UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Existência e regularidade de soluções de certas EDP's lineares em espaços de funções ultradiferenciáveis

João Pedro Cardoso da Silva de Vasconcellos

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

João Pedro Cardoso da Silva de Vasconcellos

Existência e regularidade de soluções de certas EDP's lineares em espaços de funções ultradiferenciáveis

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
Coorientador: Dr. Gabriel Cueva Cândido Soares de Araújo

USP – São Carlos
Junho de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

V331 Vasconcellos, João Pedro Cardoso da Silva de
Existência e regularidade de soluções de certas EDP's lineares em espaços de funções ultradiferenciáveis / João Pedro Cardoso da Silva de Vasconcellos; orientador Paulo Leandro da Silva Dattori; coorientador Gabriel Cueva Candido Soares de Araújo. -- São Carlos, 2024.
67 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Funções ultradiferenciáveis. 2. Série de Fourier. 3. Hipoelipticidade. 4. Resolubilidade . I. Dattori, Paulo Leandro da Silva, orient. II. Araújo, Gabriel Cueva Candido Soares de, coorient. III. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

João Pedro Cardoso da Silva de Vasconcellos

Existence and regularity of solutions of certain linear PDEs in spaces of ultradifferentiable functions

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
Co-advisor: Dr. Gabriel Cueva Cândido Soares de Araújo

USP – São Carlos
June 2024

Aos meus avós Ester e Oseias,
em memória de Margarida e Antônia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiro, por ter me conduzido até onde cheguei, pela provisão, sustento, auxílio e força durante todo este processo.

A minha família e, em especial, meus pais, Jefferson e Cintia, pelo apoio em todos os sentidos, pelo suporte dado e pelo carinho nos momentos difíceis.

Agradeço ao meu orientador professor Paulo por toda paciência ao ensinar e orientar, por toda sua contribuição não somente no trabalho mas também em minha vida pessoal. Também ao meu coorientador Gabriel Araújo pelo incentivo e pelo tempo de discussão que tivemos.

Aos professores que me lecionaram, à todos os funcionários do ICMC e aos colegas de laboratório pela companhia diária e momentos agradáveis.

A todos os meus amigos, sejam de Vassouras, sejam de Volta Redonda ou de São Carlos, que alegram meus dias e estiveram comigo em mais um estágio da minha vida, por todo o apoio, carinho e momentos felizes. Em especial, agradeço aos meus amigos e companheiros de mestrado Mariana e Enos e a minha namorada Milena.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Faça ou não faça. A tentativa não existe.”
(Mestre Yoda, Star Wars V : O Império Contra-Ataca)

RESUMO

VASCONCELLOS, J. P. C. S. **Existência e regularidade de soluções de certas EDP's lineares em espaços de funções ultradiferenciáveis** . 2024. 67 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Este trabalho trata da existência e regularidade de soluções globais de equações diferenciais parciais de primeira ordem, definidas no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$, no contexto de espaços de funções ultradiferenciáveis de tipo Beurling e tipo Roumieu. Apresentamos a caracterização de tais espaços via séries de Fourier. Sob certas condições, obtemos uma forma normal para as equações. Condições diofantinas surgem naturalmente neste trabalho.

Palavras-chave: Funções Ultradiferenciáveis, Séries de Fourier, Hipoeliticidade, Resolubilidade.

ABSTRACT

VASCONCELLOS, J. P. C. S. **Existence and regularity of solutions of certain linear PDEs in spaces of ultradifferentiable functions**. 2024. 67 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

We study the existence and regularity of global solutions of first order partial differential equations, defined on n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$, in context of ultradifferentiable function spaces of Beurling type and Roumieu type. We present characterization of such spaces by Fourier series. Under certain condition, we obtain a normal form of our equations. Diophantine conditions appears naturally in this work.

Another application of this theory is the study of solvability in the context Beurling and Roumieu ultradiferentiable classes to the operator mentioned above.

Keywords: Ultradifferentiable Functions, Fourier Series, Hypoellipticity, Solvability.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da existência e regularidade de soluções globais de equações diferenciais parciais de primeira ordem, definidas no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$, no contexto de espaços de funções ultradiferenciáveis de Beurling, denotado por $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, que são funções suaves tais que a norma $||\, f \,||_\lambda$ é finita, para todo λ positivo, e de espaços de funções ultradiferenciáveis de Roumieu, denotado por $\mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$, que são funções suaves tais que a norma $||\, f \,||_\lambda$ é finita para pelo menos um λ positivo, em que

$$||\, f \,||_\lambda = \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} |\, f^{(\alpha)}(x) \,| \exp\left(-\lambda\phi^*\left(\frac{|\,\alpha\,|}{\lambda}\right)\right);$$

para mais detalhes, ver seção 3.1.

Seja

$$P_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\partial_{x_j}$$

um operador diferencial parcial linear (que podemos simplificar pelo acrônimo ODPL) definido em $\mathbb{T}^n$, sendo $\lambda_j(x)$ funções reais e suaves definidas no toro (respectivamente, funções reais analíticas definidas no toro).

Neste trabalho vamos estudar equações da forma

$$P_\lambda u = f, \quad f \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n) \tag{1.1}$$

em que $\dagger$ significa $\{\omega\}$ ou (ω).

Estamos interessados na regularidade das soluções de (1.1), mais precisamente, no estudo da hipoelipticidade de P. Isso significa que se u for uma distribuição e Pu for uma função ultradiferenciável do tipo Beurling (respectivamente do tipo Roumieu) então a própria u será uma função ultradiferenciável do tipo Beurling (respectivamente do tipo Roumieu).

Também estamos interessados na existência de soluções de (1.1). Dizemos que P é globalmente resolúvel na classe de Beurling (respectivamente de Roumieu) se para toda f função ultradiferenciável de Beurling (respectivamente de Roumieu), satisfazendo certas condições de compatibilidade (ver seção 3.2), existir u uma função ultradiferenciável de classe Beurling (respectivamente de Roumieu) tal que $Pu = f$ no toro.

O trabalho está dividido da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos resultados preliminares importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Na seção 2.1, introduzimos as funções peso e apresentamos suas propriedades que serão importantes tanto para definir as funções ultradiferenciáveis quanto para garantir propriedades sobre as próprias funções ultradiferenciáveis. Esta seção está baseada em (ALBANESE, 2020), (RAINER; SCHINDL, 2015), (SCHINDL, 2021) e (BRAUN; MEISE; TAYLOR, 1990). Na seção 2.2, apresentamos a definição de distribuições, que dão a primeira noção das funções ultradiferenciáveis, uma vez que toda função ultradiferenciável é uma distribuição. Além disso, enunciamos o teorema de Paley-Wiener na versão de distribuições. Essa seção está baseada em (HORMANDER, 2003). Por fim, enunciamos teoremas que nos auxiliarão em momentos cruciais da dissertação na seção 2.3.

No capítulo 3 apresentamos os principais objetos de estudo da dissertação. Na seção 3.1 definimos as funções ultradifenciáveis via normas e vemos quais propriedades esse novo espaço de funções possui, muitos deles diretamente ligadas as funções peso definidas no capítulo anterior, além de classificar funções ultradiferenciáveis por sua série de Fourier. Essa seção foi baseada em (ALBANESE; JORNET, 2014), (ALBANESE, 2020) e (ALBANESE; JORNET; OLIARO, 2010). A seção 3.2 nos direciona à resolubilidade de uma classe de campos vetoriais, a saber, a resolubilidade de campos cujo transposto é hipoelíptico. Essa seção está baseada em (ALBANESE, 2020) e (WENYI; CHI, 2007). Por fim, na seção 3.3 apresentamos a normalização desses operadores a fim de transformá-los em campos com coeficientes constantes através de um difeomorfismo. Essa seção foi baseada em (ALBANESE, 2020) e (WENYI; CHI, 2007).

Finalmente, no capítulo 4 apresentamos resultados de hipoelipticidades do operador P_λ os quais relacionam diretamente a hipoelipticidade com uma condição diofantina. Para escrever este capítulo, nos baseamos nos artigos (ALBANESE, 2020) e (WENYI; CHI, 2007).

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo, iremos expor definições nas quais a teoria de funções ultradiferenciáveis está fundamentada. Além disso, serão exibido alguns resultados importantes de teoria qualitativa de equações diferenciais para garantir resultados futuros e, por fim, alguns outros conceitos que serão importantes no decorrer da dissertação.

2.1 Funções peso

Definição 2.1.1. Uma ***função peso*** é uma função contínua crescente $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ com as seguintes propriedades:

1. Existe $L \geq 0$ tal que $\omega(2t) \leq L(\omega(t)+1)$ para todo $t \geq 0$.
2. $\omega(t) = O(t)$ quando $t \to \infty$.
3. $\ln(t) = o(\omega(t))$ quando $t \to \infty$.
4. $\phi : t \mapsto \omega(e^t)$ é uma função convexa.

Definição 2.1.2.

1. Uma função peso ω é chamada de ***quase analítica*** se
$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt = \infty.$$
Se a integral for finita, então ω é chamada de ***não quase analítica***.
2. Duas funções peso ω e $\tilde{\omega}$ são ***equivalentes*** se cada uma delas é dominada pela outra, ou seja, se existem constantes C_ω e $C_{\tilde{\omega}}$ tais que $\tilde{\omega}(t) \leq C_\omega \omega(t)$ e $\omega(t) \leq C_{\tilde{\omega}} \tilde{\omega}(t)$.

A seguir, mostraremos alguns exemplos de função peso via Definição 2.1.1

Exemplo 2.1.3. $\omega(t) = t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$

1. De fato, note que para $L = 2$, temos que

$$\omega(2t) = 2^{\alpha}t^{\alpha} \leq 2t^{\alpha} < 2t^{\alpha} + 2 = 2(t^{\alpha} + 1) = 2(\omega(t) + 1),$$

logo, vale a propriedade 1.

2. Por conta do limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha}}{t} = \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-1} = 0,$$

segue a propriedade 2.

3. Calculando o limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^{\alpha}} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha t^{\alpha}} = 0,$$

conclui-se a propriedade 3.

4. Por fim, perceba que a função $\phi(t) = \omega(e^t) = e^{\alpha t}$ é uma função C^{∞} e que

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\alpha t} = \alpha^2 e^{\alpha t} > 0, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

portanto, ϕ é uma função convexa, provando, enfim, que t^{α} é uma função peso.

Além disso, é fácil ver que

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}dt = \int_1^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{t^2}dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{2-\alpha}}dt = \frac{1}{1-\alpha},$$

mostrando que esta função peso é não quase analítica.

Exemplo 2.1.4. $\omega(t) = t$.

1. De fato, note que para $L = 2$, temos que

$$\omega(2t) = 2t < 2t + 2 = 2(t+1) = 2(\omega(t) + 1),$$

logo, vale a propriedade 1.

2. Por conta do limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{t} = \lim_{t\to\infty} 1 = 1,$$

segue a propriedade 2.

3. Calculando o limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln (t)}{t} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0,$$

conclui-se a propriedade 3.

4. Por fim, perceba que a função $\phi(t) = \omega(e^t) = e^t$ é uma função C^∞ e que

$$\frac{d^2}{dt^2}e^t = e^t > 0, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

portanto, ϕ é uma função convexa, provando, enfim, que t é uma função peso.

Pela definição 2.1.2, a função peso $\omega(t) = t$ é quase analítica uma vez que

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt = \int_1^\infty \frac{t}{t^2}dt = \int_1^\infty \frac{1}{t}dt = \infty.$$

Exemplo 2.1.5. $\omega(t) = (\ln(1+t))^\beta, \beta > 1.$

1. Observemos a função $\dfrac{(\ln(2t+1))^\beta}{1+(\ln(1+t))^\beta}$. Calcularemos o seu limite no infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(2t+1))^\beta}{1+(\ln(1+t))^\beta} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(2t+1))^{\beta-1}2(t+1)}{(\ln(1+t))^{\beta-1}(2t+1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{2(\ln(2t+1))^{\beta-1}}{(\ln(t+1))^{\beta-1}} \frac{t+1}{2t+1}.$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(2t+1))^{\beta-1}}{(\ln(t+1))^{\beta-1}} = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(2t+1)}{\ln(t+1)}\right)^{\beta-1} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \left(\lim_{t\to\infty} \frac{2t+2}{2t+1}\right)^{\beta-1} = 1^{\beta-1} = 1 < 2$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2t+2}{2t+1} = 1 < 2$$

portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(2t+1))^\beta}{1+(\ln(1+t))^\beta} < 2.$$

Portanto, para algum $t_0 \in [0,\infty)$, obtemos $\dfrac{(\ln(2t+1))^\beta}{1+(\ln(1+t))^\beta} < 2$, para todo $t \in [t_0,\infty)$.

Por outro lado, como o conjunto $[0,t_0]$ é compacto, pelo Teorema do Valor Máximo, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{(\ln(2t+1))^\beta}{1+(\ln(1+t))^\beta} < C$, para todo $t \in [0,t_0]$.

Tomando, enfim, $L = max\{2,C\}$, segue que $\dfrac{(\ln(2t+1))^\beta}{1+(\ln(1+t))^\beta} < L$, ou reformulando, $(\ln(2t+1))^\beta \leq L(1+(\ln(1+t))^\beta)$, como queríamos $(\omega(2t) \leq L(\omega(t)+1))$.

2. A propriedade 2 vale por conta do limite a seguir :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(1+t))^\beta}{t} = \lim_{u\to\infty} \frac{(\ln\,(u))^\beta}{u-1} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{u\to\infty} \frac{\beta(\ln\,(u))^{\beta-1}}{u}.$$

Aplicando L'Hospital até o passo em que o expoente do $\ln(u)$, digamos α, seja menor que 1, e sendo C a constante multiplicativa decorrente da derivação, obtemos:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\beta(\ln\,(u))^{\beta-1}}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{C\,(\ln(u))^\alpha}{u} = 0.$$

3. A propriedade 3 vale pelo limite abaixo :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)}{(\ln(1+t))^{\beta}} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{t\to\infty} \frac{1+t}{t\beta(\ln(1+t))^{\beta-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1+t}{t} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\beta(\ln(1+t))^{\beta-1}} = 0.$$

4. Por fim, para demonstrar a convexidade da função $\phi(t) = \omega(e^t)$, analisaremos o sinal da sua segunda derivada. Isso é possível uma vez que ϕ é uma função C^{∞}. Sendo assim, segue que:

$$\frac{d^2}{dt^2}((\ln(1+e^t))^{\beta}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta(\ln(1+e^t))^{\beta-1}e^t}{1+e^t}\right)$$

$$= \frac{\beta(\beta-1)(\ln(1+e^t))^{\beta-2}e^{2t} + \beta(\ln(1+e^t))^{\beta-1}e^t}{(1+e^t)^2} > 0, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Por esta condição, a função $\phi(t)$ é convexa, o que prova que a função $\ln(1+t)^{\beta}$ é uma função peso.

Por fim, calcularemos a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln(1+t))^{\beta}}{t^2} dt$$

para determinar se a função peso é quase analítica ou não quase analítica. Para isso, note que

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln(1+t))^{\beta}}{t^2} dt = \int_1^{\infty} \frac{(\ln(1+t))^{\beta}}{t^{\alpha}} \frac{1}{t^{2-\alpha}} dt$$

para $0 < \alpha < 1$. Se provarmos que $\dfrac{(\ln(1+t))^{\beta}}{t^{\alpha}} < C$, para algum C, então conseguiremos provar a limitação da integral, uma vez que $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{t^{2-\alpha}} dt$ é finita.

Primeiro, perceba que $\dfrac{(\ln(1+t))^{\beta}}{t^{\alpha}} = \left(\dfrac{\ln(1+t)}{t^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta}$. Então,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{\alpha}{\beta}}} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{t\to\infty} \frac{(1+t)^{-1}}{\frac{\alpha}{\beta} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{1+t} \frac{1}{t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}} = 0.$$

Portanto, existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que $\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right) \leq C_{\alpha,\beta}$, daí, $\dfrac{(\ln(1+t))^{\beta}}{t^{\alpha}} \leq C_{\alpha,\beta}^{\beta}$, e seguindo dessa desigualdade,

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln(1+t))^{\beta}}{t^2} dt < \infty$$

e $\omega(t) = (\ln(1+t))^{\beta}$ é uma função peso não quase analítica.

