
Espectro de Fučík e equações elípticas com não
linearidades de salto

Rafael Antônio Rossato

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Espectro de Fučík e equações elípticas com não linearidades de salto¹

Rafael Antônio Rossato

Orientador: *Prof. Dr. Eugenio Tommaso Massa*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2010

¹Projeto financiado pela FAPESP

*Tenho pensamentos que, se
pudesse revelá-los e fazê-los viver,
acrescentariam nova luminosidade às estrelas,
nova beleza ao mundo
e maior amor ao coração dos homens.*
(Fernando Pessoa)

*Dedico este trabalho ao
meu pai (in memoriam).*

Agradecimentos

Antes de tudo agradeço a Deus por estar comigo durante toda esta jornada me trazendo bençãos e alegrias.

Agradeço a Capes por financiar este projeto de pesquisa pelos 6 primeiros meses e a Fapesp pelos 18 meses restantes.

Quando olhamos à nossa volta num momento de fraqueza enxergamos mãos estendidas a fim de nos amparar e colocarmos de volta à luta. Quero agradecer todas estas mãos vindas de amigos e amigas que me acolheram em tais momentos durante estes dois anos, todos que comigo trocaram confidências sobre as dificuldades a serem vencidas. Em especial agradeço Rafael Rigamonti, Alex Garcia, Fernando Munhoz, Leandro Aoki, Matheus Costa, Rafael Heleno, Camila Bim, Larissa Sartori, Lilian Berti, Maurício Grisi, Bruno Dias, Vania Flose, Máira Alves, Felipe Fidalgo, Carlos Medeiros, Divane Dantas, Felipe Pimenta, Renato Ferreira, Adriana Matheus, Thalita Prado e Eduardo Melo Pádua.

Estudar é uma tarefa prazerosa, não obstante, é por vezes árdua. Quero agradecer aos amigos Moreno Bonutti, Matheus Bortolan e Juliana Lima, da minha turma de mestrado, pelas horas de estudo em grupo que compartilhamos no primeiro semestre dessa caminhada, tornando a tarefa menos difícil e mais satisfatória.

Agradeço também aos amigos do ICMC que contribuíram para um ambiente agradável de estudo, trabalho e convivência, dentre eles Paulo Carvalho, Eduard Toon, Thaís Jordão, Giselle Antunes, Pedro Apoliano, Renato Gonçalves, Rodrigo Pedra, Rodolfo Coligari, Catiana Casonatto, Jean Venato, Marcos Goulart, Fábio Campos, Renato Alejandro, Chris, Flank e Vinícius Siqueira. Ainda, pelo bom ambiente, agradeço também aos funcionários de serviços gerais, a Livia e Ana Paula da seção de pós-graduação e aos vigilantes do ICMC, em especial o seu Arly pelas horas de boa conversa.

Quero também agradecer a Daniela Peruzzi, Paulo Liboni e Thiago Gaudensi, amigos de São Carlos de fora do ICMC que tornaram muito agradável estes dois anos na cidade.

Agradeço Otávio Lemos e Tadeu Ricciardi pela boa música que me proporcionaram durante o tempo do grupo Sã-Confusão.

Agradeço Marcos Pimenta pela força e acolhimento dada no verão de 2008.

Agradeço Daniele Moura pelas sábias palavras sobre o mundo e a vida, que ajudam no amadurecimento de minha alma.

A conclusão deste trabalho não teria se realizado sem os grandes educadores que encontrei pelo caminho. Quero agradecer os professores do departamento de matemática da FEIS-UNESP, em especial Luis Antônio e Jaime Apaza que me iniciaram na pesquisa matemática, Edson Donizete e Roseli Arbach pela força e estímulo ao estudo. Agradeço também os professores Sérgio Monari, Ma To Fu, Márcia Federson do ICMC-USP, pelo apoio e ajuda, e o professor Eugenio Massa pela orientação, exemplo e toda a contribuição matemática que deu para a minha vida.

Agradeço minha mãe, Lourdes, meus irmãos Tiago e Gustavo, e todos os tios e tias, pessoas sem as quais nada teria conquistado, gigantes que me emprestam o ombro para apoiar e ver mais longe.

Agradeço a Rafaela pelo apoio, carinho, compreensão, por ser a mulher da minha vida e trazer tanta reciprocidade ao meu amor.

Por fim, porém de primeiríssima importância, agradeço a meu pai, homem que me fizeste dar os primeiros passos, artesão dos meus pensamentos e fonte infindável de fortitude. De onde quer que esteja sei que olha por mim.

Reitero aqui às minhas palavras que esta dissertação foi desenvolvida por muitas horas de estudo, absorto em minha solidão, entretanto todos estes citados estavam em minha mente todo o tempo e cada um deu sua contribuição (direta ou indireta) para que eu tivesse calma, paciência, coragem e até mesmo fôlego para continuar.

Mais uma vez a todos MUITO OBRIGADO!

Resumo

Estudamos o Espectro de Fučík para o operador Laplaciano, isto é, o conjunto Σ das duplas $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, tais que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \mu u^+(x) - \nu u^-(x); & x \in \Omega, \\ Bu = 0; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

admita soluções não triviais, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$, $u^-(x) = \{0, -u(x)\}$ e B representa condições de contorno. Inicialmente apresentamos alguns resultados abstratos sobre o Espectro de Fučík e em seguida o calculamos explicitamente no caso unidimensional para os problemas de Dirichlet e de Neumann. Estes resultados são aplicados ao estudo da solubilidade do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)); & x \in \Omega, \\ Bu = 0; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

quando a não linearidade f é uma conveniente perturbação de $\mu u^+ - \nu u^-$; descreveremos diferentes comportamentos em função dos parâmetros (μ, ν) . Por fim, consideramos o Espectro de Fučík em dimensão maior. Neste caso não é possível calculá-lo explicitamente, assim apresentamos uma caracterização variacional da sua primeira curva não trivial. Esta caracterização nos permitirá obter várias informações sobre a forma desta curva e também outros resultados sobre a solubilidade de (2).

Abstract

We study the Fučík Spectrum for the Laplacian operator, that is, the set Σ of the couples $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ for which the problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \mu u^+(x) - \nu u^-(x); & x \in \Omega, \\ Bu = 0; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

admits a nontrivial solution, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain, $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$, $u^-(x) = \{0, -u(x)\}$ and B represents some boundary condition. We first show some abstract results about the Fučík Spectrum and then we compute it explicitly in the one dimensional case for the Dirichlet and Neumann problems. These results are applied at the study of the solvability of the problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)); & x \in \Omega, \\ Bu = 0; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

when the nonlinearity f is a suitable perturbation of $\mu u^+ - \nu u^-$; we describe different behaviors depending on the parameters (μ, ν) . Finally, we consider the Fučík Spectrum in higher dimension. In this case it is not possible to compute it explicitly, so we will show a variational characterization of the first nontrivial curve. This characterization will allow to obtain some information on the properties of this curve and also further results on the solvability of (2).

Índice de Notações

$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$ \Omega $	Medida do conjunto Ω
$C^m(E)$	Espaço das funções m vezes continuamente diferenciáveis sobre E
$C_c^\infty(E)$	Espaço das funções $C^\infty(E)$ com suporte compacto em E
$C_c^1(E)$	Espaço das funções $C^1(E)$ com suporte compacto em E
$d_B(f, \Omega, b)$	Grau de Brouwer da aplicação f com respeito a Ω e ao ponto b
$d_{LS}(Id - T, \Omega, b)$	Grau de Leray-Schauder da aplicação $Id - T$ com respeito a Ω e ao ponto b
$\partial f(x_0)$	Conjunto de todos os subgradientes de f no ponto x_0
$supp(f)$	Suporte da função f
$dist(x, y)$	Distância entre os elementos x e y
$dist(x, \Omega)$	Distância do conjunto Ω ao elemento x
Id	Aplicação identidade
$\ f\ _X$	Norma de f no espaço X
$ u _p$	Norma L^p da função u
$\langle u, v \rangle_E$	Produto interno de u por v no espaço E
$\langle u, v \rangle$	Produto interno de u por v no espaço H^1 ou H_0^1
$\ u\ $	Norma H^1 ou H_0^1 da função u
$B(a, r)$	Bola de centro a e raio r
$B_X(\rho)$	Bola no espaço X com centro na origem e raio ρ

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Índice de Notações	ix
Introdução	1
1 Definições e resultados básicos	3
1.1 Preliminares	3
1.2 A teoria do grau	4
1.3 Espaços de Sobolev	6
1.4 O problema de Auto-Valores	7
1.5 Subgradientes	8
2 O Espectro de Fučík e suas propriedades	11
2.1 O Problema	11
2.2 Resultados abstratos	12
2.3 Espectro de Fučík de uma EDO com condição de Dirichlet	22
2.4 Espectro de Fučík de uma EDO com condição de Neumann	32
2.5 Um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi	34
3 Caracterização variacional e uma aplicação	43
3.1 Relação Assimétrica de Ortogonalidade	43
3.2 A primeira curva não trivial do Espectro de Fučík	44
3.3 Domínios Nodais	57

3.4	Não ressonância entre (λ_1, λ_1) e C_1	58
3.5	O problema de Neumann e o Princípio do Antimáximo	69
	Índice Remissivo	74

Introdução

Neste trabalho estudamos algumas propriedades do Espectro de Fučík, que é definido como o conjunto Σ das duplas $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, tais que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \mu u^+(x) - \nu u^-(x); & x \in \Omega, \\ Bu = 0; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

admita solução não trivial. Em (1), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é um domínio limitado, $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$, $u^-(x) = \{0, -u(x)\}$ e B representa condições de contorno. Este Espectro foi definido pela primeira vez por Fučík em [Fuč76] e por Dancer em [Dan77].

O Espectro de Fučík desempenha um papel importante no estudo de solubilidade de problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)); & x \in \Omega, \\ Bu = 0; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

quando

$$\mu = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s}; \quad \nu = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s}; \quad (3)$$

as não linearidades deste tipo são usualmente chamadas de não linearidades de salto (jumping nonlinearities), de fato, o problema (2) pode ser visto como uma perturbação do problema (1).

No capítulo 1, daremos algumas definições e enunciaremos resultados conhecidos da análise que serão usados ao longo deste trabalho.

No capítulo 2, apresentamos o problema (1) e estudamos alguns resultados abstratos envolvendo o Espectro de Fučík. Em seguida calculamos explicitamente o Espectro de Fučík no caso de dimensão $n = 1$, para os problemas de Dirichlet e Neumann, e aplicamos estes resultados para estudar a solubilidade do problema (2)-(3).

Os principais resultados deste capítulo são o teorema 2.8, que nos fornece algumas propriedades do Espectro de Fučík, bem como de alguns conjuntos a ele relacionados, as proposições 2.10 e 2.17 que descrevem o Espectro de Fučík para o problema (1) em dimensão um, com condição de Dirichlet e Neumann respectivamente, e os teoremas 2.12, 2.15 e 2.19 que apresentam diferentes comportamentos do problema (2) em função dos parâmetros (μ, ν) .

No capítulo 3, estudamos o Espectro de Fučík em dimensão $n > 1$. Neste caso não é possível calculá-lo explicitamente, mas apresentamos uma caracterização variacional da sua primeira curva não trivial. Esta caracterização nos permitirá obter várias informações sobre a forma desta curva e também sobre a solubilidade de (2) quando a não linearidade interage parcialmente com o Espectro de Fučík.

Os principais resultados do capítulo 3 são o teorema 3.3, onde é obtida a caracterização variacional citada acima, os teoremas 3.5, 3.7, 3.8 e 3.19 que descrevem as propriedades da curva caracterizada e enfim o teorema 3.13 que apresenta o resultado de solubilidade para o problema (2).

Os trabalhos que seguimos nesta dissertação foram [Fuč76], [Dan77] e o livro [Fuč80], para o capítulo 2. Para o capítulo 3, seguimos principalmente [dFG94] para a caracterização variacional, enquanto para a aplicação ao problema (2) complementamos com [GO90] e [CG92].

Definições e resultados básicos

1.1 Preliminares

Começamos com algumas definições da análise funcional e em seguida apresentamos alguns resultados conhecidos da análise. Com o intuito de não carregar na notação, não usamos neste trabalho sub-índices para representar subsequências, manteremos a notação x_n e diremos, quando for o caso, “a menos de subsequência”.

Definição 1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ é dita **compacta** se $T(A)$ é precompacto para todo A limitado e **completamente contínua** se é contínua e compacta.*

Definição 1.2. *Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que E está **continuamente imerso** em F e denotamos por $E \hookrightarrow F$, quando $E \subset F$ e existe $k \geq 0$, tal que $\|u\|_F \leq k\|u\|_E$ para todo $u \in E$.*

Definição 1.3. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que $f : X \rightarrow X$ é uma **contração** se existir $0 \leq \beta < 1$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq \beta\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema 1.4 (Princípio da Contração de Banach). *Sejam X um espaço de Banach e $f : X \rightarrow X$ uma contração. Então f admite um único ponto fixo $x_0 \in X$, isto é, $f(x_0) = x_0$.*

Proposição 1.5. *Sejam X um espaço de Banach, $\{x_n\} \subset X$ e $x \in X$. Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\|x_n\|_X$ é limitada e $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$.*

Teorema 1.6 (Convergência Dominada). *Sejam $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^p(\Omega)$, tais que $f_n \rightarrow f$ q. t. p. em Ω e $|f_n(x)| \leq g(x)$ q. t. p. em Ω . Então $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, isto é, $\{f_n\}$ converge para f em $L^p(\Omega)$.*

Teorema 1.7 (Recíproca da Convergência Dominada). *Sejam $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tal que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Então, existem uma subsequência $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ e $h \in L^p(\Omega)$, tais que*

- (a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q. t. p. em Ω ,
- (b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q. t. p. em Ω , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.8 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ para $1 < p < \infty$, $q = 1$ caso $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.9 (Teorema da Representação de Riesz). *Sejam H um espaço de Hilbert, com produto interno (\cdot, \cdot) e $\phi \in H'$ (dual de H). Então existe único $y \in H$, tal que*

$$(y, v) = \langle \phi, v \rangle_H, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.10 (Lema de Fatou). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções L^p com $1 \leq p < \infty$.*

- (i) *Se existe uma função $g \in L^p$, tal que $f_n \geq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

- (ii) *Se existe uma função $g \in L^p$, tal que $f_n \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Teorema 1.11 (Teorema de Egorov). *Sejam E um conjunto mensurável com $0 < |E| < \infty$ e $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções reais, tal que $f_n \rightarrow f$ q. t. p. em E . Então para todo $\delta > 0$, existe um conjunto mensurável $F \subseteq E$ de medida positiva, tal que $|E \setminus F| \leq \delta$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em F .*

1.2 A teoria do grau

Nesta seção apresentamos algumas propriedades do grau, como podem ser encontradas no capítulo 20 de [Fuč80] ou em [Dei85]. Primeiro consideramos o grau em espaços de dimensão finita, chamado grau de Brouwer.

Sejam Ω um aberto limitado em Y , $f : \bar{\Omega} \rightarrow Y$, tal que $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, e $0 \in Y$, onde Y é um espaço de Banach de dimensão finita.

O grau é uma função que associa a terna $(f, \Omega, 0)$, com $0 \notin f(\partial\Omega)$, a um número inteiro, que será dito grau de Brouwer da função f com respeito a Ω e denotado por $d_B(f, \Omega, 0)$.

Seguem algumas propriedades do grau.

(P1) Se $d_B(f, \Omega, 0) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = 0$.

(P2) (**Invariância por homotopia contínua**) Se $f(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Y$ é contínua e $0 \neq f(x, t)$, para todo $x \in \partial\Omega$ e todo $t \in [0, 1]$, então

$$d_B(f(\cdot, t), \Omega, 0) \equiv \text{constante, para todo } t \in [0, 1].$$

(P3) Seja $K \subset \bar{\Omega}$ um fechado com $0 \notin f(K)$. Então

$$d_B(f, \Omega, 0) = d_B(f, \Omega \setminus K, 0).$$

(P4) (**Teorema de Borsuk**) Se Ω é simétrico com relação a origem, $0 \in \Omega$ e f é ímpar, então $d_B(f, \Omega, 0)$ é ímpar.

Agora iremos redefinir o grau para espaços de Banach em dimensão infinita. Este será chamado grau Leray-Schauder.

Sejam Ω um aberto limitado em um espaço de Banach Y e $T : \bar{\Omega} \rightarrow Y$ uma aplicação completamente contínua tal que $0 \notin (Id - T)(\partial\Omega)$. Seja $\{T_n\}$ uma sequência de operadores de $\bar{\Omega}$ em Y , tais que $T_n(\bar{\Omega}) \subset Y_n$, onde Y_n é um subespaço de dimensão finita de Y , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n u - Tu\| = 0,$$

uniformemente em $\bar{\Omega}$. A prova da existência desta sequência de operadores pode ser vista em [Dei85].

Desta forma está bem definido $d_B(Id - T_n, \Omega_n, 0)$, onde $\Omega_n = \Omega \cap Y_n$. Assim definimos o grau de Leray-Schauder de $Id - T$ com respeito a Ω , como

$$d_{LS}(Id - T, \Omega, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_B(Id - T_n, \Omega_n, 0).$$

De fato, é possível mostrar que o limite acima independe da escolha da sequência T_n , implicando que a definição está bem posta.

Com esta definição pode-se mostrar que as propriedades (P1) a (P4) valem também para $d_{LS}(Id - T, \Omega, 0)$.

Quando estiver evidente em que espaço estaremos calculando o grau, nos limitaremos a usar a notação $d(f, \Omega, 0)$.

Vejam agora um resultado que será aplicado futuramente.

Lema 1.12. *Sejam Z um espaço de Banach, $\rho > 0$ e F uma aplicação completamente contínua de $\overline{B_Z(\rho)}$ em Z , com $0 \notin (Id - F)(\partial B_Z(\rho))$. Então vale a igualdade*

$$d(z - Fz, B_Z(\rho), 0) = d(z + F(-z), B_Z(\rho), 0).$$

Demonstração. Da definição do grau de Leray-Schauder, sabemos que existe uma sequência de operadores $F_n : \overline{B_Z(\rho)} \rightarrow Z$, tais que $F_n(\overline{B_Z(\rho)}) \subset Z_n$, onde Z_n é um subespaço de dimensão finita de Z ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(z) - Fz\|_Z = 0, \quad \text{uniformemente em } \overline{B_Z(\rho)},$$

e

$$d_{LS}(Id - F, B_Z(\rho), 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_B(Id - F_n, B_{Z_n}(\rho), 0),$$

onde $B_{Z_n}(\rho) = B_Z(\rho) \cap Z_n$.

Tomando $f(x) = x - F_n(x)$, temos $-f(-x) = x + F_n(-x)$. Disto segue que

$$d(-f(-x), B_{\mathbb{R}^n}(1), 0) = d(f(x), B_{\mathbb{R}^n}(1), 0),$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x - F_n(x), B_{Z_n}(\rho)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x + F_n(-x), B_{Z_n}(\rho), 0),$$

ou seja,

$$d(z - Fz, B_Z(\rho), 0) = d(z + F(-z), B_Z(\rho), 0).$$

□

1.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção introduzimos os espaços de Sobolev e apresentamos alguns dos principais resultados que os envolvem. Tais resultados podem ser encontrados em [Bre83].

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.13. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega), \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi, \right. \\ \left. \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Denotamos, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$ e $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

Podemos munir o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ da norma

$$\|u\| = |u|_p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p,$$

que é equivalente a $\left(|u|_p^p + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$, para $1 \leq p < \infty$.

Pode-se mostrar que o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. Além disso ele é Hilbert quando $p = 2$: denotamos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Definição 1.14. *Seja $1 \leq p < \infty$, o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Se Ω for de classe C^1 e $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, para $1 \leq p < \infty$, temos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a $u(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$.

É possível mostrar que quando Ω é limitado, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a norma $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx$ é equivalente à norma usual definida acima. Em geral estaremos usando essa equivalência uma vez que neste trabalho teremos sempre Ω limitado.

Denotaremos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Vale enfim o importante resultado:

Teorema 1.15 (Imersões de Sobolev). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave, são contínuas as imersões:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad s \in [1, 2^*], \quad n \geq 3, \quad 2^* = \frac{2n}{n-2},$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad s \in [1, \infty), \quad n = 1, 2.$$

Além disso, as seguintes imersões são compactas:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad s \in [1, 2^*), \quad n \geq 3,$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad s \in [1, \infty), \quad n = 1, 2.$$

Dessa forma, quando valem as imersões compactas, usando o fato que $H^1(\Omega)$ é reflexivo, temos que se $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ é limitada, então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^s(\Omega)$ para alguma $u \in H^1(\Omega)$. Esta última afirmação será bastante usada no decorrer deste trabalho.

1.4 O problema de Auto-Valores

Apresentamos aqui alguns resultados sobre o problema de auto-valores com condição de Dirichlet. A referência para esta seção é o capítulo 6 de [Eva98].

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave, vamos considerar a questão de encontrar os λ pelos quais existe $u \neq 0$, satisfazendo o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Estes valores de λ são chamados de auto-valores de $-\Delta$ em Ω , e as soluções correspondentes são chamadas auto-funções. A seguir enunciamos alguns resultados que usaremos adiante.

É possível mostrar que existe uma sequência de auto-valores λ_k , tal que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lambda_k \nearrow \infty,$$

onde o primeiro auto-valor é simples e suas auto-funções não mudam de sinal. Além disso, λ_1 é o único auto-valor com estas propriedades e pode ser caracterizado variacionalmente como

$$\lambda_1 = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx : v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} v^2(x) dx = 1 \right\}. \quad (1.2)$$

Notemos que (1.2) implica que

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2(x) dx} \text{ e } \lambda_1 \int_{\Omega} v^2(x) dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \quad (1.3)$$

além disso pode-se mostrar que se $\lambda_1 \int_{\Omega} v^2(x) dx = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$, então v é um múltiplo de ϕ_1 .

Em geral denotaremos por ϕ_i as auto-funções associadas aos auto-valores λ_i , escolhidas de maneira que

$$\int_{\Omega} \phi_h(x) \phi_k(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{se } h = k, \\ 0, & \text{se } h \neq k, \end{cases}$$

e com $\phi_1(x) > 0$ para $x \in \Omega$.

É possível caracterizar variacionalmente também os outros auto-valores da seguinte maneira:

$$\lambda_k = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_h = 0, \text{ para } h = 1, \dots, k-1, \int_{\Omega} u^2 = 1 \right\}. \quad (1.4)$$

1.5 Subgradientes

Nesta seção apresentamos a definição de subgradiente para uma função convexa, como pode ser visto em [CLSW98]. Este conceito será usado no estudo da primeira curva não trivial do Espectro de Fučík no capítulo 3.

Iniciamos definindo função convexa.

Definição 1.16. *Sejam U um subconjunto aberto convexo de um espaço de Banach X e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, se*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \text{para todo } x, y \in X \text{ e } t \in (0, 1).$$

Definição 1.17. *Sejam E um espaço de Hilbert, e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa que leva limitados em limitados. Então definimos $z^* \in E$ subgradiente de f no ponto $z \in E$, se*

$$f(u) \geq f(z) + \langle z^*, u - z \rangle_E, \quad \forall u \in E.$$

Observemos que se $E = \mathbb{R}$, então a desigualdade acima fica

$$f(u) - f(z) \geq z^*(u - z), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

mostrando que z^* representa o coeficiente angular das retas que passam por $(z, f(z))$ e estão abaixo do gráfico de f .

O conjunto de todos os subgradientes de f em z é chamado de subdiferencial de f em z e é denotado por $\partial f(z)$.

O teorema a seguir é uma versão do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para vínculos definidos por uma função convexa, mas que pode não ser de classe C^1 .

Teorema 1.18. *Sejam E um espaço de Hilbert, $J \in C^1(E)$, f como acima, $V = \{u \in E : f(u) = 0\}$ e $v \in V$ um mínimo para J restrito a V . Então, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ e $v^* \in \partial f(v)$ satisfazendo*

$$\alpha J'(v)[u] + \beta \langle v^*, u \rangle_E = 0,$$

para todo $u \in E$.

O Espectro de Fučík e suas propriedades

Neste capítulo iremos introduzir o Espectro de Fučík, e obteremos alguns resultados abstratos que serão aplicados ao caso de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com condição de Dirichlet. Estudaremos também o caso em dimensão um com condição de Dirichlet e de Neumann, a fim de encontrarmos de forma explícita os respectivos Espectros de Fučík.

Por fim ainda veremos um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi.

O estudo feito neste capítulo pode ser encontrado nos capítulos 40 a 42 de [Fuč80].

2.1 O Problema

Vamos inicialmente considerar o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \mu u^+(x) - \nu u^-(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$ e Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^n com $n \geq 1$.

Consideremos a seguinte definição dada originalmente por Fučík em [Fuč76] e por Dancer em [Dan77]:

Definição 2.1. O conjunto Σ dos elementos $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, tais que (2.1) admite solução fraca não trivial é chamado de **Espectro de Fučík** de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$.

Algumas propriedades que podem ser facilmente observadas são demonstradas na proposição abaixo.

Proposição 2.2. $(\lambda_k, \lambda_k) \in \Sigma$, $\forall k \in \mathbb{N}$, Σ contém as retas $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ e é simétrico com relação à diagonal.

Demonstração. De fato, $(\lambda_k, \lambda_k) \in \Sigma$, pois neste caso uma auto-função ϕ_k é solução não trivial de (2.1). Além disso, como $\phi_1 > 0$, temos $-\Delta\phi_1(x) = \lambda_1\phi_1(x) = \lambda_1\phi_1^+(x) - \eta\phi_1^-(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $\eta \in \mathbb{R}$, e logo ϕ_1 é uma solução não trivial para (2.1) com coeficientes (λ_1, η) . Portanto $(\lambda_1, \eta) \in \Sigma$. Concluimos, da mesma forma, que $(\zeta, \lambda_1) \in \Sigma$, $\forall \zeta \in \mathbb{R}$, pois neste caso $-\phi_1$ é a solução não trivial. Assim Σ contém as retas $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$.

