 3 é uma condição muito forte, no sentido que dentre todas as hélices que estão em contato de ordem 2, há uma única com mesma torção que α, mas essa pode não estar em contato de ordem 3 com α. Fica, portanto, a pergunta que seria útil para tratarmos de congruência: como escolher a hélice que está em contato de ordem 2 e tem mesma torção, sem antes falar em torção ? Talvez seja inevitável termos que considerar contato de curvas com planos, mas também podemos acreditar que seja possível ampliar a classe das curvas modelo de modo razoável. A própria discussão acima pode estar sugerindo a inclusão das curvas de curvatura constante. Contudo, não vemos ainda com que naturalidade essas como emergem do grupo G. Claro, uma tal ampliação demandaria um novo teorema tipo o da Estratificação. Dizendo isso, estamos, na verdade, conduzindo para outras discussões, as quais deixamos para as próximas páginas.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Como já observamos na Introdução, as informações fornecidas pelo teorema da Estratificação aparecem na literatura em situações particulares, onde nem sempre está claro o papel desempenhado por algum grupo de Lie de transformações. Ao que sabemos, esse resultado, em sua generalidade e tratamento, é novo. É claro, porém, que muito ainda necessita ser explorado.

A noção de referencial transverso que introduzimos mostrou-se apenas uma nocão auxiliar, dada a arbitrariedade na escolha do produto interno na álgebra de Lie. Se, por um lado, isso é vantajoso em termos práticos, por outro lado pode estar ocultando estruturas mais ricas. Noutras palavras, uma das primeiras coisas a fazer deve ser aprimorar o formalismo.

Vimos que a aplicação dos resultados do Capítulo a questões de congruência, necessita que estejamos considerando mergulhos ideais. Agora, o exemplo de curvas em $\mathbb{R}^3$ já mostra que as condições que definem um mergulho ideal são muito restritivas. A hipótese de dimensão constante para os sub espaços associados, parece natural ser mantida, podendo ser vista como uma hipótese de regularidade. Vale lembrar que isso é obtido por condições de dependência linear de certos conjuntos de vetores obtidos de um referencial transverso e suas derivadas. Quanto à hipótese de $\dim S_k = 1$, essa só é natural pelo desejo de se poder fazer uma escolha canônica de trajetória em cada ponto. Claro, isso está preso à necessidade de existência de trajetória com tal ordem k de contato. O que podemos dizer é que, com certeza, algum avanço já se consegue quando, para algum k, tivermos $S_k \neq S_1$. Nesse caso podemos restringir-nos a buscar estruturas no fibrado $E_k(G/H) \to G/H$, que permitam encontrar secções canônicas. Podemos ver em [1] como essa idéia é utilizada em alguns casos particulares incluindo o de curvas no espaço euclidiano, que foi onde encontramos problema. Observamos, contudo, que, precisamente a questão tratada nessa referência é a da congruência parametrizada, de modo que $E_k(G/H)$ é substituído por $J^k(G/H)$. Também nesse sentido parametrizado, [8] e também com essa idéia de secções canônicas daquele fibrado, [8] apresenta vários resultados que parecem interessantes mas que, confessamos, ainda não somos capazes de entender.

Neste ponto é importante revermos a literatura. A noção que aparece é a de G-contato: Dois mergulhos $\alpha, \beta : I \to G/H$ são ditos estarem em *G-contato* de ordem k em $t_o \in I$ se existe $g_o \in G$ tal $j^k(g_o \cdot \alpha)(t_o) = j^k(\beta)(t_o)$. Espera-se, então, que sob alguma hipótese de regularidade sobre os mergulhos, seja possível encontrar um inteiro k tal que se eles estiverem em contato de ordem k em todo $t \in I$, então serão congruentes. Assim, o tratamento usual não se limita a considerar contato com trajetórias, preferindo comparar diretamente os dois mergulhos. Claro, isso coincide com nosso tratamento sempre que os mergulhos em consideração forem k-comparáveis. Como na prática há a dificuldade de se encontrar modelos para os elementos de contato, acreditamos que alguma contribuição nosso tratamento traz.