Uma desigualdade que será muito importante na construção das nossas funções ultradiferenciáveis futuramente será chamada de propriedade (α_0), que é descrita da seguinte maneira:

$$\exists\, D > 0,\ \exists\, t_0 > 0,\ \forall\, \lambda \geq 1,\ \forall\, t \geq t_0 : \omega(\lambda t) \leq \lambda D \omega(t). \tag{α_0}$$

Para mais detalhes, ver (SCHINDL, 2021).

Exemplo 2.1.6. As funções pesos que exemplificamos acima cumprem a propriedade (α_0).

1. Para $\omega(t) = t^\alpha$, para $0 < \alpha \leq 1$, note que

$$\omega(\lambda t) = \lambda^\alpha t^\alpha \leq \lambda t^\alpha = \lambda\, \omega(t).$$

Logo,

$$\exists\, D = 1 > 0, \exists\, t_0 = 0 : \forall\, \lambda \geq 1 \forall\, t \geq 0 \Rightarrow \omega(\lambda t) \leq \lambda\, \omega(t).$$

2. Primeiro, perceba que para λ qualquer

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+\lambda t)}{\lambda^{\frac{1}{\beta}} \ln(1+t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \frac{1+t}{1+\lambda t} \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \frac{\lambda}{\lambda} \leq 1.$$

Além disso, sabemos que, para $t = 1$, existe $C > 0$ independente de λ tal que

$$\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda^{\frac{1}{\beta}} \ln(2)} \leq C.$$

Por fim, perceba que se t_0 é um ponto crítico de $\dfrac{\ln(1+\lambda t)}{\ln(1+t)}$, tomando $f(t) = \ln(1+\lambda t)$ e $g(t) = \ln(1+t)$ teremos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0) = 0.$$

Mas como $g(t) \neq 0$, para todo $t > 1$, então $f'g(t_0) = fg'(t_0)$. Substituindo esta igualdade, obtemos

$$\frac{\lambda}{1+\lambda t_0} \ln(1+t_0) = \frac{1}{1+t_0} \ln(1+\lambda t_0) \Rightarrow \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \frac{\ln(1+\lambda t_0)}{\ln(1+t_0)} = \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \frac{1+t_0}{1+\lambda t_0} = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \frac{1+t_0}{\frac{1}{\lambda}+t_0}.$$

Daí

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \frac{\ln(1+\lambda t_0)}{\ln(1+t_0)} \leq \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \frac{1+t_0}{t_0} = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} (\frac{1}{t_0}+1) \leq \frac{2}{\beta^{\frac{1}{\beta}}} < 2.$$

Enfim, temos então que

$$\exists\, D = 2^\beta,\ \exists\, t_0 = 1\ :\ \forall\, \lambda \geq 1\, \forall\, t \geq 1\ \Rightarrow \omega(\lambda t) = (\ln(1+\lambda t))^\beta \leq D\lambda (\ln(1+t))^\beta.$$

Seja ω uma função peso e defina

$$\tilde{\omega} : [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ por } \tilde{\omega}(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t \leq 1 \\ \omega(t) - \omega(1), \ t \geq 1. \end{cases}$$

Nosso interesse é mostrar que esta nova função satisfaz a Definição 2.1.1 e é, portanto, uma função peso. De fato:

1. Como ω é função peso, existe $L \geq 0$ tal que $\omega(2t) \leq L(\omega(t)+1)$, para todo $t \geq 0$. Para provarmos a propriedade 1 para $\tilde{\omega}$, separaremos o valor de t em casos:

   a) Se $2t \leq 1$, então $\tilde{\omega}(2t) = \tilde{\omega}(t) = 0$ então, para o mesmo L, vale

   $$\tilde{\omega}(2t) = 0 \leq L(\tilde{\omega}(t)+1) = L.$$

   b) Se $t \geq 1$, então,

   $$\begin{aligned} \tilde{\omega}(2t) = \omega(2t) - \omega(1) &\leq L(\omega(t)+1) - \omega(1) \\ &= L(\omega(t) - \omega(1) + \omega(1) + 1) - \omega(1) \\ &= L(\omega(t) - \omega(1) + 1) + L\omega(1) - \omega(1) \\ &= L(\tilde{\omega}(t)+1) + (L-1)\omega(1). \end{aligned}$$

   Seja $L' = max\{L, (L-1)\omega(1)\}$, assim, continuando a conta, teremos :

   $$\begin{aligned} \tilde{\omega}(2t) &\leq L(\tilde{\omega}(t)+1) + (L-1)\omega(1) \\ &\leq L'(\tilde{\omega}(t)+1) + L' \\ &\leq 2L'(\tilde{\omega}(t)+1). \end{aligned}$$

   Portanto, para $2L' > 0, \tilde{\omega}(2t) \leq 2L'(\tilde{\omega}(t)+1)$.

   c) Por fim, se $t \in (\frac{1}{2}, 1)$, então

   $$\tilde{\omega}(2t) = \omega(2t) - \omega(1) \leq C' = C'(\tilde{\omega}(t)+1),$$

   com $C' = \omega(2) - \omega(1)$.

   Dessa forma, tomando $C = \max\{L, 2L', C'\} > 0$, $\tilde{\omega}(2t) \leq C(\tilde{\omega}(t)+1)$.

2. Como $\omega(t) = O(t)$, então

   $$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{\omega}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t) - \omega(1)}{t} \leq A.$$

   Portanto, $\tilde{\omega}(t) = O(t)$.

3. Como ln $(t) = o(\omega(t))$, para t suficientemente grande, ln $(t) + \omega(1) < \omega(t)$ e
$$\omega(1) < \frac{1}{2}\omega(t) \Rightarrow \frac{\ln(t)}{\omega(t)-\omega(1)} < \frac{2\ln(t)}{\omega(t)},$$
logo
$$\frac{2\ln(t)}{\omega(t)} > \frac{\ln(t)}{\omega(t)-\omega(1)} > \frac{\ln(t)}{\omega(t)}.$$
Pelo Teorema do Confronto, segue que ln $(t) = o(\tilde{\omega}(t))$.

4. Como $\phi(t) = \omega(e^t)$ é convexa, então
$$\tilde{\phi}(t) = \tilde{\omega}(e^t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0) \\ \phi(t) - \omega(1), t \in [0, \infty). \end{cases}$$
Temos, então, que $\tilde{\phi}(t)$ é uma função convexa.

Logo, existem funções peso que se anulam em $[0,1]$ e mais do que isso, conhecendo uma função peso, conseguimos construir uma nova função peso que se anula em $[0,1]$. Mais a frente no trabalho, pontuaremos a importância deste fato. A partir daqui, então, consideraremos apenas funções dessa maneira. A partir desta nova ω, definimos a função ***conjugada de Young*** $\phi^* : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira :
$$\phi^*(s) = \sup\{st - \phi(t), t \geq 0\}.$$
Pela maneira que construímos nossa função peso, ϕ^* possui somente valores não negativos, é convexa e $\frac{\phi^*(s)}{s}$ é crescente e tende ao infinito quando $s \to \infty$ e $\phi^{**} = \phi$, como podemos ver bem detalhado em (BRAUN; MEISE; TAYLOR, 1990). Por fim, podemos ainda estender as funções peso para o corpo dos complexos. Para uma função peso ω é possível definir $w : \mathbb{C} \to [0,\infty)$ por $w(z) = \omega(|\, z\,|)$ e, sem perda de generalidade, iremos denotá-la também por ω.

2.2 Distribuições e transformada de Fourier

Definição 2.2.1. O toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ é definido pelo quociente $\mathbb{T}^n = \dfrac{\mathbb{R}^n}{(2\pi)\mathbb{Z}^n}$.

Definição 2.2.2. Uma ***distribuição*** em $\mathbb{T}^n$ é um funcional linear $u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ tal que existem $c > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que
$$|\, u(\phi)\,| \leq c \sum_{|\alpha|<k} \sup |\, \partial^\alpha \phi\,|, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$
Denotaremos o conjunto de todas as distribuições sobre $\mathbb{T}^n$ por $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$.

Definição 2.2.3. Seja $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. Definimos a ***transformada de Fourier*** da distribuição f por
$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle f_x, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n,$$
sendo $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Paley-Wiener-Schwartz)**.** Se $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ então existem $C > 0$ e $N \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$| \hat{f}(\xi) | \leq C(1+ | \xi |)^N, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Ademais, $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se,

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, \, \exists C_k > 0 \, : | \hat{f}(\xi) | \leq C_k(1+ | \xi |)^{-k}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Para a demonstração do Teorema, ver (VICTOR, 2021) e capítulo 2 de (PETRONILHO, 2003).

2.3 Teoremas auxiliares

Teorema 2.3.1 (Teorema do gráfico fechado)**.** Suponha que:

1. X e Y são espaços de Fréchet.
2. $\Lambda : X \to Y$ é linear.
3. $G = \{(x, \Lambda x : x \in X)\}$ é fechado em $X \times Y$.

Então Λ é contínua.

Teorema 2.3.2 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** Seja $\Lambda : X \to Y$ um operador linear contínuo entre dois espaços de Fréchet X e Y. Se $\Lambda(X) = Y$, então Y é aberta e, portanto, tem inversa $\Lambda^{-1} : Y \to X$ contínua.

Teorema 2.3.3 (Teorema de Extensão de Hahn-Banach)**.** Sejam X um espaço de Fréchet e Z um subespaço vetorial de X munido da topologia de subespaço. Se $F : Z \to \mathbb{C}$ é linear e contínuo existe $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}|_Z = f$.

As demonstrações dos três últimos teoremas podem ser encontradas em (RUDIN, 1991).

CAPÍTULO

3

FUNÇÕES ULTRADIFERENCIÁVEIS E CAMPOS VETORIAIS REAIS

Neste capítulo, introduziremos as funções que utilizaremos nesta dissertação, assim como suas caracterizações via séries de Fourier. Além disso, abordaremos os chamados operadores hipoelípticos e também sua caracterização via série de Fourier para, então, abordarmos como iremos solucionar nosso problema principal.

3.1 Funções ultradiferenciáveis

Definição 3.1.1. Seja ω uma função peso. Definimos os conjuntos

$$\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) : \| f \|_\lambda < \infty, \forall\, \lambda > 0\}$$

e

$$\mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n) = \{f \in C^\infty : \exists\, \lambda > 0 : \| f \|_\lambda < \infty\},$$

em que

$$\| f \|_\lambda = \sup_{x \in \mathbb{T}^n} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} | f^{(\alpha)}(x) | \exp\left(-\lambda \phi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right).$$

Os elementos de $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ (respectivamente, $\mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$) são chamados de funções ω-ultradiferenciáveis do tipo de ***Beurling*** (respectivamente, do tipo ***Roumieu***) em $\mathbb{T}^n$. Escreveremos $\dagger$ para denotar (ω) ou $\{\omega\}$ quando não for necessário distinguir entre os dois casos.

Lema 3.1.2. Dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se $\| f \|_\lambda < \infty$ para algum $\lambda > 0$ então $\| f \|_\mu \leq \| f \|_\lambda$ para todo $\mu \leq \lambda$.

Demonstração. Primeiro, lembre que a função $\frac{\phi^*}{t}$ é crescente, assim tome $s = \frac{|\alpha|}{t}$ e observemos a função

$$|\alpha| \frac{1}{s} \phi^*(s).$$

Se $s' > s$, então pelo crescimento citado, temos

$$|\,\alpha\,|\,\frac{1}{s'}\phi^*(s') \geq |\,\alpha\,|\,\frac{1}{s}\phi^*(s),$$

daí, substituindo s' por $\frac{|\alpha|}{t}$ e s por $\frac{|\alpha|}{t'}$, temos que se

$$t \geq t' \Rightarrow -t'\phi^*\left(\frac{|\,\alpha\,|}{t'}\right) \leq -t\phi^*\left(\frac{|\,\alpha\,|}{t}\right) \Rightarrow \exp\left(-t'\phi^*\left(\frac{|\,\alpha\,|}{t'}\right)\right) \leq \exp\left(-t\phi^*\left(\frac{|\,\alpha\,|}{t}\right)\right).$$

Por conta disso, para a $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada por hipótese, existe $\lambda > 0$ tal que

$$||\,f\,||_\lambda < \infty \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{T}^n}\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}|\,\partial^\alpha f(x)\,|\exp\left(-\lambda\phi^*\left(\frac{|\,\alpha\,|}{\lambda}\right)\right) < \infty.$$

Daí, caso $\mu > 0$ seja tal que $\mu < \lambda$, como vimos, $\exp(-\mu\phi^*(\frac{|\alpha|}{\mu})) \leq \exp(-\lambda\phi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda}))$, daí, segue que $||\,f\,||_\mu < \infty$, para $\mu < \lambda$. □

É válido pontuar que caso ω seja uma função peso quase analítica, os elementos de $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ ou de $\mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ com suporte em algum subconjunto próprio fechado de $\mathbb{T}^n$ são triviais (ALBANESE, 2020). Logo, neste trabalho, utilizaremos funções peso não quase analíticas.

Vejamos, agora, as caracterizações das funções ultradiferenciáveis do tipo de Beurling e do tipo Roumieu.

Teorema 3.1.3. Seja ω uma função peso não nula em $[0,1]$ e seja $\tilde{\omega}$ sua função peso associada que se anula em $[0,1]$. Então $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) = \mathscr{E}_{(\tilde{\omega})}(\mathbb{T}^n)$ e $\mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n) = \mathscr{E}_{\{\tilde{\omega}\}}(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. Ambas as demonstrações são análogas e, por conta disso, mostraremos somente para o caso Beurling. Além disso, utilizaremos a notação $||\,f\,||_{\lambda,(\omega)}$ para nos referirmos a norma $||\,f\,||_\lambda$ quando $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. Se $\tilde{\omega}$ é definida da forma

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} 0, t \in [0,1] \\ \omega(t) - \omega(1), t > 1 \end{cases}$$

então temos

$$\tilde{\phi}(t) = \tilde{\omega}(e^t) = \phi(t) - \omega(1)$$

e, além disso, temos também que

$$\tilde{\phi}^*(s) = \sup\{st - \tilde{\phi}(t)\} = \sup\{st - \phi(t) + \omega(1)\} = \phi^*(s) + \omega(1) > 0.$$

Tomando $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, fixado $\lambda > 0$, temos que $||\,f\,||_\lambda < \infty$ ou seja,

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^n}\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}|\,f^{(\alpha)}(x)\,|\exp\left(-\lambda\phi^*(\frac{|\,\alpha\,|}{\lambda})\right) < \infty.$$

Mas como $\tilde{\phi}^*(s) = \phi^*(s) + \omega(1)$, então

$$\begin{aligned} || f ||_{\lambda,(\omega)} &= \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} | f^{(\alpha)}(x) | \exp\left(-\lambda\tilde{\phi}^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right) - \lambda\omega(1)\right) \\ &= \exp(-\lambda\omega(1)) \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} | f^{(\alpha)}(x) | \exp\left(-\lambda\tilde{\phi}^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

ou seja, $|| f ||_{\lambda,(\tilde{\omega})} < \infty$. Portanto, $f \in \mathscr{E}_{(\tilde{\omega})}(\mathbb{T}^n)$.

Por outro lado, se $f \in \mathscr{E}_{(\tilde{\omega})}(\mathbb{T}^n)$, fixado $\lambda > 0$, temos que $|| f ||_{\lambda} < \infty$ ou seja,

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} | f^{(\alpha)}(x) | \exp\left(-\lambda\tilde{\phi}^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})\right) < \infty.$$

Mas como $\tilde{\phi}^*(s) = \phi^*(s) + \omega(1)$, então

$$\begin{aligned} || f ||_{\lambda,(\tilde{\omega})} &= \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} | f^{(\alpha)}(x) | \exp\left(-\lambda\phi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right) + \lambda\omega(1)\right) \\ &= \exp(\lambda\omega(1)) \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} | f^{(\alpha)}(x) | \exp\left(-\lambda\phi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

ou seja, $|| f ||_{\lambda,(\omega)} < \infty$. Portanto, $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. $\square$

Portanto, não importa qual função peso pegamos, sempre geraremos a mesma classe de funções. Vejamos mais características sobre as classes de funções ultradiferenciáveis.

Definição 3.1.4. Uma aplicação suave $F = (F_1,\ldots,F_n) : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é dita uma $\mathscr{E}_{(\omega)}$**-aplicação** (respectivamente, $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$**-aplicação**) se $F_1,\ldots,F_n \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ (respectivamente $F_1,\ldots,F_n \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$) ($F_1,\ldots,F_n$ aqui retratadas como funções com domínio $\mathbb{T}^n$ e contradomínio $\mathbb{T}$.)