Para concluir a simetria de Σ , basta ver que se $(\mu, \nu) \in \Sigma$, então, para $u \in H_0^1(\Omega)$ solução não trivial de (2.1), temos $-\Delta u = \mu u^+ - \nu u^-$ o que é equivalente a $\Delta u = -\mu u^+ + \nu u^-$, e portanto $-\Delta(-u) = \nu(-u)^+ - \mu(-u)^-$. Concluimos assim que $-u$ é solução não trivial deste último problema. Portanto $(\nu, \mu) \in \Sigma$. \square

O Espectro de Fučík para o problema (2.1), será importante em nosso estudo de solubilidade do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu u^+ + \nu u^- - \psi(u) = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde ψ é contínua, limitada e $f \in L^2(\Omega)$.

2.2 Resultados abstratos

Nesta seção apresentamos alguns resultados abstratos que nos fornecerão propriedades do Espectro de Fučík definido acima. Começamos definindo um cone em um espaço vetorial.

Definição 2.3. Seja X um espaço vetorial real. Um subconjunto C de X é dito um **cone** em X , quando:

$$C + C \subset C, \quad \mathbb{R}_+ C \subset C \quad e \quad C \cap (-C) = \{0\},$$

onde $C + C = \{a + b : a \in C \text{ e } b \in C\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_+ C = \{\alpha x : x \in C, \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ e $-C = \{-x : x \in C\}$.

Dado um cone, podemos definir uma ordem parcial em X dizendo que $u \geq v$ se, e somente se $u - v \in C$. Dados $u, v \in X$, se existir $w \in C'$ tal que $w \leq z$, $\forall z \in C'$, onde $C' = \{z \in X : z \geq u, z \geq v\}$, diremos que w é o máximo entre u e v , e denotaremos por $w = \max\{u, v\}$.

Alguns exemplos de cone são os conjuntos formados por funções não negativas em Ω de $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, $C^k(\Omega)$ e $C_0^k(\Omega)$. Neste caso está bem definido $\max\{u, v\}(x) = \max\{u(x), v(x)\}$.

Agora façamos algumas considerações. Sejam X e Z espaços de Banach reais e C um cone em X . Suponhamos as seguintes hipóteses:

(A) Estão bem definidos $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$, e as as aplicações $X \rightarrow X : u \mapsto u^+$ e $u \mapsto u^-$ são contínuas.

(B) Sejam $J : X \rightarrow Z$, $S : X \rightarrow Z$ e $G : X \rightarrow Z$ de modo que

(J1) J é um homeomorfismo ímpar entre X e Z e positivamente a -homogêneo para algum $a > 0$, isto é,

$$t > 0, u \in X \Rightarrow J(tu) = t^a J(u).$$

(S1) S é positivamente a -homogênea e completamente contínua.

(G1) G é completamente contínua.

Agora definamos

$$\begin{aligned} T_{(\mu, \nu)} : X &\rightarrow Z \\ u &\mapsto \mu S u^+ - \nu S u^-. \end{aligned}$$

Notemos que a definição de u^+ e u^- , implica que $u = u^+ - u^-$, $(-u)^+ = u^-$, $(-u)^- = u^+$ e $(tu)^\pm = t u^\pm$, para $t \geq 0$. Em consequência, podemos mostrar o seguinte resultado para $T_{(\mu, \nu)}$:

Lema 2.4. *Para todo $u \in X$, temos*

$$T_{(\mu, \nu)}(-u) = -T_{(\nu, \mu)}u. \quad (2.3)$$

Além disso, $T_{(\mu, \nu)}$ é positivamente a -homogênea e completamente contínua.

Demonstração. De fato,

$$T_{(\mu, \nu)}(-u) = \mu S(-u)^+ - \nu S(-u)^- = \mu S u^- - \nu S u^+ = -(\nu S u^+ - \mu S u^-) = -T_{(\nu, \mu)}u.$$

Claramente, por (S1), $T_{(\mu, \nu)}$ é positivamente a -homogênea e completamente contínua. \square

Como J , S e $T_{(\mu, \nu)}$ são positivamente a -homogêneas, temos $J(0) = 0$, $S(0) = 0$ e $T_{(\mu, \nu)}(0) = 0$.

Antes de apresentarmos os resultados abstratos, vejamos como traduzir o problema (2.2) nesse contexto. Neste caso, os espaços serão $X = Z = H_0^1(\Omega)$, munido da norma $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2$ e C será o cone das funções não negativas em Ω , e assim para $u \in H_0^1(\Omega)$, $u^+(x) =$

$\max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$. As aplicações $J, S, G : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ serão definidas por:

$$\langle Ju, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \quad (2.4)$$

$$\langle Su, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad (2.5)$$

$$\langle Gu, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = - \int_{\Omega} \psi(u(x))v(x) dx, \quad (2.6)$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Notemos que estão satisfeitas as hipóteses **(A)** e **(B)**. Claramente J satisfaz **(J1)** pois é a aplicação identidade. Além disso S e G satisfazem, respectivamente, **(S1)** e **(G1)**. Mostremos por exemplo o caso de S . Para isto devemos observar que S é linear e logo positivamente a -homogênea para $a = 1$. Assim falta mostrar que é completamente contínua.

De fato, seja $u \in H_0^1(\Omega)$ e denotemos por $w = Su$. Assim, usando (2.5), temos,

$$\|w\|^2 = \int_{\Omega} \nabla w \nabla w = \int_{\Omega} uw \leq K|u|_2 \cdot \|w\|, \quad (2.7)$$

onde K é uma constante positiva. Segue disto que $\|w\| \leq K|u|_2$, implicando que S é limitada e portanto contínua por ser linear.

Agora, suponhamos $\{u_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$ e assim, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Sendo S limitada, segue que $\{w_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, onde $w_n = Su_n$, e logo, novamente a menos de subsequência, $w_n \rightharpoonup w$ em $H_0^1(\Omega)$ e $w_n \rightarrow w$ em $L^2(\Omega)$. Disto temos

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \nabla v = \int_{\Omega} u_n v \rightarrow \int_{\Omega} uv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

mas por outro lado, $\int_{\Omega} \nabla w_n \nabla v \rightarrow \int_{\Omega} \nabla w \nabla v$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Daí temos $\int_{\Omega} \nabla w \nabla v = \int_{\Omega} uv$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Desta forma,

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \nabla w_n - \nabla w \nabla w_n = \int_{\Omega} (u_n - u)w_n \rightarrow 0,$$

e portanto $\|w_n\|^2 - \|w\|^2 \rightarrow 0$, o que junto com a convergência fraca em $H_0^1(\Omega)$, implica na convergência forte, mostrando que S é aplicação compacta e logo completamente contínua.

Neste momento, voltemos a pensar no caso geral. Começamos definindo alguns conjuntos que serão importantes para os resultados desta seção. Notemos que o primeiro deles é o conjunto Σ definido no início do capítulo.

$$A_{-1} = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \exists u_0 \neq 0 : Ju_0 - T_{(\mu, \nu)}u_0 = 0\}$$

$$A_0 = \mathbb{R}^2 \setminus A_{-1}$$

$$A_1 = \{(\mu, \nu) \in A_0 : d(\text{Id} - T_{(\mu, \nu)}J^{-1}, B_Z(1), 0) \neq 0\}$$

$$A_2 = \{(\mu, \nu) \in A_0 : \text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)}) \neq Z\}$$

$$A_3 = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)}) = Z\}$$

Observemos que, em A_0 , o grau está bem definido, pois se $(\mu, \nu) \in A_0$, então teríamos $Ju - T_{(\mu, \nu)}u = 0$ apenas para $u = 0$ e como $0 \notin (\text{Id} - T_{(\mu, \nu)}J^{-1})(\partial(B_Z(1)))$ faz sentido definir o grau.

Vejamos três lemas que serão usados na demonstração do teorema que virá adiante.

Lema 2.5. *Sejam $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $c_1(\alpha, \beta) := \sup_{\|u\|_X=1} \|T_{(\alpha, \beta)}u\|_Z$, e*

$s := \max \left\{ \sup_{\|u\|_X=1} \|Su^+\|_Z, \sup_{\|u\|_X=1} \|Su^-\|_Z \right\}$. Então $c_1(\alpha, \beta) \leq (|\alpha| + |\beta|)s$. Em particular, temos

(a) $c_1(\alpha, \beta) < \infty$

(b) $\lim_{(\alpha, \beta) \rightarrow (0, 0)} c_1(\alpha, \beta) = 0$

(c) $u \in X \Rightarrow \|T_{(\alpha, \beta)}(u)\|_Z \leq c_1(\alpha, \beta) \cdot \|u\|_X^q$

Demonstração. De fato, Su^+ e Su^- são completamente contínuas, mostrando que s é finito. Desta forma segue que

$$\begin{aligned} c_1(\alpha, \beta) &= \sup_{\|u\|_X=1} \|T_{(\alpha, \beta)}u\|_Z = \sup_{\|u\|_X=1} \|\alpha Su^+ - \beta Su^-\|_Z \leq \\ &\leq \sup_{\|u\|_X=1} (|\alpha| \cdot \|Su^+\|_Z + |\beta| \cdot \|Su^-\|_Z) \leq \\ &\leq |\alpha|s + |\beta|s, \end{aligned}$$

portanto $c_1(\alpha, \beta) \leq (|\alpha| + |\beta|)s$. Claramente obtemos também (a) e (b).

Agora seja $u \in X$. Se $u = 0$, então a desigualdade (c) está satisfeita. Suponhamos assim $u \neq 0$. com isto, temos:

$$\begin{aligned} \|T_{(\alpha,\beta)}(u)\|_Z &= \left\| T_{(\alpha,\beta)} \left(\|u\|_X \frac{u}{\|u\|_X} \right) \right\|_Z = \\ &= \left\| \alpha S \left(\|u\|_X \frac{u}{\|u\|_X} \right)^+ - \beta S \left(\|u\|_X \frac{u}{\|u\|_X} \right)^- \right\|_Z = \\ &= \|u\|_X^a \cdot \left\| T_{(\alpha,\beta)} \left(\frac{u}{\|u\|_X} \right) \right\|_Z \leq c_1(\alpha, \beta) \|u\|_X^a. \end{aligned}$$

Isto mostra (c). □

Lema 2.6. *Sejam $(\mu, \nu) \in A_0$ e $c_2(\mu, \nu) := \inf_{\|u\|_X=1} \|Ju - T_{(\mu,\nu)}u\|_Z$, então*

(a) $c_2(\mu, \nu) > 0$.

(b) $\|Ju - T_{(\mu,\nu)}(u)\|_Z \geq c_2(\mu, \nu) \cdot \|u\|_X^a$, para $x \in X$.

Demonstração. (a) Suponhamos $c_2(\mu, \nu) = 0$, então existiria uma sequência $\{u_n\} \subset X$ com $\|u_n\|_X = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ju_n - T_{(\mu,\nu)}(u_n)\|_Z = 0. \quad (2.8)$$

Uma vez que $\{u_n\}$ é limitada em X e $T_{(\mu,\nu)}$ é completamente contínua, existe $y \in Z$, tal que, a menos de subsequência, $T_{(\mu,\nu)}u_n \rightarrow y$ em Z . Por (2.8), segue que $Ju_n \rightarrow y$ em Z . Sendo J um homeomorfismo, temos $y = Ju_0$ para algum $u_0 \in X$ e, a menos de subsequência, $u_n \rightarrow u_0$ em X . Segue disto que $\|u_0\|_X = 1$, e novamente por (2.8), teremos

$$Ju_0 - T_{(\mu,\nu)}u_0 = 0,$$

implicando que $(\mu, \nu) \in A_{-1}$, o que é uma contradição. Portanto $c_2(\mu, \nu) > 0$.

(b) Se $u = 0$ a desigualdade ocorre trivialmente. Suponhamos então $u \neq 0$, assim temos:

$$\|Ju - T_{(\mu,\nu)}u\|_Z = \|u\|_X^a \cdot \left\| J \left(\frac{u}{\|u\|_X} \right) - T_{(\mu,\nu)} \left(\frac{u}{\|u\|_X} \right) \right\|_Z \geq \|u\|_X^a c_2(\mu, \nu).$$

□

O seguinte lema será usado para garantir que A_0 é aberto em \mathbb{R}^2 , como veremos no item (ii) do teorema que virá adiante.

Lema 2.7. *Se $(\mu, \nu) \in A_0$ e $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tais que*

$$|\alpha| + |\beta| < s^{-1}c_2(\mu, \nu),$$

então $(\mu + \alpha, \nu + \beta) \in A_0$.

Demonstração. Do lema 2.5 e pela hipótese, temos

$$c_1(\alpha, \beta) \leq (|\alpha| + |\beta|)s < s^{-1}c_2(\mu, \nu)s = c_2(\mu, \nu),$$

portanto $c_1(\alpha, \beta) < c_2(\mu, \nu)$.

Assim para $u \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \|Ju - T_{(\alpha+\mu, \beta+\nu)}u\|_Z &= \|Ju - [(\alpha+\mu)Su^+ - (\beta+\nu)Su^-]\|_Z = \|Ju - (T_{(\alpha, \beta)}u + T_{(\mu, \nu)}u)\|_Z \geq \\ &\|Ju - T_{(\mu, \nu)}u\|_Z - \|T_{(\alpha, \beta)}u\|_Z \geq c_2(\mu, \nu) \cdot \|u\|_X^\alpha - c_1(\alpha, \beta) \cdot \|u\|_X^\alpha = [c_2(\mu, \nu) - c_1(\alpha, \beta)] \cdot \|u\|_X^\alpha > 0. \end{aligned}$$

Logo $Ju - T_{(\alpha+\mu, \beta+\nu)}u \neq 0$ para todo $u \in X \setminus \{0\}$, o que significa que $(\alpha+\mu, \beta+\nu) \in A_0$. \square

Agora enunciamos e demonstramos o principal resultado desta seção.

Teorema 2.8. (i) *Os conjuntos A_i , para $i = -1, 0, 1, 2$ ou 3 , são simétricos com relação à diagonal $\{\nu = \mu\}$, isto é,*

$$(\mu, \nu) \in A_i \Leftrightarrow (\nu, \mu) \in A_i.$$

(ii) A_0 é subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e vale seguinte propriedade:

– Se $(\mu, \nu) \in A_0$, então $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)})$ é fechada em Z .

(iii) A_1 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , com as seguintes propriedades:

– A_1 é união de componentes conexas de A_0 , em particular se U é uma componente conexa do conjunto A_0 contendo $(\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, então $U \subset A_1$.

– $A_1 \subset A_3$.

– Seja $(\mu, \nu) \in A_1$ e $\limsup_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^\alpha} < c_2(\mu, \nu)$, então

$$\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} + G) = Z.$$

(iv) A_2 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , com a seguinte propriedade:

– Se $(\mu, \nu) \in A_2$, então existe $c_3(\mu, \nu) > 0$, tal que se $\limsup_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^\alpha} < c_3(\mu, \nu)$, então

$$\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} + G) \neq Z.$$

Observação 2.9. 1. Pondo $G = 0$, a última afirmação do item (iii), nos diz que para $(\mu, \nu) \in A_1$ a equação $Ju - T_{(\mu, \nu)}u = f$, possui solução para todo $f \in Z$. Já a afirmação do item (iv), diz que para $(\mu, \nu) \in A_2$, sempre existe $f \in Z$, tal que a equação não possui soluções. O mesmo resultado vale para a equação $Ju - T_{(\mu, \nu)}u + Gu = f$, quando G satisfaz as condições enunciadas. No caso do problema (2.2), como ψ é limitada, $\limsup_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^\alpha} = 0$, portanto temos o mesmo tipo de resultado.

2. Observemos que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, mas não necessariamente $A_0 = A_1 \sqcup A_2$, pois o fato que $d(\text{Id} - T(\mu, \nu)J^{-1}; B_Z(1); 0) = 0$ não exclui a possibilidade de $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)}) = Z$. Além disso, não sabemos se A_2 é reunião de componentes conexas de A_0 , de fato quando o grau é zero, poderíamos ter, na mesma componente conexa de A_0 , pontos onde $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)}) = Z$ e outros onde $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)}) \neq Z$.
3. Na demonstração do item (iv), a implicação (2.10) diz que além de $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} + G) \neq Z$, a imagem não pode ser densa em Z .

Demonstração do teorema 2.8. (i) Casos $i = -1$ e 0 . A simetria segue diretamente da equação (2.3).

Caso $i = 1$. Basta tomar $F = T_{(\mu, \nu)}$ no lema 1.12, pois teremos:

$$d(z - T_{(\mu, \nu)}(z), B_Z(\rho), 0) = d(z + T_{(\mu, \nu)}(-z), B_Z(\rho), 0) = d(z - T_{(\nu, \mu)}(z), B_Z(\rho), 0),$$

concluindo que $(\mu, \nu) \in A_1 \Leftrightarrow (\nu, \mu) \in A_1$.

Caso $i = 2$. Se $(\mu, \nu) \in A_2$, existe $z \in Z$ tal que $Ju - T_{(\mu, \nu)}(u) \neq z$, para todo $u \in X$. Assim, $-Ju + T_{(\mu, \nu)}(u) \neq -z$ para todo $u \in X$, e portanto $J(-u) - T_{(\nu, \mu)}(-u) \neq -z$ para todo $u \in X$. Com isto, concluímos que $\text{Im}(J - T_{(\nu, \mu)}) \neq Z$, e logo $(\nu, \mu) \in A_2$.

Caso $i = 3$. Seja $(\mu, \nu) \in A_3$, então dado $z \in Z$, existe $u \in X$ tal que $Ju - T_{(\mu, \nu)}(u) = z$. Com isto, pelo mesmo cálculo feito no caso $i = 2$, segue que $J(-u) - T_{(\nu, \mu)}(-u) = -z$. Logo $(\nu, \mu) \in A_3$.

Concluimos assim $(\mu, \nu) \in A_i \Leftrightarrow (\nu, \mu) \in A_i$, para $i = -1, 0, 1, 2$ ou 3 .

(ii) Para ver que A_0 é aberto, considere $(\mu, \nu) \in A_0$ e $(\alpha, \beta) \in B_r(0)$, para $r = s^{-1}c_2(\mu, \nu)$, onde, por comodidade usamos a norma da soma, obtendo $|\alpha| + |\beta| < s^{-1}c_2(\mu, \nu)$. Pelo lema 2.7, segue que $(\alpha + \mu, \beta + \nu) \in A_0$, implicando que $B_r((\mu, \nu)) \subset A_0$. Logo (μ, ν) é ponto interior de A_0 .

Para mostrarmos que $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)})$ é fechada em Z , consideremos $\{z_n\}$ uma sequência em $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)})$ e $z_0 \in Z$, tais que $z_n \rightarrow z_0$ em Z . Assim temos $z_n = Ju_n - T_{(\mu, \nu)}u_n$ para $\{u_n\} \subset X$. Pelo lema 2.6, segue que

$$c_2(\mu, \nu) \cdot \|u_n\|_X^a \leq \|z_n\|_Z, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que z_n é limitada, pois é convergente, temos $\{u_n\}$ limitada. Como $T_{(\mu, \nu)}$ é completamente contínua, então, a menos de subsequência, $T_{(\mu, \nu)}u_n \rightarrow y$ em Z , para algum $y \in Z$. Segue disto que $Ju_n - z_n \rightarrow y$ em Z , e como $z_n \rightarrow z_0$, temos $Ju_n \rightarrow y + z_0$ em Z . Pelo fato de J ser um homeomorfismo, dizemos $Ju_n \rightarrow Ju_0$ para algum $u_0 \in X$ e com isto concluímos também $u_n \rightarrow u_0$ em X . Logo $y = Ju_0 - z_0$ e portanto $T_{(\mu, \nu)}u_n \rightarrow Ju_0 - z_0$ em Z . Sendo $T_{(\mu, \nu)}$ contínua, temos também $T_{(\mu, \nu)}u_n \rightarrow T_{(\mu, \nu)}u_0$ em Z .

Por fim, $T_{(\mu, \nu)}u_0 = Ju_0 - z_0$, o que implica que $Ju_0 - T_{(\mu, \nu)}u_0 = z_0$, concluindo que $z_0 \in \text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)})$.

(iii) Uma vez que $A_1 \subset A_0$, podemos tomar $(\mu, \nu) \in A_1$ e $(\alpha, \beta) \in A_0$ na mesma componente conexa de A_0 . Mostraremos que $(\alpha, \beta) \in A_1$, de modo que A_1 será união de componentes

conexas de A_0 e por consequência será um aberto. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho contínuo, tal que $\gamma(0) = (\mu, \nu)$, $\gamma(1) = (\alpha, \beta)$ e $\gamma([0, 1]) \subset A_0$.

Nestas condições, temos (veja na seção 1.2),

$$d(\text{Id} - T_{\gamma(t)}J^{-1}, B_Z(1), 0) \equiv \text{constante para } t \in [0, 1],$$

pois caso contrário, $z_0 - T_{\gamma(t_0)}(J^{-1}z_0) = 0$, com $z_0 \in \partial B_Z(1)$, para algum $t_0 \in (0, 1]$. Isto implicaria que $z_0 \in A_{-1} = \mathbb{R}^2 \setminus A_0$, o que é uma contradição, pois tomamos $\gamma([0, 1]) \subset A_0$. Assim temos

$$\begin{aligned} d(\text{Id} - T_{\gamma(0)}J^{-1}, B_Z(1), 0) &= d(\text{Id} - T_{\gamma(1)}J^{-1}, B_Z(1), 0), \text{ isto é,} \\ 0 &\neq d(\text{Id} - T_{(\mu, \nu)}J^{-1}, B_Z(1), 0) = d(\text{Id} - T_{(\alpha, \beta)}J^{-1}, B_Z(1), 0), \end{aligned}$$

e portanto, $(\alpha, \beta) \in A_1$.

Agora sejam U uma componente conexa de A_0 e $(\lambda, \lambda) \in U$. Como $T_{(\lambda, \lambda)}$ é aplicação ímpar, pelo Teorema de Borsuk (teorema 1.2), sabemos que $d(\text{Id} - T_{(\lambda, \lambda)}J^{-1}, B_Z(1), 0)$ é ímpar, e então não nulo. Assim $(\lambda, \lambda) \in A_1$, e portanto $U \subset A_1$.

Mostremos agora que $A_1 \subset A_3$. De fato, sejam $(\mu, \nu) \in A_1$ e $y \in Z$. Desta maneira, para cada $z \in Z$, existe $u \in X$, tal que $Ju = z$, pois J é um homeomorfismo entre X e Z . Logo temos a seguinte equivalência:

$$Ju - T_{(\mu, \nu)}u = y \Leftrightarrow z - T_{(\mu, \nu)}(J^{-1}z) = y.$$

Mostremos que $z - T_{(\mu, \nu)}(J^{-1}z) = y$ é solúvel. De fato, pela continuidade de J , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|u\|_X \leq \delta \Rightarrow \|Ju - J(0)\|_Z = \|Ju\|_Z < \epsilon.$$

Assim, $\left\| J\left(\frac{\delta u}{\|u\|_X}\right) \right\|_Z = \frac{\delta^a}{\|u\|_X^a} \cdot \|Ju\|_Z < \epsilon$, e com isto

$$\|Ju\|_Z \leq \epsilon \cdot \frac{\|u\|_X^a}{\delta^a}, \quad \forall u \in X.$$

Portanto temos $\|z\|_Z \leq \epsilon \cdot \frac{\|J^{-1}z\|_X^a}{\delta^a}$. Dessa maneira podemos dizer que $\|J^{-1}z\|_X^a \geq k\|z\|_Z$, para uma constante $k > 0$.

Pelo lema 2.6, temos $\|z - T_{(\mu, \nu)}(J^{-1}z)\|_Z \geq c_2(\mu, \nu) \cdot \|J^{-1}z\|_X^a \geq k \cdot \|z\|_Z$. Logo, existe $\rho > 0$ suficientemente grande, tal que $\|z - T_{(\mu, \nu)}(J^{-1}z)\|_Z > \|y\|_Z$, para todo $z \in Z$ com $\|z\|_Z = \rho$. Dessa maneira segue que $0 \notin (\text{Id} - T_{(\mu, \nu)}J^{-1} - ty)(\partial B_Z(\rho))$ para todo $t \in [0, 1]$, pois caso contrário teríamos, $z - T_{(\mu, \nu)}(J^{-1}z) = ty$, para algum $z \in Z$ tal que $\|z\|_Z = \rho$. Nestas condições, $d(\text{Id} - T_{(\mu, \nu)}J^{-1} - ty, B_Z(\rho), 0)$ está bem definido e é constante com respeito a $t \in [0, 1]$.

Uma vez que $(\mu, \nu) \in A_1$, concluímos que

$$d(\text{Id} - T_{(\mu, \nu)}J^{-1} - y, B_Z(\rho), 0) = d(\text{Id} - T_{(\mu, \nu)}J^{-1}, B_Z(\rho), 0) =$$

$$= d(\text{Id} - T_{(\mu,\nu)}J^{-1}z, B_Z(1), 0) \neq 0.$$

Logo, por propriedades da Teoria do Grau, $z - T_{(\mu,\nu)}J^{-1}z = y$ é solúvel para um $y \in Z$ tomado arbitrariamente, portanto $\text{Im}(J - T_{(\mu,\nu)}) = Z$, e por fim $(\mu, \nu) \in A_3$.

Seja $(\mu, \nu) \in A_1$ e $\limsup_{\|x\|_X \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^a} < c_2(\mu, \nu)$. Mostraremos que $\text{Im}(J - T_{(\mu,\nu)} + G) = Z$.

