

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Pontos Umbílicos e Curvas Especiais em Superfícies no Espaço Minkowski

Marco Antônio do Couto Fernandes

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Marco Antônio do Couto Fernandes

Pontos Umbílicos e Curvas Especiais em Superfícies no Espaço Minkowski

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Farid Tari

USP – São Carlos
Julho de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F363p Fernandes, Marco Antônio do Couto
Pontos Umbílicos e Curvas Especiais em Superfícies
no Espaço Minkowski / Marco Antônio do Couto
Fernandes; orientador Farid Tari. -- São Carlos,
2021.
181 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Espaço Minkowski. 2. Superfície. 3. Ponto
Umbílico. 4. Conjectura de Carathéodory. I. Tari,
Farid, orient. II. Título.

Marco Antônio do Couto Fernandes

**Umbilic Points and Special Curves on Surfaces in Minkowski
Space**

Thesis submitted to the Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in
accordance with the requirements of the Mathematics
Graduate Program, for the degree of Doctor in Science.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Farid Tari

USP – São Carlos
July 2021

*Esse trabalho é dedicado aos meus pais, Francisco e Terezinha,
por todo o apoio que me deram ao longo de toda a caminhada.*

AGRADECIMENTOS

Essa tese encerra uma caminhada que se iniciou há vários anos atrás, quando entrei pela primeira vez na escola. Algumas pessoas que hoje são essenciais na minha vida ainda não haviam nascido. Desde a pré-escola, passando pelo ensino fundamental, médio, graduação, mestrado e chegando até o doutorado, várias pessoas me ajudaram e possuem um pedaço dessa conquista. São vocês que eu gostaria de agradecer agora.

Aos meus pais, Francisco e Terezinha. Vocês são os principais responsáveis por eu ter chegado até aqui. Agradeço por toda a dedicação, motivação, esforço e amor que me deram. Vocês sempre foram meus maiores incentivadores e meus exemplos. Pé de manga não dá laranja.

Aos meus irmãos, Marcelo e Márcio. Vocês sempre estiveram ao meu lado, nos momentos bons e ruins, e são grandes inspirações para mim, mesmo sendo mais novos. Vocês são os meus melhores amigos e eu tenho muita sorte de ter vocês dois na minha vida.

À minha namorada, Thábata. Muito obrigado por estar comigo nesses últimos anos. Com toda certeza a caminhada foi mais fácil com você do meu lado, me apoiando, me ajudando e deixando os dias mais felizes.

Ao meu orientador, Farid. Obrigado por toda ajuda durante esses quatro anos. Se não fosse todas as reuniões, presenciais e online, e conversas que tivemos, eu não chegaria até aqui. Você sempre esteve disponível e atencioso, foi muito mais que um orientador, é um grande amigo.

À minha família, por ser a minha base durante toda a minha vida. Em especial os meus avôs Geraldo, Geni, Sebastião e Lúzia, em memória dos três primeiros, por tudo que fizeram por mim, mesmo antes de eu nascer. A minha Madrinha Aparecida, por ser a minha segunda mãe. Meus Padrinhos Admilson e Maria, por todo o apoio e encorajamento. Aos meus tios e primos, dos quais gostaria de destacar a Tia Lúcia, Tio Miranda, Tio Carlos, Angélica, Angelina, Eduardo, Lígia, Letícia, Silas e Daniel.

Infelizmente, algumas pessoas importantes não estão mais aqui, mas não posso deixar de mencioná-las. Tio Quincas, uma das primeiras pessoas a ver potencial acadêmico em mim e um grande incentivador enquanto estive comigo. Meu Padrinho Joaquim, a melhor pessoa que conheci, um grande exemplo de vida e que sempre esteve do meu lado. De onde vocês estiverem, meu muito obrigado por tudo que fizeram por mim.

Aos meus amigos, por fazerem a caminhada ser mais divertida. Alguns já estão comigo a mais tempo, outros menos, mas todos são muito especiais. Gostaria de agradecer especialmente

ao Cláudio, Gustavo, Bruno, Rodrigo, Marcos, Karine e Eveline. Aos meus colegas do laboratório de singularidades, obrigado pelos momentos de descontração, a união e o companheirismo ao longo dos últimos anos.

Aos meus professores. Sempre tive ótimos professores por todas as instituições que passei e cada aula ou conversa foi de suma importância. Dentre todos, não posso deixar de citar os professores Alex e Pironel do IFMG campus Formiga e Fabio e Luis Fernando da UNIFEI.

À equipe da SOMMUS, pelo tempo que trabalhamos juntos. Aprendi muitas coisas com vocês, muito mais do que programação. Obrigado pela oportunidade que me deram e por todas as vezes que me permitiram dedicar aos estudos. Em particular, quero mencionar dois grandes amigos, Reginaldo e Aurélio.

À OBMEP, por ter despertado o meu amor pela matemática. Agradeço ao IMPA e a SBM pela organização das olimpíadas e espero que ela continue por muitos anos ajudando os alunos como me ajudou. Agradeço também a CAPES pelo auxílio financeiro durante os quatro anos de doutorado.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram com essa conquista, meu muito obrigado!

“Nunca será um verdadeiro matemático aquele que não for um pouco poeta.”
(Karl Weierstrass)

RESUMO

FERNANDES, M. A. C. **Pontos Umbílicos e Curvas Especiais em Superfícies no Espaço Minkowski**. 2021. 181 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

O estudo de superfícies no espaço Minkowski apresenta diferenças com relação ao caso Euclidiano. A mudança na primeira forma fundamental cria pontos onde a métrica pode se degenerar e pontos onde as direções principais coincidem. Tais conjunto são denotados por LD e LPL , respectivamente, e as suas singularidades dão origem aos pontos umbílicos.

Este trabalho contém um estudo a respeito da geometria diferencial de superfícies em \mathbb{R}_1^3 , abordando temas como as interseções entre o LD e o LPL , a multiplicidade de pontos umbílicos, deformações de fenômenos de codimensão 1 em famílias de superfícies a 1-parâmetro e a inversão de Möbius. Os resultados obtidos visam contribuir com uma possível generalização da Conjectura de Carathéodory no espaço Minkowski provada por Farid Tari.

Palavras-chave: Espaço Minkowski, Superfície, Ponto umbílico, Conjectura de Carathéodory.

ABSTRACT

FERNANDES, M. A. C. **Umbilic Points and Special Curves on Surfaces in Minkowski Space**. 2021. 181 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

The study of surfaces in the Minkowski 3-space presents differences in relation to the Euclidean 3-space. The induced metric can degenerate at some points and the principal directions can coincide at other points. These sets are denoted by LD and LPL , respectively, and their singularities give rise to umbilic points.

This thesis contains a study on the differential geometry of surfaces in the Minkowski 3-space, addressing topics such as the intersections between the LD and the LPL , the multiplicity of umbilic points, deformations of codimension 1 phenomena in 1-parameter families of surfaces and the Möbius inversion. The results obtained are a contribution to a possible generalization of the Carathéodory Conjecture in Minkowski 3-space proved by Farid Tari.

Keywords: Minkowski Space, Surface, Umbilic Point, Carathéodory Conjecture.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diferencial de uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ entre variedades.	28
Figura 2 – Exemplo de subvariedades transversais e não transversais.	29
Figura 3 – Estratificação da <i>Swallowtail</i>	34
Figura 4 – Deformações da singularidade A_3 (A_3^+ esquerda, A_3^- direita) de acordo com a região da estratificação da <i>Swallowtail</i>	35
Figura 5 – Partição do plano uy induzida pela partição da <i>Swallowtail</i>	36
Figura 6 – Configuração das singularidades hiperbólicas e semi-hiperbólicas de uma EDO. As setas foram omitidas pois o interesse principal é o campo de direções.	40
Figura 7 – Configuração local das soluções de uma EDB em uma singularidade com multiplicidade infinita.	44
Figura 8 – Posição relativa entre cada tipo de vetor e o cone de luz.	47
Figura 9 – Pseudo-esferas no espaço Minkowski.	48
Figura 10 – Aplicação de Gauss no espaço Euclidiano.	49
Figura 11 – Exemplo de superfícies fechadas convexas e não convexas.	49
Figura 12 – Aplicação de Gauss restrita à região Riemanniana.	51
Figura 13 – Aplicação de Gauss restrita à região Lorentziana.	51
Figura 14 – Configuração genérica das linhas de curvatura em superfícies no espaço Minkowski.	53
Figura 15 – Singularidades dobradas genéricas de uma EDB.	64
Figura 16 – Levantamento do campo de direções e projeção no plano tangente da superfície \mathcal{M}	65
Figura 17 – Interseção entre o LD e o LPL em p_i	71
Figura 18 – Função g_q associada a cada ponto $q \in M$	75
Figura 19 – Ponto umbílico timelike com singularidade D_6^- e multiplicidade 2. As curvas em azul e vermelho representam $\bar{l} = 0$ e $\bar{n} = 0$. Os pontos em preto e azul indicam os pontos umbílicos e as singularidades do LPL que não são pontos umbílicos, respectivamente.	88
Figura 20 – Ponto umbílico timelike com singularidade D_6^- e multiplicidade 3. As curvas em azul e vermelho representam $\bar{l} = 0$ e $\bar{n} = 0$. Os pontos em preto e azul indicam os pontos umbílicos e as singularidades do LPL que não são pontos umbílicos, respectivamente.	89

Figura 21 – Condições para que um ponto umbílico timelike possua multiplicidade maior que 1 (curva azul) e para que a aplicação distância ao quadrado não tenha uma singularidade D_4^\pm (curva laranja).	91
Figura 22 – Condições para que um ponto umbílico spacelike possua multiplicidade maior que 1 (curva azul) e para que a aplicação distância ao quadrado não tenha uma singularidade D_4^\pm (curva laranja).	92
Figura 23 – Configurações genéricas das linhas de curvatura em pontos umbílicos no espaço Euclidiano.	96
Figura 24 – Configurações genéricas das linhas de curvatura em pontos umbílicos timelike.	97
Figura 25 – Deformações da singularidade A_3^- do LPL através de uma boa família de superfícies. As curvas em vermelho representam o LPL . Os pontos em destaque são os pontos umbílicos.	102
Figura 26 – Posição relativa das curvas LPL (vermelho), conjunto parabólico (azul) e CMN (verde) em um ponto umbílico timelike plano.	105
Figura 27 – Posição relativa entre o LPL (em vermelho) e o conjunto parabólico (em azul).	107
Figura 28 – Possíveis combinações para os sinais de F e G	107
Figura 29 – Configuração não realizável entre o LPL (em vermelho), o conjunto parabólico (em azul) e a CMN (em verde).	108
Figura 30 – Partição do plano ab que determina a configuração entre o LPL , o conjunto parabólico e a CMN em um ponto umbílico timelike plano. Nas regiões azuis, verdes e vermelhas ocorrem as configurações da esquerda, do meio e da direita na Figura 26, respectivamente. As curvas em azul, laranja, verde e roxo representam as condições $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$, $\Lambda_4 = 0$ e $\Lambda_5 = 0$, respectivamente.	109
Figura 31 – Posição relativa entre o LPL e a CMN em uma boa família de superfícies para pontos umbílicos timelike planos. As curvas LPL e CMN são representadas nas cores vermelha e verde, respectivamente.	110
Figura 32 – Deformações do conjunto parabólico em famílias genéricas de superfícies para pontos umbílicos timelike planos.	111
Figura 33 – Deformações do LPL (vermelho), conjunto parabólico (azul) e CMN (verde) em pontos umbílicos timelike planos através de uma família genérica de superfícies.	113
Figura 34 – Posições relativas entre o LD (preto), LPL (vermelho), conjunto parabólico (azul) e CMN (verde) em pontos umbílicos lightlike.	117
Figura 35 – Possíveis configurações entre o LPL e o conjunto parabólico e a CMN	118
Figura 36 – Deformação da singularidade A_1^+ no LD em uma boa família de superfícies.	120
Figura 37 – Deformação da singularidade A_1^- no LD em uma boa família de superfícies.	121
Figura 38 – Deformação em uma família genérica de superfícies da singularidade A_3^+ do LPL	123

Figura 39 – Deformação em uma família genérica de superfícies da singularidade A_3^- do LPL	123
Figura 40 – Deformações das curvas LD (preto), LPL (vermelho), conjunto parabólico (azul) e a CMN (verde) em famílias genéricas de superfícies em pontos umbílicos lightlike.	128
Figura 41 – Deformações das interseções de ordem de contato 4 entre o LD e o LPL através de uma boa família de superfícies. As curvas em vermelho e preto representam o LPL e o LD , respectivamente. A curva verde pontilhada apresenta uma possível configuração da CMN	131
Figura 42 – Inversão de Möbius da esfera Euclidiana S no espaço Minkowski.	139
Figura 43 – Partição do plano ac que determina as configurações de $S_{(a,c)} \cap LC$, tais configurações são representadas em vermelho.	142
Figura 44 – Partição do plano ac que determina as configurações do LD de $\tilde{S}_{(a,c)}$, tais configurações são representadas em vermelho.	144
Figura 45 – Partição do espaço de parâmetros de acordo com a quantidade de pontos umbílicos de $\tilde{S}_{(a,c)}$. Os pontos vermelho em frente ao nome da região indicam quantos pontos umbílicos $\tilde{S}_{(a,c)}$ possui.	146
Figura 46 – Elipsoide com centro em $p = (a, b, c)$ e raios r_1, r_2 e r_3	147
Figura 47 – Esquema para o cálculo da distância entre $p + rN_e(p)$ e os pontos p e q	149
Figura 48 – Deformações da esfera S pela família de superfícies S_t . As regiões em laranja representam a imagem de U_2 por φ_t	154
Figura 49 – Subvariedade de $U_2 \times [0, 1]$ obtida pelo LD da família de superfícies S_t com $t \in [0, 1]$	155
Figura 50 – Configurações do LD de S_t de acordo com o valor de $t \in [0, 1]$. A curva em azul representa o bordo de U_2 enquanto a curvas pretas são o LD	155
Figura 51 – Superfície $S_{1/10}$. As regiões Riemanniana e Lorentziana são representadas em verde e vermelho, respectivamente.	155
Figura 52 – Região Riemanianna homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 sem pontos umbílicos. A curva em azul representa o LD	156
Figura 53 – Possível configuração das linhas de curvatura para uma região Lorentziana homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 sem pontos umbílicos. A curva em vermelho representa o LD	157
Figura 54 – Gráfico da função assintoticamente constante $f(r, \theta) = \frac{1}{r^2+1}$	168
Figura 55 – Partição do plano ac que determina as configurações de \tilde{F} , tais configurações são representadas em vermelho.	174
Figura 56 – Partição do plano ac que determina as configurações de \tilde{F} , tais configurações são representadas em vermelho.	175

SUMÁRIO

I	APRESENTAÇÃO	21
1	INTRODUÇÃO	23
2	RESULTADOS PRELIMINARES	27
2.1	Variedades e Transversalidade	27
2.2	Teoria de Singularidades	29
2.3	Multiplicidade Local de Aplicações Holomorfas	36
2.4	Equações Diferenciais	38
2.5	Espaço Minkowski	46
2.6	Geometria Diferencial	48
II	PROPRIEDADES LOCAIS	61
3	CONTATO ENTRE O LD E O LPL	63
3.1	Propriedades do LD	63
3.2	Ordem de Contato entre o LD e o LPL	68
4	MULTIPLICIDADE DE PONTOS UMBÍLICOS	73
4.1	Aplicação Monge-Taylor	73
4.2	Multiplicidade de Pontos Umbílicos	77
4.3	Função Distância ao Quadrado e a Cústica	88
5	FAMÍLIAS DE SUPERFÍCIES A 1-PARÂMETRO	95
5.1	Propriedades de Codimensão 1	95
5.2	Pontos Umbílicos Timelike com Singularidade A_3 do LPL	98
5.3	Pontos Umbílicos Timelike Planos	103
5.4	Pontos Umbílicos Lightlike	113
5.5	Pontos Umbílicos de Codimensão 1	127
5.6	Tangências degeneradas entre o LD e o LPL	129
III	PROPRIEDADES GLOBAIS	133
6	INVERSÃO DE MÖBIUS	135

6.1	Inversão de Möbius no Espaço Euclidiano	135
6.2	Inversão de Möbius no Espaço Minkowski	137
6.2.1	<i>Inversão de Möbius de esferas Euclidianas</i>	139
6.2.2	<i>Inversão de Möbius de Ovaloides</i>	147
7	PONTOS UMBÍLICOS EM SUPERFÍCIES FECHADAS	151
7.1	Conjectura de Carathéodory	151
7.2	Reformulando a Conjectura	152
8	CONCLUSÃO	161
8.1	Trabalhos Futuros	162
	REFERÊNCIAS	163
	APÊNDICE A A CONJECTURA DE GHOMI-HOWARD	167
A.1	Conjectura de Ghomi-Howard	167
A.2	Prova do Lema A.1.1	169
	APÊNDICE B PROVA DO TEOREMA 6.2.9	173

Parte I

Apresentação

INTRODUÇÃO

Seja M uma superfície suave e orientada no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . O produto interno de \mathbb{R}^3 induz uma métrica em M que é dada pela restrição desse produto interno ao subespaço T_pM , para cada $p \in M$. Logo, a métrica é uma aplicação positiva definida em todos os pontos da superfície. Além disso, sendo $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss, segue que $-dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é um operador auto-adjunto, para todo $p \in M$ (CARMO, 2008). Como \mathbb{R}^3 é um espaço de Hilbert, toda aplicação auto-adjunta possui autovetores ortogonais (BREZIS, 2010), ou seja, em todo ponto $p \in M$ a aplicação $-dN_p$ possui dois autovalores reais, denominados curvaturas principais, e dois autovetores relacionados, chamados de direções principais.

Por outro lado, ao mergulhar M no espaço Minkowski \mathbb{R}_1^3 , fica definida uma pseudo-métrica em todos os pontos de M , induzida pelo pseudo-produto interno de \mathbb{R}_1^3 . Portanto, podem existir pontos em M onde a pseudo-métrica é degenerada. O conjunto de todos esses pontos é denotado por LD . Assim, o LD contém os pontos $p \in M$ onde T_pM é um plano lightlike e, genericamente, divide a superfície em duas regiões, Riemanniana e Lorentziana, onde os planos tangentes são spacelike e timelike, respectivamente.

A partir da aplicação de Gauss definida por Pei (PEI, 1999), é possível construir um campo de vetores unitários N em $M \setminus LD$ de modo que $N(p)$ é normal ao plano T_pM em \mathbb{R}_1^3 e $-dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é um operador auto-adjunto, para todo $p \in M$ (COUTO; LYMBERO-POULOS, 2018). Os autovalores e autovetores de $-dN_p$ também são chamados de curvaturas e direções principais, respectivamente. Entretanto, como \mathbb{R}_1^3 não é um espaço de Hilbert, existem pontos onde $-dN_p$ não possui dois autovetores ortogonais, ou seja, as direções principais não estão definidas. O conjunto dos pontos onde $-dN_p$ possui uma única direção principal é denotado por LPL (IZUMIYA; TARI, 2010).

Em $M \setminus LD$ as direções principais são dadas por uma equação diferencial binária (EDB), de modo análogo ao caso Euclidiano. Essa EDB define as linhas de curvatura e pode ser estendida para toda a superfície (IZUMIYA; TARI, 2010) de modo que as direções principais também

estejam bem definidas nos pontos do LD . O LPL é um subconjunto do discriminante da EDB das linhas de curvatura e os pontos umbílicos são aqueles onde os coeficientes da EDB se anulam simultaneamente. Um ponto umbílico é dito spacelike, timelike ou lightlike quando ele pertence a região Riemanniana, Lorentziana ou ao LD , respectivamente.

A existência do LD e do LPL representam uma diferença importante entre o estudo de superfícies em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}_1^3 . As diferenças entre estes espaços faz com que resultados que valem em um deles, não sejam verdadeiros no outro. A conjectura de Carathéodory afirma que toda superfície fechada e convexa possui pelo menos dois pontos umbílicos. No espaço Euclidiano, esta conjectura ainda está em aberto, embora muitos matemáticos tenham trabalhado nesse problema, ver a Seção 7.1. Porém, no espaço Minkowski, Tari provou em (TARI, 2013) que a conjectura é verdadeira para superfícies de classe \mathcal{C}^3 .

O objetivo desta tese é desenvolver ferramentas e resultados que permitam enfraquecer as hipóteses do teorema principal em (TARI, 2013). O foco é generalizar o resultado para superfícies em \mathbb{R}_1^3 fechadas, não convexas, mas difeomorfas a esfera \mathbb{S}^2 . A classe de diferenciabilidade não será tratada, mas uma possibilidade seria utilizar os resultados de (ANDO; FUJIYAMA; UMEHARA, 2017) a fim de obter uma versão do resultado para superfícies de classe \mathcal{C}^1 .

Nesse sentido, foi estudado inicialmente o artigo (GHOMI; HOWARD, 2012), onde os autores obtêm uma nova versão para a Conjectura de Carathéodory no espaço Euclidiano. O Capítulo 6 e os Apêndices A e B apresentam os resultados provenientes desse estudo. Em especial, são obtidas algumas propriedades da inversão de Möbius em \mathbb{R}_1^3 .

Uma outra alternativa é adaptar a demonstração dada por Tari, substituindo os argumentos que necessitam da convexidade. Essa abordagem é apresentada no Capítulo 7. Em (TARI, 2013), a convexidade é utilizada para provar que o LD e o LPL não se intersectam, garantindo que toda região Riemanniana, cujo bordo é uma curva regular pertencente ao LD , possui pelo menos um ponto umbílico.

Assim, o ponto de partida para a pesquisa é o entendimento das interseções entre o LD e o LPL . A existência de tais pontos impossibilita a aplicação de um argumento análogo ao de (TARI, 2013). Uma possibilidade seria a aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson, visto que o LD pode ser um ciclo limite para as linhas de curvatura. Entretanto, os resultados do Capítulo 3, a respeito das linhas de curvatura nessas interseções e das implicações provenientes da ordem de contato entre as curvas, mostram que este teorema não pode ser aplicado.

Uma outra possibilidade é entender como surgem as regiões Riemannianas. Tais regiões são oriundas de singularidades do LD , ou seja, dos pontos umbílicos lightlike. Estes pontos possuem em geral codimensão 1, isto é, são estáveis em famílias genéricas de superfícies a 1-parâmetro. O Capítulo 5 apresenta propriedades de codimensão 1, são utilizadas famílias de superfícies para estudar as deformações genéricas de tais pontos, como em (BRUCE, 1984), (BRUCE; GIBLIN; TARI, 1995) e (BRUCE; GIBLIN; TARI, 1999). Outros exemplos de

pontos umbólicos de codimensão 1 são os umbólicos planos e aqueles onde o LPL possui uma singularidade A_3 . Além destes exemplos, as interseções entre o LD e o LPL com ordem de contato 4 também possuem codimensão 1 e o estudo delas encerra o assunto iniciado no Capítulo 3.

As singularidades A_3 do LPL mostram o surgimento de novos pontos umbólicos em famílias de superfícies. Dado um ponto umbólico p em uma superfície M , denominamos por multiplicidade de p o número máximo de pontos umbólicos que surgem a partir de p ao perturbar M . O Capítulo 4 foi inspirado em (BRUCE; TARI, 1998) e apresenta um estudo da multiplicidade de pontos umbólicos.

Esta tese está dividida em duas partes principais. A primeira delas apresenta os resultados locais sobre superfícies e é constituída pelos Capítulos 3, 4 e 5. Propriedades locais são aquelas que dependem apenas de uma vizinhança pequena do ponto de interesse, tais como as curvaturas, direções principais e assintóticas. Neste contexto, a Teoria de Singularidades é útil, pois dispõe de ferramentas que permitem estudar o comportamento de funções na vizinhança dos pontos de interesse.

Na outra parte da tese, composta pelos Capítulos 6 e 7 juntamente com os Apêndices A e B, são consideradas propriedades globais e semi-globais, isto é, resultados que dependem da superfície como um todo ou de uma determinada parte dela, respectivamente. Para obter tais resultados são utilizadas propriedades da superfície como a convexidade, compacidade, característica de Euler.

O Capítulo 2 faz uma breve revisão sobre alguns assuntos da literatura que são utilizados ao longo do texto. Além disso, são apresentados os primeiros resultados oriundos desta tese, sobre alguns assuntos que diferem do objetivo principal do trabalho.

RESULTADOS PRELIMINARES

Ao longo deste trabalho são utilizados alguns conceitos já existentes e difundidos na literatura. Este capítulo é um compilado desses assuntos com um breve resumo das ferramentas utilizadas no decorrer do texto. Para obter mais detalhes sobre cada tema, no início de cada seção são dadas as referências utilizadas naquele tópico.

Além disso, são apresentados resultados originais utilizados na tese. Dentre eles destacamos o estudo sobre a *Swallowtail* e as deformações da singularidade A_3 , uma forma prática de se classificar singularidades semi-hiperbólicas em EDO's (Proposição 2.4.1), a configuração local de EDB's em singularidades com multiplicidade infinita (Teorema 2.4.2) e a forma normal do 3-jato de parametrizações de Monge em vizinhanças de pontos umbílicos timelike (Teorema 2.6.6).

2.1 Variedades e Transversalidade

As variedades diferenciáveis e a noção de transversalidade são amplamente utilizadas neste trabalho. Por isso seguem a seguir as principais definições e os resultados mais importantes. Para mais detalhes, ver (GIBSON, 1979) e (GOLUBITSKY; GUILLEMIN, 1973).

Variedades Diferenciáveis

Sejam X e Y subconjuntos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respectivamente. A aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **suave** se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x em \mathbb{R}^n e uma aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ tal que $F(y) = f(y)$, para todo $y \in X \cap U$.

Uma **parametrização** (n -dimensional) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, $\phi(U) = X$ e $\phi : U \rightarrow X$ é um homeomorfismo. O subconjunto $N \subset \mathbb{R}^m$ é uma **variedade diferenciável de dimensão n** se para todo $x \in N$ existe

uma vizinhança aberta V de x em \mathbb{R}^n e uma parametrização $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi(U) = N \cap V$. A aplicação $\phi^{-1} : V \cap N \rightarrow U$ é chamada de **carta** ou **sistema de coordenadas**.

Dada uma variedade n -dimensional N , uma **subvariedade** de N é uma variedade $M \subset N$. Se M possui dimensão m , então a **codimensão** de M em N é $n - m$.

Sejam $N \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade de dimensão n , $x \in N$ e $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma parametrização de N com $\phi(0) = x$. O **espaço tangente** a N em x é dado pela imagem da aplicação linear $d\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e denotado por $T_x N$. Tal definição independe da escolha da parametrização, logo o espaço tangente a N em x está bem definido. Além disso, $T_x N$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^m de dimensão n .

É possível definir a diferencial de uma aplicação entre variedades em um ponto. Sejam $M \subset \mathbb{R}^p$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades de dimensão m e n , respectivamente. Dada uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ e $x \in M$, existem uma vizinhança aberta U de x em \mathbb{R}^p e uma aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^∞ tal que $F|_{M \cap U} = f$. Além disso, $dF_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ é uma aplicação linear com $dF_x(T_x M) \subset T_y N$, onde $y = f(x)$. A restrição de dF_x a $T_x M$ é chamada de **diferencial** de f em x e denotada por $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$. Esta definição independe da escolha de F , portanto a diferencial de f está bem definida, ver Figura 1.

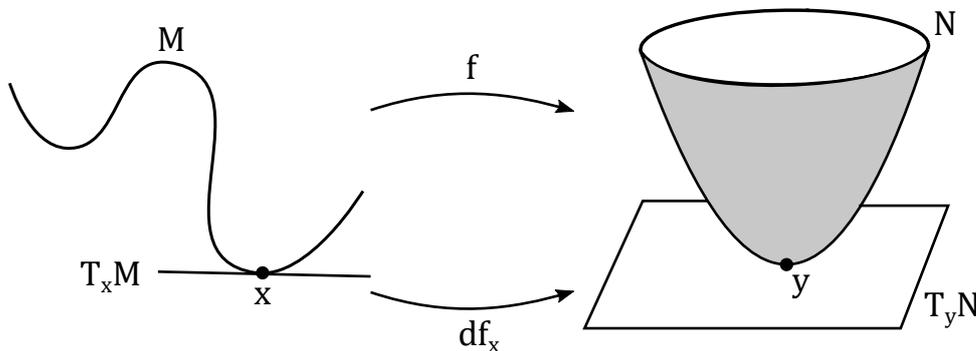


Figura 1 – Diferencial de uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ entre variedades.

Um **ponto singular**, ou uma **singularidade**, de uma aplicação suave $f : N \rightarrow M$ é um ponto $x \in N$ tal que a diferencial de f em x não é uma submersão nem uma imersão, isto é,

$$\text{rank}(df_x) < \min\{\dim M, \dim N\}.$$

Transversalidade

Dois subespaços vetoriais U e V de W se intersectam transversalmente se $U \oplus V = W$. Duas subvariedades N_1 e N_2 de N se intersectam transversalmente em $x \in N_1 \cap N_2$ quando $T_x N_1$ e $T_x N_2$ se intersectam transversalmente em $T_x N$. Quando N_1 e N_2 se intersectam transversalmente em todo $x \in N_1 \cap N_2$, então N_1 e N_2 são ditas **transversais** em N , ver Figura 2.

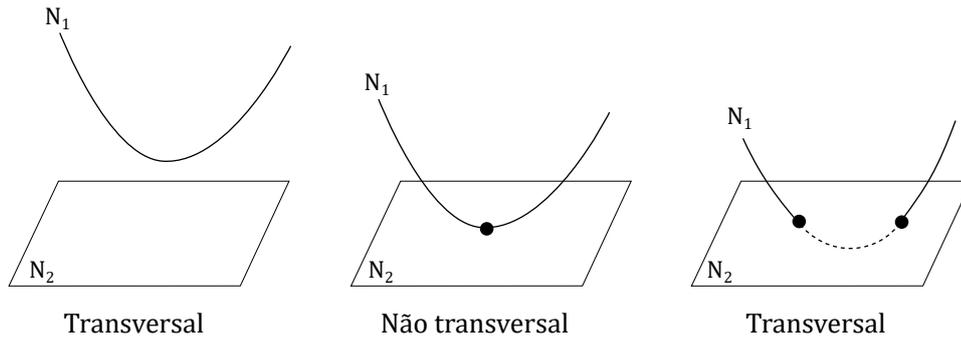


Figura 2 – Exemplo de subvariedades transversais e não transversais.

Dada uma aplicação suave $f : N \rightarrow P$ e Q uma subvariedade de P , f é **transversal a Q** , e denotada por $f \pitchfork Q$, se $\text{graf}(f)$ e $N \times Q$ são transversais em $N \times P$. Se $Q = \{y\}$, então y é um **valor regular** de f se $f \pitchfork Q$, caso contrário y é chamado de **valor crítico** de f .

Proposição 2.1.1. Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação suave e Q uma subvariedade de P com $f \pitchfork Q$. Então $M = f^{-1}(Q)$ é uma subvariedade de N de mesma codimensão que Q , ou vazio.

Teorema 2.1.1. (Teorema de Sard) Sejam N e P variedades e $f : N \rightarrow P$ uma aplicação suave. O conjunto dos valores críticos de f tem medida de Lebesgue nula em P .

Lema 2.1.1. (Lema da Transversalidade Básica) Sejam $f : N \times S \rightarrow P$ uma família de aplicações suaves e Q_1, Q_2, \dots, Q_t subvariedades de P . Se $f \pitchfork Q_i$, para todo $i = 1, \dots, t$, então existe um conjunto denso de parâmetros $s \in S$ tais que $f_s : N \rightarrow P$ é transversal a Q_i , para todo $i = 1, \dots, t$, sendo $f_s(x) = f(x, s)$.

2.2 Teoria de Singularidades

A Teoria de Singularidades estuda o comportamento local de aplicações diferenciáveis. Esta seção apresenta algumas definições e resultados desta teoria. Para mais detalhes, ver (ARNOLD; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985), (GIBSON, 1979) e (WALL, 1981). Estes conceitos podem ser aplicados para o estudo de propriedades locais em geometria diferencial de curvas e superfícies, como apresentado em (IZUMIYA *et al.*, 2016).

Germes e Jatos

Sejam X e Y dois subconjuntos de \mathbb{R}^n com $p \in X \cap Y$. Escreva $X \sim Y$ se existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in W$, tal que $X \cap W = Y \cap W$. Este \sim é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de X no ponto p é chamada de **germe de conjunto** no ponto p e denotada por (X, p) .

Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in U \cap V$. Dadas funções suaves $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, então $f \sim g$ se existe um aberto $W \subset U \cap V$, com $p \in W$, tal que $f = g$ em W . A relação \sim é uma relação

de equivalência. Um **germe de função diferenciável** no ponto p é uma classe de equivalência de \sim . Um germe é denotado por $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Tome um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^n de modo que p é a origem. O conjunto de todos os germes de funções diferenciáveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} na origem é denotado por

$$\mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é suave}\}.$$

\mathcal{E}_n é um anel comutativo local. Logo, \mathcal{E}_n possui um único ideal máximo, denotado por \mathcal{M}_n . O ideal \mathcal{M}_n é formado pelos germes de funções diferenciáveis que se anulam na origem. Assim, em um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) ,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Dado um inteiro positivo $k \in \mathbb{Z}_+$, a k -ésima potência de \mathcal{M}_n é o ideal denotado por \mathcal{M}_n^k e formado pelos germes $f \in \mathcal{M}_n$ cujas derivadas parciais de ordem menor do que ou igual a $k - 1$ se anulam, ou seja,

$$\mathcal{M}_n^k = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} : i_1 + \cdots + i_n = k\}.$$

O conjunto de todos os germes de funções diferenciáveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m na origem é denotado por \mathcal{E}_n^m e dado por

$$\mathcal{E}_n^m = \underbrace{\mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_{m \text{ vezes}}.$$

O **espaço dos k -jatos** de germes de funções diferenciáveis é definido pelo quociente

$$J^k(n, m) = \frac{\mathcal{E}_n^m}{\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_n^m}.$$

A imagem do germe $f \in \mathcal{E}_n^m$ pela projeção natural $j^k : \mathcal{E}_n^m \rightarrow J^k(n, m)$ é denominado **k -jato** de f e denotado por $j^k f$. Note que $j^k f$ é o polinômio de Taylor de f de ordem k na origem. Dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j_p^k f$ denota o polinômio de Taylor de f de ordem k em p .

Grupos de Mather e Determinação Finita

Seja G um grupo e X um conjunto. Uma **ação** de G sobre X é uma aplicação $\alpha : G \times X \rightarrow X$ satisfazendo duas condições:

- (1) $\alpha(1, x) = x$, para todo $x \in X$, onde 1 é a identidade de G ;
- (2) $\alpha(g \cdot h, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$, para todo $x \in X$ e $g, h \in G$.

Dada uma ação $\alpha : G \times X \rightarrow X$ de um grupo G sobre um conjunto X , a **órbita** de G pelo ponto $p \in X$ é dada por

$$G \cdot p = \{\alpha(g, p) : g \in G\} \subset X.$$

A Teoria de Singularidades estuda a ação de alguns grupos especiais sobre \mathcal{E}_n^m . Tais grupos são chamados de **Grupos de Mather** e denotados por \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{A} , \mathcal{H} e \mathcal{C} . Os três primeiros são apresentados com mais detalhes a seguir.

O grupo $\mathcal{R} = \{\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0); \varphi \text{ germe de difeomorfismo}\}$ age sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ por composição à direita, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m &\rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \\ (\varphi, f) &\mapsto \varphi \cdot f = f \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, o grupo \mathcal{R} é composto pelas mudanças de coordenadas na fonte. Por outro lado, o grupo $\mathcal{L} = \{\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0); \psi \text{ germe de difeomorfismo}\}$ age sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ por composição à esquerda, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \times \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m &\rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \\ (\psi, f) &\mapsto \psi \cdot f = \psi \circ f. \end{aligned}$$

Logo, o grupo \mathcal{L} é formado pelas mudanças de coordenadas na meta. Finalmente, o grupo $\mathcal{A} = \{(\varphi, \psi); \varphi \in \mathcal{R}, \psi \in \mathcal{L}\}$ age sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ por composição à direita e a esquerda, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m &\rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \\ ((\varphi, \psi), f) &\mapsto (\varphi, \psi) \cdot f = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Dois germes $f, g \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ são **\mathcal{R} -equivalentes** (respectivamente, **\mathcal{L} -equivalentes**, ou **\mathcal{A} -equivalentes**) se existe $\varphi \in \mathcal{R}$ (respectivamente, $\psi \in \mathcal{L}$, ou $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}$) tal que $f = g \circ \varphi^{-1}$ (respectivamente, $f = \psi \circ g$, ou $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$). A \mathcal{G} -equivalência de dois germes $f, g \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ é denotada por $f \sim_{\mathcal{G}} g$.

Dado $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ e \mathcal{G} um grupo de Mather, o espaço tangente à órbita de f é denotado por $L\mathcal{G} \cdot f$. Um germe $\xi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow T\mathbb{R}^m$ é um **germe de campo de vetores** ao longo de f se $f = \pi \circ \xi$, onde $\pi : T\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção natural. O \mathcal{E}_n -módulo θ_f é o conjunto dos germes de campos de vetores ao longo de f . Denote por θ_n o \mathcal{E}_n -módulo θ_{I_n} , sendo $I_n : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ o germe da aplicação identidade.

Dado $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$, a aplicação $tf : \theta_n \rightarrow \theta_f$, dada por $tf(\phi) = df \circ \phi$, é um \mathcal{E}_n -homomorfismo. O pull-back $f^* : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$, com $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$, induz um \mathcal{E}_m -homomorfismo $wf : \theta_m \rightarrow \theta_f$ dado por $wf(\psi) = \psi \circ f$.

Os **espaços tangentes à \mathcal{G} -órbita** de f são definidos como

$$L\mathcal{R} \cdot f = tf(\mathcal{M}_n \cdot \theta_n), \quad L\mathcal{L} \cdot f = wf(\mathcal{M}_m \cdot \theta_m), \quad L\mathcal{A} \cdot f = L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f.$$

Os **espaços tangentes estendidos à \mathcal{G} -órbita** de f , para quando o ponto de interesse não é a origem, são definidos como

$$L\mathcal{R}_e \cdot f = tf(\theta_n), \quad L\mathcal{L}_e \cdot f = wf(\theta_m), \quad L\mathcal{A}_e \cdot f = L\mathcal{R}_e \cdot f + L\mathcal{L}_e \cdot f.$$

Fixando um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em $(\mathbb{R}^n, 0)$, segue que

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{M}_n \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle, & L\mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \\ L\mathcal{R}_e \cdot f &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle, & L\mathcal{L}_e \cdot f &= f^*(\mathcal{E}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m .

A **codimensão da órbita** de f é definida como

$$\text{cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m}{L\mathcal{G} \cdot f}$$

e a **codimensão estendida da órbita** de f é dada por

$$\text{cod}_e(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n^m}{L\mathcal{G}_e \cdot f}.$$

Quando $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ e $m = 1$, a codimensão estendida da órbita de f é chamada de **número de Milnor** de f e denotado por $\mu(f)$.

Um germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ é **k - \mathcal{G} -finitamente determinado** se $f \sim_{\mathcal{G}} g$ para todo $g \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ com $j^k f = j^k g$. O menor inteiro positivo k satisfazendo esta condição é chamado de **grau de determinação** de f . O germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ é **\mathcal{G} -finitamente determinado** se é k - \mathcal{G} -finitamente determinado para algum k .

Teorema 2.2.1. (WALL, 1981) Para $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ e \mathcal{G} um dos grupos de Mather, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é \mathcal{G} -finitamente determinado;
- (2) $\mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{E}_n^m \subset L\mathcal{G} \cdot f$, para algum k ;
- (3) $\text{cod}(f, \mathcal{G}) < \infty$;
- (4) $\text{cod}_e(f, \mathcal{G}) < \infty$.

Desdobramentos Versais

Seja \mathcal{G} um grupo de Mather e $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$. Um **desdobramento a a -parâmetros** de f , denotado por (a, F) , é um germe

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^a, (0, 0)),$$

com $F(x, u) = (\bar{F}(x, u), u)$ e $\bar{F}(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$. A aplicação \bar{F} é chamada de **deformação** de f e denotada por $\bar{F}_u : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ o germe dado por $\bar{F}_u(x) = \bar{F}(x, u)$.

Um morfismo entre dois desdobramentos (a, F) e (b, G) de f é um par $(\alpha, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$, com $\alpha : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^b, 0)$ e $\psi : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ tal que $\bar{F}_u = \alpha(u) \cdot \bar{G}_{\psi(u)}$. Nesse caso,

(a, F) é dito **induzida** de (b, G) por (α, ψ) . Dois desdobramentos são equivalentes se ψ é um germe de difeomorfismo. Um desdobramento (a, F) de f é **\mathcal{G} -versal** se qualquer outro desdobramento (b, G) de f pode ser induzido por (a, F) . Tais definições também são aplicadas para os grupos estendidos \mathcal{G}_e .

Teorema 2.2.2. (WALL, 1981) Um desdobramento (a, F) de $f \in \mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_n^m$ é \mathcal{G} -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G} \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{M}_n \varepsilon_n^m,$$

onde $u = (u_1, \dots, u_a) \in \mathbb{R}^a$ e $\dot{F}_i(x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)$. E (a, F) é um desdobramento \mathcal{G}_e -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \varepsilon_n^m.$$

No caso em que $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ e $m = 1$, são associados a um desdobramento (a, F) de $f \in \mathcal{M}_n$ os seguintes conjuntos:

Conjunto Catástrofe:

$$C_F = \left\{ (x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) : \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, u) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, u) = 0 \right\};$$

Conjunto Discriminante:

$$D_F = \{u \in (\mathbb{R}^a, 0) : \exists x \in (\mathbb{R}^n, 0) \text{ tal que } (x, u) \in C_F \text{ e } f(x, u) = 0\};$$

Conjunto Bifurcação:

$$B_F = \{u \in (\mathbb{R}^a, 0) : \exists x \in (\mathbb{R}^n, 0) \text{ tal que } (x, u) \in C_F \text{ e } \text{rank}(\text{Hess } F(x, u)) < n\}, \quad (2.1)$$

onde $\text{Hess } F(x, u)$ é a matriz Hessiana de F em (x, u) com relação às derivadas em x , isto é,

$$\text{Hess } F(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x, u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(x, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x, u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(x, u) \end{pmatrix}.$$

A Swallowtail e as Deformações da Singularidade A_3

No decorrer do trabalho, são utilizadas algumas definições e resultados sobre as deformações da singularidade A_3 . Esta subseção apresenta um breve estudo sobre essa singularidade e já possui alguns resultados obtidos nós. O discriminante do desdobramento \mathcal{R} -versal $F(y, u, v, w) = y^4 + uy^2 + vy + w$ da singularidade A_3 é dado por

$$D_F = \{(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3, 0) : y^4 + uy^2 + vy + w = 0 \text{ e } 4y^3 + 2uy + v = 0\}.$$

Este conjunto é conhecido como *Swallowtail* e é uma superfície singular em \mathbb{R}^3 , parametrizada por

$$\begin{aligned} \varphi_S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, y) &\longmapsto (u, -4y^3 - 2uy, 3y^4 + uy^2). \end{aligned}$$

A Figura 3 apresenta uma estratificação de Whitney da *Swallowtail*. Além dos estratos que compõem a *Swallowtail*, esta superfície ainda define três abertos no espaço de parâmetros, são eles

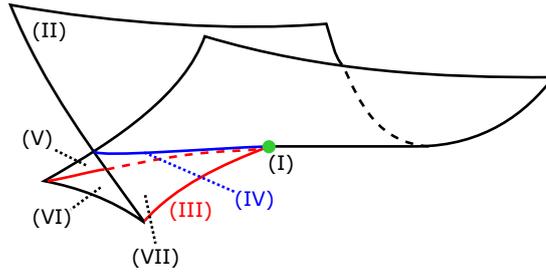


Figura 3 – Estratificação da *Swallowtail*.

- (VIII) O aberto limitado pelos estratos (III), (IV), (V), (VI) e (VII) (região dentro da *Swallowtail*), onde F possui 4 raízes reais,
- (IX) O aberto limitado pelos estratos (II) e (IV) (região acima da *Swallowtail*), onde F não possui raízes reais,
- (X) O aberto limitado pelos estratos (II), (III), (IV), (V), (VI) e (VII) (região abaixo da *Swallowtail*), onde F possui duas raízes reais.

A configuração da curva $x^2 \pm (y^4 + uy^2 + vy + w) = 0$ depende apenas do estrato em que os parâmetros (u, v, w) são tomados. A Figura 4 apresenta tais configurações.

Seja $\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com $\eta(0)$ sendo a origem, tal que $\eta(t)$ pertence a *Swallowtail*, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como $\eta'(0) = (1, 0, 0)$, aplicando uma mudança de parâmetros é possível supor

$$\eta(t) = (t, v(t), w(t)), \quad (2.2)$$

onde $v(t) = -4y(t)^3 - 2ty(t)$ e $w(t) = 3y(t)^4 + ty(t)^2$, para um germe de função $y : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema 2.2.1. A função $y(t)$ é suave em $t = 0$.

Demonstração: Como η é suave, v e w também são suaves. Além disso, $v(t) = t^2\tilde{v}(t)$ e $w(t) = t^2\tilde{w}(t)$ com \tilde{v} e \tilde{w} suaves, pois $v'(0) = w'(0) = 0$. Seja $Y(t) = y(t)^2$, então $t^2\tilde{w}(t) = 3Y(t)^2 + tY(t)$ e

$$Y(t) = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 + 12t^2\tilde{w}(t)}}{6} = -t \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 12\tilde{w}(t)}}{6} \right) = -t\tilde{Y}(t),$$

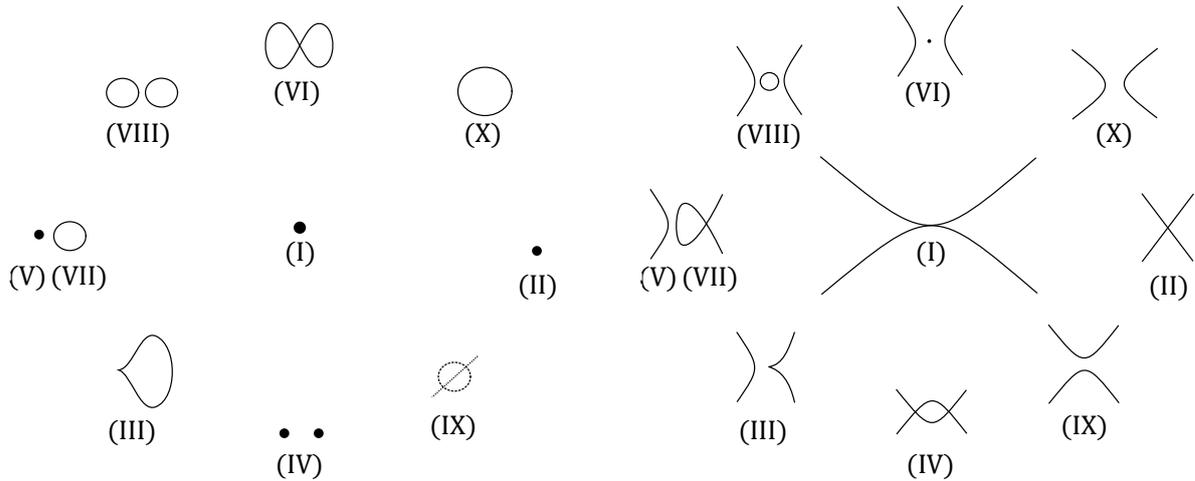


Figura 4 – Deformações da singularidade A_3 (A_3^+ esquerda, A_3^- direita) de acordo com a região da estratificação da *Swallowtail*.

onde

$$\tilde{Y}(t) = \frac{1 - \sqrt{1 + 12\tilde{w}(t)}}{6}.$$

Sejam $P_t(y) = y^4 + ty^2 + v(t)y + w(t)$ e $Q_t(y) = 4y^3 + 2ty + v(t)$. Como η é uma curva na superfície *Swallowtail*, o resultante $r(t)$ entre os polinômios P_t e Q_t com relação a y é identicamente nulo. Logo, $j^6 r \equiv 0$. Como

$$r(t) = 256w(t)^3 - 128t^2w(t)^2 + 16t^4w(t) + 144tv(t)^2w(t) - 27v(t)^4 - 4t^3v(t)^2,$$

segue que $j^6 r = 16\tilde{w}(0)(4\tilde{w}(0) - 1)^2t^6$ e $\tilde{w}(0) = 0$ ou $\tilde{w}(0) = 1/4$. Logo, $1 + 12\tilde{w}(t) > 0$ para t suficientemente próximo de 0, pois $1 + 12\tilde{w}(0)$ é igual a 1 ou 4. Assim, \tilde{Y} é suave em $t = 0$.

Por outro lado, $t^2\tilde{v}(t) = -4Y(t)y(t) - 2ty(t)$. Portanto,

$$y(t) = \frac{t^2\tilde{v}(t)}{-4Y(t) - 2t} = \frac{t^2\tilde{v}(t)}{4t\tilde{Y}(t) - 2t} = \frac{t\tilde{v}(t)}{4\tilde{Y}(t) - 2}.$$

Como $4\tilde{Y}(0) - 2 = -2 \neq 0$, segue que y é suave. ■

Teorema 2.2.3. Se η é uma curva regular na superfície *Swallowtail* com $\eta(0)$ sendo a origem, então η passa do estrato (II) para o estrato (VI) quando t muda de sinal.

Demonstração: Na Figura 3 os estratos (III) e (IV) são curvas parametrizadas por $\gamma_1(t) = (-6t^2, 8t^3, -3t^4)$ e $\gamma_2(t) = (-2t^2, 0, t^4)$, respectivamente. As parábolas $(-6t^2, t)$ e $(-2t^2, t)$ no plano uy são obtidas ao calcular a pré-imagem das curvas γ_1 e γ_2 pela parametrização φ_S da *Swallowtail*, ver Figura 5.

Da equação (2.2) e do Teorema 2.2.1, segue que $\varphi_S^{-1}(\eta) = (t, y(t))$ é o gráfico de uma função suave no plano uy . Portanto, $\varphi_S^{-1}(\eta)$ é transversal às parábolas da Figura 5, ou seja, η passa do estrato (II) para o (VI) quando t muda de sinal. ■

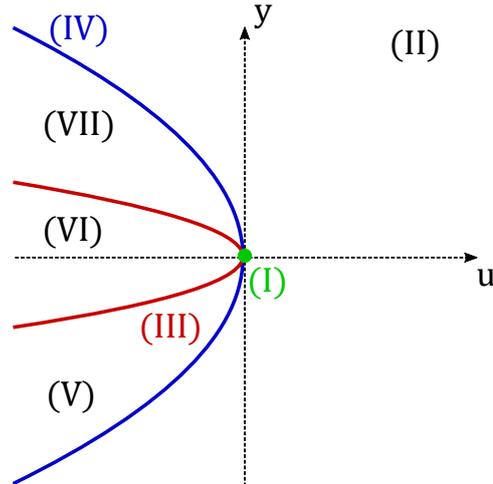


Figura 5 – Partição do plano uy induzida pela partição da *Swallowtail*.

2.3 Multiplicidade Local de Aplicações Holomorfas

Esta seção apresenta as principais definições e resultados do Capítulo 5 de (ARNOLD; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985). Pretende-se relacionar a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de uma função holomorfa. Para isso, seja $f : (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de função holomorfa em $a \in \mathbb{C}^n$. Denote por $I_{f,a}$ o ideal gerado pelos germes das funções coordenadas de f em a e $\mathcal{E}_n(a)$ o conjunto de todos os germes de funções holomorfas em a , ou seja,

$$\mathcal{E}_n(a) = \{g : (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ é holomorfa}\}.$$

A **multiplicidade** do germe f em a é dado pela dimensão da álgebra local

$$m_a(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_n(a)}{I_{f,a}}.$$

O germe f é dito de **multiplicidade finita** em a quando $m_a(f)$ é finito.

Teorema 2.3.1. Um germe $f : (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ de função holomorfa é de multiplicidade finita em a se, e somente se, a é um ponto isolado de $f^{-1}(0)$.

Seja $\mathbb{S}_r^{2n-1}(a)$ a esfera em \mathbb{C}^n centrada em a e de raio r . Segue que

$$H_m(\mathbb{S}_r^{2n-1}(a), \mathbb{Z}) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } m = 2n - 1 \\ 0 & , \text{ se } m \neq 2n - 1 \end{cases},$$

onde $H_m(\mathbb{S}_r^{2n-1}(a), \mathbb{Z})$ é o m -ésimo \mathbb{Z} -módulo de homologia de $\mathbb{S}_r^{2n-1}(a)$. Dada uma função contínua $g : \mathbb{S}_r^{2n-1}(a) \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n-1}(0)$, existe um \mathbb{Z} -homomorfismo induzido

$$g_* : H_{2n-1}(\mathbb{S}_r^{2n-1}(a), \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{S}_1^{2n-1}(0), \mathbb{Z}).$$

O grau da função g é definido como $g_*(1) \in \mathbb{Z}$. Para mais detalhes ver (VICKS, 1994). O **índice** do germe f em a é o grau da aplicação

$$\frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_r^{2n-1}(a) \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n-1}(0),$$

para r suficientemente pequeno, e é denotado por $\text{ind}_a[f]$.

Observação 2.3.1. O índice de uma aplicação holomorfa f está bem definido em a quando a é um ponto isolado de $f^{-1}(0)$, isto é, quando existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^n$ de a tal que em U o conjunto $f^{-1}(0)$ é formado apenas por a .

Teorema 2.3.2. O índice de um germe de função holomorfa de multiplicidade finita em um ponto a é igual a multiplicidade desse germe em a .

Sejam $f_i : (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ germes de funções holomorfas, para $i = 1, \dots, n$. A multiplicidade e o índice do sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

são definidos em uma vizinhança de a como a multiplicidade e o índice da aplicação $f = (f_1, \dots, f_n)$, respectivamente. Uma **perturbação** de (2.3) é um novo sistema de equações da forma

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0, \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $\tilde{f}_i : (\mathbb{C}^n, a) \times (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é um germe de aplicações holomorfas satisfazendo $\tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$, para $i = 1, \dots, n$. Quando $m_a(f) < \infty$, existe uma vizinhança de V de a de modo que a é a única solução do sistema (2.3) em V . Uma **decomposição** da raiz inicial a do sistema (2.3) é o conjunto de raízes de (2.4) em V , com o parâmetro (t_1, \dots, t_m) suficientemente pequeno.

Exemplo 2.3.1. Seja $f_1(x) = x^2$. A única solução de $f_1 = 0$ é $x = 0$. Entretanto, tomando a decomposição $\tilde{f}_1(x, t) = f_1(x) + t^2$, segue que a raiz inicial, $x = 0$, é decomposta em duas outras, $x = \pm\sqrt{t}$.

Proposição 2.3.1. Ao decompor uma raiz isolada de um sistema, a soma dos índices das novas raízes é igual ao índice da raiz inicial.

Segue do Teorema 2.3.2 que a Proposição 2.3.1 também vale ao trocar o índice pela multiplicidade. Como a multiplicidade de uma raiz isolada é finita, vale o seguinte teorema.

Teorema 2.3.3. Ao decompor uma raiz isolada de um sistema, a quantidade de novas raízes é menor do que ou igual a multiplicidade da raiz inicial.

2.4 Equações Diferenciais

Esta seção apresenta um estudo sobre Equações Diferenciais Binárias (EDB's). Os resultados desta seção são utilizados no estudo das linhas de curvatura de superfícies em \mathbb{R}^3 e no espaço Minkowski, \mathbb{R}_1^3 . Mais detalhes a respeito deste tema podem ser encontrados em (BRUCE; TARI, 1995) e (GARCIA; SOTOMAYOR, 2009).

Equações Diferenciais Implícitas

Uma **Equação Diferencial Implícita** (EDI) é uma equação da forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (2.5)$$

sendo $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Tais equações recebem o nome implícita para distingui-las das equações diferenciais onde a derivada é dada explicitamente por uma função de x e y , isto é

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y).$$

Genericamente, uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) $a(x, y)dy + b(x, y)dx = 0$ determina um campo de direções, ou seja, uma direção é relacionada com cada ponto do plano. Uma curva regular é chamada de **solução** da EDO se em cada um de seus pontos ela for tangente à direção dada. Por outro lado, uma EDI pode determinar muitas direções para um ponto (x, y) do plano e, conseqüentemente, muitas curvas soluções. Assim, uma EDI pode ser pensada como uma superposição de EDO's.

O método do levantamento do campo de direções é utilizado para estudar a configuração de uma EDI. Ele consiste em desdobrar a EDI em uma EDO definida num espaço mais complicado. A EDI (2.5) define uma superfície em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ dada por

$$\mathcal{M} = \left\{ (x, y, dy : dx) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \right\}.$$

Tomando a carta $r = dy/dx$ em $\mathbb{R}P^1$, considere \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 como sendo a superfície

$$\mathcal{M} = \{ (x, y, r) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, r) = 0 \}.$$

Seja $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ projeção natural da superfície \mathcal{M} , dada por $\pi(x, y, r) = (x, y)$. O conjunto dos pontos de \mathcal{M} onde a projeção π é singular é chamado **criminante** e a imagem do criminante pela projeção π é o **conjunto discriminante** da EDI (2.5).

O conjunto discriminante juntamente com as direções definidas em cada ponto de U são chamados de configuração da EDI (2.5). Duas equações diferenciais implícitas são ditas **topologicamente equivalentes**, se existir um homeomorfismo local do plano que leva a configuração de uma delas na da outra, e são chamadas de **suavemente equivalentes**, quando

a configuração de uma é levada na configuração da outra por meio de uma mudança local de coordenadas e pela multiplicação por uma função suave não nula.

Um campo vetorial ξ sobre a superfície \mathcal{M} é chamado de **levantamento** da EDI (2.5) se, e somente se, $d\pi_{(x,y,r)}(\xi)$ é um vetor de direção r . Quando ξ também é um campo tangente à superfície \mathcal{M} , ξ é chamado de **levantamento adequado** sobre \mathcal{M} . O campo vetorial

$$\xi = F_r \frac{\partial}{\partial x} + rF_r \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + rF_y) \frac{\partial}{\partial r}$$

é um levantamento adequado sobre \mathcal{M} do campo multivaluado (2.5). Este campo é chamado de **Campo de Lie-Cartan**. A projeção π das curvas integrais do campo ξ são as soluções da EDI (2.5), com $r = dy/dx \neq 0$.

Equações Diferenciais Ordinárias

Uma EDO $a(x,y)dy - b(x,y)dx = 0$ pode ser reescrita como o sistema

$$\begin{cases} dx = a(x,y), \\ dy = b(x,y). \end{cases} \quad (2.6)$$

Os pontos (x,y) onde a e b se anulam simultaneamente são chamados de **pontos singulares** da EDO (2.6). Fora dos pontos singulares, o Teorema do Fluxo Tubular garante a EDO (2.6) é localmente topologicamente equivalente à

$$\begin{cases} dx = 1, \\ dy = 0. \end{cases}$$

Portanto, a configuração da (2.6) fora dos pontos singulares é conhecida, a menos de um difeomorfismo.

Para o caso em que p é um ponto singular, sem perda de generalidade, considere $p = (0,0)$. Sendo $j^1a = a_{10}x + a_{01}y$ e $j^1b = b_{10}x + b_{01}y$, defina

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{pmatrix}.$$

A singularidade p é **hiperbólica** se todos os autovalores de A possuem partes reais não nulas. Segue do Teorema de Hartman-Grobman que se p é um ponto singular hiperbólico, então (2.6) é localmente equivalente a

$$\begin{cases} dx = a_{10}x + a_{01}y, \\ dy = b_{10}x + b_{01}y. \end{cases} \quad (2.7)$$

Quando os autovalores κ_1 e κ_2 de A são reais e possuem sinais opostos, (2.7) é topologicamente equivalente a uma singularidade de sela, ver Figura 6 (a). Se os autovalores são reais e possuem o mesmo sinal, então (2.7) é um nó como na Figura 6 (b). Por fim, quando κ_1 e κ_2 são complexos, a singularidade de (2.7) é um foco, conforme a Figura 6 (c).