Teorema 3.1.5. Se ω satisfaz $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. ω satisfaz (α_0).
2. $\mathscr{E}_{(\omega)}$ é **fechado em relação à composição**: se $F : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é uma $\mathscr{E}_{(\omega)}$-aplicação então $f \circ F \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ para toda $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.
3. $\mathscr{E}_{(\omega)}$ é **fechado em relação à inversão**: se $F : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é difeomorfismo e $\mathscr{E}_{(\omega)}$-aplicação então $F^{-1} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é uma $\mathscr{E}_{(\omega)}$-aplicação.
4. Para toda $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}$ que não se anula em nenhum ponto vale que $\frac{1}{f} \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 3.1.6. Se ω é uma função peso então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. ω satisfaz (α_0).
2. $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$ é **fechado em relação à composição**: se $F : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é uma $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$-aplicação então $f \circ F \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ para toda $f \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$.
3. $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$ é **fechado em relação à inversão**: se $F : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é difeomorfismo e $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$-aplicação então $F^{-1} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é uma $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$-aplicação.
4. Para toda $f \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}$ que não se anula em nenhum ponto vale que $\frac{1}{f} \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$.

Os dois Teoremas estão enunciados e demonstrados em (RAINER; SCHINDL, 2015).

Proposição 3.1.7. Dado $k \in \mathbb{N}$, para $t > 1$, valem as seguintes desigualdades:

1. $$e^{-\frac{1}{k}\omega(t)} \le \inf_{N\in\mathbb{N}_0} t^{-N} e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)} \le e^{-\frac{1}{k}\omega(t)+\ln(t)}. \tag{3.1}$$
2. $$e^{-k\omega(t)} \le \inf_{N\in\mathbb{N}_0} t^{-N} e^{k\phi^*(\frac{N}{k})} \le e^{-k\omega(t)+\ln(t)}. \tag{3.2}$$

Demonstração. Ambas desigualdades são demonstradas de maneira similar então demonstraremos apenas a desigualdade (3.1). Primeiro, note que como $\phi(t) = \omega(e^t)$, então realizando a substituição $t = \ln(x)$, obtemos que $\omega(x) = \phi(\ln(x))$, daí, como $\phi = (\phi^*)^*$ temos então, por definição da função ϕ^* que

$$\phi(s) = (\phi^*)^*(s) = \sup_{t\ge 0}\{st - \phi^*(t)\} = \sup_{t>0}\{st - \phi^*(t)\}.$$

Aliado a isso, obtemos então que $\omega(x) = \phi(\ln(x)) = \sup_{t>0}\{\ln(x)t - \phi^*(t)\}$, ou, apenas trocando a variável, $\omega(t) = \sup_{s>0}\{\ln(t)s - \phi^*(s)\}$.

Agora, note que

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \sup_{s>0}\{\ln(t)s - \phi^*(s)\}\\ &\ge \sup_{N\in\mathbb{N}_0}\{\ln(t)Nk - \phi^*(Nk)\}\\ &= k\sup_{N\in\mathbb{N}_0}\{N\ln(t) - \frac{1}{k}\phi^*(Nk)\}\end{aligned}$$

ou ainda, $\frac{1}{k}\omega(t) \ge \sup_{N\in\mathbb{N}_0}\{N\ln(t) - \frac{1}{k}\phi^*(Nk)\}$, o que nos dá que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\omega(t) \ge N\ln(t) - \frac{1}{k}\phi^*(Nk), \forall\, N \in \mathbb{N}_0\\ \Rightarrow & -\frac{1}{k}\omega(t) \le -N\ln(t) + \frac{1}{k}\phi^*(Nk)\\ \Rightarrow & \, e^{-\frac{1}{k}\omega(t)} \le t^{-N} e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)}, \forall\, N \in \mathbb{N}_0,\end{aligned}$$

de onde pode-se concluir, então, que $e^{-\frac{1}{k}\omega(t)} \leq \inf_{N\in\mathbb{N}_0}\{t^{-N}e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)}\}$.

Perceba que, para $s \in \mathbb{R}$ tal que $Nk \leq s \leq (N+1)k$, para $k \in \mathbb{N}$ fixado,

$$\phi^*(Nk) \leq \phi^*(s) \Longleftrightarrow -\phi^*(Nk) \geq -\phi^*(s) \Longleftrightarrow s\ln(t) - \phi^*(Nk) \geq s\ln(t) - \phi^*(s)$$

de onde se pode concluir que

$$[(N+1)k]\ln(t) - \phi^*(Nk) \geq s\ln(t) - \phi^*(s), \quad \forall\, s \in [Nk,(N+1)k].$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \sup_{s>0}\{s\ln(t) - \phi^*(s)\}\\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}_0}\{\sup_{Nk\leq s\leq(N+1)k}\{s\ln(t) - \phi^*(s)\}\}\\
&\leq \sup_{N\in\mathbb{N}_0}\{(N+1)k\ln(t) - \phi^*(NK)\}\\
&\leq k\ln(t) + \sup_{N\in\mathbb{N}_0}\{Nk\ln(t) - \phi^*(Nk)\}\\
&= k(\ln(t) + \sup_{N\in\mathbb{N}_0}\{N\ln(t) - \frac{1}{k}\phi^*(Nk)\}).
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos, obtemos a desigualdade $\frac{\omega(t)}{k} - \ln(t) \leq N\ln(t) - \frac{1}{k}\phi^*(Nk)$, ou ainda,

$$e^{-\frac{1}{k}\omega(t)+\ln(t)} \geq t^{-N}e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)}, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{k}\omega(t)+\ln(t)} \geq \inf_{N\in\mathbb{N}_0}\{t^{-N}e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)}\},$$

demonstrando o que queríamos. □

Proposição 3.1.8. Dado $k \in \mathbb{N}$, afirmamos que para $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$ existe $t_0 > 0$ tal que

$$-\frac{1}{k}\omega(t) + \ln(t) \leq -\varepsilon\omega(t), \quad t \geq t_0.$$

Demonstração. De fato, temos que $\frac{\ln(t)}{\omega(t)} \leq \frac{1}{k} - \varepsilon$ para $t > t_0$. Por conta disso, $\ln(t) \leq (\frac{1}{k} - \varepsilon)\omega(t)$. Concluimos então

$$-\frac{1}{k}\omega(t) + \ln(t) \leq \frac{1}{k}\omega(t) + (\frac{1}{k} - \varepsilon)\omega(t) = -\varepsilon\omega(t),$$

como queríamos. □

Proposição 3.1.9. Aos moldes da Proposição 3.1.7, a desigualdade da Proposição 3.1.8 também é valida para o seguinte caso: para $0 < m < k$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$-k\omega(t) + \ln(t) \leq -m\omega(t), \quad t \geq t_0.$$

Demonstração. Novamente, como $\ln(t) = o(\omega(t))$, para $m < k$, segue $\frac{\ln(t)}{\omega(t)} \leq k - m$ para $t \geq t_0$, ou ainda, $\ln(t) \leq (k-m)\omega(t)$. Substituindo, obtemos o que queríamos $-k\omega(t) + \ln(t) \leq -m\omega(t)$. □

Proposição 3.1.10. Para $x \in \mathbb{Z}^n$, $M \in \mathbb{N}$, vale a seguinte desigualdade :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n : |x| \leq M} 1 \leq (n+1)2^{2n}M^n.$$

Demonstração. Cada entrada do vetor $x \in \mathbb{Z}^n$ deve ter valor absoluto menor que M, e, como temos $2M+1$ possibilidades para isso, segue que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n : |x| \leq M} 1 \leq (2M+1)^n$$

e, como vale a propriedade do binômio de Newton, $\binom{n}{a} \leq 2^n$, para todo $a < n$, segue que

$$(2M+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2M)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} 2^n (2M)^n = (n+1)2^{2n}M^n,$$

concluindo o que queríamos demonstrar. □

Lema 3.1.11. Dados $k, s \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade :

$$\frac{1}{k}\phi^*(Nk) + Ns \leq \frac{1}{kL^s}\left(\phi^*(NkL^s) + \sum_{j=1}^{s} L^j\right)$$

para algum $L > 1$.

Demonstração. Para provarmos o que queremos, primeiro mostraremos uma desigualdade envolvendo a função ϕ^*. É facil ver que

$$\begin{aligned}
\phi^*(t) = \sup_{s \geq 0}\{st - \phi(s)\} &= \sup_{\sigma+1 \geq 0}\{(\sigma+1)t - \phi(\sigma+1)\} \\
&= \sup_{\sigma \geq -1}\{(\sigma+1)t - \phi(\sigma+1)\} \\
&\geq \sup_{\sigma \geq 0}\{(\sigma+1)t - \phi(\sigma+1)\} \\
&= \sup_{\sigma \geq 0}\{\sigma t + t - \phi(\sigma+1)\}.
\end{aligned}$$

Uma afirmação que provaremos mais a frente é:

Afirmação: $\phi(\sigma+1) \leq L(1+\phi(\sigma))$ para algum $L \geq 1$.

Pela afirmação, $-\phi(\sigma+1) \geq -L - L\phi(\sigma)$ implica que

$$\begin{aligned}
\phi^*(t) &\geq \sup_{\sigma \geq 0}\{\sigma t + t - L - L\phi(\sigma)\} \\
&= t - L + \sup_{\sigma \geq 0}\{\sigma t - L\phi(\sigma)\} \\
&= t - L + L\phi^*(\frac{t}{L}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi^*(t) - t \geq L\phi^*(\frac{t}{L}) - L, \quad \forall t \geq 0.$$

Para demonstrar a afirmação, nós lembramos que $\phi(t) = \omega(e^t)$ e $\omega(2t) \leq K(1 + \omega(t))$ (propriedade 1 da Definição 2.1.1). Daí, obtemos que

$$\phi(1+t) = \omega(e^{1+t}) = \omega(ee^t) \leq \omega(3e^t)$$

e que

$$\begin{aligned}
\phi(1+t) \leq \omega(3e^t) \underbrace{\leq}_{\star} & K(1 + \omega(2e^t) + \omega(e^t)) \\
& \leq K(1 + K + K\omega(e^t) + \omega(e^t)) \\
& = K + K^2 + K^2\phi(t) + K\phi(t) \\
& = \underbrace{(K + K^2)}_{=L}(1 + \phi(t)).
\end{aligned}$$

onde, em $\star$, usamos o Lema 1.2 de (BRAUN; MEISE; TAYLOR, 1990) que diz : Se ω for uma função peso, temos, para, $x, y \in [0, \infty)$, $\omega(x+y) \leq K(1 + \omega(x) + \omega(y))$. Neste caso em específico, estamos representando o L da propriedade 1 da definição 2.1.1 como K para não confundir com o L já definido na afirmação.

A demonstração do Lema segue da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\phi^*(Nk) + Ns = \frac{1}{L}\frac{L}{k}\phi^*(\frac{NkL}{L}) + NkL\frac{s}{Lk} = & \frac{1}{Lk}(L\phi^*(\frac{NkL}{L}) + NkLs) \\
& = \frac{1}{Lk}\left(\underbrace{L\phi^*(\frac{NkL}{L}) + NkL}_{\phi^*(NkL)+L} + \underbrace{NkL + \ldots + NkL}_{(s-1)vezes}\right) \\
& \leq \frac{1}{Lk}\left(\underbrace{\phi^*(NkL) + NkL}_{\leq \frac{1}{L}(\phi^*(NkL^2)+L)} + \underbrace{NkL + \ldots + NkL}_{(s-2)vezes} + L\right) \\
& \leq \frac{1}{L^2k}\left(\phi^*(NkL^2) + NkL^2 + \underbrace{NkL^2 + \ldots + NkL^2}_{(s-3)vezes} + L^2 + L\right).
\end{aligned}$$

Por recursão, obtemos por fim que

$$\frac{1}{k}\phi^*(Nk) + Ns \leq \frac{1}{kL^s}(\phi^*(NkL^s) + \sum_{j=1}^{s} L^j)$$

como queríamos. $\square$

Proposição 3.1.12. Seja ω uma função peso e $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. Então, temos os seguintes resultados:

1. Suponha que $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$. Então $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $C_k > 0$ tal que
$$| \hat{u}(\xi) | \leq C_k e^{-k\omega(\xi)} \tag{3.3}$$
para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

2. $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, existem $\varepsilon > 0, C > 0$ tal que
$$| \hat{u}(\xi) | \leq Ce^{-\varepsilon\omega(\xi)} \tag{3.4}$$
para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Para a demonstração dessa Proposição, iremos denotar $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \quad (\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n})$ para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Demonstração. $(1) \Rightarrow)$ Seja $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. Uma vez que a transformada de Fourier de u é dada por $\hat{u}(\xi) = \langle u, (2\pi)^{-n} e^{-ix\xi} \rangle$, então para $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, temos

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha \hat{u}(\xi) &= \xi^\alpha \langle u, (2\pi)^{-n} e^{-i\langle x,\xi \rangle} \rangle \\
&= \langle u, (2\pi)^{-n} \xi^\alpha e^{-i\langle x,\xi \rangle} \rangle \\
&= \langle u, (2\pi)^{-n} D^\alpha (e^{-i\langle x,\xi \rangle}) \rangle \\
&= \langle (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u, (2\pi)^{-n} e^{-i\langle x,\xi \rangle} \rangle.
\end{aligned}$$

Como $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$| \xi^\alpha \hat{u}(\xi) | \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} | D^\alpha u e^{-ix\xi} | \, dx \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^n} | \partial^\alpha u(x) | \leq \| u \|_\lambda \, e^{k\phi^*\left(\frac{|\alpha|}{k}\right)}$$

ou seja,
$$| \xi^\alpha \hat{u}(\xi) | \leq \| u \|_\lambda \, e^{k\phi^*\left(\frac{|\alpha|}{k}\right)}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \xi \in \mathbb{Z}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}_+ \tag{3.5}$$
e isso vale para toda $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.

Sejam $N \in \mathbb{N}_0$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e tome $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $| \xi_i | = \max_{1 \leq j \leq n} | \xi_j |$. Colocando $\alpha = Ne_i$, com e_i sendo o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos que

$$| \xi |^N \leq n^{N/2} \max_{1 \leq j \leq n} | \xi_j |^N = n^{N/2} | \xi_i |^N = n^{N/2} | \xi^\alpha | .$$

Utilizando isso com a inequação (3.5), obtemos que

$$\begin{aligned} |\, \xi \,|^N |\, \hat{u}(\xi) \,| &\leq n^{\frac{N}{2}} \,|\, \xi^\alpha \,||\, \hat{u}(\xi) \,| \\ &\leq (n^{\frac{1}{2}})^N \,||\, u \,||_\lambda \; e^{k\phi^*(\frac{N}{k})} \\ &\leq ||\, u \,||_\lambda \; (n^{\frac{1}{2}})^N e^{k\phi^*(\frac{N}{k})} \\ &= CA^N e^{k\phi^*(\frac{N}{k})} \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ com $C = ||\, u \,||_\lambda$ e $A = n^{\frac{1}{2}}$ e para o caso $\xi \neq 0$,

$$|\, \hat{u}(\xi) \,| \leq CA^n \,|\, \xi \,|^{-N} \; e^{k\phi^*(\frac{N}{k})}.$$

Para algum $s \in \mathbb{N}$, vale que $A \leq e^s$, então obtemos a nova desigualdade

$$|\, \hat{u}(\xi) \,| \leq Ce^{Ns + k\phi^*(\frac{N}{k})} \,|\, \xi \,|^{-N}.$$

Pelo Lema 3.1.11 (substituindo $\frac{1}{k}$ por k), obtemos

$$|\, \hat{u}(\xi) \,| \leq Ce^{kL^s(\phi^*(\frac{N}{kL^s} + \sum_{j=1}^{s} L^j))} \,|\, \xi \,|^{-N} \leq C_k e^{m\phi^*(\frac{N}{m})} \,|\, \xi \,|^{-N},$$

para $C_k = Ce^{kL^s \sum_{j=1}^{s} L^s}$ e m o menor número inteiro tal que $m > kL^s$.

Pela desigualdade (3.2), temos que $|\, \hat{u}(\xi) \,| \leq C_k e^{-k\omega(|\xi|) + \ln(|\xi|)}$ e pela Proposição 3.1.9, $|\, \hat{u}(\xi) \,| \leq B_k e^{-k\omega(|\xi|)}$, como queríamos concluir.