De fato, seja $y \in Z$. Mostremos que existe $\rho > 0$ tal que

$$\|z - T_{(\mu,\nu)}J^{-1}z + tG(J^{-1}z)\|_Z > \|y\|_Z, \quad (2.9)$$

para todo $z \in Z$ e $t \in [0, 1]$, com $\|z\|_Z = \rho$. De fato, da hipótese segue que existem $\epsilon > 0$ e $\tilde{\rho} > 0$, tais que

$$\|Gu\|_Z < (c_2(\mu, \nu) - \epsilon)\|u\|_X^a, \text{ sempre que } \|u\|_X \geq \tilde{\rho}.$$

Pelo lema 2.6 para todo $t \in [0, 1]$, temos que se $\|J^{-1}z\|_X \geq \tilde{\rho}$, então

$$\begin{aligned} \|z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z) + tG(J^{-1}z)\|_Z &\geq \|z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z)\|_Z - \|G(J^{-1}z)\|_Z \geq \\ &\geq \|z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z)\|_Z - (c_2(\mu, \nu) - \epsilon) \cdot \|J^{-1}z\|_X^a \geq \\ &\geq c_2(\mu, \nu) \cdot \|J^{-1}z\|_X^a - c_2(\mu, \nu) \cdot \|J^{-1}z\|_X^a + \epsilon \|J^{-1}z\|_X^a = \epsilon \cdot \|J^{-1}z\|_X^a > C \cdot \|z\|_Z^a. \end{aligned}$$

Portanto existe $\rho > 0$, tal que (2.9) vale para todo $z \in Z$ com $\|z\| = \rho$ e $t \in [0, 1]$. Usando novamente a propriedade da invariância do grau por homotopia, segue que

$$d(\text{Id} - T_{(\mu,\nu)}J^{-1} + t(GJ^{-1} - y); B(0, \rho), 0),$$

é constante com respeito a t , pois

$$\|z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z) + t(G(J^{-1}z) - y)\|_Z \geq \|z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z) + tG(J^{-1}z)\|_Z - \|ty\|_Z > 0,$$

para $z \in \partial B(0, \rho)$. Logo

$$d(\text{Id} - T_{(\mu,\nu)}J^{-1} + GJ^{-1} - y; B(0, \rho); 0) = d(\text{Id} - T_{(\mu,\nu)}J^{-1}; B(0, \rho); 0) \neq 0,$$

uma vez que $(\mu, \nu) \in A_1$ por hipótese. Pelas propriedades do grau, existe $z_0 \in Z$ tal que $u_0 = J^{-1}z_0$ satisfaça

$$u_0 - T_{(\mu,\nu)}u_0 + Gu_0 = y,$$

o que mostra que $\text{Im}(J - T_{(\mu,\nu)} + G) = Z$.

(iv) Mostremos primeiro que se $(\mu, \nu) \in A_2$, então existe $c_3(\mu, \nu) > 0$, tal que se

$$\limsup_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^a} < c_3(\mu, \nu), \text{ então } \text{Im}(J - T_{(\mu,\nu)} + G) \neq Z.$$

Como $(\mu, \nu) \in A_2$, existe $y \in Z$ com $\|y\|_Z = 1$ tal que $Ju - T_{(\mu,\nu)}u \neq y$, para todo $u \in X$. Como $\text{Im}(J - T_{(\mu,\nu)})$ é fechado pelo item (ii), tomando $2\epsilon = \inf_{u \in X} \|Ju - T_{(\mu,\nu)}u - y\| > 0$, definimos $c_3(\mu, \nu) := \frac{\epsilon}{\epsilon+1} \cdot c_2(\mu, \nu)$.

Se $\limsup_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^a} < c_3(\mu, \nu)$, então podemos escolher $r > 0$, tal que $\|Gu\|_Z < c_3(\mu, \nu) \cdot \|u\|_X^a$, para todo $u \in X$, $\|u\|_X \geq r$. Uma vez que $J - T_{(\mu, \nu)} + G$ transforma conjuntos limitados de X em conjuntos limitados de Z (T e G são compactas e J é homeomorfismo), existe $b > 0$ com a seguinte propriedade:

se para $\eta \in Z$ com $\|\eta\|_Z = 1$ e $t \geq b$, vale

$$Ju - T_{(\mu, \nu)}u + Gu = t\eta,$$

então $\|u\| \geq r$.

Vamos mostrar a seguinte implicação:

$$\eta \in Z \text{ com } \|\eta\|_Z = 1, \|\eta - y\|_Z \leq \epsilon \text{ e } t \geq b \Rightarrow t\eta \notin \text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} + G). \quad (2.10)$$

Suponhamos, por contradição, que $t\eta \in \text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} + G)$, ou seja, existe $u \in X$ tal que $Ju - T_{(\mu, \nu)}u + Gu = t\eta$, como $t \geq b$, temos $\|u\|_X \geq r$. Então usando o lema 2.6, segue que

$$\begin{aligned} t &= \|t\eta\|_Z = \|Ju - T_{(\mu, \nu)}u + Gu\|_Z \geq \|Ju - T_{(\mu, \nu)}u\|_Z - \|Gu\|_Z \geq \\ &\geq c_2(\mu, \nu)\|u\|_X^a - \frac{c_2(\mu, \nu)\epsilon}{\epsilon + 1}\|u\|_X^a = \frac{c_2(\mu, \nu)}{\epsilon + 1}\|u\|_X^a, \end{aligned}$$

isto é, $\frac{c_2(\mu, \nu)}{\epsilon + 1}\|u\|_X^a \leq t$.

Por outro lado, da forma como foi tomado ϵ , temos

$$\begin{aligned} t\epsilon &= 2t\epsilon - t\epsilon \leq t \left\| y - J\left(\frac{u}{t^{\frac{1}{a}}}\right) + T_{(\mu, \nu)}\left(\frac{u}{t^{\frac{1}{a}}}\right) \right\|_Z - t\|y - \eta\|_Z = \|ty - Ju + T_{(\mu, \nu)}u\|_Z - t\|y - \eta\|_Z \leq \\ &\leq \|ty - Ju + T_{(\mu, \nu)}u - ty + t\eta\|_Z = \|t\eta - Ju + T_{(\mu, \nu)}u\|_Z = \|Gu\|_Z < \\ &< \frac{\epsilon}{\epsilon + 1}c_2(\mu, \nu)\|u\|_X^a. \end{aligned}$$

Assim, $t\epsilon < \frac{\epsilon}{\epsilon + 1}c_2(\mu, \nu)\|u\|_X^a \leq t\epsilon$, o que é uma contradição. Logo, não podemos ter $t\eta \in \text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} + G)$, e portanto $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} + G) \neq Z$.

Para mostrar que A_2 é aberto, façamos $Gu = -T_{(\alpha, \beta)}u$, com $|\alpha| + |\beta| < \frac{c_3(\mu, \nu)}{2s}$, dessa maneira temos

$$\|Gu\|_Z \leq |\alpha| \cdot \|Su^+\| + |\beta| \cdot \|Su^-\|_Z \leq (|\alpha| + |\beta|)\|u\|_X^a s < \frac{c_3(\mu, \nu)}{2}\|u\|_X^a.$$

Logo, usando a definição de $c_3(\mu, \nu)$, obtemos $\limsup_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^a} < c_3(\mu, \nu)$ e pelo que foi visto acima, segue que $\text{Im}(J - T_{(\mu, \nu)} - T_{(\alpha, \beta)}) \neq Z$, e portanto $\text{Im}(J - T_{(\mu + \alpha, \nu + \beta)}) \neq Z$.

Concluimos assim que $(\mu + \alpha, \nu + \beta) \in A_2$ e então (μ, ν) é ponto interior de A_2 . \square

2.3 Espectro de Fučík de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com condição de Dirichlet

Nesta seção calculamos o Espectro de Fučík para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com condição de Dirichlet. De fato, em dimensão um temos a disposição o Teorema de Existência e Unicidade para problemas de valores iniciais, e isso nos permitirá obter resultados bem mais detalhados, em particular será possível determinar explicitamente o Espectro de Fučík.

Consideremos o problema não linear com condição de Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) - \mu u^+(x) + \nu u^-(x) - \psi(u(x)) = f(x) & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, limitada e $f \in L^1(0, \pi)$.

A fim de garantir a solubilidade do problema (2.11), é importante estudarmos a existência de soluções não triviais do problema (2.2) que, neste caso particular, assume a forma:

$$\begin{cases} -u''(x) = \mu u^+(x) - \nu u^-(x), & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Aqui usaremos alguns dos resultados da seção anterior tomando $\Omega = (0, \pi)$, $X = Z = H_0^1(0, \pi)$ e $J, S, G : X \rightarrow X$ tais que:

$$\langle Ju, v \rangle_{H_0^1(0, \pi)} = \int_0^\pi u'(x)v'(x)dx, \quad (2.13)$$

$$\langle Su, v \rangle_{H_0^1(0, \pi)} = \int_0^\pi u(x)v(x)dx, \quad (2.14)$$

$$\langle Gu, v \rangle_{H_0^1(0, \pi)} = - \int_0^\pi \psi(u(x))v(x)dx, \quad (2.15)$$

para todo $u, v \in H_0^1(0, \pi)$.

A estrutura do Espectro de Fučík para o problema (2.12) é dada na seguinte proposição.

Proposição 2.10. *(2.12) possui uma solução não trivial se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita.*

- (a) $\mu = 1$ e ν é arbitrário,
- (b) $\nu = 1$ e μ é arbitrário,
- (c) $\mu > 1$, $\nu > 1$ e $\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} = 1$ para algum k inteiro positivo,
- (d) $\mu > 1$, $\nu > 1$ e $\frac{k+1}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} = 1$ para algum k inteiro positivo,

(e) $\mu > 1$, $\nu > 1$ e $\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k+1}{\sqrt{\nu}} = 1$ para algum k inteiro positivo.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos $u \in H_0^1(0, \pi)$ uma solução fraca não trivial de (2.12), neste caso a teoria da regularidade nos diz que ela é também uma solução clássica. Temos, desta forma, que u possui um número finito de zeros em $(0, \pi)$, pois caso contrário, tomando x_0 um ponto de acumulação dos zeros de u , teríamos por continuidade $u(x_0) = 0$. Usando o fato de u ser função C^1 , segue da definição de derivada que $u'(x_0) = 0$. Com isto concluiríamos, pelo Teorema de Existência e Unicidade, que u é a solução nula, o que é uma contradição.

Consideremos inicialmente o caso em que u não possua zeros em $(0, \pi)$. Assim, por continuidade, $u = u^+$ ou $u = -u^-$ em $(0, \pi)$.

Se $u = u^+$, temos $-u''(x) = \mu u(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$ e ν arbitrário. Resolvendo esta equação para $\mu > 0$, temos $u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}x)$. Assim

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

e portanto

$$u(\pi) = 0 \Rightarrow C_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0,$$

e a única possibilidade compatível com u ser positivo é $\mu = 1$.

Nos casos $\mu = 0$ e $\mu < 0$, teríamos $u(x) = \alpha + \beta x$ e $u(x) = \alpha e^{\sqrt{-\mu}x} + \beta e^{-\sqrt{-\mu}x}$ respectivamente, mas pela condição de fronteira, segue que $\alpha = \beta = 0$.

Concluimos que $\mu = 1$ e ν é arbitrário. Isso mostra o item (a). Fazendo $u = -u^-$, obtém-se de modo análogo o item (b).

Agora consideremos o caso em que u muda de sinal em $(0, \pi)$. Sejam $a < b \in [0, \pi]$ zeros de u , com u positiva entre a e b . Pelo mesmo argumento usado no caso anterior, deveremos ter $\mu > 0$. Desta forma, temos:

$$\begin{cases} -u''(x) - \mu u(x) = 0 & x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

implicando que $u^+(x) = m \cdot \sin(\sqrt{\mu}(x - a))$, $x \in (a, b)$ e m uma constante positiva. De modo análogo, se $c < d \in [0, \pi]$ são zeros de u , tais que u seja negativa no intervalo (c, d) , temos $\nu > 0$ e $u^-(x) = q \cdot \sin(\sqrt{\nu}(x - c))$, $x \in (c, d)$ onde q é uma constante negativa.

Desta forma, no intervalo $(0, \pi)$, cada parte positiva de u possui um comprimento de $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ e cada parte negativa um comprimento de $\frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$, e isso já nos diz que $\mu > 1$ e $\nu > 1$, pois caso contrário teríamos $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ e $\frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$ maiores que π . Além disso, em todo zero a derivada é não nula, logo u muda de sinal e portanto teremos 3 possibilidades para ocorrer $u(0) = u(\pi) = 0$.

1. u possui o mesmo número de partes positivas e negativas (veja figura 2.1).

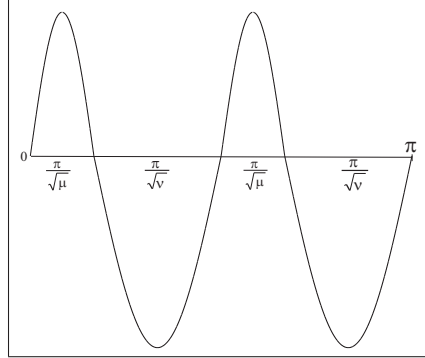


Figura 2.1: Solução com o mesmo número de partes positivas e partes negativas

Assim, $\pi \left(\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} \right) = \pi$, onde k é o número de partes positivas, o que conclui **(c)**.

2. u possui uma parte positiva a mais que negativa (veja figura 2.2).

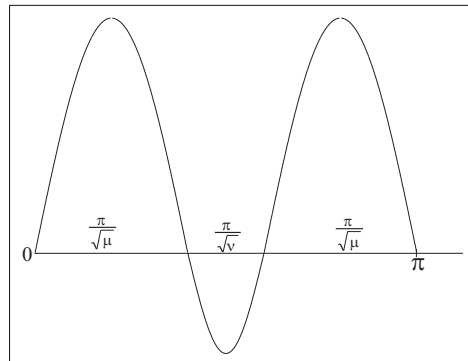


Figura 2.2: Solução com uma parte positiva a mais que negativa

Assim, $\pi \left(\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right) = \pi$, onde k é o número de partes negativas, o que conclui **(d)**.

3. u possui uma parte negativa a mais que positiva (veja figura 2.3).

Assim $\pi \left(\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) = \pi$, onde k é o número de partes positivas, o que conclui **(e)**.

(\Leftarrow) Caso seja válido o item **(a)**, basta tomarmos $u(x) = C \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$, e C positivo. Para o item **(b)**, basta tomar C negativo.

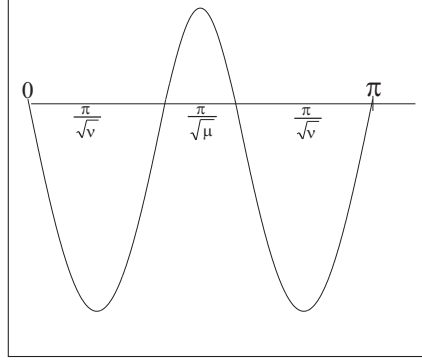


Figura 2.3: Solução com uma parte negativa a mais que positiva

Notemos que **(c)** nos motiva a dizer que a solução deverá mudar de sinal e que o intervalo $(0, \pi)$ está dividido em k intervalos de comprimento $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$. Construiremos a solução desejada para apenas um desses intervalos. Sejam $a < c < d \in [0, \pi]$, tais que $c = a + \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ e $d = c + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$. Façamos em (a, c) , $u(x) = m \cdot \text{sen}(\sqrt{\mu}(x-a))$ e em (c, d) , $u(x) = q \cdot \text{sen}(\sqrt{\nu}(x-c))$, de modo que $m\sqrt{\mu} = -q\sqrt{\nu}$. Assim

$$u'(x) = \begin{cases} m \cdot \cos(\sqrt{\mu}(x-a))\sqrt{\mu}, & \text{em } (a, c), \\ q \cdot \cos(\sqrt{\nu}(x-c))\sqrt{\nu}, & \text{em } (c, d), \end{cases}$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow c^-} u'(x) = -m\sqrt{\mu} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} u'(x) = q\sqrt{\nu},$$

mostrando que $\lim_{x \rightarrow c^-} u'(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} u'(x)$ e logo $u \in C^1$. Para ver que $u \in C^2$ é suficiente calcular a segunda derivada e verificar que $\lim_{x \rightarrow c} u''(x) = 0$.

Os itens **(d)** e **(e)** são análogos ao item **(c)**. □

Usaremos o lema acima para demonstrar o teorema que garante uma solução para (2.11). Para isto fazemos algumas observações e considerações. Primeiramente vejamos as 3 equações obtidas na demonstração do lema anterior,

$$\pi \left(\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} \right) = \pi, \quad \pi \left(\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right) = \pi \quad \text{e} \quad \pi \left(\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) = \pi. \quad (2.17)$$

Da primeira equação de (2.17), temos

$$\frac{k}{\sqrt{\mu}} + \frac{k}{\sqrt{\nu}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{\sqrt{\mu} - k}{k\sqrt{\mu}} \Rightarrow \sqrt{\nu} = \frac{k\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu} - k}.$$

Olhando $\sqrt{\nu}$ como função de $\sqrt{\mu}$, temos uma hipérbole com assíntotas $\sqrt{\mu} = k$ e $\sqrt{\nu} = k$ e que passa pelo ponto $(\sqrt{\mu}, \sqrt{\nu}) = (2k, 2k)$. Denotaremos esta curva por η_k .

Da segunda equação de (2.17), obtemos de modo análogo

$$\sqrt{\nu} = \frac{k\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu} - (k+1)},$$

que agora representa uma hipérbole com assíntotas, $\sqrt{\mu} = k + 1$ e $\sqrt{\nu} = k$ e que passa pelo ponto $(\sqrt{\mu}, \sqrt{\nu}) = (2k + 1, 2k + 1)$. Denotaremos esta curva por ω_k .

Por simetria (trocando μ por ν), a terceira equação de (2.17), descreve uma hipérbole com assíntotas, $\sqrt{\mu} = k$ e $\sqrt{\nu} = k + 1$ e que passa pelo ponto $(\sqrt{\mu}, \sqrt{\nu}) = (2k + 1, 2k + 1)$. Denotaremos esta curva por θ_k .

Observemos que a curva η_k é simétrica com respeito à diagonal, enquanto as curvas ω_k e θ_k são simétricas da outra e interceptam-se no ponto $(2k + 1, 2k + 1)$.

Desta forma obtemos a figura 2.4, que representa uma parte do Espectro de Fučík do problema (2.12).

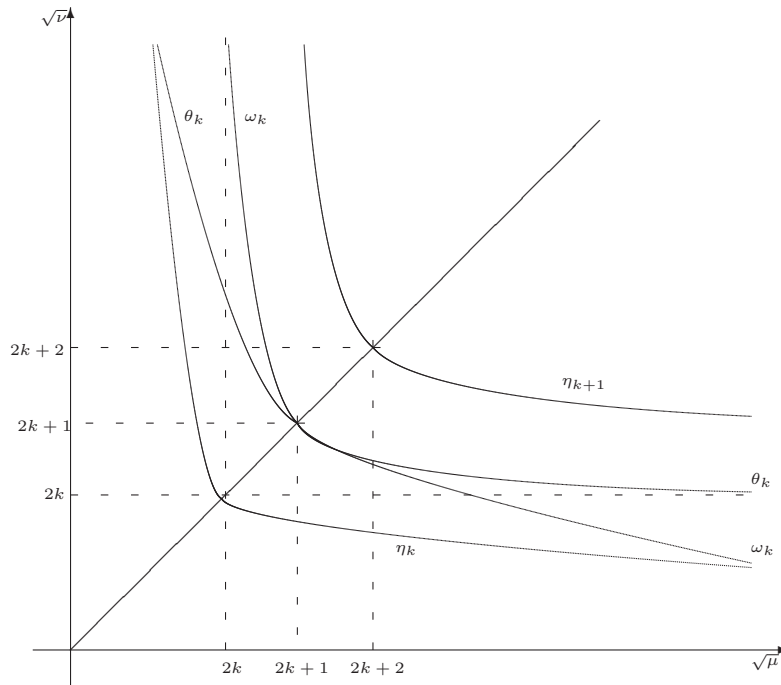


Figura 2.4: Curvas do Espectro de Fučík para o caso Dirichlet unidimensional passando pelos auto-valores $2k$, $2k + 1$ e $2k + 2$

Agora definiremos alguns subconjuntos de A_0 , isto é, do complementar de Σ e veremos algumas propriedades. Sejam,

$$\mathcal{A} = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2, \mu < 1, \nu < 1\},$$

M_0 o conjunto dos pontos (μ, ν) abaixo de η_1 com $\mu > 1$ e $\nu > 1$, M_k o conjunto dos pontos acima da diagonal entre θ_k e η_k e dos pontos abaixo da diagonal entre ω_k e η_k , N_k o conjunto dos pontos acima da diagonal entre η_{k+1} e ω_k e dos pontos abaixo da diagonal entre η_{k+1} e θ_k , ou seja, M_k é o conexo entre η_k e $\omega_k \cup \theta_k$, enquanto N_k é o conexo entre $\omega_k \cup \theta_k$ e η_{k+1} . Veja a figura 2.5.

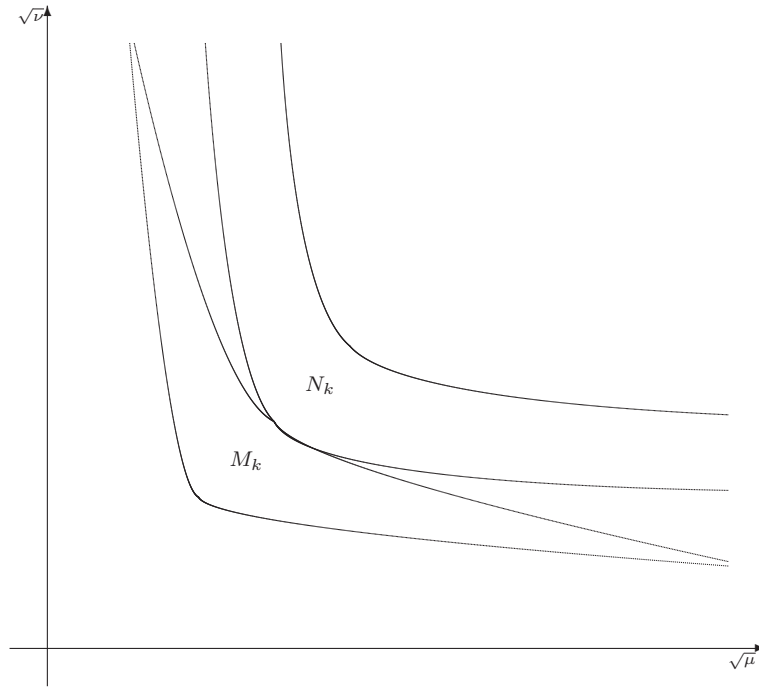


Figura 2.5: Regiões M_k e N_k

Agora definimos

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \right),$$

e mostramos os seguintes teoremas:

Teorema 2.11. $\mathcal{M} \subset A_1$

Demonstração. Se $(\mu, \nu) \in \mathcal{M}$, então (μ, ν) não pertence a nenhuma das curvas η_k , θ_k , ω_k para qualquer k inteiro positivo, e pela proposição 2.10, (2.12) não possui solução não trivial e portanto $(\mu, \nu) \in A_0$. Temos ainda que cada componente conexa de \mathcal{M} contém pontos da diagonal e pela primeira afirmação do item (iii) do teorema 2.8, segue que $\mathcal{M} \subset A_1$. \square

Teorema 2.12. Se $(\mu, \nu) \in \mathcal{M}$ e $f \in L^1(0, \pi)$, então (2.11) possui solução fraca não trivial.

Demonstração. Operando como em (2.7), temos $\|Gu\| \leq c|\psi(u)|_2$ e uma vez que ψ é limitada, temos

$$\limsup_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} = 0 < c_2(\mu, \nu), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2.$$

Pela terceira afirmação do item **(iii)** do teorema 2.8, temos $Im(J - T_{(\mu, \nu)} + G) = H_0^1(0, \pi)$, sempre que $(\mu, \nu) \in \mathcal{M}$. Para u ser solução fraca de (2.11) com $f \in L^1(0, \pi)$, devemos ter

$$\int_0^\pi u'v' - \int_0^\pi (\mu u^+ - \nu u^-)v - \int_0^\pi \psi(u)v = \int_0^\pi fv; \quad \forall v \in H_0^1(0, \pi). \quad (2.18)$$

Uma vez que $H_0^1(0, \pi) \hookrightarrow L^\infty(0, \pi)$, temos que $\int_0^\pi fv$ é linear e contínua em v , pois usando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_0^\pi fv \leq \|f\|_1 \cdot \|v\|_\infty \leq K \|f\|_1 \cdot \|v\|,$$

onde K é uma constante positiva. Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $y \in H_0^1(0, \pi)$, tal que

$$\int_0^\pi fv = \langle y, v \rangle_{H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(0, \pi).$$

Assim, (2.18) é escrito como

$$\langle Ju - T_{(\mu, \nu)}u + Gu, v \rangle_{H_0^1} = \langle y, v \rangle_{H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(0, \pi), \quad (2.19)$$

e como $Im(J - T_{(\mu, \nu)} + G) = H_0^1(0, \pi)$, segue que (2.19) possui solução e assim (2.18) também possui. \square

Agora vamos estudar a solubilidade de (2.11) para $(\mu, \nu) \notin \mathcal{M}$. A referência para estes resultados é [Dan77]. Iniciamos apresentando um teorema que nos dá condições necessárias para (2.11) ser solúvel nos dois quadrantes $\{\mu < 1, \nu > 1\}$ e $\{\mu > 1, \nu < 1\}$.

Teorema 2.13. *Sejam $f \in L^1(0, \pi)$, $\mu < 1$, $\nu > 1$ e $\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x \, dx < 0$. Então, (2.11) com $\psi = 0$ não possui solução fraca. O mesmo resultado é válido para $\mu > 1$, $\nu < 1$ e $\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x \, dx > 0$.*

Demonstração. De fato, suponhamos u solução fraca de (2.11). Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x \, dx &= \int_0^\pi u'(x) \cos x \, dx + \int_0^\pi (-\mu u^+(x) + \nu u^-(x)) \operatorname{sen} x \, dx = \\ &= - \int_0^\pi u(x) \cdot (-\operatorname{sen} x) \, dx + \int_0^\pi (-\mu u^+(x) + \nu u^-(x)) \operatorname{sen} x \, dx = \\ &= (1 - \mu) \int_0^\pi u^+(x) \operatorname{sen} x \, dx + (\nu - 1) \int_0^\pi u^-(x) \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned}$$

Assim, se $\mu < 1$ e $\nu > 1$, obtemos

$$\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x \, dx \geq 0,$$

o que contradiz a hipótese.

Se $\mu > 1$ e $\nu < 1$, obtemos

$$\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x \, dx \leq 0,$$

o que novamente contradiz a hipótese. \square

Concluimos portanto que para os casos $\mu < 1$ e $\nu > 1$ ou $\mu > 1$ e $\nu < 1$, nem sempre (2.11) possui solução para $f \in L^1(0, \pi)$, isto implica que estes dois quadrantes estão contidos em A_2 .