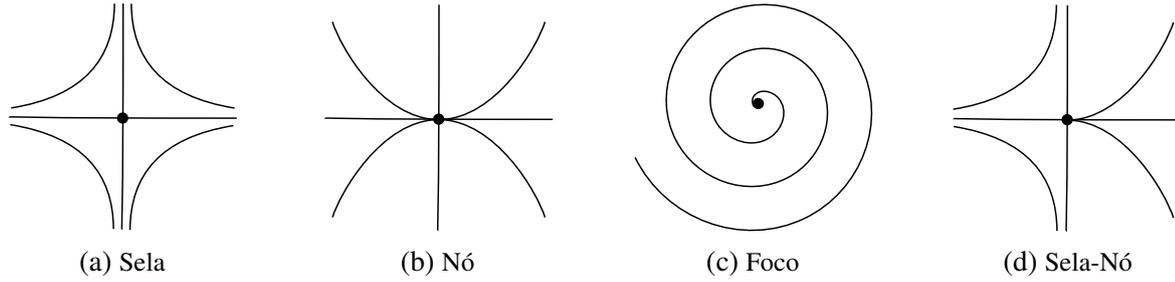


Figura 6 – Configuração das singularidades hiperbólicas e semi-hiperbólicas de uma EDO. As setas foram omitidas pois o interesse principal é o campo de direções.

O ponto singular $p = (0, 0)$ é dito **semi-hiperbólico** quando o determinante de A é zero e o traço de A é diferente de zero, isto é, quando apenas um dos autovalores de A é nulo. Nesses casos, a EDO (2.6) pode ter uma singularidade de sela, nó ou sela-nó, conforme as condições do próximo teorema.

Teorema 2.4.1. (LLIBRE; TERUEL, 2014) Seja $(0, 0)$ um ponto singular isolado da EDO

$$\begin{cases} dx = a(x, y), \\ dy = y + b(x, y), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde a e b são funções analíticas em uma vizinhança da origem com o 1-jato nulo. Seja $f(x)$ uma solução de $y + b(x, y) = 0$ em uma vizinhança da origem e suponha que a função $g(x) = a(x, f(x))$ pode ser escrita da forma $g(x) = a_m x^m + o(m+1)$, sendo $o(m+1)$ termos de ordem maior do que ou igual a $m+1$, $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$.

- (1) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então a origem é topologicamente equivalente a um nó.
- (2) Se m é ímpar e $a_m < 0$, então a origem é topologicamente equivalente a uma sela.
- (3) Se m é par, então a origem é topologicamente equivalente a uma sela-nó, ver Figura 6 (d).

A existência da função $f(x)$ utilizada no Teorema 2.4.1 é garantida pelo Teorema da Função Implícita. Entretanto, obter tal função pode ser uma tarefa complicada. A próxima proposição apresenta uma solução para o cálculo de $f(x)$, visando facilitar a classificação dos pontos singulares semi-hiperbólicos.

Proposição 2.4.1. Sendo $b(x, y) = \sum_{i+j=2}^{\infty} b_{ij} x^i y^j$, $i_0 = \min\{i \geq 2 : b_{i0} \neq 0\}$ e $f(x)$ a função utilizada no Teorema 2.4.1, então $j^{i_0} f = -b_{i_0 0} x^{i_0}$ e para a classificação do Teorema 2.4.1 é necessário apenas o i_0 -jato de f .

Demonstração: Dada a EDO (2.8), como a e b são analíticas, é possível escrever

$$a(x, y) = \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij} x^i y^j \quad \text{e} \quad b(x, y) = \sum_{i+j=2}^{\infty} b_{ij} x^i y^j.$$

Tome i_0 como no enunciado. Segue do Teorema da Função Implícita a existência de uma função analítica $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) + b(x, f(x)) = 0, \quad (2.9)$$

em uma vizinhança da origem. Escrevendo $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, se $i < i_0$, então $c_i = 0$. De fato, suponha que $i' = \min\{i \geq 0 : c_i \neq 0\} < i_0$. Note que

$$\begin{aligned} f(x) + b(x, f(x)) &= \sum_{i=i'}^{\infty} c_i x^i + \sum_{i+j=2}^{\infty} b_{ij} x^i \left(\sum_{k=i'}^{\infty} c_k x^k \right)^j \\ &= \sum_{i=i'}^{\infty} c_i x^i + \underbrace{\sum_{i=i_0}^{\infty} b_{i0} x^i}_{(*)} + \underbrace{\sum_{i+j=2, j \neq 0}^{\infty} b_{ij} x^i \left(\sum_{k=i'}^{\infty} c_k x^k \right)^j}_{(**)}. \end{aligned}$$

Como $i_0 > i'$, em $(*)$ não existem termos de ordem i' . Em $(**)$, $j > 0$ e existem duas possibilidades:

- Se $j = 1$, então $i \geq 1$ e

$$b_{i1} x^i \left(\sum_{k=i'}^{\infty} c_k x^k \right) = \sum_{k=i'}^{\infty} b_{i1} c_k x^{k+i}$$

possui apenas monômios de grau maior que i' , pois $i \geq 1 > 0$.

- Se $j \geq 2$, então

$$b_{ij} x^i \left(\sum_{k=i'}^{\infty} c_k x^k \right)^j$$

possui apenas monômios de grau maior que $ji' + i \geq ji' > i'$, pois $j \geq 2$.

Em ambos os casos, $(**)$ também não possui termos de ordem i' . Logo, $f(x) = c_{i'} x^{i'} + o(i' + 1) \neq 0$, porque $c_{i'} \neq 0$, mas isso contradiz (2.9). Portanto, $i' \geq i_0$.

Além disso, $c_{i_0} = -b_{i_0 0}$. De fato, segue que $f(x) = \sum_{i=i_0}^{\infty} c_i x^i$ e

$$f(x) + b(x, f(x)) = \sum_{i=i_0}^{\infty} c_i x^i + \sum_{i=i_0}^{\infty} b_{i0} x^i + \underbrace{\sum_{i+j=2, j \neq 0}^{\infty} b_{ij} x^i \left(\sum_{k=i_0}^{\infty} c_k x^k \right)^j}_{(***)}.$$

Assim, não existem monômios de grau i_0 em $(***)$, pois $j > 0$, e

$$0 \underset{(2.9)}{=} j^{i_0} (f(x) + b(x, f(x))) = (c_{i_0} + b_{i_0 0}) x^{i_0}.$$

Portanto, $c_{i_0} = -b_{i_0 0}$ e $j^{i_0} f = -b_{i_0 0} x^{i_0}$.

Por fim, observe que

$$\begin{aligned}
a(x, f(x)) &= \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij} x^i f(x)^j \\
&= \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij} x^i (-b_{i_0} x^{i_0} + o(i_0 + 1))^j \\
&= \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij} x^i (-b_{i_0})^j x^{i_0 j} + o(i_0 j + 1) \\
&= \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij} (-b_{i_0})^j x^{i+i_0 j} + \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij} o(i_0 j + i + 1).
\end{aligned}$$

Logo, o monômio de menor grau de $a(x, f(x))$ está na primeira série e depende apenas de $j^{i_0} f$, ou seja, é possível tomar $f(x) = -b_{i_0} x^{i_0}$. ■

Equações Diferenciais Binárias

Uma EDI é chamada de **Equação Diferencial Binária** (EDB) se existirem no máximo duas direções para cada ponto do plano. Neste trabalho, estudaremos as EDB's da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.10)$$

onde a , b e c são funções suaves em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Com a equação (2.10) está relacionada a função $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$, chamada **função discriminante** da EDB, e o conjunto discriminante é exatamente $\Delta = \{(x, y) \in U : \delta(x, y) = 0\}$.

Proposição 2.4.2. A equação (2.10) define um par de direções em cada ponto $(x, y) \in U$ onde $\delta(x, y) > 0$ e não existem direções em pontos onde $\delta(x, y) < 0$. Nos pontos de Δ , onde as funções a , b e c não se anulam simultaneamente, a EDB (2.10) define uma única direção.

Para uma EDB, o levantamento do campo de direções é definido na superfície

$$\mathcal{M} = \{(x, y, dy : dx) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0\}.$$

Tomando a carta $r = dy/dx$ em $\mathbb{R}P^1$, \mathcal{M} é mergulhada em \mathbb{R}^3 como sendo a superfície

$$\mathcal{M} = \{(x, y, r) \in \mathbb{R}^3 : P(x, y, r) = 0\},$$

com $P(x, y, r) = a(x, y)r^2 + 2b(x, y)r + c(x, y)$. Nesse caso, o campo de Lie-Cartan é dado por

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + rP_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + rP_y) \frac{\partial}{\partial r}.$$

Observação 2.4.1. As vezes ocorrem singularidades no infinito quando \mathcal{M} e ξ são utilizados. Nestes casos são utilizadas a carta $s = dx/dy$ para $\mathbb{R}P^1$, a superfície

$$\mathcal{N} = \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^3 : Q(x, y, s) = 0\},$$

sendo $Q(x, y, s) = a(x, y) + 2b(x, y)s + c(x, y)s^2$ e o campo vetorial dado por

$$\xi_2 = sQ_s \frac{\partial}{\partial x} + Q_s \frac{\partial}{\partial y} - (sQ_x + Q_y) \frac{\partial}{\partial s}$$

é um levantamento adequado sobre \mathcal{N} .

Multiplicidade de Equações Diferenciais Implícitas

Uma **singularidade** da EDI (2.5) é a imagem pela projeção $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de um ponto singular do campo de Lie-Cartan ξ definido na superfície \mathcal{M} , utilizando a notação da primeira subseção. Logo, (x, y) é uma singularidade de (2.5) se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que (x, y, r) é uma solução do sistema

$$\begin{cases} F(x, y, r) = 0, \\ F_r(x, y, r) = 0, \\ F_x(x, y, r) + rF_y(x, y, r) = 0. \end{cases}$$

A **multiplicidade** de uma singularidade (x, y) da EDI (2.5) é o número máximo de singularidades que podem surgir ao deformar a equação $F = 0$ em uma vizinhança de (x, y) . Utilizando os resultados da Seção 2.3, Bruce e Tari mostram em (BRUCE; TARI, 1998) que a multiplicidade da singularidade $(0, 0)$ da EDI (2.5) é dada por

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_3}{\langle F, F_r, F_x + rF_y \rangle}.$$

Para o caso da EDB (2.10), quando a origem é um ponto regular do discriminante, os coeficientes a, b e c não se anulam simultaneamente em $(0, 0)$ e a Proposição 3.2. em (BRUCE; TARI, 1998) mostra que (2.10) pode ser escrita como

$$dy^2 - g(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.11)$$

com $g(0, 0) = 0$ e $g_y(0, 0) \neq 0$. Nesse caso, a origem é uma singularidade quando $g_x(0, 0) = 0$ e a sua multiplicidade é dada por $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle g, g_x \rangle}$. Logo, $(0, 0)$ é uma singularidade com multiplicidade infinita se, e somente se, $g(x, y) = yg_1(x, y)$ com $g_1(0, 0) \neq 0$. De fato, quando $g(x, y) = yg_1(x, y)$ com $g_1(0, 0) \neq 0$, note que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle g, g_x \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle yg_1(x, y), y \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle y, y \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle y \rangle} = \infty.$$

Por outro lado, se $\frac{\partial^m g}{\partial x^m}(0, 0) \neq 0$ para algum $m \geq 1$, então a dimensão é finita, pois nesse caso $g(x, y) = g_0(x) + yg_1(x, y)$ com $g_0 \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle g, g_x \rangle} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle g_0(x) + yg_1(x, y), g'_0(x) + y \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle g_0(X) + Y, g'_0(X) + Y \rho(X, Y) \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle Y, g'_0(X) + (Y - g_0(X)) \rho(X, Y - g_0(X)) \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle Y, g'_0(X) + g_0(X) \rho(X, -g_0(X)) \rangle} \\ &\leq m - 1, \end{aligned}$$

onde $X = x$ e $Y = yg_1(x, y)$ é uma mudança de coordenadas.

Teorema 2.4.2. Considere uma EDB cujo discriminante é uma curva regular. Em um ponto do discriminante onde exista uma singularidade com multiplicidade infinita a configuração local das soluções dessa EDB é apresentada na Figura 7.

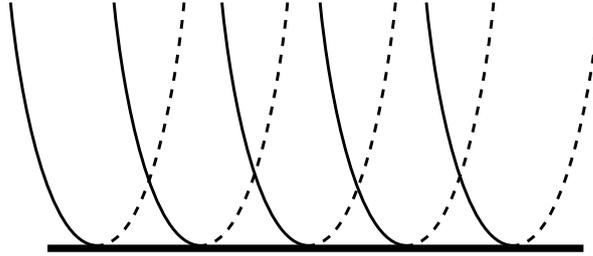


Figura 7 – Configuração local das soluções de uma EDB em uma singularidade com multiplicidade infinita.

Demonstração: Como o discriminante é uma curva regular e a origem é uma singularidade de multiplicidade infinita, escreva a EDB na forma $dy^2 - yg_1(x,y)dx^2 = 0$, com $g_1(0,0) \neq 0$. O campo de Lie-Cartan, definido na superfície $P = 0$ com $P(x,y,t) = t^2 - yg_1(x,y)$, é

$$\xi(x,y,t) = \left(2t, 2t^2, y \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + tg_1(x,y) + ty \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \right).$$

Em $P = 0$, $y = \frac{t^2}{g_1(x,y)}$ e

$$\xi(x,y,t) = \left(2t, 2t^2, \frac{t^2}{g_1(x,y)} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + tg_1(x,y) + \frac{t^3}{g_1(x,y)} \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \right).$$

A partir de uma reparametrização do tempo, o campo de vetores de ξ pode ser reescrito como

$$\eta(x,y,t) = \left(2, 2t, \frac{t}{g_1(x,y)} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + g_1(x,y) + \frac{t^2}{g_1(x,y)} \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \right).$$

O conjunto criminante é dado por $P = P_t = 0$, ou seja, em uma vizinhança da origem, o conjunto criminante é $y = t = 0$ e pode ser parametrizado com $\gamma(x) = (x, 0, 0)$. Como $g_1(0,0) \neq 0$, $\eta(0,0,0) = (2, 0, g_1(0,0))$ é transversal ao criminante em uma vizinhança da origem. Assim, o resultado segue. ■

Teorema 2.4.3. Seja $(0,0)$ uma singularidade da EDB (2.10) onde o discriminante é uma curva regular. Se $(0,0)$ possui multiplicidade finita e existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $(0,0,r) \in \mathcal{M}$ é um ponto singular semi-hiperbólico do campo de Lie-Cartan em \mathcal{M} , então o campo de Lie-Cartan em \mathcal{M} possui uma singularidade de sela, nó ou sela-nó em $(0,0,r)$.

Demonstração: Como o discriminante é regular, considere a EDB (2.11), com $g(0,0) = g_x(0,0) = 0$ e $g_y(0,0) \neq 0$. Sendo $F(x,y,r) = r^2 - g(x,y)$, segue que $(0,0,r)$ pertence a superfície \mathcal{M} dada por $F = 0$ se, e somente se, $r = 0$. Como $F_y(0,0,0) \neq 0$, existe um germe $h : (\mathbb{R}^2, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que

$$r^2 - g(x, h(x,r)) = 0,$$

para todo (x, r) em uma vizinhança da origem.

Seja ξ o campo de Lie-Cartan definido em \mathcal{M} . Por meio da projeção $\pi_2 : (\mathcal{M}, (0, 0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (0, 0))$, dada por $\pi_2(x, y, r) = (x, r)$, e de h , o campo ξ pode ser projetado no plano xr como $\eta = \pi_2 \circ \xi$, ou seja,

$$\begin{aligned}\eta(x, r) &= (F_r(x, h(x, r), r), -(F_x(x, h(x, r), r) + rF_y(x, h(x, r), r))) \\ &= (2r, -g_x(x, h(x, r)) - rg_y(x, h(x, r))).\end{aligned}$$

Como $(0, 0, 0)$ é um ponto singular hiperbólico de ξ , então $(0, 0)$ é um ponto singular hiperbólico de η e, portanto, $g_{xx}(0, 0) = 0$. Assim, é possível escrever

$$g(x, y) = x^3 f(x) + y(g_{00} + g_1(x, y)), \quad (2.12)$$

para germes f e g_1 , com $g_{00} \neq 0$ e $g_1(0, 0) = 0$.

Para aplicar o Teorema 2.4.1, note que o campo η pode ser representado pela EDO

$$\begin{cases} x' = 2r, \\ r' = -g_x(x, h(x, r)) - rg_y(x, h(x, r)) = g_{00}r + \tilde{g}(x, y), \end{cases} \quad (2.13)$$

onde \tilde{g} possui termos de ordem maior do que 1 e é dada por

$$\tilde{g}(x, y) = r \left(h(x, r) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, h(x, r)) + g(x, h(x, r)) \right) + h(x, r) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, h(x, r)) + x^3 f'(x) + 3x^2 f(x).$$

Fazendo a mudança de coordenadas $X \mapsto x - \frac{2r}{g_{00}}$ e $R \mapsto \frac{r}{g_{00}}$, segue que (2.13) é equivalente a

$$\begin{cases} x' = -\frac{2\tilde{g}(X + 2R, g_{00}R)}{g_{00}} = a(X, R), \\ R' = R + \frac{\tilde{g}(X + 2R, g_{00}R)}{g_{00}} = R + b(X, R). \end{cases} \quad (2.14)$$

Seja $\rho(X)$ uma solução de $R + b(X, R) = 0$, existente pelo Teorema da Função Implícita. Logo,

$$a(X, \rho(X)) = -\frac{2\tilde{g}(X + 2\rho(X), g_{00}\rho(X))}{g_{00}} = 2\rho(X).$$

Portanto, do Teorema 2.4.1 segue que a origem é uma sela, nó ou sela-nó se ρ não é identicamente nulo. Da Proposição 2.4.1, ρ é identicamente nulo se, e somente se, $b(X, 0) \equiv 0$, sendo

$$b(X, 0) = h(X, 0) \frac{\partial g_1}{\partial x}(X, h(X, 0)) + X^3 f'(X) + 3X^2 f(X).$$

Seja $k_0 = \min\{k \geq 0 : f^{(k)}(0) \neq 0\}$, ou seja, $j^{k_0} f = f_{k_0} X^{k_0}$ com $f_{k_0} \neq 0$. Da definição de h , vale que

$$0 = g(X, h(X, 0)) = X^3 f(X) + h(X, 0)(g_{00} + g_1(X, h(X, 0))).$$

Assim, $j^{k_0+2} h(X, 0) = 0$, pois $g_{00} + g_1(0, 0) \neq 0$ e $j^{k_0+2}(X^3 f(X)) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}j^{k_0+2} b(X, 0) &= j^{k_0+2} \left(h(X, 0) \frac{\partial g_1}{\partial x}(X, h(X, 0)) + X^3 f'(X) + 3X^2 f(X) \right) \\ &= j^{k_0+2} (X^3 f'(X) + 3X^2 f(X)) \\ &= (3 + k_0) f_{k_0} X^{k_0+2} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

2.5 Espaço Minkowski

Esta seção apresenta o espaço Minkowski. Para mais detalhes, ver o Capítulo 1 de (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018). O espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do pseudo-produto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto u_0v_0 + u_1v_1 - u_2v_2, \end{aligned}$$

com $u = (u_0, u_1, u_2)$ e $v = (v_0, v_1, v_2)$, é chamado de 3-espaço Minkowski ou, simplifadamente, **espaço Minkowski** e denotado por \mathbb{R}_1^3 .

A norma de um vetor $v \in \mathbb{R}_1^3$ é dada por $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$, pois existem vetores $v \in \mathbb{R}_1^3$ tais que $\langle v, v \rangle < 0$. Um vetor $v \in \mathbb{R}_1^3$ é dito

- (1) **spacelike**, se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = \vec{0}$;
- (2) **lightlike**, se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq \vec{0}$;
- (3) **timelike**, se $\langle v, v \rangle < 0$.

O conjunto dos vetores de \mathbb{R}_1^3 que são lightlike é chamado de **cone de luz** e representado por LC .

Dado um plano $P_c^v = \{u \in \mathbb{R}_1^3 : \langle u, v \rangle = c\}$, o vetor v é chamado de **vetor normal** ao plano P_c^v . O plano P_c^v é spacelike (resp. timelike, ou lightlike) se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restrita a P_c^v é positiva definida (resp. não degenerada de índice 1, ou degenerada).

Proposição 2.5.1. Valem as seguintes afirmações.

- (1) P_c^v é spacelike (resp. timelike, ou lightlike) se, e somente se, v é timelike (resp. spacelike, ou lightlike);
- (2) P_c^v é spacelike se, e somente se, todos os vetores de P_c^v são spacelike;
- (3) P_c^v é timelike se, e somente se, P_c^v possui um vetor timelike;
- (4) P_c^v é timelike se, e somente se, P_c^v possui dois vetores lightlike linearmente independentes;
- (5) P_c^v é lightlike se, e somente se, P_c^v possui uma única direção lightlike;
- (6) P_c^v é lightlike se, e somente se, $v \in P_c^v$.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}_1^3$. O **produto vetorial** de u e v é o único vetor, denotado por $u \times v$, que satisfaz

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w), \quad \forall w \in \mathbb{R}_1^3, \quad (2.15)$$

onde $\det(u, v, w)$ é o determinante da matriz obtida colocando em cada coluna as coordenadas dos vetores u, v e w , respectivamente. Se $u = (u_0, u_1, u_2)$ e $v = (v_0, v_1, v_2)$, então o vetor

$$(u_1v_2 - u_2v_1, u_2v_0 - u_0v_2, u_1v_0 - u_0v_1) \in \mathbb{R}_1^3$$

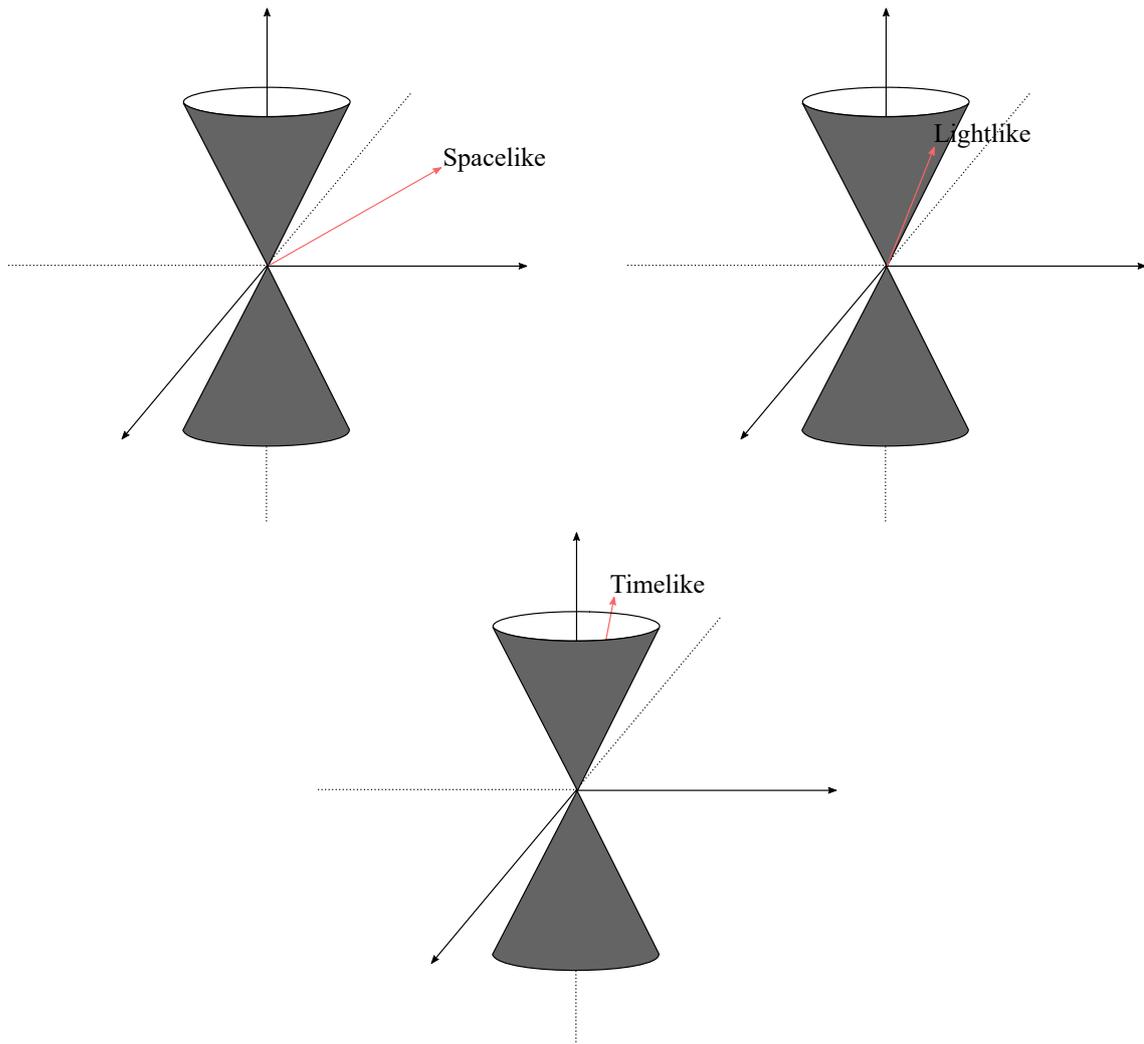


Figura 8 – Posição relativa entre cada tipo de vetor e o cone de luz.

satisfaz a condição (2.15), o que garante a existência de $u \times v$. A unicidade de tal vetor é dada pela bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim, o produto vetorial está bem definido. Da definição segue que $u \times v = -v \times u$ e $\langle u, u \times v \rangle = \langle v, u \times v \rangle = 0$, para todos $u, v \in \mathbb{R}_1^3$.

No espaço Minkowski existem três pseudo-esferas, chamadas esfera de Sitter, plano hiperbólico e cone, ver Figuras 9. A **esfera de Sitter** de centro $p \in \mathbb{R}_1^3$ e raio $r > 0$, denotada por $\mathbb{S}_1^2(p, r)$, é o conjunto dos pontos $q \in \mathbb{R}_1^3$ tais que

$$\langle q - p, q - p \rangle = r^2.$$

Por outro lado, o **plano hiperbólico** de centro $p \in \mathbb{R}_1^3$ e raio $r > 0$, denotada por $\mathbb{H}^2(p, r)$, é o conjunto dos pontos $q \in \mathbb{R}_1^3$ tais que

$$\langle q - p, q - p \rangle = -r^2.$$

Por fim, o **cone** de centro $p \in \mathbb{R}_1^3$, denotado por $LC(p)$, é o conjunto de pontos $q \in \mathbb{R}_1^3$ onde

$$\langle q - p, q - p \rangle = 0.$$

Para simplificar a notação, a esfera de Sitter e o plano hiperbólico com centro na origem e raio 1 são denotados por \mathbb{S}_1^2 e \mathbb{H}^2 , respectivamente. O cone centrado na origem, que é precisamente o cone de luz, é denotado apenas por LC .

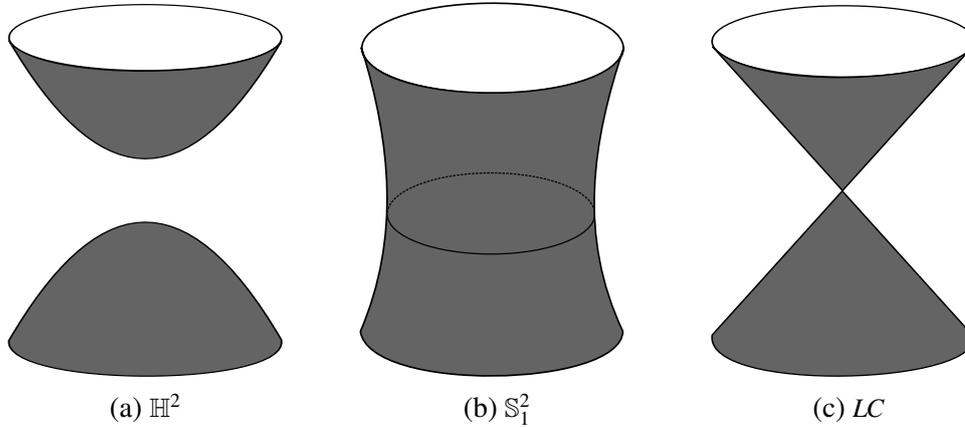


Figura 9 – Pseudo-esferas no espaço Minkowski.

2.6 Geometria Diferencial

Uma **superfície suave** M é uma variedade diferenciável de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 . O termo suave serve para indicar que M é de classe C^∞ . Fica implícita na definição de variedade diferenciável dada anteriormente que M não possui pontos singulares, isto é, o plano tangente está bem definido em todos os pontos $p \in M$.

Os conceitos referente à geometria diferencial de superfícies no espaço Euclidiano e no espaço Minkowski são apresentados nesta seção. Tais estruturas serão a base de todo o estudo realizado ao longo deste trabalho. Mais detalhes sobre este tópico podem ser encontrados em (CARMO, 2008), (IZUMIYA; TARI, 2010) e (COUTO; LYMBERPOULOS, 2018).

Superfícies no Espaço Euclidiano

Seja M uma superfície suave e orientada em \mathbb{R}^3 e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de M . A **aplicação de Gauss** $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ relaciona a cada ponto $p = \varphi(q)$ um vetor unitário normal a superfície M nesse ponto, ver Figura 10, em coordenadas

$$N(p) = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|}(q).$$

A derivada da aplicação de Gauss $A_p = -dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é um operador linear auto-adjunto, isto é, para quaisquer vetores $u, v \in T_pM$ vale $\langle A_p(u), v \rangle = \langle u, A_p(v) \rangle$. Portanto, A_p sempre possui 2 autovalores reais, denotados por κ_1 e κ_2 e chamados de **curvaturas principais**.

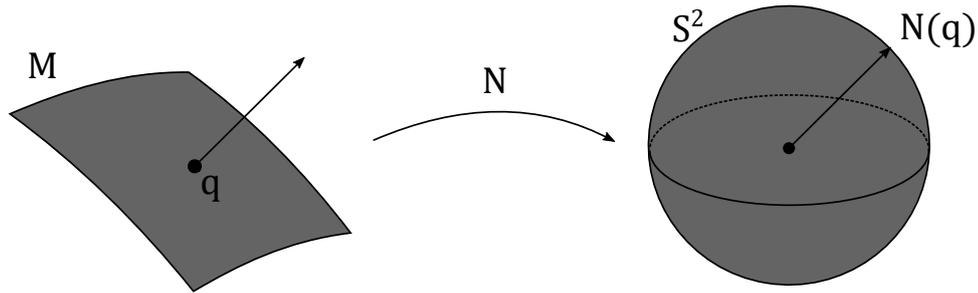


Figura 10 – Aplicação de Gauss no espaço Euclidiano.

Se $\kappa_1 = \kappa_2$ em p , então p é chamado **ponto umbílico**. Quando $\kappa_1 \neq \kappa_2$, A_p possui dois autovetores ortogonais chamados **direções principais**. Uma curva regular e conexa na superfície M é uma **linha de curvatura principal** se a reta tangente em cada ponto é paralela a uma direção principal.

Observação 2.6.1. Em todos os pontos não umbílicos existem duas linhas de curvatura ortogonais. Por outro lado, os pontos umbílicos são exatamente as singularidades das linhas de curvatura e neles existem três configurações genéricas para as linhas de curvatura (BRUCE; FIDAL, 1989; SOTOMAYOR; GUTIERREZ, 1982), ver Figura 23.

Em \mathbb{R}^3 , um conjunto X é convexo se para todo par de pontos $p_1, p_2 \in X$, o segmento de reta $[p_1, p_2]$ unindo p_1 a p_2 também está contido em X . Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é **convexa** se for a fronteira de um conjunto convexo de \mathbb{R}^3 . Note que a convexidade independe da métrica da superfície.

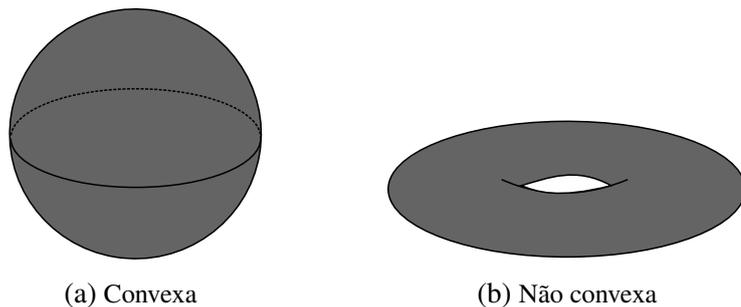


Figura 11 – Exemplo de superfícies fechadas convexas e não convexas.

Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é **fechada** se for compacta e sem bordo. Ser fechada também é uma propriedade que independe da métrica da superfície. Segue do Teorema de Poincaré-Hopf que toda superfície fechada e convexa possui no mínimo um ponto umbílico. Entretanto a conjectura de Carathéodory afirma que essa cota mínima é maior, existindo pelo menos dois pontos umbílicos em superfícies fechada e convexas, para mais detalhes ver a Seção 7.1.

Superfícies no Espaço Minkowski

Seja M uma superfície suave e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma parametrização local de M . Se em cada ponto p de M , o plano tangente T_pM é visto como um subespaço de \mathbb{R}_1^3 , então M é dita uma superfície no espaço Minkowski e denotada por $M \subset \mathbb{R}_1^3$. Assim, o pseudo-produto interno de \mathbb{R}_1^3 induz uma pseudo-métrica em M , dada por

$$\begin{aligned} I_p : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle, \end{aligned}$$

chamada de **primeira forma fundamental**. As funções

$$E = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle, \quad F = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle, \quad G = \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle,$$

são os **coeficientes da primeira forma fundamental** de M com relação a φ , isto é, se $w = a\varphi_x + b\varphi_y \in T_pM$, então

$$\begin{aligned} I_p(w) &= Ea^2 + 2Fab + Gb^2 \\ &= (a \ b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como I_p é uma pseudo-métrica, existem pontos onde I_p é degenerada. Isto ocorre quando T_pM é lightlike. O conjunto de todos os pontos de M onde a pseudo-métrica se degenera é chamado de **local de degenerescência** e representado por **LD**. A pré-imagem de **LD** por φ também é identificada como **LD**. Além disso, as direções lightlike em T_pM são dadas pela EDB

$$Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2 = 0 \quad (2.16)$$

e o **LD** é o discriminante de (2.16).

Teorema 2.6.1. (IZUMIYA; TARI, 2010) Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in LD$. Existem vizinhanças $V \subset M$ de p , $U \subset \mathbb{R}^2$ da origem e uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de V tal que $p = \varphi(0,0)$ e φ_x é a única direção lightlike nos pontos de $V \cap LD$, isto é, $E(q) = F(q) = 0$ para todo $q \in U \cap LD$.

O conjunto dos pontos $p \in M$ onde T_pM é spacelike (timelike) é chamado de região Riemanniana (Lorentziana) de M . Tomando

$$\delta(x,y) = (F^2 - EG)(x,y), \quad (2.17)$$

segue que $p = \varphi(x,y) \in M$ pertence à região Riemanniana de M quando $\delta(x,y) < 0$, p pertence à região Lorentziana de M quando $\delta(x,y) > 0$ e $p \in LD$ quando $\delta(x,y) = 0$.

Teorema 2.6.2. (IZUMIYA; TARI, 2010) Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave. Para todo ponto p na região Lorentziana de M existe uma vizinhança V de p na região Lorentziana e uma parametrização local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de V tal que φ_x e φ_y são direções lightlike, ou seja, $E = G = 0$ em U .

Pei (PEI, 1999) define a **aplicação de Gauss** $N : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ que associa a cada ponto $p = \varphi(q)$ a projetivização do vetor $\varphi_x(q) \times \varphi_y(q)$, onde \times é o produto vetorial em \mathbb{R}_1^3 . Na região Riemanniana é possível definir $N : \varphi(U_1) \rightarrow \mathbb{H}^2$ e na região Lorentziana $N : \varphi(U_2) \rightarrow \mathbb{S}_1^2$, ambas dadas por

$$N(\varphi(q)) = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|}(q),$$

onde $U_1, U_2 \subset U$ são as pré-imagens das regiões Riemanniana e Lorentziana, respectivamente. A aplicação de Gauss relaciona a cada ponto $p \in \varphi(U) \setminus LD$ um vetor unitário e normal à superfície M em p , ver Figuras 12 e 13.

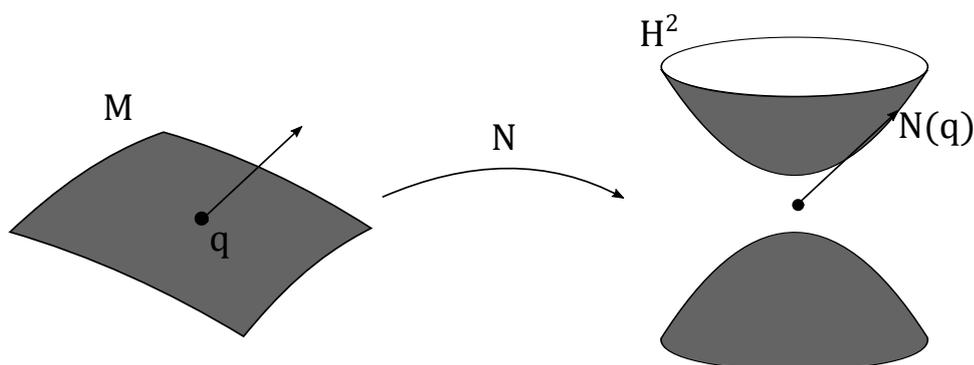


Figura 12 – Aplicação de Gauss restrita à região Riemanniana.

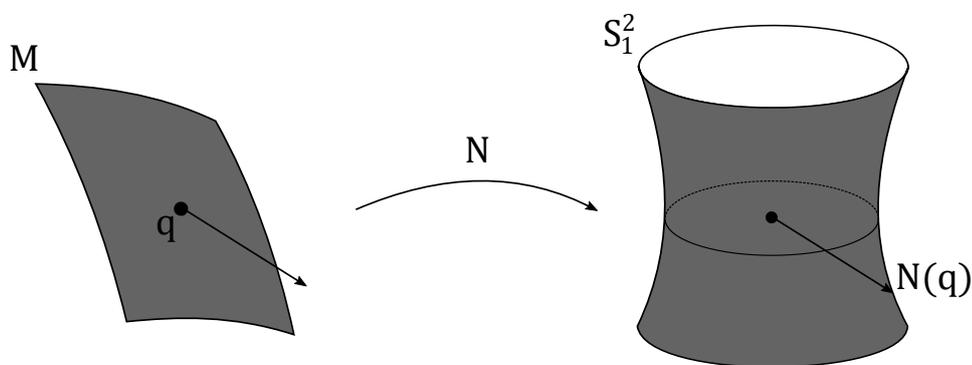


Figura 13 – Aplicação de Gauss restrita à região Lorentziana.

A derivada de N em p é um operador linear auto-adjunto, $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$. A partir dela, define-se em T_pM a forma quadrática dada por

$$\begin{aligned} II_p : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle A_p(w), w \rangle, \end{aligned}$$

que é chamada de **segunda forma fundamental** de M em p , onde $A_p = -dN_p$.

Quando A_p possui autovalores reais, eles são chamados de **curvaturas principais** de M em p e as direções definidas pelos autovetores associados são chamadas de **direções principais** de M em p . Se uma curva regular e conexa C em M é tal que para todo $p \in C$ a reta tangente

a C em p é uma direção principal, então C é chamada **linha de curvatura** de M . Se $p \in M$ é um ponto da parte Riemanniana (ou Lorentziana) e A_p é um múltiplo da identidade, então p é chamado de **ponto umbílico spacelike** (**timelike**).

A partir da parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M os **coeficientes da segunda forma fundamental** são

$$l = \langle N, \varphi_{xx} \rangle, \quad m = \langle N, \varphi_{xy} \rangle, \quad n = \langle N, \varphi_{yy} \rangle,$$

ou seja, se $w = a\varphi_x + b\varphi_y \in T_pM$, então

$$\begin{aligned} II_p(w) &= la^2 + 2mab + nb^2 \\ &= (a \ b) \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As linhas de curvatura são dadas pela equação diferencial

$$(mG - nF)dy^2 + (lG - nE)dxdy + (lF - mE)dx^2 = 0, \quad (2.18)$$

e os pontos umbílicos são os pontos onde os coeficientes de (2.18) se anulam simultaneamente.

As linhas de curvatura podem ser estendidas para o LD como em (IZUMIYA; TARI, 2010). Note que a equação (2.18) é homogênea de grau 1 em l , m e n . Logo, multiplicando ambos os membros de (2.18) por $\|\varphi_x \times \varphi_y\| \neq 0$, verifica-se que a equação

$$(\bar{m}G - \bar{n}F)dy^2 + (\bar{l}G - \bar{n}E)dxdy + (\bar{l}F - \bar{m}E)dx^2 = 0, \quad (2.19)$$

não altera os pares de direções de (2.18) em $\varphi(U) \setminus LD$ e está bem definida nos pontos do LD . Os coeficientes \bar{l} , \bar{m} e \bar{n} são dados por

$$\bar{l} = \langle \varphi_x \times \varphi_y, \varphi_{xx} \rangle, \quad \bar{m} = \langle \varphi_x \times \varphi_y, \varphi_{xy} \rangle, \quad \bar{n} = \langle \varphi_x \times \varphi_y, \varphi_{yy} \rangle.$$

Os **pontos umbílicos lightlike** são os pontos do LD onde os coeficientes de (2.19) se anulam simultaneamente (IZUMIYA; TARI, 2010).

O discriminante da equação (2.19) é chamado **Lightlike Principal Locus** e é denotado por **LPL**. Definindo

$$\tilde{\delta}(x, y) = ((\bar{l}G - \bar{n}E)^2 - 4(\bar{m}G - \bar{n}F)(\bar{l}F - \bar{m}E))(x, y), \quad (2.20)$$

segue que $LPL = \tilde{\delta}^{-1}(0)$.

Em todos os pontos não umbílicos da parte Riemanniana, M possui 2 direções principais ortogonais, ambas spacelike. Por outro lado, nos pontos não umbílicos da parte Lorentziana, M possui 2, 1 ou 0 direções principais. Onde existem duas direções principais, elas são ortogonais, uma delas spacelike e a outra timelike. O LPL é exatamente o conjunto dos pontos onde existe uma única direção principal, sendo ela lightlike. Genericamente, as linhas de curvatura formam cúspides ao longo do LPL . Por fim, no LD , existem duas direções principais ortogonais, uma

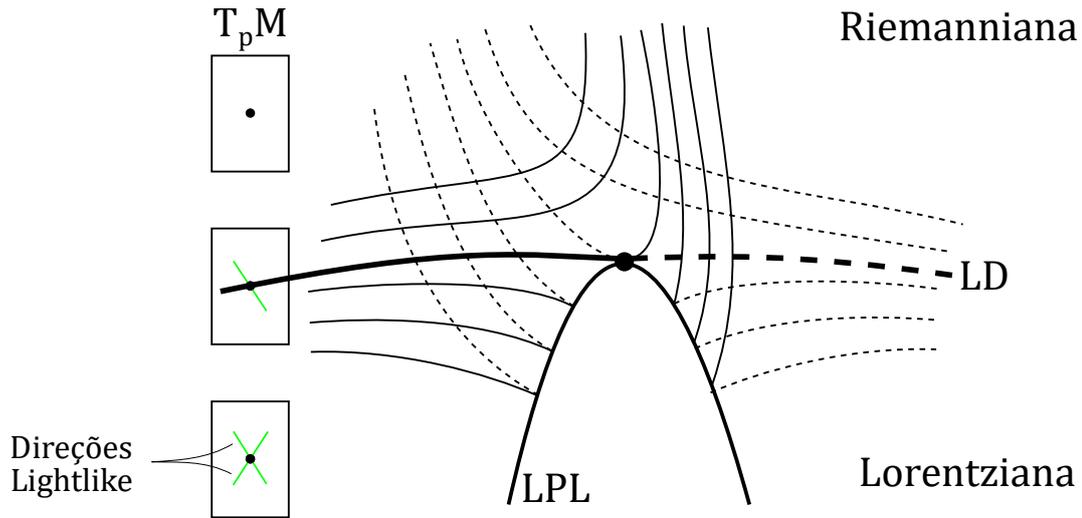


Figura 14 – Configuração genérica das linhas de curvatura em superfícies no espaço Minkowski.

spacelike e a outra lightlike, exceto nas interseções do LD com o LPL , onde existe uma única direção principal lightlike que é tangente a estas curvas. A Figura 14 representa o comportamento genérico das linhas de curvatura.

A **curvatura Gaussiana** e a **curvatura Média** de M em um ponto $p \in M \setminus LD$ são definidas como $K = \det(A_p)$ e $H = -\frac{1}{2}tr(A_p)$, respectivamente. Com relação aos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, K e H são expressas por

$$K(x, y) = \left(\frac{ln - m^2}{EG - F^2} \right) (x, y),$$

$$H(x, y) = \left(\frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)} \right) (x, y).$$

O **conjunto parabólico** de $M \setminus LD$ é composto pelos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula.

O conjunto parabólico também pode ser visto como o discriminante da EDB

$$ndy^2 + 2mdxdy + ldx^2 = 0. \quad (2.21)$$

Uma direção d que é solução da equação (2.21) em p é chamada de **direção assintótica** de M em p . A noção de direções assintóticas pode ser estendida para os pontos do LD como em (IZUMIYA; TARI, 2010), multiplicando os coeficientes da EDB (2.21) por $\|\varphi_x \times \varphi_y\| \neq 0$ e obtendo

$$\bar{n}dy^2 + 2\bar{m}dxdy + \bar{l}dx^2 = 0. \quad (2.22)$$

Desta forma, o conjunto parabólico também é estendido para os pontos do LD , considerando o discriminante da equação (2.22). Logo, o conjunto parabólico é dado por

$$\bar{K}^{-1}(0) = (\bar{m}^2 - \bar{l}\bar{n})^{-1}(0). \quad (2.23)$$

De maneira análoga, a curva $H^{-1}(0)$ pode ser definida no LD . Para isso, note que

$$H(x, y) = 0 \Leftrightarrow (lG - 2mF + nE)(x, y) = 0.$$

Multiplicando por $\|\varphi_x \times \varphi_y\| \neq 0$, então

$$H(x, y) = 0 \Leftrightarrow \bar{H}(x, y) = 0,$$

onde $\bar{H} = \bar{l}G - 2\bar{m}F + \bar{n}E$. A curva $\bar{H}^{-1}(0)$ é chamada **curva da curvatura média nula** e a denotada por **CMN**.

Um ponto $p \in M$ onde existem duas direções assintóticas é chamado de **ponto hiperbólico** e quando não existem direções assintóticas o ponto p é chamado de **ponto elíptico**. Em um ponto do conjunto parabólico existe apenas uma única direção assintótica.

Sejam $M_{1,t}, M_{2,t}, M_{3,t} : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ as **rotação Lorentzianas** dadas por

$$M_{1,t} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$M_{2,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$M_{3,t} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 & \sinh(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$T_p : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a translação que associa q à $q + p$ dado $p \in \mathbb{R}_1^3$, $R_1, R_2, R_3 : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ as reflexões com

$$R_1(x, y, z) = (-x, y, z), \quad R_2(x, y, z) = (x, -y, z), \quad R_3(x, y, z) = (x, y, -z)$$

e H_r , $r > 0$, a homotetia dada por $H_r(x, y, z) = (rx, ry, rz)$. Defina $G(3, 1)$ como o grupo gerado pelas rotações Lorentzianas, reflexão, translações e homotetias com a operação de composição. Toda aplicação $\sigma \in G(3, 1)$ é um difeomorfismo de \mathbb{R}_1^3 em \mathbb{R}_1^3 . Logo, dada uma superfície suave $M \subset \mathbb{R}_1^3$, então $\sigma(M)$ também é uma superfície suave em \mathbb{R}_1^3 . Além disso, $\sigma \in G(3, 1)$ preserva os objetos geométricos definidos anteriormente, tais como as direções lightlike, as direções principais, as direções assintóticas e as curvaturas.

Seja \mathcal{G} o conjunto de todas as superfícies suaves. \mathcal{G} está relacionado com o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Assim, é possível munir \mathcal{G} com a topologia induzida por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Uma superfície $M \in \mathcal{G}$ é **genérica** se ela pertence a um subconjunto aberto e denso de \mathcal{G} .

Observação 2.6.2. Em alguns contextos, que surgirão no Capítulo 5, são utilizadas definições diferentes para a genericidade das superfícies em \mathbb{R}_1^3 . Entretanto, quando não for mencionado o contexto, considere a definição anterior.

Dada uma superfície $M \in \mathcal{G}$ e um ponto $p \in M$, seja $\mathcal{F}_{M,p}$ o conjunto de todas as famílias de superfícies $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ a 1-parâmetro com $M_0 = M$ em uma vizinhança de p . Quando o contexto não deixar dúvidas sobre a superfície M e o ponto p , $\mathcal{F}_{M,p}$ é denotada apenas por \mathcal{F} . Tomando uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ da superfície M na forma de Monge, com $\varphi(x,y) = (x,y,f(x,y))$ e $p = \varphi(0,0)$, uma família $M_t \in \mathcal{F}_M$ é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow M_t \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,H(x,y,t)) \end{aligned} ,$$

para alguma H diferenciável com $H(x,y,t) = f(x,y) + th(x,y,t)$. Assim, \mathcal{F} está relacionada com o conjunto $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ por $M_t \mapsto h$. Munindo \mathcal{F} com a topologia induzida por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, uma família $M_t \in \mathcal{F}$ é dita **genérica** se ela pertence a um subconjunto aberto e denso de \mathcal{F} .

Dada uma superfície suave $M \subset \mathbb{R}_1^3$, uma parametrização local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M é dita uma **parametrização de Monge** de M se $\varphi(x,y) = (x,y,f(x,y))$ para algum germe $f \in \mathcal{C}^\infty(2,1)$. Nesse caso, M é vista como o gráfico de f e a parametrização φ pode ser escrita como $z = f(x,y)$. Nos casos em que $\varphi(x,z) = (x,f(x,z),z)$ ou $\varphi(y,z) = (f(y,z),y,z)$, φ ainda é chamada de uma parametrização de Monge. Para todo $p \in M$ existe uma parametrização de Monge $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M tal que $p \in \varphi(U)$. Os próximos resultados apresentam parametrizações de Monge utilizadas no decorrer do trabalho.

Teorema 2.6.3. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto da região Lorentziana. Aplicando uma ação do grupo $G(3,1)$ caso necessário, é possível tomar uma parametrização de Monge $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , dada por $\varphi(x,y) = (x,f(x,y),y)$, de modo que $p = \varphi(0,0)$ e $j^2 f = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$. Além disso, p é um ponto umbílico se, e somente se, $a_{20} = -a_{02}$ e $a_{11} = 0$.

Demonstração: Considere, aplicando uma translação caso necessário, que p é a origem. Seja (a,b,c) um vetor normal a M em p . Aplicando uma rotação Lorentziana M_{1,t_1} dada em (2.24), suponha que $a = 0$. Para isso tome $t_1 = \pi/2$ se $b = 0$, ou $t_1 = \arctan(\frac{a}{b})$ quando $b \neq 0$. Assim, M é rotacionada por M_{1,t_1} e o vetor normal a M em p é da forma $(0,b,c)$. Aplicando outra rotação Lorentziana M_{2,t_2} definida em (2.25), é possível considerar $c = 0$. De fato, como p pertence a região Lorentziana, $b^2 - c^2 > 0$ e está bem definido $t_2 = \ln \sqrt{\frac{b-c}{b+c}}$. Ao rotacionar M com $M_2(t_2)$, o vetor normal a M em p é da forma $(0,b,0)$.

Portanto, $T_p M$ é gerado por $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$. Assim, é possível tomar uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M na forma de Monge $\varphi(x,y) = (x,f(x,y),y)$, com $j^1 f = 0$. Escrevendo $j^2 f = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, segue que p é um ponto umbílico se, e somente se, $a_{11} = 0$ e $a_{20} = -a_{02}$. ■

Teorema 2.6.4. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto da região Riemanniana. Aplicando uma ação do grupo $G(3,1)$ caso necessário, é possível tomar uma parametrização

de Monge $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, de modo que $p = \varphi(0, 0)$ e $j^2 f = a_{20}x^2 + a_{02}y^2$. Além disso, p é um ponto umbílico se, e somente se, $a_{20} = a_{02}$.

Teorema 2.6.5. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto pertencente ao LD . Aplicando uma ação do grupo $G(3, 1)$ caso necessário, é possível tomar uma parametrização de Monge $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, de modo que $p = \varphi(0, 0)$ e $j^2 f = x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$. Além disso, p pertence ao LPL se, e somente se, $a_{20} = 0$. Quando p é um ponto umbílico, segue que $a_{20} = a_{11} = 0$.

As provas dos Teoremas 2.6.4 e 2.6.5 são semelhantes a demonstração do Teorema 2.6.3. No caso em que p pertence a região Riemanniana ou ao LD , após rotações Lorentzianas o plano $T_p M$ é dado por $z = 0$ ou $x - z = 0$ respectivamente. No Teorema 2.6.4, também é realizada uma rotação no plano $z = 0$ para eliminar o monômio xy de $j^2 f$.

Se $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike, tome $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.3 com $p = \varphi(0, 0)$. Assim,

$$j^3 f = \frac{k}{2} (x^2 - y^2) + C(x, y),$$

onde C é um polinômio homogêneo de grau 3 em x e y . Um fator linear $ax + by$ de C é dito uma **raiz spacelike** de C (resp. timelike, ou lightlike) quando a direção tangente à curva

$$\gamma = \{\varphi(x, y) : ax + by = 0\} \subset \mathbb{R}_1^3$$

em p é spacelike (resp. timelike, ou lightlike). Como f não possui termos de grau 1, note que $(b, 0, -a)$ é tangente a γ em p . Logo, um fator $ax + by$ de C é uma raiz spacelike de C (resp. timelike, ou lightlike) quando $b^2 > a^2$ (resp. $b^2 < a^2$, ou $b^2 = a^2$).

Teorema 2.6.6. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike. Aplicando um difeomorfismo $\sigma \in G(3, 1)$ caso necessário, é possível tomar uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada por $\varphi(x, y) = (x, f(x, y), y)$, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^3 f = \frac{k}{2} (x^2 - y^2) + C(x, y),$$

de modo que:

i. Se C possui pelo menos uma raiz timelike, então é possível tomar C com alguma das seguintes formas:

- (1) $x(x^2 + bxy + ay^2)$, com $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
- (2) $xy(bx + y)$, com $b \in \mathbb{R}$,
- (3) x^2y .

ii. Se C possui alguma raiz spacelike e não possui raízes timelike, então é possível tomar C da seguinte forma:

$$(4) y(ax^2 + bxy + y^2), \text{ com } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

iii. Se C só possui raízes lightlike, então é possível tomar C com alguma das seguintes formas:

$$(5) (x \pm y)(ax^2 + y^2), \text{ com } a > 0,$$

$$(6) (x \pm y)^3,$$

$$(7) (x + y)(x - y)^2,$$

$$(8) (x - y)(x + y)^2.$$

iv. Se C é identicamente nula, então a única forma possível é

$$(9) 0.$$

Demonstração: Seja $\varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.3 com $\varphi_1(x_1, y_1) = (x_1, f_1(x_1, y_1), y_1)$, $p = \varphi_1(0, 0)$ e

$$j^3 f_1 = \frac{k_1}{2} (x_1^2 - y_1^2) + C_1(x_1, y_1),$$

onde C_1 é um polinômio homogêneo de grau 3. Suponha que C_1 não é identicamente nulo. Como toda cúbica possui uma raiz real, é possível escrever

$$C_1(x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta y_1)(a_1 x_1^2 + b_1 x_1 y_1 + c_1 y_1^2),$$

com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$. Uma rotação Lorentziana $M_{3,t}$, ver (2.26), induz uma mudança de coordenadas em φ_1 , de modo que

$$\begin{aligned} M_{3,t} \cdot \varphi_1(x_1, y_1) &= (x_1 \cosh(t) + y_1 \sinh(t), f_1(x_1, y_1), x_1 \sinh(t) + y_1 \cosh(t)) \\ &= (x_2, f_1(x_2 \cosh(t) - y_2 \sinh(t), y_2 \cosh(t) - x_2 \sinh(t)), y_2) \\ &= (x_2, f_2(x_2, y_2), y_2) \\ &= \varphi_2(x_2, y_2). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Os casos onde $\alpha x_1 + \beta y_1$ é uma raiz timelike, spacelike ou lightlike de C_1 são tratados separadamente.

Caso 1: $\alpha x_1 + \beta y_1$ é uma raiz timelike de C . Neste caso, $|\beta| < |\alpha|$. Logo, $\alpha \neq 0$ e $-1 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$. Assim, $\frac{\beta}{\alpha}$ pertence a imagem da função \tanh , ou seja, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $\frac{\beta}{\alpha} = \tanh(t_0)$. Tomando $t = t_0$ em (2.27), segue que

$$j^3 f_2 = \frac{k_2}{2} (x_2^2 - y_2^2) + x_2(a_2 y_2^2 + b_2 x_2 y_2 + c_2 x_2^2),$$

pois $\beta \cosh(t_0) - \alpha \sinh(t_0) = 0$.

Se $c_2 \neq 0$, a homotetia $H_{\sqrt{|c_2|}}$ induz uma mudança de coordenada em φ_2 , dada por

$$\begin{aligned} H_{\sqrt{|c_2|}}(x_2, f_2(x_2, y_2), y_2) &= (\sqrt{|c_2|}x_2, \sqrt{|c_2|}f_2(x_2, y_2), \sqrt{|c_2|}y_2) \\ &= \left(x_3, \sqrt{|c_2|}f_2\left(\frac{x_3}{\sqrt{|c_2|}}, \frac{y_3}{\sqrt{|c_2|}}\right), y_3 \right) \\ &= (x_3, f_3(x_3, y_3), y_3) \\ &= \varphi_3(x_3, y_3). \end{aligned}$$

Assim,

$$j^3 f_3 = \frac{k_3}{2} (x_3^2 - y_3^2) + x_3(a_3 y_3^2 + b_3 x_3 y_3 \pm x_3^2).$$

No caso em que o sinal de x_3^3 é negativo, a reflexão R_2 age de modo que

$$\begin{aligned} R_2(x_3, f_3(x_3, y_3), y_3) &= (x_3, -f_3(x_3, y_3), y_3) \\ &= (x_4, f_4(x_4, y_4), y_4) \\ &= \varphi_4(x_4, y_4), \end{aligned}$$

com

$$j^3 f_4 = \frac{k_4}{2} (x_4^2 - y_4^2) + x_4(a_4 y_4^2 + b_4 x_4 y_4 + x_4^2)$$

e o item **(1)** é obtido.

Por outro lado, quando $c_2 = 0$ e $a_2 \neq 0$, procedendo de modo análogo, utilizando uma homotetia e uma reflexão caso necessário, é possível considerar $a_2 = 1$, obtendo o item **(2)**,

$$j^3 f_2 = \frac{k_2}{2} (x_2^2 - y_2^2) + x_2 y_2 (y_2 + b_2 x_2).$$

Por fim, se $a_2 = c_2 = 0$, então $b_2 \neq 0$, pois a cúbica não é identicamente nula, e segue o item **(3)**,

$$j^3 f_2 = \frac{k_2}{2} (x_2^2 - y_2^2) + x_2^2 y_2.$$

Caso 2: $\alpha x_1 + \beta y_1$ é uma raiz spacelike de C_1 . Suponha que C_1 não possui raízes timelike, pois nesse caso C_1 se enquadra nos itens **(1)**, **(2)** ou **(3)** obtidos anteriormente. Assim, segue que $|\beta| > |\alpha|$ e existe $t_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\frac{\alpha}{\beta} = \tanh(t_0)$. Utilizando $t = t_0$ em (2.27), note que

$$j^3 f_2 = \frac{k_2}{2} (x_2^2 - y_2^2) + y_2(a_2 x_2^2 + b_2 x_2 y_2 + c_2 y_2^2).$$

Se $c_2 = 0$, então x_2 é uma raiz timelike, o que não ocorre. Então $c_2 \neq 0$ e, aplicando uma homotetia e uma reflexão caso necessário, é possível considerar o 3-jato da forma

$$j^3 f_2 = \frac{k_2}{2} (x_2^2 - y_2^2) + y_2(a_2 x_2^2 + b_2 x_2 y_2 + y_2^2),$$

o que resulta no item **(4)**.