$\Leftarrow$)Da mesma forma, seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ que satisfaz a condição (3.3). Pela desigualdade (3.1) e pela Proposição 3.1.9, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que $|\, \xi \,|^J |\, \hat{u}(\xi) \,| \leq C_k e^{k\phi^*(\frac{J}{k})}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $J \in \mathbb{N}_0$. Por conta desse decaimento, então, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ obtemos que a série de Fourier $D^\alpha u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) e^{ix\xi}$ é absolutamente convergente. Por outro lado, também, como u é distribuição, existe $C > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que $|\, \hat{u}(\xi) \,| \leq C(1 + |\, \xi \,|)^M$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Fixado $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, tome $J = |\, \alpha \,| + n + M$ e observe que

$$|\, D^\alpha u(x) \,| \leq \sum_{|\xi| \leq A(k)} |\, \xi \,|^{|\alpha|} |\, \hat{u}(\xi) \,| + \sum_{|\xi| > A(k)} |\, \xi \,|^{|\alpha|} |\, \hat{u}(\xi) \,| =: S_1 + S_2, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

com $A(x) = e^{\frac{2x}{J}\phi^*(\frac{J}{2k})}$. Em relação a S_1 e a S_2, verifica-se que

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{|\xi| \leq A(k)} A(k \,|\, \alpha \,|) C(1 + |\, \xi \,|)^M \\ &\leq C2^N A(kN) A(|\, k\alpha \,|)(1 + A(k))^M \\ &\leq (n+1) 2^{M+2n} C(A(k))^{n+|\alpha|+M} \leq n 2^{M+2n} CA(kJ) \end{aligned}$$

e

$$S_2 = \sum_{|\xi|>A(k)} |\xi|^{J-n-M} |\hat{u}(\xi)| \leq C_k A(kJ) \sum_{|\xi|>A(k)} |\xi|^{-n-M},$$

com $J = |\alpha| + n + M$ e $\sum_{|\xi|\leq A(k)} \leq (n+1)2^{2n}A(kn)$ (proposição 3.1.10).

Explicaremos melhor cada transição de contas. Lidando primeiro com S_1, a primeira linha se origina da condição de $|\xi| \leq A(k)$ e da desigualdade $|\hat{u}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^M$. A segunda linha é obtida substituindo o valor de $|\xi|$ novamente e utilizando a desigualdade citada acima. A terceira linha é obtida majorando os elementos do binômio de Newton por $A(k)^M$ e usando que $\binom{M}{N} \leq 2^M$, para todo $N < M$. Quanto a S_2, basta usar a desigualdade da hipótese inicial.

Sendo assim, por (3.6), deduzimos

$$|D^\alpha u(x)| \leq (n+1)2^{M+2n}CA(kJ) + C_k cA(kJ) \leq C_k' A(kJ), x \in \mathbb{R}^n \tag{3.7}$$

onde $C_k' = (n+1)2^{2n+M}C + C_k c > 0$ depende unicamente de k, da dimensão de N e de u (aqui, $c = \sum_{|\xi|\neq 0} |\xi|^{-n-M} < \infty$).

Além disso, a convexidade de ϕ^* nos fornece

$$2k\phi^*\left(\frac{J}{2k}\right) \leq k\phi^*(|\alpha|/k) + k\phi^*((n+M)/k). \tag{3.8}$$

Combinando (3.7) e (3.8), obtemos para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C_k'' = C_k' e^{k\phi^*((n+M)/k)} > 0$ tal que $|D^\alpha u(x)| \leq C_k'' e^{k\phi^*(|\alpha|/k)}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in \mathbb{R}^n$.

Isso significa que $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.

(2) $\Rightarrow$) Seja $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$. Uma vez que, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, a transformada de Fourier de u é dada por $\hat{u}(\xi) = \langle u, (2\pi)^{-n} e^{-ix\xi}\rangle$, então para $\xi \in \mathbb{Z}^n$, temos, como acima,

$$\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \langle (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u, (2\pi)^{-n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle.$$

Como $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ existe $\lambda > 0$ de forma que $\lambda = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ existe C_λ tal que

$$|\xi^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |D^\alpha u e^{ix\xi}| dx \leq \max_{x\in\mathbb{T}^n} |\partial^\alpha u(x)| \leq \|u\|_\lambda e^{\frac{1}{k}\phi^*(|\alpha|k)}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \xi \in \mathbb{Z}^n \tag{3.9}$$

e isso vale para toda $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}$. Agora, sejam $N \in \mathbb{N}_0$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e tome $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|\xi_i| = \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j|$. Colocando $\alpha = Ne_i$, com e_i sendo o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos que

$$|\xi|^N \leq n^{N/2} \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j|^N = n^{N/2} |\xi_i|^N = n^{N/2} |\xi^\alpha|.$$

Utilizando isso com a inequação (3.9), obtemos que, existe $\lambda > 0$, C_λ tal que

$$\begin{aligned} |\xi|^N |\hat{u}(\xi)| &\leq n^{N/2} |\xi^\alpha| |\hat{u}(\xi)| \\ &\leq (n^{1/2})^N \| u \|_\lambda \, e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)} \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $N \in \mathbb{N}_0$.

Tomando $(n^{\frac{1}{2}}) = A$ e $\| u \|_\lambda = C$, obtemos que $|\xi|^N |\hat{u}(\xi)| \leq A^N C e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)}$, ou ainda, que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq A^N C |\xi|^{-N} e^{\frac{1}{k}\phi^*(Nk)}.$$

Uma vez que, para algum $s \in \mathbb{N}$ vale que $A \geq e^s$, temos então a nova desigualdade

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C e^{sN + \frac{1}{k}\phi^*(Nk)} |\xi|^{-N}.$$

Pelo Lema 3.1.11, obtemos

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C e^{\frac{1}{kL^s}\phi^*(NkL^s) + \sum_{j=1}^{s} L^j} |\xi|^{-N} \leq C' e^{\frac{1}{m}\phi^*(Nm)} |\xi|^{-N}$$

onde $C' = C e^{\frac{1}{kL^s}\sum_{j=1}^{s}}$ e m é o menor número interio que é maior que kL^s.

Pela Proposição 3.1.8, para algum $t_0 > 0$, para $|\xi| \geq \max\{1, t_0\}$, segue que $|\hat{u}(\xi)| \leq Ce^{-\varepsilon\omega(|\xi|)}$, para $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$.

E para $|\xi| \leq \max\{1, t_0\}$, temos que $|\hat{u}(\xi)| \leq Ce^{\frac{1}{k}\phi^*(0)} \leq Be^{-\varepsilon\omega(|\xi|)}$. Daí, para $D = \max\{C, B\}$, vale que $\hat{u}(\xi) \leq De^{-\varepsilon\omega(|\xi|)}$, como queríamos.

$\Leftarrow$)Da mesma forma, seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ que satisfaz a condição (3.4). Pela afirmação que provamos no começo referente a desigualdade (3.1) e pela Proposição 3.1.8, existem $k \in \mathbb{N}$, e $C' > 0$ tal que $|\xi|^J |\hat{u}(\xi)| \leq C' e^{\frac{1}{k}\phi^*(Jk)}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $J \in \mathbb{N}_0$. Por conta desse decaimento, então, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ obtemos que a série de Fourier $D^\alpha u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) e^{ix\xi}$ é absolutamente convergente. Por outro lado, como u é uma distribuição, existe $C > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que $|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Para o mesmo $k \in \mathbb{N}$ acima e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, tome $J = |\alpha| + n + M$ e observe que

$$|D^\alpha u(x)| \leq \sum_{|\xi| \leq A(k)} |\xi|^{|\alpha|} |\hat{u}(\xi)| + \sum_{|\xi| > A(k)} |\xi|^{|\alpha|} |\hat{u}(\xi)| =: S_1 + S_2, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.10}$$

com $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $A(x) = e^{\frac{1}{2xJ}\phi^*(2kJ)}$. A partir de S_1 e S_2, deduzimos

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{|\xi| \leq A(k)} A(k|\alpha|^{-1}) C (1 + |\xi|)^M \\ &\leq C 2^n A(kn^{-1}) A(k|\alpha|^{-1}) (1 + A(k))^M \\ &\leq (n+1) 2^{M+2n} C (A(k))^{n+|\alpha|+M} \leq n 2^{M+2n} C A(kJ^{-1}) \end{aligned}$$

e

$$S_2 = \sum_{|\xi|>A(k)} |\xi|^{J-n-M} | \hat{u}(\xi) | \leq C' A(kJ) \sum_{|\xi|>A(k)} |\xi|^{-n-M},$$

com $J = | \alpha | + N + M$ e $\sum_{|\xi| \leq A(k)} \leq (n+1)2^{2n} A(kn)$ (Proposição 3.1.10).

Explicaremos melhor cada transição de contas. Lidando primeiro com S_1, a primeira linha se origina da condição de $| \xi | \leq A(k)$ e da desigualdade $| \hat{u}(\xi) | \leq C(1 + | \xi |)^M$. A segunda linha é obtida substituindo o valor de $| \xi |$ novamente e utilizando a desigualdade citada acima. A terceira linha é obtida majorando os elementos do binômio de Newton por $A(k)^M$ e usando que $\binom{M}{N} \leq 2^M$ para todo $N < M$. Quanto a S_2, basta usar a desigualdade da hipótese inicial.

Sendo assim, por (3.10), deduzimos

$$| D^\alpha u(x) | \leq (n+1)2^{M+2n} C A(kJ^{-1}) + C' c A(kJ^{-1}) \leq \tilde{C} A(kJ^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.11}$$

onde $\tilde{C} = (n+1)2^{2n+M} C + C_k c > 0$ depende unicamente da dimensão de n e de u(aqui, $c = \sum_{|\zeta| \neq 0} | \xi |^{-n-M} < \infty$).

Além disso, a convexidade de ϕ^* nos fornece

$$\frac{1}{2k} \phi^*(J2k) \leq \frac{1}{k} \phi^*(| \alpha | k) + \frac{1}{k} \phi^*((n+M)k). \tag{3.12}$$

Combinando (3.11) e (3.12), obtemos para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $\tilde{C}' = \tilde{C} e^{\frac{1}{k}\phi^*((n+M)k)} > 0$ tal que $| D^\alpha u(x) | \leq \tilde{C}' e^{\frac{1}{k}\phi^*(|\alpha|k)}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in \mathbb{R}^n$.

Isso significa que $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$.

□

Exemplo 3.1.13. Seja $\omega(t) = t^{\frac{1}{s}}$ uma função peso que, como vimos, satisfaz a propriedade (α_0). Para esta função peso, $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ se, e só se, $| \hat{u}(\xi) | \leq C e^{-\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}}$ e, pelo Lema 3.1.6 de (PETRONILHO, 2003), $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 3.1.14. O exemplo a seguir será o único momento do trabalho em que utilizaremos uma função peso quase-analítica. O fato da função peso ser quase-analítica não interfere nos resultados demonstrados até aqui.

Exemplo 3.1.15. Seja $\omega(t) = t$ uma função peso que, como vimos, satisfaz a propriedade (α_0). Para esta função peso, $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ se, e só se, $| \hat{u}(\xi) | \leq C e^{-\varepsilon |\xi|}$ e, pelo Lema 3.1.6 de (PETRONILHO, 2003), u é real-analítica.

3.2 Resolubilidade de campos vetoriais cujo transposto é hipoelíptico

Finalmente estamos prontos para começar a abordar a regularidade de soluções de campos vetoriais, que é um dos principais temas desta dissertação. Seja ω uma função peso não quase analítica que satisfaça a propriedade (α_0). Além disso, quando formos tratar das classes de funções ultradiferenciáveis do tipo Beurling, iremos pedir também que $\omega(t) = o(t)$ quando t tender ao infinito.

Seja

$$P_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\partial_{x_j}$$

um campo vetorial no toro $\mathbb{T}^n$ com $\lambda_j \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ para $j = 1, \ldots, n$ onde $\lambda_j(x) \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Dado o operador P_λ, facilmente podemos obter seu operador transposto, que é da forma

$${}^tP_\lambda u = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(\lambda_j u)$$

para $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. Nesta seção, queremos obter hipóteses para determinar quando é possível obter a solução de um sistema $Pu = f$. Para isso, começaremos observando as hipóteses necessárias para encontrar a solução do problema homogêneo ${}^tP_\lambda u = 0$. Uma leitura criteriosa da demonstração do Teorema 2.1 de (WENYI; CHI, 2007) nos fornece o seguinte resultado:

Lema 3.2.1. Se ${}^tP_\lambda$ tem a seguinte propriedade:

$$\forall \mu \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n),\ {}^tP_\lambda \mu = 0 \Rightarrow \mu \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \tag{3.13}$$

então existe $w \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ positiva tal que ${}^tP_\lambda w = 0$. Ademais, qualquer outra solução desta equação homogênea é um múltiplo de w.

Sabendo disso, vamos a versão para funções ultradiferenciáveis. Precisaremos, para isso, introduzir uma definição de hipoelipticidade para nossos operadores.

Definição 3.2.2. Seja $P_\lambda = P_\lambda(x,D) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\partial_{x_j} + \lambda_0(x)$ um ODPL de ordem 1 com coeficientes $\{\lambda_j\}_{0\le j\le n} \subset \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ ($\{\lambda_j\}_{1\le j\le n} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ respectivamente). O operador P_λ é chamado de ***globalmente †-hipoelíptico*** em $\mathbb{T}^n$ (***globalmente C^∞-hipoelíptico*** em $\mathbb{T}^n$, respectivamente) se as condições $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ e $P_\lambda u \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ ($u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ e $P_\lambda u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, respectivamente) implicam que $u \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ ($u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ respectivamente).

Teorema 3.2.3. Sejam ω como já definida e suponha o operador ${}^tP_\lambda$ globalmente †-hipoelíptico. Então, a equação

$${}^tP_\lambda w = 0 \tag{3.14}$$

possui solução positiva em $\mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$. Além disso, qualquer outra solução desta equação homogênea é um múltiplo de w.

Demonstração. Uma vez que ${}^tP_\lambda$ é globalmente †-hipoelíptico, então se $\mu \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ é tal que ${}^tP_\lambda \mu = 0$ então $\mu \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ que é suave. Ou seja, vale a propriedade (3.13). Logo, pelo Lema 3.2.1 existe $w \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ positiva tal que ${}^tP_\lambda w = 0$ portanto, $w \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ é positiva. □

Proposição 3.2.4. Se ${}^tP_\lambda$ é um operador globalmente †-hipoelíptico, então P_λ também é globalmente †-hipoelíptico.

Demonstração. Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ uma distribuição tal que $P_\lambda u \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ e w solução positiva fornecida pelo Teorema 3.2.3. Então podemos calcular ${}^tP_\lambda(wu)$ da seguinte forma :

$$\begin{aligned}{}^tP_\lambda(wu) &= -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(\lambda_j(x)wu)\\ &= -u\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(\lambda_j(x)w) - w\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\partial_{x_j}u\\ &= -wP_\lambda u\end{aligned}$$

com $-wP_\lambda u \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$. Por hipótese, ${}^tP_\lambda$ é um operador globalmente †-hipoelíptico e $w \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ satisfaz $w > 0$ em $\mathbb{T}^n$, daí, $wu = g \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$, ou ainda, $u = g/w \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ (Teoremas 3.1.5 e 3.1.6), tornando, assim, o operador P_λ globalmente †-hipoelíptico. □

Seja o conjunto

$$E_\dagger(P_\lambda) = \{v \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n) : \int_{\mathbb{T}^n} v(x)w(x)dx = 0 \text{ para todo } w \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n) \text{ com } {}^tP_\lambda w = 0\}.$$

As equações que definem o conjunto são chamas condições necessárias de compatibilidade em vista a Proposição 3.2.6.

Definição 3.2.5. Seja $P_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\partial_{x_j}$ um ODPL com os coeficientes $\lambda_j \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ ($\lambda_j \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ respectivamente). O operador P_λ é dito ser **globalmente †-resolúvel** se para todo $f \in E_\dagger(P_\lambda)$ existe $u \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ tal que $P_\lambda u = f$ em $\mathbb{T}^n$.

Podemos, agora, formular as hipóteses necessárias para obtermos a resolubilidade do operador P_λ a partir do Teorema 3.2.3.

Proposição 3.2.6. Seja $f \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ tal que existe $u \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ satisfazendo $P_\lambda u = f$. Então $f \in E_\dagger(P_\lambda)$.