Agora vamos estudar o caso em que $\mu > 1$, $\nu > 1$ e $(\mu, \nu) \notin \mathcal{M}$, isto significa que (μ, ν) está entre as curvas ω_k e θ_k , para algum k inteiro positivo. Para tal estudo, usaremos o seguinte lema.

Lema 2.14. *Sejam $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, $\mu > 1$, $\nu > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotemos por $\Phi_{\alpha}^{(\mu, \nu)}$ a solução do seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} -u''(x) - \mu u^+(x) + \nu u^-(x) = 0, \\ u(0) = 0; \quad u'(0) = \alpha. \end{cases} \quad (2.20)$$

Então, $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{M}}$ se, e somente se,

$$\Phi_{+1}^{(\mu, \nu)}(\pi) \cdot \Phi_{-1}^{(\mu, \nu)}(\pi) > 0. \quad (2.21)$$

Demonstração. Pela simetria com respeito a diagonal, podemos considerar $\mu < \nu$, tal que $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{M}}$ e com $\mu > 1$ e $\nu > 1$. Assim temos (μ, ν) a direita de θ_k e a esquerda de ω_k (vide figura 2.4). Sejam $\mu_0 < \mu < \mu_1$, tais que $(\mu_0, \nu) \in \theta_k$ e $(\mu_1, \nu) \in \omega_k$, isto é,

$$\sqrt{\nu} = \theta_k(\sqrt{\mu_0}) = \frac{\sqrt{\mu_0} \cdot (k+1)}{\sqrt{\mu_0} - k} \quad \text{e} \quad \sqrt{\nu} = \omega_k(\sqrt{\mu_1}) = \frac{\sqrt{\mu_1} \cdot k}{\sqrt{\mu_1} - (k+1)}.$$

Estas equações são equivalentes a:

$$k \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\nu}} = 1 \quad \text{e} \quad k \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} = 1.$$

Da primeira, segue $k \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\nu}} < 1$, e da segunda $k \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} > 1$. Trivialmente, segue também que $k \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) < 1$ e $(k+1) \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) > 1$.

Portanto $\Phi_{+1}^{(\mu, \nu)}$ completa k arcos positivos e k arcos negativos antes de π , mas não completa o último arco positivo. Logo $\Phi_{+1}^{(\mu, \nu)}(\pi) > 0$. Pelo mesmo raciocínio $\Phi_{-1}^{(\mu, \nu)}$ completa $k+1$ arcos negativos e k arcos positivos antes de π , mas não completa o $k+1$ -ésimo arco positivo. Logo $\Phi_{-1}^{(\mu, \nu)}(\pi) > 0$ (veja figura 2.6).

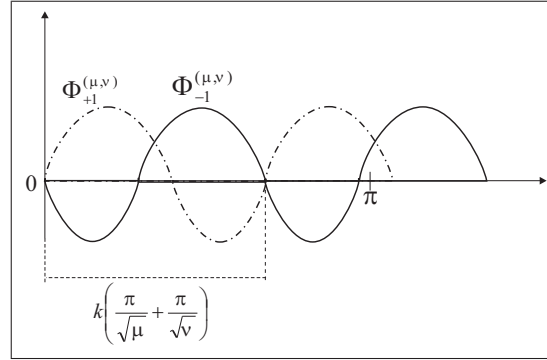


Figura 2.6: Funções $\Phi_{+1}^{(\mu,\nu)}$ e $\Phi_{-1}^{(\mu,\nu)}$

Concluimos assim que se $(\mu, \nu) \notin \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{M}}$, então $\Phi_{-1}^{(\mu,\nu)}(\pi) \cdot \Phi_{+1}^{(\mu,\nu)}(\pi) > 0$.

Reciprocamente, se $\Phi_{-1}^{(\mu,\nu)}(\pi) \cdot \Phi_{+1}^{(\mu,\nu)}(\pi) > 0$, devemos ter $\Phi_{-1}^{(\mu,\nu)}(\pi)$ e $\Phi_{+1}^{(\mu,\nu)}(\pi)$ de mesmo sinal. Suponhamos, sem perda de generalidade, ambos positivos. Da forma que foram construídas as soluções, segue que $\Phi_{+1}^{(\mu,\nu)}$ completa antes de π exatamente um certo número k de arcos positivos e negativos enquanto $\Phi_{-1}^{(\mu,\nu)}$ completa um arco negativo a mais, o que implica nas quatro desigualdades acima, isto é, (μ, ν) está entre θ_k e ω_k . Assim $(\mu, \nu) \notin \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}$. \square

Agora mostraremos que também nestas regiões entre as curvas θ_k e ω_k , existe $f \in L^1(0, \pi)$ tal que o problema (2.11) não possui solução fraca. Então estas regiões também estão em A_2 .

Teorema 2.15. *Sejam $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, com $\mu > 1$ e $\nu > 1$, e suponhamos $\Phi_{-1}^{(\mu,\nu)}(\pi) \cdot \Phi_{+1}^{(\mu,\nu)}(\pi) > 0$. Então, existe $f \in L^1(0, \pi)$ tal que (2.11) não possui solução fraca.*

Demonstração. A fim de simplificar a notação, façamos $\Phi_{+1}^{(\mu,\nu)} = \Phi_+$ e $\Phi_{-1}^{(\mu,\nu)} = \Phi_-$. Faremos a demonstração no caso $\Phi_{\pm}(\pi) > 0$. Por continuidade, temos que existe $t_0 \in (0, \pi)$, tal que $\Phi_{\pm}(t) > 0$, para todo $t \in [t_0, \pi]$. Mudando t_0 caso seja necessário, podemos supor também uma das seguintes possibilidades:

- I. $\Phi'_{\pm}(t) < 0$, $t \in [t_0, \pi]$,
- II. $\Phi'_+(t) < 0$, $\Phi'_-(t) \geq 0$, $t \in [t_0, \pi]$,
- III. $\Phi'_+(t) \geq 0$, $\Phi'_-(t) < 0$, $t \in [t_0, \pi]$,
- IV. $\Phi'_{\pm}(t) \geq 0$, $t \in [t_0, \pi]$.

Como a idéia de prova é semelhante, mostramos apenas o primeiro caso. Sem perda de generalidade, vamos tomar

$$t_0 > \pi - 2\pi\mu^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

Seja f

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0, t_0], \\ -1; & x \in (t_0, \pi], \end{cases} \quad (2.23)$$

e u uma solução fraca de (2.11). Então teremos $u \in C^1([0, \pi]) \cap C^2([0, t_0]) \cap C^2((t_0, \pi])$.

Se $\alpha = u'(0) > 0$, então por unicidade de solução, deveríamos ter $u(t) = \alpha\Phi_+(t)$ para $t \in [0, t_0]$.

Consideremos $t_1 := \inf\{t \in (t_0, \pi]; u(t) = 0\}$. Observemos que $u(t) > 0$, para $t \in (t_0, t_1)$. Mostraremos que existe $\tau_1 \in (t_0, t_1)$, tal que $(\frac{u}{\Phi_+})'(\tau_1) < 0$.

De fato, caso contrário teríamos

$$\left(\frac{u}{\Phi_+}\right)'(\tau) \geq 0; \text{ para todo } \tau \in (t_0, t_1),$$

o que implicaria que $(\frac{u}{\Phi_+})$ é não decrescente, e portanto

$$\frac{u(\tau)}{\Phi_+(\tau)} \geq \frac{u(t_0)}{\Phi_+(t_0)} = \alpha > 0.$$

Logo, usando novamente continuidade, teríamos

$$u(\tau) \geq \alpha\Phi_+(\tau) > 0; \text{ para todo } \tau \in (t_0, t_1],$$

o que contradiz a definição de t_1 . Portanto existe $\tau_1 \in (t_0, t_1)$, tal que $(\frac{u}{\Phi_+})'(\tau_1) < 0$.

Denotemos $F = u'\Phi_+ - u\Phi_+'$, segue disto que $F(\tau_1) < 0$ e claramente $F \in C^1((t_0, \pi])$ é contínua em t_0 . Assim, existe um intervalo $\mathcal{A} \subset (t_0, t_1)$, tal que $F'(t) < 0$, sempre que $t \in \mathcal{A}$.

De fato, uma vez que $F \in C^1((t_0, t_1])$ e $F(t_0) = 0$, não podemos ter $F'(t) \geq 0$ para todo $t \in (t_0, \tau_1]$, pois daí a função seria não decrescente e não poderia ocorrer $F(\tau_1) < 0$. Com isto, temos em \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} 0 > F'(t) &= (u'\Phi_+ - u\Phi_+')'(t) = u''(t) \cdot \Phi_+(t) - u(t) \cdot \Phi_+''(t) = \\ &= (-f(t) - \mu u(t))\Phi_+(t) - u(t)(-\mu\Phi_+(t)) = -f(t) \cdot \Phi_+(t) = \Phi_+(t) > 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, mostrando que não pode existir a solução u .

A prova para o caso $\alpha = u'(0) < 0$, é totalmente análoga.

No caso $u'(0) = 0$, temos $u(t) = 0$, para $t \in [0, t_0]$. Observemos assim que $u''(t_0^+) = 1$, e com isto $t_1 > t_0$ e $u(t) > 0$, para $t \in (t_0, t_1)$. Assim u é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -u''(x) = \mu u(x) - 1; & x \in (t_0, t_1), \\ u(t_0) = u'(t_0) = u(t_1) = 0, \end{cases}$$

impondo as duas primeiras condições, obtemos $u(t) = -\frac{\cos[\sqrt{\mu} \cdot (t-t_0)]}{\mu} + \frac{1}{\mu}$.

A condição $u(t_1) = 0$, implica que $\cos(\sqrt{\mu} \cdot (t_1 - t_0)) = 1$, portanto deveríamos ter $t_1 - t_0 = 2\pi\sqrt{\mu}$, implicando, pela escolha de t_0 em (2.22), que

$$t_1 = 2\pi\sqrt{\mu} + t_0 > 2\pi\sqrt{\mu} + \pi - 2\pi\sqrt{\mu} = \pi,$$

concluindo que $t_1 > \pi$, o que é uma contradição.

Assim provamos que (2.11) não possui solução fraca para a f definida em (2.23). \square

Observação 2.16. *A análise desta seção, mostra que para o caso em dimensão um, além de obtermos explicitamente A_{-1} e A_0 , conseguimos também classificar completamente os subconjuntos de A_0 , obtendo que $A_0 = A_1 \sqcup A_2$ e que A_2 também é união de componentes conexas de A_0 , o que não era claro no caso geral como comentamos na observação 2.9.*

2.4 Espectro de Fučík de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com condição de Neumann

Nesta seção calcularemos o Espectro de Fučík para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com condição de Neumann. Procuramos encontrar solução não trivial do problema:

$$\begin{cases} -u''(x) - \mu u^+(x) + \nu u^-(x) = 0; & \text{em } (0, \pi), \\ u'(0) = u'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Proposição 2.17. *(2.24) admite solução não trivial se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita:*

- (a) $\mu = 0$ e ν é arbitrário,
- (b) $\nu = 0$ e μ é arbitrário,
- (c) $\frac{k}{2\sqrt{\mu}} + \frac{k}{2\sqrt{\nu}} = 1$, para algum k inteiro positivo.

Demonstração. (\Rightarrow) De fato, seja u uma solução não trivial de (2.24). Suponhamos primeiramente que u não possua zeros em $(0, \pi)$ e que $u = u^+$. Para $\mu > 0$, devemos ter

$$u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}x),$$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \text{e} \quad u'(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\mu} \in \mathbb{N},$$

e para $\mu < 0$,

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}x}.$$

No primeiro caso, u possuiria uma raiz em $(0, \pi)$ e no segundo $u \equiv 0$, pela condição de fronteira. Logo não ocorre $\mu > 0$ e nem $\mu < 0$, quando u não possui zeros. Para $\mu = 0$, devemos ter $u(x) = a + bx$, e assim segue que $u'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$, implicando que u é

constante. Desta forma concluímos **(a)**. De modo análogo, supondo $u = u^-$ em $(0, \pi)$, segue que $\nu = 0$, u é constante e logo ocorre **(b)**.

Suponhamos agora que u possua zeros em $(0, \pi)$, isto é, u muda de sinal. Neste caso, a solução possui a mesma estrutura que no caso de Dirichlet com a diferença que o primeiro e o último arco serão apenas meios arcos. Assim a solução possui o mesmo número de meios arcos positivos e meios arcos negativos, como mostram as figuras 2.7 e 2.8. Denotando por k o número de meios arcos positivos, temos a seguinte equação

$$\pi = k \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\nu}} \right). \quad (2.25)$$

Com isto mostramos o item **(c)**.

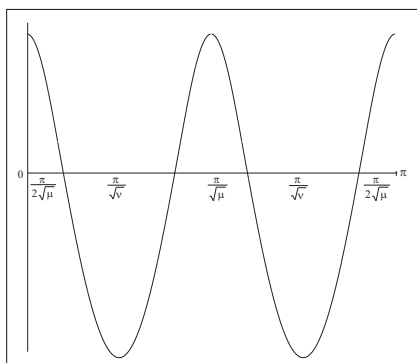


Figura 2.7: Solução com o mesmo sinal nos extremos

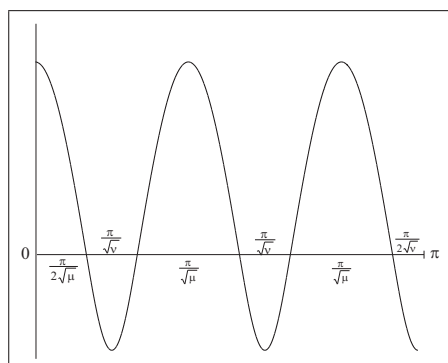


Figura 2.8: Solução com sinais diferentes nos extremos

(\Leftarrow) Segue de modo análogo ao caso de Dirichlet. □

Agora, observemos que da equação (2.25), temos

$$\sqrt{\nu} = \frac{k\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu} - k}.$$

Portanto, cada curva do item (c) é uma hipérbole com assíntotas $\nu = \mu = \frac{k^2}{4}$ e que passa pelo ponto (k^2, k^2) . A figura 2.9 mostra parte do Espectro de Fučík deste caso.

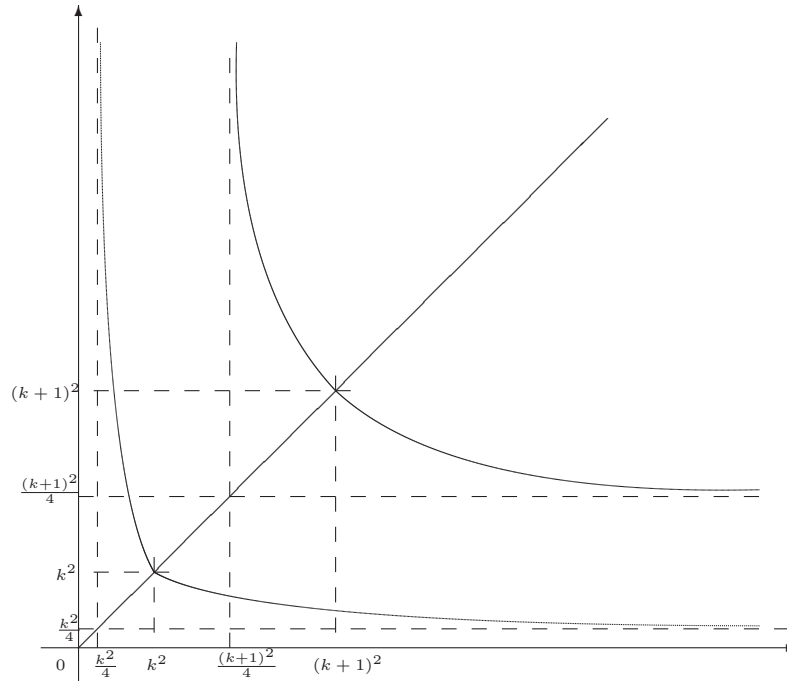


Figura 2.9: Curvas do Espectro de Fučík para o caso Neumann unidimensional passando pelos auto-valores k^2 e $(k+1)^2$.

Pelo item (iii) do teorema 2.8, como todas as componentes conexas de A_0 contêm pontos da diagonal, concluímos que neste caso $A_1 = A_0$.

2.5 Um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi

Nesta seção, apresentamos um resultado, onde mostramos que uma certa equação possui nenhuma solução, pelo menos uma ou pelo menos duas soluções, em dependência de um parâmetro. Este é usualmente chamado de resultado do tipo Ambrosetti-Prodi, em consequência de um famoso resultado destes autores em [AP72].

Ainda sob as hipóteses da seção 2.2, tomemos $X = Z = H$, onde H um espaço de Hilbert e suporemos que J seja a aplicação identidade, S aplicação linear auto-adjunta completamente contínua e as aplicações $u \mapsto u^+$ e $u \mapsto u^-$ lipschitzianas com constante de Lipschitz $\rho > 0$. O resultado que será apresentado, diz respeito à solubilidade da equação $Ju - T_{(\mu, \nu)}u + Gu = y$, quando $(\mu, \nu) \in A_2$, suficientemente próximos de alguns pontos da diagonal (auto-valores), dando também uma certa estimativa do número de soluções.

Denotaremos o produto interno de $x, y \in H$ por $\langle x, y \rangle$ e a norma em H apenas por $\|x\|$.

Sejam $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tal que $(\lambda_0, \lambda_0) \in A_{-1}$ e $L = J - \lambda_0 S$. Suponhamos ainda que $\dim \ker(L) = 1$ e seja h_0 um gerador para $\ker(L)$, com $\|h_0\| = 1$. Lembramos que nestas hipóteses $\text{Im}(L)$ é ortogonal ao $\ker(L)$.

Começamos demonstrando um lema.

Lema 2.18. *Sejam α e β números reais, tais que*

$$\begin{cases} \langle \alpha S h_0^+ - \beta S h_0^-, h_0 \rangle > 0, \\ \langle \beta S h_0^+ - \alpha S h_0^-, h_0 \rangle < 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Então, existe $\delta = \delta(\alpha, \beta) > 0$, tal que

$$\inf_{v \in \text{Im}(L), \|v\| \leq \delta} \langle \alpha S(h_0 + v)^+ - \beta S(h_0 + v)^-, h_0 \rangle_H > 0$$

e

$$\sup_{v \in \text{Im}(L), \|v\| \leq \delta} \langle \beta S(h_0 + v)^+ - \alpha S(h_0 + v)^-, h_0 \rangle_H < 0.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $\delta_n > 0$, $v_n \in \text{Im}(L)$ e $\|v_n\| \leq \delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha S(h_0 + v_n)^+ - \beta S(h_0 + v_n)^-, h_0 \rangle \leq 0. \quad (2.27)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} & |\langle \alpha S(h_0 + v_n)^+, h_0 \rangle - \langle \alpha S h_0^+, h_0 \rangle| = |\alpha| \cdot |\langle S(h_0 + v_n)^+ - S h_0^+, h_0 \rangle| \\ & \leq |\alpha| \cdot \|S\| \cdot \|(h_0 + v_n)^+ - h_0^+\| \cdot \|h_0\| \leq |\alpha| \cdot \|S\| \rho \|v_n\|. \end{aligned}$$

Como $\|v_n\| \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha S(h_0 + v_n)^+, h_0 \rangle = \langle \alpha S h_0^+, h_0 \rangle.$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \beta S(h_0 + v_n)^-, h_0 \rangle = \langle \beta S h_0^-, h_0 \rangle.$$

Usando estes limites em (2.27), segue que

$$\langle \alpha S h_0^+, h_0 \rangle - \langle \beta S h_0^-, h_0 \rangle = \langle \alpha S h_0^+ - \beta S h_0^-, h_0 \rangle \leq 0,$$

o que contradiz (2.26). Concluimos que existe $\delta(\alpha, \beta) > 0$, satisfazendo a primeira afirmação.

A segunda justifica-se de modo análogo. \square

Antes de enunciar o teorema, vamos definir as aplicações

$$\begin{aligned} P & : H \longrightarrow \ker(L) \\ y & \longmapsto \langle y, h_0 \rangle h_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P^c &: H \longrightarrow \text{Im}(L) \\ y &\longmapsto y - \langle y, h_0 \rangle h_0. \end{aligned}$$

Estas são as projeções ortogonais de H sobre $\ker(L)$ e $\text{Im}(L)$ respectivamente. Definamos também, $K : \text{Im}(L) \longrightarrow \text{Im}(L)$ como sendo a inversa a direita de L , isto é, $LK = \text{Id}_{\text{Im}(L)}$.

Teorema 2.19. *Seja $G : H \longrightarrow H$ lipschitziana com constante $c > 0$, tal que $\sup_{u \in H} \|Gu\| < \infty$. Se $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ são tais que vale (2.26), $k := \|K\| \cdot [\rho \|S\| (|\alpha| + |\beta|) + c] < 1$ e $\frac{k}{1-k} < \delta(\alpha, \beta)$, então existe uma função $\Gamma : \text{Im}(L) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

a) A equação

$$Lu + T_{(\alpha, \beta)}u + Gu = y, \quad (2.28)$$

possui solução para $y \in H$, se e somente se,

$$\langle y, h_0 \rangle \geq \Gamma(P^c y) \quad (2.29)$$

b) A equação (2.28) possui pelo menos duas soluções para $y \in H$, sempre que:

$$\langle y, h_0 \rangle > \Gamma(P^c y) \quad (2.30)$$

Observação 2.20. *Se aplicarmos este teorema ao problema (2.2) com coeficientes $(\mu, \nu) = (\lambda_k + \alpha, \lambda_k + \beta)$, sendo λ_k um auto-valor simples, α e β suficientemente pequenos e tais que $\int_{\Omega} \alpha(\phi_k^+)^2 + \beta(\phi_k^-)^2 > 0$, $\int_{\Omega} \beta(\phi_k^+)^2 + \alpha(\phi_k^-)^2 < 0$ e ψ de modo que o operador G seja como no teorema, então obtemos o seguinte resultado: se escrevermos $f = t\phi_k + \tilde{f}$, então existe $C(\tilde{f})$, tal que (2.2):*

- possui pelo menos duas soluções, se $t > C(\tilde{f})$,
- possui pelo menos uma solução, se $t = C(\tilde{f})$,
- não possui soluções, se $t < C(\tilde{f})$,

isto é, nestas condições temos uma estimativa do número de soluções em dependência da função f . Como para certas f não existe solução, necessariamente $(\mu, \nu) \notin A_1$.

Observação 2.21. *Vejamos alguns casos particulares da observação acima no caso unidimensional (problema (2.11)).*

Para o primeiro auto-valor λ_1 , sabemos que ϕ_1 não muda de sinal, e assim para que as hipóteses $\int_0^\pi \alpha(\phi_1^+)^2 + \int_0^\pi \beta(\phi_1^-)^2 > 0$ e $\int_0^\pi \beta(\phi_1^+)^2 + \int_0^\pi \alpha(\phi_1^-)^2 < 0$ estejam satisfeitas é suficiente que $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. Assim o problema com $(\mu, \nu) = (\lambda_1 + \alpha, \lambda_1 + \beta)$ apresenta o comportamento descrito no teorema se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, suficientemente pequenos, o que corresponde ao quadrante $\{\mu > \lambda_1, \nu < \lambda_1\}$.

Para os auto-valores λ_k com k par, sabemos que ϕ_k muda de sinal $k - 1$ vezes, e que $\int_0^\pi (\phi_k^+)^2 = \int_0^\pi (\phi_k^-)^2$. Logo, para satisfazer a hipótese (2.26), deveríamos ter $\alpha + \beta > 0$ e $\alpha + \beta < 0$, o que não ocorre. Desta forma o teorema 2.19 não se aplica a estes auto-valores, o que é coerente com o fato que perto deles os pontos que não estão em Σ estão em A_1 .

Já para os auto-valores da forma λ_{2k+1} , sabemos que ϕ_{2k+1} muda de sinal $2k$ vezes e que $k \int_0^\pi (\phi_2^-)^2 = (k+1) \int_0^\pi (\phi_2^+)^2$. Segue disto que se $-\frac{k+1}{k}\beta < \alpha < -\frac{k}{k+1}\beta$, a hipótese (2.26) está satisfeita. Novamente concluímos que ocorre o comportamento descrito no teorema perto dos auto-valores ímpares se α, β satisfazem as condições acima.

Para demonstrar o teorema 2.19, precisaremos de alguns lemas.

Lema 2.22. *Nas hipóteses do teorema 2.19, para $t \in \mathbb{R}$ e $y \in H$ fixados, definimos*

$$\begin{aligned} F_{t,y} : Im(L) &\longrightarrow Im(L) \\ v &\longmapsto -KP^c(T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v) + G(th_0 + v) - y). \end{aligned}$$

Então $F_{t,y}$ é Lipschitziana e admite um único ponto fixo $v_{t,y}$.

Além disso, $v_{t,y} = v_{t,P^c y}$, para todo $y \in H$.

Enfim, $v_{t,y}$ é a única solução, em $Im(L)$, da equação

$$Lv_{t,y} + P^c(T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,y}) + G(th_0 + v_{t,y})) = P^c y. \quad (2.31)$$

Demonstração. De fato, sejam $u, v \in Im(L)$, assim:

$$\begin{aligned} &\|F_{t,y}(u) - F_{t,y}(v)\| \leq \\ &\leq \|K\| \cdot \|P^c\| \cdot \|T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + u) + G(th_0 + u) - y - T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v) - G(th_0 + v) + y\| = \\ &= \|K\| \cdot \underbrace{\|P^c\|}_{\leq 1} \cdot \|T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + u) - T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v) + G(th_0 + u) - G(th_0 + v)\| \leq \\ &\leq \|K\| \left\{ \|\alpha(S(th_0 + u)^+ - S(th_0 + v)^+) - \beta(S(th_0 + u)^- - S(th_0 + v)^-)\| + \right. \\ &\quad \left. + \|G(th_0 + u) - G(th_0 + v)\| \right\} \leq \\ &\leq \|K\| \left\{ |\alpha| \cdot \|S\| \cdot \|(th_0 + u)^+ - (th_0 + v)^+\| + |\beta| \cdot \|S\| \cdot \|(th_0 + u)^- - (th_0 + v)^-\| + \right. \\ &\quad \left. + \|G(th_0 + u) - G(th_0 + v)\| \right\} \leq \\ &\leq \|K\| \left\{ |\alpha| \cdot \|S\| \rho \|u - v\| + |\beta| \cdot \|S\| \rho \|u - v\| + c \|u - v\| \right\} \leq \|K\| (\rho \|S\| (|\alpha| + |\beta|) + c) \|u - v\|. \end{aligned}$$

Com isto, $F_{t,y}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz $k < 1$, e portanto é uma contração. Pelo Princípio da Contração de Banach (veja teorema 1.4), segue que $F_{t,y}$ admite

um único ponto fixo $v_{t,y} \in Im(L)$, isto é, $F_{t,y}(v_{t,y}) = v_{t,y}$. Para ver que $v_{t,y} = v_{t,P^c y}$, basta notarmos que $F_{t,y} = F_{t,P^c y}$.