Caso 3: $\alpha x_1 + \beta y_1$ é uma raiz lightlike de C_1 . Neste caso $|\beta| = |\alpha|$, ou seja, $\alpha = \pm\beta$ e

$$j^1 f_1 = \frac{k_1}{2} (x_1^2 - y_1^2) + (\alpha x_1 \pm \alpha y_1)(a_1 x_1^2 + b_1 x_1 y_1 + c_1 y_1^2).$$

Suponha que C_1 não possui raízes timelike e spacelike, que já foram tratadas anteriormente. Logo, $a_1 x_1^2 + b_1 x_1 y_1 + c_1 y_1^2$ não possui fatores lineares ou possui apenas fatores da forma $x \pm y$. Se não é possível fatorar, então

$$b_1^2 < 4a_1 c_1 \leq 4a_1 c_1 + (a_1 - c_1)^2 = (a_1 + c_1)^2$$

e $\frac{b_1}{a_1 + c_1}$ pertence a $(-1, 1)$. Tome $t_0 \in \mathbb{R}$ com $\tanh(t_0) = \frac{b_1}{a_1 + c_1}$. Aplicando a rotação Lorentziana M_{3,t_0} , segue que

$$j^3 f_2 = \frac{k_2}{2} (x_2^2 - y_2^2) + (x_2 \pm y_2)(a_2 x_2^2 + c_2 y_2^2),$$

com $a_2 c_2 > 0$, porque $a_2 x_2^2 + c_2 y_2^2$ não possui fatores lineares. Assim, com uma homotetia e reflexão, considere $c_2 = 1$ e

$$j^3 f_2 = \frac{k_2}{2} (x_2^2 - y_2^2) + (x_2 \pm y_2)(a_2 x_2^2 + y_2^2),$$

para $a_2 > 0$, obtendo o item **(5)**. Quando $a_1 x_1^2 + b_1 x_1 y_1 + c_1 y_1^2$ possui um fator $x \pm y$, os itens **(6)**, **(7)** e **(8)** são obtidos através de homotetias e reflexões. ■

Parte II

Propriedades Locais

CONTATO ENTRE O LD E O LPL

No estudo da geometria diferencial de superfícies no espaço Minkowski, duas curvas possuem um papel importante: o LD e o LPL . O LD é formado pelos pontos onde a métrica é degenerada e, genericamente, separa as regiões Riemanniana e Lorentziana. Por outro lado, o LPL é o discriminante da EDB das linhas de curvatura, isto é, o conjunto dos pontos onde as direções principais coincidem. Em superfícies no espaço Euclidiano, o LD é vazio enquanto que o LPL é formado pelos pontos umbílicos. Assim, a existência de tais conjuntos é uma diferença entre as superfícies em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}_1^3 .

Os principais resultados deste capítulo envolvem o fato do LD ser uma linha de curvatura (Teorema 3.1.1). A partir disso, mostramos que o LD sempre é uma separatriz das linhas de curvatura (Teorema 3.1.3) e que o LD troca de folheação em p dependendo da ordem de contato com o LPL (Teorema 3.2.3).

3.1 Propriedades do LD

Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave cujo LD e LPL são curvas regulares que se intersectam em p . Segue de (IZUMIYA; TARI, 2010) que a única direção lightlike em p é uma direção principal tangente ao LD e ao LPL . Como a direção tangente ao LD em p é uma direção principal, existe uma linha de curvatura tangente ao LD em p . O próximo teorema mostra que esta linha de curvatura é o próprio LD .

Teorema 3.1.1. As componentes conexas do LD de uma superfície suave $M \subset \mathbb{R}_1^3$ é uma linha de curvatura de M .

Demonstração: Seja $q \in LD$ e tome a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.1 com $q = \varphi(0,0)$. As direções principais em q são dadas por

$$(\bar{m}(0,0)dy + \bar{l}(0,0)dx)dy = 0,$$

ou seja, $d_1 = \varphi_x(0,0)$ e $d_2 = \bar{m}(0,0)\varphi_x(0,0) - \bar{l}(0,0)\varphi_y(0,0)$ são as direções principais de M em p .

Por outro lado, o LD é dado por $E = 0$ e a direção tangente ao LD em q é $E_y(0,0)\varphi_x(0,0) - E_x(0,0)\varphi_y(0,0)$. Segue da parametrização φ que $E_x(0,0) = \lambda\bar{l}(0,0)$ e $E_y(0,0) = \lambda\bar{m}(0,0)$, para algum $\lambda \neq 0$. Logo, a direção tangente ao LD em q é λd_2 . Portanto, o LD é sempre tangente a direção principal d_2 , ou seja, é uma linha de curvatura. ■

Em p as linhas de curvatura possuem uma singularidade dobrada. O conceito de singularidade dobrada foi apresentado por Davydov em (DAVYDOV, 1994). Genericamente, as singularidades dobradas são selas, nós ou focos dobrados, como na Figura 15. Como o LD é uma linha de curvatura passando por p , segue que o caso foco dobrado não pode ocorrer. O próximo teorema corrobora este fato e apresenta os casos genéricos.

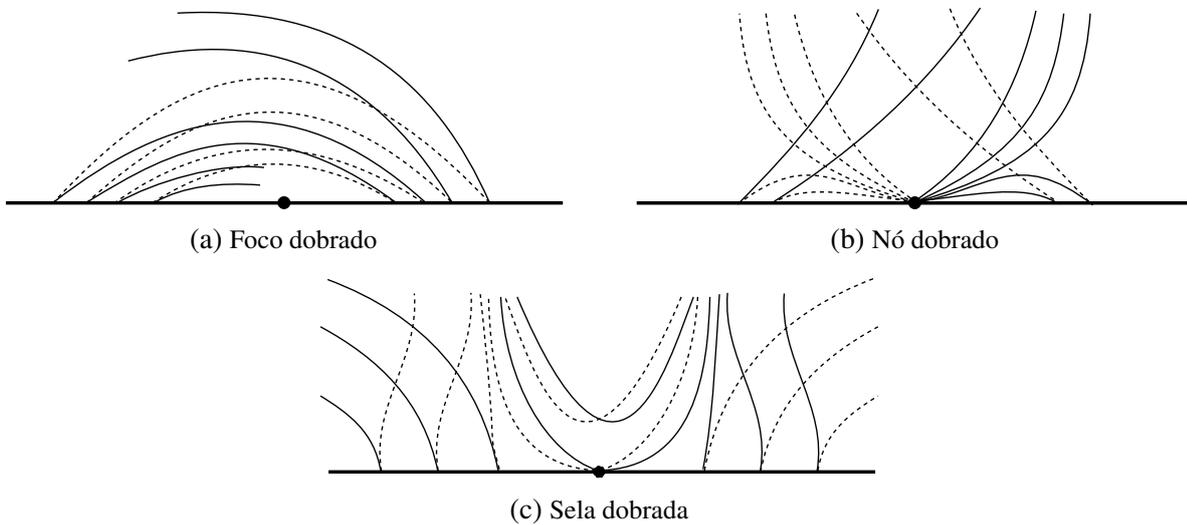


Figura 15 – Singularidades dobradas genéricas de uma EDB.

Teorema 3.1.2. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $p \in M$ um ponto regular do LD e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5 com $p = \varphi(0,0)$. Se p pertence ao LPL, então as linhas de curvatura possuem em p uma singularidade de nó dobrado se $-\frac{1}{3}a_{11} < a_{30} < 0$ ou uma sela dobrada quando $a_{30} < -\frac{1}{3}a_{11}$ ou $a_{30} > 0$.

Demonstração: Como $p \in LPL$ não é um ponto umbílico, segue que $a_{20} = 0$ e $a_{11} \neq 0$. Aplicando uma homotetia, tome $a_{11} = 1$. Portanto,

$$j^3 f = x + xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Sejam a , b e c os coeficientes da EDB das linhas de curvatura de M dada em (2.19). Assim, $a(0,0) = 1$ e $b(0,0) = c(0,0) = 0$. Para estudar as linhas de curvatura, utiliza-se o campo de Lie-Cartan. Para isso, considere

$$P(x,y,r) = a(x,y)r^2 + b(x,y)r + c(x,y),$$

a superfície $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ dada por $P = 0$ e a projeção $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\pi(x, y, r) = (x, y)$. Em \mathcal{M} é definido o campo de Lie-Cartan $\xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\xi(x, y, r) = (P_r(x, y, r), rP_r(x, y, r), -P_x(x, y, r) - rP_y(x, y, r)). \quad (3.1)$$

Como $P_y(0, 0, 0) \neq 0$, segue do Teorema da Função Implícita a existência de um germe $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que \mathcal{M} é dado em uma vizinhança da origem por $y = g(x, r)$. Assim, é possível projetar o campo ξ em \mathbb{R}^2 utilizando $\pi_2(x, y, r) = (x, r)$ e obter

$$\eta(x, r) = \pi_2(\xi(x, g(x, r), r)). \quad (3.2)$$

Logo, as soluções do campo de Lie-Cartan ξ em uma vizinhança da origem $(0, 0, 0)$ são dadas pelas soluções do campo η em uma vizinhança da origem $(0, 0)$, ver Figura 16.

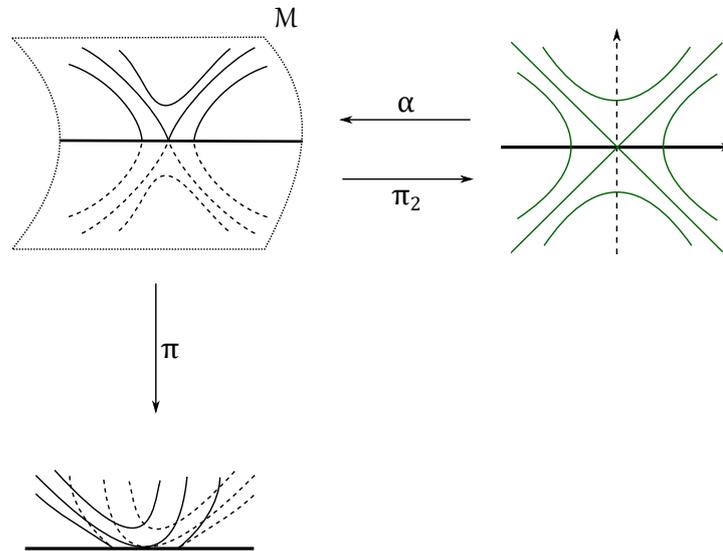


Figura 16 – Levantamento do campo de direções e projeção no plano tangente da superfície \mathcal{M} .

Os autovalores de $d\eta(0, 0)$ são $\kappa_1 = -2(1 + 3a_{30})$ e $\kappa_2 = 6a_{30}$ e os autovetores associados são $v_1 = (1, -1 - 6a_{30})$ e $v_2 = (0, 1)$, respectivamente. A imagem do conjunto criminante pela projeção π_2 é dada por $g_2^{-1}(0)$ com $g_2(x, r) = F_r(x, g(x, r), r)$, pois o criminante é definido como $y = g(x, r)$ e $P_r(x, y, r) = 0$. Assim, em \mathbb{R}^2 , o vetor tangente ao criminante é $v_3 = (2, -6a_{30})$.

Como os autovalores κ_1 e κ_2 do campo de Lie-Cartan são reais, a singularidade de η é classificada de acordo com o sinal de $\kappa_1 \kappa_2$. Se $-12a_{30}(1 + 3a_{30})$ é negativo, então η e ξ possuem uma sela na origem. Por outro lado, se $-12a_{30}(1 + 3a_{30})$ é positivo, os autovalores possuem o mesmo sinal e η e ξ possuem um nó na origem.

Por fim, os autovetores de η não são tangentes ao criminante, pois $v_3 \neq v_i$ para $i = 1, 2$ e qualquer valor de a_{30} . Logo, as linhas de curvatura possuem uma singularidade de nó nobrado se $-\frac{1}{3} < a_{30} < 0$ ou uma sela dobrada quando $a_{30} < -\frac{1}{3}$ ou $a_{30} > 0$. ■

Teorema 3.1.3. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto regular do LD. Se p pertence ao LPL, então o LD é uma separatriz da singularidade das linhas de curvatura em p .

Demonstração: Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5 com $p = \varphi(0,0)$. Como $p \in LPL$ não é um ponto umbílico, segue que $a_{20} = 0$, $a_{11} \neq 0$ e, a partir de uma homotetia, é possível supor que $a_{11} = 1$. Do Teorema da Função Implícita, o LD em $(U, (0,0))$ pode ser parametrizado por $\gamma(x) = (x, \beta(x))$ para algum germe $\beta : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, pois o LD é regular em p .

Do Teorema 3.1.1, o LD é uma linha de curvatura. Logo, $\gamma'(x)$ é uma direção principal e a curva $\Gamma(x) = (x, \beta(x), \beta'(x)) \subset \mathcal{M}$ é uma solução do campo de Lie-Cartan ξ definido como em (3.1). Assim, para que o LD seja uma separatriz, é suficiente mostrar que $\Gamma'(0)$ é um dos autovetores do campo ξ .

Adotando a notação utilizada na prova do Teorema 3.1.2, seja $\Gamma_2 = \pi_2 \circ \Gamma$ a projeção de Γ no plano xr . Note que $j^2\beta = -\frac{1}{2}(1 + 6a_{30})x^2$ e $\Gamma_2(x) = (x, \beta'(x))$. Assim, $\Gamma_2'(0) = (1, -1 - 6a_{30}) = v_1$, ou seja, o vetor tangente a curva Γ_2 é um autovetor de η . Portanto, $\Gamma'(0)$ é um autovetor de ξ e o LD é uma separatriz. ■

Nos casos $a_{30} = 0$ e $a_{30} = -\frac{1}{3}$, o campo η dado em (3.2), e consequentemente o campo de Lie-Cartan ξ definido como em (3.1), possuem uma singularidade semi-hiperbólica na origem. Do Teorema 2.4.3 segue que o campo η possui uma sela, nó ou sela-nó na origem quando a multiplicidade da singularidade é finita. Falta então estudar os casos onde a singularidade possui multiplicidade infinita.

Teorema 3.1.4. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície analítica, $p \in M$ um ponto regular do LD e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5 com $p = \varphi(0,0)$. Se $p \in LPL$, então M contém uma reta lightlike passando por p se, e somente se, $a_{30} = 0$ e as linhas de curvatura possuem uma singularidade em p de multiplicidade infinita.

Demonstração: A única direção lightlike em T_pM é $(1, 0, 1)$. Assim, a única reta lightlike tangente a M em p é $r(t) = (t, 0, t)$. Segue que $r(t) \in M$ é equivalente a $f(t, 0) = t$, pois nesse caso $\varphi(t, 0) = (t, 0, t) = r(t)$. Logo, $r \subset M$ se, e somente se, $\rho(x) = f(x, 0) - x$ é identicamente nula. De fato, se ρ é identicamente nula, então $f = x + yf_2(x, y)$ e $r(t) \in M$, pois $\varphi(t, 0) = r(t)$. Por outro lado, se ρ não é identicamente nula, então existe t tão pequeno quando desejado tal que $\rho(t) \neq 0$ e $f(t, 0) = t + \rho(t) \neq t$.

A multiplicidade da singularidade das linhas de curvatura em p é $d = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle \tilde{\delta}, g \rangle}$, com $\tilde{\delta} = b^2 - 4ac$ e $g = a\tilde{\delta}_x - b\tilde{\delta}_y/2$, sendo a , b e c os coeficientes da EDB (2.19) das linhas de curvatura. Se $a_{30} = 0$, então

$$g(x, y) = x^{i-2}g_1(x) + yg_2(x, y) \quad \text{e} \quad \tilde{\delta}(x, y) = y + x^{i-1}\tilde{\delta}_1(x) + xy\tilde{\delta}_2(x, y) + y^2\tilde{\delta}_3(y),$$

com $g_1(0) \neq 0$ e $\tilde{\delta}_1(0) \neq 0$, sendo i o menor inteiro tal que $j^i\rho \neq 0$. Portanto, quando $a_{30} = 0$,

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle y + x^{i-1}\tilde{\delta}_1(x) + xy\tilde{\delta}_2(x, y) + y^2\tilde{\delta}_3(y), x^{i-2}g_1(x) + yg_2(x, y) \rangle}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $X = x|g_1(x)|^{2-i}$ e $Y = y(1 + x\tilde{\delta}_2(x,y) + y\tilde{\delta}_3(y))$, segue que

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle Y + X^{i-1}\tilde{\delta}_4(X), X^{i-2} + Yg_3(X,Y) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle Y, X^{i-2} \rangle} = i - 2.$$

Portanto, se $a_{30} = 0$ e $d = \infty$, então $i = \infty$ e ρ é identicamente nula, porque M é analítica. Por outro lado, se ρ é identicamente nula, então $i = \infty$, $a_{30} = 0$ (pois $i = 3$ quando $a_{30} \neq 0$) e $d = i - 2 = \infty$. Logo, ρ é identicamente nula se, e somente se, $a_{30} = 0$ e $d = \infty$. ■

Lema 3.1.1. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $p \in M$ um ponto regular do LD e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5 com $p = \varphi(0,0)$. Se $p \in LPL$, então o LD e o LPL possuem contato de ordem 2 em p se, e somente se, $a_{30} \neq -\frac{1}{3}a_{11}^2$.

Demonstração: Sendo $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (0,0))$ uma parametrização local do LD, como na demonstração do Teorema 3.1.2, o contato entre o LD e o LPL é medido pela função $h(x) = \tilde{\delta}(\gamma(x))$, onde $\tilde{\delta}$ é definido em (2.20). Como $j^2h = 4(a_{11}^2 + 3a_{30})^2x^2$, segue que o contato entre o LD e o LPL é 2 quando $a_{30} \neq -\frac{1}{3}a_{11}^2$. ■

Teorema 3.1.5. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $p \in M$ um ponto regular do LD e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5 com $p = \varphi(0,0)$. Se $p \in LPL$, então o LD coincide com o LPL em uma vizinhança de p se, e somente se, $a_{30} = -\frac{1}{3}a_{11}^2$ e as linhas de curvatura possuem uma singularidade em p de multiplicidade infinita.

Demonstração: Se $a_{30} = -\frac{1}{3}a_{11}^2$ e as linhas de curvatura possuem em p uma singularidade de multiplicidade infinita, então do Lema 3.1.1 segue que o contato entre o LD e o LPL é de ordem maior que 2. Do Teorema 2.4.2, a única linha de curvatura com ordem de contato maior que 2 com o LPL é o próprio LPL. Portanto, o LD coincide com o LPL.

Por outro lado, suponha que o LD e o LPL coincidam. Segue do Lema 3.1.1 que $a_{30} = -\frac{1}{3}a_{11}^2$. Para mostrar que a multiplicidade é infinita, tome a parametrização ψ dada pelo Teorema 2.6.1. Assim, o LD é dado por $E = 0$. Além disso, $F = 0$ ao longo do LD, ou seja, $F(x,y) = E(x,y)F_2(x,y)$ para algum germe $F_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. Como o LPL coincide com o LD, então $E^{-1}(0) = \tilde{\delta}^{-1}(0)$, com

$$\tilde{\delta} = (\bar{I}G - \bar{n}E)^2 - 4(\bar{m}G - \bar{n}F)(\bar{I}F - \bar{m}E).$$

Logo, $\bar{I}G$ deve ser 0 quando $E = 0$. Como $G \neq 0$, existe $\bar{l}_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{l} = E\bar{l}_2$. Assim, existe um germe $\tilde{\delta}_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\tilde{\delta}_2(0,0) \neq 0$, e $q > 1$ tais que $\tilde{\delta} = E^q\tilde{\delta}_2$. Por fim, da parametrização ψ , segue que $E_x = \lambda\bar{l} = \lambda E\bar{l}_2$, para algum $\lambda \neq 0$. De (BRUCE; TARI, 1998), a

multiplicidade da singularidade das linhas de curvatura em p é dada por

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle \tilde{\delta}, (\bar{m}G - \bar{n}F)\tilde{\delta}_x - \frac{1}{2}(\bar{l}G - \bar{n}E)\tilde{\delta}_y \rangle} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle E^q \tilde{\delta}_2, (\bar{m}G - \bar{n}F)\tilde{\delta}_x - \frac{1}{2}(\bar{l}G - \bar{n}E)\tilde{\delta}_y \rangle} \\
&= q \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle E, (\bar{m}G - \bar{n}F)\tilde{\delta}_x - \frac{1}{2}(\bar{l}G - \bar{n}E)\tilde{\delta}_y \rangle} \\
&= q \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle E, (\bar{m}G - \bar{n}F)\tilde{\delta}_x - \frac{1}{2}E(\bar{l}_2G - \bar{n})\tilde{\delta}_y \rangle} \\
&= q \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle E, (\bar{m}G - \bar{n}F)(qE^{q-1}E_x\tilde{\delta}_2 + E^q\tilde{\delta}_{2x}) \rangle} \\
&= q \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle E, (\bar{m}G - \bar{n}F)(qE^q\lambda\bar{l}_2\tilde{\delta}_2) \rangle} \\
&= q \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle E \rangle} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

■

Seja $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ uma família de superfícies, dada por

$$\begin{aligned}
\alpha_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow M_t \\
(x, y) &\mapsto (P_1(x, y, t), P_2(x, y, t), P_3(x, y, t)),
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
P_1(x, y, t) &= 48x + 96y + 24(2t + 1)xy - x^3 + 6x^2y, \\
P_2(x, y, t) &= 48y - 12x^2 - 3(4t + 1)x^2y, \\
P_3(x, y, t) &= 48x + 96y + 48txy + x^3 - 6x^2y.
\end{aligned}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$ existe $U_t \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança da origem tal que em U_t o LD e o LPL são dados por $y = 0$, ou seja, nesta família de superfícies o LD e o LPL coincidem em uma vizinhança da origem.

3.2 Ordem de Contato entre o LD e o LPL

Seja γ_1 uma curva em \mathbb{R}^2 definida implicitamente por $F(x, y) = 0$ e $\gamma_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada. A **ordem de contato** entre γ_1 e γ_2 em $p = \gamma_2(0)$ é o menor inteiro positivo k tal que o k -jato do germe $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, dado por $f = F \circ \gamma_2$, é não nulo. Quando $p \notin \gamma_1$, a ordem de contato entre γ_1 e γ_2 em p é 0. Esta seção contém alguns resultados provenientes da ordem de contato entre o LD e o LPL.

Teorema 3.2.1. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto pertencente ao LD, então $p \in LPL$ se, e somente se, $p \in CMN$.

Demonstração: Considere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.1 com $p = \varphi(0, 0)$. Assim, $E(0, 0) = F(0, 0) = 0$ e $\bar{H}(0, 0) = \bar{l}(0, 0)G(0, 0)$. Mas $G(0, 0) \neq 0$, logo $\bar{H}(q) = 0$ se, e somente se, $l(q) = 0$. Portanto, $p \in CMN$ exatamente quando $p \in LPL$. ■

Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto regular do LD que também pertence ao LPL. Tome $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5 com $p = \varphi(0,0)$. Como $p \in LPL$ e não é um ponto umbílico, $a_{20} = 0$ e $a_{11} \neq 0$. Aplicando uma homotetia, considere $a_{11} = 1$. Portanto,

$$j^3 f = x + xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Sendo $\delta = F^2 - EG$, o LD é dado por $\delta = 0$ e $j^1 \delta = 2y$. Por outro lado, a CMN é dada por $\bar{H} = 0$, com $\bar{H} = \bar{I}G - 2\bar{m}F + \bar{n}E$, sendo que $j^1 \bar{H} = 2(1 + 3a_{30})x + 2a_{21}y$. Portanto, o LD e a CMN se intersectam transversalmente em p quando $a_{30} \neq -\frac{1}{3}$. Nesse caso, que ocorre genericamente, a interseção entre o LD e o LPL é preservada por pequenas perturbações de M , pois o LD e a CMN continuam se intersectando transversalmente.

Teorema 3.2.2. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto regular do LD. A ordem de contato entre o LD e o LPL em p é exatamente duas vezes a ordem de contato entre o LD e a CMN em p .

Demonstração: Seja $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.1 com $p = \psi(0,0)$. Como o LD é regular em p , existe uma parametrização local $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ do LD. Sendo $\bar{H} = \bar{I}G - 2\bar{m}F + \bar{n}E$ e $\tilde{\delta}$ como em (2.20), o LPL a CMN são dados implicitamente por $\tilde{\delta} = 0$ e $\bar{H} = 0$, respectivamente. Assim, o grau de contato do LD com o LPL e a CMN em p são medidos pelas funções $\tilde{\delta} \circ \gamma$ e $\bar{H} \circ \gamma$, respectivamente.

Como $E = F = 0$ ao longo do LD, segue que $E \circ \gamma$ e $F \circ \gamma$ são identicamente nulas. Assim,

$$\bar{H}(\gamma(x)) = (\bar{I}G - 2\bar{m}F + \bar{n}E)(\gamma(x)) = \bar{I}(\gamma(x))G(\gamma(x)),$$

$$\tilde{\delta}(\gamma(x)) = ((\bar{I}G - \bar{n}E)^2 - 4(\bar{m}G - \bar{n}F)(\bar{I}F - \bar{m}E))(\gamma(x)) = (\bar{I}(\gamma(x))G(\gamma(x)))^2 = (\bar{H}(\gamma(x)))^2$$

e o resultado segue. ■

Corolário 3.2.1. A ordem de contato entre o LD e o LPL é sempre par.

Demonstração: Imediato a partir do Teorema 3.2.2. ■

Observação 3.2.1. Como o LD e a CMN se intersectam transversalmente em uma superfície genérica, segue do Teorema 3.2.2 que a ordem de contato entre o LD e o LPL em uma superfície genérica é 2. Este resultado também pode ser concluído do Lema 3.1.1, que garante que o contato entre o LD e o LPL é 2 se, e somente se, $a_{30} \neq -\frac{1}{3}$.

As linhas de curvatura definem duas folheações na superfície M . Para distinguir as curvas soluções de cada uma dessas folheações, utiliza-se traços diferentes para representá-las. Por exemplo, na Figura 15 uma folheação é representada pelas linhas contínuas enquanto a outra

dada pelas linhas tracejadas. Genericamente, uma linha de curvatura muda de folheação quando intersecta o *LPL*. O próximo teorema mostra as condições para que o *LD*, que é uma linha de curvatura, mude de folheação ao tangenciar o *LPL*.

Teorema 3.2.3. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ e $p \in M$ um ponto regular do *LD* que também pertence ao *LPL*. O *LD* muda de folheação nas linhas de curvatura em p se, e somente se, o contato entre o *LD* e o *LPL* em p é de ordem $2(2n + 1)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.1 com $p = \psi(0, 0)$. Como p não é ponto umbílico e pertence a *CMN*, segue que $\bar{m}(0, 0) \neq 0$ e $\bar{l}(0, 0) = 0$. Logo, em p existem duas direções assintóticas distintas, $dy = 0$ e $\bar{n}(0, 0)dy + 2\bar{m}(0, 0)dx = 0$. Portanto, é possível tomar uma parametrização local $\tilde{\psi} : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , com $p = \tilde{\psi}(0, 0)$, sendo $\tilde{\psi}_x$ e $\tilde{\psi}_y$ direções assintóticas em $\psi(W)$.

Com a parametrização $\tilde{\psi}$, $\bar{l} = \bar{n} = 0$ em W e $\bar{m}(0, 0) \neq 0$, pois p não pertence ao conjunto parabólico. Assim, as linhas de curvatura são dadas por $G(x, y)dy^2 - E(x, y)dx^2 = 0$. Como p não é ponto umbílico, suponha sem perda de generalidade que $G \neq 0$ em W . O campo de direções principais é levantado para a superfície \mathcal{M} dada por $P = 0$, com $P(x, y, r) = G(x, y)r^2 - E(x, y)$, através do campo de Lie-Cartan ξ . O levantamento do *LPL* na superfície \mathcal{M} é o conjunto criminante, definido por $P(x, y, r) = 0$ e $P_r(x, y, r) = 2G(x, y)r = 0$.

Em p a única direção lightlike, dada por $dy = 0$, é tangente ao *LD* e ao *LPL*. Logo, a reta tangente ao *LPL* em p é $y = 0$. Como o *LPL* é dado implicitamente por $E = 0$, segue que $E_y(0, 0) \neq 0$. Então $P_y(0, 0, 0) \neq 0$ e é possível parametrizar \mathcal{M} localmente por $y = g(x, r)$. Assim, a projeção do criminante no plano xr é dada por

$$\tilde{\delta}_2(x, r) = 2G(x, g(x, r))r = 0.$$

Como o *LD* é regular em p e a reta tangente ao *LD* em p é $y = 0$, existe uma parametrização local $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, q)$ do *LD* de modo que $\gamma(x) = (x, \beta(x))$. O levantamento da linha de curvatura *LD* na superfície \mathcal{M} é dado por $(x, \beta(x), \beta'(x))$, pois $\gamma'(x)$ é a direção principal em p com $dy = \beta'(x)$ e $dx = 1$. Logo, a projeção do *LD* no plano xr é dado pela curva $r = \beta'(x)$.

O contato entre a curva $r = \beta'(x)$ e a projeção do conjunto criminante é medido pela função

$$h_1(x) = \tilde{\delta}_x(x, \beta'(x)) = 2G(x, g(x, \beta'(x)))\beta'(x).$$

O *LD* muda de folheação em p quando a ordem de contato é ímpar, porque nesse caso a função h_1 muda de sinal no ponto $x = 0$ e sinais distintos representam folheações distintas. Como $G \neq 0$, a ordem de contato é dada por $\beta'(x)$. Por outro lado, o contato entre o *LD* e o *LPL* é dado por

$$h_2(x) = E(\gamma(x)) = E(x, \beta(x)) = G(x, \beta(x)) (\beta'(x))^2,$$

pois $P(x, \beta(x), \beta'(x)) = 0$. Portanto, a ordem de contato entre o *LD* e o *LPL* é o dobro da ordem de contato entre a curva $r = \beta'(x)$ e a projeção do conjunto criminante no plano xr . Ou seja, o

LD muda de folheação se, e somente se, a ordem de contato entre o LD e o LPL é $2(2n + 1)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.2.4. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e Γ uma componente conexa do LD. Se Γ é uma curva regular fechada cujas interseções com o LPL são tangências ordinárias, então Γ intersecta o LPL em um número par de pontos.

Demonstração: Se Γ intersecta o LPL em k pontos distintos $\{p_1, \dots, p_k\}$, então estes pontos dividem Γ em k arcos, denotadas por $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ sendo que o p_i separa Γ_{i-1} e Γ_i , conforme a Figura 17. Como a ordem de contato entre Γ e o LPL em cada um dos k pontos é 2, do Teorema 3.2.3 segue que o LD muda de folheação em todos os pontos de interseção. Portanto, Γ_i e Γ_{i+1} estão em folheações distintas (o mesmo vale para Γ_k e Γ_1 , pois Γ é uma curva fechada).

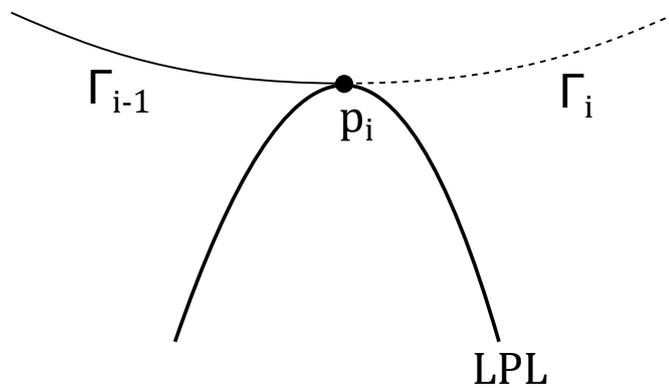


Figura 17 – Interseção entre o LD e o LPL em p_i .

Assim, o número de arcos de Γ com cada uma das folheações é a mesma, pois em cada ponto de interseção existe um arco em cada folheação. Logo, o total de pontos deve ser par, pois se k é ímpar não é possível que as duas folheações apareçam a mesma quantidade de vezes. ■

Corolário 3.2.2. Se $M \subset \mathbb{R}_1^3$ é uma superfície fechada genérica, então toda componente conexa do LD de M intersecta o LPL em um número par de pontos.

Demonstração: Seja Γ uma componente conexa do LD de M . Se M é genérica, então não existem pontos umbílicos lightlike em M . Portanto, Γ é uma curva regular em M . Como M é uma superfície fechada e Γ é formada pelos zeros de uma função analítica, Γ é uma curva fechada. Nos pontos de interseção entre o Γ e o LPL a ordem de contato é genericamente 2 e o corolário segue do Teorema 3.2.4. ■

MULTIPLICIDADE DE PONTOS UMBÍLICOS

Neste capítulo definimos a multiplicidade de pontos umbílicos em superfícies nos espaços Minkowski e Euclidiano. A multiplicidade é o número máximo de pontos umbílicos obtidos ao deformar a superfície em uma vizinhança do ponto umbílico inicial. Este estudo é inspirado em (BRUCE; TARI, 1998), onde os autores definem a multiplicidade de singularidades de equações diferenciais implícitas.

Os principais resultados obtidos relacionam a multiplicidade do ponto umbílico com a singularidade do LD (Teorema 4.2.5) e LPL (Teorema 4.2.7). Além disso, verificamos que a multiplicidade interfere na versalidade da família distância ao quadrado em pontos umbílicos (Teorema 4.3.1).

4.1 Aplicação Monge-Taylor

No estudo de superfícies suaves, tanto no espaço Euclidiano quanto no espaço Minkowski, existem conceitos que dependem apenas de pequenas vizinhanças do ponto de interesse. Alguns exemplos são as linhas de curvatura, as linhas assintóticas, o conjunto parabólico e os pontos umbílicos. Para estudar estes objetos, utilizam-se ferramentas locais.

Seja M uma superfície suave, em \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}_1^3 . Dado um ponto $p \in M$, existe um sistema ortogonal de coordenadas (x, y, z) de modo que M é dada localmente na forma de Monge $z = f_p(x, y)$. A função f_p depende suavemente de p e as propriedades de M no ponto p podem ser deduzidas a partir dos coeficientes da expansão de Taylor de f_p . A aplicação Monge-Taylor relaciona cada ponto $p \in M$ com a expansão de Taylor de f_p .

Em (BRUCE, 1984), Bruce faz uma escolha adequada de eixos e utiliza a aplicação Monge-Taylor para provar alguns resultados locais a respeito das curvas rib, que são definidas na Seção 4.3, em pontos umbílicos genéricos de superfícies no espaço euclidiano. Naquele artigo, dada uma superfície compacta $M \subset \mathbb{R}^3$ é tomada uma cobertura aberta e finita U_i de M . Em

cada aberto U_i é escolhido um campo suave de vetores v_i tangentes a M . Assim, existe um único campo suave de vetores u_i , que também é tangente a M , de modo que $v_i(p)$, $u_i(p)$ e $N(p)$ formam uma base ortogonal positiva de \mathbb{R}^3 para cada $p \in U_i$, onde $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss.

Sendo V_k o espaço vetorial dos polinômios em x e y de grau $\leq k$ e ≥ 2 , Bruce define aplicações $\theta_i : U_i \rightarrow V_k$ da seguinte maneira. Em cada ponto $p \in U_i$ sejam (x, y, z) os eixos que coincidem com as retas orientadas definidas por $v_i(p)$, $u_i(p)$ e $N(p)$, respectivamente. Assim, é possível escrever M em uma vizinhança de p como $z = f_p(x, y)$, onde a função f_p depende do ponto p , e $\theta_i(p)$ é igual a $j^k f_p$.

Esta aplicação Monge-Taylor, utilizada em (BRUCE, 1984), possui algumas vantagens. A primeira delas é que a função f_p , definida acima, não possui termos de ordem ≤ 1 , o que diminui a quantidade de parâmetros para se trabalhar. Além disso, a escolha do eixo z na direção do vetor normal $N(p)$ faz com que sempre seja possível escrever a superfície M na forma de Monge $z = f_p(x, y)$, já que o vetor $N(p)$ nunca é tangente a M em p .

Entretanto, esta construção não se aplica a superfícies compactas no espaço Minkowski, pois em $M \subset \mathbb{R}_1^3$ a aplicação de Gauss não está bem definida em toda a superfície. Mesmo ao tomar a aplicação de Gauss proposta por Pei (PEI, 1999), $N : M \rightarrow \mathbb{R}P^2$, a direção z do sistema de coordenadas (x, y, z) construído como em (BRUCE, 1984) é tangente a M nos pontos do LD , logo M não pode ser escrita na forma de Monge nos pontos do LD . Por isso, propõe-se uma nova aplicação Monge-Taylor, que é descrita a seguir.

Seja M uma superfície suave no espaço Minkowski e $p \in M$. Fixado um vetor $\vec{w} \notin T_p M$, com norma euclidiana 1, existe uma vizinhança W de p em M tal que $\vec{w} \notin T_q M$ para todo $q \in W$. Tome $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de modo que no espaço euclidiano $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja uma base ortonormal positiva definida. Defina em W três campos de vetores constantes X, Y e Z , dados por $X(q) = \vec{u}$, $Y(q) = \vec{v}$ e $Z(q) = \vec{w}$, para todo $q \in W$.

Em cada ponto $q \in W$ tome eixos coordenados (x, y, z) com origem no pontos q e na direção dos vetores $X(q)$, $Y(q)$ e $Z(q)$, respectivamente. Logo, para todo $q \in W$, existe uma parametrização local $\varphi_q : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , dada por $\varphi_q(x, y) = (x, y, g_q(x, y))$, sendo g_q uma função suave tal que $\varphi_q(0, 0) = q$, ver Figura 18. A **aplicação Monge-Taylor** é definida em W como sendo a aplicação $\phi : W \rightarrow J^k(2, 1)$ dada por $\phi(q) = j^k g_q$.

Observação 4.1.1. Vamos restringir a superfície M a vizinhança W do ponto p . Assim, a aplicação Monge-Taylor fica definida em M e denotamos por $\phi : M \rightarrow J^k(2, 1)$.

Teorema 4.1.1. Sejam X uma subvariedade de $J^k(2, 1)$, $M \subset \mathbb{R}_1^3$ e $W \subset M$ um aberto onde a aplicação Monge-Taylor está definida. Para um conjunto aberto e denso de mergulhos de W em \mathbb{R}_1^3 a aplicação $\phi : W \rightarrow J^k(2, 1)$ é transversal a X .

Demonstração: A demonstração é baseada na prova do Teorema 1 de (BRUCE, 1984). Considere a notação utilizada para a definição da aplicação Monge-Taylor. Seja P_d o conjunto de todas

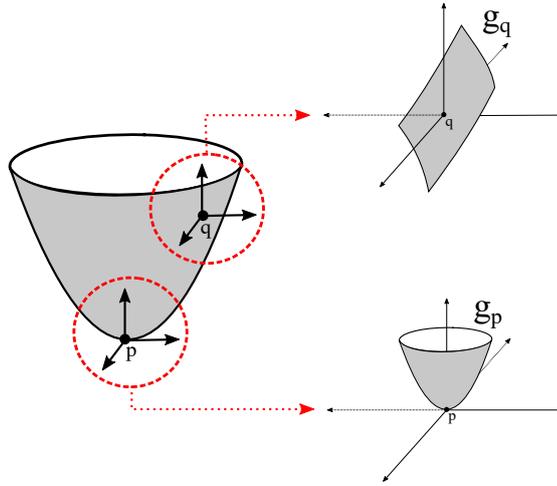


Figura 18 – Função g_q associada a cada ponto $q \in M$.

as aplicações polinomiais $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de grau d . A aplicação identidade Id pertence a P_d e dado um aberto $V \subset \mathbb{R}_1^3$, com $W \subset V$, segue que Id é um mergulho de V em \mathbb{R}_1^3 . Assim, existe uma vizinhança \tilde{V} de Id em P_d de modo que ψ é um mergulho de V em \mathbb{R}_1^3 , para todo $\psi \in \tilde{V}$.

Restringindo \tilde{V} caso necessário, considere que $\vec{w} \notin T_q \psi(W)$, para todo $\psi \in \tilde{V}$ e $q \in \psi(W)$. Logo, existe uma família suave de aplicações $\tilde{\phi} : W \times \tilde{V} \rightarrow J^k(2, 1)$ que calcula em cada par (p, ψ) a aplicação Monge-Taylor de $\psi(W)$ em $\psi(p)$.

Neste contexto, $\tilde{\phi}$ é uma submersão se $d \geq k$. De fato, considere primeiramente o par $(p, Id) \in W \times \tilde{V}$ e tome $\alpha \in T_{\tilde{\phi}(p, Id)} J^k(2, 1) = J^k(2, 1)$. Defina a aplicação polinomial $\psi_s \in \tilde{V}$ dada por

$$\psi_s(x, y, z) = (x, y, z + s\alpha(x, y)) \in W,$$

com s suficientemente pequeno. e a curva $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow W \times \tilde{V}$ com $\gamma(s) = (p, \psi_s)$. Derivando $\tilde{\phi} \circ \gamma$ com relação a s , note que α pertence a imagem de $d\tilde{\phi}(p, I)$ e o resultado segue. Para o caso geral, com pontos da forma $(p, \psi) \in M \times W$, seja $\gamma(s) = (p, \psi_s \circ \psi)$ e o mesmo argumento se aplica. Portanto, $\tilde{\phi}$ é transversal a X .

Do Lema 2.1.1, segue que para um conjunto denso de parâmetros ψ em \tilde{V} , a aplicação Monge-Taylor de $\psi(W)$ é transversal a X . Como o conjunto das aplicações polinomiais é denso no espaço das funções, segue que para um conjunto denso de mergulhos $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação Monge-Taylor de $\psi(W)$ é transversal a X . ■

Seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma parametrização local de M na forma de Monge dada por $\phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança da origem, $\phi(U) = W$ e $g(0, 0) = p$. Para todo $q = \phi(x_0, y_0)$ a função g_q pode ser escrita como $g_q(u, v) = g(u + x_0, v + y_0) - g(x_0, y_0)$. Logo,

$$\phi(q) = j^k g_q = j^k_{(x_0, y_0)} g - g(x_0, y_0). \quad (4.1)$$

Se $\tilde{W} \subset J^k(2, 1)$ é a imagem de W por ϕ , então \tilde{W} é uma superfície em $J^k(2, 1)$ e da equação

(4.1) segue que $\tilde{\varphi} : U \rightarrow J^k(2, 1)$, dada por $\tilde{\varphi}(x, y) = j_{(x,y)}^k g - g(x, y)$, é uma parametrização local de \tilde{W} .

O espaço dos jatos $J^k(2, 1)$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^{(k+2)(k+1)/2}$. Para o caso $k = 2$, denote $J = J^2(2, 1)$ e identifique J com \mathbb{R}^6 de forma que $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ é representado por $(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02})$.

Definição 4.1.1. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave. Um ponto em M com uma propriedade (P) possui **codimensão** n quando a subvariedade em $J^k(2, 1)$, para k suficientemente grande, obtida pelas condições impostas pela propriedade (P) nos coeficientes de uma parametrização de Monge possui codimensão $n + 2$.

Exemplo 4.1.1. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave. Um ponto umbílico genérico possui codimensão 0. De fato, dado $p \in M$ e uma base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de \mathbb{R}_1^3 com $\vec{w} \notin T_p M$, como na definição da aplicação Monge-Taylor, considere a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada por $\varphi(x, y) = x\vec{u} + y\vec{v} + g(x, y)\vec{w}$, com $p = \varphi(0, 0)$ e $j^2 g = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$.

As condições sobre os coeficientes a_{ij} para que p seja um ponto umbílico dependem da classificação do vetor \vec{w} . Se \vec{w} é timelike, então o ponto p é um ponto umbílico se, e somente se,

$$\begin{cases} (a_{01}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{02} = 0, \\ (a_{01}^2 - 1)a_{20} - (a_{10}^2 - 1)a_{02} = 0, \\ (a_{10}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{20} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

O sistema (4.2) define em $J^2(2, 1)$ uma subvariedade regular de codimensão 2, denotada por \mathcal{U} . De fato, quando $a_{10} \neq \pm 1$, \mathcal{U} pode ser parametrizada por $\psi : U \rightarrow J^2(2, 1)$ com

$$\psi(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}) = \left(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, \frac{2a_{01}a_{10}a_{20}}{a_{10}^2 - 1}, \frac{(a_{01}^2 - 1)a_{20}}{a_{10}^2 - 1} \right) \quad (4.3)$$

e $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \times \mathbb{R}^2$. Por outro lado, quando $a_{01} \neq \pm 1$, tome

$$\psi(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{02}) = \left(a_{00}, a_{10}, a_{01}, \frac{(a_{10}^2 - 1)a_{02}}{a_{01}^2 - 1}, \frac{2a_{01}a_{10}a_{02}}{a_{01}^2 - 1}, a_{02} \right)$$

e $U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$. Por fim, se $a_{10} = \pm 1$ e $a_{01} = \pm 1$, então considere

$$\psi(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{11}) = \left(a_{00}, a_{10}, a_{01}, \frac{(a_{10}^2 - 1)a_{11}}{2a_{10}a_{01}}, a_{11}, \frac{(a_{01}^2 - 1)a_{11}}{2a_{10}a_{01}} \right)$$

e $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$.

No caso em que \vec{w} é spacelike, então p é um ponto umbílico quando

$$\begin{cases} (a_{01}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{02} = 0, \\ (a_{01}^2 - 1)a_{20} - (a_{10}^2 + 1)a_{02} = 0, \\ (a_{10}^2 + 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{20} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

O sistema (4.4) também define em $J^2(2, 1)$ uma subvariedade regular de codimensão 2, também denotada por \mathcal{U} . Neste caso, note que \mathcal{U} pode ser parametrizada por $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow J^2(2, 1)$, com

$$\psi(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}) = \left(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, \frac{2a_{01}a_{10}a_{20}}{a_{10}^2 + 1}, \frac{(a_{01}^2 - 1)a_{20}}{a_{10}^2 + 1} \right). \quad (4.5)$$

Portanto, a propriedade “ p ser um ponto umbílico” possui codimensão 0.

4.2 Multiplicidade de Pontos Umbílicos

Dada uma superfície suave M e $p \in M$ um ponto umbílico, qual é o número máximo de pontos umbílicos que podem surgir de p ao perturbar a superfície M ? O objetivo desta seção é responder a esta pergunta. A seguinte definição é o ponto de partida.

Definição 4.2.1. Sejam M uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico. A **multiplicidade do ponto umbílico** p , denotado por $m_M(p)$, é o número máximo de pontos umbílicos que podem surgir de p ao deformar a superfície M .

Os resultados a seguir são enunciados para superfícies em \mathbb{R}_1^3 , entretanto valem versões análogas para superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Segue para os pontos umbílicos em \mathbb{R}^3 as mesmas propriedades dos pontos umbílicos spacelike em \mathbb{R}_1^3 , como o Teorema 4.2.6, por exemplo.

Um ponto $p \in M$ é umbílico quando os coeficiente da EDB (2.19) das linhas de curvatura se anulam simultaneamente em p . Entretanto, tais coeficientes possuem uma correlação entre eles, como mostra a próxima proposição.

Proposição 4.2.1. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma parametrização local de M e E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de M com relação a φ . Sendo a, b e c os coeficientes de $dy^2, dx dy$ e dx^2 na EDB das linhas de curvatura de M , respectivamente. Para todo $q \in U$ valem as seguintes afirmações:

- 1) Se $E(q) \neq 0$, então $b(q) = c(q) = 0$ implica $a(q) = 0$;
- 2) Se $F(q) \neq 0$, então $a(q) = c(q) = 0$ implica $b(q) = 0$;
- 3) Se $G(q) \neq 0$, então $a(q) = b(q) = 0$ implica $c(q) = 0$.

Demonstração: De (2.19) segue que

$$a(x, y) = (\bar{m}G - \bar{n}F)(x, y), \quad b(x, y) = (\bar{l}G - \bar{n}E)(x, y), \quad c(x, y) = (\bar{l}F - \bar{m}E)(x, y).$$

- 1) Seja $q \in U$ com $E(q) \neq 0$. Se $b(q) = c(q) = 0$, então $\bar{n}(q) = \frac{\bar{l}G}{E}(q)$ e $\bar{m}(q) = \frac{\bar{l}F}{E}(q)$. Assim,

$$a(q) = (\bar{m}G - \bar{n}F)(q) = \left(\frac{\bar{l}F}{E}G - \frac{\bar{l}G}{E}F \right)(q) = 0.$$

2) e 3) são análogos. ■

Dada uma superfície suave $M \subset \mathbb{R}_1^3$ e $p \in M$, a primeira forma fundamental nunca é identicamente nula em p . Assim, independentemente da parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , $E(q) \neq 0$, $F(q) \neq 0$ ou $G(q) \neq 0$, para todo $q \in U$. Portanto, a Proposição 4.2.1 mostra que os pontos umbílicos sempre são definidos por apenas duas condições.

Teorema 4.2.1. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $p \in M$ um ponto umbílico, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma parametrização local de M com $p = \varphi(0,0)$ e E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de M com relação a φ . Sendo a, b e c os coeficientes de $dy^2, dx dy$ e dx^2 na EDB das linhas de curvatura de M , respectivamente, valem as seguintes afirmações:

- 1) Se $E(0,0) \neq 0$, então $m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle b, c \rangle}$;
- 2) Se $F(0,0) \neq 0$, então $m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle a, c \rangle}$;
- 3) Se $G(0,0) \neq 0$, então $m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle a, b \rangle}$.

Demonstração: 1) Suponha que $E(0,0) \neq 0$. Assim, $E(x,y) \neq 0$ para todo (x,y) em uma vizinhança de $(0,0)$. Logo, da Proposição 4.2.1, os pontos umbílicos são dados por

$$\begin{cases} b(x,y) = 0, \\ c(x,y) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Considerando $b, c : (\mathbb{C}^2, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, o Teorema 2.3.3 garante que o número máximo de soluções em que $(0,0)$ pode se decompor após uma perturbação do sistema (4.6) é $\mu_0(f)$, com $f = (b, c)$. Assim, o número máximo de pontos umbílicos que surgem a partir de p ao perturbar a superfície, e conseqüentemente o sistema (4.6), é

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{I_{f,0}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle b, c \rangle}.$$

Portanto, $m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle b, c \rangle}$.

2) e 3) são análogos. ■

Seja $\mathcal{U} \subset J^k(2,1)$ a subvariedade dos pontos umbílicos. Dada uma superfície suave $M \subset \mathbb{R}_1^3$ genérica, segue do Teorema 4.1.1 que a aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi} : M \rightarrow J^k(2,1)$ é transversal a \mathcal{U} . Se $p \in M$ é um ponto umbílico e $\tilde{\varphi}$ é transversal a \mathcal{U} em $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(p)$, então é esperado que $m_M(p) = 1$, pois a transversalidade entre uma aplicação e uma subvariedade é estável. O próximo teorema confirma este fato.

Teorema 4.2.2. A multiplicidade de um ponto umbílico p é 1 se, e somente se, a aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi}$ é transversal a subvariedade dos pontos umbílicos \mathcal{U} em $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(p)$.

Demonstração: Seja p um ponto umbílico timelike da superfície suave $M \subset \mathbb{R}_1^3$. Tome, sem perda de generalidade, a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.3, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^3 f = \frac{k}{2}(x^2 - y^2) + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

A aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi} : U \rightarrow \mathcal{J}^2(2, 1)$ é dada por

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \left(f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y), \frac{f_{xx}(x, y)}{2}, f_{xy}(x, y), \frac{f_{yy}(x, y)}{2} \right).$$

Logo, o espaço tangente a $\tilde{\varphi}(0, 0)$ é gerado por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_x(0, 0) &= (0, k, 0, 3a_{30}, 2a_{21}, a_{12}), \\ \tilde{\varphi}_y(0, 0) &= (0, 0, -k, a_{21}, 2a_{12}, 3a_{03}). \end{aligned}$$

Por outro lado, note que $\tilde{\varphi}(0, 0) = \psi(0, 0, 0, k/2)$, onde ψ é a parametrização de \mathcal{U} dada em (4.5), e

$$\begin{aligned} \psi_{a_{00}}(0, 0, 0, k/2) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \psi_{a_{10}}(0, 0, 0, k/2) &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ \psi_{a_{01}}(0, 0, 0, k/2) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ \psi_{a_{20}}(0, 0, 0, k/2) &= (0, 0, 0, 1, 0, -1). \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\varphi}$ é transversal a \mathcal{U} em $\tilde{\varphi}(p)$ se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 3a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ 0 & 0 & -k & a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a_{12}^2 - 3a_{03}a_{21} - a_{21}^2 + 3a_{12}a_{30} \neq 0.$$

Para calcular a multiplicidade de p , observe que $E(0, 0) = 1 \neq 0$. Logo, da Proposição 4.2.1,

$$m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle b, c \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle 2(a_{12} + 3a_{30})x + 2(3a_{03} + a_{21})y + o(2), 2a_{21}x + 2a_{12}y + o(2) \rangle},$$

onde $o(2)$ representa termos de ordem maior do que ou igual a 2 em x e y . Assim, a multiplicidade de p é 1 se, e somente se, $2(a_{12} + 3a_{30})x + 2(3a_{03} + a_{21})y$ e $2a_{21}x + 2a_{12}y$ são linearmente independentes, ou seja,

$$a_{12}^2 - 3a_{03}a_{21} - a_{21}^2 + 3a_{12}a_{30} \neq 0. \quad (4.7)$$

Portanto, $m_M(p) = 1$ se, e somente se, $\tilde{\varphi}$ é transversal a \mathcal{U} em $\tilde{\varphi}(p)$.

Para os casos spacelike e lightlike utiliza-se a mesma ideia. A subvariedade \mathcal{U} é parametrizada por ψ dada em (4.3), enquanto para a superfície M é utilizada a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ dada pelo Teorema 2.6.4 e 2.6.5 nos casos em que p é um ponto umbílico spacelike ou lightlike,

respectivamente. Assim, a condição para a transversalidade de $\tilde{\varphi}$ e \mathcal{U} em $\tilde{\varphi}(p)$ é a mesma para que $m_M(p) = 1$. No caso spacelike, a condição de transversalidade e para que $m_M(p) = 1$ é

$$a_{12}^2 - 3a_{03}a_{21} + a_{21}^2 - 3a_{12}a_{30} \neq 0. \quad (4.8)$$

Por fim, no caso lightlike, a condição obtida é

$$a_{12}^2 - 6a_{20}^2a_{03} - 3a_{21}a_{03} \neq 0. \quad (4.9)$$

■

Corolário 4.2.1. Pontos umbílicos de multiplicidade 1 são estáveis, isto é, são preservados por pequenas perturbações da superfície.

Demonstração: Do Teorema 4.2.2, um ponto umbílico possui multiplicidade 1 se, e somente se, a aplicação Monge-Taylor é transversal a subvariedade dos pontos umbílicos em $J^k(2, 1)$. Mas a transversalidade é preservada por pequenas perturbações. Logo, os pontos umbílicos de multiplicidade 1 são preservados por pequenas perturbações na superfície. ■

Corolário 4.2.2. Genericamente, um ponto umbílico possui multiplicidade 1.

Demonstração: Sabendo que os pontos umbílicos de multiplicidade 1 são aqueles onde a aplicação Monge-Taylor é transversal a \mathcal{U} , este corolário segue do Teorema 4.1.1, onde é provado que a aplicação Monge-Taylor é genericamente transversal a \mathcal{U} . ■

Suponha que a aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi}$ não é transversal a subvariedade \mathcal{U} dos pontos umbílicos em $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(p)$, ou seja, $T_{\tilde{p}}\mathcal{U} \oplus d\tilde{\varphi}_p(\mathbb{R}^2)$ possui codimensão 1 ou 2. Neste caso, $m_M(p)$ é maior que 1 e ao deformar a superfície M o ponto umbílico p pode se decompor em outros pontos umbílicos. O próximo teorema estuda o comportamento de deformações de M em famílias a 1-parâmetro.

Teorema 4.2.3. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico. Existe uma família de superfícies a 1-parâmetro M_t com M_0 sendo uma vizinhança de p em M tal que M_t só possui pontos umbílicos de multiplicidade 1, para todo $t \neq 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração: Suponha que p é um ponto umbílico timelike com multiplicidade maior do que 1. Tome a parametrização local $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.3, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^3 f = \frac{\kappa}{2}(x^2 - y^2) + a_{03}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$

e aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi} : M \rightarrow J^3(2, 1)$, definida na Seção 4.1 para $z = (0, 1, 0)$. Identificando $J^3(2, 1)$ com \mathbb{R}^{10} , de modo que $\sum_{i+j=0}^3 c_{ij}x^i y^j$ é associado ao ponto $(c_{00}, c_{10}, \dots, c_{12}, c_{03})$, a

subvariedade \mathcal{U} de $J^3(2, 1)$ definida pelos pontos umbílicos é dada em uma vizinhança de $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(p)$ por $U_1 = U_2 = 0$, sendo

$$\begin{aligned} U_1 &= c_{11} - \frac{2c_{01}c_{10}c_{20}}{c_{10}^2 + 1}, \\ U_2 &= c_{02} - \frac{(c_{01}^2 - 1)c_{20}}{c_{10}^2 + 1}. \end{aligned}$$

Assim, \mathcal{U} pode ser parametrizada localmente por $\psi : \mathbb{R}^8 \rightarrow J^3(2, 1)$ como em (4.5). Além disso, o estrato dos pontos umbílicos de multiplicidade maior do que 1, denotado por \mathcal{U}_1 , é dado pelo sistema $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, com

$$\begin{aligned} U_3 &= -8c_{01}^4c_{20}^4 + 2c_{01}^3c_{10}^4c_{20}^2c_{21} + 4c_{01}^3c_{10}^2c_{20}^2c_{21} + 2c_{01}^3c_{20}^2c_{21} - 3c_{01}^2c_{10}^8c_{12}c_{30} + c_{01}^2c_{10}^8c_{21}^2 \\ &\quad - 12c_{01}^2c_{10}^6c_{12}c_{30} + 4c_{01}^2c_{10}^6c_{21}^2 - 4c_{01}^2c_{10}^5c_{12}c_{20}^2 - 6c_{01}^2c_{10}^5c_{20}^2c_{30} + c_{12}^2 + 3c_{12}c_{30} - c_{21}^2 \\ &\quad + 6c_{01}^2c_{10}^4c_{21}^2 - 8c_{01}^2c_{10}^3c_{12}c_{20}^2 - 12c_{01}^2c_{10}^3c_{20}^2c_{30} - 12c_{01}^2c_{10}^2c_{12}c_{30} - 18c_{01}^2c_{10}^4c_{12}c_{30} \\ &\quad + 4c_{01}^2c_{10}^2c_{21}^2 - 4c_{01}^2c_{10}c_{12}c_{20}^2 - 6c_{01}^2c_{10}c_{20}^2c_{30} - 3c_{01}^2c_{12}c_{30} + 8c_{01}^2c_{20}^4 + 16c_{01}^2c_{10}^2c_{20}^4 \\ &\quad + 9c_{01}c_{03}c_{10}^9c_{30} + 36c_{01}c_{03}c_{10}^7c_{30} + 6c_{01}c_{03}c_{10}^6c_{20}^2 + 54c_{01}c_{03}c_{10}^5c_{30} + 18c_{01}c_{03}c_{10}^4c_{20}^2 \\ &\quad + 36c_{01}c_{03}c_{10}^3c_{30} + 18c_{01}c_{03}c_{10}^2c_{20}^2 + 9c_{01}c_{03}c_{10}c_{30} + 6c_{01}c_{10}^4c_{20}^2c_{21} - 4c_{01}c_{10}^3c_{12}c_{21} \\ &\quad - 4c_{01}c_{10}^7c_{12}c_{21} + 4c_{01}c_{10}^6c_{20}^2c_{21} - 6c_{01}c_{10}^5c_{12}c_{21} + 6c_{01}c_{03}c_{20}^2 - c_{01}c_{10}^9c_{12}c_{21} + c_{01}^2c_{21}^2 \\ &\quad - c_{01}c_{10}c_{12}c_{21} - 2c_{01}c_{20}^2c_{21} - 3c_{03}c_{10}^{10}c_{21} - 15c_{03}c_{10}^8c_{21} - 30c_{03}c_{10}^6c_{21} - 30c_{03}c_{10}^4c_{21} \\ &\quad - 15c_{03}c_{10}^2c_{21} - 3c_{03}c_{21} + c_{10}^{10}c_{12}^2 + 5c_{10}^8c_{12}^2 + 3c_{10}^8c_{12}c_{30} - 2c_{10}^7c_{12}c_{20}^2 + 6c_{10}^5c_{20}^2c_{30} \\ &\quad + c_{01}^2c_{21}^2 + 10c_{10}^6c_{12}^2 + 12c_{10}^6c_{12}c_{30} - 4c_{10}^6c_{21}^2 - 6c_{10}^5c_{12}c_{20}^2 + 10c_{10}^4c_{12}^2 + 12c_{10}^2c_{12}c_{30} \\ &\quad + 18c_{10}^4c_{12}c_{30} - 8c_{10}^4c_{20}^4 - 6c_{10}^4c_{21}^2 - 6c_{10}^3c_{12}c_{20}^2 + 12c_{10}^3c_{20}^2c_{30} + 5c_{10}^2c_{12}^2 - c_{10}^8c_{21}^2 \\ &\quad - 8c_{10}^2c_{20}^4 - 4c_{10}^2c_{21}^2 - 2c_{10}c_{12}c_{20}^2 + 6c_{10}c_{20}^2c_{30}. \end{aligned}$$

Como ψ é um difeomorfismo entre \mathbb{R}^8 e \mathcal{U} , por ser uma parametrização local de \mathcal{U} , então \mathcal{U}_1 é difeomorfo a $\tilde{\mathcal{U}}_1 = \psi^{-1}(\mathcal{U}_1)$. Logo, as singularidades de \mathcal{U}_1 e $\tilde{\mathcal{U}}_1$ são \mathcal{R} -equivalentes.