Demonstração. Se $w \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ é tal que ${}^tP_\lambda w = 0$ então

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)w(x)dx = \langle f, w\rangle = \langle P_\lambda u, w\rangle = \langle u, {}^tP_\lambda w\rangle = 0.$$

Logo $f \in E_\dagger(P_\lambda)$ □

Para cada $\lambda > 0$, relembrando que

$$\|\, f\,\|_\lambda = \sup_{x\in\mathbb{T}^n}\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0} |\,\partial^\alpha f(x)\,|\, e^{-\lambda\phi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{T}^n),$$

sejam os espaços

$$\mathscr{E}_{\omega,\lambda}(\mathbb{T}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^n); || f ||_\lambda < \infty\}$$

e note que

$$\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) = \bigcap_{\lambda>0} \mathscr{E}_{\omega,\lambda}(\mathbb{T}^n).$$

Proposição 3.2.7. $(\mathscr{E}_{\omega,\lambda}(\mathbb{T}^n), || \cdot ||_\lambda)$ é espaço de Banach, $\forall\, \lambda > 0$.

Não faremos a demonstração desta proposição aqui. Para espaços que são construídos via sequencias peso, veja Proposição 2.4.3 de (VICTOR, 2021).

Relembremos o Lema 3.1.2 que nos diz que, para f suave, $|| f ||_\lambda \leq || f ||_{\lambda_+}$ se $\lambda_+ \geq \lambda$. Em particular, $|| f ||_{\lambda_+} < \infty$ implica que $|| f ||_\lambda < \infty$ o que nos dá que $\mathscr{E}_{\omega,\lambda_+}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}_{\omega,\lambda}(\mathbb{T}^n)$ com inclusão contínua, para todo $\lambda_+ \geq \lambda$.

Coloquemos em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ a topologia dada pela família de normas $\{|| \cdot ||_k; k \in \mathbb{Z}_+\}$, dessa maneira, uma sequência $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ converge para $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, $f_\nu \to f$ em $\mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n)$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, isto é, $\lim_{\nu\to\infty} || f_\nu - f ||_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Assim, conseguimos ter a seguinte cadeia de inclusões :

$$\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \subset \ldots \subset \mathscr{E}_{\omega,k+1}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n) \subset \ldots \subset \mathscr{E}_{\omega,1}(\mathbb{T}^n).$$

Teorema 3.2.8. $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Fréchet: toda sequência de Cauchy em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é convergente.

Demonstração. Dada uma sequência $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, dizer que ela é uma sequência de Cauchy é dizer que $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em todos os espaços $\mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n), k \in \mathbb{Z}_+$. Como, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, o espaço é completo, existe $f^{(k)} \in \mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n)$ tal que $f_\nu \to f^{(k)}$ em $\mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n)$. Porém perceba que

$$k_+ > k \Rightarrow \mathscr{E}_{\omega,k_+}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n) \text{ continuamente } \Rightarrow f_\nu \to f^{(k_+)} \text{ em } \mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n)$$

de maneira que, pela unicidade do limite, $f^{(k_+)} = f^{(k)}$. Isso implica que

$$f^{(1)} = f^{(k)}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow f^{(1)} \in \mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n)\ \forall\, k \Rightarrow f^{(1)} \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$$

e, por conta disso

$$f_\nu \to f^{(k)} = f^{(1)} \text{ em } \mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n)\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow f_\nu \to f^{(1)} \text{ em } \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n).$$

□

Proposição 3.2.9. Um operador diferencial

$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, a_\alpha \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n),$$

define uma aplicação contínua $P : \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. Se $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, utilizando que $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é fechado em relação as operações de multiplicação e derivação, obtemos que

$$D^\alpha f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow a_\alpha D^\alpha f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow Pf \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n).$$

Como dito na hipótese, P é linear. Além disso, provaremos que seu gráfico é fechado.

Proposição 3.2.10. O gráfico de P é fechado.

Demonstração. Seja $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ tal que $(f_\nu, Pf_\nu) \to (f,g)$ em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ para algum $f, g \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. Basta provar que $g = Pf$. Por propriedade de topologia produto, $f_\nu \to f$ e $Pf_\nu \to g$ em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.

Lema 3.2.11. $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ continuamente.

Demonstração. Basta ver que, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^n} | \partial^\alpha f(x) | \leq || f ||_\lambda \, e^{\lambda\phi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})}, \quad \forall f \in \mathscr{E}_{\omega,\lambda}(\mathbb{T}^n).$$

Se $f_\nu \to f$ em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ então

$$|| f_\nu - f ||_k \to 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \sup_{\mathbb{T}^n} | \partial^\alpha f_\nu - \partial^\alpha f | \leq || f_\nu - f ||_k \, e^{k\phi^*(\frac{|\alpha|}{k})} \to 0$$

para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ fixados.

Isso nos dá que

$$\sup_{\mathbb{T}^n} | \partial^\alpha f_\nu - \partial^\alpha f | \underbrace{\to}_{\nu\to\infty} 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \Rightarrow f_\nu \to f$$

em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. □

De volta a demonstração da proposição, segue do Lema anterior, e pelo fato de operadores diferenciais são contínuos em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ que

$$f_\nu \to f \text{ em } \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow f_\nu \to f \text{ em } C^\infty(\mathbb{T}^n) \Rightarrow Pf_\nu \to Pf \text{ em } C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Pelo Lema anterior novamente,

$$Pf_\nu \to g \text{ em } \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow Pf_\nu \to g \text{ em } C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Como $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é Hausdorff, uma vez que é metrizável, segue que $g = Pf$ como gostaríamos. □

Tendo provado que $P : \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ tem gráfico fechado, sua continuidade segue do Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 2.3.1). □

Proposição 3.2.12. Seja ${}^tP_\lambda$ o operador transposto de P_λ e suponha que ele seja globalmente (ω)-hipoelíptico. Para cada $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$\| \psi \|_{k_0} \leq C(\| \psi \|_{L^2(\mathbb{T}^n)} + \| {}^tP_\lambda \psi \|_k), \forall \psi \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n). \qquad (\star)$$

Demonstração. Como $L^2(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Banach e $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Fréchet, temos que $L^2(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Fréchet com a topologia produto, a qual é dada pela família de seminormas

$$||| (f,g) |||_k = \| f \|_{L^2} + \| g \|_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \ (f,g) \in L^2(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n).$$

Considere a aplicação linear $\gamma : \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ definida por $\gamma(\psi) = (\psi, {}^tP_\lambda \psi)$ que é contínua uma vez que cada função entrada é contínua. De fato, já provamos que ${}^tP_\lambda : \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é contínua. A primeira componente é contínua pois

$$\begin{aligned} \psi \in \mathscr{E}_{\omega,\lambda}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow \| \psi \|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} &= \int_{\mathbb{T}^n} | \psi(x) |^2 \, dx \\ &\leq (2\pi)^n \left(\sup_{x \in \mathbb{T}^n} | \psi(x) | \right)^2 \\ &\leq (2\pi)^n (\| \psi \|_\lambda \, e^{\lambda \phi^*(0)})^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \| \psi \|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\lambda \phi^*(0)} \| \psi \|_\lambda, \quad \forall \, \psi \in \mathscr{E}_{\omega,\lambda}(\mathbb{T}^n).$$

Segue facilmente, por exemplo, que $\psi_\nu \to \psi$ em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ implica $\psi_\nu \to \psi$ em $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Afirmação: A imagem de γ é fechada em $L^2(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.

Com efeito, se $\{\psi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é tal que $\gamma(\psi_\nu) \to (\psi, \phi)$ em $L^2(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, então

$$\begin{cases} \psi_\nu \to \psi \text{ em } L^2(\mathbb{T}^n) \\ {}^tP_\lambda \psi_\nu \to \phi \text{ em } \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n). \end{cases}$$

Perceba que o primeiro caso nos dá que $\psi_\nu \overbrace{\to}^{(i)} \psi$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \Rightarrow {}^tP_\lambda \psi_\nu \overbrace{\to}^{(ii)} {}^tP_\lambda \psi$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, onde usamos que:

1. $L^2(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ continuamente e

2. ${}^tP_\lambda : \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ é contínua.

O segundo caso diz para nós que ${}^tP_\lambda \psi_\nu \to \phi$ em $L^2(\mathbb{T}^n) \overbrace{\Rightarrow}^{(i)} {}^tP_\lambda \psi_\nu \to \phi$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ onde, na primeira implicação, usamos novamente que $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \subset L^2(\mathbb{T}^n)$ continuamente.

Comparando as duas conclusões, temos ${}^tP_\lambda\,\psi = \phi \in \mathscr{E}_{(\omega)}$. Uma vez que, por hipótese, ${}^tP_\lambda$ é globalmente (ω)-hipoelíptico, obtemos que $\psi \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ e, com isso, que $(\psi,\phi) = (\psi,\, {}^tP_\lambda\,\psi) = \gamma(\psi)$ pertence a imagem de γ, provando a afirmação.

Assim, $\Gamma = \{\gamma(\psi); \psi \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)\}$ é subespaço fechado de $L^2(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, que é um espaço de Fréchet, segue que Γ é um espaço de Fréchet com a topologia de subespaço, a qual é definida pela restrição de seminormas $(f,g) \in \Gamma \mapsto ||| \ (f,g) \ |||_k, k \in \mathbb{Z}_+$.

A aplicação $\gamma : \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \Gamma$ é então linear, contínua e bijetora (uma vez que a injetividade vem imediatamente da definição de γ) segue do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 2.3.2) que $\gamma^{-1} : \Gamma \to \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é contínua.

Em termos das seminormas que definem os espaços envolvidos, esta continuidade expressa-se da seguinte maneira : para todo $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|| \ \gamma^{-1}(f,g) \ ||_{k_0} \leq C \ ||| \ (f,g) \ |||_k, \quad \forall \ (f,g) \in \Gamma.$$

Como

$$(f,g) \in \Gamma \Longleftrightarrow (f,g) = (\psi, \underbrace{{}^tP_\lambda\,\psi)}_{=\gamma(\psi)}$$

para $\psi = \gamma^{-1}(f,g) \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, temos

$$|| \ \psi \ ||_{k_0} \leq C \ || \ (\psi,\, {}^tP_\lambda\,\psi) \ ||_k = C(|| \ \psi \ ||_{L^2(\mathbb{T}^n)} + || \ {}^tP_\lambda\,\psi \ ||_k), \forall \psi \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n).$$

□

Corolário 3.2.13. Suponha ${}^tP_\lambda$ globalmente (ω)-hipoelíptico. Para cada $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ existem $C' > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|| \ \psi \ ||_{k_0} \leq C' \ || \ {}^tP_\lambda\,\psi \ ||_k, \forall \psi \in E_{(\omega)}(P_\lambda). \tag{$\star\star$}$$

Demonstração. Pela proposição anterior, dado $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que $(\star)$ vale. Suponha por absurdo que $(\star\star)$ não vale para nenhuma escolha de C'. Então para cada $\nu \in \mathbb{N}$ existe $\psi_\nu \in E_{(\omega)}(P_\lambda)$ tal que

$$|| \ \psi_\nu \ ||_{k_0} > \nu \ || \ {}^tP_\lambda\,\psi_\nu \ ||_k, \forall \ \nu \in \mathbb{N}.$$

Em particular, $\psi_\nu \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $|| \ \psi_\nu \ ||_{k_0} = 1$ (basta substituir ψ_ν por seu vetor unitário) para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Segue que $|| \ {}^tP_\lambda\,\psi_\nu \ ||_k \to 0$ quando $\nu \to \infty$, além disso, $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é sequência limitada em $\mathscr{E}_{\omega,k_0}(\mathbb{T}^n)$. Escolhendo $0 < k_0^- < k_0$, lembremos que a inclusão $\mathscr{E}_{\omega,k_0}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}_{\omega,k_0^-}(\mathbb{T}^n)$ é compacta (Proposição 2.4.4 de (VICTOR, 2021)), donde segue que existe uma subsequência $\{\psi_{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge em $\mathscr{E}_{\omega,k_0}(\mathbb{T}^n)$, digamos, para $\psi^0 \in \mathscr{E}_{\omega,k_0^-}(\mathbb{T}^n)$.

Como a incusão $\mathscr{E}_{\omega,k_0^-}(\mathbb{T}^n) \subset L^2(\mathbb{T}^n)$ é contínua (fato já demonstrado) temos que $\psi_{\nu_j} \to \psi^0$ em $L^2(\mathbb{T}^n)$ também. Em particular:

$$\int_{\mathbb{T}^n} \psi_{\nu_j}(x)\phi(x)dx \underbrace{\to}_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \psi^0(x)\phi(x)dx, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

de modo que $\psi_{\nu_j} \to \psi^0$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ também. Segue da continuidade de ${}^tP_\lambda : \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ que ${}^tP_\lambda \psi_{\nu_j} \to {}^tP_\lambda \psi^0$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ mas como ${}^tP_\lambda \psi_{\nu_j} \to 0$ em $\mathscr{E}_{\omega,k}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, segue que ${}^tP_\lambda \psi^0 = 0$. Concluímos assim que $\psi^0 \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, visto que ${}^tP_\lambda$ é globalmente (ω)-hipoelíptico por hipótese.

Por outro lado, como $\psi_{\nu_j} \in E_{(\omega)}(P_\lambda)$:

$$\tilde{w} \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n),\ {}^tP_\lambda \tilde{w} = 0 \Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} \psi_{\nu_j}(x)\tilde{w}(x)dx}_{\to \int_{\mathbb{T}^n} \psi^0 \tilde{w}(x)dx \text{ quando } j\to\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{T}^n} \psi^0(x)\tilde{w}(x)dx = 0, \quad \forall\, \tilde{w} \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n),\ {}^tP_\lambda \tilde{w} = 0$$

ou seja $\psi^0 \in E_{(\omega)}(P_\lambda)$, Mas como já vimos que ${}^tP_\lambda \psi^0 = 0$ segue que como ${}^tP_\lambda$ tem coeficientes reais, que

$$0 = \overline{{}^tP_\lambda \psi^0} = {}^tP_\lambda \overline{\psi^0} \Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{T}^n} \psi^0(x)\overline{\psi^0(x)}dx = ||\ \psi^0\ ||_{L^2}^2$$

donde concluímos que $\psi^0 = 0$, ou seja $\psi_{\nu_j} \to 0$ em $L^2(\mathbb{T}^n)$. Substituindo tudo na desigualdade $(\star)$ temos, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$1 = ||\ \psi_{\nu_j}\ ||_{k_0} \leq C(\underbrace{||\ \psi_{\nu_j}\ ||_{L^2(\mathbb{T}^n)}}_{\to 0} + \underbrace{||\ {}^tP_\lambda \psi_{\nu_j}\ ||_k}_{\to 0}) \to 0, \quad j \to \infty.$$

Absurdo! Logo, vale $(\star\star)$ para algum $C' > 0$. □

Definição 3.2.14. Denotaremos por $\mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ o espaço dos funcionais lineares contínuos $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$. Dado P um ODPL com coeficientes em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ definimos sua ação $P : \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ pela regra

$$f \in \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow \begin{cases} Pf : \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C} \\ \quad \phi \to \langle f, {}^tP\phi \rangle \end{cases}$$

isto é, $Pf = f \circ {}^tP$ como funcionais lineares. Perceba que, desta maneira, Pf é contínuo uma vez que f e ${}^tP$ são contínuos.

É facil provar que $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é denso em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$: para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$ a função $x \in \mathbb{T}^n \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle} \in \mathbb{C}$ pertence a $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ pois

$$u(x) = e^{i\langle x,\xi\rangle} \Rightarrow \hat{u}(\nu) = \begin{cases} 1, \text{ se } \nu = \xi \\ 0, \text{ se } \nu \neq \xi \end{cases}$$

e, logo, $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ facilmente pela caracterização de $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ por série de Fourier cuja teoria clássica garante, ainda, que $\{e^{i\langle x,\xi\rangle}, \xi \in \mathbb{Z}^n\}$ é denso em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Segue do Teorema de Hahn-Banach que a transposta da inclusão contínua e densa $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é uma aplicação injetora $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$.

Definição 3.2.15. Um ODPL com coeficientes em $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ será dito ***globalmente*** $(\omega)^*$***-hipoelíptico*** se

$$\forall u \in \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n), Pu \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n).$$

Note que se P é globalmente $(\omega)^*$-hipoelíptico então também é globalmente (ω)-hipoelíptico.

Lema 3.2.16. Se ${}^tP_\lambda$ é globalmente $(\omega)^*$-hipoelíptico então P_λ também o é.