Uma das questões que se apresentam mais intrigantes para nós é a possibilidade de obtenção de invariantes diferenciais, entendidos como generalização da curvatura de uma curva no plano euclidiano. Nos exemplos em dimensão dois que apresentamos, tivemos oportunidade de observar essa possibilidade. Nesses casos, sendo particulares, pudemos obter esses invariantes a partir do conhecimento da ação adjunta do grupo em sua álgebra de Lie. Em seguida vamos discutir um procedimento que sugere um caminho para investigações futuras.

Suponhamos que $\dim G/H = 2$. Seja $\alpha : I \to G/H$ um mergulho ideal e seja k a ordem ideal de contato para α. Então, $\dim S^{\alpha}_{k-1}(t) = 2$ and $\dim S^{\alpha}_{k}(t) = 1$. Pelo Teorema 3.3 sabemos que $S^{\alpha}_{k-1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$ tem dimensão 1. Se escolhermos uma base $\{\mathrm{e}^{\alpha}_1(t), \mathrm{e}^{\alpha}_2(t)\}$ de $S^{\alpha}_{k-1}(t)$, então poderemos escrever a evoluta de Lie de α como uma combinação linear

$$\mathbf{w}_{\alpha}(t) = K^{\alpha}_1(t)\mathrm{e}^{\alpha}_1(t) + K^{\alpha}_2(t)\mathrm{e}^{\alpha}_2(t).$$

Podemos sempre tomar $\mathrm{e}^{\alpha}_1(t) \in S^{\alpha}_{k-1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$, de modo que ele fica sempre conhecido a menos de sentido e "tamanho". Quanto a $\mathrm{e}^{\alpha}_2(t)$, ainda não entendemos em que sub espaço de $S^{\alpha}_{k-1}(t)$ deve ser escolhido. Mesmo assim, seguiremos na discussão.

Seja $\gamma = g \cdot \alpha$. Então, também podemos escrever

$$\mathbf{w}_{\gamma}(t) = K^{\gamma}_1(t)\mathrm{e}^{\gamma}_1(t) + K^{\gamma}_2(t)\mathrm{e}^{\gamma}_2(t),$$

com $\mathrm{e}^{\gamma}_1(t) \in S^{\gamma}_{k-1}(t) \cap \mathcal{G}_{\gamma(t)} = \mathrm{Ad}(g)\left(S^{\alpha}_{k-1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}\right)$. Suponhamos que $\mathrm{e}^{\gamma}_2(t)$ tenha sido escolhido como sendo justamente $\mathrm{Ad}(g)\mathrm{e}^{\alpha}_2(t)$ e que e^{γ}_1 tenha sido escolhido justamente como sendo $\mathrm{Ad}(g)\mathrm{e}^{\alpha}_1(t)$. Então, pelo Teorema 2.9, obtemos $K^{\alpha}_1 = K^{\gamma}_1(t)$ e $K^{\gamma}_2(t) = K^{\alpha}_2(t)$. É razoável acreditar que se conhecermos as órbitas da ação adjunta de G sobre $\mathcal{G}$, então poderemos fazer uma escolha de base com as propriedades desejadas. Nos exemplos, como pudemos ver, a escolha apropriada de uma base possibilitou-nos ver

$K_1(t)$ como uma generalização da curvatura e $K_2(t)$ como generalização da rapidez, inclusive pelo fato de $K_2(t)$ poder ser feito igual a 1 por uma reparametrização do mergulho. Notamos, então, que tendo feito essas escolhas e interpretações, ficamos com $\mathrm{w}_\alpha(t) = K_1(t)\mathrm{e}_1(t) + \mathrm{e}_2(t)$, dizendo-nos que $\mathbf{e}_2(t)$ é justamente o elemento em $S^\alpha_{k-1}(t)$ que coincide com a evoluta de Lie de α nos pontos de curvatura $K_1(t) = 0$. Noutras palavras, escolher apropriadamente $\mathbf{e}_2(t)$ seria o equivalente a saber quem o grupo escolhe como "geodésicas"em G/H.