O ponto \tilde{p} é uma singularidade de \mathcal{U}_1 se, e somente se, $a_{30} = a_{21} = a_{12} = a_{03} = 0$. Neste caso, a singularidade de $\tilde{\mathcal{U}}_1$ em $\psi^{-1}(\tilde{p})$ é \mathcal{R} -equivalente a $-x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 + x_8^2$. De fato, note que $\tilde{\mathcal{U}}_1$ é definida em \mathbb{R}^8 por $U_3(x_1, \dots, x_8) = 0$. Como $\tilde{p} = \psi(0, 0, 0, -\frac{\kappa}{2}, 0, 0, 0, 0)$, aplicando a translação

$$T(x_1, \dots, x_8) = \left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{\kappa}{2}, x_5, x_6, x_7, x_8\right)$$

é possível considerar que $\psi^{-1}(\tilde{p})$ é a origem de \mathbb{R}^8 . Seja $g = U_3 \circ T \circ \sigma$, com σ sendo a mudança de coordenadas

$$\sigma(x_1, \dots, x_8) = \left(x_1, \dots, x_4, \frac{\kappa^2}{2}x_2 + \frac{2}{3}x_5, \frac{\kappa^2}{2}x_3 + x_6 - x_8, -\frac{\kappa^2}{2}x_2 - x_5 + x_7, -\frac{\kappa^2}{2}x_3 + \frac{2}{3}x_8\right).$$

Note que $j^2g = -x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 + x_8^2$ e

$$g(x_1, \dots, x_8) = h_1(x_2, x_3)x_8^2 + h_2(x_1, \dots, x_7)x_8 + h_3(x_1, \dots, x_7),$$

para germes $h_1 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 1)$ e $h_2, h_3 : (\mathbb{R}^7, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$. Aplicando a mudança de coordenadas local

$$x_8 \mapsto \frac{1}{\sqrt{h_1(x_2, x_3)}}x_8 - \frac{h_2(x_1, \dots, x_7)}{2h_1(x_2, x_3)}, \quad (4.10)$$

existem novos germes $h_4 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 1)$ e $h_5, h_6 : (\mathbb{R}^6, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tais que

$$g(x_1, \dots, x_8) \sim_{\mathcal{R}} x_8^2 + h_4(x_2, x_3)x_7^2 + h_5(x_1, \dots, x_6)x_7 + h_6(x_1, \dots, x_6).$$

Aplicando mudanças de coordenadas semelhantes a (4.10) para as variáveis x_7, x_6 e x_5 segue que $g \sim_{\mathcal{R}} -x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 + x_8^2$.

Seja n a codimensão de $T_{\tilde{p}}\mathcal{U}_1 \oplus d\tilde{\varphi}_p(\mathbb{R}^2)$ em $J^3(2, 1)$ e tome $V = \{q_1, \dots, q_n\} \subset J^3(2, 1)$ de modo que $J^3(2, 1) = \mathbb{R} \cdot V \oplus T_{\tilde{p}}\mathcal{U}_1 \oplus d\tilde{\varphi}_p(\mathbb{R}^2)$, onde $\mathbb{R} \cdot V$ é o subespaço de $J^3(2, 1)$ gerado por V . Dado $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}^n, 0)$, seja M_t a família de superfícies a n -parâmetros com cada M_t parametrizada localmente por $\varphi_t : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, onde

$$\varphi_t(x, y) = \left(x, f(x, y) + \sum_{i=1}^n t_i q_i(x, y), y \right).$$

Denote por $\tilde{\varphi}_t : M_t \rightarrow J^3(2, 1)$ a aplicação Monge-Taylor da superfície M_t . Assim, é possível obter uma deformação $\tilde{\varphi}_V : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow J^3(2, 1)$ da aplicação $\tilde{\varphi}$, dada por

$$\tilde{\varphi}_V(\varphi(x, y), t) = \tilde{\varphi}_t(\varphi(x, y)),$$

tal que

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_V}{\partial x}(p, (0, \dots, 0)) = \tilde{\varphi}_x(p), \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_V}{\partial y}(p, (0, \dots, 0)) = \tilde{\varphi}_y(p), \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_V}{\partial t_i}(p, (0, \dots, 0)) = q_i.$$

Logo, $\tilde{\varphi}_V$ é transversal a \mathcal{U}_1 em \tilde{p} .

Seja N a pré-imagem de \mathcal{U}_1 por $\tilde{\varphi}_V$, então N é uma subvariedade de codimensão 3 em $M \times \mathbb{R}^n$ que intersecta $M \times 0$ na origem. Como N possui dimensão $n - 1$, existe um caminho $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $\gamma(t)$ não pertence a projeção de N em \mathbb{R}^n , para todo $t \neq 0$ suficientemente pequeno. Logo, a imagem de $M \times \gamma$ por $\tilde{\varphi}_V$ evita \mathcal{U}_1 exceto no ponto \tilde{p} . Segue que todos os pontos umbílicos da família $M_{\gamma(t)}$, com $t \neq 0$, são de multiplicidade 1.

Por fim, se p é um ponto umbílico spacelike ou lightlike, então tome a parametrização $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelos Teoremas 2.6.4 ou 2.6.5, respectivamente, com $p = \varphi(0, 0)$. No caso lightlike, considere

$$j^3 f = y + a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Em ambos os casos, sejam $\tilde{\varphi} : (M, p) \rightarrow J^3(2, 1)$ a aplicação Monge-Taylor definida na Seção 4.1, com $z = (0, 0, 1)$, e $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(p)$. A subvariedade $\mathcal{U} \subset J^3(2, 1)$ dos pontos umbílicos é definida em uma vizinhança de \tilde{p} por $U_4 = U_5 = 0$, com

$$U_4 = c_{11} + \frac{2c_{01}c_{10}c_{20}}{1 - c_{10}^2},$$

$$U_5 = c_{02} + \frac{(c_{01}^2 - 1)c_{20}}{1 - c_{10}^2}.$$

Além disso, o estrato dos pontos umbílicos de multiplicidade maior que 1, denotada por \mathcal{U}_1 , é dado pelo sistema $U_4 = U_5 = U_6 = 0$, sendo

$$\begin{aligned}
U_6 = & -8c_{01}^4c_{20}^4 - 2c_{01}^3c_{10}^4c_{20}^2c_{21} + 4c_{01}^3c_{10}^2c_{20}^2c_{21} - 2c_{01}^3c_{20}^2c_{21} - 3c_{01}^2c_{10}^8c_{12}c_{30} + c_{01}^2c_{10}^8c_{21}^2 \\
& + 12c_{01}^2c_{10}^6c_{12}c_{30} - 4c_{01}^2c_{10}^6c_{21}^2 + 4c_{01}^2c_{10}^5c_{12}c_{20}^2 - 6c_{01}^2c_{10}^5c_{20}^2c_{30} + 8c_{01}^2c_{20}^4 + c_{01}^2c_{21}^2 \\
& - 18c_{01}^2c_{10}^4c_{12}c_{30} - 8c_{01}^2c_{10}^3c_{12}c_{20}^2 + 12c_{01}^2c_{10}^3c_{20}^2c_{30} + 12c_{01}^2c_{10}^2c_{12}c_{30} - 16c_{01}^2c_{10}^2c_{21}^4 \\
& - 6c_{01}c_{03}c_{10}^6c_{20}^2 + 4c_{01}^2c_{10}c_{12}c_{20}^2 - 6c_{01}^2c_{10}c_{20}^2c_{30} + 9c_{01}c_{03}c_{10}^9c_{30} - 36c_{01}c_{03}c_{10}^7c_{30} \\
& - 36c_{01}c_{03}c_{10}^3c_{30} - 18c_{01}c_{03}c_{10}^2c_{20}^2 + 6c_{01}^2c_{10}^4c_{21}^2 + 54c_{01}c_{03}c_{10}^5c_{30} + 18c_{01}c_{03}c_{10}^4c_{20}^2 \\
& - 4c_{01}^2c_{10}^2c_{21}^2 - 3c_{01}^2c_{12}c_{30} + 9c_{01}c_{03}c_{10}c_{30} + 6c_{01}c_{03}c_{20}^2 + 2c_{01}c_{20}^2c_{21} - 3c_{03}c_{10}^10c_{21} \\
& + 4c_{01}c_{10}^7c_{12}c_{21} + 4c_{01}c_{10}^6c_{20}^2c_{21} - 6c_{01}c_{10}^5c_{12}c_{21} - 6c_{01}c_{10}^4c_{20}^2c_{21} + 4c_{01}c_{10}^3c_{12}c_{21} \\
& - c_{01}c_{10}^9c_{12}c_{21} - c_{01}c_{10}c_{12}c_{21} + 15c_{03}c_{10}^8c_{21} - 30c_{03}c_{10}^6c_{21} + 30c_{03}c_{10}^4c_{21} - c_{10}^8c_{21}^2 \\
& - 15c_{03}c_{10}^2c_{21} + 3c_{03}c_{21} + c_{10}^{10}c_{12}^2 - 5c_{10}^8c_{12}^2 + 3c_{10}^8c_{12}c_{30} - 2c_{10}^7c_{12}c_{20}^2 + 6c_{10}^5c_{12}c_{20}^2 \\
& + 10c_{10}^6c_{12}^2 - 12c_{10}^6c_{12}c_{30} + 4c_{10}^6c_{21}^2 + 6c_{10}^5c_{20}^2c_{30} - 10c_{10}^4c_{12}^2 + 5c_{10}^2c_{12}^2 - 6c_{10}^3c_{12}c_{20}^2 \\
& + 18c_{10}^4c_{12}c_{30} - 8c_{10}^4c_{20}^4 - 6c_{10}^4c_{21}^2 - 12c_{10}^3c_{20}^2c_{30} - 12c_{10}^2c_{12}c_{30} + 8c_{10}^2c_{20}^4 + 4c_{10}^2c_{21}^2 \\
& + 2c_{10}c_{12}c_{20}^2 + 6c_{10}c_{20}^2c_{30} - c_{12}^2 + 3c_{12}c_{30} - c_{21}^2.
\end{aligned}$$

Parametrizando \mathcal{U} por $\psi : \mathbb{R}^8 \rightarrow J^3(2, 1)$, como em (4.3), a singularidade de \mathcal{U}_1 em \tilde{p} é equivalente a singularidade de $\tilde{\mathcal{U}}_1 = \psi^{-1}(\mathcal{U}_1)$ em $\psi^{-1}(\tilde{p})$, como no caso timelike. Quando p é spacelike, \tilde{p} é uma singularidade de \mathcal{U}_1 se, e somente se, $a_{30} = a_{21} = a_{12} = a_{03} = 0$. Neste caso, a singularidade de $\tilde{\mathcal{U}}_1$ é \mathcal{R} -equivalente a $x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 + x_8^2$.

Se p é lightlike, então \tilde{p} é uma singularidade de \mathcal{U}_1 se, e somente se, $a_{03} = a_{12} = 0$ e $a_{21} = -2a_{20}^2$. Quando $a_{30} \neq 0$, a singularidade de $\tilde{\mathcal{U}}_1$ é equivalente a $x_3^2 + x_6^2 - x_7^2 - x_8^2$. Porém, se $a_{30} = 0$, então a singularidade de $\tilde{\mathcal{U}}_1$ é equivalente a $x_3^2x_5^2 + x_6^2 - x_7^2 - x_8^2$.

Por fim, o resultado é provado para os pontos umbílicos spacelike e lightlike utilizando argumentos de transversalidade análogos aos do caso timelike. ■

Os pontos umbílicos spacelike são exatamente as singularidades do *LPL* na região Riemanniana da superfície. Por outro lado, os pontos umbílicos timelike também são singularidades do *LPL*, mas nem toda singularidade do *LPL* na região Lorentziana é um ponto umbílico. Por fim, os pontos umbílicos lightlike são exatamente as singularidades do *LD*. Nos próximos resultados, as singularidades do *LD* e do *LPL* são relacionadas com a multiplicidade do ponto umbílico.

Teorema 4.2.4. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico lightlike. A multiplicidade de p é 1 se, e somente se, o *LD* possui uma singularidade Morse em p .

Demonstração: Tome a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.5, com $p = \varphi(0, 0)$ e $j^3\varphi = x + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$. O *LD* de M é dado por $\delta = F^2 - EG = 0$. Utilizando a parametrização φ para os cálculos, o 2-jato de δ é

$$j^2\delta = 6a_{30}x^2 + 4a_{21}xy + 2(2a_{02}^2 + a_{12})y^2.$$

Assim, o *LD* possui uma singularidade Morse se, e somente se,

$$a_{21}^2 - 6a_{02}^2a_{30} - 3a_{12}a_{30} \neq 0.$$

De (4.9), segue que o LD possui uma singularidade Morse em p se, e somente se, $m_M(p) = 1$. ■

Teorema 4.2.5. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e p um ponto umbílico lightlike. Se o LD é \mathcal{R} -equivalente a um polinômio quase-homogêneo em p , então $m_M(p)$ é igual ao número de Milnor da singularidade do LD em p .

Demonstração: Tome uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , com $p = \varphi(0, 0)$, na forma de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. O LD de M é dado por $\delta = 0$, sendo

$$\delta(x, y) = f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 - 1.$$

Como $p \in LD$, segue que $f_x(0, 0) \neq 0$ ou $f_y(0, 0) \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $f_x(0, 0) \neq 0$. Logo, $f_y(0, 0) \neq 1$ e $G(0, 0) > 0$. Assim, do Teorema 4.2.1,

$$\begin{aligned} m_M(p) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle a, b \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle f_{xy} - f_{xy}f_y^2 + f_x f_y f_{yy}, f_{xx} - f_{xx}f_y^2 - f_{yy} + f_x^2 f_{yy} \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle f_{xy}(1 - f_y^2) + f_x f_y f_{yy}, f_{xx}(1 - f_y^2) - f_{yy}(1 - f_x^2) \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle f_{xy}(f_x^2 - \delta) + f_x f_y f_{yy}, f_{xx}(f_x^2 - \delta) - f_{yy}(f_y^2 - \delta) \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle f_x(f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) - f_{xy} \delta, f_x(f_{xx} f_x + f_{xy} f_y) - f_y(f_{xy} f_x + f_{yy} f_y) + (f_{yy} - f_{xx}) \delta \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\left\langle \frac{f_x}{2} \delta_y - f_{xy} \delta, \frac{f_x}{2} \delta_x - \frac{f_y}{2} \delta_y + (f_{yy} - f_{xx}) \delta \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\left\langle \delta_y - \frac{2f_{xy}}{f_x} \delta, \frac{f_x}{2} \delta_x - \frac{f_y}{2} \delta_y + (f_{yy} - f_{xx}) \delta \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\left\langle \delta_y - \frac{2f_{xy}}{f_x} \delta, \frac{f_x}{2} \delta_x + \left(f_{yy} - \frac{f_{xy} f_y}{f_x} - f_{xx} \right) \delta \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\left\langle \delta_y - \frac{2f_{xy}}{f_x} \delta, \delta_x - \frac{2(f_x f_{xx} + f_{xy} f_y - f_x f_{yy})}{f_x^2} \delta \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle \delta_y + f_1 \delta, \delta_x + f_2 \delta \rangle}, \end{aligned}$$

com

$$f_1 = -\frac{2f_{xy}}{f_x} \quad \text{e} \quad f_2 = -\frac{2(f_x f_{xx} + f_{xy} f_y - f_x f_{yy})}{f_x^2}.$$

Como o LD é \mathcal{R} -equivalente a um polinômio quase-homogêneo, existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $P(u, v) = \delta(h(u, v))$ é um polinômio quase homogêneo, isto

é, existem racionais $i_1, i_2 > 0$ tais que

$$P(u, v) = \frac{u}{i_1} P_u(u, v) + \frac{v}{i_2} P_v(u, v).$$

Assim,

$$\begin{aligned} m_M(p) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle \delta_y \circ h + (f_1 \circ h)(\delta \circ h), \delta_x \circ h + (f_2 \circ h)(\delta \circ h) \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle \delta_y \circ h + f_3 P, \delta_x \circ h + f_4 P \rangle}, \end{aligned}$$

onde $f_3 = f_1 \circ h$ e $f_4 = f_2 \circ h$. Seja $h = (h_1, h_2)$, então

$$\begin{pmatrix} P_u \\ P_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\delta_x \circ h) \frac{\partial h_1}{\partial u} + (\delta_y \circ h) \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ (\delta_x \circ h) \frac{\partial h_1}{\partial v} + (\delta_y \circ h) \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ \frac{\partial h_1}{\partial v} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \circ h \\ \delta_y \circ h \end{pmatrix} = dh \begin{pmatrix} \delta_x \circ h \\ \delta_y \circ h \end{pmatrix}.$$

Como h é um difeomorfismo, $\det dh \neq 0$ e

$$\begin{aligned} m_M(p) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle \delta_y \circ h + f_3 P, \delta_x \circ h + f_4 P \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\left\langle \frac{\partial h_1}{\partial u} (\delta_x \circ h + f_4 P) + \frac{\partial h_2}{\partial u} (\delta_y \circ h + f_3 P), \frac{\partial h_1}{\partial v} (\delta_x \circ h + f_4 P) + \frac{\partial h_2}{\partial v} (\delta_y \circ h + f_3 P) \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\left\langle \frac{\partial h_1}{\partial u} (\delta_x \circ h) + \frac{\partial h_2}{\partial u} (\delta_y \circ h) + f_5 P, \frac{\partial h_1}{\partial v} (\delta_x \circ h) + \frac{\partial h_2}{\partial v} (\delta_y \circ h) + f_6 P \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle P_u + f_5 P, P_v + f_6 P \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\left\langle P_u + f_5 \left(\frac{u}{i_1} P_u + \frac{v}{i_2} P_v \right), P_v + f_6 \left(\frac{u}{i_1} P_u + \frac{v}{i_2} P_v \right) \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\left\langle \left(1 + f_5 \frac{u}{i_1} \right) P_u + f_5 \frac{v}{i_2} P_v, \left(1 + f_6 \frac{v}{i_2} \right) P_v + f_6 \frac{u}{i_1} P_u \right\rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle P_u + f_7 P_v, P_v + f_8 P_u \rangle} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\varepsilon_2}{\langle P_u, P_v \rangle}, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} f_5 &= \frac{\partial h_1}{\partial u} f_4 + \frac{\partial h_2}{\partial u} f_3, & f_6 &= \frac{\partial h_1}{\partial v} f_4 + \frac{\partial h_2}{\partial v} f_3, \\ f_7 &= \frac{f_5 v}{i_2 \left(1 + f_5 \frac{u}{i_1} \right)}, & f_8 &= \frac{f_6 u}{i_1 \left(1 + f_6 \frac{v}{i_2} \right)}. \end{aligned}$$

Portanto, $m_M(p)$ é igual ao número de Milnor de P . Mas $P \sim_{\mathcal{R}} \delta$, logo $m_M(p)$ é igual ao número de Milnor de δ . ■

Corolário 4.2.3. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e p um ponto umbílico lightlike. Se o LD possui uma singularidade simples em p , então $m_M(p)$ é igual ao número de Milnor da singularidade do LD em p .

Demonstração: Todas as singularidades simples são \mathcal{R} -equivalentes a polinômios quase-homogêneos, logo segue do Teorema 4.2.5 que $m_M(p)$ é igual ao número de Milnor da singularidade do LD em p . ■

Teorema 4.2.6. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike ou spacelike. A multiplicidade de p é 1 se, e somente se, o LPL possui uma singularidade Morse em p .

Demonstração: O LPL de M é dado por $\tilde{\delta} = 0$, com $\tilde{\delta}$ definido em (2.20). Se p é um ponto umbílico timelike, tome a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.3, com $p = \varphi(0,0)$ e

$$j^3 f = \frac{k}{2}(x^2 - y^2) + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Assim,

$$j^2 \tilde{\delta} = ((a_{12} - 2a_{21} + 3a_{30})x + (3a_{03} - 2a_{12} + a_{21})y)((a_{12} + 2a_{21} + 3a_{30})x + (3a_{03} + 2a_{12} + a_{21})y).$$

Logo, o LPL possui uma singularidade Morse em p se, e somente se,

$$a_{12}^2 - 3a_{03}a_{21} - a_{21}^2 + 3a_{12}a_{30} \neq 0.$$

Da equação (4.7), isso é equivalente a $m_M(p) = 1$ e o resultado segue.

Para o caso spacelike, tome a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.4, com $p = \varphi(0,0)$ e

$$j^3 f = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Assim, o LPL possui uma singularidade Morse em p se, e somente se,

$$a_{12}^2 - 3a_{03}a_{21} + a_{21}^2 - 3a_{12}a_{30} \neq 0.$$

Da equação (4.8), isso é equivalente a $m_M(p) = 1$. ■

Proposição 4.2.2. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike. As possíveis singularidade simples que o LPL pode ter em p são A_{2k+1}^- , D_k^\pm e E_7 .

Demonstração: Tome uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.2 com $p = \varphi(0,0)$. Assim, o LPL em uma vizinhança de p é dado por $l(x,y)n(x,y) = 0$, com $l(0,0) = n(0,0) = 0$.

As singularidades A_{2k} , E_6 e E_8 são irredutíveis. Portanto, tais singularidades não são escritas como o produto de l e n . Logo, não é possível obter estas singularidades no LPL em pontos umbílicos timelike. ■

Teorema 4.2.7. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike.

- (1) Se o LPL possui uma singularidade A_{2k-1}^- em p , então $m_M(p) = k$;
- (2) Se o LPL possui uma singularidade D_{2k+1}^\pm ou D_{2k}^+ em p , então $m_M(p) = 2$;
- (3) Se o LPL possui uma singularidade D_{2k}^- em p , então $m_M(p) = 2$ ou $m_M(p) = k$;
- (4) Se o LPL possui uma singularidade E_7 em p , então $m_M(p) = 3$.

Demonstração: Considere a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , com $p = \varphi(0,0)$, dada pelo Teorema 2.6.2. Logo, o LPL de M é dado por $\tilde{\delta} = ln = 0$. Como $E \equiv 0$ e $G \equiv 0$ em U , então $F \neq 0$ em U e do Teorema 4.2.1 segue que

$$m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle a, c \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle -nF, lF \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle n, l \rangle}.$$

(1) Suponha que o LPL tenha uma singularidade A_{2k-1}^- em p . Assim, existe um difeomorfismo local $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tal que

$$l(h(u, v))n(h(u, v)) = \tilde{\delta}(h(u, v)) = u^2 - v^{2k} = (u + v^k)(u - v^k).$$

Sem perda de generalidade, considere $l(h(u, v)) = u + v^k$ e $n(h(u, v)) = u - v^k$. Logo,

$$m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle n, l \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle n \circ h, l \circ h \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle u - v^k, u + v^k \rangle} = k.$$

(2) Se o LPL possui uma singularidade D_{2k+1}^\pm em p , então existe um difeomorfismo local $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tal que

$$l(h(u, v))n(h(u, v)) = \tilde{\delta}(h(u, v)) = v(u^2 \pm v^{2k-1}).$$

Sem perda de generalidade, considere $l(h(u, v)) = v$ e $n(h(u, v)) = u^2 \pm v^{2k-1}$. Assim,

$$m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle l, n \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle l \circ h, n \circ h \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle v, u^2 \pm v^{2k-1} \rangle} = 2.$$

Para o caso D_{2k}^+ , basta tomar $l \sim_{\mathcal{R}} v$ e $n \sim_{\mathcal{R}} u^2 + v^{2k-2}$.

(3) Neste caso $ln \sim_{\mathcal{R}} v(u + v^{k-1})(u - v^{k-1})$ e existem duas possibilidades para a escolha de l e n . Se $l \sim_{\mathcal{R}} v$, $n \sim_{\mathcal{R}} u^2 - v^{2k-2}$, então $m_M(p) = 2$. Por outro lado, quando $l \sim_{\mathcal{R}} u \pm v^{k-1}$ e

$n \sim_{\mathcal{R}} v(u \mp v^{k-1})$ segue que

$$\begin{aligned}
 m_M(p) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle l, n \rangle} \\
 &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle u \pm v^{k-1}, v(u \mp v^{k-1}) \rangle} \\
 &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle u \pm v^{k-1}, v(u \mp v^{k-1}) + v(u \pm v^{k-1}) \rangle} \\
 &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle u \pm v^{k-1}, uv \rangle} \\
 &= k.
 \end{aligned}$$

(4) Como o LPL tem uma singularidade E_7 em p , então existe um difeomorfismo local $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tal que

$$l(h(u, v))n(h(u, v)) = \tilde{\delta}(h(u, v)) = u(u^2 + v^3).$$

Sem perda de generalidade, considere $l(h(u, v)) = u$ e $n(h(u, v)) = u^2 + v^3$. Logo,

$$m_M(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle l, n \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle l \circ h, n \circ h \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle u, u^2 + v^3 \rangle} = 3.$$

■

As diferenças apresentadas no caso D_{2k}^- , onde $m_M(p)$ pode ser 2 ou k , ocorrem pois nem todas as singularidades do LPL na região Lorentziana correspondem a pontos umbílicos. Por exemplo, considere o caso da singularidade D_6^- . Então existem duas possibilidades para l e n , apresentadas na demonstração do item (3), tais possibilidades são ilustradas nas Figuras 19 e 20.

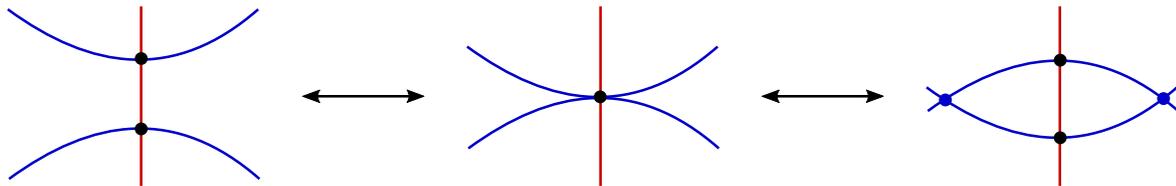


Figura 19 – Ponto umbílico timelike com singularidade D_6^- e multiplicidade 2. As curvas em azul e vermelho representam $\bar{l} = 0$ e $\bar{n} = 0$. Os pontos em preto e azul indicam os pontos umbílicos e as singularidades do LPL que não são pontos umbílicos, respectivamente.

4.3 Função Distância ao Quadrado e a Cáustica

No espaço Euclidiano, o contato entre uma superfície suave $M \subset \mathbb{R}^3$ e esferas euclidianas é medido pela aplicação distância ao quadrado. As propriedades dessa aplicação foram amplamente estudadas na literatura, como em (PORTEOUS, 1971), (BRUCE, 1984) e (BRUCE; GIBLIN; TARI, 1999). No espaço Minkowski, é possível obter uma aplicação análoga. São

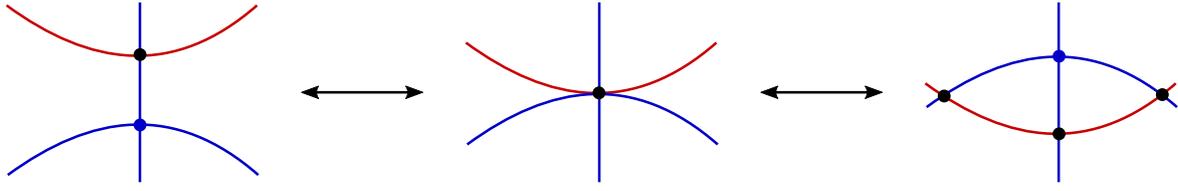


Figura 20 – Ponto umbílico timelike com singularidade D_6^- e multiplicidade 3. As curvas em azul e vermelho representam $\bar{l} = 0$ e $\bar{n} = 0$. Os pontos em preto e azul indicam os pontos umbílicos e as singularidades do LPL que não são pontos umbílicos, respectivamente.

apresentados a seguir a construção desta aplicação e a definição da cústica em \mathbb{R}_1^3 dados em (TARI, 2012).

Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave. A **família distância ao quadrado** em M é a aplicação $d^2 : M \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d^2(p, v) = \langle p - v, p - v \rangle.$$

Para cada $v \in \mathbb{R}_1^3$, denote por $d_v^2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $d_v^2(p) = d^2(p, v)$.

Dada uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , considere $d^2 : U \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$d^2((x, y), v) = \langle \varphi(x, y) - v, \varphi(x, y) - v \rangle. \quad (4.11)$$

Da equação (4.11), segue que a aplicação distância ao quadrado mede o contato entre uma superfície suave $M \subset \mathbb{R}_1^3$ e as pseudo-esferas de \mathbb{R}_1^3 . Assim, a família distância ao quadrado pode ser vista como uma deformação a 3-parâmetros da aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \langle \varphi(x, y), \varphi(x, y) \rangle.$$

A **cústica** de M , denotada por $C(M)$, é o conjunto bifurcação da família d^2 definido em (2.1).

Dado $v \in \mathbb{R}_1^3$, a aplicação d_v^2 é singular em um ponto $q \in U$ se, e somente se,

$$\langle \varphi(q) - v, \varphi_x(q) \rangle = \langle \varphi(q) - v, \varphi_y(q) \rangle = 0,$$

ou seja, se $\varphi - v$ é paralelo a $\varphi_x \times \varphi_y$ em q . Isto ocorre quando existe algum escalar μ tal que $\varphi - v = \mu(\varphi_x \times \varphi_y)$ em q . A singularidade de d_v^2 em q é degenerada se, e somente se,

$$\left(\frac{\partial^2 d_v^2}{\partial x \partial y}(q) \right)^2 - \frac{\partial^2 d_v^2}{\partial x^2}(q) \frac{\partial^2 d_v^2}{\partial y^2}(q) = 0.$$

Como $\varphi - v = \mu(\varphi_x \times \varphi_y)$, segue que

$$\frac{\partial^2 d_v^2}{\partial x^2} = E + \mu \bar{l}, \quad \frac{\partial^2 d_v^2}{\partial x \partial y} = F + \mu \bar{m}, \quad \frac{\partial^2 d_v^2}{\partial y^2} = G + \mu \bar{n}.$$

Portanto, d_v^2 possui uma singularidade degenerada se, e somente se, $\varphi - v = \mu(\varphi_x \times \varphi_y)$ e

$$(\bar{m}^2 - \bar{l}\bar{n})\mu^2 - (\bar{l}G - 2\bar{m}F + \bar{n}E)\mu + (F^2 - EG) = 0. \quad (4.12)$$

Logo, a cáustica $C(M)$ é dada por

$$C(M) = \{\varphi(q) - \mu(\varphi_x(q) \times \varphi_y(q)) : q \in U \text{ e } \mu \text{ é solução de (4.12)}\}.$$

Nos pontos de $M \setminus LD$, é bem definido um vetor unitário N normal a superfície. Assim, a cáustica pode ser reescrita como o conjunto dos pontos onde $\varphi - v = \lambda N$ e

$$K\lambda^2 - 2H\lambda + 1 = 0,$$

sendo K e H as curvaturas Gaussiana e Média de $M \setminus LD$, respectivamente. Assim, λ é igual a menos os raios de curvatura e $C(M)$ coincide com a superfície focal de $M \setminus LD$.

O modelo local da cáustica depende da \mathcal{R} -singularidade da aplicação distância ao quadrado. Em uma superfície genérica a aplicação d_v^2 pode ter singularidades $A_1^\pm, A_2, A_3^\pm, A_4$ e D_4^\pm . Nos pontos onde d_v^2 possui uma singularidade A_1^\pm , $C(M)$ é vazio. A cáustica é uma superfície suave nos pontos onde d_v^2 possui uma singularidade A_2 . Por fim, o conjunto dos pontos onde d_v^2 possui uma singularidade A_3 ou mais degenerada é chamado de **ridge** de M . A imagem da ridge na cáustica são os pontos singulares de $C(M)$ e é denominado de curva **rib**.

Em pontos umbílicos de M a aplicação distância ao quadrado possui uma singularidade D_4^\pm ou mais degenerada de *corank* 2. Uma pergunta natural é: os pontos umbílicos de multiplicidade 1 são exatamente aqueles onde a aplicação distância ao quadrado possui uma singularidade D_4^\pm ? Entretanto, a resposta é não. De fato, sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico. Suponha, utilizando uma translação, que p é a origem.

Caso 1: p é um ponto umbílico timelike. Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.3, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^3 f = \frac{k}{2}(x^2 - y^2) + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

A aplicação d_v^2 possui uma singularidade degenerada em p se, e somente se, $v = (0, \frac{1}{k}, 0)$. Neste caso,

$$j^3 d_v^2 = \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k}(a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3).$$

Portanto, d_v^2 possui uma singularidade D_4^\pm se, e somente se,

$$-4a_{30}a_{12}^3 + a_{21}^2a_{12}^2 + 18a_{03}a_{21}a_{30}a_{12} - 4a_{03}a_{21}^3 - 27a_{03}^2a_{30}^2 \neq 0.$$

Por outro lado, a multiplicidade p é 1 se, e somente se,

$$-a_{12}^2 - 3a_{30}a_{12} + a_{21}^2 + 3a_{03}a_{21} \neq 0.$$

Assim, as condições para que $m_M(p) = 1$ e para que d_v^2 tenha uma singularidade D_4^\pm são distintas. Por exemplo, se $a_{30} = a_{21} = 0$ e $a_{12} \neq 0$, então $m_M(p) = 1$ e d_v^2 não possui uma singularidade D_4^\pm . Por outro lado, se $a_{30} = 1, a_{21} = a_{12} = 0$ e $a_{03} \neq 0$, então d_v^2 tem uma singularidade D_4^\pm e $m_M(p) \neq 1$.

Considerando a parte cúbica de $j^3 f$ nas formas (1) ou (4) do Teorema 2.6.6, que são os casos que ocorrem em um ponto umbílico timelike genérico, segue que $m_M(p) = 1$ se, e somente se, $b^2 - a^2 - 3a \neq 0$. Porém, a singularidade de d_v^2 é D_4^\pm se, e somente se, $(b^2 - 4a)a \neq 0$. A Figura 21 apresenta tais curvas no plano ab dos parâmetros.

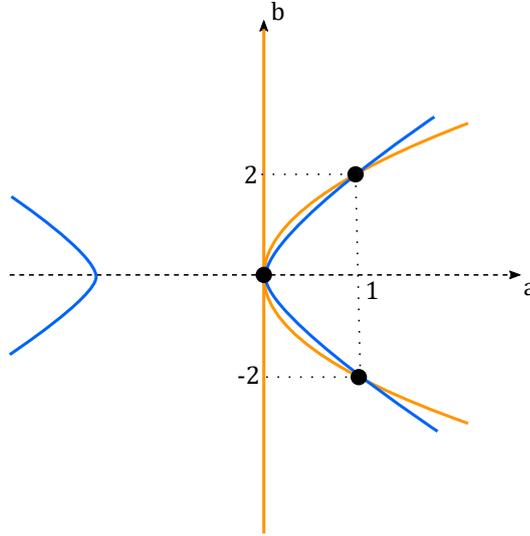


Figura 21 – Condições para que um ponto umbílico timelike possua multiplicidade maior que 1 (curva azul) e para que a aplicação distância ao quadrado não tenha uma singularidade D_4^\pm (curva laranja).

Caso 2: p é um ponto umbílico lightlike. Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^3 f = x - \frac{k}{2}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

A aplicação d_v^2 possui uma singularidade degenerada em p se, e somente se, $v = (\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k})$. Neste caso,

$$j^3 d_v^2 = \frac{2}{k} \left(a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + \left(a_{12} + \frac{k^2}{2} \right) xy^2 + a_{03}y^3 \right).$$

Portanto, d_v^2 possui uma singularidade D_4^\pm se, e somente se,

$$-4a_{30} \left(a_{12} + \frac{k^2}{2} \right)^3 + a_{21}^2 \left(a_{12} + \frac{k^2}{2} \right)^2 + 18a_{03}a_{21}a_{30} \left(a_{12} + \frac{k^2}{2} \right) - 4a_{03}a_{21}^3 - 27a_{03}^2a_{30}^2 \neq 0.$$

Por outro lado, a multiplicidade p é 1 se, e somente se, $2a_{21}^2 - 3k^2a_{30} - 6a_{12}a_{30} \neq 0$. Portanto, as condições para que $m_M(p) = 1$ e para que d_v^2 tenha uma singularidade D_4^\pm são distintas. Por exemplo, se $a_{30} = a_{03} = 0$, $a_{12} = -\frac{k^2}{2}$ e $a_{21} \neq 0$, então $m_M(p) = 1$ e d_v^2 não possui uma singularidade D_4^\pm . Por outro lado, se $a_{30} = 1$, $a_{21} = 0$, $a_{12} = -\frac{k^2}{2}$ e $a_{03} \neq 0$, então d_v^2 tem uma singularidade D_4^\pm e $m_M(p) > 1$.

Caso 3: p é um ponto umbílico spacelike. Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.4, com $p = \varphi_3(0, 0)$ e

$$j^3 f_1 = \frac{k}{2} (x^2 + y^2) + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

A aplicação d_v^2 possui uma singularidade degenerada em p se, e somente se, $v = (0, 0, \frac{1}{k})$. Neste caso,

$$j^3 d_v^2 = -\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k} (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3).$$

Portanto, d_v^2 possui uma singularidade D_4^\pm se, e somente se,

$$-4a_{30}a_{12}^3 + a_{21}^2a_{12}^2 + 18a_{03}a_{21}a_{30}a_{12} - 4a_{03}a_{21}^3 - 27a_{03}^2a_{30}^2 \neq 0.$$

Por outro lado, a multiplicidade p é 1 se, e somente se,

$$-a_{12}^2 + 3a_{30}a_{12} - a_{21}^2 + 3a_{03}a_{21} \neq 0.$$

Portanto, as condições para que $m_M(p) = 1$ e para que d_v^2 tenha uma singularidade D_4^\pm são distintas. Por exemplo, se $a_{30} = a_{21} = 0$ e $a_{12} \neq 0$, então $m_M(p) = 1$ e d_v^2 não possui uma singularidade D_4^\pm . Por outro lado, se $a_{30} = 1$, $a_{21} = a_{12} = 0$ e $a_{03} \neq 0$, então d_v^2 tem uma singularidade D_4^\pm e $m_M(p) > 1$.

De (BRUCE, 1984), segue que a parte cúbica de $j^3 f$ pode ser escrita como

$$(a+1)x^3 + bx^2y + (a-3)xy^2 + by^3.$$

Assim, $m_M(p) = 1$ se, e somente se, $a^2 + b^2 \neq 9$. Porém, a singularidade de d_v^2 é D_4^\pm se, e somente se,

$$-27 + 18a^2 - 8a^3 + a^4 + 18b^2 + 24ab^2 + 2a^2b^2 + b^4 \neq 0.$$

A Figura 22 apresenta tais curvas no plano ab dos parâmetros.

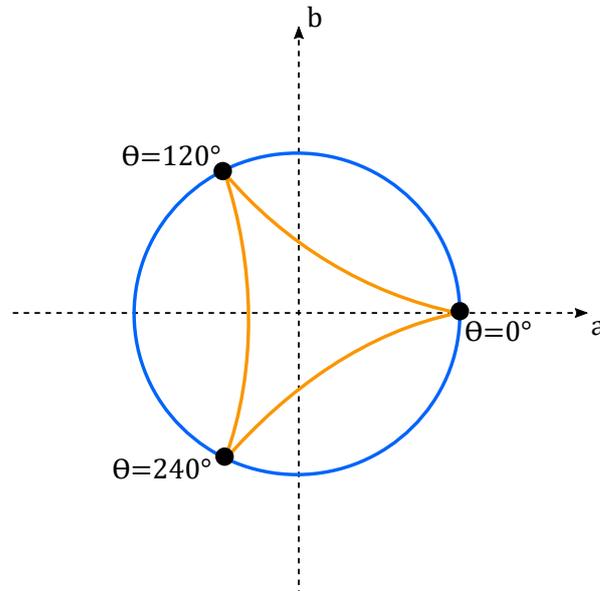


Figura 22 – Condições para que um ponto umbílico spacelike possua multiplicidade maior que 1 (curva azul) e para que a aplicação distância ao quadrado não tenha uma singularidade D_4^\pm (curva laranja).

Portanto, nos três casos segue que a multiplicidade 1 não implica que a aplicação distância ao quadrado possua uma singularidade D_4^\pm e vice-versa. Entretanto, d^2 é uma deformação a

3-parâmetros de d_v^2 . Assim, se d_v^2 possui uma singularidade D_4^\pm , é possível que d^2 seja uma deformação \mathcal{R} -versal?

Teorema 4.3.1. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $p \in M$ um ponto umbílico e $v \in \mathbb{R}_1^3$ tal que d_v^2 tenha uma singularidade D_4^\pm em p . A família d^2 é uma deformação \mathcal{R}^+ -versal de d_v^2 se, e somente se, $m_M(p) = 1$.

Demonstração: Como d_v^2 possui uma singularidade D_4^\pm , existe $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{R}$ tal que $d_v^2 \circ \psi(X, Y) = XY^2 \pm X^3$. Como ψ é um germe de difeomorfismo, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial d_v^2}{\partial x} \circ \psi, \frac{\partial d_v^2}{\partial y} \circ \psi \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial d_v^2}{\partial x} \circ \psi \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial X} + \left(\frac{\partial d_v^2}{\partial y} \circ \psi \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial X}, \left(\frac{\partial d_v^2}{\partial x} \circ \psi \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial Y} + \left(\frac{\partial d_v^2}{\partial y} \circ \psi \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial Y} \right\rangle \\ &= \langle Y^2 \pm 3X^2, 2XY \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

De (4.13), note que

$$g \in \left\langle \frac{\partial d_v^2}{\partial x}, \frac{\partial d_v^2}{\partial y} \right\rangle \Leftrightarrow g \circ \psi \in \langle Y^2 \pm 3X^2, 2XY \rangle. \quad (4.14)$$

Logo, $\mathcal{M}_2^3 \subset \left\langle \frac{\partial d_v^2}{\partial x}, \frac{\partial d_v^2}{\partial y} \right\rangle$. De fato, dado $g \in \mathcal{M}_2^3$, como $\psi \in \mathcal{R}$ observe que $j^2(g \circ \psi) = 0$ e

$$g \circ \psi \in \mathcal{M}_2^3 \subset \langle Y^2 \pm 3X^2, 2XY \rangle.$$

Da equivalência (4.14), segue que $g \in \left\langle \frac{\partial d_v^2}{\partial x}, \frac{\partial d_v^2}{\partial y} \right\rangle$.

Portanto, para que d^2 seja uma deformação \mathcal{R} -versal de d_v^2 , basta que o 2-jato de $\frac{\partial d^2}{\partial x}(x, y, 0, 0, 0)$, $\frac{\partial d^2}{\partial y}(x, y, 0, 0, 0)$, $\frac{\partial d^2}{\partial u}(x, y, 0, 0, 0)$, $\frac{\partial d^2}{\partial v}(x, y, 0, 0, 0)$ e $\frac{\partial d^2}{\partial w}(x, y, 0, 0, 0)$ gerem todos os polinômios de grau menor do que ou igual a 2 em x e y , onde d^2 é visto como uma função nas variáveis (x, y, u, v, w) .

Seja p um ponto umbílico timelike. Tome a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.3, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^3 f = \frac{k}{2} (x^2 - y^2) + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Para que a função distância ao quadrado esteja bem definida em p , é necessário que $k \neq 0$. Como d_v^2 possui uma singularidade D_4^\pm em p , segue que $v = (0, \frac{1}{k}, 0)$ e

$$a_{12}^2 a_{21}^2 - 4a_{03} a_{21}^3 - 4a_{12}^3 a_{30} + 18a_{03} a_{12} a_{21} a_{30} - 27a_{03}^2 a_{30}^2 \neq 0.$$

A função d^2 é dada por

$$d^2(x, y, u, v, w) = \left\langle \varphi(x, y) + \left(u, v - \frac{1}{k}, w \right), \varphi(x, y) + \left(u, v - \frac{1}{k}, w \right) \right\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} j^2 \frac{\partial d^2}{\partial x}(x, y, 0, 0, 0) &= -\frac{2(3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2)}{k}, \\ j^2 \frac{\partial d^2}{\partial y}(x, y, 0, 0, 0) &= -\frac{2(a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2)}{k}, \\ j^2 \frac{\partial d^2}{\partial u}(x, y, 0, 0, 0) &= 2x, \\ j^2 \frac{\partial d^2}{\partial v}(x, y, 0, 0, 0) &= kx^2 - ky^2, \\ j^2 \frac{\partial d^2}{\partial w}(x, y, 0, 0, 0) &= -2y \end{aligned}$$

e d^2 é uma deformação \mathcal{R} -versal de d_v^2 se, e somente se, $3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2$, $a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2$ e $kx^2 - ky^2$ são linearmente independentes. Isto ocorre quando

$$\det \begin{pmatrix} 3a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} \\ k & 0 & -k \end{pmatrix} = -2k(a_{12}^2 + 3a_{30}a_{12} - a_{21}^2 - 3a_{03}a_{21}) \neq 0.$$

Como $k \neq 0$ e a multiplicidade de p é 1 se, e somente se, $-a_{12}^2 - 3a_{30}a_{12} + a_{21}^2 + 3a_{03}a_{21} \neq 0$, o resultado segue.

Os casos em que p é um ponto umbílico spacelike e lightlike são análogos. ■

Assim, do Teorema 4.3.1, as curvas em laranja nas Figuras 21 e 22 representam os parâmetros para os quais a aplicação distância ao quadrado d_v^2 é \mathcal{R} -versalmente deformada. No caso spacelike, o resultado condiz com a Proposição 4 de (BRUCE, 1984), como era esperado.

FAMÍLIAS DE SUPERFÍCIES A 1-PARÂMETRO

Neste capítulo, estudamos fenômenos que aparecem em famílias de superfícies genéricas a 1-parâmetro no espaço Minkowski: pontos umbílicos timelike onde o LPL possui uma singularidade A_3^- , pontos umbílicos timelike planos, pontos umbílicos lightlike e as interseções entre o LD e o LPL com ordem de contato 4.

Nos principais resultados são obtidos os modelos de bifurcação de algumas curvas especiais sobre a família de superfícies, sendo elas o conjunto dos pontos onde a métrica é degenerada, o discriminante da EDB das linhas de curvatura, o conjunto parabólico e o conjunto onde a curvatura média se anula.

5.1 Propriedades de Codimensão 1

Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, ϕ a aplicação Monge-Taylor definida Seção 4.1 e \tilde{M} a imagem de M por ϕ . Do Teorema 4.1.1, se um ponto p em uma superfície genérica M possui uma propriedade (P) de codimensão 0, então \tilde{M} e a subvariedade de $J^k(2, 1)$ definida por (P) são transversais em $\phi(p)$. Portanto, uma perturbação suficientemente pequena da superfície M preserva as propriedades de codimensão 0, pois a transversalidade é estável.

Por outro lado, propriedades com codimensão 1, ver Definição 4.1.1, não são genericamente preservadas por perturbações nas superfícies. Entretanto, dada uma família adequada de superfícies, tais propriedades são preservadas após perturbações na família.

Definição 5.1.1. Sejam M uma superfície suave e $p \in M$ um ponto com uma propriedade (P) de codimensão 1. Uma família M_t a 1-parâmetro de superfícies no espaço Minkowski, dada por

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow M_t \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, h_t(x, y)) = (x, y, \tilde{h}(x, y, t)) \end{aligned}$$

para alguma função diferenciável $\tilde{h} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é uma **boa família de M** no ponto p se $M_0 = M$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : (\mathbb{R}^2, 0) \times (\mathbb{R}, 0) &\longrightarrow J^k(2, 1) \\ ((x, y), t) &\longmapsto j_{(x,y)}^k h_t \end{aligned}$$

é transversal ao germe da subvariedade de $J^k(2, 1)$ definida por (P) em $\phi(p)$.

Teorema 5.1.1. Seja $X \subset J^k(2, 1)$ uma subvariedade. Para um conjunto aberto e denso de mergulhos da família M_t de M em \mathbb{R}_1^3 a aplicação Monge-Taylor $\phi : M_t \rightarrow J^k(2, 1)$ é transversal a X .

Demonstração: Análoga à demonstração do Teorema 4.1.1. ■

Corolário 5.1.1. Uma boa família de superfícies M_t de M é genérica.

Demonstração: Da definição, segue que uma família M_t de M é uma boa família quando a aplicação Monge-Taylor for transversal a subvariedade de $J^k(2, 1)$ definida pela propriedade (P) . Mas, segue do Teorema 5.1.1 que tal transversalidade ocorre genericamente. Logo, uma boa família é genérica. ■

Pontos umbílicos estáveis, isto é, de codimensão 0, já foram estudados na literatura. No espaço Euclidiano é sabido que o discriminante da EDB das linhas de curvatura possui em superfícies genéricas uma singularidade A_1^+ (BRUCE; FIDAL, 1989; SOTOMAYOR; GUTIERREZ, 1982) e as configurações genéricas das linhas de curvatura são apresentadas na Figura 23.

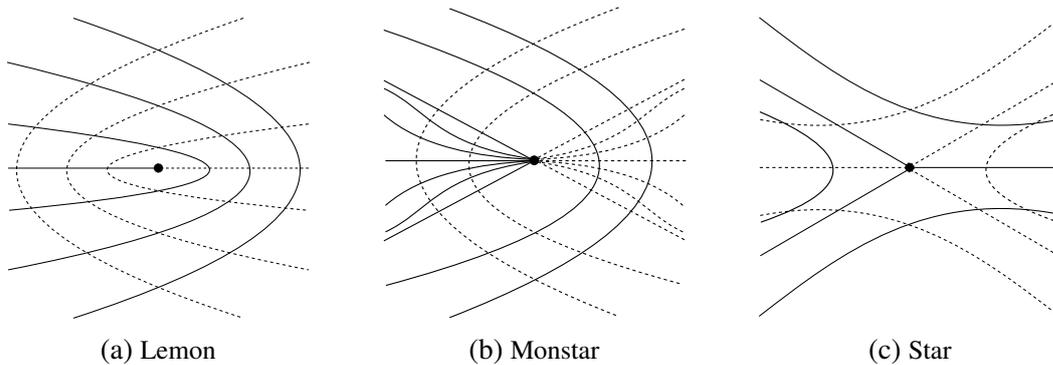


Figura 23 – Configurações genéricas das linhas de curvatura em pontos umbílicos no espaço Euclidiano.

No espaço Minkowski, pontos umbílicos spacelike se comportam de maneira análoga ao caso Euclidiano e os pontos umbílicos timelike ocorrem em singularidades do LPL . Em superfícies genéricas, o LPL possui uma singularidade A_1^- em pontos umbílicos timelike. A Figura 24 apresenta as configurações genéricas para as linhas de curvatura em pontos umbílicos timelike (IZUMIYA; TARI, 2010).

Pontos umbílicos de codimensão 1 surgem quando uma, e somente uma, condição adicional é imposta sobre estes pontos. Pontos umbílicos de codimensão 1 no espaço Euclidiano

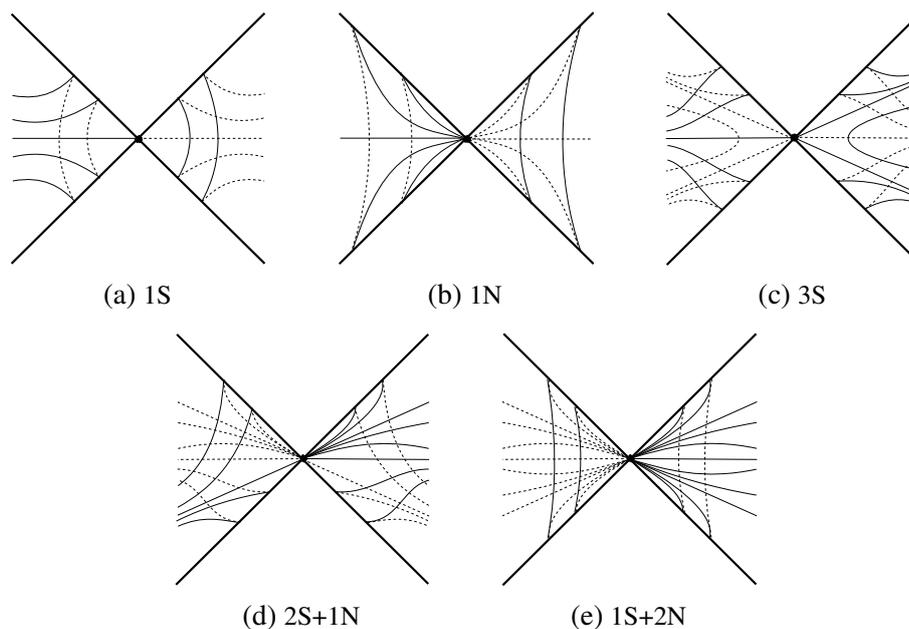


Figura 24 – Configurações genéricas das linhas de curvatura em pontos umbílicos timelike.

já foram estudados, ver por exemplo (BRUCE; GIBLIN; TARI, 1995), (BRUCE; GIBLIN; TARI, 1999) e (GUTIÉRREZ; SOTOMAYOR; GARCIA, 2004). Os resultados para pontos umbílicos spacelike são análogos aos casos Euclidianos, por isso serão ser tratados aqui. Este trabalho contempla três casos:

- (1) Pontos umbílicos timelike onde o LPL possui uma singularidade A_3 .
- (2) Pontos umbílicos timelike planos onde o LPL e o conjunto parabólico possuem uma singularidade Morse.
- (3) Pontos umbílicos lightlike onde o LD possui uma singularidade A_1 e o LPL possui uma singularidade A_3 .

São estudadas as deformações de algumas curvas especiais, sendo elas o conjunto dos pontos onde a métrica é degenerada (LD), o discriminante da EDB das linhas de curvatura (LPL), o conjunto parabólico e o conjunto onde a curvatura média se anula (CMN).

As configurações das linhas de curvatura também podem gerar pontos umbílicos de codimensão 1, como os pontos umbílicos onde o LPL possui uma singularidade A_1 , mas as linhas de curvatura não possuem uma configuração genérica apresentada nas Figuras 23 e 24. Entretanto, tais pontos e as deformações das linhas de curvatura não são estudadas neste trabalho.

Do Capítulo 3, segue que genericamente o LD e o LPL se intersectam com ordem de contato igual a 2. Tais interseções são estáveis e possuem codimensão 0. Porém, conforme a ordem de contato entre as curvas aumenta, a codimensão dos pontos de interseção também

crece. Além dos pontos umbílicos (1), (2) e (3) listados anteriormente, um outro fenômeno de codimensão 1 estudado nesse capítulo é

(4) Pontos de interseção entre o LD e o LPL com ordem de contato igual a 4.

Através de famílias de superfícies a 1-parâmetro, tais pontos são perturbados e as configurações entre o LD e o LPL são analisadas.

5.2 Pontos Umbílicos Timelike com Singularidade A_3 do LPL

Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $p \in M$ um ponto na região Lorentziana e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.2 com $p = \varphi(0,0)$. Como a pseudo-métrica é não degenerada em pontos da região Lorentziana, segue que $F \neq 0$ em U . Assim, a EDB das linhas de curvatura de M com relação a φ é $\bar{n}dy^2 + \bar{l}dx^2 = 0$. Portanto, o LPL é a curva em U definida por $\tilde{\delta}^{-1}(0)$, onde

$$\tilde{\delta} = \bar{l}(x,y)\bar{n}(x,y).$$

Considere a aplicação $\tilde{\varphi} : U \rightarrow J^k(2,1) \times J^k(2,1)$ dada por $\tilde{\varphi}(x,y) = (j_{(x,y)}^k \bar{l}, j_{(x,y)}^k \bar{n})$. Esta aplicação $\tilde{\varphi}$ é utilizada para estudar pontos umbílicos lightlike onde o LPL possui uma singularidade A_3 , ao invés da aplicação Monge-Taylor definida anteriormente. Note que $J^k(2,1) \times J^k(2,1)$ pode ser identificado como $\mathbb{R}^{(k+2)(k+1)}$. No caso $k = 1$, o ponto $(a_{00}, a_{10}, a_{01}, b_{00}, b_{10}, b_{01})$ de \mathbb{R}^6 é associado a $(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y, b_{00} + b_{10}x + b_{01}y)$ em $J^1(2,1) \times J^1(2,1)$. Se

$$j^1 \bar{l} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y \quad \text{e} \quad j^1 \bar{n} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y,$$

então p é um ponto umbílico se, e somente se, $a_{00} = b_{00} = 0$. Neste caso, $j^2 \tilde{\delta} = (a_{10}x + a_{01}y)(b_{10}x + b_{01}y)$. Assim, o LPL possui uma singularidade A_1^- em p se, e somente se, $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} \neq 0$.

Seja \mathcal{G}_1 o conjunto dos germes (M, p) , com $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike onde o LPL possui uma singularidade mais degenerada que A_1^- . O conjunto \mathcal{G}_1 pode ser visto como um subconjunto do espaço das funções $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0,0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$, relacionando (M, p) com uma parametrização de M em uma vizinhança de p . Assim, \mathcal{G}_1 é munido com a topologia induzida por $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0,0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$ e $(M, p) \in \mathcal{G}_1$ é dito **genérico** se pertence a um subconjunto aberto e denso de \mathcal{G}_1 .

Teorema 5.2.1. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_1$ genérico, o LPL possui uma singularidade A_3^- em p .