Demonstração. Como ${}^tP_\lambda$ é globalmente (ω)-hipoelíptico, existe $w \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ positiva tal que ${}^tP_\lambda w = 0$. Note que

$$\begin{aligned}
{}^tP_\lambda(w\phi) &= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda_j w\phi) \\
&= -\sum_{j=1}^n \left(w\lambda_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \phi \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda_j w) \right) \\
&= -wP_\lambda \phi + \phi\, {}^tP_\lambda w \\
&= -wP_\lambda \phi, \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\langle {}^tP_\lambda(wu), \phi\rangle = \langle wu, P_\lambda \phi\rangle &= \langle u, wP_\lambda \phi\rangle \\
&= -\langle u, {}^tP_\lambda(w\phi)\rangle \\
&= -\langle P_\lambda u, w\phi\rangle \\
&= \langle -wP_\lambda u, \phi\rangle, \quad \forall\, \phi \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^tP_\lambda(wu) = -wP_\lambda u, \quad \forall\, u \in \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n).$$

Se $u \in \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ é tal que $P_\lambda u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ então ${}^tP_\lambda(wu) = -wP_\lambda u$ também pertence a $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. Sendo ${}^tP_\lambda$ globalmente $(\omega)^*$-hipoelíptico por hipótese, temos $wu \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, logo, $u = \frac{1}{w}(wu) \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ (Teorema 3.1.5). □

Teorema 3.2.17. Se ${}^tP_\lambda$ é globalmente $(\omega)^*$-hipoelíptico então para toda $f \in E_{(\omega)}(P_\lambda)$ existe $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ tal que $P_\lambda u = f$.

Demonstração. Considere o espaço vetorial

$$R = \{ {}^tP_\lambda g, g \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)\} \subset \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$$

munido da topologia de subespaço herdada de $\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. Definimos $u : R \to \mathbb{C}$ por

$$^tP_\lambda g \in R \mapsto \langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)g(x)dx.$$

De fato, u está bem definido. Se $g_1, g_2 \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ são tais que $^tP_\lambda g_1 = {}^tP_\lambda g_2$ então

$$g_1 - g_2 \in ker\, ^tP_\lambda \Rightarrow \langle f, g_1 - g_2\rangle = 0$$

pois $f \in E_{(\omega)}(P_\lambda)$ e, logo, $\langle f, g_1\rangle = \langle f, g_2\rangle$, ou seja, $u(g_1) = u(g_2)$. Além disso, u é claramente linear.

Lema 3.2.18. $u : R \to \mathbb{C}$ é contínua.

Demonstração. Faremos uma construção preliminar. Como $^tP_\lambda$ é globalmente (ω)-hipoelíptico, pelo Teorema 3.2.3, existe $w \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ solução da equação homogênea $^tP_\lambda w = 0$. Além disso, sem perda de generalidade, suponha que $\int_{\mathbb{T}^n} w(x)^2 dx = 1$. Dada $g \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, considere

$$c_g = \int_{\mathbb{T}^n} g(x)w(x)dx, \quad \psi_g = g - c_g w \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n).$$

Note que $g - \psi_g = c_g w \in ker\, ^tP_\lambda$. Ademais

$$\int_{\mathbb{T}^n} \psi_g(x)w(x)dx = \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} g(x)w(x)dx}_{c_g} - c_g \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} w(x)^2}_{=1} = 0 \Rightarrow \psi_g \in E_{(\omega)}(P_\lambda).$$

Agora, recordemos $(\star\star)$: como $^tP_\lambda$ é globalmente (ω)-hipoelíptico, existem $C' > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|| \psi_g ||_1 \leq C' ||\, ^tP_\lambda \psi_g ||_k, \quad \forall\, \psi_g \in E_{(\omega)}(P_\lambda).$$

Dado $\phi \in R$, por definição, existe $g \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ tal que $^tP_\lambda g = \phi$. Conforme vimos, $\psi_g \in E_{(\omega)}(P_\lambda)$ satisfaz $^tP_\lambda \psi_g = {}^tP_\lambda g = \phi$, logo, temos

$$\begin{aligned}
| \langle u, \phi\rangle | =| \langle u, {}^tP_\lambda \psi_g\rangle | =| \langle f, \psi_g\rangle | & \\
&\leq || f ||_{L^2(\mathbb{T}^n)} || \psi_g ||_{L^2(\mathbb{T}^n)} \\
&\leq || f ||_{L^2(\mathbb{T}^n)} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\psi^*(0)} || \psi_g ||_1 \\
&\leq C'(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\phi^*(0)} || f ||_{L^2(\mathbb{T}^n)} ||\, ^tP_\lambda \psi_g ||_k \\
&= C'(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\phi^*(0)} || f ||_{L^2(\mathbb{T}^n)} || \phi ||_k .
\end{aligned}$$

Como $\phi \in R$ é arbitrária, segue a continuidade de u. □

De volta à demonstração do Teorema: como $u : R \to \mathbb{C}$ é contínua, segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $\tilde{u} : \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ linear contínua tal que $\tilde{u}\,|_R = u$. Logo, $\tilde{u} \in \mathscr{E}'_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ e, dada $g \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, temos que

$$\langle P_\lambda \tilde{u}, g\rangle = \langle \tilde{u}, {}^tP_\lambda g\rangle = \langle u, {}^tP_\lambda g\rangle = \langle f, g\rangle \Rightarrow P_\lambda \tilde{u} = f \text{ em } \mathscr{E}'_\omega(\mathbb{T}^n).$$

Mas conforme o Lema anterior, a hipótese de que ${}^tP_\lambda$ é globalmente $(\omega)^*$-hipoelíptico implica a mesma propriedade para P_λ, o que, por sua vez, garante que $\tilde{u} \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ pois $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. □

Podemos resumir os Lemas, Proposições e Teoremas acima em um único resultado para sintetizar nosso pensamento:

Teorema 3.2.19. Seja ω satisfazendo as propriedades listadas no início da seção e suponha que ${}^tP_\lambda$ é globalmente $(\omega)^*$-hipoelíptico. Então P_λ é globalmente (ω)-resolúvel.

O Teorema 3.3 de (ALBANESE, 2020) nos traz também uma versão para o espaço de ultradistribuições de tipo Roumieu, denotada por $\mathscr{E}'_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$, que, por definição, é o espaço dos funcionais lineares contínuos $\mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$. Não entraremos em mais detalhes desta construção que requer descrever a topologia do espaço de funções ultradiferenciáveis de tipo Roumieu, que é mais complicada.

Teorema 3.2.20. Seja ω uma função peso satisfazendo as propriedades listadas no início da seção e suponha que ${}^tP_\lambda$ é globalmente $\{\omega\}^*$-hipoelíptico. Então P_λ é globalmente $\{\omega\}$-resolúvel.

Unindo os dois resultados, exibimos um Teorema final para sumariar ambas classes de funções:

Teorema 3.2.21. Seja ω uma função peso não quase analítica e suponha que ${}^tP_\lambda$ é globalmente $\dagger^*$-hipoelíptico. Então P_λ é globalmente $\dagger$-resolúvel.

3.3 Normalização de campos vetoriais cujo transposto é hipoelíptico

Para esta seção, tomaremos ω uma função peso não quase analítica que satisfaça a propriedade (α_0). Além disso, quando formos tratar das classes de funções ultradiferenciáveis do tipo Beurling, iremos pedir também que $\omega(t) = o(t)$ quando t tender ao infinito. Também suporemos que ${}^tP_\lambda$ um operador globalmente $\dagger^*$-hipoelíptico e $w \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ uma solução positiva do Teorema 3.2.3 tal que

$$\int_{\mathbb{T}^n} w(x)dx = 1.$$

Considere as seguintes equações diferenciais parciais de primeira ordem em $\mathbb{T}^n$

$$P_\lambda u = \Lambda_j - \lambda_j(x), 1 \leq j \leq n, \tag{3.15}$$

com

$$\Lambda_j = \int_{\mathbb{T}^n} \lambda_j(x)w(x)dx, 1 \leq j \leq n.$$

Pelo Teorema 3.2.21, as equações (3.15) tem soluções $u_j \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n), 1 \leq j \leq n$ pois

$$\int_{\mathbb{T}^n} (\Lambda_j - \lambda_j(x))w(x)dx = \Lambda_j \int_{\mathbb{T}^n} w(x)dx - \int_{\mathbb{T}^n} \lambda_j(x)w(x)dx = \Lambda_j - \Lambda_j = 0,$$

para $1 \leq j \leq n$. Colocando

$$\tau_j(x) = x_j + u_j(x), \quad 1 \leq j \leq n, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

perceba neste momento que a função $\tau_j(x)$ não é $2\pi-$periódica. Para corrigir isso, primeiro, denote $\tilde{u}_j(x) = u_j \circ p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde p é a projeção do $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{T}^n$ (relembre que, originalmente, $u_j : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$). A partir de $\tilde{u}_j$, podemos definir $\tilde{\tau}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da maneira $\tilde{\tau}_j(x) = x_j + \tilde{u}_j(x)$ e a função $\tilde{\tau}(x) = (\tilde{\tau}_1(x), \ldots, \tilde{\tau}_n(x))$, com $\tilde{\tau} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Por fim, construa a função $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, [x] \to \tau([x]) = [\tilde{\tau}(x)]$. Mostraremos, agora, que esta função está bem definida. Se $[x] = [y]$, temos $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^n$, ou ainda, que $x_j - y_j \in 2\pi\mathbb{Z}$. Para algum $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$, então, temos que $x_j = y_j + q_j$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(y) &= (\tilde{\tau}_1(y), \ldots, \tilde{\tau}_n(y)) \\
&= (y_1 + \tilde{u}_1(y), \ldots, y_n + \tilde{u}_n(y)) \\
&= (x_1 + 2\pi q_1 + \tilde{u}_1(x), \ldots, x_n + 2\pi q_n + \tilde{u}_n(x)) \\
&= (x_1 + \tilde{u}_1(x), \ldots, x_n + \tilde{u}_n(x)) + 2\pi q \\
&= \tilde{\tau}(x) + 2\pi q
\end{aligned}$$

ou ainda, $[\tilde{\tau}(x)] = [\tilde{\tau}(y)]$, o que mostra que nossa função τ está bem definida. Agora sim, podemos concluir que

$$P_\lambda \tau_j = \Lambda_j. \tag{3.16}$$

Por ${}^tP_\lambda$ ser globalmente $\dagger-$hipoelíptico, o sistema $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n\}$ será LI em $\mathbb{Z}$. A demonstração desta afirmação segue no Lema abaixo:

Lema 3.3.1. Para ω uma função peso e ${}^tP_\lambda$ um operador satisfazendo as propriedades listadas no início da seção, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j \neq 0, \quad \forall\, k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Demonstração. Suponha que $\sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j = 0$ para algum $k \in \mathbb{Z}^n$. Defina

$$u(x) = \exp\left[i \sum_{j=1}^{n} k_j \tau_j(x) \right], \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Então $u \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ e

$$
\begin{aligned}
P_\lambda u(x) &= i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(\exp\{i\sum_{l=1}^{n}k_l\tau_l(x)\}) \\
&= u(x)i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x)\sum_{l=1}^{n}k_l\delta_{jl}+k_l\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_l \\
&= u(x)i\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j k_l\delta_{jl}+k_l\lambda_j\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_l \\
&= u(x)i\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j k_l\delta_{jl}+k_l\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_l\right) \\
&= u(x)i\sum_{l=1}^{n}(k_l\lambda_l+k_l\Lambda_l-k_l\lambda_l) \\
&= u(x)i\sum_{l=1}^{n}k_l\Lambda_l.
\end{aligned}
$$

$P_\lambda(u)(x)=iu(x)\sum_{j=1}^{n}k_j\Lambda_j=0$. Então

$$
{}^tP_\lambda(uw)={}^tP_\lambda wu-wP_\lambda u=0.
$$

Pelo Teorema 3.2.3, segue que $u=cte$ em $\mathbb{T}^n$, uma vez que toda solução da homogênea é, a menos de uma constante, igual a w, implicando que $\sum_{j=1}^{n}k_j\tau_j=cte(mod 2\pi)$.

Como o toro $\mathbb{T}^n$ é conexo e as funções τ_j são contínuas, a imagem de $\sum_{j=1}^{n}k_j\tau_j$ é conexa, portanto como está contida em um conjunto discreto, deve ser um único ponto apenas, ou seja, $\sum_{j=1}^{n}k_j\tau_j=cte$, ou, equivalentemente,

$$
\sum_{j=1}^{n}k_jx_j=cte-\sum_{j=1}^{n}k_ju_j.
$$

Como o lado esquerdo da equação acima é linear e o outro lado é uma função periódica, segue que $\sum_{j=1}^{n}k_jx_j=cte$ e, então, $k_j=0$ para todo $1\le j\le n$. □

Denote o Jacobiano de $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$ por J, isto é, para $x\in\mathbb{T}^n$:

$$
J(x)=\begin{vmatrix}
\partial_{x_1}\tau_1(x) & \partial_{x_2}\tau_1(x) & \cdots & \partial_{x_n}\tau_1(x) \\
\partial_{x_1}\tau_2(x) & \partial_{x_2}\tau_2(x) & \cdots & \partial_{x_n}\tau_2(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\partial_{x_1}\tau_n(x) & \partial_{x_2}\tau_n(x) & \dots & \partial_{x_n}\tau_n(x)
\end{vmatrix}.
$$

Pelo Teorema 3.2.3 podemos argumentar que $J(x)=w(x),\ x\in\mathbb{T}^n$. Demonstraremos esta afirmação no Lema a seguir :

Lema 3.3.2. Suponha ${}^tP_\lambda$ um operador satisfazendo as propriedades listadas no início da seção. Então $J(x)=w(x)$.

Demonstração. A demonstração deste Lema está feita em (WENYI; CHI, 2007), aqui iremos demonstrar para o caso $n = 2$. Dessa forma, denotaremos o vetor v por $v = (x, y)$ e, assim, o determinante $J(v)$ fica da seguinte forma :

$$J(v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v) & \frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v) \\ \frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v) & \frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) - \frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v).$$

Aplicando, então, o operador $-\,{}^tP_\lambda$ em $J(v)$, obtemos

$$\begin{aligned}
-\,{}^tP_\lambda(J(v)) = {} & \lambda_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) + \lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tau_2(v) \\
& - \lambda_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_2(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v) - \lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tau_1(v) \\
& + \lambda_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) + \lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tau_2(v) \\
& - \lambda_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau_2(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v) - \lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tau_1(v) \\
& + \frac{\partial}{\partial x}\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) - \frac{\partial}{\partial x}\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v) \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) - \frac{\partial}{\partial y}\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v) \\
& + \frac{\partial}{\partial x}\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) - \frac{\partial}{\partial x}\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(v) \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v) - \frac{\partial}{\partial y}\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\tau_1(v)\frac{\partial}{\partial x}\tau_2(v)
\end{aligned}$$