Suponhamos que consigamos entender todos os fatos acima. Então nos perguntaremos sobre as situações em que $\dim G/H \geq 3$. Nessas situações e, ainda, com α um mergulho ideal de ordem ideal de contato igual a k, podemos esperar encontrar tantos invariantes quanto for a dimensão de $S^\alpha_{k-1}(t) \cap \mathcal{G}_{\alpha(t)}$, em se tratando de parametrização natural. Queremos observar algo com relação a isso. Seja $r = \dim G - \dim H - 1$; então r é a codimensão de α em G/H. Suponhamos que todos os elementos de um referencial transverso ao longo de α e todas as derivadas deles até ordem $k-1$, sejam linearmente independentes. Isso equivale a dizer que $\dim S^\alpha_m = \dim G - (m-1)r$, para $m = 1, ..., k$. Como estamos supondo que a ordem ideal de contato para α é k, devemos ter $dim S^\alpha_k = \dim G - (k-1)r = 1$. Portanto, $\dim(S^\alpha_{k-1} \cap \mathcal{G}) = \dim S^\alpha_{k-1} - 1 = \dim G - (k-2)r = r$. Ou seja, nessa situação ideal teríamos tantos invariantes quanto a codimensão de α em G/H.

Referências Bibliográficas

[1] -J.Q. ADAMS, *Frenet's theorem and method of moving frames*, Lincei-Memorie Sc. fisiche, ecc. (1981), S. VIII, vol. XVI, Sez. I,3, 112-166.

[2] -D. BERNARD, *Lectures Notes in Mathematics* **1045** (1982), 21-35.

[3] -J.W. BRUCE and P.J. GIBLIN , *Curves and singularities*, Cambridge University Press (1992).

[4] -E. CARTAN, *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris (1955).

[5] -M. CRAMPIN and F.A.E. PIRANI, *Applicable Differential Geometry*, London Mathematical Society Lectures Notes **59** (1986).

[6] -C. EHRESMANN, *Les prolongements d'une variété différentiable, IV: Eléments de contact et éléments d'enveloppe*, C. R. A. S. Paris **234** (1952), 1028-1030.

[7] -D.L. FIDAL, *The existence of sextactic points*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **96** (1984), 433-436.

[8] -M.L. GREEN, *The moving frame, differential invariants and rigidity theorems for curves in homogeneous spaces*, Duke Mathematical Journal **45** (1978), 735-779.

[9] -P. GRIFFITHS, *On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to existence an uniqueness questions in differential geometry*, Duke Math. J. **41** (1974), 775-814.

[10] -H. GUGGENHEIMER, *Differential Geometry*, McGraw-Hill, N.Y. (1963).

[11] -S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, N.Y. (1962).

[12] -G. JENSEN, *Higher order contac of submanifolds of homogeneous spaces*, Lecture Notes in Math. **610**, Springer-Verlag (1977).

[13] -I. KOLÁR, P.W. MICHOR, J. SLOVÁK, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, (1993).

[14] -K. NOMIZU, *Lie Groups and Differential Geometry*, Math. Soc. Japan Publ. (1956).

[15] -A. ONISHCHIK, E. VINBERG, Lie Groups and Lie Algebras I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol.20, Springer-Verlag (1993).

[16] -A.A.M. RODRIGUES, *contact and equivalence of submanifolds*, em Aspects of Maths. and its Applications, Elsevier Science Publishers B. V (1986), 665-675.

[17] -J.A. VERDERESI, *Contact et congruence de sous variétés*, Duke Math. J. **49** (1982), 513-515.

[18] -H. WEYL, Book review, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 598-601.

[19] -S. YZUMIYA, T. SANO, *Generic affine differential geometry of plane curves* preprint, Hokkaido University preprint series (1995).