Demonstração: Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.2 com $p = \varphi(0,0)$. Se

$$j^1 \bar{l} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$

$$j^1 \bar{n} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2,$$

então $a_{00} = 0$, $b_{00} = 0$, $j^2 \tilde{\delta} = (a_{10}x + a_{01}y)(b_{10}x + b_{01}y)$ e $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} = 0$, pois em p o LPL não possui uma singularidade A_1 . Genericamente, suponha que $a_{10} \neq 0$ ou $b_{10} \neq 0$. Assim, após mudanças de coordenadas, $\tilde{\delta} \sim_{\mathcal{R}} \pm(x^2 - \Lambda_1^2 y^4)$, com

$$\Lambda_1 = -a_{01}^2 a_{20} b_{10} + a_{10} a_{01} a_{11} b_{10} - a_{10}^2 a_{02} b_{10} + a_{10} a_{01}^2 b_{20} - a_{10}^2 a_{01} b_{11} + a_{10}^3 b_{02}.$$

Logo, quando $\Lambda_1 \neq 0$ o LPL possui uma singularidade A_3^- em p e a condição $\Lambda_1 \neq 0$ é genérica, pois Λ_1 é um polinômio não constante com relação aos coeficientes de \bar{l} e \bar{n} . ■

Teorema 5.2.2. Os pontos umbílicos timelike onde o LPL tem uma singularidade A_3^- possuem codimensão 1.

Demonstração: Defina em $J = J^2(2, 1) \times J^2(2, 1)$ a subvariedade B dada por

$$\begin{cases} a_{00} = 0, \\ b_{00} = 0, \\ a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} = 0, \\ a_{10}^2 + b_{10}^2 \neq 0, \\ \Lambda_1 \neq 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Sendo $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, $p \in M$ um ponto na região Lorentziana e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.2, com $p = \varphi(0, 0)$, então p é um ponto umbílico timelike onde o LPL possui uma singularidade A_3^- se, e somente se, $\tilde{\varphi}(p) \in B$.

Para provar que B possui codimensão 3, defina a aplicação $f : J \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por

$$f(P) = (a_{00}, b_{00}, a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}, a_{10}^2 + b_{10}^2, \Lambda_1),$$

onde $P = (a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_{00}, b_{10}, b_{01}, b_{20}, b_{11}, b_{02})$. Seja $N \subset \mathbb{R}^5$ a subvariedade dada por $N = \{(0, 0, 0, u, v) \in \mathbb{R}^5 : uv \neq 0\}$. Se $f(P) \in N$, então $a_{10} \neq 0$ ou $b_{10} \neq 0$, assim

$$\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\} \subset df_P(T_P J).$$

Como $T_{(0,0,0,u,v)}N$ é gerado por $\{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$, segue que f é transversal a N . Como $B = f^{-1}(N)$ e N possui codimensão 3, a codimensão de B é 3. ■

No decorrer da seção, sejam $(M, p) \in \mathcal{G}_1$ e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.2 com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^1 \bar{l} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$

$$j^1 \bar{n} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2.$$

Suponha que o LPL possui uma singularidade A_3^- em p , ou seja, as condições (5.1) são satisfeitas.

Para estudar as deformações de uma superfície com um ponto umbílico timelike onde o LPL possui uma singularidade A_3 , seja $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ uma família de superfícies, onde cada M_t é parametrizada localmente por

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (x, y) &\longmapsto \tilde{h}(x, y, t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

com \tilde{h} diferenciável. Denote por $E(x, y, t)$, $F(x, y, t)$, $G(x, y, t)$, $\bar{l}(x, y, t)$, $\bar{m}(x, y, t)$ e $\bar{n}(x, y, t)$ os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de M_t em $(x, y) \in U$ com relação a φ_t .

Teorema 5.2.3. Uma família de superfícies $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$, onde cada M_t é parametrizada localmente por (5.2) com $\tilde{h}(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, $\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi_t}{\partial y}$ direções lightlikes, para todo t na família e $(x, y) \in U$, é uma boa família de M se, e somente se, $a_{10}\bar{n}_t(0, 0, 0) - b_{10}\bar{l}_t(0, 0, 0) \neq 0$.

Demonstração: A partir da família M_t dada no enunciado, defina

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R} &\longrightarrow J^2(2, 1) \times J^2(2, 1) \\ ((x, y), t) &\longmapsto (j_{(x, y, t)}^2 \bar{l}, j_{(x, y, t)}^2 \bar{n}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{\varphi} = \left(\bar{l}, \bar{l}_x, \bar{l}_y, \frac{\bar{l}_{xx}}{2}, \bar{l}_{xy}, \frac{\bar{l}_{yy}}{2}, \bar{n}, \bar{n}_x, \bar{n}_y, \frac{\bar{n}_{xx}}{2}, \bar{n}_{xy}, \frac{\bar{n}_{yy}}{2} \right).$$

Para que M_t seja uma boa família de M , é necessário que $\tilde{\varphi}$ seja transversal a subvariedade B de $J^1(2, 1) \times J^1(2, 1)$ definida por (5.1) em $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(0, 0, 0)$.

Tome a parametrização local $\psi : W \subset \mathbb{R}^9 \rightarrow J^2(2, 1) \times J^2(2, 1)$ de B , dada por

$$\psi(x_1, \dots, x_9) = \left(0, x_1, \dots, x_5, 0, x_6, \frac{x_2 x_6}{x_1}, x_7, x_8, x_9 \right).$$

Como $\tilde{p} \in B$, segue que $a_{10} \neq 0$ ou $b_{10} \neq 0$. Suponha que $a_{10} \neq 0$, o outro caso é análogo. Logo, $\tilde{p} = \psi(a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_{10}, b_{20}, b_{11}, b_{02})$. Assim, $\tilde{\varphi}$ é transversal a B se, e somente se, $T_{\tilde{p}}B \oplus d\tilde{\varphi}(0, 0, 0) = J^2(2, 1) \times J^2(2, 1) \approx \mathbb{R}^{12}$. Calculando as derivadas de $\tilde{\varphi}$ e ψ , verifica-se que a condição de transversalidade é equivalente a $\Lambda_1(a_{10}\bar{n}_t(0, 0, 0) - b_{10}\bar{l}_t(0, 0, 0)) \neq 0$. Como $\Lambda_1 \neq 0$, segue que M_t é uma boa família de M se, e somente se, $a_{10}\bar{n}_t(0, 0, 0) \neq b_{10}\bar{l}_t(0, 0, 0)$. ■

Desse modo, uma boa família de M é definida de acordo com as parametrizações dadas pelo Teorema 2.6.2. Expressar a condição para M_t ser uma boa família de M em termos de uma parametrização na forma de Monge é útil para obter exemplos e facilitar os cálculos. Como p pertence a região Lorentziana, tome a parametrização local $\varphi_M : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.3, com $p = \varphi_M(0, 0)$ e

$$j^3 f = cx^2 - cy^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3.$$

Teorema 5.2.4. Sejam $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ uma família de superfícies, dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{M_t} : V &\longrightarrow M_t \\ (x, y) &\longmapsto (x, h_t(x, y), y) = (x, h(x, y, t), y) \end{aligned} \quad ,$$

para alguma h diferenciável com $h_0(x, y) = g(x, y)$. Então, M_t é uma boa família de M se, e somente se,

$$-c_{21}h_{yyt}(0, 0, 0) + 3c_{30}h_{xyt}(0, 0, 0) + c_{12}h_{xyt}(0, 0, 0) - c_{21}h_{xxt}(0, 0, 0) \neq 0.$$

Demonstração: Em um ponto $q = \varphi_{M_t}(x, y)$ de M_t o plano tangente é gerado pelos vetores

$$\frac{\partial \varphi_{M_t}}{\partial x}(x, y) = (1, h_x(x, y, t), 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi_{M_t}}{\partial y}(x, y) = (0, h_y(x, y, t), 1).$$

Um vetor

$$w = w_1 \frac{\partial \varphi_{M_t}}{\partial x}(x, y) + w_2 \frac{\partial \varphi_{M_t}}{\partial y}(x, y) \in T_q M_t$$

é lightlike se, e somente se, $\langle w, w \rangle = 0$. Isso ocorre quando

$$w_1 = -h_x(x, y, t)h_y(x, y, t) \pm \sqrt{1 + h_x(x, y, t)^2 - h_y(x, y, t)^2} \quad \text{e} \quad w_2 = 1 + h_x(x, y, t)^2.$$

Portanto, os campos de vetores lightlike em M_t são dados por

$$V_{\pm} = \left(-h_x(x, y, t)h_y(x, y, t) \pm \sqrt{1 + h_x(x, y, t)^2 - h_y(x, y, t)^2} \right) \frac{\partial \varphi_{M_t}}{\partial x} + (1 + h_x(x, y, t)^2) \frac{\partial \varphi_{M_t}}{\partial y}.$$

Sejam \bar{l} , \bar{m} e \bar{n} os coeficientes da segunda forma fundamental de M_t calculados com a parametrização φ_t de M_t utilizada no Teorema 5.2.3. Na região Loretziana de M_t , os coeficientes l , m e n da segunda forma fundamental estão bem definidos e

$$a_{10}\bar{n}_t(0, 0, 0) - b_{10}\bar{l}_t(0, 0, 0) \neq 0 \Leftrightarrow a_{10}n_t(0, 0, 0) - b_{10}l_t(0, 0, 0) \neq 0.$$

Sendo $N_t : M_t \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ a aplicação de Gauss de M_t , vale que

$$l = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial x}, N_t \right\rangle \quad \text{e} \quad n = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial y \partial y}, N_t \right\rangle.$$

Mas, como $\partial \varphi_t / \partial x$ e $\partial \varphi_t / \partial y$ são as direções lightlike, segue que $\partial^2 \varphi_t / \partial x \partial x$ e $\partial^2 \varphi_t / \partial y \partial y$ são as derivadas de V_+ na direção V_+ e de V_- na direção V_- , respectivamente. Assim, como N_t não depende da parametrização, é possível expressar os coeficientes da segunda forma fundamental de M_t com relação φ_t através da parametrização φ_{M_t} . Observando que $a_{10} = l_x(0, 0, 0)$ e $b_{10} = n_x(0, 0, 0)$, então $a_{10}n_t(0, 0, 0) - b_{10}l_t(0, 0, 0) = 0$ se, e somente se,

$$3c_{30}h_{xyt}(0, 0, 0) + c_{12}h_{xyt}(0, 0, 0) - c_{21}h_{xxt}(0, 0, 0) - c_{21}h_{yyt}(0, 0, 0) = 0.$$

■

Teorema 5.2.5. Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike onde o LPL possui uma singularidade A_3^- , então na deformação do LPL através uma boa família M_t de M surgem duas curvas regulares disjuntas para um sinal de t e uma curva com duas singularidades A_1^- para o outro sinal, como na Figura 25.

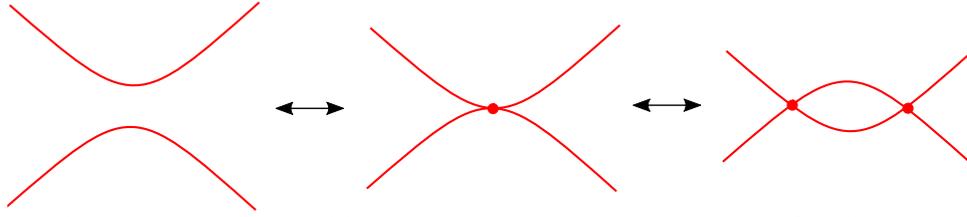


Figura 25 – Deformações da singularidade A_3^- do LPL através de uma boa família de superfícies. As curvas em vermelho representam o LPL . Os pontos em destaque são os pontos umbílicos.

Demonstração: Uma deformação \mathcal{R} -versal da singularidade A_3^- é dada por

$$f(x, y, u, v, w) = \pm(x^2 - y^4 + uy^2 + vy + w).$$

Entretanto, em famílias de superfícies a 1-parâmetro não é possível obter uma deformação \mathcal{R} -versal da singularidade A_3^- do LPL . A deformação da singularidade A_3^- do LPL induzida pela família M_t é

$$\tilde{\delta}_t(x, y) \sim_{\mathcal{R}} \pm(x^2 - \Lambda_1^2 y^4 + u(t)y^2 + v(t)y + w(t)),$$

onde u , v e w são germes de funções diferenciáveis. Esta deformação resulta no germe de uma curva diferenciável $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$ no espaço de parâmetros uvw com

$$\gamma'(0) = \left(\frac{\Lambda_1}{a_{10}b_{10}}, 0, 0 \right).$$

Um ponto $q = \varphi_t(x, y) \in M_t$ é uma singularidade do LPL se, e somente se, q é um ponto umbílico, ou seja, $\bar{l}(x, y, t) = \bar{n}(x, y, t) = 0$. Portanto, cada zero da função

$$\begin{aligned} \sigma_t : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\bar{l}(x, y, t), \bar{n}(x, y, t)). \end{aligned}$$

representa uma singularidade do LPL de M_t . Após mudanças de variáveis, segue que

$$\sigma_t(x, y) \sim_{\mathcal{A}} \left(x, \frac{a_{10}^2(a_{10}\bar{n}_t(0, 0, 0) - b_{10}\bar{l}_t(0, 0, 0))t}{\Lambda_1} + y^2 \right).$$

Portanto, quando $t \neq 0$, σ_t pode ter 0 ou 2 zeros dependendo do sinal de

$$\frac{(a_{10}\bar{n}_t(0, 0, 0) - b_{10}\bar{l}_t(0, 0, 0))t}{\Lambda_1}. \quad (5.3)$$

Quando (5.3) for positivo, σ_t não tem zeros e o LPL de M_t não possui singularidades. Porém, quando (5.3) for negativo, σ_t tem 2 zeros distintos e o LPL de M_t possui duas singularidades.

Quando (5.3) é negativo, a única possibilidade é γ pertencer ao estrato (IV) da Figura 3 no Capítulo 2, pois existem duas singularidades. Por outro lado, quando (5.3) é positivo, γ deve estar nos estratos (IX) ou (X), pois γ é regular e transversal ao plano vw do espaço de parâmetros uvw . Portanto, a deformação do LPL com singularidade A_3^- é como apresentada na Figura 25. ■

5.3 Pontos Umbílicos Timelike Planos

Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave, um ponto umbílico spacelike ou timelike $p \in M$ é dito **plano** quando as curvaturas principais são nulas, isto é, quando p pertence ao conjunto parabólico. Se p é um ponto umbílico timelike plano, então $T_p M$ é timelike e segue que $(1, 0, 0) \notin T_p M$ ou $(0, 1, 0) \notin T_p M$. Suponha, sem perda de generalidade, que $(0, 1, 0) \notin T_p M$. Por isso, nesta seção a aplicação Monge-Taylor é tomada com $\vec{w} = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}_1^3$, como definida na Seção 4.1. Pontos umbílicos planos não são genéricos. De fato, o próximo teorema mostra que tais pontos possuem codimensão 1.

Teorema 5.3.1. Os pontos umbílicos timelike planos possuem codimensão maior do que ou igual a 1.

Demonstração: Seja $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$. Tome uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , dada por $\varphi(x, y) = (x, f(x, y), y)$, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^2 f = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2.$$

Assim, p é um ponto umbílico timelike plano se, e somente se,

$$\begin{cases} (a_{01}^2 - 1)a_{20} - (a_{10}^2 + 1)a_{02} & = 0, \\ (a_{10}^2 + 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{20} & = 0, \\ a_{11}^2 - a_{02}a_{20} & = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Seja S a subvariedade de $J = J^2(2, 1)$ definida por (5.4). Das duas primeiras equações de (5.4) segue que

$$a_{11} = \frac{(a_{01}^2 - 1)a_{20}}{a_{10}^2 + 1}, \quad a_{02} = \frac{2a_{10}a_{01}a_{20}}{a_{10}^2 + 1}.$$

Substituindo estes valores na terceira equações, verifica-se que

$$a_{20} = 0 \quad \text{ou} \quad a_{01} = \pm \frac{\sqrt{a_{10}^2 + 1}}{\sqrt{1 - 3a_{10}^2}}.$$

Para a primeira condição, tome a parametrização local $\psi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow J$ de S dada por

$$\psi_1(a_{00}, a_{10}, a_{01}) = (a_{00}, a_{10}, a_{01}, 0, 0, 0).$$

Para a segunda condição, considere as parametrizações locais $\psi_2, \psi_3 : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \times \mathbb{R} \rightarrow J$ de S dadas por

$$\psi_2(a_{00}, a_{10}, a_{20}) = \left(a_{00}, a_{10}, \frac{\sqrt{a_{10}^2 + 1}}{\sqrt{1 - 3a_{10}^2}}, a_{20}, \frac{2a_{10}a_{20}}{\sqrt{a_{10}^2 + 1}\sqrt{1 - 3a_{10}^2}}, \frac{4a_{10}^2 a_{20}}{(a_{10}^2 + 1)(1 - 3a_{10}^2)} \right),$$

$$\psi_3(a_{00}, a_{10}, a_{20}) = \left(a_{00}, a_{10}, -\frac{\sqrt{a_{10}^2 + 1}}{\sqrt{1 - 3a_{10}^2}}, a_{20}, -\frac{2a_{10}a_{20}}{\sqrt{a_{10}^2 + 1}\sqrt{1 - 3a_{10}^2}}, \frac{4a_{10}^2a_{20}}{(a_{10}^2 + 1)(1 - 3a_{10}^2)} \right).$$

A partir de ψ_i , $i = 1, 2, 3$, segue que S possui codimensão 3. Portanto, qualquer subconjunto possui codimensão maior do que ou igual a 3. ■

Seja \mathcal{G}_2 o conjunto dos germes (M, p) , com $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico timelike plano. O conjunto \mathcal{G}_2 pode ser visto como um subconjunto do espaço das funções $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0, 0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$, relacionando (M, p) com uma parametrização de M em uma vizinhança de p . Assim, \mathcal{G}_2 é munido com a topologia induzida por $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0, 0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$ e $(M, p) \in \mathcal{G}_2$ é dito **genérico** se pertence a um subconjunto aberto e denso de \mathcal{G}_2 .

No decorrer da seção, exceto quando for mencionado o contrário, dado $(M, p) \in \mathcal{G}_2$, tome a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.3 com $p = \varphi(0, 0)$. Como p é um ponto umbílico timelike plano, segue que

$$j^3 f = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Proposição 5.3.1. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_2$ genérico, o LPL possui uma singularidade A_1^- em p .

Demonstração: De (2.20), o LPL é dado por $\tilde{\delta}^{-1}(0)$ com $j^2 \tilde{\delta} = c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$, sendo

$$\begin{aligned} c_{20} &= 4(3a_{30} - 2a_{21} + a_{12})(3a_{30} + 2a_{21} + a_{12}), \\ c_{11} &= -24(-a_{30}a_{21} - 3a_{30}a_{03} + a_{21}a_{12} - a_{12}a_{03}), \\ c_{02} &= 4(a_{21} - 2a_{12} + 3a_{03})(a_{21} + 2a_{12} + 3a_{03}). \end{aligned}$$

Observe que $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = 256\Lambda_2^2$ com

$$\Lambda_2 = -a_{21}^2 + 3a_{30}a_{12} + a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03}.$$

Portanto, p é uma singularidade A_1^- do LPL se, e somente se, $\Lambda_2 \neq 0$. Como $\Lambda_2 \neq 0$ é uma condição genérica, pois Λ_2 é um polinômio, o resultado segue. ■

Proposição 5.3.2. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_2$ genérico, o conjunto parabólico possui uma singularidade A_1^\pm em p .

Demonstração: De (2.23), o conjunto parabólico é dado por $\bar{K}^{-1}(0)$ e $j^2 \bar{K} = k_{20}x^2 + k_{11}xy + k_{02}y^2$, sendo

$$\begin{aligned} k_{20} &= 4(a_{21}^2 - 3a_{30}a_{12}), \\ k_{11} &= 4(a_{21}a_{12} - 9a_{30}a_{03}), \\ k_{02} &= 4(a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03}). \end{aligned}$$

Observe que $k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02} = 48\Lambda_3$ com

$$\Lambda_3 = -a_{21}^2a_{12}^2 + 4a_{30}a_{12}^3 + 4a_{21}^3a_{03} - 18a_{30}a_{21}a_{12}a_{03} + 27a_{30}^2a_{03}^2.$$

Portanto, p é uma singularidade A_1^\pm do conjunto parabólico se, e somente se, $\Lambda_3 \neq 0$. Mais especificamente, o conjunto parabólico possui uma singularidade A_1^- em p quando $\Lambda_3 > 0$ e uma singularidade A_1^+ em p quando $\Lambda_3 < 0$. ■

Proposição 5.3.3. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_2$ genérico, a CMN é uma curva regular em p .

Demonstração: Note que

$$j^1\tilde{H} = 2(3a_{30} - a_{12})x + 2(a_{21} - 3a_{03})y.$$

No espaço de parâmetros, a condição $a_{21} - 3a_{03} \neq 0$ é genérica e garante que a CMN é regular em p . ■

Observação 5.3.1. No decorrer da seção, suponha que $\Lambda_2 \neq 0$ e $\Lambda_3 \neq 0$.

Proposição 5.3.4. Sejam M uma superfície em \mathbb{R}_1^3 e $p \in M \setminus LD$. Então, p pertence a interseção de dois entre o conjuntos parabólico, o LPL e a CMN se, e somente se, p pertence a interseção dos três conjuntos.

Demonstração: Se p pertence a região Riemanniana, então p pertence ao LPL se, e somente se, p é um ponto umbílico. Mas, os pontos umbílicos spacelike são exatamente aqueles onde $H^2 - K = 0$. Com isso o resultado segue.

Por outro lado, se p pertence a região Lorentziana, então tome a parametrização dada pelo Teorema 2.6.2. Assim, o LPL , o conjunto parabólico e a CMN são os zeros de ln , $m^2 - ln$ e m , respectivamente, e o resultado é verificado para os pontos na região Lorentziana. ■

Teorema 5.3.2. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_2$ genérico, o LPL , o conjunto parabólico e a CMN formam em p uma das configurações apresentadas na Figura 26.

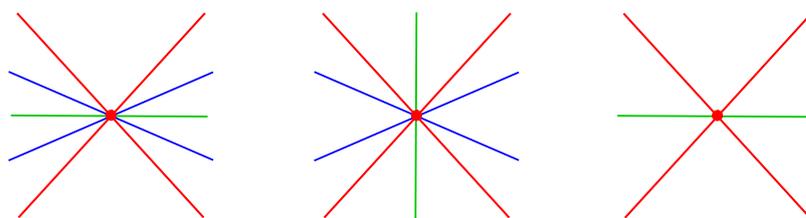


Figura 26 – Posição relativa das curvas LPL (vermelho), conjunto parabólico (azul) e CMN (verde) em um ponto umbílico timelike plano.

Demonstração: As Proposições 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3 fornecem os modelos locais (por difeomorfismos) em p das curvas LPL , conjunto parabólico e CMN . Resta determinar as posições relativas entre estas curvas.

Se uma curva C é dada implicitamente por $F^{-1}(0)$, com $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, e possui uma singularidade A_1^- na origem, então

$$j^2F = (b_1x + b_2y)(b_3x + b_4y),$$

com $b_1b_4 \neq b_3b_2$. As retas $b_1x + b_2y = 0$ e $b_3x + b_4y = 0$ são as retas tangentes a curva C na origem. Geometricamente, em uma vizinhança da origem suficientemente pequena, existem germes de funções regulares $F_1, F_2 : (\mathbb{R}^2, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tais que C é a união de $F_1^{-1}(0)$ e $F_2^{-1}(0)$ e as retas tangentes a γ na origem são as retas tangentes a $F_1^{-1}(0)$ e $F_2^{-1}(0)$ em $(0,0)$.

As retas tangente ao LPL em p são $r_1 : c_1x + d_1y = 0$ e $r_2 : c_2x + d_2y = 0$, onde

$$\begin{aligned} c_1 &= 3a_{30} - 2a_{21} + a_{12}, & d_1 &= a_{21} - 2a_{12} + 3a_{03}, \\ c_2 &= 3a_{30} + 2a_{21} + a_{12}, & d_2 &= a_{21} + 2a_{12} + 3a_{03}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o conjunto parabólico é dado por $\bar{K} = 0$ sendo $j^2\bar{K} = k_{20}x^2 + k_{11}xy + k_{02}y^2$ com

$$\begin{aligned} k_{20} &= 4(a_{21}^2 - 3a_{30}a_{12}), \\ k_{11} &= 4(a_{21}a_{12} - 9a_{30}a_{03}), \\ k_{02} &= 4(a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03}). \end{aligned}$$

Por fim, a reta tangente a CMN em p é $r_3 : c_3x + d_3y = 0$, com

$$c_3 = 3a_{30} - a_{12} \quad \text{e} \quad d_3 = a_{21} - 3a_{03}.$$

Quando $\Lambda_3 < 0$, o conjunto parabólico possui uma singularidade A_1^+ em p , o LPL possui uma singularidade A_1^- e a CMN é uma curva regular. Logo, se a reta tangente da CMN não for igual a uma das retas tangentes ao LPL , então a única possibilidade é apresentada na Figura 26 (direita). A condição para que r_3 seja diferente de r_1 é

$$\Lambda_4 = a_{21}^2 - 3a_{30}a_{12} - a_{21}a_{12} + a_{12}^2 + 9a_{30}a_{03} - 3a_{21}a_{03} \neq 0.$$

Por outro lado, r_3 é diferente de r_2 quando

$$\Lambda_5 = a_{21}^2 - 3a_{30}a_{12} + a_{21}a_{12} + a_{12}^2 - 9a_{30}a_{03} - 3a_{21}a_{03} \neq 0.$$

Quando $\Lambda_3 > 0$, o conjunto parabólico possui uma singularidade A_1^- e o conjunto parabólico divide uma vizinhança da origem em quatro setores. As retas r_1 e r_2 sempre pertencem aos mesmos setores. De fato, seja v_1 e v_2 os vetores tangentes a r_1 e r_2 na origem, respectivamente, e $F(x,y) = k_{20}x^2 + k_{11}xy + k_{02}y^2$. Assim, a posição relativa entre o LPL e o conjunto parabólico depende do sinal de $F(v_1)F(v_2)$, como mostra a Figura 27.

Como $v_i = (d_i, -c_i)$, para $i = 1, 2$, segue que $F(v_1)F(v_2) = \Lambda_4^2\Lambda_5^2 > 0$. Portanto, a posição relativa entre o LPL e o conjunto parabólico é sempre igual ao caso da direita na Figura 27.

Para verificar a posição da CMN com relação ao LPL e ao conjunto parabólico, defina

$$G(x,y) = (c_1x + d_1y)(c_2x + d_2y).$$

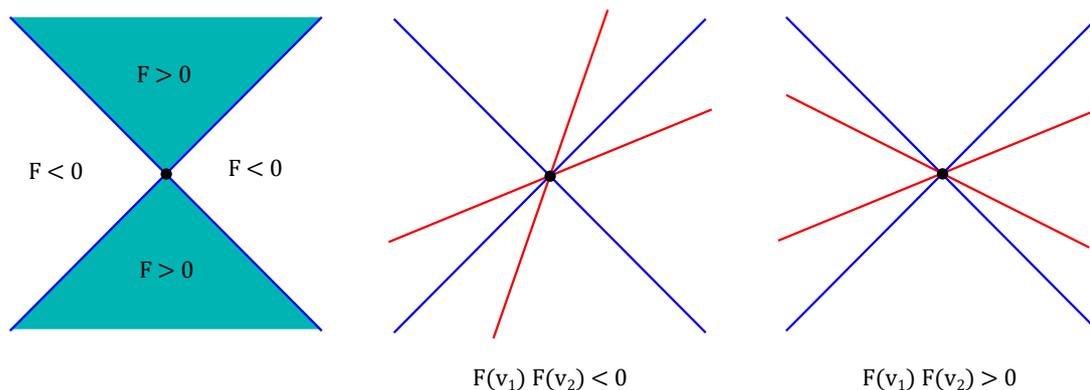


Figura 27 – Posição relativa entre o *LPL* (em vermelho) e o conjunto parabólico (em azul).

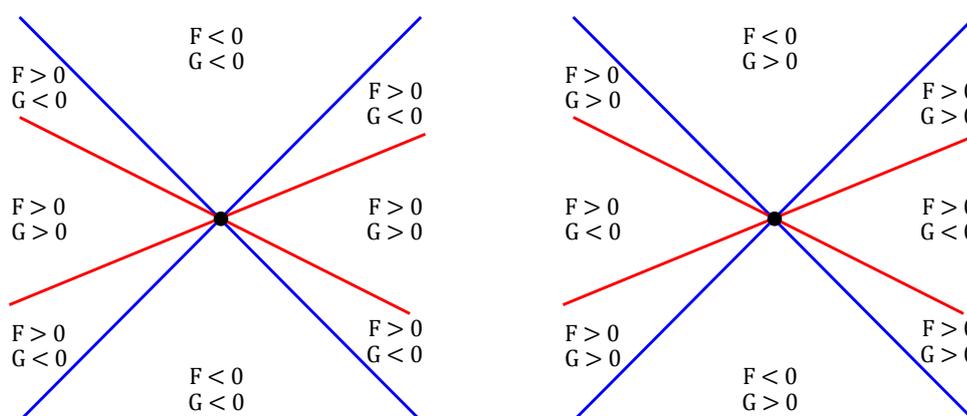


Figura 28 – Possíveis combinações para os sinais de F e G .

Como $F(v_1) = \Lambda_4^2 > 0$ e $F(v_2) = \Lambda_5^2 > 0$, existem duas possíveis combinações para o sinal de F e G , conforme a Figura 28.

Seja $v_3 = (d_3, -c_3)$ o vetor tangente a *CMN* na origem. Note que

$$F(v_3) = \Lambda_4\Lambda_5 \quad \text{e} \quad G(v_3) = -4\Lambda_4\Lambda_5.$$

Logo, se Λ_4 e Λ_5 possuem sinais diferentes, então $F(v_3) < 0$ e $G(v_3) > 0$. Assim, a configuração da direita na Figura 28 é a única possível e a configuração apresentada na Figura 29 não é realizável, pois $F(v_3)$ e $G(v_3)$ sempre possuem sinais opostos. Portanto, as únicas possibilidades são as apresentadas na Figura 26. ■

As configurações genéricas apresentadas na Figura 26 acontecem quando $\Lambda_2 \neq 0$ (o *LPL* possui singularidade A_1^-), $\Lambda_3 \neq 0$ (o conjunto parabólico possui singularidade A_1), $(3a_{30} - a_{12})^2 + (a_{21} - 3a_{03})^2 \neq 0$ (*CMN* regular) e $\Lambda_4\Lambda_5 \neq 0$ (as retas tangentes ao *LPL*, conjunto parabólico e *CMN* na origem são distintas). Tais condições dependem exclusivamente do terceiro jato de f . Do Teorema 2.6.6, a cúbica $a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$ é genericamente da forma

$$x(x^2 + bxy + ay^2) \quad \text{ou} \quad y(ax^2 + bxy + y^2).$$

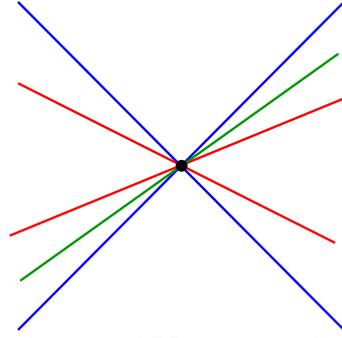


Figura 29 – Configuração não realizável entre o *LPL* (em vermelho), o conjunto parabólico (em azul) e a *CMN* (em verde).

Assim, é possível escrever as condições anteriores em função dos parâmetros a e b , obtendo

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= 3a + a^2 - b^2, & \Lambda_3 &= a^2(4a - b^2), \\ (3a_{30} - a_{12})^2 + (a_{21} - 3a_{03})^2 &= 9 - 6a + a^2 + b^2, \\ \Lambda_4 &= -3a + a^2 - ab + b^2, & \Lambda_5 &= -3a + a^2 + ab + b^2.\end{aligned}$$

Logo, as condições para que ocorram as configurações genéricas da Figura 26 induzem uma partição do espaço de parâmetros ab conforme a Figura 30.

As deformações do *LPL*, do conjunto parabólico e da *CMN* em um ponto umbílico timelike plano são obtidas através de uma boa família de superfícies. Tal família é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 5.3.3. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_2$, seja $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ uma família de superfícies parametrizada por

$$\begin{aligned}\varphi_t : U &\longrightarrow M_t \\ (x, y) &\longmapsto (x, h_t(x, y), y) = (x, h(x, y, t), y)\end{aligned}$$

para alguma h diferenciável com $h_0(x, y) = f(x, y)$. Então, M_t é uma boa família de M se, e somente se,

$$\Lambda_6 = -3a_{30}a_{12}h_{yyt} + 9a_{30}a_{03}h_{xyt} + a_{21}^2h_{yyt} - a_{21}a_{12}h_{xyt} - 3a_{21}a_{03}h_{xxt} + a_{12}^2h_{xxt} \neq 0,$$

onde as derivadas de h são avaliadas em $(0, 0, 0)$.

Demonstração: A aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R} \rightarrow J^2(2, 1)$ é dada por

$$\tilde{\varphi}(x, y, t) = \left(h(x, y, t), h_x(x, y, t), h_y(x, y, t), \frac{h_{xx}}{2}(x, y, t), h_{xy}(x, y, t), \frac{h_{yy}}{2}(x, y, t) \right).$$

As derivadas de $\tilde{\varphi}$ em $(0, 0, 0)$ são

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_x(0, 0, 0) &= (0, 0, 0, 3a_{30}, 2a_{21}, a_{12}), & \tilde{\varphi}_y(0, 0, 0) &= (0, 0, 0, a_{21}, 2a_{12}, 3a_{03}), \\ \tilde{\varphi}_t(0, 0, 0) &= \left(0, h_{xt}(0, 0, 0), h_{yt}(0, 0, 0), \frac{h_{xxt}}{2}(0, 0, 0), h_{xyt}(0, 0, 0), \frac{h_{yyt}}{2}(0, 0, 0) \right).\end{aligned}$$

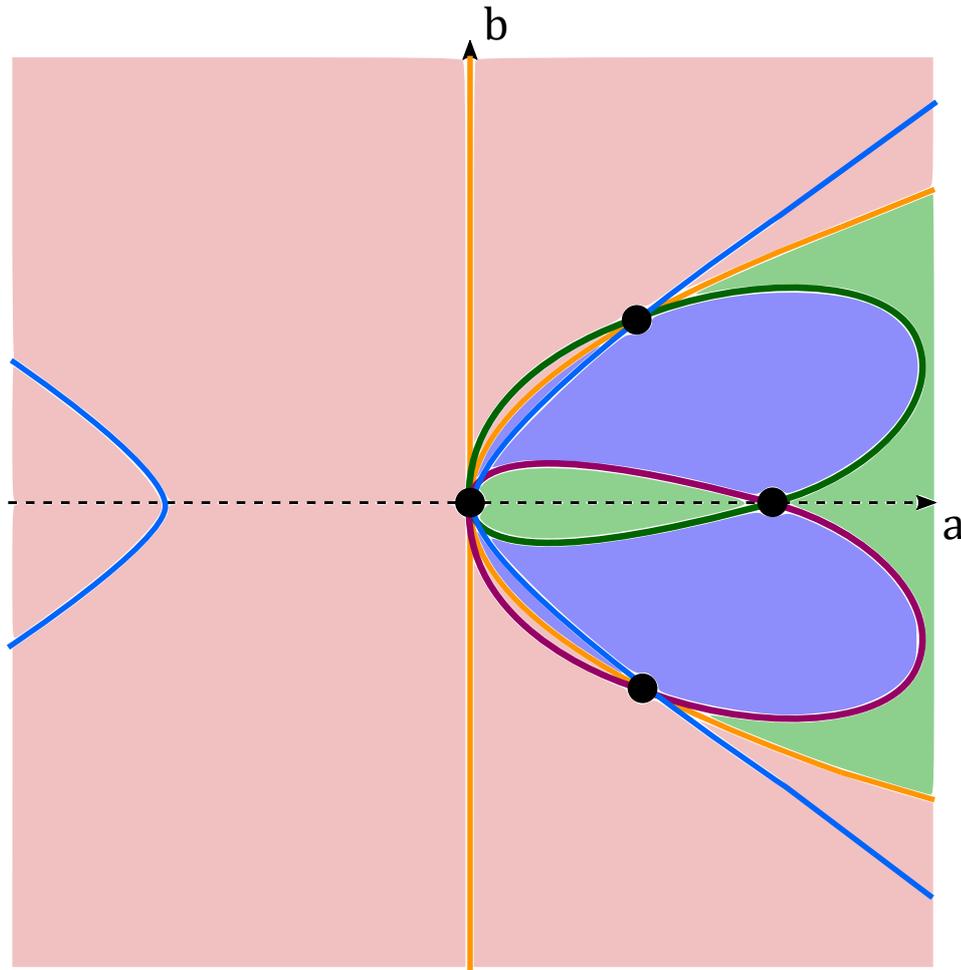


Figura 30 – Partição do plano ab que determina a configuração entre o LPL , o conjunto parabólico e a CMN em um ponto umbílico timelike plano. Nas regiões azuis, verdes e vermelhas ocorrem as configurações da esquerda, do meio e da direita na Figura 26, respectivamente. As curvas em azul, laranja, verde e roxo representam as condições $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$, $\Lambda_4 = 0$ e $\Lambda_5 = 0$, respectivamente.

Por outro lado, seja $S \subset J^2(2, 1)$ a subvariedade dos pontos umbílicos planos, definida por (5.4). Assim, $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(0, 0, 0) \in S$ e $T_{\tilde{p}}S$ é gerado pela base

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0)\}.$$

Seja A a matriz cujas linhas são formadas pelos vetores da base \mathcal{B} de $T_{\tilde{p}}S$ e pelas derivadas de $\tilde{\varphi}$ em $(0, 0, 0)$, isto é, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} \\ 0 & h_{xt}(0, 0, 0) & h_{yt}(0, 0, 0) & \frac{h_{xxt}}{2}(0, 0, 0) & h_{xyt}(0, 0, 0) & \frac{h_{yyt}}{2}(0, 0, 0) \end{pmatrix}.$$

Logo, S é transversal a $\tilde{\varphi}$ em \tilde{p} se, e somente se, $\det A \neq 0$. Mas $\det A = -\Lambda_6$. Portanto, $\tilde{\varphi}$ é transversal a S em \tilde{p} se, e somente se, $\Lambda_6 \neq 0$. ■

Seja M_t uma boa família de M , como no Teorema 5.3.3. Como a CMN é uma curva regular em $t = 0$, para t suficientemente pequeno a CMN continuará sendo uma curva regular. Como o LPL possui uma singularidade A_1^- em p , o Teorema 4.2.6 e o Corolário 4.2.1 garantem que deformações com t suficientemente pequeno preservam a singularidade A_1^- do LPL .

Proposição 5.3.5. Sejam $(M, p) \in \mathcal{G}_2$ genérico e M_t uma boa família de M . Então, o LPL e a CMN se intersectam transversalmente em dois pontos para $t \neq 0$ e a posição relativa entre estas curvas é apresentado na Figura 31.

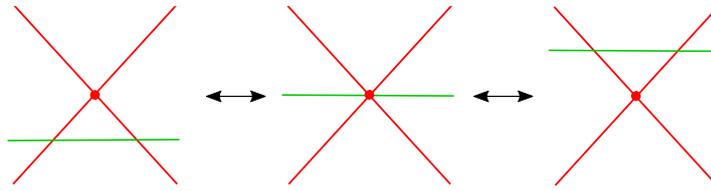


Figura 31 – Posição relativa entre o LPL e a CMN em uma boa família de superfícies para pontos umbílicos timelike planos. As curvas LPL e CMN são representadas nas cores vermelha e verde, respectivamente.

Demonstração: Seja $\tilde{\delta}_t$ o discriminante da EDB das linhas de curvatura de M_t e \tilde{H}_t a função cujos zeros são a CMN de M_t . Como $\tilde{\delta}_t$ possui uma singularidade A_1^- , então

$$j^2 \tilde{\delta}_t = f_1(x, y, t) f_2(x, y, t),$$

onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios de grau 1 em x e y com

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0, 0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Logo, do Teorema da Função Inversa, segue que $X = f_1(x, y, t)$, $Y = f_2(x, y, t)$ e $T = t$ é uma mudança de coordenadas numa vizinhança da origem.

Aplicando essa mudança de coordenadas em $\tilde{\delta}_t$ e \tilde{H}_t observe que

$$\tilde{\delta}_t \sim_{\mathcal{R}} XY \quad \text{e} \quad \tilde{H}_t \sim_{\mathcal{R}} \frac{\Lambda_4}{2d_1 d_2} X + \frac{\Lambda_5}{2d_1 d_2} Y + \frac{2\Lambda_6}{d_1 d_2} T.$$

Sendo (M, p) genérico, considere $\Lambda_4 \neq 0$ e $\Lambda_5 \neq 0$. Como M_t é uma boa família, então $\Lambda_6 \neq 0$ e o resultado segue. ■

O conjunto parabólico possui uma singularidade de Morse em p . Singularidades de Morse possuem \mathcal{R} -codimensão 1. Entretanto, em boas famílias de superfícies, a singularidade do conjunto parabólico não se deforma \mathcal{R} -versalmente, como mostra o próximo resultado.

Proposição 5.3.6. Sejam $(M, p) \in \mathcal{G}_2$ genérico e M_t uma boa família de M . A singularidade A_1 do conjunto parabólico não se deforma \mathcal{R} -versalmente ao longo desta família, tais deformações são seções de um cone e apresentadas na Figura 32.

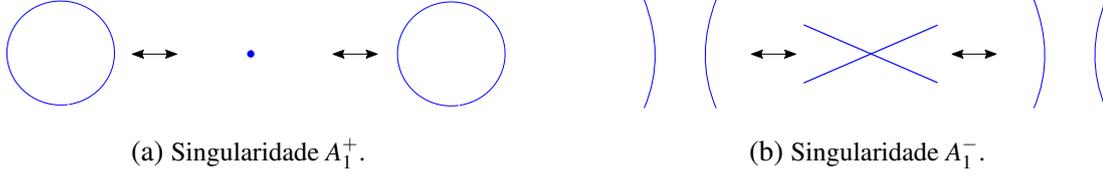


Figura 32 – Deformações do conjunto parabólico em famílias genéricas de superfícies para pontos umbílicos timelike planos.

Demonstração: O conjunto parabólico de M é dado por $\bar{K}^{-1}(0)$ e $j^2\bar{K} = c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2$, com

$$c_1 = 4(a_{21}^2 - 3a_{30}a_{12}), \quad c_2 = 4(a_{21}a_{12} - 9a_{30}a_{03}), \quad c_3 = 4(a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03}).$$

Genericamente, suponha que $c_1 \neq 0$. Seja \bar{K}_t a função cujos zeros são o conjunto parabólico de M_t .

- Seja $c_1 > 0$ e $\Lambda_3 < 0$. Denote por $k_{ij}(t)$ o coeficiente de $x^i y^j$ em \bar{K}_t . Então, $k_{20}(0) = c_1 > 0$ e aplica-se a mudança de coordenadas

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{k_{20}(t)}}.$$

Para eliminar o termo xy , utilize outra mudança de coordenadas dada por

$$x \mapsto x - \frac{k_{11}(t)}{2}y.$$

Na próxima etapa, a translação

$$x \mapsto x - \frac{k_{10}(t)}{2}$$

é utilizada para eliminar o termo x . Como $k_{02}(0) = -3\Lambda_3/(4c_1^2) > 0$ é possível tomar

$$y \mapsto \frac{y}{\sqrt{k_{02}(t)}}.$$

Por fim, a translação

$$y \mapsto y - \frac{k_{01}(t)}{2}$$

elimina o termo y . Com isso,

$$j^2\bar{K}_t \sim_{\mathcal{R}^{(2)}} x^2 + y^2 - \frac{\Lambda_6^2 t^2}{12|c_1\Lambda_3|} + t^3 h(t).$$

- Se $c_1 > 0$ e $\Lambda_3 > 0$, então

$$j^2 \bar{K}_t \sim_{\mathcal{R}^{(2)}} x^2 - y^2 + \frac{\Lambda_6^2 t^2}{12|c_1 \Lambda_3|} + t^3 h(t).$$

- Se $c_1 < 0$ e $\Lambda_3 < 0$, então

$$j^2 \bar{K}_t \sim_{\mathcal{R}^{(2)}} -x^2 - y^2 + \frac{\Lambda_6^2 t^2}{12|c_1 \Lambda_3|} + t^3 h(t).$$

- Se $c_1 < 0$ e $\Lambda_3 > 0$, então

$$j^2 \bar{K}_t \sim_{\mathcal{R}^{(2)}} -x^2 + y^2 - \frac{\Lambda_6^2 t^2}{12|c_1 \Lambda_3|} + t^3 h(t).$$

Em todos os casos a singularidade A_1 do conjunto parabólico não se deforma \mathcal{R} -versalmente. Mais ainda, a deformação do conjunto parabólico é como está representado na Figura 32. ■

Da Proposição 5.3.4, o conjunto parabólico intersecta o LPL e a CMN exatamente nos pontos onde estas duas curvas já se intersectam. Logo, para $t \neq 0$, o conjunto parabólico intersecta o LPL e a CMN em dois pontos. Izumiya e Tari (IZUMIYA; TARI, 2010) provaram que o conjunto parabólico é tangente ao LPL nos pontos de interseção.

Teorema 5.3.4. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $q \in M$ um ponto regular do LPL e que pertence ao conjunto parabólico. O LPL e o conjunto parabólico possuem uma tangência ordinária em q se, e somente se, o LPL é transversal a CMN em q .

Demonstração: Seja $q \in M$ um ponto como no enunciado e tome a parametrização ψ dada pelo Teorema 2.6.2, com $q = \psi(0, 0)$. Como q não é ponto umbílico (pois o LPL é uma curva regular), segue que $\bar{l}(0, 0) \neq 0$ ou $\bar{n}(0, 0) \neq 0$. Suponha que $\bar{n}(0, 0) \neq 0$, o outro caso é análogo. Assim, em uma vizinhança de q o LPL é dado por $\bar{l} = 0$. Note que $\bar{l}(0, 0) = 0$, pois $q \in LPL$. Por outro lado, como q também pertence ao conjunto parabólico, segue que $\bar{K}(0, 0) = \bar{m}(0, 0) = 0$. Assim,

$$j^1 \bar{l} = l_{10}x + l_{01}y, \quad j^1 \bar{m} = m_{10}x + m_{01}y, \quad j^1 \bar{n} = n_{00} + n_{10}x + n_{01}y. \quad (5.5)$$

O LPL é dado por $\bar{l} = 0$ e a CMN por $\bar{m} = 0$, logo o LPL é transversal a CMN em q quando $l_{01}m_{10} - l_{10}m_{01} \neq 0$.

Por outro lado, seja $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização do LPL , com $\gamma(0) = (0, 0)$. Defina $\bar{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\bar{\gamma} = \bar{K} \circ \gamma$. Note que $l_{10} \neq 0$ ou $l_{01} \neq 0$, pois o LPL é regular em q . Se $l_{01} \neq 0$, então

$$j^1 \gamma = \left(x, -\frac{l_{10}x}{l_{01}} \right). \quad (5.6)$$

De (2.23), (5.5) e (5.6) segue que

$$j^2 \bar{\gamma} = \frac{(l_{01}m_{10} - l_{10}m_{01})^2}{l_{01}^2} x^2.$$

Logo, o *LPL* (curva γ) e o conjunto parabólico (curva $\bar{K}^{-1}(0)$) possuem tangência ordinária em $q = \psi(\gamma(0))$ se, e somente se, $l_{01}m_{10} - l_{10}m_{01} \neq 0$. O caso $l_{10} \neq 0$ é análogo. Portanto, o *LPL* e o conjunto parabólico possuem uma tangência ordinária em q se, e somente se, o *LPL* é transversal a *CMN* em q . ■

Teorema 5.3.5. Em um ponto umbílico timelike plano de codimensão 1 de uma superfície M , a deformação do *LPL*, do conjunto parabólico e da *CMN* em uma família genérica a 1-parâmetro M_t de M é como indicada na Figura 33.

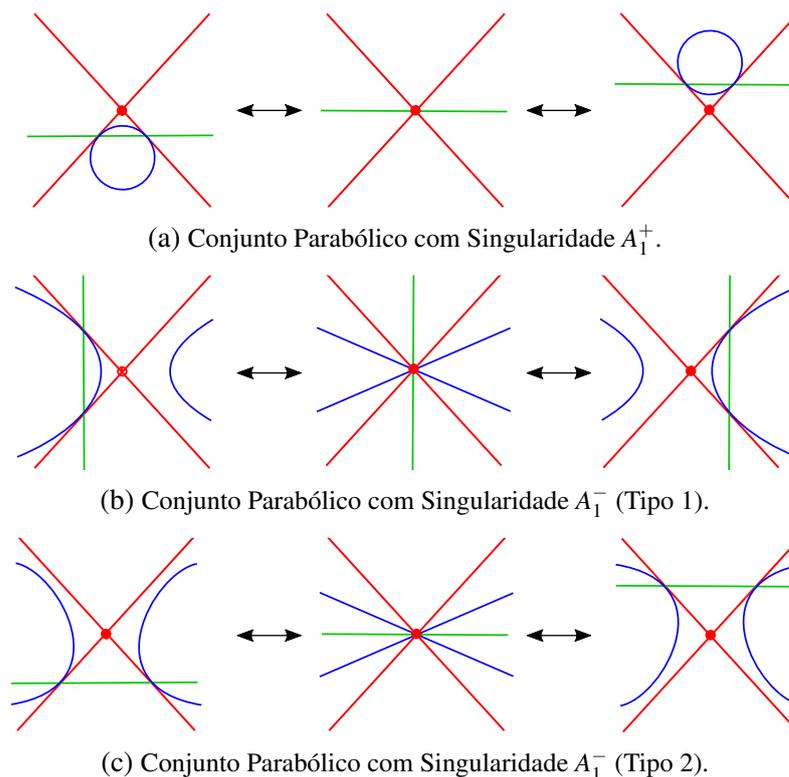


Figura 33 – Deformações do *LPL* (vermelho), conjunto parabólico (azul) e *CMN* (verde) em pontos umbílicos timelike planos através de uma família genérica de superfícies.

Demonstração: Como a *CMN* é uma curva regular e o *LPL* possui uma singularidade A_1^- , a singularidade destas curvas não se deforma ao longo da família, pelo Teorema 4.2.6 e o Corolário 4.2.1. Por outro lado, segue da Proposição 5.3.6 que a deformação da singularidade A_1 do conjunto parabólico é dado pela Figura 32. Quanto à posição relativa entre estas curvas, a Proposição 5.3.4 indica a configuração do *LPL* e da *CMN*. Por fim, da Proposição 5.3.4 e do Teorema 5.3.4, segue a posição do conjunto parabólico com relação as outras curvas. ■

5.4 Pontos Umbílicos Lightlike

Esta seção apresenta alguns resultados a respeito dos pontos umbílicos lightlike. Tais pontos são aqueles onde a métrica é degenerada e os coeficientes da EDB (2.19) se anulam

simultaneamente. De (TARI, 2013), segue que os pontos umbílicos lightlike são exatamente as singularidades do LD . Os pontos umbílicos spacelike e timelike correspondem a singularidades do LPL na região Riemanniana e Lorentziana, respectivamente. O próximo teorema mostra que o mesmo vale para o caso lightlike.

Teorema 5.4.1. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in LD$. Então, $p \in LD$ é um ponto umbílico lightlike se, e somente se, p é um ponto singular do LPL .

Demonstração: Considere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.1 com $p = \varphi(q)$. Assim, $E(q) = F(q) = 0$, $E_x(q) = \lambda \bar{l}(q)$ e $E_y(q) = \lambda \bar{m}(q)$, para algum $\lambda \neq 0$. Sendo a , b e c os coeficientes de dy^2 , $dx dy$ e dx^2 na EDB das linhas de curvatura, respectivamente, então $a(q) = \bar{m}(q)$, $b(q) = \bar{l}(q)$ e $c(q) = 0$. Logo, p é um ponto umbílico se, e somente se, $\bar{m}(q) = \bar{l}(q) = 0$.

Por outro lado, $\tilde{\delta}(q) = G(q)\bar{l}(q)$ e $G(q) \neq 0$, onde $\tilde{\delta}$ é definido em (2.20). Assim, p é um ponto singular do LPL se, e somente se, $\bar{l}(q) = 0$ e

$$0 = \tilde{\delta}_y(q) = \left(-\frac{8}{\lambda} \bar{m}^3 G \right) (q),$$

pois $l(q) = 0$ já implica que $\tilde{\delta}_x(q) = 0$. Portanto, p é uma singularidade do LPL se, e somente se, $\bar{l}(q) = \bar{m}(q) = 0$ e o resultado segue. ■

Teorema 5.4.2. Seja $p \in LD$.

- (1) Se p é um ponto umbílico lightlike, então p pertence ao conjunto parabólico.
- (2) Se p pertence ao LPL e ao conjunto parabólico, então p é um ponto umbílico lightlike.
- (3) p é um ponto umbílico lightlike se, e somente se, p pertence ao conjunto parabólico e a CMN .

Demonstração: Considere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.1 com $p = \varphi(q)$. Assim $E(q) = F(q) = 0$, $a(q) = \bar{m}(q)$, $b(q) = \bar{l}(q)$ e $c(q) = 0$, onde a , b e c são os coeficientes da EDB das linhas de curvatura.

- (1) Se p é um ponto umbílico, então $\bar{l}(q) = \bar{m}(q) = 0$. Logo, $\bar{K}(q) = 0$ e p pertence ao conjunto parabólico.
- (2) Se $p \in LPL$, então $\bar{l}(q) = 0$. Logo, $\bar{K}(q) = \bar{m}(q)^2$. Mas, como p pertence ao conjunto parabólico, segue que $\bar{K}(q) = 0$. Portanto, $\bar{m}(q) = 0$ e p é um ponto umbílico.
- (3) Imediato a partir dos itens 1, 2 e do Teorema 3.2.1. ■

Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície e $p \in M$ um ponto umbílico lightlike. Logo, $(0, 0, 1) \notin T_p M$ porque $T_p M$ é um plano lightlike. Por isto, ao longo desta seção considere a aplicação Monge-Taylor, definida na Seção 4.1, com $\vec{w} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}_1^3$.

Teorema 5.4.3. Os pontos umbílicos lightlike possuem codimensão maior do que ou igual a 1.

Demonstração: Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma parametrização local de M , dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^2 f = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2.$$

Assim, $p = \varphi(0, 0)$ é um ponto umbílico lightlike se, e somente se,

$$\begin{cases} (a_{01}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{02} & = 0, \\ (a_{01}^2 - 1)a_{20} - (a_{10}^2 - 1)a_{02} & = 0, \\ (a_{10}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{20} & = 0, \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 - 1 & = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Seja L a subvariedade de $J = J^2(2, 1)$ definida pelas equações (5.7). Tome os abertos L_1 e L_2 de L dados por

$$L_1 : \begin{cases} (a_{01}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{02} & = 0, \\ (a_{01}^2 - 1)a_{20} - (a_{10}^2 - 1)a_{02} & = 0, \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 - 1 & = 0, \\ a_{10} & \neq 0, \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} (a_{01}^2 - 1)a_{20} - (a_{10}^2 - 1)a_{02} & = 0, \\ (a_{10}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{20} & = 0, \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 - 1 & = 0, \\ a_{01} & \neq 0. \end{cases}$$

Logo, $L = L_1 \cup L_2$. Defina a aplicação $g : J \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$g(P) = ((a_{01}^2 - 1)a_{11} - 2a_{10}a_{01}a_{02}, (a_{01}^2 - 1)a_{20} - (a_{10}^2 - 1)a_{02}, a_{10}^2 + a_{01}^2 - 1, a_{10}),$$

onde $P = (a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02})$. Sendo $N = \{(0, 0, 0, u) \in \mathbb{R}^4 : u \neq 0\}$, segue que g é transversal a N . De fato, se $g(P) \in N$, então $a_{10} \neq 0$ e $a_{01}^2 \neq 1$. Assim,

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\} \subset dg_P(T_P J).$$

Logo, $g \pitchfork N$, pois $T_{(0,0,0,u)}N$ é gerado por $\{(0, 0, 0, 1)\}$. Como $L_1 = g^{-1}(N)$ e N possui codimensão 3, a codimensão de L_1 é 3. De modo análogo, a codimensão de L_2 é 3. Assim, qualquer subconjunto de L_1 ou L_2 possuem codimensão maior do que ou igual a 3. Portanto, os pontos umbílicos lightlike possuem codimensão ≥ 1 . ■

Seja \mathcal{G}_3 o conjunto dos germes (M, p) , com $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto umbílico lightlike. O conjunto \mathcal{G}_3 pode ser visto como um subconjunto do espaço das funções $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0, 0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$, relacionando (M, p) com uma parametrização de M em uma vizinhança de p . Assim, \mathcal{G}_3 é munido com a topologia induzida por $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0, 0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$ e $(M, p) \in \mathcal{G}_3$ é dito **genérico** se pertence a um subconjunto aberto e denso de \mathcal{G}_3 .

No decorrer da seção, exceto quando for mencionado o contrário, dado $(M, p) \in \mathcal{G}_3$, tome a parametrização local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.5 com $p = \varphi(0, 0)$. Como p é um ponto umbílico lightlike, segue que

$$j^3 f = x + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Teorema 5.4.4. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_3$ genérico, o LD e o LPL possuem singularidades A_1^\pm e A_3^\pm em p , respectivamente.

Demonstração: Seja $\delta = F^2 - EG$, então $LD = \delta^{-1}(0)$ e

$$j^2 \delta = 6a_{30}x^2 + 4a_{21}xy + (4a_{02}^2 + 2a_{12})y^2.$$

Logo, o LD possui uma singularidade Morse em p se, e somente se, $\Lambda_7 = 6a_{02}^2a_{30} + 3a_{30}a_{12} - a_{21}^2 \neq 0$, o que ocorre genericamente. A singularidade em p é A_1^+ se $\Lambda_7 > 0$ e A_1^- quando $\Lambda_7 < 0$, sendo que ambos os casos podem ocorrer.

Por outro lado, $LPL = \tilde{\delta}^{-1}(0)$ com $\tilde{\delta}$ como em (2.19). Como

$$j^2 \tilde{\delta} = (3a_{30}x + a_{21}y)^2,$$

o LPL não possui uma singularidade Morse em p . Genericamente, a_{30} e a_{21} não são ambos iguais a zero, ou seja, $\tilde{\delta}$ possui *corank* igual a 1. Se $a_{30} \neq 0$, aplicando mudanças de coordenadas, note que

$$j^4 \tilde{\delta} \sim_{\mathcal{R}^{(4)}} x^2 - \frac{32\Lambda_7^3}{27a_{30}^3} y^4.$$

Porém, se $a_{21} \neq 0$, então

$$j^4 \tilde{\delta} \sim_{\mathcal{R}^{(4)}} x^2 - \frac{96a_{30}\Lambda_7^3}{a_{21}^4} y^4.$$

Portanto, o LPL possui uma singularidade A_3^\pm em p se, e somente se, p é um ponto de Morse do LD e $a_{30} \neq 0$. ■

Teorema 5.4.5. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_3$ genérico, o conjunto parabólico e a CMN são curvas regulares em p .

Demonstração: O conjunto parabólico é dado por $\bar{K}^{-1}(0)$ e a CMN por $\bar{H}^{-1}(0)$, com $\bar{K} = \bar{l}\bar{n} - \bar{m}^2$ e $\bar{H} = \bar{l}G - 2\bar{m}F + \bar{n}E$. Utilizando φ para os cálculos, segue que

$$j^1 \bar{K} = 4a_{02}(3a_{30}x + a_{21}y), \quad \text{e} \quad j^1 \bar{H} = 2(3a_{30}x + a_{21}y). \quad (5.8)$$

Logo, CMN é uma curva regular se, e somente se, o LPL tem *corank* igual a 1. O conjunto parabólico também é uma curva regular quando o LPL possui *corank* igual a 1 e $a_{02} \neq 0$. Em ambos os casos, as condições obtidas são genéricas. ■

Teorema 5.4.6. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_3$ genérico, as posições relativas entre o LD , LPL , conjunto parabólico e CMN em p são apresentadas na Figura 34.