Observemos agora, que de $F_{t,y}(v_{t,y}) = v_{t,y}$, temos

$$\begin{aligned} v_{t,y} - F_{t,y}(v_{t,y}) = 0 &\Leftrightarrow v_{t,y} - (-KP^c(T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,y}) + G(th_0 + v_{t,y}) - y)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_{t,y} + KP^c(T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,y}) + G(th_0 + v_{t,y}) - y) = 0, \end{aligned}$$

e aplicando L , segue que

$$Lv_{t,y} + P^c(T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,y}) + G(th_0 + v_{t,y}) - y) = 0, \quad (2.32)$$

e assim $v_{t,y}$ é a única solução em $Im(L)$ de (2.32), bem como de (2.31). \square

Lema 2.23. *Com a notação do lema anterior, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in H$, temos*

$$\|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\| \leq \frac{k}{1-k}|t_1 - t_2| + \frac{\|K\|}{1-k}\|y_1 - y_2\|. \quad (2.33)$$

Demonstração. Notemos que para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in H$, temos

$$\begin{aligned} \|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\| &= \|F_{t_1,y_1}(v_{t_1,y_1}) - F_{t_2,y_2}(v_{t_2,y_2})\| \leq \\ &\leq \|K\| \cdot \underbrace{\|P^c\|}_{\leq 1} \cdot \|T_{(\alpha,\beta)}(t_1 h_0 + v_{t_1,y_1}) - T_{(\alpha,\beta)}(t_2 h_0 + v_{t_2,y_2}) + \\ &\quad + G(t_1 h_0 + v_{t_1,y_1}) - G(t_2 h_0 + v_{t_2,y_2}) - y_1 + y_2\| \leq \\ &\leq \|K\| \{ \|T_{(\alpha,\beta)}(t_1 h_0 + v_{t_1,y_1}) - T_{(\alpha,\beta)}(t_2 h_0 + v_{t_2,y_2})\| + \\ &\quad + \|G(t_1 h_0 + v_{t_1,y_1}) - G(t_2 h_0 + v_{t_2,y_2})\| + \|y_1 - y_2\| \} \leq \\ &\leq \|K\| \{ \rho \|S\| \cdot (|\alpha| + |\beta|) \cdot (|t_1 - t_2| + \|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\|) + \\ &\quad + c(|t_1 - t_2| + \|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\|) + \|y_1 - y_2\| \} = \\ &= k|t_1 - t_2| + k \cdot \|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\| + \|K\| \cdot \|y_1 - y_2\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\| &\leq k|t_1 - t_2| + k\|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\| + \|K\| \cdot \|y_1 - y_2\| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|v_{t_1,y_1} - v_{t_2,y_2}\| \cdot (1-k) \leq k|t_1 - t_2| + \|K\| \cdot \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

e portanto obtemos a estimativa desejada. \square

Vamos agora definir a seguinte aplicação e demonstrar o próximo lema:

$$\begin{aligned} \Phi_y &: \mathbb{R} \longrightarrow \ker(L) \\ t &\longmapsto P [T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,y}) + G(th_0 + v_{t,y})]. \end{aligned}$$

Lema 2.24. *A equação*

$$Lu + T_{(\alpha,\beta)}u + Gu = y, \quad (2.34)$$

possui solução da forma $u = t_0h_0 + v_{t_0,y}$, para $y \in H$ dado se, e somente se, $t_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $\Phi_y(t_0) = Py$.

Demonstração. De fato,

$$\Phi_y(t_0) = Py \Leftrightarrow P(T_{(\alpha,\beta)}(t_0h_0 + v_{t_0,y}) + G(t_0h_0 + v_{t_0,y})) = Py,$$

ou seja,

$$\langle T_{(\alpha,\beta)}(t_0h_0 + v_{t_0,y}) + G(t_0h_0 + v_{t_0,y}), h_0 \rangle = \langle y, h_0 \rangle. \quad (2.35)$$

Suponhamos que exista $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\Phi_y(t_0) = Py$. Isto significa que (2.35) ocorre. Tomemos $u_0 = t_0h_0 + v_{t_0,y}$, desta forma, por (2.35), temos

$$\begin{aligned} \langle T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0, h_0 \rangle = \langle y, h_0 \rangle &\Rightarrow \langle T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0 - y, h_0 \rangle = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle Lu_0 + T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0 - y, h_0 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

uma vez que $\langle Lu_0, h_0 \rangle = 0$, pois $h_0 \perp \text{Im}(L)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P^c(Lu_0 + T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0 - y) &= L(t_0h_0 + v_{t_0,y}) + P^c(T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0 - y) = \\ &= Lv_{t_0,y} + P^c(T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0 - y) = 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

pela equação (2.32). Logo (2.36) e (2.37), implicam que u_0 é solução de (2.28).

Reciprocamente, suponhamos que $Lu_0 + T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0 = y$, para algum $u_0 \in \text{Im}(L)$. Sabemos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $u_0 = t_0h_0 + v$, para algum $v \in H$. Com isto, temos

$$L(t_0h_0 + v) + T_{(\alpha,\beta)}(t_0h_0 + v) + G(t_0h_0 + v) - y = 0,$$

e portanto

$$Lv + T_{(\alpha,\beta)}(t_0h_0 + v) + G(t_0h_0 + v) - y = 0.$$

Aplicando P^c em ambos lados da última equação, obtemos

$$Lv + P^c(T_{(\alpha,\beta)}(t_0h_0 + v) + G(t_0h_0 + v) - y) = 0, \quad (2.38)$$

logo v é solução de (2.32), e por unicidade, $v = v_{t_0,y}$. Assim $u_0 = t_0h_0 + v_{t_0,y}$ e (2.38) implica que

$$P^c(Lu_0 + T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0) = P^cy.$$

Como u_0 é solução de (2.28), segue que a componente no $\ker(L)$ também deve ser zero, isto é,

$$P(Lu_0 + T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0) = P(T_{(\alpha,\beta)}u_0 + Gu_0) = Py,$$

o que é equivalente a $\Phi_y(t_0) = Py$. □

Observação 2.25. *Observamos que os lemas anteriores dividiram o problema (2.28) em duas partes: primeiro resolvemos uma equação em $\text{Im}(L)$, que possui uma solução única, e depois inserimos esta solução em outra equação em $\text{ker}(L)$, que se tornará então equivalente ao problema original. A vantagem será que como $\text{ker}(L)$ possui dimensão um, a equação resultante será em \mathbb{R} , de modo que será possível estimar o número de suas soluções. Esta técnica é chamada de redução de Lyapunov-Schmidt.*

Antes dos próximos lemas, definamos,

$$\begin{aligned} \psi_{P_y^c} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle \Phi_{P_y^c}(t), h_0 \rangle. \end{aligned}$$

Lema 2.26. $\Phi_y(t_0) = Py$ é equivalente a $\psi_{P_y^c}(t_0) = \langle y, h_0 \rangle$.

Demonstração. Como $v_{t,y} = v_{t,P^c y}$, vale $\Phi_y = \Phi_{P^c y}$. E uma vez que $\text{ker}(L)$ é gerado por h_0 , multiplicando escalarmente por h_0 , obtemos uma equação equivalente. \square

Lema 2.27. Para cada $y \in H$, a função $\psi_{P_y^c}$ é contínua e

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \psi_{P_y^c}(t) = \infty \quad (2.39)$$

Demonstração. Notemos que $\psi_{P_y^c}$ é contínua, pois é composta de funções contínuas ($v_{t,y}$ é contínua pelo lema 2.23). Além disso,

$$\psi_{P^c y}(t) = \langle P(T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,P^c y}) + G(th_0 + v_{t,P^c y})), h_0 \rangle = \quad (2.40)$$

$$= \langle T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,P^c y}), h_0 \rangle + \langle G(th_0 + v_{t,P^c y}), h_0 \rangle \geq \quad (2.41)$$

$$\geq \langle T_{(\alpha,\beta)}(th_0 + v_{t,P^c y}), h_0 \rangle - \sup_{u \in H} \|Gu\|. \quad (2.42)$$

Se $t > 0$, então

$$\psi_{P_y^c}(t) \geq t \left\langle T_{(\alpha,\beta)} \left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t} \right), h_0 \right\rangle - \sup_{u \in H} \|Gu\|.$$

Por outro lado, se $t < 0$, então

$$\begin{aligned} T_{(\alpha,\beta)} \left(t \cdot \left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t} \right) \right) &= T_{(\alpha,\beta)} \left[(-t) \left(- \left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t} \right) \right) \right] = \\ &= -t \cdot T_{(\alpha,\beta)} \left(- \left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t} \right) \right) = -t \cdot \left(-T_{(\beta,\alpha)} \left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t} \right) \right). \end{aligned}$$

E com isto, temos $\psi_{P^c y}(t) \geq -t \cdot \left\langle -T_{(\beta,\alpha)} \left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t} \right), h_0 \right\rangle - \sup_{u \in H} \|Gu\|$.

Por (2.33), temos

$$\|v_{t,y} - v_{0,y}\| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |t| \Rightarrow \frac{\|v_{t,y} - v_{0,y}\|}{|t|} \leq \frac{k}{1-k}.$$

Por outro lado, $\|v_{t,y} - v_{0,y}\| \geq \|v_{t,y}\| - \|v_{0,y}\| = \|v_{t,y}\| - \mathcal{C}(y)$, onde $\mathcal{C}(y)$ é uma constante positiva dependente de y .

Assim temos, $\frac{\|v_{t,y}\|}{|t|} - \frac{\mathcal{C}(y)}{|t|} \leq \frac{k}{1-k}$, e portanto $\frac{\|v_{t,y}\|}{|t|} \leq \frac{\mathcal{C}(y)}{|t|} + \frac{k}{1-k}$, e como $\frac{k}{1-k} < \delta(\alpha, \beta)$, para t suficientemente grande (dependendo de y), obtemos

$$\frac{\|v_{t,y}\|}{|t|} \leq \delta(\alpha, \beta).$$

Desta maneira, pelo lema 2.18, segue que, para oportunas constantes D e η positivas (dependentes de y),

$$\begin{cases} \left\langle T_{(\alpha,\beta)}\left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t}\right), h_0 \right\rangle > \eta, & \text{se } t > D, \\ \left\langle -T_{(\beta,\alpha)}\left(h_0 + \frac{v_{t,y}}{t}\right), h_0 \right\rangle > \eta, & \text{se } t < -D. \end{cases}$$

Concluimos então

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \psi_{P^c y}(t) = \infty.$$

□

Agora podemos demonstrar o resultado principal desta seção.

Demonstração do teorema 2.19. Definamos

$$\begin{aligned} \Gamma &: \text{Im}(L) \longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \min_{t \in \mathbb{R}} \psi_z(t). \end{aligned}$$

Pelos lemas 2.24 e 2.26, (2.28) ter solução da forma $u = t_0 h_0 + v_{t_0, y}$, é equivalente dizer que $t_0 \in \mathbb{R}$, é tal que $\psi_{P^c y}(t_0) = \langle y, h_0 \rangle$.

a) Se (2.28) possuir solução, então existe $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$\langle y, h_0 \rangle = \psi_{P^c y}(t_0) \geq \Gamma(P^c y).$$

Por outro lado, se

$$\Gamma(P^c y) \leq \langle y, h_0 \rangle,$$

temos pela continuidade de $\psi_{P^c y}$ e por (2.39), a existência de $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\psi_{P^c y}(t_0) = \langle y, h_0 \rangle$. Portanto (2.28) possui solução.

b) Suponhamos $\langle y, h_0 \rangle > \Gamma(P^c y)$, isto é, $\langle y, h_0 \rangle > \min_{t \in \mathbb{R}} \psi_{P^c y}(t)$. Assim, se \bar{t} é um ponto de mínimo, então por (2.39), existe $t_1 \in (\bar{t}, \infty)$, tal que $\psi_{P^c y}(t_1) = \langle y, h_0 \rangle$, e existe também $t_2 \in (-\infty, \bar{t})$, tal que $\psi_{P^c y}(t_2) = \langle y, h_0 \rangle$.

Com isso (2.28) possui pelo menos duas soluções.

□

Observação 2.28. *Observemos que se no Lema 2.18, a hipótese fosse $\langle \beta Sh_0^+ - \alpha Sh_0^-, h_0 \rangle > 0$ ao invés da segunda inequação, procedendo como na demonstração do lema 2.27, teríamos $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_{P^c y}(t) = -\infty$. Desta forma, seguindo como no teorema, poderíamos deduzir a existência de pelo menos uma solução da equação (2.28), para todo $y \in H$.*

Caracterização variacional e uma aplicação

Nesta seção estudaremos a primeira curva não trivial do Espectro de Fučík do problema (2.1) já apresentado, em dimensão qualquer. Isso nos dará novas informações já que em geral não é possível calcular o Espectro explicitamente como foi feito no capítulo anterior para a dimensão um.

Estudaremos por fim um problema de não ressonância.

A referência para este capítulo é [dFG94].

3.1 Relação Assimétrica de Ortogonalidade

Começaremos apresentando uma equação que será chamada de Relação Assimétrica de Ortogonalidade que nos dará as primeiras informações a respeito do Espectro de Fučík.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, solução fraca não trivial de (2.1). Assim temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} (\mu u^+ - \nu u^-) v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em particular, para $v = \phi_1$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1 - \int_{\Omega} (\mu u^+ \phi_1 - \nu u^- \phi_1) = 0,$$

e logo $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1 = \int_{\Omega} (\mu u^+ \phi_1 - \nu u^- \phi_1) = \int_{\Omega} \lambda_1 u \phi_1$. Segue disto que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_{\Omega} u \phi_1 &= \int_{\Omega} \lambda_1 (u^+ - u^-) \phi_1 = \int_{\Omega} (\mu u^+ \phi_1 - \nu u^- \phi_1), \\ (\lambda_1 - \mu) \int_{\Omega} u^+ \phi_1 - (\lambda_1 - \nu) \int_{\Omega} u^- \phi_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Notemos que no caso $\mu = \nu$, a equação (3.1) diz que u é ortogonal a ϕ_1 . Desta forma, podemos considerar (3.1) como uma relação assimétrica de ortogonalidade.

Podemos obter facilmente algumas conclusões sobre o Espectro de Fučík a partir dela.

Proposição 3.1. *Seja $(\mu, \nu) \in \Sigma$. Se $\mu \leq \lambda_1$, então $\nu \leq \lambda_1$ e se $\mu \geq \lambda_1$, então $\nu \geq \lambda_1$.*

Demonstração. Da relação (3.1), temos

$$(\lambda_1 - \mu) \int_{\Omega} u^+ \phi_1 = (\lambda_1 - \nu) \int_{\Omega} u^- \phi_1,$$

implicando que os termos em parênteses possuem mesmo sinal, uma vez que ambas integrais são não negativas. \square

A proposição acima nos diz que o Espectro deverá estar nos quadrantes $\{\mu \geq \lambda_1, \nu \geq \lambda_1\}$ e $\{\mu \leq \lambda_1, \nu \leq \lambda_1\}$.

3.2 A primeira curva não trivial do Espectro de Fučík

Esta seção é dedicada ao estudo da primeira curva não trivial do Espectro de Fučík.

Consideremos $r > 0$, e definamos

$$M_r = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} [u^+(x)\phi_1(x) - ru^-(x)\phi_1(x)] dx = 0 \right\}$$

e

$$Q_r = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} [(u^+(x))^2 + r(u^-(x))^2] dx = 1 \right\}.$$

Notemos que o conjunto M_r é formado por funções de $H_0^1(\Omega)$ tais que $u^+ - ru^-$ seja ortogonal a ϕ_1 , isto é, reescalando a parte negativa de u por r , obtemos ortogonalidade com ϕ_1 . Observemos que uma função de $H_0^1(\Omega)$, que muda de sinal, pertence a M_r para algum $r > 0$, mais precisamente para $r = \frac{\int_{\Omega} u^+ \phi_1}{\int_{\Omega} u^- \phi_1}$. Além disso, se $u \neq 0$, então existe τ , tal que $\tau u \in Q_r$. Portanto, se u muda de sinal, então existem τ, σ tais que $\tau(u^+ - \sigma u^-) \in M_r \cap Q_r$, para $r > 0$ fixado.

Com isto $M_r \cap Q_r \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, assim, dada a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \lambda_1 \int_{\Omega} uv, \quad \text{para todo } u, v \in H_0^1(\Omega),$$

podemos definir

$$\lambda_0(r) = \inf\{a(u, u) : u \in M_r \cap Q_r\}.\tag{3.2}$$

Observemos que $a(u, \phi_1) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1 - \lambda_1 \int_{\Omega} u \phi_1 = 0$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Assim, dadas funções $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$u = k\phi_1 + w \quad \text{e} \quad v = m\phi_1 + z \quad \Rightarrow \quad a(u, v) = a(w, z). \quad (3.3)$$

A seguinte proposição diz que sempre existe um mínimo para λ_0 .

Proposição 3.2. λ_0 é atingido por uma função $u \in M_r \cap Q_r$ e é positivo para todo r .

Demonstração. De fato, seja $\{u_n\} \subset M_r \cap Q_r$ uma sequência minimizante, isto é

$$a(u_n, u_n) = \|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2 \longrightarrow \lambda_0. \quad (3.4)$$

Primeiramente vamos garantir que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Caso $r \geq 1$, temos

$$\lambda_1 |u_n|_2^2 = \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^+)^2 + (u_n^-)^2 \leq \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^+)^2 + r(u_n^-)^2 = \lambda_1.$$

Caso $r < 1$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 |u_n|_2^2 &= \lambda_1 \int_{\Omega} [(u_n^+)^2 + (u_n^-)^2] \leq \\ &\leq \lambda_1 \cdot \int_{\Omega} \left[\frac{1}{r} (u_n^+)^2 + (u_n^-)^2 \right] = \frac{\lambda_1}{r} \int_{\Omega} [(u_n^+)^2 + r(u_n^-)^2] = \frac{\lambda_1}{r}. \end{aligned}$$

Portanto $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e por (3.4), obtemos $\{u_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, temos $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$, para algum $u \in H_0^1(\Omega)$. Pelo teorema 1.7, temos ainda $u_n \rightarrow u$ q. t. p. em Ω e que existe $h \in L^2(\Omega)$, tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ q. t. p. em Ω . Segue também que $u_n^+ \rightarrow u^+$ e $u_n^- \rightarrow u^-$ q. t. p. em Ω , $|u_n^+(x)| \leq h(x)$ e $|u_n^-(x)| \leq h(x)$ q. t. p. em Ω . Desta forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n^+)^2 = \int_{\Omega} (u^+)^2 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n^-)^2 = \int_{\Omega} (u^-)^2.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} [(u^+)^2 + r(u^-)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} [(u_n^+)^2 + r(u_n^-)^2] \right) = 1,$$

o que implica que $u \in Q_r$.

Pelo mesmo argumento, obtemos

$$\int_{\Omega} (u^+ \phi_1 - r u^- \phi_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} [u_n^+ \phi_1 - r u_n^- \phi_1] \right) = 0,$$

implicando que $u \in M_r$.

Concluimos por fim, que $u \in M_r \cap Q_r$, e então, por (3.2), temos $a(u, u) \geq \lambda_0$.

Por outro lado, por (1.5), temos

$$a(u, u) = \|u\|^2 - \lambda_1 |u|_2^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2) = \lambda_0.$$

Portanto devemos ter $a(u, u) = \lambda_0$.

Mostremos agora que $\lambda_0(r)$ é positivo para qualquer r . Como $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq \lambda_1 \int_{\Omega} v^2$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, temos $a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 \geq 0$, ou seja, $\lambda_0 \geq 0$.

Se $\lambda_0 = 0$, teríamos $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \lambda_1 \int_{\Omega} u^2$ e como visto na seção 1.4, $u = \tau \phi_1$. Assim, como $u \in M_r$, devemos ter $\tau = 0$, o que é um absurdo uma vez que $u \in Q_r$. Assim concluímos que $\lambda_0 > 0$. \square

O seguinte resultado nos dará uma caracterização da primeira curva não trivial do Espectro de Fučík. Antes de enunciá-lo e demonstrá-lo, definamos:

$$\mu(r) = \lambda_1 + \lambda_0(r) \quad \text{e} \quad \nu(r) = \lambda_1 + r\lambda_0(r).$$

Teorema 3.3. *O ponto $(\mu(r), \nu(r))$ definido acima é a primeira intersecção de Σ com a semi-reta de origem (λ_1, λ_1) e de inclinação r . Além disso, o ínfimo $\lambda_0(r)$ é atingido por uma solução de (2.1) correspondente a $(\mu(r), \nu(r))$.*

Quando $r = 1$, temos $(\mu, \nu) = (\lambda_2, \lambda_2)$.

Demonstração. Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ um minimizante para $\lambda_0(r)$, isto é, $a(v, v) = \lambda_0$ e $v \in M_r \cap Q_r$.

Considerando o caso em que $r \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} u \in M_r &\Rightarrow \int_{\Omega} (u^+ \phi_1 - r u^- \phi_1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} (r u^+ \phi_1 + (1-r) u^+ \phi_1 - r u^- \phi_1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \int_{\Omega} u \phi_1 + (1-r) \int_{\Omega} u^+ \phi_1 = 0. \end{aligned}$$

Consideremos $\psi(u) = \int_{\Omega} u^+ \phi_1$. Seja $t \in [0, 1]$, assim temos

$$\begin{aligned} \psi(tu + (1-t)w) &= \int_{\Omega} (tu + (1-t)w)^+ \phi_1 \leq \int_{\Omega} (tu^+ + (1-t)w^+) \phi_1 = \\ &= t \int_{\Omega} u^+ \phi_1 + (1-t) \int_{\Omega} w^+ \phi_1 = t\psi(u) + (1-t)\psi(w), \end{aligned}$$

implicando que ψ é função convexa (observe que não é de classe C^1 , e assim precisaremos usar a teoria de subgradientes da seção 1.5).

Como v é um mínimo de a restrita a M_r e a Q_r , segue do teorema 1.18, que existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos, e $v^* \in \partial\psi(v)$, tais que para todo $w \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\alpha a(v, w) + \beta \int_{\Omega} (v^+ w - r v^- w) + \gamma \left(r \int_{\Omega} w \phi_1 + (1-r) \cdot \langle v^*, w \rangle \right) = 0. \quad (3.5)$$

Fazendo $w = \phi_1$, temos

$$\alpha a(v, \phi_1) + \beta \int_{\Omega} (v^+ \phi_1 - r v^- \phi_1) + \gamma \left(r \int_{\Omega} \phi_1^2 + (1-r) \cdot \langle v^*, \phi_1 \rangle \right) = 0,$$

implicando, como $a(v, \phi_1) = 0$ por (3.3) e $v \in M_r$, que

$$\gamma \left(r \int_{\Omega} \phi_1^2 + (1-r) \cdot \langle v^*, \phi_1 \rangle \right) = 0. \quad (3.6)$$

Pela definição 1.17, segue que

$$\psi(v - \phi_1) - \psi(v) \geq \langle v^*, -\phi_1 \rangle,$$

mas pela própria definição de ψ , vale $\psi(v - \phi_1) - \psi(v) \leq 0$, assim temos $\langle v^*, -\phi_1 \rangle \leq 0$, e portanto $\langle v^*, \phi_1 \rangle \geq 0$. Logo, (3.6) implica $\gamma = 0$.

Desta forma a equação (3.5) se reduz a

$$\alpha a(v, w) + \beta \int_{\Omega} (v^+ w - r v^- w) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Notemos que $\alpha \neq 0$, pois caso contrário teríamos

$$\beta \int_{\Omega} (v^+ w - r v^- w) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $w = v$, obteríamos

$$\beta \int_{\Omega} [(v^+)^2 + r(v^-)^2] = 0 \Rightarrow \beta = 0,$$

implicando que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ o que contradiz o teorema 1.18.

Logo podemos, sem perder a generalidade, tomar $\alpha = 1$. Assim, para $w = v$, temos:

$$a(v, v) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -a(v, v) = -\lambda_0(r).$$

Reduzimos então a nossa equação (3.5) a

$$a(v, w) - \lambda_0(r) \int_{\Omega} [v^+ w - r v^- w] = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla w - \lambda_1 \int_{\Omega} v w - \lambda_0(r) \int_{\Omega} [v^+ w - r v^- w] = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

implicando que v é solução fraca não trivial (pois $v \in Q_r$) do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) = \lambda_0(r)(u^+(x) - r u^-(x)); & x \in \Omega, \\ u(x) = 0; & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

De $-\Delta v - \lambda_1 v = \lambda_0(r)(v^+ - r v^-)$, temos

$$-\Delta v - \lambda_1(v^+ - v^-) = \lambda_0(r) \cdot (v^+ - r v^-),$$

$$-\Delta v = (\lambda_1 + \lambda_0(r))v^+ - (\lambda_1 + r\lambda_0(r))v^- = \mu(r)v^+ - \nu(r)v^-.$$

No caso $r > 1$, escrevemos

$$u \in M_r \Rightarrow (r-1) \int_{\Omega} u^- \phi_1 - \int_{\Omega} u \phi_1 = 0,$$

e seguimos de forma análoga definindo $\psi(u) = \int_{\Omega} u^- \phi_1$.