As últimas duas linhas se anulam propositalmente para facilitar nossas contas. Reorganizando os termos, encontramos:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x^2}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v) + \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v) &= \frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\left(\lambda_1\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x^2}(v) + \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\right) \\
&= \frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x\partial y}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v) + \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v) &= \frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\left(\lambda_2\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x\partial y}(v) + \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\right) \\
&= \frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\right)\right) + \frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\right)\right) &= \frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v) + \lambda_2\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\right)\right) \\
&= \frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda_1\frac{\partial^2\tau_2}{\partial x^2}(v)\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)-\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v) &= -\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\left(\lambda_1\frac{\partial^2\tau_2}{\partial x^2}(v)+\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)\right)\\
&= -\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda_2\frac{\partial^2\tau_2}{\partial x\partial y}(v)\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)-\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v) &= -\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\left(\lambda_2\frac{\partial^2\tau_2}{\partial x\partial y}(v)+\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\\
&= -\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)\right)\right)-\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\right) &= -\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)+\lambda_2\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\right)\\
&= -\frac{\partial\tau_1}{\partial y}(v)\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda_2)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\frac{\partial^2\tau_2}{\partial x\partial y}(v)\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)+\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v) &= \frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\left(\lambda_1\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x\partial y}(v)+\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\right)\\
&= \frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_2\frac{\partial^2\tau_2}{\partial y^2}(v)\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)+\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v) &= \frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\left(\lambda_2\frac{\partial^2\tau_2}{\partial y^2}(v)+\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\\
&= \frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_2\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\right)+\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_2\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\right) &= \frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)+\lambda_2\frac{\partial\tau_2}{\partial y}(v)\right)\right)\\
&= \frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\frac{\partial}{\partial y}(\Lambda_2)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda_1\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x\partial y}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)-\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v) &= -\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)\left(\lambda_1\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x\partial y}(v)+\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\right)\\
&= -\frac{\partial\tau_2}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1\frac{\partial\tau_1}{\partial x}(v)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda_2 \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial y^2}(v)\frac{\partial \tau_2}{\partial x}(v) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\frac{\partial \tau_1}{\partial y}(v)\frac{\partial \tau_2}{\partial x}(v) &= -\frac{\partial \tau_2}{\partial x}(v)\left(\lambda_2 \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial y^2}(v) + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\frac{\partial \tau_1}{\partial y}(v)\right) \\
&= -\frac{\partial \tau_2}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_2 \frac{\partial \tau_1}{\partial y}(v)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \tau_2}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial x}(v)\right)\right) - \frac{\partial \tau_2}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_2 \frac{\partial \tau_1}{\partial y}(v)\right)\right) &= -\frac{\partial \tau_2}{\partial x}(v)\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial x}(v) + \lambda_2 \frac{\partial \tau_1}{\partial y}(v)\right)\right) \\
&= -\frac{\partial \tau_1}{\partial y}(v)\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda_1) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $-\,^t P_\lambda(J(x)) = 0$. Daí, por conta do Teorema 3.2.3, temos que $J(x) = Cw(x)$. Resta provar que $C = 1$. Para isso, realizaremos a substituição $\tau_j = x_j + u_j$, obtendo, agora,

$$
J(v) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}(v) & \frac{\partial u_1}{\partial y}(v) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(v) & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial y}(v) \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}(v) + \frac{\partial u_2}{\partial y}(v) + \frac{\partial u_1}{\partial x}(v)\frac{\partial u_2}{\partial y}(v) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(v)\frac{\partial u_1}{\partial y}(v).
$$

Calcularemos a integral de cada termo desta soma.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} dxdy &= \int_{\mathbb{T}} (u_1(x,y)) \,|_0^{2\pi}\, dy = \int_{\mathbb{T}} 0 dy = 0. \\
\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_2}{\partial y} dydx &= \int_{\mathbb{T}} (u_2(x,y)) \,|_0^{2\pi}\, dx = \int_{\mathbb{T}} 0 dx = 0. \\
\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x} dxdy &= \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} dxdy - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y} dxdy.
\end{aligned}
$$

Desenvolveremos a primeira integral via integração por partes. Tomando $u' = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Rightarrow u = u_1$ e $v = \frac{\partial u_2}{\partial y} \Rightarrow v' = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}$, obtemos

$$
\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} dxdy = (2\pi)^2 \left(u_1(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y)\right) |_0^{2\pi} - \int_{\mathbb{T}^2} u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial x} dydx = -\int_{\mathbb{T}^2} u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial x} dydx.
$$

Trabalhando com a última integral por partes novamente, temos que $u' = \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial x} \Rightarrow u = \frac{\partial u_2}{\partial x}$ e $v = u_1 \Rightarrow v' = \frac{\partial u_1}{\partial y}$, obtemos então que

$$
-\int_{\mathbb{T}^2} u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial x} dxdy = -(2\pi)^2 \left(u_1(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y)\right) |_0^{2\pi} + \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x} dydx = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x} dydx.
$$

Temos, então, que

$$
\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} dxdy = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y} dxdy,
$$

então, nos resta que

$$\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x} dxdy = 0.$$

Por fim, obtemos então que $\int_{\mathbb{T}^2} J(x)dxdy = (2\pi)^2$ ao mesmo tempo que

$$\int_{\mathbb{T}^2} J(x) = \int_{\mathbb{T}^2} Cw(x)dx = C\int_{\mathbb{T}^2} d\mu = C(2\pi)^2$$

(Teorema 3.2.3) o que nos dá que $C = 1$ e, portanto, $J(x) = w(x)$, como queríamos.

□

Pelo Lema 3.3.2, a equação provada garante que o mapeamento $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ definido por $\tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_n(x))$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$, é um difeomorfismo em uma vizinhança de cada ponto de $\mathbb{T}^n$. Mas pelo Teorema 2.3 de (WENYI; CHI, 2007), segue que τ, na verdade, é um difeomorfismo suave. Como, além disso, τ é uma $\mathscr{E}_\dagger$-aplicação, segue dos Teoremas 3.1.5 e 3.1.6 que a inversa τ^{-1} também é uma $\mathscr{E}_\dagger$-aplicação.

Além disso, podemos formalizar, enfim, a mudança de variáveis feita pelo difeomorfismo τ, que nos ajudará, futuramente , a classificar quais serão os tipos de operadores que serão hipoelípticos.

Teorema 3.3.3. Seja ω uma função peso e ${}^tP_\lambda$ um operador satisfazendo as propriedades listadas no início da seção. Então $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é um difeomorfismo $\mathscr{E}_\dagger$.

Corolário 3.3.4. Seja ω uma função peso e ${}^tP_\lambda$ um operador satisfazendo as propriedades listadas no início da seção. Então o mapeamento $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, x \to y = \tau(x)$ é um difeomorfismo $\mathscr{E}_\dagger$ que transforma $P_\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x)\partial_{x_j}$ em $Q_\Lambda = \sum_{j=1}^n \Lambda_j \partial_{y_j}$.

Demonstração. Tomando $\tau : \mathbb{T}^n_x \to \mathbb{T}^n_y$ o difeomorfismo acima, defina a operação pullback $\tau^* : C^\infty(\mathbb{T}^n_y) \to C^\infty(\mathbb{T}^n_x)$. Aqui, $\mathbb{T}^n_x$ e $\mathbb{T}^n_y$ representam os mesmos espaços, porém, estamos denotando diferente para compreender melhor para onde o difeomorfismo τ está nos levando. Desta maneira, provarmos que τ leva P_λ em Q_Λ é o mesmo que a provar que $P_\lambda \circ \tau^* = \tau^* \circ Q_\Lambda$, ou seja, que para toda função g suave, vale $P_\lambda(g\circ\tau) = (Q_\Lambda g)\circ\tau$.

Temos que

$$\partial_{x_j}(g\circ\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(\tau(x))\frac{\partial \tau_k}{\partial x_j}(x)$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
P_\lambda(g\circ\tau)(x) = \sum_{j,k=1}^{n}\lambda_j(x)\frac{\partial g}{\partial y_k}(\tau(x))\frac{\partial \tau_k}{\partial x_j}(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}(\tau(x))\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x)\frac{\partial \tau_k}{\partial x_j}(x)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}(\tau(x))P_\lambda(\tau_k)\\
&\underbrace{=}_{(3.16)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}(x)(\tau_k)\Lambda_k\\
&= (Q_\Lambda g)\circ\tau
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

CAPÍTULO

4

HIPOELITICIDADE GLOBAL

Seja ω uma função peso não quase analítica e assuma que ω satisfaz a propriedade (α_0). Além disso, quando formos tratar das classes de funções ultradiferenciáveis do tipo Beurling, iremos assumir também que $\omega(t) = o(t)$ quando t tender ao infinito. Seja P_λ como nos capítulos anteriores e assuma que o operador ${}^tP_\lambda$ é globalmente $\dagger^*$-hipoelíptico e que $w \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ é uma solução positiva da equação homogênea ${}^tP_\lambda u = 0$ tal que $\int_{\mathbb{T}^n} w(x)dx = 1$.

Considere o espaço $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{T}^n, w\, dx)$ como o espaço de Hilbert complexo conjugado com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido da seguinte maneira: $\langle f, g \rangle_w = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$.

Sob as hipóteses acima, neste capítulo vamos tratar da hipoelipticidade do operador P_λ.

O primeiro resultado descreve os autovalores e autofunções associadas do operador P_λ.

Teorema 4.0.1. Seja ω uma função peso e ${}^tP_\lambda$ um operador satisfazendo as propriedades listadas no início da seção. Então o espectro de $D_\lambda = i^{-1}P_\lambda$ consiste em autovalores da forma

$$u_k = \sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j$$

com $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ e as correspondentes autofunções são

$$\psi_k(x) = \exp\{i \sum_{j=1}^{n} k_j \tau_j(x)\}\ ,\ x \in \mathbb{T}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n$$

onde as funções τ_j, $j = 1, \ldots, n$ satisfazem o Teorema 3.3.3. Além disso, os autoespaços para cada autovalor possuem dimensão um e as autofunções $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ formam uma base ortonormal completa em $\mathbb{H}$.

Demonstração. Primeiro, perceba que os termos u_k e as funções ψ_k definidas acima são, de fato, autovalores e autovetores respectivamente, uma vez que

$$\begin{aligned}
D_\lambda \psi_k = i^{-1}P_\lambda \psi_k &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(\exp\{i\sum_{l=1}^{n} k_l\tau_l(x)\}) \\
&= \psi_k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \sum_{l=1}^{n} k_l\delta_{jl} + k_l\frac{\partial}{\partial x_j}u_l \\
&= \psi_k \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_l \delta_{jl} + k_l\lambda_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_l \\
&= \psi_k \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_l \delta_{jl} + k_l \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_l\right) \\
&= \psi_k \sum_{l=1}^{n} (k_l\lambda_l + k_l\Lambda_l - k_l\lambda_l) \\
&= \psi_k \sum_{l=1}^{n} k_l\Lambda_l \\
&= u_k\psi_k.
\end{aligned}$$

Defina, agora, o operador $T : \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ da forma $T(f) = f\circ\tau$, onde $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$ é como no Teorema 3.3.3(ou seja, $T = \tau^*$). Note que este operador possui como operador inverso $T^{-1} : \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ dado por $T^{-1}(f) = f\circ\tau^{-1}$. Este operador T^{-1} está bem definido uma vez que τ é um difeomorfismo da classe $\mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$. Dessa forma, é fato que T é um isomorfismo.

Agora, provaremos que $T : L^2(\mathbb{T}^2, dy) \to L^2(\mathbb{T}^2, wdx)$ é uma isometra. De fato, para $f,g \in L^2(\mathbb{T}^n, dy)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle T(f), T(g)\rangle_w &= \int_{\mathbb{T}^n} T(f)\overline{T(g)}w(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} f(\tau(x))g(\tau(x))w(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} f(y)\overline{g(y)}dy \\
&= \langle f, g\rangle.
\end{aligned}$$

Por conta disso, temos então que T é um isomorfismo isométrico com respeito a norma L^2. Uma vez que

$$T^{-1}(\psi_k) = \psi_k\circ\tau^{-1} = \exp\{i\sum_{j=1}^{n} k_i y_i\}, \quad k\in\mathbb{Z}^n,\ y\in\mathbb{T}^n$$

e $\exp\{i\sum_{j=1}^{n} k_i y_i\}$ forma uma base ortonormal para o $L^2(\mathbb{T}^n, dy)$, por conta de T ser um isomorfismo isométrico em L^2, as autofunções ψ_k também formam uma base ortonormal completa em $\mathbb{H}$.

Por fim, seja v uma autofunção associada ao autovalor a do operador D_λ, ou seja, $D_\lambda v = av$. Uma vez que as funções ψ_k formam uma base ortonormal, $v \in \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ pode ser escrita como $v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k\psi_k$. Então, substituindo, temos

$$a\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k\psi_k = D_\lambda(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k\psi_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k D_\lambda\psi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k u_k\psi_k \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k u_k\psi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} ab_k\psi_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k(a-u_k)\psi_k = 0, \text{ ou seja, } b_k(a-u_k) = 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}^n.$$

Como $v\neq 0$, existe $l\in\mathbb{Z}^n$ tal que $b_l\neq 0$, implicando, então, que $a = u_l$ e, perceba que pelo Lema 3.3.1, sendo $u_k = \sum_{j=1}^n k_j\Lambda_j$,

$$u_k = u_l \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^n (k_j - l_j)\Lambda_j = 0 \Longleftrightarrow k = l,$$

então, $a\neq u_k$, para todo $k\neq l$, consequentemente, $b_k = 0$ para todo $k\neq l$.

Concluímos, então, que $a = u_l$ e que $v = b_l\psi_l$, ou seja, os únicos autovalores para o operador D_λ são $\{u_l, l\in\mathbb{Z}^n\}$ e que a dimensão do autoespaço de ψ_k vale 1, como queríamos demonstrar. □

O Teorema 4.0.1 nos ajudará a compreender melhor as mudanças de variáveis que acontecerão nos seguintes teoremas, como no próximo teorema que, em particular, é do tipo Paley-Wiener.

Teorema 4.0.2. Seja ω uma função peso e ${}^tP_\lambda$ um operador satisfazendo as propriedades listadas no início da seção e seja $f\in\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. Então, nós temos as seguintes afirmações:

1. $f\in\mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, para todo $h\in\mathbb{N}$ existe $C_h>0$ tal que
$$|\langle f,\psi_k\rangle_w| \leq C_h e^{-h\omega(k)}, k\in\mathbb{Z}^n.$$

2. $f\in\mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, existe $\varepsilon>0$ e $C>0$ tal que
$$|\langle f,\psi_k\rangle_w| \leq Ce^{-\varepsilon\omega(k)}, k\in\mathbb{Z}^n.$$

Demonstração. Para esta demonstração, denotaremos os espaços $\mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n, dx)$ ou $\mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n, dy)$ como os espaços $\mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$ com sua respectiva medida. Uma vez que o mapa $\tau:\mathbb{T}^n\to\mathbb{T}^n$ é um $\mathscr{E}_\dagger$ difeomorfismo global e ω satifaz a propriedade (α_0), se $f\in\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, podemos definir a operação pushfoward $\tau_* f$ por

$$\langle(\tau_* f)_y, \phi_y\rangle = \langle f_x, J(x)\phi(\tau(x))\rangle, \phi\in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Definido assim, teremos que $f\in\mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n, dx)$ se, e somente se, $\tau_* f\in\mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n, dy)$. Denotando

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle f(\tau^{-1}(y)), e^{-iky}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle f(x), e^{-ik\tau(x)}w(x)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle f,\psi_k\rangle_w, \quad k\in\mathbb{Z}^n$$

graças à Proposição 3.1.12 temos:

1. $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, para todo $h \in \mathbb{N}$ existe $C_h > 0$ tal que $| a_k(2\pi)^n | \leq C_h e^{-h\omega(k)}, k \in \mathbb{Z}^n$.

2. $f \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tal que $| a_k(2\pi)^n | \leq Ce^{-\varepsilon\omega(k)}, k \in \mathbb{Z}^n$.

□

Por fim, associaremos agora a hipoelipticidade global de um operador à condição de seus coeficientes constantes, uma vez normalizados, satisfazerem uma desigualdade específica. Primeiro, provaremos o resultado para um caso mais simples de operadores, serão utilizados aqui operadores de coeficientes constantes. Como já vimos, este caso aparecerá futuramente, uma vez que o operador τ transformará nosso operador P_λ em um operador de coeficientes constantes, então este caso não está tão distante da nossa realidade como pode parecer.

Teorema 4.0.3. Seja ω uma função peso satisfazendo as propriedades listadas no início da seção. Se $Q_\Lambda = \sum_{j=1}^n \Lambda_j \partial_{x_j}$ é um operador diferencial com coeficientes constantes, então vale a seguinte propriedade :

1. Q_Λ é globalmente (ω)-hipoelíptico se, e somente se, os números $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ satisfazem a seguinte condição diofantina:

$$\exists L, C > 0, \exists h \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left| \sum_{j=1}^n k_j \Lambda_j \right| \geq Le^{-h\omega(k)} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^n \text{ com } | k | \geq C. \quad (4.1)$$

2. Q_Λ é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico se, e somente se, os números $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ satisfazem a seguinte condição diofantina:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, L_\varepsilon > 0 \text{ tal que } \left| \sum_{j=1}^n k_k \Lambda_j \right| \geq L_\varepsilon e^{-\varepsilon\omega(k)} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^n \text{ com } k \geq C_\varepsilon. \quad (4.2)$$

Demonstração. 1. Suponha que a condição (4.1) vale, iremos provar a (ω)-hipoelipticidade do operador Q_Λ. Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ tal que $Q_\Lambda u = f$, com $f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$. Uma vez que podemos escrever as funções u e f em função de seus coeficientes de Fourier, sendo $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k e^{ikx}$ e $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ikx}$, com

$$u_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle u_x, e^{-ikx} \rangle$$

e

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle f_x, e^{-ikx} \rangle,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, temos que os coeficientes de Fourier de $Q_\Lambda u$ são dados da seguinte maneira :

$$\begin{aligned}(Q_\Lambda u)_k = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle Q_\Lambda(u)_x, e^{-ikx}\rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^n}\langle u_x, Q_\Lambda(e^{-ikx})\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} i\langle u_x, \sum_{j=1}^{n} k_j\Lambda_j e^{-ikx}\rangle \\ &= iu_k \sum_{j=1}^{n} k_j\Lambda_j, k \in \mathbb{Z}^n.\end{aligned}$$

Então nós temos a igualdade de $Q_\Lambda u = f$ se, e somente se, seus coeficientes de Fourier também forem iguais, ou seja, $iu_k\left(\sum_{j=1}^n k_j\Lambda_j\right) = a_k, k \in \mathbb{Z}^n$.