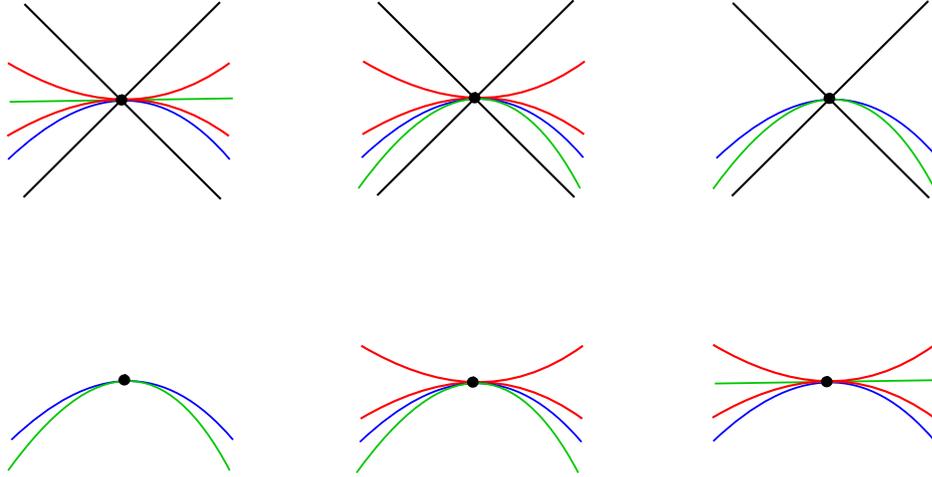


Figura 34 – Posições relativas entre o LD (preto), LPL (vermelho), conjunto parabólico (azul) e CMN (verde) em pontos umbílicos lightlike.

Demonstração: O Teorema 5.4.4 garante que o LD e o LPL possuem genericamente em p singularidades A_1 e A_3 , respectivamente. Por outro lado, do Teorema 5.4.5 segue que o conjunto parabólico e a CMN são curvas regulares em p . Mais ainda, da equação (5.8), o conjunto parabólico e a CMN são tangentes ao LPL em p e, por transitividade, são tangentes entre si.

Quando o LPL possuir uma singularidade A_3^- , após mudanças de coordenadas note que

$$j^4 \tilde{\delta} \sim_{\mathcal{R}^{(4)}} x^2 - \frac{32\Lambda_7^3}{27a_{30}^3} y^4 = \left(x - \sqrt{\frac{32\Lambda_7^3}{27a_{30}^3}} y^2 \right) \left(x + \sqrt{\frac{32\Lambda_7^3}{27a_{30}^3}} y^2 \right). \quad (5.9)$$

Aplicando as mesmas mudanças de coordenadas em \bar{K} e \bar{H} , então

$$\begin{aligned} j^2 \bar{K} &\sim_{\mathcal{R}^{(2)}} -2a_{02}x + \frac{\Lambda_7}{9a_{30}^2} x^2 - \frac{2(-12a_{02}^2 a_{30} a_{21} + 2a_{21}^3 - 9a_{12} a_{30} a_{21} + 27a_{03} a_{30}^2)}{9a_{30}^2} xy + \frac{4\Lambda_7(6a_{02}^2 a_{30} + \Lambda_7)}{9a_{30}^2} y^2, \\ j^2 \bar{H} &\sim_{\mathcal{R}^{(2)}} x - \frac{2a_{02}}{3a_{30}} x^2 - \frac{8a_{02}\Lambda_7}{3a_{30}} y^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

De (5.10), segue que $\bar{K}_x(0,0) = -2a_{02} \neq 0$ e $\bar{H}_x(0,0) = 1 \neq 0$. O Teorema da Função Implícita garante a existência de funções diferenciáveis $x_K, x_H : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $x_K(0) = x_H(0) = 0$, $g_K(y) = \bar{K}(x_K(y), y) = 0$ e $g_H(y) = \bar{H}(x_H(y), y) = 0$, para todo $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

A partir da definição de x_K , o conjunto parabólico é dado localmente por $\{(x_K(y), y); y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, ou seja, é o gráfico da função x_K . De (5.9), segue que localmente o LPL é formado pelo gráfico das funções

$$x = \pm \sqrt{\frac{32\Lambda_7^3}{27a_{30}^3}} y^2.$$

Assim, o conjunto parabólico e o *LPL* formam a Configuração 1 da Figura 35 se, e somente se, $x'_K(0) = 0$ e

$$|x''_K(0)| > 2\sqrt{\frac{32\Lambda_7^3}{27a_{30}^3}}.$$

De (5.10), $\bar{K}_y(0,0) = 0$ e

$$0 = g'_K(0) = \bar{K}_y(0,0) + x'_K(0)\bar{K}_x(0,0) = -2cx'_K(0),$$

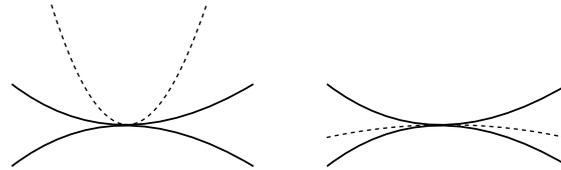
logo $x'_K(0) = 0$. Como

$$0 = g''_K(0) = \bar{K}_{yy}(0,0) + x''_K(0)\bar{K}_x(0,0) = \frac{8\Lambda_7(6a_{02}^2a_{30} + \Lambda_7)}{9a_{30}^2} - 2a_{02}x''_K(0),$$

note que

$$x''_K(0) = \frac{4\Lambda_7(6a_{02}^2a_{30} + \Lambda_7)}{9a_{02}a_{30}^2}.$$

Assim, a Configuração 1 da Figura 35 entre o conjunto parabólico e o *LPL* ocorre se, e somente se, $(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)^2 > 0$.



(a) Configuração 1

(b) Configuração 2

Figura 35 – Possíveis configurações entre o *LPL* e o conjunto parabólico e a *CMN*.

Procedendo de maneira análoga para a *CMN*, observe que $x''_H(0) = \frac{16a_{02}\Lambda_7}{3a_{30}}$ e o *LPL* e a *CMN* estão na Configuração 1 ou 2 quando $\frac{3a_{30}a_{12} - a_{21}^2}{a_{30}}$ é estritamente menor ou maior que 0, respectivamente. Assim, é possível que a *CMN* e o *LPL* estejam em qualquer uma das configurações ilustradas na Figura 35, dependendo do sinal de $3a_{30}a_{12} - a_{21}^2$ e a_{30} .

Quando $\frac{3a_{30}a_{12} - a_{21}^2}{a_{30}} < 0$, a *CMN* e o *LPL* estão como na Configuração 1. O conjunto parabólico e a *CMN* estão na mesma componente conexa definida pelo *LPL* quando $x''_K(0)$ e $x''_H(0)$ possuem o mesmo sinal. Mas, como *LPL* têm uma singularidade A_3^- , Λ_7 e a_{30} tem o mesmo sinal e disso segue que

$$\text{sgn}(x''_H(0)) = \text{sgn}\left(\frac{a_{02}\Lambda_7}{a_{30}}\right) = \text{sgn}\left(\frac{\Lambda_7^2}{a_{02}a_{30}^2}\right) = \text{sgn}\left(\frac{\Lambda_7(6a_{02}^2a_{30} + \Lambda_7)}{a_{02}a_{30}^2}\right) = \text{sgn}(x''_K(0)),$$

pois $\text{sgn}(6a_{02}^2a_{30} + \Lambda_7) = \text{sgn}(\Lambda_7)$, já que $\text{sgn}(6a_{02}^2a_{30}) = \text{sgn}(\Lambda_7)$. Logo, *CMN* e o conjunto parabólico estão na mesma componente conexa.

Por fim, considere o caso em que a CMN e o conjunto parabólico na mesma componente conexa definida pela singularidade A_3^- do LPL . O conjunto parabólico está entre a CMN e o LPL se $|x_H''(0)| > |x_K''(0)|$, ou seja, $x_H''(0)^2 > x_K''(0)^2$. Note que

$$\begin{aligned} x_K''(0)^2 < x_H''(0)^2 &\Leftrightarrow \left(\frac{4\Lambda_7(6a_{02}^2a_{30} + \Lambda_7)}{9a_{02}a_{30}^2} \right)^2 < \left(\frac{16a_{02}\Lambda_7}{3a_{30}} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow (3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)(18a_{02}^2a_{30} + \Lambda_7) < 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Como Λ_7 e a_{30} têm o mesmo sinal, pois o LPL têm uma singularidade A_3^- , $\text{sgn}(a_{30}) = \text{sgn}(18a_{02}^2a_{30} + \Lambda_7)$. Porém, como a CMN e o conjunto parabólico pertencem a mesma componente conexa, a_{30} e $(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)$ tem sinais oposto. Logo (5.11) é verdadeira e o conjunto parabólico está entre a CMN e o LPL . ■

As deformações do LD , LPL , conjunto parabólico e CMN em um ponto umbílico lightlike são estudadas através de uma boa família de superfícies de M . Para isto, o primeiro passo é encontrar as condições que definem uma tal família.

Teorema 5.4.7. Seja $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ uma família de superfícies, dada por

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow M_t \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, h(x, y, t)) \end{aligned} \quad (5.12)$$

para alguma h diferenciável com $h(x, y, 0) = f(x, y)$. Então, M_t é uma boa família de M se, e somente se, $h_{xt}(0, 0, 0) \neq 0$.

Demonstração: A aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R} \rightarrow J^2(2, 1)$ associada a φ_t é dada por

$$\tilde{\varphi}(x, y, t) = \left(0, h_x(x, y, t), h_y(x, y, t), \frac{h_{xx}}{2}(x, y, t), h_{xy}(x, y, t), \frac{h_{yy}}{2}(x, y, t) \right).$$

Seja $S \subset J^2(2, 1)$ a subvariedade definida pelos pontos umbólicos lightlike, dada pelas equações (5.7). Logo, $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(0, 0, 0) \in S$. As derivadas de $\tilde{\varphi}$ em $(0, 0, 0)$ são

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, 6a_{30}, 2a_{21}, 2a_{12}), \quad (0, 0, 2a_{02}, 2a_{21}, 2a_{12}, 6a_{03}), \\ &\left(0, h_{xt}(0, 0, 0), h_{yt}(0, 0, 0), \frac{h_{xxt}}{2}(0, 0, 0), h_{xyt}(0, 0, 0), \frac{h_{yyt}}{2}(0, 0, 0) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando $\psi : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow J^2(2, 1)$ a parametrização local de S com

$$\psi(a_{00}, t, x) = (a_{00}, \cos t, \sin t, x \tan^2 t, -2x \tan t, x),$$

segue que $\tilde{p} = \psi(0, 0, a_{02})$ e

$$T_{\tilde{p}}S = \mathbb{R} \cdot \{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, -2a_{02}, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Seja A a matriz cujas linhas são formadas pelos vetores da base \mathcal{B} de $T_{\tilde{P}}S$ obtida anteriormente e pelas derivadas de $\tilde{\varphi}$ em $(0, 0, 0)$, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2a_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6a_{30} & 2a_{21} & 2a_{12} \\ 0 & 0 & 2a_{02} & 2a_{21} & 2a_{12} & 6a_{03} \\ 0 & h_{xt}(0, 0, 0) & h_{yt}(0, 0, 0) & \frac{h_{xx}}{2}(0, 0, 0) & h_{xyt}(0, 0, 0) & \frac{h_{yyt}}{2}(0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

Assim, S é transversal a $\tilde{\varphi}$ se, e somente se, $\det A \neq 0$. Observe que $\det A = 4\Lambda_7 h_{xt}(0, 0, 0)$ e $\Lambda_7 \neq 0$, pois o LD possui uma singularidade de Morse na origem. Portanto, $\tilde{\varphi}$ é transversal a S em \tilde{P} se, e somente se, $h_{xt}(0, 0, 0) \neq 0$. ■

Teorema 5.4.8. Sejam $(M, p) \in \mathcal{G}_3$ tal que o LD possui uma singularidade A_1^\pm em p , $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ uma família de superfícies com $M_0 = M$ e LD_t os pontos de M_t onde a métrica é degenerada. Então, LD_t é uma deformação \mathcal{R} -versal do LD de M se, e somente se, M_t é uma boa família de M .

Demonstração: Seja $M_t \subset \mathbb{R}_1^3$ uma família de superfícies, parametrizada por (5.12) com $h(x, y, t) = f(x, y) + t\tilde{h}(x, y, t)$. Assim, $LD_t = \delta_t^{-1}(0)$, onde $\delta_t = F_t^2 - E_t G_t$ e E_t, F_t, G_t são os coeficientes da primeira forma fundamental de M_t calculados com φ_t . Escreva

$$j^2 \delta_t = H_{00}(t) + H_{10}(t)x + H_{01}(t)y + H_{20}(t)x^2 + H_{11}(t)xy + H_{02}(t)y^2,$$

onde H_{ij} são funções suaves em t tais que $H_{00}(t) = H_{10}(0) = H_{01}(0) = 0$, $H_{20}(0) = 6a_{30}$, $H_{11}(0) = 4a_{21}$ e $H_{02}(0) = 4a_{02}^2 + 2a_{12}$. Aplicando mudanças de coordenadas observe que

$$j^2 \delta_t = \rho(t) + a_{30}x^2 + \frac{\Lambda_7}{a_{30}}y^2,$$

com $j^1 \rho = -2\tilde{h}_x(0, 0, 0)t = -2h_{xt}(0, 0, 0)t$. Logo, LD_t é uma deformação \mathcal{R} -versal do LD de M se, e somente se, $h_{xt}(0, 0, 0) \neq 0$. Do Teorema 5.4.7, segue que a deformação \mathcal{R} -versal do LD , apresentada nas Figuras 36 e 37, é equivalente a M_t ser uma boa família de M . ■

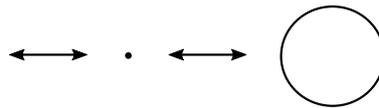


Figura 36 – Deformação da singularidade A_1^+ no LD em uma boa família de superfícies.

Sendo a origem um ponto umbílico lightlike, o LPL possui uma singularidade A_3 nesse ponto, logo $\tilde{\delta}(x, y) \sim_{\mathcal{R}} \pm(x^2 \pm y^4)$. Uma deformação \mathcal{R} -versal de tal singularidade é

$$\tilde{\delta}(x, y, u, v, w) = x^2 \pm (y^4 + uy^2 + vy + w). \quad (5.13)$$

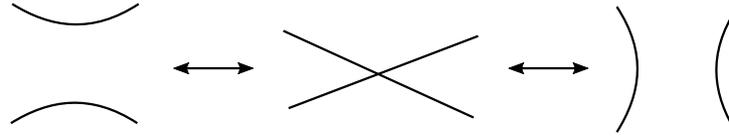


Figura 37 – Deformação da singularidade A_1^- no LD em uma boa família de superfícies.

A deformação do *LPL* na boa família M_t nunca é uma deformação \mathcal{R} -versal da singularidade A_3 do *LPL* de M , pois possui apenas um parâmetro. Entretanto, como (5.13) é uma deformação \mathcal{R} -versal, existem germes de funções $u, v, w : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tais que a deformação do *LPL* induzida por M_t é equivalente a $x^2 \pm (y^4 + u(t)y^2 + v(t)y + w(t))$. Defina a curva diferenciável $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$, com $\gamma(0)$ sendo a origem.

Teorema 5.4.9. Se M_t é uma família genérica de M , então γ é regular na origem.

Demonstração: Seja M_t a família de superfícies parametrizada por φ_t como na equação (5.12). Para verificar que γ é regular e calcular o seu vetor tangente é necessária apenas a parte linear de γ , ou seja, os termos onde t possui grau 1. Portanto, considere $h(x, y, t) = f(x, y) + t\tilde{h}(x, y)$, para alguma função suave \tilde{h} .

A partir de φ_t , o *LPL* das superfícies M_t é dado por $\tilde{\delta}_t^{-1}(0)$. Como $\tilde{\delta}_0$ possui uma singularidade A_3 , que é 4- \mathcal{R} -determinado, é necessário verificar como $\tilde{\delta}_t$ deforma o 4-jato de $\tilde{\delta}_0$, para t suficientemente pequeno. Aplicando mudanças de coordenadas, segue que

$$j^4 \tilde{\delta}_t \sim_{\mathcal{R}(4)} x^2 - \frac{32\Lambda_7^3}{27a_{30}^3} y^4 + t \sum_{i+j=0}^4 a_{ij} x^i y^j. \quad (5.14)$$

Para escrever o desdobramento (5.14) como em (5.13) são realizados 4 passos.

Passo 1: Ajustar os termos quadráticos. Para isto considere $c_{20}(t)$ e $c_{11}(t)$ os coeficientes de x^2 e xy , respectivamente. Então $c_{20}(t) > 0$ para t suficientemente pequeno, pois $c_{20}(0) = 1$. Realize as mudanças de coordenadas

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{c_{20}(t)}} x, y \right),$$

$$(x, y) \mapsto \left(x - \frac{c_{11}(t)}{2} y, y \right).$$

Desconsidere os termos de grau maior do que ou igual 2 em t que possam ter surgido. Após estas mudanças, o coeficiente de x^2 e xy são 1 e 0, respectivamente.

Passo 2: Eliminar os termos cúbicos. Sejam $c_{30}(t)$, $c_{21}(t)$ e $c_{12}(t)$ os coeficientes de x^3 , x^2y e xy^2 , respectivamente. Fazendo a mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto \left(x - \frac{c_{30}(t)}{2} x^2 - \frac{c_{21}(t)}{2} xy - \frac{c_{12}(t)}{2} y^2, y \right),$$

os termos x^3 , x^2y e xy^2 são eliminados. Desconsidere os termos de grau maior do que ou igual 2 em t que possam ter surgido. Entretanto, tais mudanças alteram os termos de grau 2, por isso o Passo 1 é realizado novamente.

Passo 3: Eliminar os termos de grau 4. Sejam $c_{40}(t)$, $c_{31}(t)$, $c_{22}(t)$ e $c_{13}(t)$ os coeficientes de x^4 , x^3y , x^2y^2 e xy^3 , respectivamente. Fazendo a mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto \left(x - \frac{c_{40}(t)}{2}x^3 - \frac{c_{31}(t)}{2}x^2y - \frac{c_{22}(t)}{2}xy^2 - \frac{c_{13}(t)}{2}y^3, y \right),$$

elimina-se os termos x^4 , x^3y , x^2y^2 e xy^3 . Desconsidere os termos de grau maior do que ou igual 2 em t que possam ter surgido. Entretanto, tais mudanças alteram os termos de grau 3, por isso o Passo 2 é realizado novamente.

Passo 4: Seja $c_{04}(t)$ o coeficiente de y^4 . Então $c_{04}(0) = \frac{-32\Lambda_7^3}{9a_{30}^3} \neq 0$, pois $\tilde{\delta}_0$ é uma singularidade A_3 . Logo, $c_{04}(t) \neq 0$ para t suficientemente pequeno. Fazendo a mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{1}{|c_{04}(t)|^{\frac{1}{4}}}y \right)$$

e eliminando os termos de ordem maior do que ou igual a 2 em t , segue que

$$j^4 \tilde{\delta} \sim_{\mathcal{R}} x^2 \pm y^4 + c_{03t}y^3 + c_{02t}y^2 + c_{01t}y + c_{10t}x + c_{00t}.$$

Realizando as mudanças

$$(x, y) \mapsto \left(x - \frac{c_{10t}}{2}, y \mp \frac{c_{30t}}{3} \right)$$

os termos x e y^3 são eliminados, de forma que a deformação $\tilde{\delta}_t$ está na forma versal.

Ao final, segue que

$$j^4 \tilde{\delta} \sim_{\mathcal{R}} x^2 \pm y^4 - h_{xt}(0, 0, 0) \sqrt{\frac{32|\Lambda_7|}{3|a_{30}|}} ty^2, \quad (5.15)$$

ou seja,

$$j^1 \gamma(0) = \left(\pm h_{xt}(0, 0, 0) \sqrt{\frac{32|\Lambda_7|}{3|a_{30}|}} t, 0, 0 \right).$$

Portanto, γ é uma curva regular, pois o LD possui uma singularidade de Morse ($\Lambda_7 \neq 0$) e M_t é uma boa família de M ($h_{xt}(0, 0, 0) \neq 0$). ■

Teorema 5.4.10. A curva γ está contida na *Swallowtail*, isto é, no conjunto bifurcação da singularidade A_3 no espaço de parâmetros uvw .

Demonstração: Do Teorema 4.2.4 e do Corolário 4.2.1 segue que p é um ponto umbílico estável. Logo, M_t possui um ponto umbílico próximo da origem, para t suficientemente pequeno.

Portanto, $\tilde{\delta}_t$ possui uma singularidade, pois pontos umbílicos são singularidades do *LPL*. Os pontos da *Swallowtail* representam os valores dos parâmetros u, v e w para os quais a deformação $\tilde{\delta}(x, y, u, v, w)$ de A_3 possui uma singularidade e disso segue que $\gamma(t)$ pertence a *Swallowtail*. ■

A configuração do *LPL* de M_t depende do estrato da *Swallowtail* onde $\gamma(t)$ está contida e se a singularidade do *LPL* de M em p é A_3^+ ou A_3^- . Para realizar este estudo, considere a estratificação da *Swallowtail* apresentada na Figura 3 do Capítulo 2. Como γ é regular, o Teorema 2.2.3 mostra que essa curva passa do estrato *II* para o *VI*. Da equação (5.15), segue que $\gamma(t)$ pertence ao estrato *IV* quando $(-1)^j h_{xt}(0, 0, 0)t < 0$ e ao estrato *II* se $(-1)^j h_{xt}(0, 0, 0) > 0$. Com isso é possível obter a deformação do *LPL*.

Suponha que o *LPL* possui uma singularidade A_3^+ em p . Então, a deformação do *LPL* neste caso é apresentada na Figura 38. Por outro lado, quando o *LPL* possui uma singularidade A_3^- em p , a deformação do *LPL* é como na Figura 39.



Figura 38 – Deformação em uma família genérica de superfícies da singularidade A_3^+ do *LPL*.

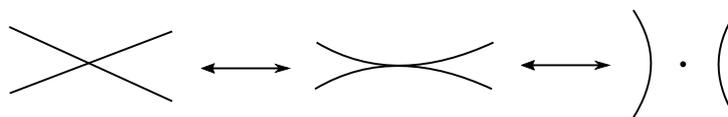


Figura 39 – Deformação em uma família genérica de superfícies da singularidade A_3^- do *LPL*.

Dada uma família genérica de superfícies M_t de M , em quantos pontos o *LD*, *LPL*, conjunto parabólico e *CMN* se intersectam e como são estas interseções (tangentes ou transversais) quando $t \neq 0$? Para isto, sejam M_t uma família genérica de M dada por (5.12), LD_t o conjunto dos pontos de M_t onde a métrica é degenerada, LPL_t o discriminante da EDB das linhas de curvatura de M_t , K_t o conjunto parabólico de M_t e CMN_t o conjunto dos pontos com curvatura média nula de M_t , para cada t .

Lema 5.4.1. A subvariedade $\mathcal{S} \subset J^k(2, 1)$ que representa a interseção do *LD* com o *LPL* é dada por

$$\begin{cases} b_{10}^2 + b_{01}^2 = 1, \\ b_{10}^2 b_{20} + b_{10} b_{01} b_{11} + b_{01}^2 b_{02} = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Demonstração: Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $q \in M$. Considere uma parametrização local $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M , dada por $\psi(x, y) = (x, y, g(x, y))$, com $q = \psi(0, 0)$ e

$$j^2 g = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2.$$

O ponto $q \in LD$ pertence ao LPL quando a única direção tipo luz em q é tangente ao LD . Assim, $q \in LD \cap LPL$ se, e somente se, $b_{10}^2 + b_{01}^2 = 1$ e $T_q LD$ é tipo luz. Como $LD = \delta^{-1}(0)$, com $\delta = F^2 - EG$, segue que

$$T_q LD = \ker d\delta(0,0) = \mathbb{R} \cdot \{(-\delta_y(0,0), \delta_x(0,0))\} = \mathbb{R} \cdot \{(-2b_2b_5 - b_1b_4, 2b_1b_3 + b_2b_4)\}.$$

Sendo $k_1 = -2b_2b_5 - b_1b_4$ e $k_2 = 2b_1b_3 + b_2b_4$, então $T_q LD$ é lightlike se, e somente se,

$$E(0,0)k_1^2 + 2F(0,0)k_1k_2 + G(0,0)k_2^2 = 0.$$

Substituindo estes valores e observando que $b_{10}^2 + b_{01}^2 = 1$, pois $q \in LD$, verifica-se que

$$b_1^2b_3 + b_1b_2b_4 + b_2^2b_5 = 0.$$

Portanto, um ponto $q \in M$ pertence a interseção do LD com o LPL se, e somente se, as condições (5.16) são satisfeitas. ■

Teorema 5.4.11. Seja M_t uma família genérica de M dada por (5.12). Para $t \neq 0$ valem as seguintes afirmações.

1. O LD_t e o LPL_t se intersectam em 0 ou 2 pontos, de acordo com o sinal de

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0,0,0)t}{\Lambda_7},$$

e tais interseções são tangentes quando existirem.

2. O LD_t e o CMN_t se intersectam em 0 ou 2 pontos, de acordo com o sinal de

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0,0,0)t}{\Lambda_7},$$

e tais interseções são transversais quando existirem.

3. O LD_t e o K_t se intersectam em 0 ou 2 pontos, de acordo com o sinal de

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0,0,0)t}{\Lambda_7},$$

e tais interseções são transversais quando existirem.

4. O CMN_t e o K_t se intersectam em 0 ou 2 pontos, de acordo com o sinal de

$$\frac{h_{xt}(0,0,0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7},$$

e tais interseções são transversais quando existirem.

5. O LPL_t e o K_t se intersectam em 0 ou 2 pontos, de acordo com o sinal de

$$\frac{h_{xt}(0,0,0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7},$$

e tais interseções são tangentes quando existirem.

6. O LPL_t e a CMN_t se intersectam em 0, 2 ou 4 pontos, de acordo com o sinal de

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0,0,0)t}{\Lambda_7} \quad \text{e} \quad \frac{h_{xt}(0,0,0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7},$$

e tais interseções são transversais quando existirem.

Demonstração:

1. Seja $\tilde{\varphi}$ a aplicação Monge-Taylor de M associada a φ . Sendo

$$\tilde{\varphi}(x, y) = (\phi_{00}(x, y), \phi_{10}(x, y), \phi_{01}(x, y), \phi_{20}(x, y), \phi_{11}(x, y), \phi_{02}(x, y)),$$

defina $\alpha = \phi_{10}^2 + \phi_{01}^2 - 1$ e $\beta = \phi_{10}^2\phi_{20} + \phi_{10}\phi_{01}\phi_{11} + \phi_{01}^2\phi_{02}$. O Lema 5.4.1 garante que $\varphi(x, y) \in LD \cap LPL$ se, e somente se, $\alpha(x, y) = \beta(x, y) = 0$.

Como $\beta_x(0, 0) = 3a_{30} \neq 0$, segue do Teorema da Função Implícita que existe $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, com $x(0) = 0$, tal que $\beta_2(y) = \beta(x(y), y) = 0$, para todo $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Desta maneira, $LD \cap LPL$ é formado pelos pontos da forma $(x(y), y)$ tais que $\alpha_2(y) = \alpha(x(y), y) = 0$. Derivando implicitamente β_2 , note que

$$0 = \beta_2'(0) = \beta_x(0, 0)x'(0) + \beta_y(0, 0),$$

$$0 = \beta_2''(0) = \beta_{yy}(0, 0) + \beta_x(0, 0)x''(0) + 2\beta_{xy}(0, 0)x'(0) + \beta_{xx}(0, 0)x'(0)^2.$$

Assim, é possível obter os valores de $x'(0)$ e $x''(0)$ para escrever $j^2x = x'(0)y + \frac{x''(0)}{2}y^2$. Aplicando mudanças de coordenadas, verifica-se que

$$\alpha_2 \sim_{\mathcal{R}} \frac{\Lambda_7}{a_{30}}y^2.$$

Uma família genérica de superfícies M_t de M induz em uma deformação de α_2 , denotada por α_{2t} . De fato, considerando φ_t como no Teorema 5.4.7, segue que

$$\alpha_{2t} \sim_{\mathcal{R}} \frac{\Lambda_7}{a_{30}}y^2 + 2h_{xt}(0, 0, 0)t + \rho(t),$$

onde $j^1\rho = 0$. Logo, se M_t for uma família genérica de M , o LD_t e o LPL_t se intersectaram em 2 ou 0 pontos, quando

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0, 0, 0)t}{\Lambda_7} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a_{30}h_{xt}(0, 0, 0)t}{\Lambda_7} > 0,$$

respectivamente. Da Seção 3.2, o LD e o LPL são tangentes nos pontos regulares onde elas se intersectam.

2. Segue do Teorema 3.2.1 que um ponto $q \in LD_t$ pertence à CMN_t se, e somente se, $p \in LPL_t$. Então, $LD_t \cap CMN_t$ tem 2 ou 0 pontos, conforme o item (1). Para verificar que tais interseções são transversais, considere as notações utilizadas na demonstração do item (1). Assim, $\varphi(x, y) \in$

$LD \cap CMN$ se, e somente se, $\alpha(x, y) = \beta(x, y) = 0$. Além disso, LD e CMN são tangentes em $\varphi(x, y)$ quando $T(x, y) = 0$, onde

$$\begin{aligned} T(x, y) = & (2\phi_{10}\phi_{01}^2\phi_{20}\phi_{21} - 6\phi_{10}\phi_{01}^2\phi_{20}\phi_{03} - 3\phi_{10}\phi_{01}^2\phi_{11}\phi_{30} - \phi_{10}\phi_{01}^2\phi_{11}\phi_{12} + 6\phi_{01}\phi_{02}\phi_{30} \\ & - 4\phi_{20}\phi_{11}\phi_{02} + 8\phi_{10}\phi_{01}\phi_{20}^2\phi_{02} - 2\phi_{10}\phi_{01}\phi_{20}\phi_{11}^2 - 8\phi_{10}\phi_{01}\phi_{20}\phi_{02}^2 - 2\phi_{10}\phi_{20}\phi_{21} \\ & + 2\phi_{10}\phi_{01}\phi_{11}^2\phi_{02} + 4\phi_{01}^3\phi_{20}\phi_{12} - 2\phi_{01}^2\phi_{11}^3 - \phi_{01}^3\phi_{11}\phi_{21} - 3\phi_{01}^3\phi_{11}\phi_{03} - 6\phi_{01}^3\phi_{02}\phi_{30} \\ & + 2\phi_{01}^3\phi_{02}\phi_{12} + 8\phi_{01}^2\phi_{20}\phi_{11}\phi_{02} + \phi_{11}^3 - 4\phi_{01}\phi_{20}\phi_{12} + \phi_{01}\phi_{11}\phi_{21} + 4\phi_{10}\phi_{01}^2\phi_{02}\phi_{21} \\ & + 3\phi_{10}\phi_{11}\phi_{30})(x, y). \end{aligned}$$

Definindo $\xi(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y), T(x, y))$ e aplicando mudanças de coordenadas é possível verificar que $\xi \sim_{\mathcal{R}} (0, x, y)$.

Uma família genérica de superfícies M_t de M induz uma deformação de ξ , denotada por ξ_t . De fato, considerando φ_t como antes, segue que $\xi_t \sim_{\mathcal{R}} (2h_{xt}(0, 0, 0)t + \rho(t), x, y)$, onde $j^1\rho = 0$. Logo, se M_t for uma família genérica, $\xi_t(x, y) \neq (0, 0, 0)$ para $t \neq 0$, ou seja, LD_t e a CMN_t são transversais quando $t \neq 0$.

3. De maneira análoga aos casos anteriores, verifica-se que o LD_t e o conjunto parabólico se intersectam em 2 ou 0 pontos, quando

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0, 0, 0)t}{\Lambda_7} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a_{30}h_{xt}(0, 0, 0)t}{\Lambda_7} > 0,$$

respectivamente, e as interseções entre o conjunto parabólico e o LD_t , caso existam, são transversais.

4. De maneira análoga aos casos anteriores, verifica-se que a CMN_t e o conjunto parabólico se intersectam em 2 ou 0 pontos, quando

$$\frac{h_{xt}(0, 0, 0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{h_{xt}(0, 0, 0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7} < 0,$$

respectivamente, e as interseções entre o conjunto parabólico e a CMN_t , caso existam, são transversais.

5. Para $t \neq 0$ não existem pontos umbílicos lightlike, pois o LD_t é regular. Portanto, as interseções entre o LPL_t e o conjunto parabólico ocorrem apenas em $M_t \setminus LD_t$.

A partir da Proposição 5.3.4, a quantidade de pontos de interseção entre o LPL_t e o conjunto parabólico é igual ao número de interseções entre a CMN_t e o conjunto parabólico. Portanto, em $t \neq 0$, existem 2 ou 0 pontos de interseção, quando

$$\frac{h_{xt}(0, 0, 0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{h_{xt}(0, 0, 0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7} < 0,$$

respectivamente.

Seja $q \in M_t \setminus LD_t$ na interseção entre LPL_t e o conjunto parabólico. Se q pertence a região Riemanianna de M_t , então o LPL_t é composto apenas pelos pontos umbílicos, ou seja, em

superfícies genéricas o LPL_t possui uma singularidade A_1^+ em q e assim não é possível calcular a ordem de contato entre os conjuntos. Porém, se q pertence a região Lorentzianna, segue do Teorema 5.3.4 que o LPL_t e o conjunto parabólico são tangentes em q .

6. Da Proposição 5.3.4 e do Teorema 3.2.1 segue que $q \in LPL_t \cap CMN_t$ se, e somente se, $q \in LD_t \cap LPL_t$ ou $q \in K_t \cap LPL_t$. Do item (1), o LD_t e o LPL_t se intersectam em 2 ou 0 pontos, quando

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0,0,0)t}{\Lambda_7} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a_{30}h_{xt}(0,0,0)t}{\Lambda_7} > 0,$$

respectivamente. Por outro lado, do item (5), K_t e o LPL_t se intersectam em 2 ou 0 pontos, quando

$$\frac{h_{xt}(0,0,0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{h_{xt}(0,0,0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7} < 0,$$

respectivamente. Assim, dependendo da combinação de sinais entre

$$\frac{a_{30}h_{xt}(0,0,0)t}{\Lambda_7} \quad \text{e} \quad \frac{h_{xt}(0,0,0)t}{(3a_{30}a_{12} - a_{21}^2)\Lambda_7}$$

existem 0, 2 ou 4 pontos de interseção entre LPL_t e a CMN_t .

Como o LPL_t é tangente ao LD_t e ao conjunto parabólico, mas a CMN_t é transversal ao LD_t e ao conjunto parabólico, segue por transitividade que a CMN_t é transversal ao LPL_t nos pontos de interseção. ■

Teorema 5.4.12. Seja $(M, p) \in \mathcal{G}_3$ genérico. Se M_t é uma família genérica de M , então o LD , o LPL , o conjunto parabólico e a CMN se deformam como na Figura 40.

Demonstração: Segue dos resultados obtidos ao longo da seção. ■

5.5 Pontos Umbílicos de Codimensão 1

Os Teoremas 5.3.1 e 5.4.3 mostram que os pontos umbílicos timelike planos e lightlike, respectivamente, possuem codimensão ≥ 1 . Isso acontece porque é possível adicionar novas condições que façam com que a codimensão aumente. Por exemplo, pontos umbílicos lightlike onde o LD tem uma singularidade mais degenerada que A_1^\pm possuem codimensão maior. De fato, os pontos umbílicos com codimensão igual a 1 são exatamente aqueles que ocorrem genericamente, como mostra o próximo teorema.

Teorema 5.5.1. Os pontos umbílicos de codimensão 1 em superfícies suaves no espaço Minkowski, com relação ao LPL , LD , conjunto parabólico e CMN , são:

1. Os pontos umbílicos timelike onde o LPL possui uma singularidade A_3^- .
2. Os pontos umbílicos timelike planos genéricos dados pelo Teorema 5.3.2.

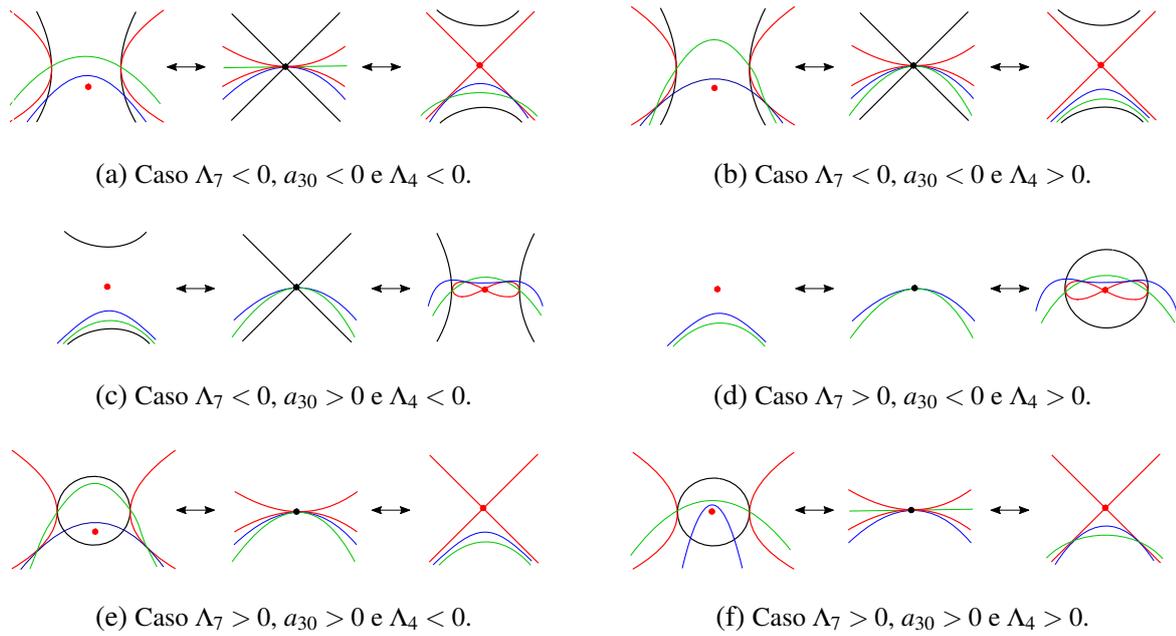


Figura 40 – Deformações das curvas LD (preto), LPL (vermelho), conjunto parabólico (azul) e a CMN (verde) em famílias genéricas de superfícies em pontos umbílicos lightlike.

3. Os pontos umbílicos lightlike genéricos dados pelo Teorema 5.4.6.

Demonstração: Do Teorema 5.2.2 segue que os pontos umbílicos timelike onde o LPL tem uma singularidade A_3^- possuem codimensão 1.

Seja S a subvariedade de $J^2(2, 1)$ definida pelas equações (5.4) na demonstração do Teorema 5.3.1. Os pontos umbílicos timelike planos genéricos, listados no Teorema 5.3.2, formam um subconjunto S_0 de S . Utilizando a notação da demonstração do Teorema 5.3.2 segue que S_0 é definido pelas condições abertas

$$(3a_{30} - a_{12})^2 + (a_{21} - 3a_{03})^2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \Lambda_i \neq 0, \text{ para } i = 2, 3, 4, 5.$$

Como S possui codimensão 3 e S_0 é aberto em S , segue que S_0 possui codimensão 3. Logo, os pontos umbílicos planos genéricos possuem codimensão 1.

Os pontos umbílicos lightlike genéricos, dados pelo Teorema 5.4.6, formam um subconjunto L_0 da subvariedade L de $J^2(2, 1)$ definida pelas equações (5.7). Com a notação da prova do Teorema 5.4.6, segue que o subconjunto L_0 é definido em L pelas condições abertas

$$\Lambda_7 \neq 0, \quad a_{30} \neq 0, \quad a_{02} \neq 0, \quad 3a_{30}a_{12} - a_{21}^2 \neq 0.$$

Assim, L_0 possui a mesma codimensão de L , que do Teorema 5.4.3 é igual a 3. Portanto, os pontos umbílicos lightlike genéricos possuem codimensão 1.

Com relação as curvas LPL , LD , conjunto parabólico e CMN , a codimensão de um ponto umbílico pode aumentar quando adicionamos condições que envolvam a interseção desses

conjuntos ou a singularidade deles. Um ponto umbílico p é uma singularidade do *LPL*. Se o *LPL* não intersecta os outros conjuntos em p , a codimensão é maior quanto mais degenerada for a singularidade. Assim, segue do Teorema 5.2.2 que os pontos umbílicos com codimensão 1 são aqueles onde a singularidade do *LPL* em p é A_3^- .

Se o *LPL* intersecta o *LD* em p , então p é um ponto umbílico lightlike e os de codimensão 1 são aqueles dados pelo Teorema 5.4.6, como visto anteriormente. Por outro lado, se o *LPL* intersecta o conjunto parabólico, ou a *CMN*, então p é um ponto de interseção dos três conjuntos. Neste cenário, os pontos de codimensão 1 são os casos listados no Teorema 5.3.2. ■

5.6 Tangências degeneradas entre o LD e o LPL

Seja \mathcal{G}_4 o conjunto dos germes (M, p) , com $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto regular do *LD* e do *LPL* cuja ordem de contato entre essas curvas em p é maior do que 2. O conjunto \mathcal{G}_4 pode ser visto como um subconjunto do espaço das funções $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0,0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$, relacionando (M, p) com uma parametrização de M em uma vizinhança de p . Assim, \mathcal{G}_4 é munido com a topologia induzida por $\mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^2, (0,0)), (\mathbb{R}_1^3, p))$ e $(M, p) \in \mathcal{G}_4$ é dito **genérico** se pertence a um subconjunto aberto e denso de \mathcal{G}_4 .

Teorema 5.6.1. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_4$ genérico, a ordem contato entre o *LD* e o *LPL* em p é igual a 4.

Demonstração: Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 2.6.5, com $p = \varphi(0,0)$ e

$$j^3 f = x + xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Como a ordem de contato entre o *LD* e o *LPL* na origem é maior do que 2, segue que $a_{30} = -\frac{1}{3}$.

Tomando uma parametrização $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (0,0))$ do *LD*, da forma $\gamma(x) = (x, g(x))$, então $j^2 g = \frac{1}{2}x^2$. A ordem de contato entre o *LD* e a *CMN* é medida pela aplicação $h = H \circ \gamma$. Note que $j^2 h = \Lambda_8 x^2$, com

$$\Lambda_8 = 4a_{02} + 7a_{21} + 12a_{40}.$$

Portanto, a ordem de contato entre o *LD* e a *CMN* é 2 se, e somente se, $\Lambda_8 \neq 0$. Segue do Teorema 3.2.2 que a ordem de contato entre o *LD* e o *LPL* em p é genericamente 4. ■

Para estudar as deformações de uma superfície com um ponto onde o *LPL* e o *LD* possuem ordem de contato 4 através de uma boa família de superfícies, utilize as notações adotadas na demonstração do Teorema 5.6.1 e suponha que $\Lambda_8 \neq 0$.

Teorema 5.6.2. Sejam $M_t \in \mathcal{F}$ uma família de superfícies, dada por

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow M_t \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y) + th(x, y, t)) \end{aligned} ,$$

Então, M_t é uma boa família de M se, e somente se,

$$\Lambda_9 = -2h_y(0,0,0) + 4a_{02}h_x(0,0,0) + 2a_{21}h_x(0,0,0) - h_{xx}(0,0,0) \neq 0.$$

Demonstração: Sendo $\tilde{h}(x,y,t) = f(x,y) + th(x,y,t)$, a família aplicação Monge-Taylor $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{J}^3(2,1)$ associada a φ_t é dada por

$$\tilde{\varphi} = \left(\tilde{h}, \tilde{h}_x, \tilde{h}_y, \frac{\tilde{h}_{xx}}{2}, \tilde{h}_{xy}, \frac{\tilde{h}_{yy}}{2}, \frac{\tilde{h}_{xxx}}{6}, \frac{\tilde{h}_{xxy}}{2}, \frac{\tilde{h}_{xyy}}{2}, \frac{\tilde{h}_{yyy}}{6} \right).$$

As derivadas de $\tilde{\varphi}$ em $(0,0,0)$ são

$$\tilde{\varphi}_x = (1, 0, 1, -1, 2a_{21}, a_{12}, 4a_{40}, 3a_{31}, 2a_{22}, a_{13}),$$

$$\tilde{\varphi}_y = (0, 1, 2a_{02}, a_{21}, 2a_{12}, 3a_{03}, a_{31}, 2a_{22}, 3a_{13}, 4a_{04}),$$

$$\tilde{\varphi}_t = \left(h(0), h_x(0), h_y(0), \frac{h_{xx}}{2}(0), h_{xy}(0), \frac{h_{yy}}{2}(0), \frac{h_{xxx}}{6}(0), \frac{h_{xxy}}{2}(0), \frac{h_{xyy}}{2}(0), \frac{h_{yyy}}{6}(0) \right).$$

Por outro lado, seja $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}$ a subvariedade dos pontos onde a ordem de contato entre o LD e o LPL é maior do que 2. Tome as parametrizações $\tilde{\varphi}_i$ de \mathbf{I}_2 , $i = 1, 2$, definidas na demonstração do Teorema 5.6.4. Assim, $\tilde{p} = \tilde{\varphi}(0,0,0) \in \mathcal{S}_2$ e

$$\tilde{p} = \tilde{\varphi}(p) = \left(0, 1, 0, 0, 1, a_{02}, -\frac{1}{3}, a_{21}, a_{12}, a_{03} \right) = \tilde{\varphi}_1(0, 0, 1, a_{0,2}, a_{21}, a_{12}, a_{03}).$$

Logo, \mathcal{B} é uma base de $T_{\tilde{p}}\mathcal{S}_2$, com

$$\mathcal{B} = \left\{ (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1, 0, 0, -\frac{1}{3}(4a_{02} + 3a_{21}), 0, 0, 0), \right. \\ \left. (0, 0, 0, 0, 1, 0, -\frac{2}{3}, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \right. \\ \left. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \right\}.$$

Seja A a matriz cujas linhas são formadas pelos vetores da base \mathcal{B} de $T_{\tilde{p}}\mathcal{S}_2$ e pelas derivadas de $\tilde{\varphi}$ em $(0,0,0)$. Assim, \mathcal{S}_2 é transversal a $\tilde{\varphi}$ se, e somente se, $\det A \neq 0$. Mas $\det A = -\frac{1}{6}\Lambda_8\Lambda_9$. Portanto, $\tilde{\varphi}$ é transversal a \mathcal{S}_2 em \tilde{p} se, e somente se, $\Lambda_9 \neq 0$. ■

Teorema 5.6.3. Dado $(M, p) \in \mathcal{G}_4$, a deformação do LD e LPL em uma família genérica $M_t \in \mathcal{F}$ de M é como indicada na Figura 41.

Demonstração: Sejam $M_t \in \mathcal{F}$ uma família de superfícies, dada por

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow M_t \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y) + th(x, y, t)) \end{aligned}$$

Como o LD de M é regular e $j^1\delta = y$, é possível parametrizar o LD de M por $\gamma(x) = (x, \beta(x))$. Para t suficientemente pequeno, o LD de M_t também pode ser parametrizado por $\gamma_t(x) = (x, \beta_t(x))$.

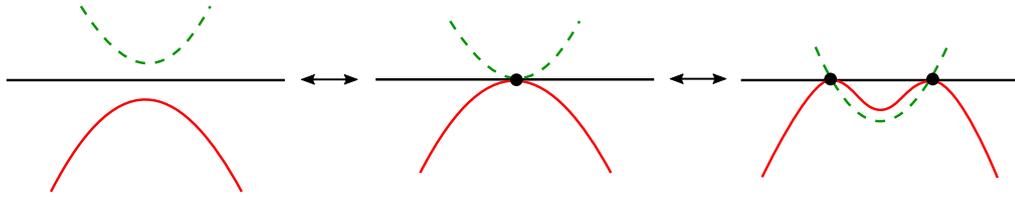


Figura 41 – Deformações das interseções de ordem de contato 4 entre o LD e o LPL através de uma boa família de superfícies. As curvas em vermelho e preto representam o LPL e o LD, respectivamente. A curva verde pontilhada apresenta uma possível configuração da CMN.

Seja $\bar{H}_t : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ o germe de função tal que tal que a CMN de M_t é dada por $\bar{H}_t^{-1}(0)$. O LD e a CMN de M_t se intersectam em um ponto $\gamma_t(x)$ se, e somente se, $\rho_t(x) = \bar{H}_t(x, \beta_t(x)) = 0$. Após mudanças de coordenadas, o 2-jato de ρ_t é $x^2 - \frac{\Lambda_{10}}{\Lambda_8}t + o(2)$, onde $o(2)$ são termos de ordem maior do que ou igual a 2 em t e

$$\Lambda_{10} = 4a_{02}h_x(0, 0, 0) - 2h_y(0, 0, 0) - h_{xx}(0, 0, 0).$$

Logo, se $\Lambda_{10} \neq 0$, então o LD e o LPL de M_t se intersectam em 2 ou 0 pontos, dependendo do sinal de t . Assim, como o contanto entre a CMN e o LD de M é de ordem 2, a única possibilidade é a apresentada na Figura 41. ■

Observação 5.6.1. É importante observar que a condição que define uma boa família M_t de M não é a mesma obtida no Teorema 5.6.3, ou seja, nem toda boa família (no sentido de transversalidade da aplicação Monge-Taylor) induz uma deformação como na Figura 41. Entretanto, tais condições são genéricas, assim uma família genérica de \mathcal{F} é uma boa família de M e induz a deformação do Teorema 5.6.3.

Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ um ponto regular do LD pertencente ao LPL. Como $(0, 0, 1) \notin T_pM$, pois $p \in LD$, tome uma parametrização local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M na forma de Monge, dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $p = \varphi(0, 0)$ e

$$j^2 f = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2.$$

Segue do Lema 5.4.1 que $p \in LD \cap LPL$ se, e somente se,

$$\begin{cases} a_{10}^2 + a_{01}^2 = 1, \\ a_{10}^2 a_{20} + a_{10} a_{01} a_{11} + a_{01}^2 a_{02} = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Seja $\mathcal{S} \subset J^k(2, 1)$ a subvariedade definida por (5.17). A subvariedade \mathcal{S} pode ser parametrizada localmente por $\phi_i : W \rightarrow J^k(2, 1)$, $i = 1, 2$, com

$$\phi_1(a_{00}, t, a_{11}, a_{02}, a_{30}, \dots, a_{0k}) = (a_{00}, \cos t, \sin t, -\tan t(a_{11} + a_{02} \tan t), a_{11}, a_{02}, a_{30}, \dots, a_{0k}),$$

$$\phi_2(a_{00}, t, a_{20}, a_{11}, a_{30}, \dots, a_{0k}) = (a_{00}, \sin t, \cos t, a_{20}, a_{11}, -\tan t(a_{11} + a_{20} \tan t), a_{30}, \dots, a_{0k}),$$

sendo $W = \mathbb{R} \times (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}^{2+(k+5)(k-2)/2}$, de modo que $\mathcal{S} = \phi_1(W_1) \cup \phi_2(W_2)$.

Teorema 5.6.4. Os pontos de tangencia entre o LD e o LPL com ordem de contato 4 possuem codimensão 1.

Demonstração: Seja $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}$ a subvariedade dos pontos onde a ordem de contato entre o LD e o LPL é maior do que 2. Sendo ϕ_1 a parametrização de \mathcal{S} definida anteriormente, segue que $\phi_1(P) \in \mathcal{S}_2$ se, e somente se,

$$a_{30} = \frac{3(3a_{03} + a_{21}) \sin t + 3(a_{21} - a_{03}) \sin(3t) + 12a_{12} \cos t \sin^2 t + 4(2a_{02} \tan t + a_{11})^2}{-12 \cos^3 t}, \quad (5.18)$$

onde $P = (a_{00}, t, a_{11}, a_{02}, a_{30}, \dots, a_{0k})$. Defina $h(t, a_{11}, a_{02}, a_{21}, a_{12}, a_{03})$ como a fração do lado direito de (5.18). Assim, uma parametrização local $\tilde{\phi}_1 : \mathbb{R} \times (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}^{1+(k+5)(k-2)/2} \rightarrow J^k(2, 1)$ de \mathcal{S}_2 é dada por

$$\tilde{\phi}_1(a_{00}, t, a_{11}, a_{02}, a_{21}, \dots, a_{0k}) = \phi_1(a_{00}, t, a_{11}, a_{02}, h(t, a_{11}, a_{02}, a_{21}, a_{12}, a_{03}), a_{21}, \dots, a_{0k}).$$

De modo análogo para a parametrização ϕ_2 de \mathcal{S} , dado $P = (a_{00}, t, a_{20}, a_{11}, a_{30}, \dots, a_{0k})$ em W , então $\phi_2(P) \in \mathcal{S}_2$ se, e somente se, $a_{03} = h(t, a_{11}, a_{20}, a_{12}, a_{21}, a_{30})$. Assim, outra parametrização local de \mathcal{S}_2 é $\tilde{\phi}_2 : \mathbb{R} \times (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}^{1+(k+5)(k-2)/2} \rightarrow \mathcal{S}_2$ com

$$\tilde{\phi}_2(\tilde{P}) = \phi_2(a_{00}, t, a_{20}, a_{11}, a_{30}, a_{21}, a_{12}, h(t, a_{11}, a_{20}, a_{12}, a_{21}, a_{30}), a_{40}, \dots, a_{0k}),$$

e $\tilde{P} = (a_{00}, t, a_{20}, a_{11}, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{40}, \dots, a_{0k})$. As imagens de $\tilde{\phi}_1$ e $\tilde{\phi}_2$ cobrem \mathcal{S}_2 . Logo, \mathcal{S}_2 possui codimensão 3, pois o domínio de $\tilde{\phi}_i$ é um aberto de \mathbb{R}^{d-3} e $d = (k+1)(k+2)/2$ é a dimensão de $J^k(2, 1)$.

Os pontos de interseção entre o LPL e o LD com ordem de contato 4 formam um subconjunto $\tilde{\mathcal{S}}_2$ de \mathcal{S}_2 . Do Teorema 5.6.1, segue que a condição que define $\tilde{\mathcal{S}}_2$ é aberta, pois tais pontos são genéricos. Logo, $\tilde{\mathcal{S}}_2$ é um conjunto aberto de \mathcal{S}_2 e possui a mesma codimensão em J , que é 3. Portanto, os pontos onde a ordem de contato entre o LD e o LPL é igual a 4 possuem codimensão 1. ■

Parte III

Propriedades Globais

INVERSÃO DE MÖBIUS

Neste capítulo estudamos a inversão de Möbius no espaço Minkowski. Este estudo foi motivado pelo trabalho de Ghomi e Howard ([GHOMI; HOWARD, 2012](#)), onde os autores utilizam a inversão de Möbius no espaço Euclidiano para provar que se M é uma superfície fechada e convexa em \mathbb{R}^3 e $p \in M$ é um ponto umbílico, então existe um difeomorfismo entre $M \setminus \{p\}$ e o gráfico de uma função assintoticamente constante que preserva as direções principais. Para mais detalhes ver o Apêndice A.

A ideia por trás da demonstração desse teorema é aproximar M de uma esfera euclidiana \mathbb{S}^2 . Como a inversão de Möbius de \mathbb{S}^2 no espaço euclidiano é um plano, então a inversão de Möbius de M é uma superfície próxima de um plano, que os autores provam ser o gráfico de uma função. Assim, o principal objetivo deste capítulo é estudar a inversão de Möbius no espaço Minkowski da esfera \mathbb{S}^2 e de superfícies próximas, como os ovaloides.

6.1 Inversão de Möbius no Espaço Euclidiano

Nesta seção, considere a norma, o produto interno e a geometria do espaço Euclidiano. A **inversão de Möbius** de um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^3$ é dada por

$$i_M(F) = cl \left\{ \frac{p}{\|p\|^2} : p \in F \setminus \{0\} \right\},$$

onde cl representa o fecho topológico em \mathbb{R}^3 com a topologia usual. Quando necessário, a inversão de Möbius pode ser utilizada como uma função $i_M : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, dada por

$$i_M(p) = \frac{p}{\langle p, p \rangle}.$$

Neste caso, i_M é um difeomorfismo e $i_M^{-1} = i_M$.

Exemplo 6.1.1. Dado o plano $P : ax + by + cz + d = 0$, seja $\tilde{P} = i_M(P)$. Como i_M é um difeomorfismo, segue que $i_M(\tilde{P}) = P$ e

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \tilde{P} &\Leftrightarrow i_M(x, y, z) \in P \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d(x^2 + y^2 + z^2) = 0. \end{aligned}$$

Logo, \tilde{P} é dado por $ax + by + cz + d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Se $d = 0$, então $\tilde{P} = P$. Porém, quando $d \neq 0$, \tilde{P} é uma esfera que contém a origem, dada pela equação

$$\left(x + \frac{a}{2d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2d}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4d^2}.$$

Exemplo 6.1.2. Seja S uma esfera de raio r e centro (a, b, c) , isto é,

$$S : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Pondo $\tilde{S} = i_M(S)$, segue que

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \tilde{S} &\Leftrightarrow i_M(x, y, z) \in S \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2ax - 2by - 2cz + 1 = 0. \end{aligned}$$

Se a origem pertence a S , então $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e \tilde{S} é o plano $ax + by + cz = 1/2$. Por outro lado, quando a origem não pertence a S , é possível dividir por $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$ e verificar que \tilde{S} é a esfera dada por

$$\left(x - \frac{a}{\Delta}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{\Delta}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{\Delta}\right)^2 = \frac{r^2}{\Delta^2}.$$

Teorema 6.1.1. A inversão de Möbius preserva as direções principais de uma superfície em \mathbb{R}^3 .

Demonstração: Seja M uma superfície em \mathbb{R}^3 e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de M . Então $\tilde{\varphi} = i_M \circ \varphi$ é uma parametrização local de $\tilde{M} = i_M(M)$. Sendo E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de M e \tilde{E}, \tilde{F} e \tilde{G} os de \tilde{M} , como

$$\tilde{\varphi}_x = \frac{\varphi_x \langle \varphi, \varphi \rangle - 2\varphi \langle \varphi, \varphi_x \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle^2},$$

segue que

$$\tilde{E} = \langle \tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_x \rangle = \frac{\langle \langle \varphi, \varphi \rangle - 2\varphi \langle \varphi, \varphi_x \rangle, \langle \varphi, \varphi \rangle - 2\varphi \langle \varphi, \varphi_x \rangle \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle^4} = \frac{\langle \varphi_x, \varphi_x \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle^2} = \frac{E}{\langle \varphi, \varphi \rangle^2}.$$

Procedendo de modo análogo para \tilde{F} e \tilde{G} , obtêm-se

$$\tilde{E} = \frac{1}{\langle \varphi, \varphi \rangle^2} E, \quad \tilde{F} = \frac{1}{\langle \varphi, \varphi \rangle^2} F, \quad \tilde{G} = \frac{1}{\langle \varphi, \varphi \rangle^2} G. \quad (6.1)$$

Os vetores normais N e \tilde{N} de M e \tilde{M} , respectivamente, são dados por $N = \frac{1}{\lambda} (\varphi_x \times \varphi_y)$ e

$$\tilde{N} = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \left(\frac{1}{\langle \varphi, \varphi \rangle^2} (\varphi_x \times \varphi_y) - \frac{2\langle \varphi, \varphi_y \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle^3} (\varphi_x \times \varphi) + \frac{2\langle \varphi, \varphi_x \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle^3} (\varphi_y \times \varphi) \right),$$

onde λ e $\tilde{\lambda}$ são as normas dos vetores entre parênteses. Assim, os coeficientes \tilde{e} , \tilde{f} e \tilde{g} da segunda forma fundamental de \tilde{M} são dados em funções dos coeficientes e , f e g de M por

$$\tilde{e} = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}\langle\varphi, \varphi\rangle^3}(e + \alpha E), \quad \tilde{f} = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}\langle\varphi, \varphi\rangle^3}(f + \alpha F), \quad \tilde{g} = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}\langle\varphi, \varphi\rangle^3}(g + \alpha G),$$

com $\alpha = -2\langle N, \tilde{\varphi}\rangle$.