Logo $(\mu(r), \nu(r)) \in \Sigma$. Além disso, sabemos que $\lambda_0(r) > 0$, isto é, $\mu(r) > \lambda_1$ e $\nu(r) > \lambda_1$. Assim temos $(\mu(r), \nu(r)) \notin \{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$.

Agora mostraremos que o ponto $(\mu(r), \nu(r))$ é a primeira intersecção da semi-reta de inclinação r e origem (λ_1, λ_1) com o Espectro de Fučík. Seja $t > 0$ e suponhamos $(\lambda_1 + t, \lambda_1 + tr) \in \Sigma$. Notemos que o ponto $(\lambda_1 + t, \lambda_1 + tr)$ pertence à semi-reta de origem (λ_1, λ_1) e inclinação r . Tomemos $w \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ solução fraca não trivial de (2.1), isto é,

$$-\Delta w = \lambda_1 w + tw^+ - rtw^-. \quad (3.8)$$

Portanto, por (3.1), temos $w \in M_r$. Consideremos $\tilde{w} = \frac{w}{d}$, onde $d = \left\{ \int_{\Omega} [(w^+(x))^2 + r(w^-(x))^2] dx \right\}^{\frac{1}{2}}$. Desta forma, temos

$$\int_{\Omega} (\tilde{w}^+ \phi_1 - r\tilde{w}^- \phi_1) = \frac{1}{d} \cdot \int_{\Omega} (w^+ \phi_1 - rw^- \phi_1) = 0,$$

implicando que $\tilde{w} \in M_r$, além disso, temos

$$\int_{\Omega} [(\tilde{w}^+)^2 + r(\tilde{w}^-)^2] = \frac{1}{d^2} \int_{\Omega} [(w^+)^2 + r(w^-)^2] = 1,$$

o que implica que $\tilde{w} \in Q_r$. Concluimos assim que $\tilde{w} \in M_r \cap Q_r$, e portanto temos $\lambda_0 \leq a(\tilde{w}, \tilde{w})$, ou seja

$$\mu(r) - \lambda_1 \leq a(\tilde{w}, \tilde{w}). \quad (3.9)$$

Testando (3.8) contra w , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \lambda_1 \cdot \int_{\Omega} w^2 - t \int_{\Omega} [(w^+)^2 + r(w^-)^2] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a(w, w) - td^2 &= 0 \Rightarrow a(\tilde{w}, \tilde{w}) = t. \end{aligned}$$

Voltando em (3.9), temos

$$\mu(r) - \lambda_1 \leq t \Rightarrow \mu(r) \leq \lambda_1 + t.$$

Desta forma concluimos que $(\mu(r), \nu(r))$ deve ser a primeira intersecção de Σ com a semi-reta de origem (λ_1, λ_1) e de inclinação r . Isto também implica que no caso $r = 1$, $\mu(r) = \nu(r) = \lambda_2$. De fato, a equação (3.2) se torna equivalente à caracterização variacional do segundo auto-valor como em (1.4). \square

Com este resultado, temos ao variar de r , $(\mu(r), \nu(r)) \in \Sigma$. Assim definimos o conjunto

$$C_1 = \{(\mu(r), \nu(r)) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}.$$

Veremos mais adiante algumas propriedades deste conjunto, em particular veremos que C_1 é uma curva e então representa a primeira curva não trivial do Espectro de Fučík .

Evidenciamos no seguinte corolário do teorema 3.3, uma caracterização de C_1 que será usada algumas vezes a seguir.

Corolário 3.4. *Seja $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, com $(\mu, \nu) \notin (\lambda_1 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \lambda_1)$. Então $(\mu, \nu) \in C_1$ se, e somente se as duas condições forem satisfeitas:*

(i)

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega} (\mu(u^+)^2 + \nu(u^-)^2), \quad (3.10)$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} ((\mu - \lambda_1)u^+ \phi_1(x) - (\nu - \lambda_1)u^- \phi_1) = 0. \quad (3.11)$$

(ii) *A igualdade em (3.10) ocorre para pelo menos um $u \neq 0$ que satisfaça (3.11) e é solução de (2.1).*

Demonstração. (\Rightarrow) Motivados pelo teorema 3.3, temos $(\mu, \nu) \in C_1$, o que significa que $\mu = \lambda_1 + \lambda_0(r)$ e $\nu = \lambda_1 + r\lambda_0(r)$, para algum $r > 0$. Com isto, dado $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo (3.11), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\mu - \lambda_1)u^+ \phi_1 - (\nu - \lambda_1)u^- \phi_1) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_0(r) \int_{\Omega} (u^+ \phi_1 - ru^- \phi_1) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\Omega} (u^+ \phi_1 - ru^- \phi_1) = 0 &\Rightarrow u \in M_r. \end{aligned}$$

Tomemos $v = \frac{u}{\{\int_{\Omega} [(u^+)^2 + r(u^-)^2]\}^{\frac{1}{2}}}$. Assim temos $v \in M_r \cap Q_r$. Portanto $a(v, v) \geq \lambda_0(r)$ e logo $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} v^2 \geq \lambda_0(r)$, isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 &\geq \lambda_0(r) \int_{\Omega} [(u^+)^2 + r(u^-)^2] \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 &\geq (\lambda_0(r) + \lambda_1) \int_{\Omega} (u^+)^2 + (r\lambda_0(r) + \lambda_1) \int_{\Omega} (u^-)^2 \Rightarrow \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 &\geq \int_{\Omega} (\mu(u^+)^2 + \nu(u^-)^2). \end{aligned}$$

Desta forma provamos o item (i) do corolário.

Agora seja u um minimizante para $\lambda_0(r)$. Segue assim que $a(u, u) = \lambda_0(r)$, e portanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda_1 \cdot \int_{\Omega} u^2 &= \lambda_0(r) \underbrace{\int_{\Omega} ((u^+)^2 + r(u^-)^2)}_{=1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} (\mu(u^+)^2 + \nu(u^-)^2). \end{aligned}$$

Esta última igualdade prova a afirmação (ii) do corolário.

(\Leftarrow) Tomemos $r = \frac{\nu - \lambda_1}{\mu - \lambda_1}$. Pelo item (i), se $u \in M_r \cap Q_r$, vale

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 &\geq \int_{\Omega} (\mu - \lambda_1)(u^+)^2 + (\nu - \lambda_1)(u^-)^2 = \\ &= (\mu - \lambda_1) \int_{\Omega} (u^+)^2 + r(u^-)^2 = \mu - \lambda_1. \end{aligned}$$

Agora pelo item (ii), existe \tilde{u} tal que, a menos de reescalamto, $\tilde{u} \in M_r \cap Q_r$, e vale a igualdade na equação acima. Desta forma, teremos que \tilde{u} minimiza a forma a em $M_r \cap Q_r$ e logo $\lambda_0(r) = \mu - \lambda_1$, e pela escolha de r segue que $r\lambda_0(r) = \nu - \lambda_1$. Com isto, temos $(\mu, \nu) = (\mu(r), \nu(r))$ para o r escolhido e portanto $(\mu, \nu) \in C_1$. \square

Antes de demonstrar o próximo teorema, vamos considerar $\Lambda(r) = r\lambda_0(r) = \nu(r) - \lambda_1$. Assim temos $\mu(r) = \lambda_1 + \lambda_0(r)$ e $\nu(r) = \lambda_1 + \Lambda(r)$. A fim de garantir algumas propriedades para $\mu(r)$, estudaremos $\lambda_0(r)$, de modo que pela igualdade $\Lambda\left(\frac{1}{r}\right) = \lambda_0(r)$, veja (3.12), teremos também propriedades a respeito de $\Lambda(r)$ e consequentemente de $\nu(r)$.

Teorema 3.5. C_1 é contínua, estritamente decrescente e simétrica com relação à diagonal.

Demonstração. Notemos primeiramente, que a simetria em relação à diagonal decorre do fato de Σ ser simétrico em relação à diagonal e que C_1 é, para todo $r > 0$, a primeira intersecção da semi-reta de inclinação r e origem (λ_1, λ_1) com o Espectro. Esta simetria implica que $\mu(r) = \nu\left(\frac{1}{r}\right)$, e logo

$$\lambda_0(r) = \Lambda\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3.12)$$

Observemos que se mostrarmos a continuidade das funções λ_0 ou Λ , na variável r , garantimos a continuidade da curva C_1 . Mostraremos também que λ_0 é estritamente decrescente e logo Λ é estritamente crescente, e portanto teremos C_1 estritamente decrescente quando ν é visto em função de μ .

Mostremos que λ_0 é contínua. A estratégia será mostrar a semi-continuidade inferior e superior.

Sejam $r_n \rightarrow r > 0$ e $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_0(r_n)$. Se $\alpha = \infty$, então trivialmente temos $\lambda_0(r) \leq \alpha$, implicando que $\lambda_0(r)$ é semi-contínua inferiormente. Consideremos então $\alpha < \infty$; a menos de

subseqüência, $\lambda_0(r_n) \rightarrow \alpha$ e tomemos u_n um minimizante de $\lambda_0(r_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $u_n \in Q_n$ para todo n , e a seqüência $\{r_n\}$ não tende a zero, segue que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e, como $\lambda_0(r_n)$ converge, é limitada também em $H_0^1(\Omega)$. Assim, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subseqüência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$.

Fazendo como na demonstração da proposição 3.2, temos $u \in M_r \cap Q_r$, segue disto que

$$\lambda_0(r) \leq a(u, u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a(u_n, u_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_0(r_n) = \alpha,$$

mostrando que λ_0 é semi-contínua inferiormente.

Por outro lado, fixemos $r > 0$ e seja u um minimizante para $\lambda_0(r)$. Definamos, para $0 < |\delta| < r$;

$$v(x) = \begin{cases} u(x); & u(x) \geq 0, \\ \frac{r}{r+\delta}u(x); & u(x) < 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Desta forma, vemos que $v \in H_0^1(\Omega)$, e além disso

$$\int_{\Omega} (v^+ \phi_1 + (r+\delta)v^- \phi_1) = \int_{\Omega} (u^+ \phi_1 + \frac{r}{r+\delta}(r+\delta)u^- \phi_1) = 0.$$

Logo $v \in M_{r+\delta}$. Fixemos

$$s^2 = \int_{\Omega} ((v^+)^2 + (r+\delta)(v^-)^2) = \int_{\Omega} \left((u^+)^2 + \frac{r^2}{r+\delta}(u^-)^2 \right),$$

e consideremos $w = \frac{v}{s}$. Assim, $w \in Q_{r+\delta}$, e como $v \in M_{r+\delta}$, então $w \in M_{r+\delta}$. Portanto $w \in M_{r+\delta} \cap Q_{r+\delta}$. Disto, segue que,

$$\begin{aligned} \lambda_0(r+\delta) &\leq a(w, w) = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} w^2 = \frac{1}{s^2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} v^2 \right) = \\ &= \frac{1}{s^2} \left(\int_{\Omega} (|\nabla u^+|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} (u^+)^2) + \frac{r^2}{(r+\delta)^2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} (u^-)^2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\int_{\Omega} ((u^+)^2 + \frac{r^2}{r+\delta}(u^-)^2)} \left(a(u^+, u^+) + \frac{r^2}{(r+\delta)^2} a(u^-, u^-) \right). \end{aligned}$$

Por fim temos

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \lambda_0(r+\delta) &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{a(u^+, u^+) + \frac{r^2}{(r+\delta)^2} a(u^-, u^-)}{\int_{\Omega} ((u^+)^2 + \frac{r^2}{r+\delta}(u^-)^2)} \right) = \\ &= \frac{a(u^+, u^+) + a(u^-, u^-)}{\int_{\Omega} ((u^+)^2 + r(u^-)^2)} = a(u^+, u^+) + a(u^-, u^-) = a(u, u) = \lambda_0(r). \end{aligned}$$

Logo $\limsup_{\delta \rightarrow 0} \lambda_0(r+\delta) \leq \lambda_0(r)$, implicando que $\lambda_0(r)$ é também semi-contínua superiormente e portanto é contínua.

Vamos agora mostrar a monotonicidade de λ_0 e Λ . Fixemos $r > 0$ e $\delta > 0$. Mostraremos que $\lambda_0(r+\delta) < \lambda_0(r)$, isto é, λ_0 é estritamente decrescente.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ um minimizante para r . Consideremos $\epsilon \geq 0$. Assim, a função

$$g(\epsilon) = \int_{\Omega} ((u + \epsilon\phi_1)^+ \phi_1 - (r + \delta)(u + \epsilon\phi_1)^- \phi_1),$$

é contínua e

$$g(0) = \int_{\Omega} (u^+ \phi_1 - (r + \delta)u^- \phi_1) = -\delta \int_{\Omega} u^- \phi_1 < 0.$$

Afirmamos que $g(\epsilon) \rightarrow \infty$, quando $\epsilon \rightarrow \infty$. De fato, notemos inicialmente que:

$$\begin{aligned} (u + \epsilon\phi_1)^+ \phi_1 &= (u\phi_1 + \epsilon\phi_1^2)\chi_{(u+\epsilon\phi_1)>0} \geq (u\phi_1 + \epsilon\phi_1^2) \cdot \chi_{u>0}, \\ (u\phi_1 + \epsilon\phi_1^2)^- &\leq (u\phi_1)^- \Rightarrow -(u\phi_1 + \epsilon\phi_1^2)^- \geq -(u\phi_1)^-. \end{aligned}$$

Logo temos,

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \int_{\Omega} ((u + \epsilon\phi_1)^+ \phi_1 - (r + \delta)(u + \epsilon\phi_1)^- \phi_1) \geq \\ &\geq \int_{\Omega} ((u\phi_1 + \epsilon\phi_1^2)\chi_{u>0} - (r + \delta)(u\phi_1)^-), \end{aligned}$$

e portanto $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} g(\epsilon) = \infty$, pois $\chi_{u>0} \neq 0$, uma vez que u muda de sinal. Assim existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $g(\epsilon_0) = 0$, implicando que $u + \epsilon_0\phi_1 \in M_{r+\delta}$.

Por outro lado, seja

$$\psi(\epsilon) = \int_{\Omega} (((u + \epsilon\phi_1)^+)^2 + r((u + \epsilon\phi_1)^-)^2).$$

Desta forma, temos,

$$\psi'(\epsilon) = 2 \int_{\Omega} ((u + \epsilon\phi_1)^+ \phi_1 - r(u + \epsilon\phi_1)^- \phi_1),$$

e portanto, ψ é estritamente convexa, uma vez que ψ' é estritamente crescente como função de ϵ , pois como $\phi_1 > 0$, então $(u + \epsilon\phi_1)^+$ é crescente e $(u + \epsilon\phi_1)^-$ é decrescente. Além disso, temos

$$\psi'(0) = 2 \int_{\Omega} (u^+ \phi_1 - ru^- \phi_1) = 0,$$

pois $u \in M_r$. Logo, 0 é um mínimo global para ψ . Uma vez que

$$\psi(0) = \int_{\Omega} ((u^+)^2 - r(u^-)^2) = 1,$$

concluimos que $\psi(\epsilon) > 1$, para todo $\epsilon > 0$. Sendo $\delta > 0$,

$$s^2 := \int_{\Omega} (((u + \epsilon_0\phi_1)^+)^2 + (r + \delta)((u + \epsilon_0\phi_1)^-)^2) > 1,$$

implicando que $w = \frac{u + \epsilon_0\phi_1}{s}$ pertence a $M_{r+\delta} \cap Q_{r+\delta}$. Segue disto, usando (3.3), que

$$\lambda_0(r + \delta) \leq a(w, w) = \frac{1}{s^2} a(u + \epsilon_0\phi_1, u + \epsilon_0\phi_1) = \frac{1}{s^2} a(u, u) = \frac{\lambda_0(r)}{s^2} < \lambda_0(r).$$

Assim mostramos que $\lambda_0(r)$ é estritamente decrescente.

Uma vez que $\Lambda(\frac{1}{r}) = \lambda_0(r)$, temos $\Lambda(r)$ estritamente crescente. E com isto a curva C_1 é estritamente decrescente. \square

O próximo resultado diz respeito ao comportamento assintótico de C_1 . Mas antes faremos algumas considerações e demonstraremos um lema.

Definamos, para $\epsilon > 0$, $\widehat{\Omega}_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) > \epsilon\}$ e $\widetilde{\Omega}_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) < \epsilon\}$, ou seja, $\widetilde{\Omega}_\epsilon$ é uma pequena faixa de Ω perto de $\partial\Omega$, e $\widehat{\Omega}_\epsilon$ é $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}_\epsilon$.

Denotemos por $\widehat{\lambda}_{1,\epsilon}$ e $\widetilde{\lambda}_{1,\epsilon}$ os primeiros auto-valores de $-\Delta$ em $H_0^1(\widehat{\Omega}_\epsilon)$ e $H_0^1(\widetilde{\Omega}_\epsilon)$, respectivamente, e por $\widehat{\phi}_{1,\epsilon}$ e $\widetilde{\phi}_{1,\epsilon}$, as respectivas auto-funções positivas e estendidas por zero a Ω , com norma $L^2(\Omega)$ unitária. Desta forma temos, $\widehat{\phi}_{1,\epsilon}, \widetilde{\phi}_{1,\epsilon} \in H_0^1(\Omega)$ e além disso vale o seguinte lema:

Lema 3.6. $\widehat{\lambda}_{1,\epsilon} \geq \lambda_1$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\lambda}_{1,\epsilon} = \lambda_1$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\phi}_{1,\epsilon} = \phi_1$, em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{1,\epsilon} &= \inf \left\{ \frac{\int_{\widehat{\Omega}_\epsilon} |\nabla v|^2}{\int_{\widehat{\Omega}_\epsilon} v^2} : v \in H_0^1(\widehat{\Omega}_\epsilon) \setminus \{0\} \right\} \geq \\ &\geq \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2}{\int_{\Omega} v^2} : v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\} = \lambda_1, \end{aligned}$$

já que todo $v \in H_0^1(\widehat{\Omega}_\epsilon)$ pode ser prolongado por zero a uma função em $H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, tomemos $\alpha \in (0, 1)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, tais que

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 - \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \right| \leq \alpha \quad \text{e} \quad \left| \int_{\Omega} \phi_1^2 - \int_{\Omega} \psi^2 \right| \leq \alpha. \quad (3.14)$$

(isto pode ser feito pois $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)$)

Consideremos ainda $\epsilon_0 > 0$, tal que $\text{supp}(\psi) \subset \widehat{\Omega}_\epsilon$ para $\epsilon < \epsilon_0$. Então $\psi \in H_0^1(\widehat{\Omega}_\epsilon)$ e

$$\widehat{\lambda}_{1,\epsilon} \leq \frac{\int_{\widehat{\Omega}_\epsilon} |\nabla \psi|^2}{\int_{\widehat{\Omega}_\epsilon} \psi^2} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2}{\int_{\Omega} \psi^2}. \quad (3.15)$$

De (3.14), temos

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 + \alpha \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \psi^2 \geq \int_{\Omega} \phi_1^2 - \alpha.$$

Voltando a (3.15), deduzimos $\widehat{\lambda}_{1,\epsilon} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 + \alpha}{\int_{\Omega} \phi_1^2 - \alpha}$ para todo $\epsilon < \epsilon_0$, e portanto

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\lambda}_{1,\epsilon} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 + \alpha}{\int_{\Omega} \phi_1^2 - \alpha}.$$

Logo temos

$$\lambda_1 \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\lambda}_{1,\epsilon} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 + \alpha}{\int_{\Omega} \phi_1^2 - \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \lambda_1,$$

e como α é arbitrário, concluímos que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\lambda}_{1,\epsilon} = \lambda_1$.

Já sabemos que $\|\widehat{\phi}_{1,\epsilon}\|^2 = \widehat{\lambda}_{1,\epsilon} \rightarrow \lambda_1$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, e portanto $\widehat{\phi}_{1,\epsilon}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Com isto, para qualquer sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$, a menos de subsequência, existe $v \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\widehat{\phi}_{1,\epsilon_n} \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\widehat{\phi}_{1,\epsilon_n} \rightarrow v$ em $L^2(\Omega)$ e q. t. p. em Ω . Assim temos $|v|_2 = 1$ e

$$\|v\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\phi}_{1,\epsilon_n}\|^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{1,\epsilon_n} = \lambda_1.$$

Pela seção 1.4, temos $v = \phi_1$. Uma vez que $\|\widehat{\phi}_{1,\epsilon_n}\| \rightarrow \|\phi_1\|$ e $\widehat{\phi}_{1,\epsilon_n} \rightharpoonup \phi_1$, segue que $\widehat{\phi}_{1,\epsilon_n} \rightarrow \phi_1$. Aplicando esse raciocínio a qualquer sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$ deduzimos que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\phi}_{1,\epsilon} = \phi_1$. \square

Mostramos agora dois teoremas que fornecem o comportamento assintótico da curva C_1 já citado anteriormente.

Teorema 3.7. $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu(r) = \lambda_1$ e $\lim_{r \rightarrow 0} \nu(r) = \lambda_1$.

Demonstração. Mostraremos que $\lambda_0(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$ o que claramente implica na primeira igualdade do teorema.

Esta prova será feita por contradição. Uma vez que $\lambda_0(r)$ é decrescente, suponhamos que exista $\eta > 0$, tal que $\lambda_0(r) \geq \eta$ para todo $r > 0$. Isto implica que se $r > 0$ e $u \in M_r \cap Q_r$, então $a(u, u) \geq \eta$.

Consideremos $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ e definamos

$$u(x) = \begin{cases} \widehat{\phi}_{1,\epsilon}(x); & \text{em } \widehat{\Omega}_\epsilon, \\ -\delta \widetilde{\phi}_{1,\epsilon}(x); & \text{em } \widetilde{\Omega}_\epsilon. \end{cases} \quad (3.16)$$

Assim $u \in H_0^1(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 = \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla \widehat{\phi}_{1,\epsilon}|^2 - \lambda_1 \int_{\widehat{\Omega}} (\widehat{\phi}_{1,\epsilon})^2 + \delta^2 \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla \widetilde{\phi}_{1,\epsilon}|^2 - \delta^2 \lambda_1 \int_{\widetilde{\Omega}} (\widetilde{\phi}_{1,\epsilon})^2 = \\ &= (\widehat{\lambda}_{1,\epsilon} - \lambda_1) + \delta^2 (\widetilde{\lambda}_{1,\epsilon} - \lambda_1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Motivados pelo lema anterior, podemos tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, para termos $\widehat{\lambda}_{1,\epsilon} - \lambda_1 < \frac{\eta}{4}$. A seguir escolhemos $\delta > 0$, tal que $\delta^2 (\widetilde{\lambda}_{1,\epsilon} - \lambda_1) < \frac{\eta}{4}$. Nestas condições, (3.17) implica $a(u, u) < \frac{\eta}{2}$. Como u muda de sinal, $u \in M_r$ para algum $r > 0$ dependendo de ϵ e δ .

Por outro lado $\int_{\Omega} ((u^+)^2 + r(u^-)^2) = \int_{\widehat{\Omega}} (\widehat{\phi}_{1,\epsilon})^2 + r\delta^2 \int_{\widetilde{\Omega}} (\widetilde{\phi}_{1,\epsilon})^2 = 1 + r\delta^2 > 1$. Assim $v = \frac{u}{(1+r\delta^2)^{\frac{1}{2}}} \in M_r \cap Q_r$ e

$$a(v, v) = \frac{a(u, u)}{(1+r\delta^2)} < \frac{\eta}{2} < \eta,$$

o que é uma contradição.

Logo não existe $\eta > 0$ com tais propriedades, isto é, $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_0(r) = 0$, e portanto $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu(r) = \lambda_1$, mostrando a primeira afirmação do teorema. Enfim, notemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Lambda(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \lambda_0\left(\frac{1}{r}\right) = \lim_{\frac{1}{r} \rightarrow \infty} \lambda_0\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

e logo $\lim_{r \rightarrow 0} \nu(r) - \lambda_1 = 0$, implicando $\lim_{r \rightarrow 0} \nu(r) = \lambda_1$, mostrando a segunda afirmação. \square

Teorema 3.8. $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(r) = \infty$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = \infty$.

Demonstração. Iremos apenas mostrar a primeira igualdade, pois a segunda decorre dela como no teorema anterior.

Suponhamos que $\lim_{r \rightarrow 0} \lambda_0(r) = \alpha < \infty$ e denotemos por u_r um minimizante para $\lambda_0(r)$. Observemos que u_r^+ e $\sqrt{r}u_r^-$ são limitadas em $L^2(\Omega)$ para r limitado, pois $u_r \in Q_r$. Assim dada uma sequência $r_n \rightarrow 0$, a menos de subsequência, $u_{r_n}^+ \rightharpoonup u_0$ em $L^2(\Omega)$, com $u_0(x) \geq 0$ q. t. p. em Ω . Além disso, de $u_r \in M_r$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_0 \phi_1 &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_r^+ \phi_1 = \lim_{r \rightarrow 0} r \int_{\Omega} u_r^- \phi_1 = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \int_{\Omega} \sqrt{r} u_r^- \phi_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto $u_0 = 0$ e logo $u_{r_n}^+ \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$. Consideremos a decomposição ortogonal $u_r = a_r \phi_1 + \psi_r$. Desta forma por (3.3), temos

$$a(u_r, u_r) = a(\psi_r, \psi_r),$$

e como λ_0 cresce quando $r \rightarrow 0$, temos

$$\alpha \geq \lambda_0(r) = a(u_r, u_r) = \|\psi_r\|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} \psi_r^2,$$

e pelo fato de ψ_r ser ortogonal a ϕ_1 , usando também a caracterização variacional (1.4), deduzimos que

$$\alpha \geq \|\psi_r\|^2 - \lambda_1 \frac{\|\psi_r\|^2}{\lambda_2} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \|\psi_r\|^2.$$

Sendo $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$, concluímos

$$\|\psi_r\|^2 \leq \alpha \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-1},$$

ou seja, ψ_r é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e assim, a menos de subsequência, ψ_{r_n} converge fraco em $H_0^1(\Omega)$ e forte em $L^2(\Omega)$. Uma vez que u_r é um minimizante para $\lambda_0(r)$, temos pelo teorema 3.3,

$$\int_{\Omega} \nabla u_r \nabla v = \int_{\Omega} (\mu(r)u_r^+ - \nu(r)u_r^-)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em particular,

$$\int_{\Omega} \nabla u_r \nabla \psi_r = \int_{\Omega} (\mu(r)u_r^+ - \nu(r)u_r^-) \psi_r.$$

Segue disto que

$$a(\psi_r, \psi_r) = \int_{\Omega} |\nabla \psi_r|^2 - \lambda_1 \int_{\Omega} \psi_r^2 = \int_{\Omega} \nabla u_r \nabla \psi_r - \lambda_1 \int_{\Omega} u_r \psi_r =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (\mu(r)u_r^+ - \nu(r)u_r^-)\psi_r - \lambda_1 \int_{\Omega} (u_r^+ - u_r^-)\psi_r = \\
&= (\mu(r) - \lambda_1) \int_{\Omega} u_r^+ \psi_r - (\nu(r) - \lambda_1) \int_{\Omega} u_r^- \psi_r = \\
&= \lambda_0(r) \int_{\Omega} u_r^+ \psi_r - r\lambda_0(r) \int_{\Omega} u_r^- \psi_r.
\end{aligned}$$

Como $u_{r_n}^+ \rightarrow 0$ e ψ_{r_n} converge em $L^2(\Omega)$, temos $\int_{\Omega} u_{r_n}^+ \psi_{r_n} \rightarrow 0$. Além disso $\sqrt{r_n}\lambda_0(r_n) \rightarrow 0$, pois $\lambda_0(r_n) \rightarrow \alpha$, enquanto $\sqrt{r_n}u_{r_n}^-$ e ψ_{r_n} são limitadas em $L^2(\Omega)$. Assim temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(\psi_r, \psi_r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\lambda_0(r) \int_{\Omega} u_r^+ \psi_r - r\lambda_0(r) \int_{\Omega} u_r^- \psi_r \right) = 0.$$

Mas

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} \lambda_0(r) = \lim_{r \rightarrow 0} a(u_r, u_r) = \lim_{r \rightarrow 0} a(\psi_r, \psi_r) = 0,$$

o que é uma contradição, pois $\lambda_0(r) > 0$, é decrescente e converge para α , quando $r \rightarrow 0$.