Pela Proposição 3.1.12, obtemos que

$$| u_k |= \frac{| a_k |}{| \sum_{j=1}^n k_j\Lambda_j |} \leq C_k \frac{e^{-o\omega(k)}}{| \sum_{j=1}^n k_j\Lambda_j |} \underbrace{\leq}_{\text{Condição diofantina}} C_o L^{-1} e^{-o+h\omega(k)}$$

para $k \in \mathbb{Z}^n$ tal que $| k |\geq C$ para todo $o \in \mathbb{N}$, para algum $h \in \mathbb{N}, C_o > 0, L > 0, C > 0$. Colocando $m = o-h$ para $o > k$, $D = \max\{ \ | u_k | \ e^{-m\omega(k)} :| k |< C\}$, e $C'_m := \max\{C_m, D, L^{-1}\}$, segue que

$$| u_k |\leq C_m e^{-m\omega(k)},$$

então, pela Proposição 3.1.12, podemos concluir que Q_Λ é globalmente $(\omega)-$hipoelíptico.

Por outro lado, suponha que não valha (4.1). Desta forma, existe $\{k_m : m \in \mathbb{N}\}$ com $| k_m |\geq m, m \in \mathbb{N}$, dois a dois distintos, a menos de uma subsequência, tal que

$$| \sum_{j=1}^{n} k_{m,j}\Lambda_j |< e^{-m\omega(k_m)}, m \in \mathbb{N}.$$

Defina a função $u = \sum_{m=1}^\infty e^{ik_m x}$. Iremos provar que $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, ou seja, nosso objetivo é mostrar que a série $\sum_{m=1}^\infty e^{ik_m x}$ converge em $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, ou seja, que para todo $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, a série $\sum_{m=1}^\infty \langle e^{ik_m x}, \phi\rangle$ converge em $\mathbb{C}$.

Perceba, em primeiro lugar, que

$$\langle e^{ik_m x}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} e^{ik_m x}\phi(x)dx = \phi_{k_m}.$$

Pelo Teorema de Paley-Wiener, uma vez que ϕ é suave, para todo ρ positivo, existe C_ρ também positivo tal que

$$| \phi_k |\leq C_\rho(1+ | k |)^{-\rho}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Vamos ver que $\sum_{m=1}^\infty \langle e^{ik_m x}, \phi\rangle$ é absolutamente convergente. Perceba que

$$\sum_{m=1}^{M} | \langle e^{ik_m x}, \phi\rangle |= \sum_{m=1}^{M} | \phi_{k_m} |\leq C_\rho \sum_{m=1}^{M} (1+ | k_m |)^{-\rho} \leq C_\rho \sum_{m=1}^{M} m^{-\rho}$$

uma vez que, como definimos acima,

$$| k_m | \geq m \Rightarrow (1+ | k_m |)^{-\rho} \leq m^{-\rho}.$$

Tomando $\rho = 2$, nós temos que

$$\sum_{m=1}^{M} | \langle e^{ik_m x}, \phi \rangle | \leq C_2 \sum_{j=1}^{M} m^{-2} \leq C_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} < \infty.$$

Dessa forma, $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. Mas, por outro lado, $u \notin \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ pois seus coeficientes de Fourier são

$$u_k = \begin{cases} 0, \text{ se } \; k \notin \{k_m, m \in \mathbb{N}\} \\ 1, \text{ se } \; k = k_m, \text{ para algum } \; m \end{cases}$$

e, dessa forma, a condição $| u_k | \leq C_h e^{-h\omega(k)}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ não é satisfeita.

Mas $Q_\Lambda u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ pois, da forma que construímos u,

$$| (Q_\Lambda u)_k | = | \sum_{j=1}^{n} k_{m,j} \Lambda_j | \leq e^{-m\omega(k_m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Logo, Q_Λ não é globalmente $(\omega)-$hipoelíptico.

2. Supondo que a condição (4.2) vale, iremos provar a $\{\omega\}$-hipoelipticidade do operador Q_Λ. Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ tal que $Q_\Lambda u = f$, com $f \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$. Uma vez que podemos escrever as funções u e f em suas formas de Fourier, sendo $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u_k e^{ikx}$ e $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{ikx}$, com

$$u_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle u_x, e^{-ikx} \rangle$$

e

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle f_x, e^{-ikx} \rangle,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, temos que os coeficientes de Fourier de $Q_\Lambda u$ são dados da seguinte maneira :

$$\begin{aligned} (Q_\Lambda u)_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle Q_\Lambda u_x, e^{-ikx} \rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \langle u_x, Q_\Lambda(e^{-ikx}) \rangle \\ &= i \frac{1}{(2\pi)^n} \langle u_x, \sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j e^{-ikx} \rangle \\ &= i u_k \sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j, k \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Então nós temos a igualdade de $Q_\Lambda u = f$ se, e somente se, seus coeficientes de Fourier também forem iguais, ou seja, $iu_k \left(\sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j \right) = a_k, k \in \mathbb{Z}^n$.

Pela Proposição 3.1.12, obtemos que

$$| u_k | = \frac{| a_k |}{| \sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j |} \leq C_0 \frac{e^{-\varepsilon_0 \omega(k)}}{| \sum_{j=1}^{n} k_j \Lambda_j |} \underbrace{\leq}_{\text{Condição diofantina}} C_0 L_0^{-1} e^{\frac{-\varepsilon_0}{2} \omega(k)}$$

para $k \in \mathbb{Z}^n$, $| k | \geq C$ para algum $\varepsilon_0 > 0, C_0, L_0, C > 0$. Colocando $D = \max\{| u_k | e^{\frac{-\varepsilon_0}{2}\omega(k)} : | k | < C\}$ e $C' := \max\{D, C_0, L^{-1}\}$, segue que

$$| u_k | \leq C' e^{\frac{-\varepsilon_0}{2}\omega(k)},$$

então, pela Proposição 3.1.12, podemos concluir que Q_Λ é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico.

Por outro lado, suponha que não valha (4.2). Desta forma, existe $\varepsilon_0 > 0$ e $\{k_m, m \in \mathbb{N}\}$ com $| k_m | \geq m, m \in \mathbb{N}$, dois a dois distintos, a menos de uma subsequencia, tal que

$$| \sum_{j=1}^{n} k_{m,j}\Lambda_j | < e^{-\varepsilon_0\omega(k_m)}, m \in \mathbb{N}.$$

Defina a função $u = \sum_{m=1}^{\infty} e^{ik_m x}$. Como vimos na demonstração acima, u é uma distribuição no toro n-dimensional. Mas, por outro lado, $u \notin \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ pois seus coeficientes de Fourier são

$$u_k = \begin{cases} 0, \text{ se } \ k \notin \{k_m, m \in \mathbb{N}\} \\ 1, \text{ se } \ k = k_m, \text{ para algum } \ m \end{cases}$$

e, dessa forma, a condição $| u_k | \leq Ce^{-\varepsilon\omega(k)}, k \in \mathbb{Z}^n$ não é satisfeita.

Mas $Q_\Lambda u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ pois, da forma que construímos u,

$$(Q_\Lambda u)_k = | \sum_{j=1}^{n} k_{m,j}\Lambda_j | \leq e^{-\varepsilon_0\omega(k_m)}, m \in \mathbb{N}.$$

Logo, Q_Λ não é globalmente (ω)-hipoelíptico.

□

Prosseguindo, enfraqueceremos a hipótese do Teorema acima para obter o resultado da primeira implicação. Conseguiremos fazer isso com o difeomorfismo que construímos.

Teorema 4.0.4. Seja ω uma função peso satisfazendo as propriedades listadas no início da seção. Então, nós temos:

1. Se ${}^tP_\lambda$ é globalmente $(\omega)^*-$hipoelíptico, então os números $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ satisfazem a condição diofantina (4.1).

2. Se ${}^tP_\lambda$ é globalmente $\{\omega\}^*$-hipoelíptico, então os números $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ satisfazem a condição diofantina (4.2).

Demonstração. Se ${}^tP_\lambda$ é um operador globalmente $\dagger^*$-hipoelíptico, ele também é um operador $\dagger$-hipoelíptico e, pelo Teorema 3.2.21, o operador P_λ também é globalmente $\dagger$-hipoelíptico. Além disso, pela mesma hipótese, existe um difeomorfismo $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ que transforma $P_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\partial_{x_j}$ em $Q_\Lambda = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j \partial_{y_j}$. Portanto, uma vez que P_λ é globalmente $\dagger$-hipoelíptico, segue também que Q_Λ também é †-hipoelíptico. Por conta disso, pelo teorema anterior (Teorema 4.0.3) segue que os coeficientes $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ satisfazem a condição diofantina (4.1)((4.2)), como queríamos demonstrar. □

O teorema 4.0.4 nos diz que a partir da $\dagger^*$-hipoelipticidade global de um operador, conseguimos normalizá-lo de maneira que os coeficientes satisfaçam a condição diofantina já mostrada. Idealmente, gostaríamos de mostrar uma recíproca: se conseguirmos normalizar um operador em coeficientes constantes que satisfazem a condição diofantina, então ele será globalmente $\dagger^*$-hipoelíptico. Porém o Teorema 4.0.3 não nos dá a caracterização de *-hipoelipticidade global de Q_Λ pois não temos a caracterização de ultradistribuições via série de Fourier. Apresentamos, então, uma versão mais fraca da recíproca desejada.

Teorema 4.0.5. Seja ω uma função peso satisfazendo as propriedades listadas no início da seção e seja $P_\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x)\partial_{x_j}$ um campo vetorial no toro $\mathbb{T}^n$ com $\{\lambda_j\}_{j=1}^n \subset \mathscr{E}_\dagger(\mathbb{T}^n)$. Então valem as afirmações:

1. Se existe um difeomorfismo global $\mathscr{E}_{(\omega)}$ $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ tal que P_λ é transformado em $\sum_{j=1}^n \Lambda_j \partial_{y_j}$ com os números $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ satisfazendo a condição diofantina

$$\exists\, L, C > 0, \exists\, h \in \mathbb{N} \text{ tais que } \left| \sum_{j=1}^n k_j \Lambda_j \right| \geq L e^{-h\omega(k)} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^n \text{ com } |k| \geq C$$

   então o operador ${}^tP_\lambda$ é globalmente (ω)-hipoelíptico.

2. Se existe um difeomorfismo global $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$ $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ tal que P_λ é transformado em $\sum_{j=1}^n \Lambda_j \partial_{y_j}$ com os números $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ satisfazendo a condição diofantina

$$\exists\, \varepsilon > 0, \exists\, C_\varepsilon > 0, L_\varepsilon > 0 \text{ tais que } \left| \sum_{j=1}^n k_j \Lambda_j \right| \geq L_\varepsilon e^{-\varepsilon\omega(k)} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^n \text{ com } |k| \geq C_\varepsilon$$

   então o operador ${}^tP_\lambda$ é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico.

Demonstração. 1. Assuma que exista um difeomorfismo global $\mathscr{E}_{(\omega)}$ $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ tal que P_λ é transformado em $Q_\Lambda = \sum_{j=1}^n \Lambda_j \partial_{y_j}$ com os números $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ satisfazendo a condição diofantina (4.1). Pelo Teorema 4.0.3, o operador de coeficientes constantes Q_Λ é globalmente (ω)-hipoelíptico, portanto o operador P_λ também é.

Denote por $J(x)$ o determinante Jacobiano de $\tau(x)$ para $x \in \mathbb{T}^n$. Uma vez que $P_\lambda(\tau_j) = \Lambda_j$, pois por hipótese, τ normaliza o operador P_λ em coeficientes constantes, repetindo o argumento do Lema 3.3.2, obtemos ${}^tP_\lambda J = 0$ e que $J(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$ conseguimos a igualdade

$${}^tP_\lambda(Ju) = JP_\lambda u,$$

se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. Então, para uma distribuição qualquer $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ tal que ${}^tP_\lambda u = f \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$, denote $u = Jv, v \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, assim,

$$f = {}^tP_\lambda(Jv) = JP_\lambda v.$$

Mas como $J(x) \neq 0$, segue que $P_\lambda v = \frac{1}{J}f$ e, como P_λ é globalmente (ω) hipoelíptico, $v \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ e, por consequência, segue que $u \in \mathscr{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^n)$ o que implica na conclusão que queríamos sobre a hipoelipticidade global de ${}^tP_\lambda$.

2. Assuma que exista um difeomorfismo global $\mathscr{E}_{\{\omega\}}$ $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ tal que P_λ é transformado em $Q_\Lambda = \sum_{j=1}^n \Lambda_j \partial_{y_j}$ com os números $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ satisfazendo a condição diofantina (4.2). Pelo Teorema 4.0.3, o operador de coeficientes constantes Q_Λ é globalmente $\{\omega\}$-hipoelípticoportanto o operador P_λ também é.

Denote por $J(x)$ o determinante Jacobiano de $\tau(x)$ para $x \in \mathbb{T}^n$. Uma vez que $P_\lambda(\tau_j) = \Lambda_j$, pois por hipótese, τ normaliza o operador P_λ em coeficientes constantes, repetindo o argumento do Lema 3.3.2, obtemos ${}^tP_\lambda J = 0$ e que $J(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$ conseguimos a igualdade

$${}^tP_\lambda(Ju) = JP_\lambda u,$$

se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. Então, para uma distribuição qualquer $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ tal que ${}^tP_\lambda u = f \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$, denote $u = Jv, v \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, assim,

$$f = {}^tP_\lambda(Jv) = JP_\lambda v.$$

Mas como $J(x) \neq 0$, segue que $P_\lambda v = \frac{1}{J}f$ e, como P_λ é globalmente $\{\omega\}$ hipoelíptico, $v \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ e, por consequência, segue que $u \in \mathscr{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ o que implica na conclusão que queríamos sobre a hipoelipticidade global de ${}^tP_\lambda$. $\square$

REFERÊNCIAS

ALBANESE, A.; JORNET, D.; OLIARO, A. Quasianalytic wave front sets for solutions of linear partial differential operators. **Integral Equations Oper. Theory**, v. 66, p. 153–181, 02 2010. Citado na página 18.

ALBANESE, A. A. Global hypoelliptic vector fields in ultradifferentiable classes and normal forms. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 491, n. 2, p. 333–373, 2020. Citado nas páginas 18, 28 e 48.

ALBANESE, A. A.; JORNET, D. Global regularity in ultradifferentiable classes. **Annali di Matematica**, v. 193, p. 369–387, 2014. Citado na página 18.

BRAUN, R. W.; MEISE, R.; TAYLOR, B. A. Ultradifferentiable functions and fourier analysis. v. 17, n. 2, p. 421–436, 1990. Citado nas páginas 18, 25 e 33.

HORMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I**. [S.l.]: Springer, 2003. Citado na página 18.

PETRONILHO, G. Ultradistribuições gevrey periódicas em r^n. **Apostila de curso apresentado no I EBED**, Campinas, 2003. Citado nas páginas 26 e 38.

RAINER, A.; SCHINDL, G. Equivalence of stability properties for ultradifferentiable function classes. **Springer**, v. 44, p. 169–188, 2015. Citado nas páginas 18 e 30.

RUDIN, W. **Functional analisys**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1991. Citado na página 26.

SCHINDL, G. On subadditivity-like conditions for associated weight functions. **Expositiones Mathematicae**, v. 26, n. 1, p. 1–23, 2021. Citado nas páginas 18 e 23.

VICTOR, B. L. **Hipoeliticidade em classes de funções ultradiferenciáveis no toro**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021. Citado nas páginas 26, 41 e 44.

WENYI, C.; CHI, M. Y. Hypoelliptic vector fields and almost periodic motions on the torus tn. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 25, p. 337–354, 2007. Citado nas páginas 18, 39, 51 e 54.

ICMC USP
SÃO CARLOS