A equação das linhas de curvatura de \tilde{M} é

$$(\tilde{f}\tilde{E} - \tilde{e}\tilde{F})dx^2 + (\tilde{g}\tilde{E} - \tilde{e}\tilde{G})dxdy + (\tilde{g}\tilde{F} - \tilde{f}\tilde{G})dy^2 = 0. \quad (6.2)$$

Substituindo os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais de \tilde{M} pelas suas expressões em termo de E , F , G , e , f e g , segue que (6.2) é satisfeita se, e somente se,

$$(fE - eF)dx^2 + (gE - eG)dxdy + (gF - fG)dy^2 = 0.$$

■

6.2 Inversão de Möbius no Espaço Minkowski

Definimos a **inversão de Möbius** de um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}_1^3$ como

$$i_M(F) = cl \left\{ \frac{p}{\langle p, p \rangle} : p \in F \setminus LC \right\},$$

onde cl representa o fecho topológico em \mathbb{R}^3 com a topologia usual. Quando necessário, é possível considerar a inversão de Möbius como uma função $i_M : \mathbb{R}_1^3 \setminus LC \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \setminus LC$ dada por

$$i_M(p) = \frac{p}{\langle p, p \rangle}.$$

Considerando as seguintes regiões de \mathbb{R}_1^3

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 > 0\}, \\ R_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ e } z > 0\}, \\ R_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ e } z < 0\}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

i_M é um difeomorfismo de R_1 em R_1 e de R_2 em R_3 , sendo $i_M^{-1} = i_M$. Em R_1 , i_M é uma inversão com relação ao plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . Por outro lado, em R_2 e R_3 , i_M é uma inversão com relação a esfera de Sitter \mathbb{S}_1^2 .

Exemplo 6.2.1. Dado o plano $P : ax + by + cz + d = 0$, seja $\tilde{P} = i_M(P)$. Como i_M é um difeomorfismo, $i_M(\tilde{P}) = P$ e

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \tilde{P} &\Leftrightarrow i_M(x, y, z) \in P \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d(x^2 + y^2 - z^2) = 0. \end{aligned}$$

Logo, \tilde{P} é dado por $ax + by + cz + d(x^2 + y^2 - z^2) = 0$. Assim, se $d = 0$, então $\tilde{P} = P$. Porém, quando $d \neq 0$ é possível escrever a equação de \tilde{P} na forma

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

equivalentemente,

$$\left(x + \frac{a}{2d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2d}\right)^2 - \left(z - \frac{c}{2d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4d^2},$$

ou seja, \tilde{P} é uma esfera de Sitter, um plano hiperbólico ou um cone, dependendo do sinal de $a^2 + b^2 - c^2$, todos com centro em $p = \left(-\frac{a}{2d}, -\frac{b}{2d}, \frac{c}{2d}\right)$ e raio $r = \sqrt{\frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{4d^2}}$. O sinal de $a^2 + b^2 - c^2$ determina se o plano P é spacelike, timelike ou lightlike. Portanto, a inversão de Möbius do plano P é:

- (1) o próprio plano P , se P contém a origem;
- (2) a esfera de Sitter $\mathbb{S}_1^2(p, r)$, se P não contém a origem e é timelike;
- (3) o cone $C^2(p)$, se P não contém a origem e é lightlike;
- (4) o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2(p, r)$, se P não contém a origem e é spacelike.

Teorema 6.2.1. As linhas de curvatura de uma superfície no espaço Minkowski são invariantes pela inversão de Möbius.

Demonstração: Análogo ao Teorema 6.1.1. ■

Corolário 6.2.1. O LPL e o LD de uma superfície no espaço Minkowski são invariantes pela inversão de Möbius.

Demonstração: A invariância do LPL é uma consequência imediata do Teorema 6.2.1, enquanto que para o LD esse fato segue de (6.1). ■

Exemplo 6.2.2. Sejam S a esfera euclidiana de raio 1 centrada no ponto $(2, 0, 0)$ e $\tilde{S} = i_M(S)$. Então, \tilde{S} é uma superfície fechada e não convexa, ver Figura 42, dada pela equação

$$3(x^2 + y^2 - z^2)^2 + (1 - 4x)(x^2 + y^2) + (4x + 1)z^2 = 0.$$

O Exemplo 6.2.2 mostra que ao contrário das linhas de curvatura, LD e LPL , o conjunto parabólico não é preservado pela inversão de Möbius. Entretanto, é possível mostrar que dado um ovaloide S , existe uma translação T adequada para S , de modo que a inversão de Möbius de S transladada por T é um ovaloide.

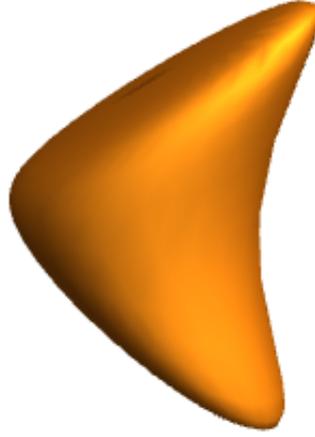


Figura 42 – Inversão de Möbius da esfera Euclidiana S no espaço Minkowski.

6.2.1 Inversão de Möbius de esferas Euclidianas

Seja $S \subset \mathbb{R}_1^3$ a esfera euclidiana definida pela equação

$$S : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Aplicando a inversão de Möbius em S , obtêm-se uma superfície $\tilde{S} = i_M(S)$. Através de uma homotetia é possível considerar $r = 1$.

Teorema 6.2.2. A inversão de Möbius de uma superfície no espaço Minkowski comuta com a rotação em torno do eixo z e com a reflexão com relação ao plano xy .

Demonstração: Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $R : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma rotação em torno do eixo z dada por

$$R(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z).$$

Segue que $R(i_M(M)) = i_M(R(M))$. De fato, se $(x, y, z) \in M \setminus LC$, então

$$\begin{aligned} R(i_M(x, y, z)) &= R\left(\frac{x}{x^2+y^2-z^2}, \frac{y}{x^2+y^2-z^2}, \frac{z}{x^2+y^2-z^2}\right) \\ &= \left(\frac{x \cos \theta}{x^2+y^2-z^2} + \frac{y \sin \theta}{x^2+y^2-z^2}, \frac{-x \sin \theta}{x^2+y^2-z^2} + \frac{y \cos \theta}{x^2+y^2-z^2}, \frac{z}{x^2+y^2-z^2}\right) \\ &= \left(\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{x^2+y^2-z^2}, \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{x^2+y^2-z^2}, \frac{z}{x^2+y^2-z^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2-z^2} (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z) \\ &= \frac{1}{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 - z^2} (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z) \\ &= i_M(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z) \\ &= i_M(R(x, y, z)). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $R : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ é a reflexão com relação ao plano xy , isto é, $R(x, y, z) = (x, y, -z)$, então $R(i_M(M)) = i_M(R(M))$. Novamente, seja $(x, y, z) \in M \setminus LC$, note que

$$\begin{aligned} R(i_M(x, y, z)) &= R\left(\frac{x}{x^2+y^2-z^2}, \frac{y}{x^2+y^2-z^2}, \frac{z}{x^2+y^2-z^2}\right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2-z^2}, \frac{y}{x^2+y^2-z^2}, -\frac{z}{x^2+y^2-z^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2-z^2} (x, y, -z) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2-(-z)^2} (x, y, -z) \\ &= i_M(x, y, -z) \\ &= i_M(R(x, y, z)). \end{aligned}$$

■

Utilizando o Teorema 6.2.2, suponha sem perda de generalidade que $a \geq 0$, $b = 0$ e $c \geq 0$. Seja $S_{(a,c)}$ a esfera dada por

$$S_{(a,c)} : (x-a)^2 + y^2 + (z-c)^2 = 1$$

e $\tilde{S}_{(a,c)} = i_M(S_{(a,c)})$, com $a \geq 0$ e $c \geq 0$. Como $S_{(a,c)}$ é uma superfície compacta, $\tilde{S}_{(a,c)}$ possui propriedades especiais.

Proposição 6.2.1. Seja M uma superfície compacta no espaço Minkowski. Valem as seguintes propriedades:

- (1) $i_M(M) = \left\{ \frac{p}{\langle p, p \rangle} : p \in M \setminus LC \right\}$;
- (2) $i_M(M)$ não intersecta o LC .

Demonstração:

- (1) Sejam $A = \left\{ \frac{p}{\langle p, p \rangle} : p \in M \setminus LC \right\}$ e $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência em A que converge para algum $q \in \mathbb{R}_1^3$. Como $q_i \in A$, existe $p_i \in M \setminus LC$ tal que

$$q_i = \frac{p_i}{\langle p_i, p_i \rangle}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sendo M compacta, existe uma subsequência $\{p_{i_k}\}$ de $\{p_i\}$ que converge para algum $p \in M$. Se $p \in LC$, então $\|p_{i_k}\| \rightarrow 0$ e $\|q_{i_k}\| \rightarrow \infty$, o que contradiz a convergência de $\{q_i\}$. Logo $p \in M \setminus LC$ e

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} q_{i_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{i_k}}{\langle p_{i_k}, p_{i_k} \rangle} = \frac{p}{\langle p, p \rangle} \in A.$$

Portanto, A é fechado e $i_M(M) = cl(A) = A$.

(2) Suponha que $q \in i_M(M) \cap LC$. Então, do item (1) desta proposição, existe $p \in M \setminus LC$ tal que $q = i_M(p)$. Logo,

$$0 = \langle q, q \rangle = \left\langle \frac{p}{\langle p, p \rangle}, \frac{p}{\langle p, p \rangle} \right\rangle = \frac{1}{\langle p, p \rangle}.$$

O que não ocorre, pois $\langle p, p \rangle < \infty$. Portanto, $i_M(M)$ não intersecta LC . ■

Como i_M não está definida em $S_{(a,c)} \cap LC$, tais pontos de interseção podem resultar em características importantes de $\tilde{S}_{(a,c)}$, como mostra o Teorema 6.2.3.

Teorema 6.2.3. Seja L a interseção da esfera $S_{(a,c)}$ com o cone de luz LC . Então $\tilde{S}_{(a,c)}$ é limitada se, e somente se, $L = \emptyset$.

Demonstração: Dado $p \in L$, existe uma sequência $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $S_{(a,c)} \setminus LC$ com $p_i \rightarrow p$. Logo,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|p_i\| = \|p\| = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \|i_M(p_i)\| = \infty$$

e $\tilde{S}_{(a,c)}$ é ilimitada.

Para recíproca, se $L = \emptyset$, então

$$\alpha = \sup \left\{ \frac{1}{|\langle p, p \rangle|}, p \in S_{(a,c)} \right\}$$

é finito e $\tilde{S}_{(a,c)}$ está contida na bola centrada na origem e de raio $\alpha\beta$, onde $\beta = \sup\{\|p\|, p \in S\}$ também é finito porque $S_{(a,c)}$ é compacta. ■

Teorema 6.2.4. Seja L a interseção da esfera $S_{(a,c)}$ com o cone de luz LC . As possíveis configurações de L são dadas na Figura 43 e dependem apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas retas $c = a \pm \sqrt{2}$, $c = -a \pm \sqrt{2}$ e pelo círculo $a^2 + c^2 = 1$.

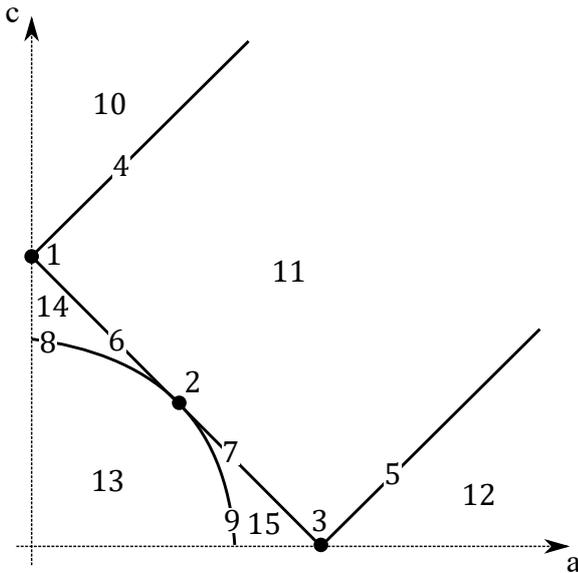
Demonstração: Sejam $U = (\varepsilon_0, \varepsilon_0 + 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$, para algum $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a parametrização local de $S_{(a,c)}$ dada por $\varphi(u, v) = (\cos u \sin v + a, \sin u \sin v, \cos v + c)$. Segue que

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) \in L &\Leftrightarrow \langle \varphi(u, v), \varphi(u, v) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos u \sin v + a)^2 + (\sin u \sin v)^2 - (\cos v + c)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -a^2 + c^2 + 2c \cos v + \cos 2v - 2a \cos u \sin v = 0 \\ &\Leftrightarrow l(u, v) = 0, \end{aligned}$$

onde

$$l(u, v) = -a^2 + c^2 + 2c \cos v + \cos 2v - 2a \cos u \sin v \quad (6.4)$$

Assim, $L = (\varphi \circ l^{-1})(0)$. Como $l_u(u, v) = 2a \sin u \sin v$ e $l_v(u, v) = -2c \sin v - 2 \sin 2v - 2a \cos u \cos v$, segue que (u, v) é uma singularidade de l somente se $u \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, pois $\sin v \neq 0$ em U .



01		04		10	Vazio
02		05		11	
03		06		12	Vazio
		07		13	
		08		14	
		09		15	

Figura 43 – Partição do plano ac que determina as configurações de $S_{(a,c)} \cap LC$, tais configurações são representadas em vermelho.

Caso 1: Para k par, $l(k\pi, v) = 0$ e $l_v(k\pi, v) = 0$ se, e somente se,

$$\begin{cases} -a^2 + c^2 + 2c \cos v + \cos 2v - 2a \sin v = 0, \\ c \sin v + \sin 2v + a \cos v = 0. \end{cases}$$

Isolando c na segunda equação e substituindo na primeira, segue que

$$\cos 2v \left(\frac{a}{\sin v} + 1 \right)^2 = 0.$$

Logo, l é singular em $(k\pi, v)$ somente se $v \in \{\pi/4, 3\pi/4, \arcsin(-a)\}$.

O ponto $(k\pi, \pi/4)$ é uma singularidade apenas se $c = -a - \sqrt{2} < 0$, o que não ocorre pois $c \geq 0$. Por outro lado, $(k\pi, 3\pi/4)$ é um ponto singular de l quando $c = a + \sqrt{2}$. Nesse caso, $(k\pi, 3\pi/4)$ é uma singularidade A_1^+ de l . Por fim, $-\sin v < 0$ pois $v \in (0, \pi)$. Então o caso $v = \arcsin(-a)$ não ocorre porque $a \geq 0$.

Caso 2: Para k ímpar, $l(k\pi, v) = 0$ e $l_v(k\pi, v) = 0$ se, e somente se,

$$\begin{cases} -a^2 + c^2 + 2c \cos v + \cos 2v + 2a \sin v = 0, \\ c \sin v + \sin 2v - a \cos v = 0. \end{cases}$$

Isolando c na segunda equação e substituindo na primeira, segue que

$$\cos 2v \left(\frac{a}{\sin v} - 1 \right)^2 = 0.$$

Logo, l é singular em $(k\pi, v)$ somente se $v \in \{\pi/4, 3\pi/4, \arcsin(a)\}$.

O ponto $(k\pi, \pi/4)$ é um ponto singular de l se $c = a - \sqrt{2}$, quando isso ocorrer o ponto é uma singularidade A_1^+ de l . Por outro lado, $(k\pi, 3\pi/4)$ é uma singularidade de l se

$c = -a + \sqrt{2}$. Nesse caso, a singularidade de l em $(k\pi, 3\pi/4)$ é do tipo A_1^- se $a < 1/\sqrt{2}$, ou A_1^+ se $a > 1/\sqrt{2}$ ou uma cúspide se $a = 1/\sqrt{2}$.

No último caso, $a = \sin v$. Disso segue que $c = -\cos v$ e $a^2 + c^2 = 1$. Quando $c < 1/\sqrt{2}$, o ponto $(k\pi, \arccos(-c))$ é uma singularidade de l do tipo A_1^- . Se $1/\sqrt{2} < c < 1$, então este ponto é uma singularidade A_1^+ de l . Por fim, para $c = 1/\sqrt{2}$, existe uma singularidade de cúspide em l e com $c = 1$ segue que $v = \pi$, o que não ocorre pois $v \neq \pi$.

Para estudar os polos $(a, 0, c \pm 1)$, que não pertencem a imagem de φ , utiliza-se a parametrização local $\varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de $S_{(a,c)}$ dada por $\varphi_2(u, v) = (\cos v + a, \sin u \sin v, \cos u \sin v + c)$, pois $\varphi_2(0, \pi/2) = (a, 0, c + 1)$ e $\varphi_2(\pi, \pi/2) = (a, 0, c - 1)$. Utilizando φ_2 para calcular a função l , os polos são singularidades apenas se $a = 0$ e $c = 1$. Assim, a partição do plano ac dada pelas retas $c = a \pm \sqrt{2}$, $c = -a + \sqrt{2}$ e pela circunferência $a^2 + c^2 = 1$ separa as possíveis configurações de $l = 0$, como na Figura 43.

Portanto, L é vazio nos abertos 10 e 12. Em 11, L é uma curva regular fechada. Por outro lado, L é formado por duas curvas regulares fechadas disjuntas nos abertos 13, 14 e 15 do plano ac . Nas retas 4 e 5, L é composto por um único ponto. Nas curvas 6 e 9, L é uma curva fechada com uma auto-interseção. L é a união de uma curva fechada regular e um ponto em nas curvas 7 e 8. Por fim, nos pontos 1, 2 e 3, L é uma curva fechada regular, uma curva fechada com uma cúspide ou a união de dois pontos distintos, respectivamente. ■

Corolário 6.2.2. $\tilde{S}_{(a,c)}$ possui no máximo 3 componentes conexas que são homeomorfas ao plano ou a esfera $S_{(a,c)}$.

Demonstração: Sejam R_1, R_2 e R_3 como em (6.3). Seja L a interseção da esfera $S_{(a,c)}$ com o cone de luz LC . De acordo com o Teorema 6.2.4, L divide $S_{(a,c)}$ em no máximo 3 componentes conexas. Cada uma dessas componentes está inteiramente contida em algum R_i . Logo, $\tilde{S}_{(a,c)}$ possui no máximo 3 componentes conexas.

Nas regiões 10 e 12 da Figura 43, $S_{(a,c)} \subset R_i$, para $i = 1$ ou $i = 2$, e então $\tilde{S}_{(a,c)}$ é homeomorfa a $S_{(a,c)}$. Nos demais casos, as componentes de $S_{(a,c)} \setminus L$ são homeomorfas a abertos do plano e, portanto, as componentes conexas de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são homeomorfas ao plano. ■

Corolário 6.2.3. $\tilde{S}_{(a,c)}$ é uma superfície fechada se, e somente se, $(c - a)^2 > 2$.

Uma pergunta natural é a possibilidade de $\tilde{S}_{(a,c)}$ ser uma superfície singular para algum valor dos parâmetros (a, c) . Entretanto isso nunca ocorre, como mostra o Teorema 6.2.5.

Teorema 6.2.5. A superfície $\tilde{S}_{(a,c)}$ é regular para todos os parâmetros (a, c) .

Demonstração: Como $S_{(a,c)}$ é compacto, o item (1) Proposição 6.2.1 garante que

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \tilde{S}_{(a,c)} &\Leftrightarrow i_M(x,y,z) \in S_{(a,c)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2-z^2} \in S_{(a,c)} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x^2+y^2-z^2} - a\right)^2 + \frac{y^2}{(x^2+y^2-z^2)^2} + \left(\frac{z}{x^2+y^2-z^2} - c\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Do item (2) da Proposição 6.2.1, segue que $x^2 + y^2 - z^2 \neq 0$ para todo $(x,y,z) \in \tilde{S}_{(a,c)}$. Logo, os pontos de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são os únicos em $\mathbb{R}_1^3 \setminus LC$ que satisfazem $P(x,y,z) = 0$, com $P(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + cz)(x^2 + y^2 - z^2) + (a^2 + c^2 - 1)(x^2 + y^2 - z^2)^2$, sendo que o único ponto do LC que pertence a $P^{-1}(0)$ é a origem, ou seja,

$$(x,y,z) \in \tilde{S}_{(a,c)} \Leftrightarrow (x,y,z) \in P^{-1}(0) \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Assim, as singularidades de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são as singularidades de $P = 0$ diferentes de $(0,0,0)$, mas a única singularidade de P é $(0,0,0)$. Portanto, $\tilde{S}_{(a,c)}$ é uma superfície suave. ■

Os resultados obtidos até o momento mostram que $\tilde{S}_{(a,c)}$ é uma superfície suave, que pode possuir até três componentes conexas, sendo que cada uma delas é homeomorfa a um plano ou a uma esfera. Entretanto, ao utilizar a primeira e a segunda formas fundamentais, é possível obter propriedades geométricas de $\tilde{S}_{(a,c)}$, tais como o LD , linhas de curvatura e conjunto parabólico.

Teorema 6.2.6. As possíveis configurações do LD de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são dadas na Figura 44 e dependem apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas retas $c = a \pm 1$, $c = -a + 1$ e $c = a$.

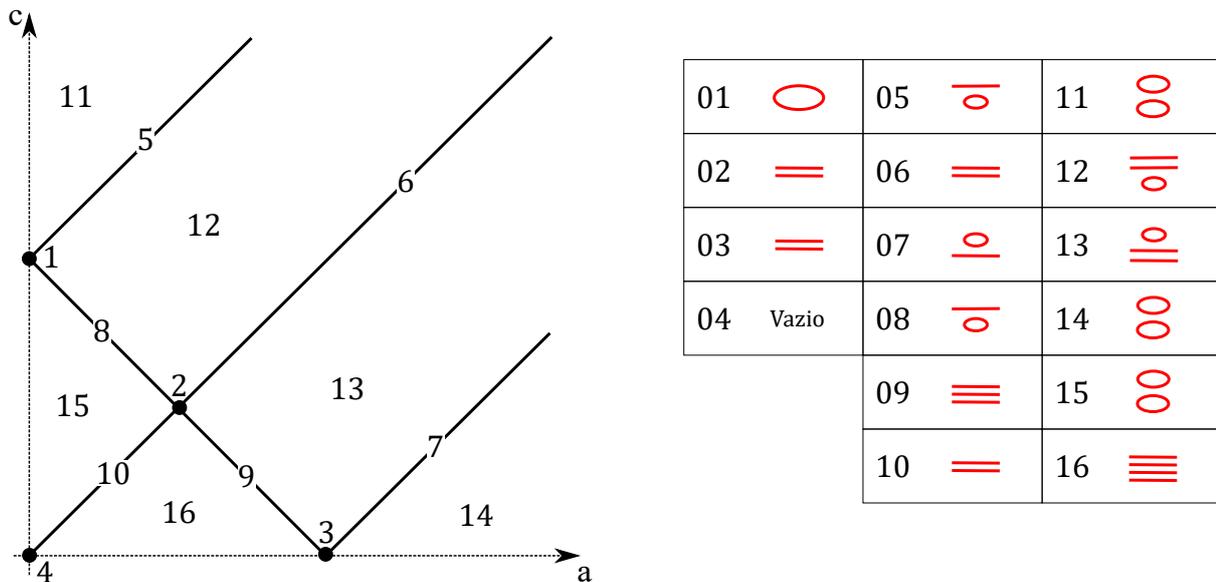


Figura 44 – Partição do plano ac que determina as configurações do LD de $\tilde{S}_{(a,c)}$, tais configurações são representadas em vermelho.

Demonstração: O LD de $S_{(a,c)}$ é dado pela união de duas curvas disjuntas, $\gamma_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow S_{(a,c)}$, com

$$\gamma_{\pm}(t) = \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, c \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Logo, $\gamma_{\pm}(t) \in LC$ se, e somente se, $\cos t = \Delta$, com $\Delta = (c^2 - a^2 \pm \sqrt{2}c)/(\sqrt{2}a)$. Assim, existem zero, um ou dois pontos de interseção entre γ_{\pm} e o LC quando $|\Delta|$ é maior, igual ou menor que 1, respectivamente.

A igualdade $|\Delta| = 1$ define uma partição do plano ac , ver Figura 44, dada pelas retas $(a+c)^2 = 2$, $(a-c)^2 = 2$ ou $a^2 = c^2$. Nas regiões 11, 14 e 15 γ_+ e γ_- não intersectam o cone de luz. No aberto 12 (13), γ_- (γ_+) intersecta LC em dois pontos e γ_+ (γ_-) não o intersecta. Na região 16, ambas as curvas intersectam o cone de luz em dois pontos distintos. Nas retas 6 e 10 e nos pontos 2 e 3, cada uma das curvas tangencia o cone em um único ponto. Na reta 7 (5 e 8), γ_+ (γ_-) tangencia o cone de luz em um único ponto e γ_- (γ_+) não intersecta o LC . Na curva 9, γ_+ intersecta o cone de luz em dois pontos, enquanto γ_- apenas tangencia em um único ponto. Em 4, $\gamma_{\pm} \subset LC$. Por fim, no ponto 1, $\gamma_- \subset LC$ e γ_+ não intersecta o cone de luz.

A partir dessa análise e do Corolário 6.2.1, é possível obter informações sobre a estrutura do LD de $\tilde{S}_{(a,c)}$. Nas regiões 11, 14 e 15, o LD de $\tilde{S}_{(a,c)}$ é formado por duas curvas regulares fechadas. No aberto 16, são quatro curvas regulares ilimitadas. Nas regiões 12 e 13, o LD de $\tilde{S}_{(a,c)}$ é uma curva regular fechada e duas curvas regulares ilimitadas. Nas curvas 5, 7 e 8, o LD é uma curva regular fechada e uma curva regular ilimitada. Em 2, 3, 6 e 10, o LD de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são duas curvas regulares ilimitadas. Na curva 9, o LD é composto por 3 curvas regulares ilimitadas. Nos pontos 1 e 4, o LD é uma curva regular fechada e vazio, respectivamente. ■

Teorema 6.2.7. A superfície $\tilde{S}_{(a,c)}$ pode ter 0, 1 ou 2 pontos umbílicos, dependendo apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas retas $c = \pm a \pm 1$, conforme a Figura 45.

Demonstração: Os pontos umbílicos de $S_{(a,c)}$ são $P_{\pm} = (a, 0, c \pm 1)$. Segue do Teorema 6.2.1 que $i_M(P_{\pm})$ é um ponto umbílico de $\tilde{S}_{(a,c)}$ se, e somente se, $P_{\pm} \notin LC$. Note que $P_+ \in LC$ se, e somente se, $c = \pm a - 1$. Por outro lado, $P_- \in LC$ se, e somente se, $c = \pm a + 1$.

Assim, o plano ac é decomposto como na Figura 45. No ponto 2 a superfície $\tilde{S}_{(a,c)}$ não tem pontos umbílicos. Em 1, 3, 4 e 5, $\tilde{S}_{(a,c)}$ tem um ponto umbílico. Por fim, $\tilde{S}_{(a,c)}$ tem dois pontos umbílicos nas regiões abertas 6, 7, 8 e 9. ■

Teorema 6.2.8. As linhas de curvatura de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são obtidas pela interseção desta superfície com

- (1) Os planos $y = 0$ e $z = 0$;
- (2) A família de planos hiperbólicos

$$x^2 + y^2 - (z - t)^2 = -t^2, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

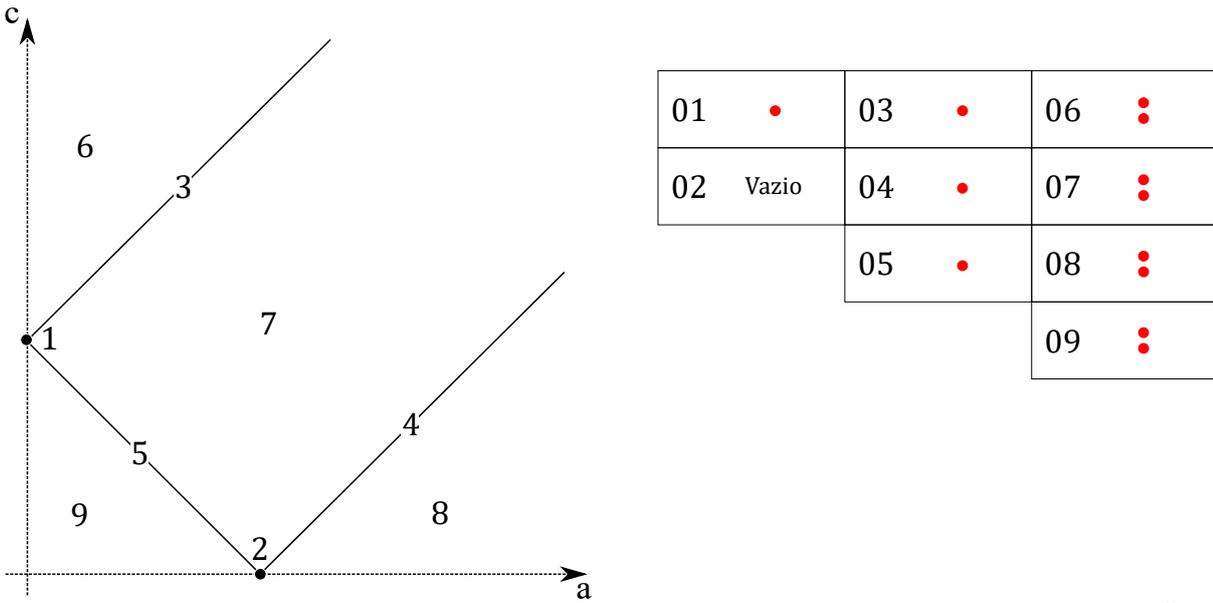


Figura 45 – Partição do espaço de parâmetros de acordo com a quantidade de pontos umbílicos de $\tilde{S}_{(a,c)}$. Os pontos vermelho em frente ao nome da região indicam quantos pontos umbílicos $\tilde{S}_{(a,c)}$ possui.

(3) Se $a \neq 0$, a família de esferas de Sitter

$$\left(x + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2a\alpha}\right)^2 - z^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4a^2\alpha^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0;$$

(4) Se $a = 0$, o feixe planos

$$\alpha x + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: As linhas de curvatura de $S_{(a,c)}$ são as curvas dadas pela interseção de $S_{(a,c)}$ com os planos da forma $P_d : z = d$ e $P_{\alpha,\beta} : \alpha x + \beta y + \alpha a = 0$, para $d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. De acordo com o Teorema 6.2.1, as linhas de curvatura são preservadas pela inversão de Möbius. Logo, as linhas de curvatura de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são as interseções dessa superfície com a inversão de Möbius dos planos P_d e $P_{\alpha,\beta}$.

Definindo $\tilde{P}_d = i_M(P_d)$ e $\tilde{P}_{\alpha,\beta} = i_M(P_{\alpha,\beta})$, segue do Exemplo 6.2.1 que

$$\tilde{P}_d : \begin{cases} z = 0 & , \quad d = 0 \quad (\text{Plano}) \\ x^2 + y^2 - \left(z - \frac{1}{2d}\right)^2 = -\frac{1}{4d^2} & , \quad d \neq 0 \quad (\text{Plano Hiperbólico}) \end{cases}$$

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 & , \quad a = 0 \text{ ou } \alpha = 0 \quad (\text{Plano}) \\ \left(x + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2a\alpha}\right)^2 - z^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4a^2\alpha^2} & , \quad a \neq 0 \text{ e } \alpha \neq 0. \quad (\text{Esfera de Sitter}) \end{cases}$$

Logo, as linhas de curvatura de $\tilde{S}_{(a,c)}$ são dadas pela interseção dessa superfície com as esferas de Sitter $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$, com os planos hiperbólicos \tilde{P}_d e com os planos $\tilde{P}_0, \tilde{P}_{0,\beta}$ e, caso $a = 0$, $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$. Por fim, note que o LPL de $S_{(a,c)}$ é vazio, logo o LPL de $\tilde{S}_{(a,c)}$ também será vazio. ■

Ao contrário do LD e das linhas de curvatura, o conjunto parabólico de uma superfície não é preservado pela inversão de Möbius no espaço Minkowski, como no Exemplo 6.2.2. Assim, embora $S_{(a,c)}$ seja sempre uma superfície sem pontos parabólicos, o conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$ é não vazio para alguns valores de (a, c) .

Teorema 6.2.9. A configuração do conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$ depende apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas hipérbolas $c^2 - a^2 \pm 4c + 3 = 0$ e $a^2 - c^2 \pm 4a + 3 = 0$, retas $(a \pm c)^2 = 2$ e $a = \pm c$, circunferência $a^2 + c^2 = 1$.

Como foi dito inicialmente, é possível supor sem perda de generalidade que $a \geq 0$ e $c \geq 0$. Por isso, no Teorema 6.2.9, a partição é considerada apenas no primeiro quadrante do plano ac . A prova do Teorema 6.2.9 é apresentada no Apêndice B.

6.2.2 Inversão de Möbius de Ovaloides

Os resultados da seção anterior mostram que o conjunto parabólico não é preservado pela inversão de Möbius. Assim, a inversão de uma superfície fechada e convexa pode não ser convexa. Entretanto, no caso de algumas superfícies especiais, chamadas ovaloides, é possível obter inversões cujo resultado continue sendo uma superfície fechada e convexa.

Definição 6.2.1. Uma superfície fechada S é um ovaloide se tem um contato A_1^+ com o plano tangente $T_p S$, para todo $p \in S$.

Observação 6.2.1. A definição de ovaloide independe da métrica utilizada.

Exemplo 6.2.3. O elipsoide de centro $p = (a, b, c)$ e raios r_1, r_2 e r_3 , dado por

$$\frac{(x-a)^2}{r_1^2} + \frac{(y-b)^2}{r_2^2} + \frac{(z-c)^2}{r_3^2} = 1,$$

é um ovaloide, ver Figura 46. Em particular, as esferas Euclidianas são ovaloides.

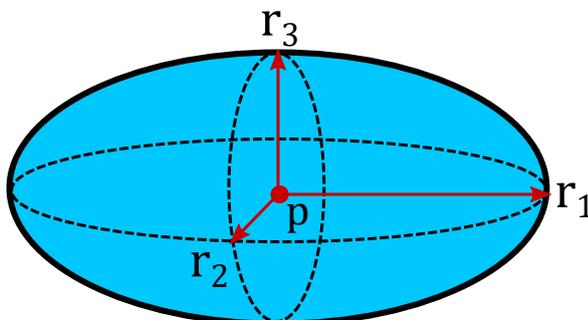


Figura 46 – Elipsoide com centro em $p = (a, b, c)$ e raios r_1, r_2 e r_3 .

No decorrer da seção, a curvatura Gaussiana de uma superfície com a métrica Euclidiana é denominada curvatura Gaussiana Euclidiana. Esta curvatura é útil, pois o contato do plano

tangente com a superfície está relacionado com o sinal da curvatura Gaussiana Euclidiana. Segue da Proposição 6.4 de (IZUMIYA *et al.*, 2016) que um ponto p de uma superfície S possui curvatura Gaussiana Euclidiana estritamente positiva se, e somente se, o contato entre o plano tangente $T_p S$ e a superfície S em p é A_1^+ , para todo $p \in S$.

Teorema 6.2.10. Seja S uma superfície fechada. Então S é um ovaloide se, e somente se, seu conjunto parabólico é vazio.

Demonstração: Seja S um ovaloide e $p \in S$, então o plano tangente $T_p S$ tem contato A_1^+ com a superfície. Logo, a curvatura Gaussiana Euclidiana de S em p é estritamente positiva. Portanto, p não pertence ao conjunto parabólico.

Por outro lado, suponha que o conjunto parabólico de S é vazio. Como S é fechado, existe $p_0 \in S$ tal que a curvatura Gaussiana Euclidiana em p_0 é estritamente positiva. Como o conjunto parabólico é vazio, a curvatura Gaussiana Euclidiana é estritamente positiva em toda superfície S . Logo, o plano tangente $T_p S$ tem um contato A_1^+ com a superfície S em todo ponto $p \in S$. ■

Corolário 6.2.4. $\tilde{S}_{(a,c)}$ é um ovaloide se, e somente se, $a > 2 + \sqrt{c^2 + 1}$ ou $c > 2 + \sqrt{a^2 + 1}$.

Demonstração: Do Corolário 6.2.3 segue que $\tilde{S}_{(a,c)}$ é fechada se, e somente se, $(c - a)^2 > 2$. Do Teorema 6.2.9, o conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$ é vazio se $a > 2 + \sqrt{c^2 + 1}$ ou $c > 2 + \sqrt{a^2 + 1}$. Logo, nessas condições, o Teorema 6.2.10 garante que a superfície $\tilde{S}_{(a,c)}$ é um ovaloide. ■

Teorema 6.2.11. Dado um ovaloide $S \subset \mathbb{R}_1^3$, existe uma translação $T : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que $i_M(T(S))$ é um ovaloide, isto é, a inversão de Möbius em \mathbb{R}_1^3 da superfície S transladada por T é um ovaloide.

Demonstração: Seja $N_e : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss de S com a métrica euclidiana usual, apontando para o interior de S . Dados $p \in S$ e $r > 0$, defina $S_p(r)$ como sendo a esfera euclidiana de centro $p + rN_e(p)$ e raio r . Assim, $S_p(r)$ e S são tangentes em p para qualquer $r > 0$.

Afirmção: Existe $R > 0$ tal que $S \setminus \{p\}$ está contida no interior de $S_p(R)$, para todo $p \in S$.

Suponha, aplicando uma homotetia, que $R = 1$. Segue do Corolário 6.2.4 que existe uma região ilimitada do espaço de parâmetros onde a inversão de Möbius em \mathbb{R}_1^3 das esferas euclidianas unitárias são ovaloides. Como esta região é ilimitada, existe uma translação $T : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que a inversão de Möbius em \mathbb{R}_1^3 de $T(S_p(R))$ é um ovaloide, para todo $p \in S$.

Para todo $p \in S$, segue do Teorema 6.2.3 que $T(S_p(R))$ não intersecta o LC , pois a inversão de Möbius de $T(S_p(R))$ é limitada. Como $T(p) \in T(S_p(R))$, então $T(p) \notin LC$ e $T(S)$ não intersecta o LC . Assim, $i_M(T(S))$ é difeomorfo a S , portanto é uma superfície fechada.

Dado $p \in S$, i_M é um difeomorfismo entre o interior de $T(S_p(R))$ e o interior de $i_M(T(S_p(R)))$ porque $T(S_p(R)) \cap LC = \emptyset$. Logo, $i_M(T(S \setminus \{p\}))$ está contida no interior de $i_M(T(S_p(R)))$ e

$i_M(T(S))$ é tangente a $i_M(T(S_p(R)))$ em $i_M(T(p))$. Mais ainda, o contato entre $i_M(T(S_p(R)))$ e seu plano tangente em $i_M(T(p))$ é um A_1^+ , pois $i_M(T(S_p(R)))$ é um ovaloide. Logo, o contato de $i_M(T(S))$ e seu plano tangente em $i_M(T(p))$ é A_1^+ . Como isso vale para todo $p \in S$, segue que $i_M(T(S))$ é um ovaloide.

Demonstração da Afirmação: Sejam $p \in S$ e $r > 0$. $S \setminus \{p\}$ está contida no interior de $S_p(r)$ se, e somente se, $\|q - (p + rN_e(p))\|_e < r$, para todo $q \in S \setminus \{p\}$, onde $\|\cdot\|_e$ denota a norma euclidiana usual. Dado $q \in S \setminus \{p\}$, sejam $d(q) = \|q - p\|_e$ e $\theta(q) \in [0, \pi]$ o ângulo entre os vetores $q - p$ e $N_e(p)$.

Como S é um ovaloide, existe uma vizinhança U de p em S tal que a interseção de U com T_pS (considerando T_pS como o plano que passa por p e não como um espaço vetorial) é apenas p , pois o contato de S com T_pS é A_1^+ . Assim, em U nenhum ponto do interior de S pertence ao T_pS . Suponha que algum $q \in S \setminus \{p\}$ pertença a T_pS . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, os pontos $(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q$ pertencem a U e a T_pS , pois o segmento $[p, q]$ está contido em T_pS . Logo, $[p, q]$ não está contido no interior de S , o que contradiz a convexidade de S . Portanto $S \cap T_pS = \{p\}$. Assim, $\theta(q) \in [0, \pi/2)$.

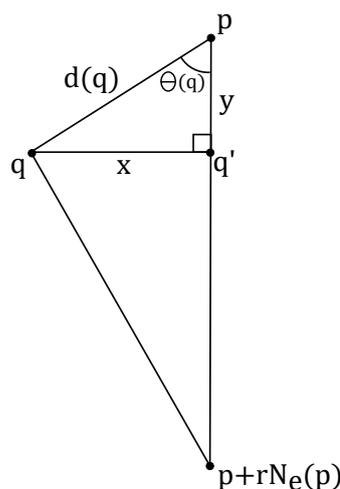


Figura 47 – Esquema para o cálculo da distância entre $p + rN_e(p)$ e os pontos p e q .

Seja q' a projeção de q na reta que passa por p com direção $N_e(p)$, ver Figura 47. Denote por x e y a distância entre q' e os pontos q e p , respectivamente. Assim, $x = d(q) \sin \theta(q)$ e $y = d(q) \cos \theta(q)$. Como a distância entre q' e $p + rN_e(p)$ é $r - y$, vale que

$$\|q - (p + rN_e(p))\|^2 = x^2 + (r - y)^2 = r^2 - 2d(q)r \cos \theta(q) + d(q)^2. \quad (6.5)$$

Se

$$r > \frac{d(q)^2}{2 \cos \theta(q)},$$

então $d^2 - 2d(q)r \cos \theta(q) < 0$ e segue de (6.5) que $\|q - (p + rN_e(p))\|^2 < r^2$. Como S é compacto, tome $d_{\max} = \max\{d(q) : q \in S\} < \infty$ e $c = \min\{\cos \theta(q) : q \in S\} > 0$, pois $\theta(q) \in [0, \pi/2)$.

Definindo $R(p) = d_{max}^2/2c$, para todo $r > R(p)$ o conjunto $S \setminus \{p\}$ está contida no interior de $S_p(r)$.

Por fim, seja $R = \max\{R(p) : p \in S\} + 1$, que existe e é finito, pois S é compacto. Logo, $R > R(p)$ e segue que $S \setminus \{p\}$ está contida no interior de $S_p(R)$, para todo p . ■

PONTOS UMBÍLICOS EM SUPERFÍCIES FECHADAS

Este capítulo contém algumas propriedades semi-globais de superfícies no espaço Minkowski, isto é, algumas propriedades que não são locais, mas também não dependem da superfície globalmente. Mais precisamente, são estudadas componentes conexas das regiões Riemanniana e Lorentziana de superfícies no espaço Minkowski. Este estudo foi iniciado com a intenção de generalizar o teorema principal de (TARI, 2013) para superfícies em \mathbb{R}_1^3 que não são convexas.

7.1 Conjectura de Carathéodory

“Toda superfície fechada e convexa em \mathbb{R}^3 possui no mínimo dois pontos umbílicos.”

A afirmação acima é conhecida como Conjectura de Carathéodory. Não se sabe ao certo a origem desta conjectura, mas ela apareceu pela primeira vez nos artigos de Hamburger e foi atribuída ao matemático Constantin Carathéodory em (HAMBURGER, 1924). Esta conjectura estipula uma cota mínima de pontos umbílicos para certas superfícies.

Uma das maneiras de se atacar este problema é estudando o índice de singularidades. O índice de um ponto umbílico isolado é um invariante topológico dado por um semi-inteiro, ou seja, tem a forma $n/2$, onde n é um número inteiro. Loewner conjecturou que o índice de um ponto umbílico isolado é no máximo 1. Como toda superfície fechada e convexa possui Característica de Euler igual a 2, pelo Teorema de Poincaré-Hopf a soma dos índices de todos os pontos umbílicos isolados deve ser igual a 2. Deste modo, uma resposta afirmativa para a Conjectura de Loewner fornece uma resposta afirmativa para a Conjectura de Carathéodory.

O índice de um ponto umbílico isolado, indicado por $l(p)$, pode ser calculado, dentre

outras maneiras, pela fórmula do índice de Poincaré (DUMORTIER; LLIBRE; ARTÉS, 2006)

$$l(p) = 1 + \frac{E - H}{2},$$

onde E é o número de setores elípticos e H é o número de setores hiperbólicos das linhas de curvatura numa vizinhança de um ponto umbílico isolado. Entretanto, a Conjectura dos Setores Elípticos, ver (SMYTH, 2005) por exemplo, diz que um ponto umbílico isolado não admite setor elíptico para as linhas de curvatura. Logo, uma resposta afirmativa para a Conjectura dos Setores Elípticos fornece uma resposta afirmativa para a Conjectura de Loewner, que por sua vez, fornece uma resposta afirmativa para a Conjectura de Carathéodory.

Consta na literatura, como em (GARCIA; SOTOMAYOR, 2009), que genericamente o índice de um ponto umbílico isolado p é $\pm 1/2$. Logo, a Conjectura de Carathéodory vale genericamente. O caso em que o valor absoluto do índice em p é maior do que ou igual a 1 pode ocorrer quando p é um ponto crítico da curvatura média (H), da curvatura Gaussiana (K) e ainda o terceiro jato de $H^2 - K$ deve ser nulo (SMYTH; XAVIER, 1992).

Muitos matemáticos sugeriram provas para tal conjectura. Os primeiros foram Hamburger (HAMBURGER, 1940) e Bol (BOL, 1943), em 1940 e 1944, respectivamente. Posteriormente, Klotz (KLOTZ, 1959), Titus (TITUS, 1973), Scherbel (SCHERBEL, 1995) e Ivanov (IVANOV, 2002) também trabalharam com esta conjectura, no intuito de demonstrá-la. Todos estes trabalhos visavam provar a Conjectura de Carathéodory para superfícies analíticas utilizando a Conjectura de Loewner. Entretanto, à medida que os anos passam, todas essas provas parecem não ter convencido a comunidade matemática. Em 1999, Sotomayor e Mello (SOTOMAYOR; MELLO, 1999), assumindo que a conjectura é verdadeira para superfícies analíticas, demonstraram que ela também é válida para superfícies de classe C^3 . Por fim, Guilfoyle e Klingenberg (GUILFOYLE; KLINGENBERG, 2008) elaboraram uma prova para a conjectura, porém o trabalho não foi publicado.

Mais recentemente, Ghomi e Howard apresentam uma abordagem alternativa para a Conjectura de Carathéodory, onde os pontos umbílicos em superfícies fechadas e convexas são relacionados com pontos umbílicos no gráfico de algumas funções especiais, denominadas funções assintoticamente constantes, para mais detalhes ver o Apêndice A.

7.2 Reformulando a Conjectura

A versão para o espaço Minkowski da Conjectura de Carathéodory foi demonstrada por Tari em (TARI, 2013).

Teorema 7.2.1. (Teorema de Tari) (TARI, 2013) Toda superfície fechada e convexa em \mathbb{R}_1^3 possui no mínimo dois pontos umbílicos.

A prova é feita verificando que toda superfície fechada e convexa em \mathbb{R}_1^3 possui duas componentes conexas da região Riemanniana homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 . Se a fronteira destas regiões Riemannianas, que pertencem ao LD , forem singulares, então tal singularidade é um ponto umbílico lightlike. Caso contrário, se a fronteira for uma curva regular, então existe um ponto umbílico na respectiva região Riemanniana.

Para provar a existência do ponto umbílico na região Riemanniana é utilizado a convexidade da superfície. De fato, dada uma superfície M fechada e convexa em \mathbb{R}_1^3 , o LD e o LPL se intersectam apenas em pontos umbílicos lightlike, pois em $LD \cap LPL$ a curvatura gaussiana de M é menor do que ou igual a 0. Logo, se uma componente conexa R da região Riemanniana de M é homeomorfa a um disco e o bordo ∂R de R é uma curva regular, então ∂R é uma componente conexa do LD que não intersecta o LPL . Assim, umas das direções principais sempre é transversal a ∂R e a existência do ponto umbílico segue do Teorema de Poincaré-Hopf.

Estando provada a conjectura, um próximo passo seria enfraquecer as suas hipóteses. Assim, a condição de convexidade no Teorema de Tari é necessária? Nos espaços Euclidiano e Minkowski existem toros de revolução que não possuem pontos umbílicos, logo a convexidade não pode simplesmente ser omitida. Entretanto, uma possibilidade é substituir tal hipótese pelo fato da superfície ser apenas difeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 , isto é,

Conjectura 7.2.1. Toda superfície difeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 possui no mínimo dois pontos umbílicos.

Esta nova questão engloba superfícies como a Figura 42 que não são contempladas pelo Teorema de Tari. Note que ser difeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 garante que a superfície é fechada, logo a única hipótese enfraquecida é a convexidade. No caso Euclidiano, uma prova para a Conjectura de Loewner fornece uma resposta afirmativa para a nova pergunta, uma vez que a Característica de Euler de toda superfície difeomorfa a esfera é 2.

Por outro lado, dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}_1^3$ fechada e não convexa, mas difeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 , surgem duas questões decorrentes da não convexidade:

- (1) M possui duas componentes conexas da região Riemanniana homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 ?
- (2) Toda componente conexa da região Riemanniana de M que for homeomorfa a um disco e cujo bordo é uma curva regular possui um ponto umbílico?

Se as respostas para as questões (1) e (2) forem sim, então as ideias propostas por Tari em (TARI, 2013) se aplicam de maneira análoga para superfícies fechadas e difeomorfas a \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}_1^3 .

Para obter um contra-exemplo para a pergunta (1), seja S a esfera unitária de raio 1 e centro na origem. Tome a parametrização $\varphi : U_1 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de S , com $U_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < 1\}$ e $\varphi(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$. A região Riemanniana de S é a imagem dos pontos $(y, z) \in U_1$

com $z^2 > \frac{1}{2}$. Logo, a imagem de $U_2 = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + \left(z - \frac{85}{100}\right)^2 < \frac{1}{100} \right\} \subset U_1$ por φ pertence a região Riemanniana de S . O objetivo é deformar a parametrização φ em U_2 de modo que surja uma nova componente conexa da região Lorentziana.

Para isto, defina a família de aplicações $\rho_t : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$\rho_t(y, z) = \begin{cases} 1 - t + 200t \left(y^2 + \left(z - \frac{17}{20}\right)^2\right) - 10000t \left(y^2 + \left(z - \frac{17}{20}\right)^2\right)^2, & (y, z) \in U_2 \\ 1 & (y, z) \notin U_2. \end{cases}$$

Note que cada aplicação ρ_t é de classe \mathcal{C}^1 , crescente e possui a imagem no intervalo $[1 - t, 1]$. Como ρ_0 é constante igual a 1, a família de superfícies S_t parametrizadas localmente por $\varphi_t : U_1 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, com $\varphi_t(y, z) = (f_t(y, z), y, z)$ e

$$f_t(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \rho_t(y, z) + (1 - \rho_t(y, z)),$$

deforma a esfera $S = S_0$, ver Figura 48.

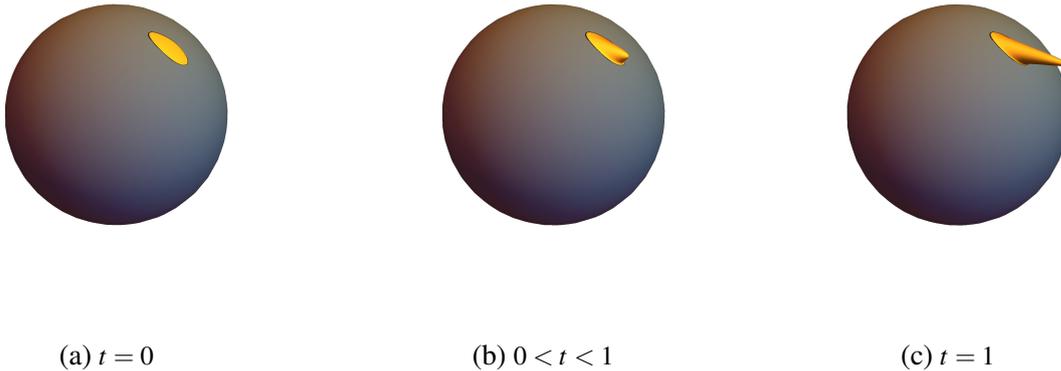
(a) $t = 0$ (b) $0 < t < 1$ (c) $t = 1$

Figura 48 – Deformações da esfera S pela família de superfícies S_t . As regiões em laranja representam a imagem de U_2 por φ_t .

O LD da superfície S_t é o conjunto dos pontos $(y, z) \in U_1$ onde $\delta(y, z, t) = 0$, sendo $\delta(y, z, t) = 1 + \left(\frac{\partial f_t}{\partial y}(y, z)\right)^2 - \left(\frac{\partial f_t}{\partial z}(y, z)\right)^2$. Em $U_1 \setminus U_2$ o LD é dado por $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ para todo t e coincide com o LD de S . Em U_2 , a variedade definida por $\delta = 0$ é plotada computacionalmente, através do software Mathematica (INC.,), e apresentada na Figura 49.

Baseado na Figura 49, é possível acreditar na existência de $t_0, t_1 \in [0, 1]$, $t_0 < t_1$, tais que o LD possui singularidades em U_2 se, e somente se, $t = t_0$ ou $t = t_1$. Tais pontos seriam aqueles onde o plano tangente é dado por $t = 0$. Assim, a configuração do LD de S_t em U_2 estaria definida de acordo com a partição do intervalo $[0, 1]$ definida por t_0 e t_1 , conforme a Figura 50.

Para obter t_0 e t_1 é necessário resolver o sistema

$$\begin{cases} \delta(y, z, t) = 0, \\ \delta_y(y, z, t) = 0, \\ \delta_z(y, z, t) = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

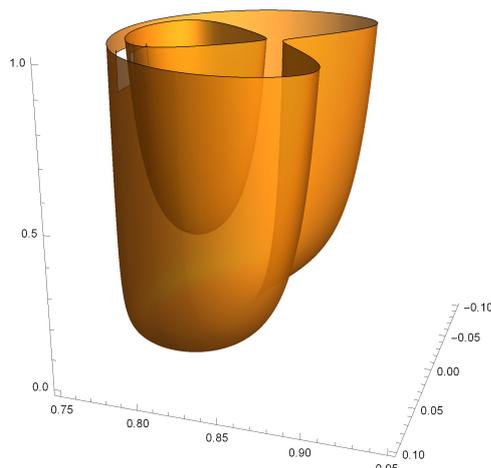


Figura 49 – Subvariedade de $U_2 \times [0, 1]$ obtida pelo LD da família de superfícies S_t com $t \in [0, 1]$.

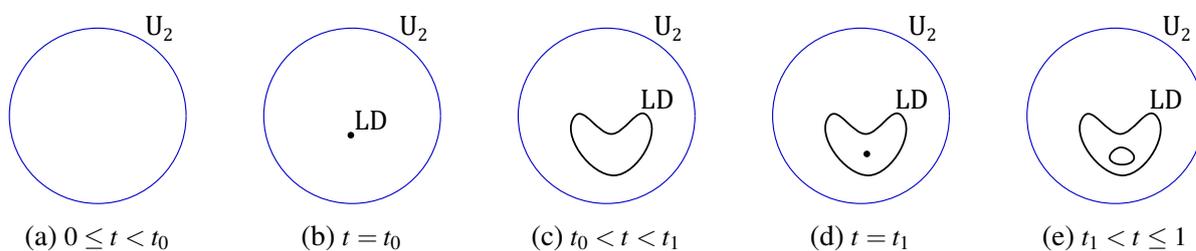


Figura 50 – Configurações do LD de S_t de acordo com o valor de $t \in [0, 1]$. A curva em azul representa o bordo de U_2 enquanto as curvas pretas são o LD.

para $(y, z, t) \in U_2 \times [0, 1]$. Resolvendo numericamente (7.1) é possível aproximar $t_0 \approx 0.043372$ e $t_1 \approx 0.345091$. Portanto, para $t = \frac{1}{10}$ é esperado que o LD em U_2 seja como na Figura 50 (c). Ao plotar o LD de $S_{1/10}$ surgem três curvas regulares, duas que já existiam em S e uma nova na imagem de U_2 por $\varphi_{1/10}$, como mostra a Figura 51.

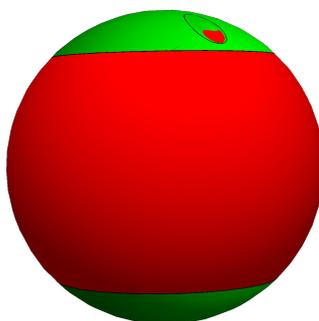


Figura 51 – Superfície $S_{1/10}$. As regiões Riemanniana e Lorentziana são representadas em verde e vermelho, respectivamente.

Toda a construção feita e os resultados numéricos são um indicativo de que $S_{1/10}$ satisfaz as condições desejadas para que seja um contra-exemplo de (1), entretanto é necessário mostrar

formalmente que o LD dessa superfície é constituído pelas três curvas regulares apresentadas pelo software Mathematica. O mesmo processo realizado para U_2 poderia ser aplicado em $U_3 = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + \left(z + \frac{85}{100}\right)^2 < \frac{1}{100} \right\} \subset U_1$ de modo análogo, a fim de obter uma superfície suave homeomorfa a \mathbb{S}^2 sem componentes conexas da região Riemanianna homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 . A partir de todos esses indícios, segue a seguinte conjectura.

Conjectura 7.2.2. Existem superfícies fechadas, homeomorfas a esfera \mathbb{S}^2 , que não possuem componentes conexas da região Riemanianna homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 .

Para a pergunta (2), sendo o LD uma curva regular fechada e uma linha de curvatura, seria possível utilizar o Teorema de Poincaré-Bendixson para garantir a existência de um ponto umbílico no interior do disco nos casos em que o LD e o LPL se intersectam? O Teorema 3.2.3 mostra que genericamente o LD muda de folheação nos pontos de $LD \cap LPL$, ou seja, o LD não é um ciclo limite e o Teorema de Poincaré-Bendixson não se aplica.

A superfície $M \subset \mathbb{R}_1^3$ parametrizada por $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, com $\varphi(x, y) = (x, y, x + xy - \frac{1}{6}x^3)$, é um contra-exemplo para (2). De fato, o LD de M é a curva fechada definida por $x^4 - 4x^2y + 4y^2 + 8y = 0$ e divide a superfície em uma região Riemanniana homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 , ver Figura 52, e uma região Lorentziana ilimitada. Porém, todos os 4 pontos umbílicos de M pertencem a região Lorentziana. Com isso a resposta para (2) é não e segue o Teorema 7.2.2. Este contra-exemplo foi obtido ao estudar a interseção do LD com o LPL na Seção 3.1, a origem em \mathbb{R}_1^3 é um ponto de M onde o LD e o LPL se intersectam e cujo levantamento do campo de direções possui um nó impróprio, como mostra as expressões para os autovalores e autovetores obtidas na prova do Teorema 3.1.2.

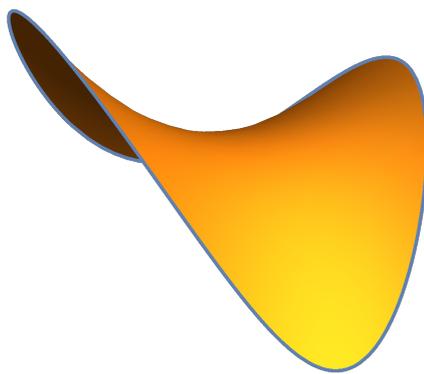


Figura 52 – Região Riemanianna homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 sem pontos umbílicos. A curva em azul representa o LD .

Teorema 7.2.2. Existem superfícies suaves em \mathbb{R}_1^3 que apresentam componentes conexas da região Riemanianna homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 , cujo bordo é uma curva regular pertencente ao LD e que não possuem pontos umbílicos.

Sabendo que a questão (2) não possui uma resposta afirmativa para regiões Riemannianas, uma pergunta natural seria o caso análogo para as regiões Lorentzianas. A partir disso foi elaborada a Conjectura 7.2.3.