Concluimos portanto que $\lim_{r \rightarrow 0} \lambda_0(r) = \infty$, mostrando que $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(r) = \infty$. \square

Combinando estes últimos resultados, temos que as retas $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ são assíntotas para a curva C_1 e são isoladas em Σ .

A figura 3.1 esboça a primeira curva não trivial do Espectro de Fučík com condição de Dirichlet.

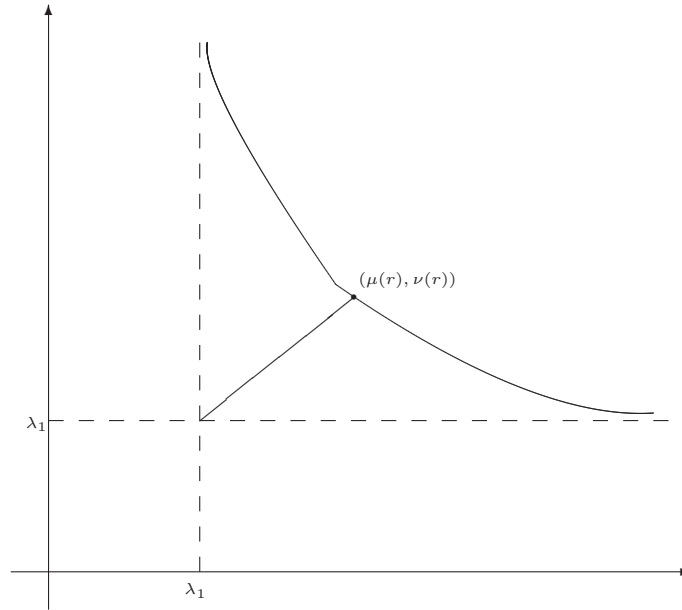


Figura 3.1: Primeira curva não trivial do Espectro de Fučík

3.3 Domínios Nodais

Nesta seção estaremos supondo Ω de classe $C^{1,1}$, pois desta forma, como pode ser visto em [Bre83], uma solução u de (2.1) é contínua em $\bar{\Omega}$.

Definição 3.9. *Um domínio nodal para $u \in C(\bar{\Omega})$ é definido como um subconjunto maximal aberto e conexo do conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$.*

Estamos interessados em demonstrar o seguinte teorema

Teorema 3.10. *Sejam $(\mu, \nu) \in C_1$ e u uma solução não trivial de (2.1). Então u admite exatamente dois domínios nodais.*

Courant e Hilbert, em [CH53], mostram um caso particular do resultado que apresentamos aqui, dizendo que qualquer auto-função associada ao auto-valor λ_2 admite exatamente dois domínios nodais. Em dimensão um, isso significa que toda auto-função associada ao segundo auto-valor muda apenas uma vez de sinal. Aqui estendemos o resultado para qualquer solução de (2.1) com $(\mu, \nu) \in C_1$.

Antes iremos introduzir o seguinte Lema de Continuação Única, que é uma consequência de [GL87] e será usado na demonstração do teorema 3.10 e na próxima seção.

Lema 3.11. *Seja $u \in H^1(\Omega)$, solução fraca de*

$$-\Delta u(x) = m_+(x)u^+(x) - m_-(x)u^-(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.18)$$

onde $m_+, m_- \in L^\infty(\Omega)$. Então $u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, ou o conjunto $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ tem medida nula.

Demonstração do teorema 3.10. Uma vez que u muda de sinal, pois $(\mu, \nu) \in C_1$, temos a existência de um domínio nodal positivo Ω_1 e um domínio nodal negativo Ω_2 . Suponhamos que exista um terceiro domínio nodal Ω_3 . Denotaremos por v_i a restrição de u em Ω_i para $i = 1, 2$ e 3 , e definamos

$$u_i(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega_i, \\ 0 & x \in \Omega \setminus \Omega_i. \end{cases} \quad (3.19)$$

Como $v_i \in C(\bar{\Omega}_i) \cap H^1(\Omega_i)$ e é nula em $\partial\Omega_i$, temos $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ e conseqüentemente $u_i \in H_0^1(\Omega)$. Tomemos α_1 e α_2 positivos, tais que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, satisfaça

$$\int_{\Omega} ((\mu - \lambda_1)v^+ \phi_1 - (\nu - \lambda_1)v^- \phi_1) = 0.$$

Segue, do corolário 3.4, que

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq \int_{\Omega} (\mu(v^+)^2 + \nu(v^-)^2), \quad (3.20)$$

mas por outro lado, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \alpha_1^2 \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 + \alpha_2^2 \int_{\Omega} |\nabla u_2|^2 = \alpha_1^2 \mu \int_{\Omega} u_1^2 + \alpha_2^2 \nu \int_{\Omega} u_2^2.$$

Assim ocorre a igualdade em (3.20) e novamente pelo corolário 3.4, segue que v é solução não trivial de (2.1). Mas notemos que v é nula em Ω_3 o que é um absurdo pelo lema (3.11).

Concluimos assim que existem exatamente dois domínios nodais para u . \square

3.4 Não ressonância entre (λ_1, λ_1) e C_1

Estudaremos agora a solubilidade do problema semilinear de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)); & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0; & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.21)$$

no caso em que a não linearidade é tal que $\frac{f(x,u)}{u}$ está assintoticamente entre (λ_1, λ_1) e um ponto $(\mu, \nu) \in C_1$. A referência para esta seção é [CG92].

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um função satisfazendo as condições de Carathéodory, isto é, $f(\cdot, s)$ é mensurável para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado e $f(x, \cdot)$ é contínua para cada $x \in \Omega$ fixado. Além disso, vamos supor que para todo $\xi > 0$, exista $\tilde{a}_\xi \in L^2(\Omega)$, tal que $|f(x, s)| \leq \tilde{a}_\xi(x)$ q. t. p. em Ω se $s \in [-\xi, \xi]$.

Consideremos os limites

$$\begin{aligned} \gamma_+(x) &= \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x,s)}{s}, & \Gamma_+(x) &= \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x,s)}{s}, \\ \gamma_-(x) &= \liminf_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x,s)}{s}, & \Gamma_-(x) &= \limsup_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x,s)}{s}. \end{aligned}$$

Escrevendo $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$, definamos também os limites

$$\begin{aligned} \delta_+(x) &= \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, & \Delta_+(x) &= \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, \\ \delta_-(x) &= \liminf_{s \rightarrow -\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, & \Delta_-(x) &= \limsup_{s \rightarrow -\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assumiremos que tais limites sejam uniformes com respeito a x e que esteja satisfeita, por algum ponto $(\mu, \nu) \in C_1$ fixado, a seguinte condição:

$$(f) \begin{cases} \lambda_1 \leq \gamma_+(x) \leq \Gamma_+(x) \leq \mu \text{ q. t. p em } \Omega \\ \lambda_1 \leq \gamma_-(x) \leq \Gamma_-(x) \leq \nu \text{ q. t. p em } \Omega. \end{cases} \quad (3.23)$$

Lema 3.12. *A condição (f) implica que*

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq \delta_+(x) \leq \Delta_+(x) \leq \mu, \text{ q. t. p. em } \Omega, \\ \lambda_1 \leq \delta_-(x) \leq \Delta_-(x) \leq \nu, \text{ q. t. p. em } \Omega. \end{cases} \quad (3.24)$$

e que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $a_\epsilon \in L^2(\Omega)$, tal que para quase todo $x \in \Omega$, temos:

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \epsilon)s - a_\epsilon(x) \leq f(x, s) \leq (\mu + \epsilon)s + a_\epsilon(x), & \text{para } s \geq 0, \\ (\lambda_1 - \epsilon)s + a_\epsilon(x) \geq f(x, s) \geq (\nu + \epsilon)s - a_\epsilon(x), & \text{para } s \leq 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Demonstração. De fato, $\Gamma_+(x) = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \mu$ q. t. p. em Ω , implica que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (dependendo apenas de ϵ , pois o limite é uniforme), tal que

$$\frac{f(x, s)}{s} \leq (\mu + \epsilon), \quad \text{para } s > \delta.$$

Por outro lado, para $s \in [0, \delta]$, temos

$$|f(x, s)| \leq \tilde{a}_\delta(x) \quad \text{q. t. p. em } \Omega.$$

Segue assim que se $s \geq 0$, então

$$f(x, s) \leq (\mu + \epsilon)s + \tilde{a}_\delta(x) \quad \text{q. t. p. em } \Omega.$$

Esta última desigualdade nos diz que f possui um crescimento linear. Usando o mesmo raciocínio com as outras desigualdades, obtemos as desigualdades (3.25) onde $a_\epsilon := \tilde{a}_{\delta(\epsilon)}$.

Mostraremos agora $\Delta_+(x) \leq \mu$ q. t. p. em Ω , uma vez que as outras desigualdades em (3.24), decorrem de modo análogo. Com efeito, temos para quase todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \frac{2F(x, s)}{s^2} &= 2 \frac{\int_0^s f(x, t) dt}{s^2} \leq 2 \int_0^s \frac{(\mu + \epsilon)t}{s^2} dt + 2 \frac{a_\epsilon(x)s}{s^2} = \\ &= (\mu + \epsilon) + \frac{2a_\epsilon(x)}{s}. \end{aligned}$$

Portanto $\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \mu + \epsilon$ q. t. p. em Ω , implicando que

$$\Delta_+(x) \leq \mu + \epsilon \quad \text{q. t. p. em } \Omega,$$

para todo $\epsilon > 0$. Com isto $\Delta_+(x) \leq \mu$ q. t. p. em Ω . \square

Observemos que assumindo apenas a hipótese **(f)**, não podemos garantir existência de solução para (3.21), por exemplo, a função $f(x, u) = \lambda_1 u + 1$ satisfaz **(f)**, mas o problema (3.21) não admite solução, pois usando ϕ_1 como função teste em sua formulação fraca, teríamos

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1 - \lambda_1 \int_{\Omega} u \phi_1 = \int_{\Omega} 1 \phi_1 \neq 0.$$

Por isso precisamos de uma “condição de não ressonância”, que nos garanta que a não linearidade não seja exatamente $\lambda_1 u$ nem $\mu u^+ - \nu u^-$. A condição que usaremos é a seguinte:

(F) Existem ω_1 , ω_2 e ω_3 , subconjuntos de Ω de medida positiva, tais que

$$\begin{cases} \delta_+(x) > \lambda_1, & \text{em } \omega_1, \\ \delta_-(x) > \lambda_1, & \text{em } \omega_2, \\ \Delta_+(x) < \mu \text{ e } \Delta_-(x) < \nu, & \text{em } \omega_3. \end{cases}$$

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.13. *Se (\mathbf{f}) e (\mathbf{F}) ocorrem com $(\mu, \nu) \in C_1$, então o problema (3.21) admite pelo menos uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Para isto, começaremos demonstrando um lema.

Lema 3.14. *Sejam $(\mu, \nu) \in C_1$ e $m_+, m_- \in L^\infty(\Omega)$, tais que*

$$\lambda_1 \leq m_+(x) \leq \mu \text{ e } \lambda_1 \leq m_-(x) \leq \nu \text{ q. t. p. em } \Omega. \quad (3.26)$$

Se existem ω_1, ω_2 e ω_3 , subconjuntos de Ω de medida positiva, tais que

$$\begin{cases} m_+(x) > \lambda_1, & \text{em } \omega_1, \\ m_-(x) > \lambda_1, & \text{em } \omega_2, \\ m_+(x) < \mu \text{ e } m_-(x) < \nu, & \text{em } \omega_3, \end{cases}$$

então $u \equiv 0$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = m_+(x)u^+(x) - m_-(x)u^-(x), & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.27)$$

Demonstração. Suponhamos que $u \not\equiv 0$ seja uma solução de (3.27). Consideremos primeiro o caso que u não muda de sinal. Sem perda de generalidade, tomemos $u(x) \geq 0$ em Ω . Assim temos,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} m_+ u v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em particular, para $v = \phi_1$, temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1 = \int_{\Omega} m_+ u \phi_1 \Rightarrow \int_{\Omega} \lambda_1 u \phi_1 = \int_{\Omega} m_+ u \phi_1,$$

e portanto $\int_{\Omega} (\lambda_1 - m_+) u \phi_1 = 0$. Como $m_+ \geq \lambda_1$ q. t. p. em Ω , $m_+ > \lambda_1$ em ω_1 e pelo lema 3.11, $u > 0$ q. t. p. em Ω , segue que $\int_{\Omega} (\lambda_1 - m_+) u \phi_1 < 0$, o que é uma contradição.

Consideremos então o caso em que u muda de sinal. Escrevemos $r = \frac{\nu - \lambda_1}{\mu - \lambda_1}$ e definamos $w = u^+ - su^-$, onde s é tal que $w \in M_r$. Assim, pelo corolário 3.4, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 + s^2 \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \geq \mu \int_{\Omega} (u^+)^2 + s^2 \nu \int_{\Omega} (u^-)^2. \quad (3.28)$$

Como u é uma solução fraca de (3.27), segue que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} (m_+ u^+ - m_- u^-) v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.29)$$

e fazendo $v = u^+$ e depois $v = u^-$ em (3.29), temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 = \int_{\Omega} m_+ (u^+)^2 \text{ e } \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 = \int_{\Omega} m_- (u^-)^2. \quad (3.30)$$

Usando (3.26), (3.30) e (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} (u^+)^2 + s^2 \nu \int_{\Omega} (u^-)^2 &\geq \int_{\Omega} m_+(u^+)^2 + s^2 \int_{\Omega} m_-(u^-)^2 \geq \\ &\geq \mu \int_{\Omega} (u^+)^2 + s^2 \nu \int_{\Omega} (u^-)^2, \end{aligned}$$

e portanto temos a igualdade

$$\mu \int_{\Omega} (u^+)^2 + s^2 \nu \int_{\Omega} (u^-)^2 = \int_{\Omega} m_+(u^+)^2 + s^2 \int_{\Omega} m_-(u^-)^2,$$

implicando que

$$\int_{\Omega} (\mu - m_+)(u^+)^2 + s^2 \int_{\Omega} (\nu - m_-)(u^-)^2 = 0.$$

Como ambas parcelas desta última soma são maiores ou iguais que zero, deveremos ter

$$\int_{\Omega} (\mu - m_+)(u^+)^2 = 0 = \int_{\Omega} (\nu - m_-)(u^-)^2,$$

e como $\mu \geq m_+$, teríamos $\int_{\omega_3} (\mu - m_+)(u^+)^2 = 0$. Com isto deveríamos ter $u^+(x) = 0$ q. t. p. em ω_3 . De modo análogo, obtemos $u^-(x) = 0$ q. t. p. em ω_3 , o que é um absurdo uma vez que pelo lema 3.11, a medida do conjunto $\{x : u(x) = 0\}$ é nula. \square

Denotaremos por Φ o funcional de classe C^1 associado ao problema (3.21), isto é

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x, u),$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Para demonstrarmos o teorema 3.13, que garante solubilidade de (3.21), procuraremos um ponto crítico do funcional Φ . Para isso precisamos primeiro mostrar a condição técnica contida no seguinte lema.

Lema 3.15. *Nas hipóteses do teorema 3.13, Φ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), isto é, para toda sequência $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, tal que*

$$|\Phi(u_n)| \leq C, \tag{3.31}$$

$$|\Phi'(u_n)[v]| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u_n)v \right| \leq \epsilon_n \cdot \|v\|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.32}$$

onde C é uma constante positiva e $\epsilon_n \rightarrow 0$, existe uma subsequência convergente.

Demonstração. De fato, seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, satisfazendo (3.31) e (3.32). Mostraremos primeiro que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assumamos, por contradição, que $\{u_n\}$ seja ilimitada. Assim para uma subsequência, $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Seja $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Então $\{v_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e portanto, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$, e $v_n \rightarrow v_0$ em $L^2(\Omega)$.

Mostremos que $\|v_0\| = 1$. De fato, consideremos $f_n(x) := \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|}$, que pelo crescimento linear de f , veja (3.25), continua limitada em $L^2(\Omega)$. Assim existe $f_0 \in L^2(\Omega)$, tal que a menos de subsequência, $\frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} \rightharpoonup f_0$ em $L^2(\Omega)$.

Dividindo (3.32) por $\|u_n\|$ e tomando o limite, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \frac{\nabla u_n \nabla v}{\|u_n\|} - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)v}{\|u_n\|} \right) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

e portanto

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla v - \int_{\Omega} f_0 v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.33)$$

Fazendo em (3.32), $v = \frac{v_n}{\|u_n\|}$, temos

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\nabla u_n \nabla v_n}{\|u_n\|} - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)v_n}{\|u_n\|} \right| \leq \epsilon_n \left\| \frac{v_n}{\|u_n\|} \right\|,$$

$$\left| 1 - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)v_n}{\|u_n\|} \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}.$$

Aplicando o limite, e como $f_n \rightharpoonup f_0$ e $v_n \rightarrow v_0$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$1 - \int_{\Omega} f_0(x)v_0(x)dx = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f_0(x)v_0(x)dx = 1.$$

Fazendo $v = v_0$ em (3.33) e usando a equação acima, temos $\int_{\Omega} |\nabla v_0(x)|^2 dx = 1$, isto é, $\|v_0\| = 1$.

Afirmamos que a hipótese **(f)** implica que f_0 pode ser escrito da forma

$$f_0(x) = m_+(x)v_0^+(x) - m_-(x)v_0^-(x),$$

onde $m_+, m_- \in L^\infty(\Omega)$ e satisfazem

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq m_+(x) \leq \mu, & \text{q. t. p. em } \Omega, \\ \lambda_1 \leq m_-(x) \leq \nu, & \text{q. t. p. em } \Omega, \end{cases}$$

isto será mostrado no lema 3.16 adiante.

Desta forma, (3.33) implica que v_0 é uma solução de (3.27) e como $\|v_0\| = 1$, o lema 3.11 implica que

$$\{x \in \Omega; v_0(x) = 0\} \text{ possui medida nula.} \quad (3.34)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir

$$\begin{cases} m_+(x) = \frac{\mu + \lambda_1}{2}, & \text{para } x \in \{x : v_0(x) < 0\}, \\ m_-(x) = \frac{\nu + \lambda_1}{2}, & \text{para } x \in \{x : v_0(x) > 0\}. \end{cases} \quad (3.35)$$

Desta maneira, temos 3 casos para analisar.

- (i) $m_+(x) > \lambda_1$ e $m_-(x) > \lambda_1$ em subconjuntos de Ω de medida positiva e em um mesmo subconjunto de Ω de medida positiva ocorre $m_+(x) < \mu$ e $m_-(x) < \nu$.

- (ii) $m_+(x) > \lambda_1$ e $m_-(x) > \lambda_1$ em subconjuntos de Ω de medida positiva e a medida do conjunto $\{x : m_+(x) < \mu \text{ e } m_-(x) < \nu\}$ é nula.
- (iii) $m_+(x) = \lambda_1$ q. t. p. em Ω ou $m_-(x) = \lambda_1$ q. t. p. em Ω .

Caso (i).

O lema 3.14 nos leva diretamente à contradição $v_0 \equiv 0$.

Caso(ii).

Nestas condições, temos $m_+(x) = \mu$ q. t. p. em $\{x : v_0(x) > 0\}$ e $m_-(x) = \nu$ q. t. p. em $\{x : v_0(x) < 0\}$, pois do contrário, (3.35) implica que estaríamos no caso (i). Logo (3.27) fica da seguinte forma

$$-\Delta v_0(x) = \mu v_0^+(x) - \nu v_0^-(x), \quad \text{em } \Omega. \quad (3.36)$$

Sabemos que v_0 deve mudar de sinal. De (3.36), segue que

$$1 = \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 = \int_{\Omega} (\mu (v_0^+)^2 + \nu (v_0^-)^2). \quad (3.37)$$

Por (3.31), temos

$$\frac{|\Phi(u_n)|}{\|u_n\|^2} = \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n(x)|^2}{\|u_n\|^2} dx - \int_{\Omega} \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^2} dx \right| \leq \frac{C}{\|u_n\|^2}$$

e tomando o limite, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{2F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} = 1. \quad (3.38)$$

Logo de (3.37), temos

$$\mu \int_{\Omega} (v_0^+)^2 + \nu \int_{\Omega} (v_0^-)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{2F(x, u_n)}{\|u_n\|^2}. \quad (3.39)$$

Integrando (3.25), obtemos $\frac{2F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^2} \leq \frac{\max\{\mu, \nu\} + \epsilon}{2} v_n^2 + \frac{a_\epsilon v_n}{\|u_n\|}$ e como v_n converge em $L^2(\Omega)$, podemos aplicar o Lema de Fatou (veja teorema 1.10), obtendo de (3.39),

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} (v_0^+)^2 + \nu \int_{\Omega} (v_0^-)^2 &\leq \int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} = \\ &= \int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, v_n \|u_n\|)}{v_n^2 \|u_n\|^2} v_n^2, \end{aligned}$$

onde usando (3.22),

$$\begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, v_n \|u_n\|)}{v_n^2 \|u_n\|^2} v_n^2 = \Delta_+(v_0^+)^2, & \text{onde } v_0 > 0, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, v_n \|u_n\|)}{v_n^2 \|u_n\|^2} v_n^2 = \Delta_-(v_0^-)^2, & \text{onde } v_0 < 0. \end{cases}$$

Logo obtemos

$$\mu \int_{\Omega} (v_0^+)^2 + \nu \int_{\Omega} (v_0^-)^2 \leq \int_{\Omega} \Delta_+(v_0^+)^2 + \int_{\Omega} \Delta_-(v_0^-)^2,$$

e portanto

$$\int_{\Omega} (\mu - \Delta_+)(v_0^+)^2 + \int_{\Omega} (\nu - \Delta_-)(v_0^-)^2 \leq 0.$$

Como ambas parcelas da soma são não negativas, por (3.24), deveremos ter

$$\int_{\Omega} (\mu - \Delta_+)(v_0^+)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} (\nu - \Delta_-)(v_0^-)^2 = 0.$$

Por **(F)**, segue que $\Delta_+(x) < \mu$ e $\Delta_-(x) < \nu$ em ω_3 , implicando que $v_0 \equiv 0$ em ω_3 , o que é uma contradição com (3.34).

Caso (iii).

Consideremos o caso $m_-(x) = \lambda_1$ q. t. p. em Ω . Então por (3.35), $v_0 \leq 0$ q. t. p. em Ω e assim v_0 satisfaz $-\Delta v_0 = \lambda_1 v_0$, e portanto $v_0 = -\tau \phi_1$, para algum $\tau > 0$. Fazendo como no caso anterior, chegamos a igualdade

$$1 = \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 = \int_{\Omega} \lambda_1 v_0^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{2F(x, u_n)}{\|u_n\|^2},$$

e aplicando novamente o Lema de Fatou e (3.24), obtemos

$$\int_{\Omega} \lambda_1 v_0^2 \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} \geq \int_{\Omega} \delta_- v_0^2.$$

Como $\delta_- \geq \lambda_1$ q. t. p. em Ω e $\delta_- > \lambda_1$ em ω_2 , necessariamente $v_0 = 0$ em ω_2 , contradizendo (3.34). Logo não ocorre nenhum dos 3 casos citados, mostrando desta forma que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, existe $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$.

Usando novamente (3.25), temos que $g_n(x) := f(x, u_n(x))$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e portanto fracamente convergente em $L^2(\Omega)$. Assim fazendo $v = u_n - u$ em (3.32), temos

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) - \int_{\Omega} (u_n - u) g_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

e como a segunda integral tende a zero, segue que $\|u_n\|^2 \rightarrow \|u\|^2$. Portanto $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Com isto concluímos que Φ satisfaz a condição (PS). \square

Lema 3.16. *Sejam f_0 e v_0 como na demonstração do lema 3.15. Se **(f)** ocorre, então*

$$f_0(x) = m_+(x)v_0^+(x) - m_-(x)v_0^-(x),$$

onde $m_+, m_- \in L^\infty(\Omega)$ e satisfazem

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq m_+(x) \leq \mu & \text{q. t. p. em } \Omega, \\ \lambda_1 \leq m_-(x) \leq \nu & \text{q. t. p. em } \Omega. \end{cases}$$

Demonstração. É claro que $m_+ = \frac{f_0}{v_0}$, quando $v_0 > 0$ e poderá ser escolhido arbitrariamente quando $v_0 \leq 0$, e analogamente pode ser feito para m_- . Logo precisamos apenas demonstrar as desigualdades.

Dado $\epsilon > 0$, denotemos por χ_n a função característica do conjunto.

$$\left\{ x : u_n(x) > 0 \text{ e } \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} \geq \gamma_+(x) - \epsilon \right\}.$$

Para todo $x \in \{v_0 > 0\}$, temos $u_n(x) \rightarrow \infty$. Desta forma, para n suficientemente grande, temos por **(f)** que

$$\frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} \geq \gamma_+(x) - \epsilon \text{ q. t. p. em } \{v_0 > 0\}.$$

Nestas condições, teremos $\chi_n(x) \rightarrow 1$ q. t. p. em $\{v_0 > 0\}$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n(x)\|} \chi_n(x) = \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} v_n(x) \chi_n(x) \geq (\gamma_+(x) - \epsilon) v_n(x) \chi_n(x),$$

q. t. p. em $\{v_0 > 0\}$.

Passando ao limite fraco, segue que

$$f_0(x) \geq (\gamma_+(x) - \epsilon) v_0(x), \text{ em } \{v_0 > 0\},$$

e portanto

$$\frac{f_0}{v_0} \geq \gamma_+, \text{ em } \{v_0 > 0\}. \quad (3.40)$$

Pelo mesmo raciocínio, obtemos

$$\begin{cases} \gamma_+ \leq \frac{f_0}{v_0} \leq \Gamma_+, & \text{em } \{v_0 > 0\}, \\ \gamma_- \leq \frac{f_0}{v_0} \leq \Gamma_-, & \text{em } \{v_0 < 0\}. \end{cases}$$

e por (3.23), concluímos a demonstração. \square

Para obter o ponto crítico do funcional Φ , precisamos agora mostrar que ele possui uma geometria do tipo Passo da Montanha. Isso será feito na proposição (3.18), mas antes precisaremos do seguinte lema (veja [GO90]).

Lema 3.17. *Se vale a hipótese **(f)**, então **(F)** é equivalente à condição:*

(F₁) *Existem θ_{\pm} e Θ_{\pm} em $L^{\infty}(\Omega)$ com as seguintes propriedades:*

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq \theta_+(x) \leq \Theta_+(x) \leq \mu, & \text{q. t. p. em } \Omega, \\ \lambda_1 \leq \theta_-(x) \leq \Theta_-(x) \leq \nu, & \text{q. t. p. em } \Omega. \end{cases}$$

– Existem $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ e $\tilde{\omega}_3$, subconjuntos de Ω de medida positiva, tais que

$$\begin{cases} \theta_+(x) > \lambda_1, & \text{em } \tilde{\omega}_1, \\ \theta_-(x) > \lambda_1, & \text{em } \tilde{\omega}_2, \\ \Theta_+(x) < \mu \text{ e } \Theta_-(x) < \nu, & \text{em } \tilde{\omega}_3. \end{cases}$$

– Dado $\epsilon > 0$, existe $b_\epsilon \in L^2(\Omega)$, satisfazendo q. t. p. em Ω :

$$\begin{cases} (\theta_+(x) - \epsilon)\frac{s^2}{2} - b_\epsilon(x) \leq F(x, s) \leq (\Theta_+(x) + \epsilon)\frac{s^2}{2} + b_\epsilon(x), & \text{para } s \geq 0, \\ (\theta_-(x) - \epsilon)\frac{s^2}{2} - b_\epsilon(x) \leq F(x, s) \leq (\Theta_-(x) + \epsilon)\frac{s^2}{2} + b_\epsilon(x), & \text{para } s \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Faremos as demonstrações para Θ_+ e Δ_+ , sendo as outras análogas.

(F₁) e **(f)** \Rightarrow **(f)** e **(F)**.

Por **(F₁)**, temos para quase todo $x \in \Omega$,

$$\frac{2F(x, s)}{s^2} \leq (\Theta_+(x) + \epsilon) + \frac{2b_\epsilon(x)}{s^2}.$$

Portanto $\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq (\Theta_+(x) + \epsilon)$ q. t. p. em Ω . Isto é

$$\Delta_+(x) \leq \Theta_+(x) + \epsilon.$$

Como isso ocorre para qualquer $\epsilon > 0$, temos $\Delta_+(x) \leq \Theta_+(x)$ implicando que $\Delta_+(x) < \mu$ no mesmo $\tilde{\omega}_3$ onde $\Theta_+ < \nu$.

(F) e **(f)** \Rightarrow **(f)** e **(F₁)**.

Para quase todo $x \in \Omega$, temos

$$\Delta_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x),$$

onde $h_n(x) = \sup \left\{ \frac{2F(x, s)}{s^2} : s \geq n \right\}$. Como $\Delta_+ < \mu$ em ω_3 , temos $\Delta_+ \leq \mu - \eta$ em um subconjunto $\omega' \subset \omega_3$ de medida positiva, para algum $\eta > 0$. Pelo Teorema de Egorov, existe um subconjunto $A \subset \omega'$ de medida positiva e menor que $\frac{|\omega'|}{2}$, tal que $h_n \rightarrow \Delta_+$ uniformemente em $\omega' \setminus A$. Notemos aqui que $|\omega' \setminus A| > 0$ e assim, existe $n_0 > 0$, tal que

$$|h_n(x) - \Delta_+(x)| < \frac{\eta}{2} \quad \text{em } \omega' \setminus A,$$

e portanto

$$h_n(x) < \mu - \frac{\eta}{2} \quad \text{em } \omega' \setminus A.$$

Definamos

$$\Theta_+(x) = \begin{cases} \mu, & \text{em } \Omega \setminus (\omega' \setminus A), \\ \mu - \frac{\eta}{2}, & \text{em } \omega' \setminus A. \end{cases} \quad (3.41)$$

Daí, temos $\Theta_+ \in L^\infty(\Omega)$, $\Theta_+ \leq \mu$ q. t. p. em Ω e $\Theta_+ < \mu$ em um subconjunto de Ω de medida positiva. Enfim, pelo mesmo raciocínio usado para obtermos a equação (3.25), garantimos que dado $\epsilon > 0$, existe $b_\epsilon \in L^2(\Omega)$, tal que

$$F(x, s) \leq (\Theta_+(x) + \epsilon) \frac{s^2}{2} + b_\epsilon(x) \text{ q. t. p. em } \Omega.$$

□

Proposição 3.18. *Se (\mathbf{f}) e (\mathbf{F}) ocorrem com $(\mu, \nu) \in C_1$, então*

$$\Phi(u) \rightarrow -\infty \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty \text{ e } u \in \mathbb{R}\phi_1, \quad (3.42)$$

$$\Phi(u) \geq C \text{ em } M_r, \quad (3.43)$$

onde $r = \frac{\nu - \lambda_1}{\mu - \lambda_1}$ e C é uma constante. Além disso, definindo para $R > 0$

$$\Gamma_R = \{\gamma \in C([0, 1]; H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = -R\phi_1 \text{ e } \gamma(1) = R\phi_1\},$$

vale $\gamma([0, 1]) \cap M_r \neq \emptyset$, para todo $\gamma \in \Gamma_R$.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar (3.42). Seja $u = k\phi_1$, com $k \in \mathbb{R}$.

Suponhamos $k > 0$, usando (\mathbf{F}_1) , temos

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \Phi(k\phi_1) = \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 - \int_{\Omega} F(x, k\phi_1) = \\ &= \frac{\lambda_1 k^2}{2} \int_{\Omega} \phi_1^2 - \int_{\Omega} F(x, k\phi_1) \leq \frac{\lambda_1 k^2}{2} \int_{\Omega} \phi_1^2 - \frac{k^2}{2} \cdot \int_{\Omega} (\theta_+ - \epsilon) \phi_1^2 + \int_{\Omega} b_\epsilon = \\ &= \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} (\lambda_1 - \theta_+ + \epsilon) \phi_1^2 + \int_{\Omega} b_\epsilon. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sendo $\theta_+ > \lambda_1$ em $\tilde{\omega}_1$ e $\phi_1 > 0$, podemos tomar $\epsilon < \int_{\Omega} (\theta_+ - \lambda_1) \phi_1^2$, de modo que a primeira integral em (3.44) seja estritamente negativa e portanto, fazendo $k \rightarrow \infty$, temos (3.42). De modo análogo podemos mostrar o caso $k < 0$.

Vamos agora provar (3.43). Observemos que por (\mathbf{F}_1) , temos

$$\begin{aligned} 2\Phi(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega} F(x, u) = \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - 2 \left(\int_{u \geq 0} F(x, u) + \int_{u < 0} F(x, u) \right) \geq \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} (\Theta_+ + \epsilon)(u^+)^2 - \int_{\Omega} (\Theta_- + \epsilon)(u^-)^2 - 4 \int_{\Omega} b_\epsilon. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Consideremos o funcional

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} \Theta_+(u^+)^2 - \int_{\Omega} \Theta_-(u^-)^2.$$

Mostraremos que

$$\Psi(u) \geq \eta \cdot \|u\|^2, \quad \forall u \in M_r, \quad (3.46)$$

para algum $\eta > 0$. Notemos inicialmente que se $u \in M_r$, então segue do corolário 3.4 que

$$\Psi(u) \geq \int_{\Omega} (\mu - \Theta_+)(u^+)^2 + \int_{\Omega} (\nu - \Theta_-)(u^-)^2 \geq 0. \quad (3.47)$$

Suponhamos que (3.46) não ocorra. Assim existe uma sequência $\{w_n\} \subset M_r$, tal que $\|w_n\| = 1$ e $\Psi(w_n) \rightarrow 0$. A menos de subsequência, temos $w_n \rightharpoonup w \in H_0^1(\Omega)$ e $w_n \rightarrow w$ em $L^2(\Omega)$. De $\Psi(w_n) \rightarrow 0$ e $\|w_n\| = 1$, temos

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 - \int_{\Omega} \Theta_+(w_n^+)^2 - \int_{\Omega} \Theta_-(w_n^-)^2 \right),$$

implicando

$$\int_{\Omega} \Theta_+(w_n^+)^2 + \int_{\Omega} \Theta_-(w_n^-)^2 \rightarrow 1.$$

Portanto $w \neq 0$. Além disso, $w_n \rightarrow w$ em $L^2(\Omega)$, implica que

$$\int_{\Omega} w^+ \phi_1 - r \int_{\Omega} w^- \phi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} w_n^+ \phi_1 - r \int_{\Omega} w_n^- \phi_1 \right) = 0.$$

Logo $w \in M_r$. Ainda temos

$$\Psi(w) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(w_n) = 0,$$

que junto com (3.47), implica que

$$\Psi(w) = 0. \quad (3.48)$$

Assim de (3.47), temos

$$\int_{\Omega} (\mu - \Theta_+)(w^+)^2 + \int_{\Omega} (\nu - \Theta_-)(w^-)^2 = 0,$$

implicando

$$\begin{cases} \mu \int_{\Omega} (w^+)^2 = \int_{\Omega} \Theta_+(w^+)^2, \\ \nu \int_{\Omega} (w^-)^2 = \int_{\Omega} \Theta_-(w^-)^2. \end{cases} \quad (3.49)$$

Substituindo estas últimas em (3.48), temos

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 = \int_{\Omega} \mu (w^+)^2 + \int_{\Omega} \nu (w^-)^2.$$

Pelo corolário 3.4, w é solução de (2.1) e pelo lema 3.11, segue que a medida do conjunto $\{x \in \Omega : w(x) = 0\}$ é nula. Com isso, (3.49) contradiz a hipótese (\mathbf{F}_1) . Portanto ocorre (3.46) para algum $\eta > 0$. Desta forma temos de (3.45), que

$$2\Phi(u) \geq \eta \|u\|^2 - \epsilon |u|_2^2 - 4 \int_{\Omega} b_{\epsilon},$$

e pela caracterização variacional do primeiro auto-valor (1.3), segue que

$$2\Phi(u) \geq \left(\eta - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 - 4 \int_{\Omega} b_{\epsilon}.$$

Para obtermos (3.43), basta agora tomarmos ϵ de modo que $\left(\eta - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) > 0$ e $C = -4 \int_{\Omega} b_{\epsilon}$.

Falta agora mostrar a última parte da proposição. Para isto, consideremos o funcional

$$\vartheta(u) = \int_{\Omega} u^+ \phi_1 - r \int_{\Omega} u^- \phi_1.$$

Se $u = \gamma(0) = -R\phi_1$, temos $\vartheta(u) = -rR < 0$, para qualquer $\gamma \in \Gamma_R$. Por outro lado, $\vartheta(\gamma(1)) = R > 0$. Sendo γ e ϑ contínuas, temos pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $t \in [0, 1]$, tal que $\vartheta(\gamma(t)) = 0$, isto é, $\gamma(t) \in M_r$, e portanto $\gamma([0, 1]) \cap M_r \neq \emptyset$. \square

Demonstração do teorema 3.13. A equação (3.42) garante a existência de um $R > 0$, tal que $\Phi(\pm R\phi_1) < C - 1$. Esta condição junto com (3.43) e a condição (PS) do lema 3.15, permitem mostrar, via Lema de Deformação, veja [Rab86], que

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma_R} \sup_{u \in \gamma([0,1])} \Phi(u) \quad (3.50)$$

é um valor crítico de Φ , o que corresponde a uma solução de (3.21).

Assim concluímos a prova do teorema 3.13. \square

Observemos que o resultado do teorema 3.13 seria consequência dos resultados da seção 2.2 no caso particular em que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s} = a \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s} = b,$$

com

$$\lambda_1 < a < \mu \quad \text{e} \quad \lambda_1 < b < \nu.$$

Então o interessante do teorema 3.13 é o fato que as hipóteses **(f)** e **(F)** são bem mais fracas que as condições acima.

3.5 O problema de Neumann e o Princípio do Antimáximo

Nesta seção estudaremos a primeira curva não trivial do Espectro de Fučík para o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \alpha u^+(x) - \beta u^-(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.51)$$

Nestas situações, u é solução fraca se $u \in H^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} (\alpha u^+ - \beta u^-) v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

O Espectro de Fučík para este problema é definido como o conjunto $\bar{\Sigma}$ dos pontos (α, β) , tais que (3.51) admita solução fraca não trivial.

Denotaremos por μ_1 o auto-valor principal simples de (3.51) e por ψ_1 a auto-função associada a μ_1 normalizada em $L^2(\Omega)$ e positiva em Ω . Na realidade, uma vez que

$$\mu_1 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2} : u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\},$$

temos que $\mu_1 = 0$ e ψ_1 é uma constante positiva.

Para $r > 0$, definamos, como na seção 3.2,

$$\bar{M}_r = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} (u^+ \psi_1 - r u^- \psi_1) = 0 \right\},$$

$$\bar{Q}_r = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} (u^+)^2 + r (u^-)^2 \right\},$$

$$\mu_0(r) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 : u \in \bar{M}_r \cap \bar{Q}_r \right\}, \quad (3.52)$$

$$\alpha(r) = \mu_0(r) \quad \text{e} \quad \beta(r) = r \mu_0(r).$$

De modo análogo ao que foi feito na seção anterior (caso de Dirichlet), pode-se mostrar que o ínfimo μ_0 é atingido e que $(\alpha(r), \beta(r))$ como definido acima, é a primeira intersecção do Espectro $\bar{\Sigma}$ com a semi-reta de inclinação r e de origem $(0, 0)$. Além disso, μ_0 é atingido por soluções de (3.51) com coeficientes $(\alpha(r), \beta(r))$, que pertencem a \bar{Q}_r .

Desta forma, definamos o conjunto $\bar{C}_1 := \{(\alpha(r), \beta(r)) : r > 0\}$. Novamente mostra-se que \bar{C}_1 é contínua, simétrica em relação à diagonal e estritamente decrescente. Outro resultado que decorre de modo análogo é o teorema 3.8, que afirmava que $\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r) = \infty$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) = \infty$ e como consequência as retas $\{0\} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \{0\}$ são isoladas em $\bar{\Sigma}$.

A principal diferença do problema de Neumann a respeito ao de Dirichlet, surge no teorema 3.7, uma vez que em sua demonstração usamos fortemente a condição de fronteira para construirmos a função em (3.16). Vamos então estudar tais limites para o caso Neumann, onde de fato encontraremos um comportamento diferente e que depende da dimensão.

Teorema 3.19.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \beta(r) > 0, \quad \text{para } n = 1. \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \beta(r) = 0, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Demonstração. No caso $n = 1$, Ω será sempre um intervalo de modo que, a menos de reescalamiento, o Espectro de Fučík será o que calculamos na proposição 2.17, onde claramente \overline{C}_1 é a curva do item (c) com $k = 1$, e logo $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{1}{4} > 0$.

Caso $n \geq 2$. Fixemos $\epsilon > 0$. Iremos mostrar que existe $r > 0$ e $u \in \overline{M}_r$ tais que

$$\int_{\Omega} ((u^+)^2 + r(u^-)^2) \geq 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \epsilon. \quad (3.53)$$

A tese decorre de (3.53), usando o mesmo raciocínio que foi usado no teorema 3.7.

Sem perda de generalidade, assumamos $0 \in \Omega$ e fixemos $\eta > 0$, tal que $\overline{B}(0, \eta) \subset \Omega$. Tomemos $A > 0$, satisfazendo

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}(0, \eta)} A^2 \psi_1^2 \geq 1.$$

Denotemos por ω_{n-1} a medida da esfera unitária em \mathbb{R}^n . Definamos

$$u(x) = u_{\delta}(x) = \begin{cases} A\psi_1; & x \in \Omega \setminus \overline{B}(0, \eta), \\ \frac{|x|^{\delta}}{\eta^{\delta}} \cdot (A\psi_1 + 1) - 1; & x \in B(0, \eta), \end{cases}$$

onde $0 < \delta \leq 1$. Desta forma $u \in H^1(\Omega)$ e é uma função constante e positiva exceto na bola $B(0, \eta)$, na qual muda de sinal e assume o mínimo -1 .

Como u muda de sinal, $u \in \overline{M}_r$ para algum $r > 0$, além disso:

$$\int_{\Omega} (u^+)^2 + r(u^-)^2 \geq \int_{\Omega \setminus \overline{B}(0, \eta)} A^2 \psi^2 \geq 1,$$

nos dando a primeira desigualdade de (3.53). Por outro lado, temos

$$\nabla u(x) = \begin{cases} 0; & x \in \Omega \setminus \overline{B}(0, \eta), \\ \frac{|x|^{\delta-1}}{\eta^{\delta}} \cdot (A\psi_1 + 1)\delta; & x \in B(0, \eta), \end{cases}$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{B(0, \eta)} |\nabla u|^2 = \omega_{n-1} \cdot \int_0^{\eta} \frac{r^{2\delta-2}}{\eta^{2\delta}} \cdot (A\psi_1 + 1)^2 \delta^2 r^{n-1} dr,$$

e como $n + 2\delta - 2 > 0$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = (A\psi_1 + 1)^2 \cdot \delta^2 \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\eta^{2\delta}} \cdot \frac{\eta^{n+2\delta-2}}{n-2+2\delta} = (A\psi_1^2 + 1)^2 \cdot \delta^2 \cdot \omega_{n-1} \cdot \frac{\eta^{n-2}}{n+2\delta-2}.$$

Portanto, uma vez que $n \geq 2$, $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 < \epsilon$, para δ suficientemente pequeno. Assim concluímos a prova dos limites de α . Os limites em β seguem pela simetria de $\overline{\Sigma}$, como no caso do problema de Dirichlet. \square

O teorema 3.19, nos diz que as retas $\{0\} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \{0\}$ são sempre isoladas em $\overline{\Sigma}$ como para o problema de Dirichlet, mas são assíntotas para \overline{C}_1 apenas para $n \geq 2$.

A existência ou não existência de uma abertura no infinito entre a reta $\{0\} \times \mathbb{R}$ e a curva \overline{C}_1 está diretamente ligado a uma outra importante propriedade, o chamado Princípio do Antimáximo (**PAM**).

Definição 3.20. *Dado o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \mu u(x) + h(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.54)$$

Dizemos que **(PAM)** ocorre uniformemente em $(0, \delta)$, com $\delta > 0$, se para todo $\mu \in (0, \delta)$ e $h \in L^2(\Omega)$ com $h(x) \leq 0$, as soluções u de (3.54), satisfazem $u(x) \geq 0$.

A relação entre o Princípio de Antimáximo e o Espectro de Fučík é dado no seguinte teorema.

Teorema 3.21. *O **(PAM)** ocorre uniformemente em $(0, \delta)$ se, e somente se, $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) \geq \delta$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que **(PAM)** ocorra uniformemente em $(0, \delta)$. Por contradição, iremos supor que existe $(\alpha, \beta) \in \overline{C}_1$, tal que $\alpha < \delta$ e $\alpha \leq \beta$. Seja u uma solução não trivial de (3.51) com os (α, β) considerados, assim u deve mudar de sinal. Por outro lado, (3.51) pode ser escrito como

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \alpha u(x) + (\alpha - \beta)u^-(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.55)$$

onde $(\alpha - \beta)u^-(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$, pois tomamos $\alpha \leq \beta$. Agora (3.55) pode ser interpretada dizendo que u é solução de (3.54), com $\mu = \alpha < \delta$ e $h(x) = (\alpha - \beta)u^-(x) \leq 0$, assim pelo Princípio do Antimáximo, deveríamos ter $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ o que é uma contradição. Logo não existe $(\alpha, \beta) \in \overline{C}_1$ com $\alpha < \delta$. Com isto garantimos que $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) \geq \delta$.

Reciprocamente, vamos assumir verdadeiro $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) \geq \delta$ e suponhamos que para algum $\mu \in (0, \delta)$ e alguma $h \in L^2(\Omega)$ não nula, com $h(x) \leq 0$ em Ω , (3.54) possua uma solução u tal que $u(x) < 0$ em um conjunto de medida positiva contido em Ω . Assim vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \mu \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} hv, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (3.56)$$

em particular, fazendo $v = \psi_1$, temos

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi_1 = \mu \int_{\Omega} u \psi_1 + \int_{\Omega} h \psi_1$$

e portanto

$$-\mu \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} h.$$

Se $u(x) \leq 0$ em Ω , teríamos $\int_{\Omega} h \geq 0$ o que é uma contradição. Com isto, u muda de sinal. Definamos para $c, d > 0$, $v(x) = v_{c,d}(x) = cu^+(x) - du^-(x)$. Nossa estratégia é mostrar que para uma determinada escolha de c, d e r , temos

$$v \in \overline{M}_r, \quad \int_{\Omega} (v^+)^2 + r(v^-)^2 \geq 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 < \delta. \quad (3.57)$$

De fato, uma vez que v muda de sinal, temos $v \in \overline{M}_r$ para algum $r > 0$. Agora escolhemos c , tal que $c^2 \int_{\Omega} (u^+)^2 dx = 1$, implicando que

$$\int_{\Omega} (v^+)^2 + r(v^-)^2 = c^2 \int_{\Omega} (u^+)^2 + d^2 r \int_{\Omega} (u^-)^2 = 1 + d^2 r \int_{\Omega} (u^-)^2 \geq 1.$$

Temos também

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = c^2 \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 + d^2 \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2,$$

pondo $v = u^+$ em (3.56), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 &= c^2 \int_{\Omega} \mu (u^+)^2 + c^2 \int_{\Omega} h u^+ + d^2 \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \leq \\ &\leq c^2 \int_{\Omega} \mu (u^+)^2 + d^2 \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 = \mu + d^2 \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2, \end{aligned}$$

o que satisfaz a última desigualdade em (3.57) para d suficientemente pequeno, pois $\mu < \delta$.

Usando (3.57) e a caracterização variacional (3.52), obtemos $\alpha(r) = \mu_0(r) < \delta$ e portanto $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) < \delta$, o que contradiz a hipótese.

Concluimos assim que (PAM) ocorre uniformemente. □

Índice Remissivo

- aplicação
 - compacta, 3
 - completamente contínua, 3
 - positivamente a -homogênea, 13
- condição
 - de Carathéodory, 58
- cone, 12
- contração, 3
- desigualdade
 - de Hölder, 4
- domínio nodal, 57
- espaço
 - de Sobolev, 6
- espectro de Fučík, 12
- grau, 4
 - de Brouwer, 4
 - de Leray-Schauder, 5
- imersão
 - contínua, 3
 - de Sobolev, 7
- lema
 - de continuação única, 57
 - de Fatou, 4
- primeira curva não trivial do Espectro de Fučík, 49
- princípio
 - da contração de Banach, 3
- relação assimétrica de ortogonalidade, 44
- subdiferencial, 9
- subgradiente, 8
- teorema
 - da convergência dominada, 4
 - da representação de Riesz, 4
 - de Borsuk, 5

Referências Bibliográficas

- [AP72] A. Ambrosetti and G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **93** (1972), 231–246.
- [Bre83] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications].
- [CG92] Mabel Cuesta and Jean-Pierre Gossez, *A variational approach to nonresonance with respect to the Fučík spectrum*, Nonlinear Anal. **19** (1992), no. 5, 487–500.
- [CH53] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. I*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.
- [CLSW98] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyayev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 178, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Dan77] E. N. Dancer, *On the Dirichlet problem for weakly non-linear elliptic partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **76** (1976/77), no. 4, 283–300.
- [Dei85] Klaus Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [dFG94] D. G. de Figueiredo and J.-P. Gossez, *On the first curve of the Fučík spectrum of an elliptic operator*, Differential Integral Equations **7** (1994), no. 5-6, 1285–1302.
- [Eva98] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Fuč76] S. Fučík, *Boundary value problems with jumping nonlinearities*, Časopis Pěst. Mat. **101** (1976), no. 1, 69–87.

- [Fuč80] Svatopluk Fučík, *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*, Mathematics and its Applications, vol. 4, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1980, With a foreword by Jean Mawhin.
- [GL87] N. Garofalo and F.-H. Lin, *Unique continuation for elliptic operators: a geometric-variational approach*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), no. 3, 347–366.
- [GO90] Jean-Pierre Gossez and Pierpaolo Omari, *Nonresonance with respect to the Fučík spectrum for periodic solutions of second order ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **14** (1990), no. 12, 1079–1104.
- [Rab86] Paul H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.