Conjectura 7.2.3. Existem superfícies suaves em \mathbb{R}_1^3 que apresentam componentes conexas da região Lorentziana homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 , cujo bordo é uma curva regular pertencente ao LD e que não possuem pontos umbílicos.

Para a Conjectura 7.2.3 ainda não foi dada uma prova afirmativa ou algum contra-exemplo. Entretanto, é possível obter algumas informações a respeito de regiões Lorentzianas com as mesmas hipóteses da Conjectura 7.2.3.

Teorema 7.2.3. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e L uma componente conexa da região Lorentziana de M homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 e cujo bordo ∂L é uma curva regular pertencente ao LD , então ∂L intersecta o LPL de M .

Demonstração: Suponha que o LPL de M não intersecta ∂L . Então, para todo $p \in \partial L$, a única direção lightlike em p é transversal a ∂L . Portanto, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, segue que as curvas lightlike possuem uma singularidade em L , o que não é possível, porque em todos os pontos da região Lorentziana estão bem definidas duas direções lightlikes distintas. Logo, o LPL deve intersectar o bordo de L . ■

A Figura 53 apresenta uma possível configuração das linhas de curvatura para uma região Lorentziana homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 sem pontos umbílicos, entretanto não conhecemos uma superfície que realize esta configuração. Uma possível abordagem para a Conjectura 7.2.3 é perturbar um ponto umbílico lightlike fazendo surgir uma região Lorentziana sem pontos umbílicos, para isso foram elaboradas as próximas conjecturas. O próximo teorema apresenta um primeiro resultado nesse sentido.

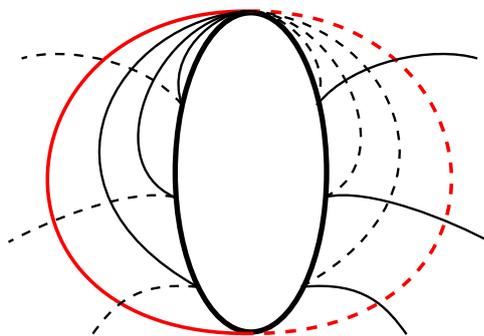


Figura 53 – Possível configuração das linhas de curvatura para uma região Lorentziana homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 sem pontos umbílicos. A curva em vermelho representa o LD .

Teorema 7.2.4. Sejam $M \subset \mathbb{R}_1^3$ uma superfície suave e $p \in M$ uma singularidade \mathcal{R} -finitamente determinada do LD . É possível deformar a superfície M de modo que a deformação induzida no LD em p seja \mathcal{R}_e -versal.

Demonstração: Tome a parametrização $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de M dada pelo Teorema 2.6.5. O LD de M em uma vizinhança de p é dado por $\delta = F^2 - EG = 0$. Suponha que δ possui uma singularidade \mathcal{R} -finitamente determinada em p . Logo, segue do Teorema 2.2.1 que existe $k > 0$ tal que $\mathcal{M}_2^{k+1} \subset L\mathcal{R}_e \cdot \delta$.

Afirmção: Para todo $P \in J^k(2, 1)$, vamos provar que existe uma deformação M_t de M , dada por

$$\varphi_t(x, y) = (x, y, f(x, y) + tg(x, y, t)),$$

de modo que a deformação $\tilde{\delta}(x, y, t)$ de $\delta(x, y)$ induzida por M_t satisfaça $j^k \tilde{\delta}_t(x, y, 0) = P(x, y)$.

Como δ é \mathcal{R} -finitamente determinado, existe um conjunto finito $\{P_1, \dots, P_a\} \in J^k(2, 1)$ de modo que

$$L\mathcal{R}_e \cdot \delta + \mathbb{R} \cdot \{P_1, \dots, P_a\} = \varepsilon_2.$$

Para cada P_i tome a aplicação g_i dada pela Afirmção anterior e considere a deformação a a -parâmetros de M dada por

$$\tilde{\varphi}(x, y, t_1, \dots, t_a) = \left(x, y, f(x, y) + \sum_{i=1}^a t_i g_i(x, y, t_i) \right). \quad (7.2)$$

Seja $\tilde{\delta}(x, y, t_1, \dots, t_a)$ a deformação de $\delta(x, y)$ induzida por (7.2) e denote por $\tilde{\delta}_i(x, y)$ a derivada de $\tilde{\delta}$ com relação a t_i no ponto $(x, y, 0, \dots, 0)$, para $i = 1, \dots, a$. Uma vez que $\mathcal{M}_2^{k+1} \subset L\mathcal{R}_e \cdot \delta$ é possível verificar que

$$L\mathcal{R}_e \cdot \delta + \mathbb{R} \cdot \{\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_a\} = L\mathcal{R}_e \cdot \delta + \mathbb{R} \cdot \{j^k \tilde{\delta}_1, \dots, j^k \tilde{\delta}_a\} = L\mathcal{R}_e \cdot \delta + \mathbb{R} \cdot \{P_1, \dots, P_a\} = \varepsilon_2.$$

Logo, segue do Teorema 2.2.2 que $\tilde{\delta}$ é uma deformação \mathcal{R}_e -versal de δ .

Prova da Afirmção: Note que

$$\tilde{\delta}(x, y, t) = \delta(x, y) + 2t(f_y(x, y)g_y(x, y, t) + f_x(x, y)g_x(x, y, t)) + t^2(g_y(x, y, t)^2 + g_x(x, y, t)^2) \quad (7.3)$$

$$\text{e } \tilde{\delta}_t(x, y, 0) = 2(f_y(x, y)g_y(x, y, 0) + f_x(x, y)g_x(x, y, 0)).$$

Dado $P \in J^k(2, 1)$, escreva

$$P(x, y) = \sum_{i+j=k_p}^k c_{i,j} x^i y^j,$$

com $0 \leq k_p \leq k$. Faremos um processo de indução em k_p . Para $k_p = k$, tome g de forma que $2g_x = P$, ou seja,

$$g(x, y, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \frac{c_{i,k-i}}{i+1} x^{i+1} y^{k-i}.$$

Como $f_x(0, 0) = 1$ e $f_y(0, 0) = 0$, segue de (7.3) que

$$j^k \tilde{\delta}_t(x, y, 0) = 2(j^k(f_y g_y) + j^k(f_x g_x)) = 2j^k(f_x g_x) = P.$$

Logo, a Afirmção é verdadeira para todo $P \in J^k(2, 1)$ com $k_p = k$.

Suponha que a Afirmação também vale para todo $P \in J^k(2, 1)$ com $k_P = n + 1$, $n \in \{0, \dots, k - 1\}$, então o mesmo é verdadeiro para todo P com $k_P = n$. De fato, tome $P \in J^k(2, 1)$ com $k_P = n$ e defina

$$h(x, y, t) = \frac{1}{2} \sum_{i+j=n}^k \frac{c_{i,j}}{i+1} x^{i+1} y^j,$$

ou seja, $2h_x = P$. Como $h_x(x, y, 0)$ e $h_y(x, y, 0)$ possuem grau maior do que ou igual a n , segue que

$$j^k (2(f_y(x, y)\tilde{h}_y(x, y, 0) + f_x(x, y)\tilde{h}_x(x, y, 0))) = 2(j^k(f_y h_y) + j^k(f_x h_x)) = P(x, y) + r(x, y),$$

onde $r \in J^k(2, 1)$ com $j^n r = 0$. Pela hipótese de indução, a Afirmação é verdadeira para r , ou seja, existe \tilde{h} de modo que

$$j^k (2(f_y(x, y)\tilde{h}_y(x, y, 0) + f_x(x, y)\tilde{h}_x(x, y, 0))) = r(x, y).$$

Defina $g = h - \tilde{h}$ e note que

$$\begin{aligned} j^k \tilde{\delta}_t(x, y, 0) &= j^k (2(f_y(x, y)g_y(x, y, 0) + f_x(x, y)g_x(x, y, 0))) \\ &= j^k (2(f_y(x, y)h_y(x, y, 0) + f_x(x, y)h_x(x, y, 0))) \\ &\quad - j^k (2(f_y(x, y)\tilde{h}_y(x, y, 0) + f_x(x, y)\tilde{h}_x(x, y, 0))) \\ &= (P + r) - r \\ &= P. \end{aligned}$$

Logo, a Afirmação é verdade para todo $k_P \in \{0, \dots, k\}$, ou seja, para todo $P \in J^k(2, 1)$. ■

A partir do Teorema 7.2.4, para todo ponto de máximo da função $F^2 - EG$ (tais pontos são umbílicos lightlike com singularidades A_{2k+1}^+ do LD , para algum $k > 0$ inteiro) é possível obter uma deformação na superfície de modo que surja uma componente conexa da região Lorentziana homeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 cujo bordo é uma curva regular.

Observação 7.2.1. Note que não é possível conseguir um resultado análogo ao Teorema 7.2.4 para as singularidades do LPL . De fato, uma singularidade A_1^\pm do LPL representa um ponto umbílico estável, portanto tal singularidade é preservada por qualquer deformação na superfície. Assim, não é possível obter as deformações versais da singularidade A_1^\pm , ilustradas nas Figuras 36 e 37.

CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho era desenvolver ferramentas que auxiliassem na generalização do teorema principal de (TARI, 2013) para superfícies em \mathbb{R}_1^3 fechadas, não convexas, mas difeomorfas a esfera \mathbb{S}^2 . Os argumentos utilizados por Tari no artigo não podem ser aplicados quando a hipótese de convexidade é enfraquecida, como mostraram os resultados da Seção 7.2. Portanto, são necessárias novas abordagens a fim generalizar o resultado. Assim, foram desenvolvidas novos resultados que podem auxiliar nesse sentido.

O Teorema de Tari garante a existência de dois pontos umbílicos em superfícies fechadas e convexas. Tais pontos são singularidades do LD e LPL , isto é, do conjunto dos pontos onde a métrica é degenerada e do discriminante das linhas de curvaturas, respectivamente. Por isso, algumas das principais contribuições desta tese estão relacionados com estas curvas. Os primeiros resultados tratam de propriedades locais, estipulando cotas máximas para novos pontos umbílicos ao perturbar uma superfície, descrevendo o comportamento genérico do LD e LPL em famílias de superfícies a 1-parâmetro e verificando a existência de deformações versais para tais singularidades.

Além disto, foram estudadas propriedades globais, como a inversão de Möbius em \mathbb{R}_1^3 . Este estudo é o início para uma versão do trabalho de Ghomi-Howard (GHOMI; HOWARD, 2012) para superfícies no espaço Minkowski, uma vez que a ideia deste artigo é aproximar a superfície de uma esfera e então realizar a inversão de Möbius em \mathbb{R}^3 obtendo uma função assintoticamente constante, como mostra o Apêndice A.

Portanto, esta tese apresenta um compilado de resultados a respeito de superfícies no espaço Minkowski, possuindo desde propriedades locais até teoremas globais. Além disto, foram obtidos resultados que dizem respeito a áreas mais amplas e foram dispostos ao longo do Capítulo 2, tais como a subseção sobre a *Swallowtail*, alguns teoremas sobre equações diferenciais e formas normais para cúbicas em parametrizações de Monge na região Lorentziana.

8.1 Trabalhos Futuros

Os próximos passos, a partir deste trabalho, são os estudos das conjecturas apresentadas ao longo do texto, ou seja, mostrar que:

1. Toda superfície em \mathbb{R}_1^3 difeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 possui no mínimo dois pontos umbílicos;
2. Existem superfícies fechadas, homeomorfas a esfera \mathbb{S}^2 , que não possuem componentes conexas da região Riemanianna homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 ;
3. Existem superfícies suaves em \mathbb{R}_1^3 que apresentam componentes conexas da região Lorentziana homeomorfas ao disco \mathbb{D}^2 , cujo bordo é uma curva regular pertencente ao LD e que não possuem pontos umbílicos.

Além disto, alguns outros projetos futuros são:

4. Enfraquecer a classe de diferenciabilidade para o Teorema de Tari utilizando ([ANDO; FUJIYAMA; UMEHARA, 2017](#));
5. Estudar a multiplicidade dos pontos umbílicos em superfícies dadas implicitamente. Estipular uma cota máxima para a multiplicidade em uma superfície algébrica de acordo com o grau do polinômio que a define;
6. Estudar as configurações das linhas de curvatura em pontos umbílicos de codimensão 1 e as suas deformações em famílias de superfícies genéricas;
7. Fazer um trabalho análogo ao de ([GHOMI; HOWARD, 2012](#)) para superfícies no espaço Minkowski.

REFERÊNCIAS

- ANDO, N.; FUJIYAMA, T.; UMEHARA, M. $C1$ -umbilics with arbitrarily high indices. **Pacific J. Math**, v. 288, p. 1–26, 2017. Citado nas páginas 24 e 162.
- ARNOLD, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. Singularities of differentiable maps - volume 1. **Monographs in Mathematics**, v. 82, 1985. Citado nas páginas 29 e 36.
- BOL, G. Über nabelpunkte auf einer eifläche. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 49, n. 1, p. 389–410, 1943. Citado na página 152.
- BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado na página 23.
- BRUCE, J. W. Projections and reflections of generic surfaces in \mathbb{R}^3 . **Mathematica Scandinavica**, JSTOR, v. 54, n. 2, p. 262–278, 1984. Citado nas páginas 24, 73, 74, 88, 92 e 94.
- BRUCE, J. W.; FIDAL, D. On binary differential equations and umbilics. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics**, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 111, n. 1-2, p. 147–168, 1989. Citado nas páginas 49 e 96.
- BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J.; TARI, F. Families of surfaces: height functions, gauss maps and duals. **Real and complex singularities**, CRC Press, v. 333, p. 148, 1995. Citado nas páginas 24 e 97.
- _____. Families of surfaces: focal sets, ridges and umbilics. **Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society**, Cambridge University Press, v. 125, p. 243–268, 1999. Citado nas páginas 24, 88 e 97.
- BRUCE, J. W.; TARI, F. On binary differential equations. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 8, n. 2, p. 255, 1995. Citado na página 38.
- _____. On the multiplicity of implicit differential equations. **journal of differential equations**, Academic Press, v. 148, n. 1, p. 122–147, 1998. Citado nas páginas 25, 43, 67 e 73.
- CARMO, M. P. do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. Citado nas páginas 23 e 48.
- COUTO, I. T.; LYMBEROPOULOS, A. **Introdução a Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018. Citado nas páginas 23, 46 e 48.
- DAVYDOV, A. A. Qualitative control theory. **Translations of Mathematical Monographs**, v. 142, 1994. Citado na página 64.
- DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. **Qualitative theory of planar differential systems**. Berlin: Springer, 2006. Citado na página 152.

- GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. M. **Differential equations of classical geometry, a qualitative theory**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado nas páginas 38 e 152.
- GHOMI, M.; HOWARD, R. Normal curvatures of asymptotically constant graphs and carathéodory's conjecture. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 140, n. 12, p. 4323–4335, 2012. Citado nas páginas 24, 135, 161, 162, 167, 168 e 169.
- GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. Boston: Pitman London, 1979. v. 105. Citado nas páginas 27 e 29.
- GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. **Stable mappings and their singularities**. New York: Springer-Verlag, 1973. v. 14. Citado na página 27.
- GUILFOYLE, B.; KLINGENBERG, W. Proof of the carathéodory conjecture. **arXiv preprint arXiv:0808.0851**, 2008. Citado na página 152.
- GUTIÉRREZ, C.; SOTOMAYOR, J.; GARCIA, R. Bifurcations of umbilic points and related principal cycles. **Journal of dynamics and differential equations**, Springer, v. 16, n. 2, p. 321–346, 2004. Citado na página 97.
- HAMBURGER, H. Berliner mathematische gesellschaft. Berlin, March 1924. Citado na página 151.
- _____. Beweis einer carathéodoryschen vermutung. teil i. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 63–86, 1940. Citado na página 152.
- INC., W. R. **Mathematica, Version 12.0**. Champaign, IL, 2019. Disponível em: <<https://wolfram.com/mathematica/>>. Citado na página 154.
- IVANOV, V. V. The analytic carathéodory conjecture. **Siberian Mathematical Journal**, Springer, v. 43, n. 2, p. 251–322, 2002. Citado na página 152.
- IZUMIYA, S.; FUSTER, M. d. C. R.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. **Differential geometry from a singularity theory viewpoint**. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. Citado nas páginas 29 e 148.
- IZUMIYA, S.; TARI, F. Self-adjoint operators on surfaces with singular metrics. **Journal of dynamical and control systems**, Springer, v. 16, n. 3, p. 329–353, 2010. Citado nas páginas 23, 48, 50, 52, 53, 63, 96 e 112.
- KLOTZ, T. On bol's proof of carathéodory's conjecture. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 12, p. 277–311, 1959. Citado na página 152.
- LLIBRE, J.; TERUEL, A. E. **Introduction to the qualitative theory of differential systems**. [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 40.
- PEI, D. Singularities of rp^2 -valued gauss maps of surfaces in minkowski 3-space. **Hokkaido Math. J.**, v. 28, p. 97–115, 1999. Citado nas páginas 23, 51 e 74.
- PORTEOUS, I. R. The normal singularities of a submanifold. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 5, n. 3-4, p. 543–564, 1971. Citado na página 88.
- SCHERBEL, H. A new proof of hamburger's index theorem on umbilical points. 1995. Citado na página 152.

SMYTH, B. The nature of elliptic sectors in the principal foliations of surface theory. *World Scientific*, p. 957–959, 2005. Citado na página 152.

SMYTH, B.; XAVIER, F. A sharp geometric estimate for the index of an umbilic point on smooth surface. **Bull. London Math. Soc.**, v. 24, p. 176–180, 1992. Citado na página 152.

SOTOMAYOR, J.; GUTIERREZ, C. Structurally stable configurations of lines of principal curvature. **Asterisque**, v. 98, n. 99, p. 195–215, 1982. Citado nas páginas 49 e 96.

SOTOMAYOR, J.; MELLO, L. F. A note on some developments on carathéodory conjecture on umbilic points. **Expositiones Mathematicae**, SPEKTRUM ACADEMISCHER VERLAG, v. 17, p. 049–058, 1999. Citado na página 152.

TARI, F. Caustics of surfaces in the minkowski 3-space. **The Quarterly Journal of Mathematics**, Oxford University Press, v. 63, n. 1, p. 189–209, 2012. Citado na página 89.

_____. Umbilics of surfaces in the minkowski 3-space. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 65, n. 3, p. 723–731, 2013. Citado nas páginas 24, 114, 151, 152, 153 e 161.

TITUS, C. J. A proof of a conjecture of loewner and of the conjecture of carathéodory on umbilic points. **Acta Mathematica**, Springer, v. 131, n. 1, p. 43–77, 1973. Citado na página 152.

VICKS, J. W. **Homology Theory: An introduction to Algebraic Topology**. New York: Springer-Verlag, 1994. Citado na página 36.

WALL, C. T. C. Finite determinacy of smooth map-germs. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 13, n. 6, p. 481–539, 1981. Citado nas páginas 29, 32 e 33.

A CONJECTURA DE GHOMI-HOWARD

A.1 Conjectura de Ghomi-Howard

Em (GHOMI; HOWARD, 2012), os autores relacionam a existência de pontos umbílicos em superfícies fechadas e convexas com a existência de tais pontos no gráfico de funções assintoticamente constantes. Mais precisamente, eles provam o seguinte teorema.

Teorema A.1.1. (GHOMI; HOWARD, 2012) Para toda superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ fechada, convexa, de classe C^2 e $p \in M$ um ponto umbílico, existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 assintoticamente constante e um difeomorfismo entre $M \setminus \{p\}$ e o gráfico de f que preserva as direções principais.

Uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é **assintoticamente constante** se, em coordenadas polares, satisfaz as condições

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r, \theta) = c \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \|\nabla f(r, \theta)\| = 0$$

uniformemente com relação a θ , sendo $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada em coordenadas polares por $f(r, \theta) = \frac{1}{r^2+1}$ é assintoticamente constante. De fato,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} r \|\nabla f(r, \theta)\| = 0$$

e ambos os limites são uniformes com relação a θ , pois f independe de θ . A Figura 54 apresenta o gráfico de f .

Para provar o Teorema A.1.1, Ghomi e Howard utilizam três lemas, que são enunciados a seguir.

Lema A.1.1. (GHOMI; HOWARD, 2012) Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança aberta da origem e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $f(0,0) = \|\nabla f(0,0)\| = 0$. Então:

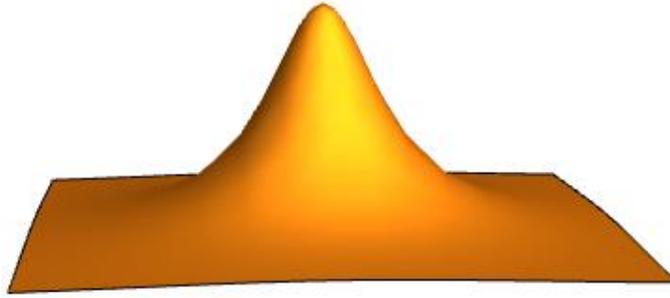


Figura 54 – Gráfico da função assintoticamente constante $f(r, \theta) = \frac{1}{r^2+1}$.

(1) Existem $r_0 > 0$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ da origem e uma função $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \setminus V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i_M \left(\text{graf} \left(f|_{B_{r_0}} \right) \right) = \text{graf}(\bar{f}),$$

onde B_{r_0} é a bola aberta centrada na origem de raio r_0 .

(2) Se f é de classe C^2 , tem curvatura positiva e um ponto umbílico na origem, então \bar{f} é assintoticamente constante.

Lema A.1.2. (GHOMI; HOWARD, 2012) Para toda superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ fechada, convexa e de classe C^2 existe outra superfície $M' \subset \mathbb{R}^3$ fechada, de classe C^2 , com curvatura positiva e arbitrariamente C^1 -próxima de \mathbb{S}^2 , com um difeomorfismo de M em M' que preserva as direções principais.

Lema A.1.3. (GHOMI; HOWARD, 2012) Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ um C^1 -mergulho da esfera que é tangente ao plano xy na origem. Se M é suficientemente próxima de uma esfera \mathbb{S}^2 , então a inversão de Möbius de M forma um gráfico sobre o plano xy .

Demonstração (Teorema A.1.1): A partir do Lema A.1.2, suponha que M tem curvatura positiva e que é suficientemente C^1 -próximo de uma esfera \mathbb{S}^2 . Após um movimento rígido, considere que p é a origem e que $T_p M$ é o plano xy . Do Lema A.1.3, segue que $i_M(M)$ é o gráfico de uma função e o Lema A.1.1, item (2), garante que tal função é assintoticamente constante. ■

Conjectura de Ghomi-Howard: Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 assintoticamente constante, então $\text{graf}(f)$ possui um ponto umbílico.

A Conjectura de Ghomi-Howard é enunciada em (GHOMI; HOWARD, 2012) como uma alternativa para a prova da Conjectura de Carathéodory, pois o Teorema A.1.1 garante que a conjectura acima é uma condição suficiente, mas não necessária, para a conjectura de Carathéodory.

Na demonstração do Teorema A.1.1 obtém-se uma função assintoticamente constante ao realizar a inversão de Möbius de uma superfície suficientemente próxima da esfera. Entretanto, a inversão de Möbius do gráfico de uma função assintoticamente constante nem sempre é uma

superfície fechada e convexa. De fato, as funções

$$f_1(r, \theta) = \frac{r}{r^3 + 1} \quad \text{e} \quad f_2(r, \theta) = \frac{4}{r^4 - 2r^2 + 4}$$

são assintoticamente constantes, mas $i_M(\text{graf}(f_1))$ não é uma superfície fechada e $i_M(\text{graf}(f_2))$ é uma superfície fechada que não é convexa.

A.2 Prova do Lema A.1.1

A prova apresentada em (GHOMI; HOWARD, 2012) para o item (1) do Lema A.1.1 apresenta uma lacuna. De fato, os autores realizam a prova da seguinte maneira. Como f é \mathcal{C}^1 e $\|\nabla f(0,0)\| = 0$, existe $r_0 > 0$ tal que, em coordenadas polares,

$$|f(r_1, \theta) - f(r_2, \theta)| < |r_1 - r_2| \quad (\text{A.1})$$

para todo $r_1, r_2 \in [0, r_0)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Então, $A = i_M(\text{graf}(f|_{B_{r_0}}))$ intersecta toda reta vertical em no máximo um ponto. Logo, a projeção de A em \mathbb{R}^2 define um conjunto fechado $\mathbb{R}^2 \setminus V$, onde V é uma vizinhança da origem, e a altura de A com relação ao plano xy determina uma função $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \setminus V \rightarrow \mathbb{R}$. Para mostrar que A intersecta toda reta vertical em no máximo um ponto, seja C o conjunto de todas as circunferências $c \in \mathbb{R}^3$ que são tangentes ao eixo z na origem. Toda reta vertical é a inversão de Möbius de uma circunferência $c \in C$. Portanto, é suficiente mostrar que toda circunferência $c \in C$ intersecta $\text{graf}(f|_{B_{r_0}})$ no máximo em um ponto diferente da origem.

Suponha que exista $c \in C$ intersectando $\text{graf}(f|_{B_{r_0}})$ em dois pontos distintos p_1 e p_2 diferentes da origem. Então $p_i = (r_i, \theta_0, f(r_i, \theta_0))$ em coordenadas cilíndricas com $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ fixado e $0 < r_i < r_0$. Seja $g(r) = f(r, \theta_0)$. De (A.1) segue que

$$|g(r_i)| = |g(r_i) - g(0)| < |r_i - 0| = r_i.$$

Utilizando uma homotetia caso necessário, é possível assumir que o raio de c é 1. Logo, o centro de c em coordenadas cilíndricas é $(1, \theta_0, 0)$ e

$$(r_i - 1)^2 + g(r_i)^2 = 1 \Rightarrow |g(r_i)| = \sqrt{1 - (r_i - 1)^2} = \sqrt{r_i(2 - r_i)}.$$

As duas últimas expressões mostram que

$$\begin{aligned} r_i > |g(r_i)| = \sqrt{r_i(2 - r_i)} &\Rightarrow r_i^2 > r_i \\ &\Rightarrow r_i > 1, \end{aligned}$$

pois $r_i > 0$. Supondo sem perda de generalidade que $r_2 > r_1$, de (A.1) e da desigualdade triangular segue que

$$|r_2 - r_1| \geq |g(r_2) - g(r_1)| \geq |g(r_2)| - |g(r_1)| = \sqrt{r_2(2 - r_2)} - |g(r_1)| > \sqrt{r_2(2 - r_2)} - r_1. \quad (\text{A.2})$$

De (A.2) e como $r_2 > r_1$, os autores concluem que $r_2 < 1$, o que é uma contradição.

Porém, sendo $r_2 > r_1$, segue de (A.2) que

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 = |r_2 - r_1| &> \sqrt{r_2(2-r_2)} - r_1 \Rightarrow r_2 > \sqrt{r_2(2-r_2)} \\ &\Rightarrow r_2^2 > r_2 \\ &\Rightarrow r_2 > 1, \end{aligned}$$

pois $r_2 > 0$. Logo, a contradição indicada pelos autores não pode ser obtida de (A.2). Apresentamos a seguir uma prova diferente para o Lema A.1.1 (1).

Demonstração: Item (1) do Lema A.1.1. Dado um ponto $(x, y, f(x, y)) \in \text{graf}(f)$, segue que

$$i_M(\{(x, y, f(x, y))\}) = \left\{ \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)}, \frac{y}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)}, \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)} \right) \right\}.$$

Assim, $i_M(\text{graf}(f))$ é o gráfico de uma função se existir \bar{f} tal que

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)}, \frac{y}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)}, \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)} \right) = (u, v, \bar{f}(u, v)).$$

Isto ocorre se, e somente se,

$$\begin{aligned} \sigma: U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)}, \frac{y}{x^2 + y^2 + f^2(x, y)} \right) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, sendo U uma vizinhança da origem. Para simplificar a notação, denote $f(x, y)$ por f . A matriz Jacobiana de σ é

$$d\sigma = \begin{pmatrix} \frac{-x^2 + y^2 + f^2 - 2xf f_x}{(x^2 + y^2 + f^2)^2} & \frac{-2xy - 2xf f_y}{(x^2 + y^2 + f^2)^2} \\ \frac{-2xy - 2yf f_x}{(x^2 + y^2 + f^2)^2} & \frac{x^2 - y^2 + f^2 - 2yf f_y}{(x^2 + y^2 + f^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Do Teorema da Função Inversa, segue que σ é um difeomorfismo em uma vizinhança de (x, y) se $\det(d\sigma(x, y)) \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} \det(d\sigma(x, y)) = 0 &\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - f^4 + 2f(x^2 + y^2 + f^2)(xf_x + yf_y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + f^2)(x^2 + y^2 - f^2 + 2f(xf_x + yf_y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + f^2)g(x, y) = 0, \end{aligned}$$

com $g(x, y) = x^2 + y^2 - f^2 + 2f(xf_x + yf_y)$. Como $f(0, 0) = \|\nabla f(0, 0)\| = 0$ e ∇f é contínua, pois f é de classe C^1 , existe $r_0 > 0$ tal que

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}\|(x, y)\|, \quad (\text{A.3})$$

$$\|\nabla f(x, y)\| < \frac{3}{4}, \quad (\text{A.4})$$

para todo $(x, y) \in B_{r_0}$, sendo que (A.3) e (A.4) seguem do Teorema do Valor Médio e da continuidade de ∇f , respectivamente. Além disso,

$$|xf_x + yf_y| = |\langle \nabla f, (x, y) \rangle| \leq \|\nabla f\| \|(x, y)\|,$$

ou seja,

$$xf_x + yf_y \geq -\|\nabla f\| \|(x, y)\|. \quad (\text{A.5})$$

Assim, se $(x, y) \in B_{r_0}$, então

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x^2 + y^2 - f^2 + 2f(xf_x + yf_y) \\ &\geq x^2 + y^2 - f^2 - 2f\|\nabla f\| \|(x, y)\| && \text{vale por (A.5)} \\ &\geq \frac{3}{4}\|(x, y)\|^2 - 2f\|\nabla f\| \|(x, y)\| && \text{vale por (A.3)} \\ &\geq \frac{3}{4}\|(x, y)\|^2 - \|\nabla f\| \|(x, y)\|^2 && \text{vale por (A.3)} \\ &= \|(x, y)\|^2 \left(\frac{3}{4} - \|\nabla f\| \right) \end{aligned}$$

e de (A.4) segue que $g(x, y) = 0$ em B_{r_0} se, e somente se, $x = y = 0$. Logo, tomando $U = B_{r_0}$, σ é um difeomorfismo em $U \setminus (0, 0)$. ■

PROVA DO TEOREMA 6.2.9

Dado $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, tome $U = (\varepsilon_0, \varepsilon_0 + 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma parametrização local de $S_{(a,c)}$ com $\varphi(u, v) = (\cos u \sin v + a, \sin u \sin v, \cos v + c)$. Seja $L \subset U$ o conjunto dos pontos (u, v) tais que $\varphi(u, v)$ pertence ao cone de luz. Uma parametrização local $\tilde{\varphi} : U \setminus L \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de $\tilde{S}_{(a,c)}$ é dada por $\tilde{\varphi}(u, v) = i_M(\varphi(u, v))$.

Utilizando $\tilde{\varphi}$ para calcular o conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$, segue que $\tilde{\varphi}(u, v)$ é um ponto parabólico se, e somente se, $f(u, v)l(u, v)^4h(u, v) = 0$, onde

$$\begin{aligned} f(u, v) &= 1 - a^2 + c^2 + 4c \cos v + 2 \cos^2 v, \\ h(u, v) &= -a^2 + c^2 + 4c \cos^3 v + 3 \cos 2v - 4a \cos u \sin^3 v \end{aligned}$$

e l é definido como em (6.4). Como L é definido implicitamente por $l = 0$ e $(u, v) \notin L$, então $l(u, v) \neq 0$ e $\tilde{\varphi}(u, v)$ é um ponto parabólico se, e somente se, $f(u, v) = 0$ ou $h(u, v) = 0$.

Proposição B.0.1. Se $f(u, v) = 0$ e $h(u, v) = 0$, então $l(u, v) = 0$.

Demonstração: Note que

$$h(u, v) - f(u, v) \cos 2v = (-a^2 + c^2 + 2c \cos v + \cos 2v - 2a \cos u \sin v) \sin^2 v = l(u, v) \sin^2 v.$$

Logo, se $f(u, v) = 0$ e $h(u, v) = 0$, então $l(u, v) \sin^2 v = 0$ e segue que $l(u, v) = 0$, pois $\sin v \neq 0$ uma vez que $v \in (0, \pi)$. ■

Como a parametrização local $\tilde{\varphi}$ não está definida em $L = l^{-1}(0)$, a Proposição B.0.1 garante que $f^{-1}(0)$ e $h^{-1}(0)$ não se intersectam. Portanto, estes conjuntos podem ser estudados separadamente.

Lema B.0.1. Seja F a imagem por φ dos zeros de f . As possíveis configurações de F são dadas na Figura 55 e dependem apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas curvas $a^2 + c^2 = 1$, $c = 2 \pm \sqrt{1 + a^2}$ e $c = -2 + \sqrt{1 + a^2}$.

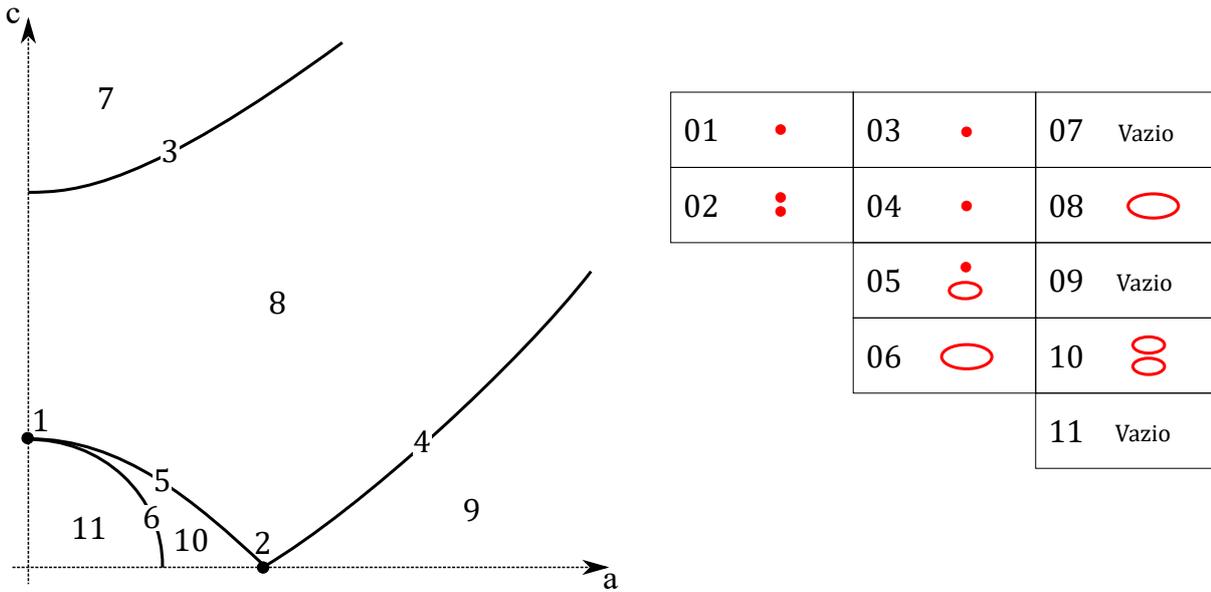


Figura 55 – Partição do plano ac que determina as configurações de \tilde{F} , tais configurações são representadas em vermelho.

Demonstração: Note que f está definida em $U \setminus L$, mas depende apenas de v . Logo, é possível considerar f como uma função definida em $(0, \pi)$ e, por continuidade, supor que f está definida em $[0, \pi]$. Assim, $f = 0$ se, e somente se,

$$v_{\pm} = \arccos \left(\frac{-2c \pm \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} \right). \quad (\text{B.1})$$

Estes valores estão bem definidos quando

(1) $\sqrt{a^2 + c^2 - 1}$ for um número real, ou seja, $\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 \geq 1$.

(2) O argumento do arccos estiver entre -1 e 1 , ou seja

$$-1 \leq \frac{-2c + \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 + \sqrt{1 + \mathbf{a}^2} \leq \mathbf{c} \leq 2 + \sqrt{1 + \mathbf{a}^2}.$$

$$-1 \leq \frac{-2c - \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 - \sqrt{1 + \mathbf{a}^2} \leq \mathbf{c} \leq 2 - \sqrt{1 + \mathbf{a}^2}.$$

Note que

$$v_+ = v_- \Leftrightarrow \frac{-2c + \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} = \frac{-2c - \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 = 1.$$

A Figura 55 exibe a partição do plano ac de parâmetros. Nas regiões 7, 9 e 11, as soluções v_+ e v_- não existem. Na região 8 e nas curvas 3 e 4, apenas v_+ existe. Na região 10 e na curva 5, v_+ e v_- existem e são distintos. Por fim, v_+ e v_- existem e são iguais na curva 6.

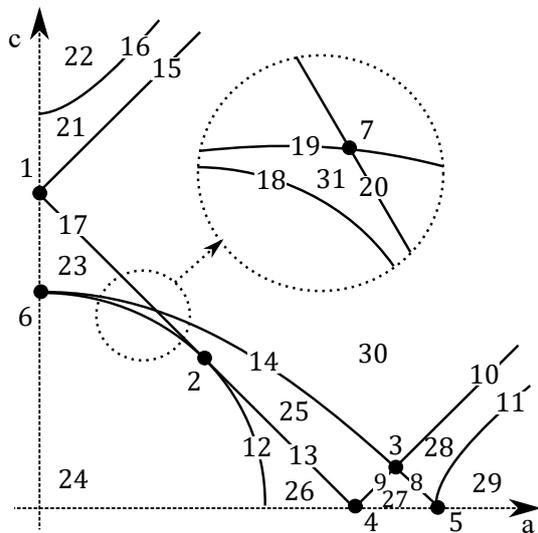
Para estudar $F = \{\varphi(u, v) | f(v) = 0\} \subset S$ é preciso analisar os zeros de f . Se $f^{-1}(0) = \emptyset$, então $F = \emptyset$. Se $0 \in f^{-1}(0)$, então o ponto $P_N = (a, 0, c + 1)$ pertence a F . Por outro lado, se

$\pi \in f^{-1}(0)$, então o ponto $P_S = (a, 0, c - 1)$ pertence a F . Por fim, se algum $v \in (0, \pi)$ pertence a $f^{-1}(0)$, então F conterá a curva fechada dada por $S \cap P_v$, onde P_v é o plano $z = \cos v + c$. Da definição de v_{\pm} segue que

$$\begin{aligned} v_+ = 0 &\Leftrightarrow \frac{-2c + \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} = 1 \Leftrightarrow c = -2 + \sqrt{1 + a^2}, \\ v_+ = \pi &\Leftrightarrow \frac{-2c + \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} = -1 \Leftrightarrow c = 2 + \sqrt{1 + a^2}, \\ v_- = 0 &\Leftrightarrow \frac{-2c - \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} = 1 \Leftrightarrow c = -2 - \sqrt{1 + a^2}, \\ v_- = \pi &\Leftrightarrow \frac{-2c - \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2} = -1 \Leftrightarrow c = 2 - \sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Logo, utilizando a Figura 55, na região 8, F é uma curva fechada (um paralelo de $S_{(a,c)}$). Nas curvas 3 e 4, F é apenas um ponto, P_N ou P_S . Na curva 5, F é a união de uma curva fechada (um paralelo de $S_{(a,c)}$) e o ponto P_S . No ponto 2, F é formado apenas pelos pontos P_N e P_S . Na região 10, F é composto por duas curvas fechadas distintas (dois paralelos de $S_{(a,c)}$). Na curva 6, F é uma única curva fechada (os dois paralelos da região 10 se colidem). Por fim, no ponto 1, $F = \{P_S\}$. ■

Lema B.0.2. Seja \tilde{F} a imagem por $\tilde{\varphi}$ dos zeros de f . As possíveis configurações de \tilde{F} são dadas na Figura 56 e dependem apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas curvas $a^2 + c^2 = 1$, $c = 2 \pm \sqrt{1 + a^2}$, $c = -2 + \sqrt{1 + a^2}$, $c = a \pm \sqrt{2}$ e $c = -a + \sqrt{2}$.



01	Vazio	09		17		25	
02		10		18		26	
03		11		19		27	
04		12		20		28	
05		13		21		29	Vazio
06	Vazio	14		22	Vazio	30	
07		15		23		31	
08		16		24	Vazio		

Figura 56 – Partição do plano ac que determina as configurações de \tilde{F} , tais configurações são representadas em vermelho.

Demonstração: Seja F a imagem por φ dos zeros de f , ou seja, $\tilde{F} = i_M(F)$. Do Lema B.0.1, seguem as possíveis configurações de F . Para estudar \tilde{F} , basta calcular $F \cap L$, pois em L a

inversão i_M não está definida. Ou seja, é necessário resolver o sistema

$$\begin{cases} f(v) = 0 \\ l(u, v) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Segue de (B.1) que as soluções de $f(v) = 0$ são

$$v = v_{\pm} = \arccos\left(\frac{-2c \pm \sqrt{2}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{2}\right).$$

As regiões da Figura 55 são estudadas separadamente. Primeiro, considere $a = 0$ e $c = 1$. Assim $F = \{P_S\} = \{\varphi(u, \pi)\}$ e $l(u, v) = -1 + 2\cos v + \cos 2v$. Como $l(u, \pi) = 0$, segue que $P_S \in L$ e $L \cap F = F$. Portanto, $\tilde{F} = \emptyset$. Quando $a = \sqrt{3}$ e $c = 0$, $F = \{P_N, P_S\} = \{\varphi(u, 0), \varphi(u, \pi)\}$ e

$$l(u, v) = -3 + \cos 2v + 2\sqrt{3}\cos u \sin v.$$

Como $l(u, 0) = l(u, \pi) = -2 \neq 0$, segue que $L \cap F = \emptyset$ e \tilde{F} é formado por dois pontos distintos.

Considere agora a curva $c = 2 + \sqrt{1 + a^2}$. Nesse caso $L = \{P_S\} = \{\varphi(u, \pi)\}$ e

$$l(u, v) = 5 + 4\sqrt{1 + a^2} + 2(2 + \sqrt{1 + a^2})\cos v + \cos 2v - 2a\cos u \sin v.$$

Logo, $l(u, \pi) = 2(1 + \sqrt{1 + a^2}) \neq 0$ e $P_S \notin L$. Assim, \tilde{F} é formado por um único ponto. Na curva $c = -2 + \sqrt{1 + a^2}$, $L = \{P_N\} = \{\varphi(u, 0)\}$ e

$$l(u, v) = 5 - 4\sqrt{1 + a^2} + 2(-2 + \sqrt{1 + a^2})\cos v + \cos 2v - 2a\cos u \sin v.$$

Como $l(u, 0) = 2(1 - \sqrt{1 + a^2})$, segue que $l(u, 0) = 0$ apenas se $a = 0$ e, conseqüentemente, $c = -2$, o que não acontece pois $c \geq 0$. Logo $P_N \notin L$ e \tilde{F} é formado por um único ponto, $\tilde{F} = i_M(P_N)$.

Em $c = 2 - \sqrt{1 + a^2}$, o conjunto L é a união do ponto P_S e uma curva fechada. Nesse caso,

$$l(u, v) = 5 - 4\sqrt{1 + a^2} + 2(2 - \sqrt{1 + a^2})\cos v + \cos 2v - 2a\cos u \sin v.$$

Calculando l em P_S ,

$$l(u, \pi) = 2(1 - \sqrt{1 + a^2}),$$

verifica-se que $P_S \in L$ apenas quando $a = 0$ e, conseqüentemente, $c = 1$, o que resulta em um ponto já estudado. Logo, \tilde{F} tem um ponto isolado. A curva fechada é tratada posteriormente.

Na circunferência $a^2 + c^2 = 1$, exceto no ponto $(0, 1)$, F é uma única curva fechada dada por $\gamma(u) = \varphi(u, v_{\pm}) = \varphi(u, \arccos(-c))$. Nesse caso

$$l(u, v) = 1 - 2a^2 + 2\sqrt{1 - a^2}\cos v + \cos 2v - 2a\cos u \sin v$$

e $l(u, v_{\pm}) = -2a^2(1 + \cos u)$. Logo, a única solução de (B.2) é $v = \arccos(-c)$ e $u = \pi$. Portanto, $F \cap L$ é um único ponto e \tilde{F} é uma curva regular ilimitada.

Para os demais casos, considere inicialmente v_+ , sendo

$$l(u, v_+) = -2 + 2c^2 - \sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1} - a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}} \cos u. \quad (\text{B.3})$$

Quando $a = 0$, $l(u, v_+) = 0$ se, e somente se, $c = 1$ ou $\sqrt{2}$. O caso com $c = 1$ já foi estudado. Se $c = \sqrt{2}$, segue do Lema B.0.1 que F é uma curva regular fechada. Como $l(u, v_+) = 0$ para todo valor de u , então $F \subset L$ e $\tilde{F} = \emptyset$.

Seja $a > 0$. Nas regiões 5, 8 e 10 da Figura 55, vale que $6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1} > 0$. Então, isolando u em (B.3),

$$u = \arccos \left(\frac{-2 + 2c^2 - \sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} \right)$$

ou

$$u = 2\pi - \arccos \left(\frac{-2 + 2c^2 - \sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} \right).$$

Se o argumento do arccos for maior do que 1, ou menor do que -1 , (B.2) não possui solução. Se for exatamente igual a ± 1 , o sistema tem uma única solução. E caso esteja entre 1 e -1 , existem duas soluções. Note que

$$\frac{-2 + 2c^2 - \sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a + \sqrt{2}, & a \geq \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ c = -a - \sqrt{2}, & a \leq \frac{-1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Como $a \geq 0$, então

$$\frac{-2 + 2c^2 - \sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} = 1 \Leftrightarrow c = a + \sqrt{2}.$$

Por outro lado,

$$\frac{-2 + 2c^2 - \sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - \sqrt{2}, & a \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ c = -a + \sqrt{2}, & a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Sendo $a \geq 0$ e $c \geq 0$, segue que

$$\frac{-2 + 2c^2 - \sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 + 4\sqrt{2}c\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - \sqrt{2}, & a \geq \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ c = -a + \sqrt{2}, & 0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Logo, o argumento do arccos está entre -1 e 1 nas regiões 13, 14, 25, 26 e 30 da Figura 56. Nessas regiões existem dois valores distintos de u que são raízes de (B.2) com $v = v_+$, ou seja, a curva $\gamma_+(u) = \varphi(u, v_+) \subset F$ intersecta L em dois pontos distintos para os parâmetros (a, c)

nestas regiões. Nas curvas 9, 10, 12, 15, 17 e 20 e no ponto 7 da Figura 56 existe um único valor de u com essa propriedade e então um único ponto de interseção entre γ_+ e L .

Considere agora v_- , ou seja, a região 10 da Figura 55. Note que

$$l(u, v_-) = -2 + 2c^2 + \sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1} - a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 - 4\sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}} \cos u. \quad (\text{B.4})$$

Quando $a = 0$, $l(u, v_-) = 0$ se, e somente se, $c = 1$. O caso $a = 0$ e $c = 1$ já foi tratado. Suponha que $a > 0$. Observe que $6 - 2a^2 - 6c^2 - 4\sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1} > 0$ na região. Logo, é possível isolar u em (B.4) e obter

$$u = \arccos \left(\frac{-2 + 2c^2 + \sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 - 4\sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} \right)$$

ou

$$u = 2\pi - \arccos \left(\frac{-2 + 2c^2 + \sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 - 4\sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} \right).$$

Se o argumento do arccos for maior que 1, ou menor que -1 , (B.2) não possui solução. Se for exatamente igual a ± 1 , o sistema tem uma única solução. E caso esteja entre 1 e -1 , existem duas soluções. Note que

$$\frac{-2 + 2c^2 + \sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 - 4\sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a + \sqrt{2}, & a \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ c = -a - \sqrt{2}, & a \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Como $a \geq 0$ e $c \geq 0$, o argumento do arccos não pode ser igual a 1. Por outro lado,

$$\frac{-2 + 2c^2 + \sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 - 4\sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - \sqrt{2}, & a \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ c = -a + \sqrt{2}, & a \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Sendo $a \geq 0$ e $c \geq 0$, então

$$\frac{-2 + 2c^2 + \sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a\sqrt{6 - 2a^2 - 6c^2 - 4\sqrt{2c}\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}} = -1 \Leftrightarrow c = -a + \sqrt{2}, a \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Assim, o argumento do arccos está entre -1 e 1 na região 26 da Figura 56. Para os parâmetros nessa região, existem dois valores distintos de u que são raízes de (B.2) com $v = v_-$, ou seja, a curva $\gamma_-(u) = \varphi(u, v_-) \subset F$ intersecta L em dois pontos. Nas curvas 12, 13 e no ponto 2 existe um único valor de u com essa propriedade. ■

Lema B.0.3. A função h pode ter singularidades A_1^\pm (Morse), A_2 (cúspides) ou A_3^- , dependendo apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas hipérbolas $-3 \pm 4a - a^2 + c^2 = 0$, pelas retas $(a \pm c)^2 = 2$ e pela circunferência $a^2 + c^2 = 1$. Quando $a = 0$ e $c = \sqrt{2}$ ou $c = \sqrt{3}$, h possui singularidades não isoladas, sendo localmente $h \sim_{\mathcal{R}} \pm v^2$.

Demonstração: As derivadas de h são

$$\begin{aligned}h_u(u, v) &= 4a \sin u \sin^3 v, \\h_v(u, v) &= -12c \cos^2 v \sin v - 12a \cos u \cos v \sin^2 v - 6 \sin 2v.\end{aligned}$$

Assim, $h_u(u, v) = 0$ apenas se $a = 0$ ou $u \in \{0, \pi\}$, pois $v \in (0, \pi)$ em U .

Quando $u = 0$,

$$\begin{aligned}h(0, v) &= -a^2 + c^2 + 4c \cos^3 v + 3 \cos 2v - 4a \sin^3 v, \\h_v(0, v) &= -6(1 + c \cos v + a \sin v) \sin 2v.\end{aligned}$$

Assim, as soluções de $h_v(0, v) = 0$ são $v = \pi/2$ e $1 + c \cos v + a \sin v = 0$. Para $v = \pi/2$, segue que $h(0, \pi/2) = 0$ se, e somente se, $-3 - 4a - a^2 + c^2 = 0$. Neste caso, calculando a expansão de Taylor de h em $(0, \pi/2)$, $(0, \pi/2)$ é uma singularidade A_1^+ de h .

Seja $\tilde{h}_v(v) = 1 + c \cos v + a \sin v = 0$. Como $\sin v \neq 0$, pois $v \in (0, \pi)$, segue que $\tilde{h}(v) = 0$ se, e somente se,

$$a = -\frac{1 + c \cos v}{\sin v}. \quad (\text{B.5})$$

Substituindo este valor de a na função h ,

$$h(0, v) = -\frac{\cos 2v}{\sin^2 v} (c + \cos v)^2,$$

note que as únicas soluções são $v = \pi/4$, $v = 3\pi/4$ e $c = -\cos v$. Se $v = \pi/4$, então de (B.5) segue que $a = -\sqrt{2} - c$, o que não ocorre porque $a \geq 0$ e $c \geq 0$. No caso em que $v = 3\pi/4$, segue de (B.5) que $a = c - \sqrt{2}$. Neste caso, calculando a expansão de Taylor de h em $(0, 3\pi/4)$ e observando que $a \geq 0$, observe que este ponto é uma singularidade A_1^- de h . Quando $c = -\cos v$, segue da equação (B.5) que $a = -\sin v$. Mas este caso não ocorre, pois $a \geq 0$, $c \geq 0$ e $v \in (0, \pi)$.

Por outro lado, se $u = \pi$, então

$$\begin{aligned}h(\pi, v) &= -a^2 + c^2 + 4c \cos^3 v + 3 \cos 2v + 4a \sin^3 v, \\h_v(\pi, v) &= -6(1 + c \cos v - a \sin v) \sin 2v.\end{aligned}$$

Assim, $h_v(\pi, v) = 0$ quando $v = \pi/2$ ou $1 + c \cos v - a \sin v = 0$. Com $v = \pi/2$, $h(\pi, \pi/2) = 0$ se, e somente se, $-3 + 4a - a^2 + c^2 = 0$. Calculando a expansão de Taylor de h em $(\pi, \pi/2)$, esse ponto é uma singularidade A_1^+ de h .

Seja $\tilde{h}_v(v) = 1 + c \cos v - a \sin v = 0$. Como $\sin v \neq 0$, pois $v \in (0, \pi)$, segue que $\tilde{h}(v) = 0$ se, e somente se,

$$a = \frac{1 + c \cos v}{\sin v}. \quad (\text{B.6})$$

Substituindo este valor de a na função h ,

$$h(0, v) = -\frac{\cos 2v}{\sin^2 v} (c + \cos v)^2.$$

perceba que as únicas soluções são $v = \pi/4$, $v = 3\pi/4$ e $c = -\cos v$.

Se $v = \pi/4$, então de (B.6) segue que $a = c + \sqrt{2}$. Quando isso ocorre, $(\pi, \pi/4)$ é uma singularidade A_1^- de h . No caso em que $v = 3\pi/4$, segue de (B.6) que $a = \sqrt{2} - c$. Calculando a série de Taylor de h em $(\pi, 3\pi/4)$, esse ponto é uma singularidade de h do tipo A_1^+ se $0 < a < 1/\sqrt{2}$, ou A_1^- se $a > 1/\sqrt{2}$, ou uma cúspide se $a = 1/\sqrt{2}$.

Quando $c = -\cos v$, da equação (B.6) segue que $a = \sin v$. No caso $c = 1$ é necessário que $v = \pi$, o que não ocorre. Expandindo h em Taylor no ponto $(\pi, \arccos(-c))$, esse ponto é uma cúspide se $c \neq 0$ e uma singularidade A_3^- se $c = 0$.

Por fim, considere $a = 0$. Nesse caso

$$\begin{aligned} h(u, v) &= c^2 + 4c \cos^3 v + 3 \cos 2v, \\ h_v(u, v) &= -6 \sin 2v(c \cos v + 1). \end{aligned}$$

As equações acima se anulam simultaneamente apenas em dois casos, são eles $\{c = \sqrt{3}, v = \pi/2\}$ e $\{c = \sqrt{2}, v = 3\pi/4\}$. Em ambos os casos a singularidade não é isolada, pois o parâmetro u pode tomar valores em $(0, 2\pi)$. Portanto, as singularidades não são finitamente determinadas. Quando $c = \sqrt{3}$ e $v = \pi/2$, segue que $h \sim_{\mathcal{R}} -v^2$. Por outro lado, se $c = \sqrt{2}$ e $v = 3\pi/4$, então $h \sim_{\mathcal{R}} v^2$. ■

Sejam H e \tilde{H} as imagens dos zeros de h por φ e $\tilde{\varphi}$, respectivamente, isto é

$$\begin{aligned} H &= \{\varphi(u, v) : h(u, v) = 0\} \subset S_{(a,c)}, \\ \tilde{H} &= \{\tilde{\varphi}(u, v) : h(u, v) = 0\} \subset \tilde{S}_{(a,c)}. \end{aligned}$$

Estudar \tilde{H} significa entender a interseção de H com LC , pois i_M é um difeomorfismo fora de LC .

Lema B.0.4. Sejam F e H as imagens por φ dos zeros de f e h , respectivamente. Então as interseções de H com o LC , excluindo aquelas que ocorrem onde $F \cap LC$, dependem apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas retas $a = \pm c$ e $(a \pm c)^2 = 2$.

Demonstração: Note que $H \cap L$ é dado pelo sistema

$$\begin{cases} -a^2 + c^2 + 2c \cos v + \cos 2v - 2a \cos u \sin v &= 0, \\ -a^2 + c^2 + 4c \cos^3 v + 3 \cos 2v - 4a \cos u \sin^3 v &= 0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

É possível isolar $2a \cos u \sin v$ na primeira equação de (B.7) e substituir na segunda, obtendo

$$-a^2 + c^2 + 4c \cos^3 v + 3 \cos 2v - 2 \sin^2 v (-a^2 + c^2 + 2c \cos v + \cos 2v) = 0,$$

que pode ser simplificado para

$$\cos(2v)f(v) = 0. \quad (\text{B.8})$$

O caso $f(v) = 0$ resulta nas interseções de F com o LC , que já foram estudadas anteriormente. Suponha então que $f(v) \neq 0$. Nesse caso, as únicas soluções de (B.8) são $v \in \{\pi/4, 3\pi/4\}$. Substituindo estes valores na primeira equação do sistema (B.7),

$$-a^2 \pm \sqrt{2}c + c^2 - \sqrt{2}a \cos u = 0,$$

e isolando u ,

$$\cos u = \frac{a^2 \pm \sqrt{2}c - c^2}{\sqrt{2}a} \Rightarrow u = \arccos \left(\frac{a^2 \pm \sqrt{2}c - c^2}{\sqrt{2}a} \right),$$

segue que o argumento do arccos é ± 1 quando

$$a^2 - c^2 = 0, \quad (a - c)^2 = 2 \quad \text{ou} \quad (a + c)^2 = 2.$$

■

Por fim, é necessário estudar os polos $(a, 0, c + 1)$ e $(a, 0, c - 1)$, que não pertencem a imagem de φ .

Lema B.0.5. O ponto $i_M(a, 0, c \pm 1)$ pertence ao conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$ se, e somente se, $3 - a^2 \pm 4c + c^2 = 0$.

Demonstração: Tome a parametrização local $\varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de $S_{(a,c)}$ dada por

$$\varphi_2(u, v) = (\cos v + a, \sin u \sin v, \cos u \sin v + c).$$

Assim, $\varphi_2(0, \pi/2) = (a, 0, c + 1)$ e $\varphi_2(\pi, \pi/2) = (a, 0, c - 1)$. Logo, $\tilde{\varphi}_2 = i_M \circ \varphi_2$ é uma parametrização local de $\tilde{S}_{(a,c)}$ e $i_M(a, 0, c \pm 1)$ pertence a imagem de $\tilde{\varphi}_2$. Ao calcular o conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$, utilizando $\tilde{\varphi}_2$, segue que $i_M(a, 0, c + 1)$ pertence ao conjunto parabólico se, e somente se, $-3 + a^2 - 4c - c^2 = 0$. Por outro lado, $i_M(a, 0, c - 1)$ pertence ao conjunto parabólico quando $-3 + a^2 + 4c - c^2 = 0$. ■

Considere o plano ac dos parâmetros. Ao longo do trabalho foram obtidas equações que delimitam o comportamento do conjunto parabólico, ou seja, estas equações definem curvas no plano ac e estas curvas separam as possíveis configurações do conjunto parabólico. Como foi dito inicialmente, é possível supor sem perda de generalidade que $a \geq 0$ e $c \geq 0$ e considerar apenas no primeiro quadrante do plano ac . Os resultados obtidos culminam no seguinte teorema.

Teorema B.0.1. A configuração do conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$ depende apenas da região da estratificação do plano ac determinada pelas hipérbolas $c^2 - a^2 \pm 4c + 3 = 0$ e $a^2 - c^2 \pm 4a + 3 = 0$, retas $(a \pm c)^2 = 2$ e $a = \pm c$, circunferência $a^2 + c^2 = 1$.

Demonstração: Sejam \tilde{F} e \tilde{H} as imagens por $\tilde{\varphi}$ dos zeros de f e h , respectivamente. O conjunto parabólico de $\tilde{S}_{(a,c)}$ é dado pela união de \tilde{F} e \tilde{H} . Da Proposição B.0.1, segue que tais conjuntos são disjuntos. O Lema B.0.2 descreve as configurações de \tilde{F} . Por outro lado, dos Lemas B.0.3 e B.0.4 seguem as curvas que delimitam as configurações de \tilde{H} . Por fim, o Lema B.0.5 estuda os pontos $(a, 0, c \pm 1)$, que não são contemplados pela parametrização local φ . ■

