UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Regulador de Borel na K-teoria algébrica

Piere Alexander Rodriguez Valerio

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matematica (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Piere Alexander Rodriguez Valerio

Regulador de Borel na K-teoria algébrica

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Behrooz Miirzai

USP – São Carlos
Janeiro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R696r Rodriguez Valerio, Piere Alexander
Regulador de Borel na K -teoria algébrica / Piere Alexander Rodriguez Valerio; orientador Berhooz Miirzai. -- São Carlos, 2019.
97 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. K -grupos. 2. K -teoria algebraica. 3. Anel de inteiros. 4. Mapa regulador de Borel. I. Miirzai, Berhooz , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Piere Alexander Rodriguez Valerio

Borel Regulator in Aalgebraic K-theory

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Behrooz Miirzai

USP – São Carlos
January 2019

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, em especial a meus pais, Ciro Rodriguez e Carmen Valerio, e a meus irmãos Ciro J. Rodriguez, Danery Rodriguez e Emanoel M. dos Santos Freire, pelo carinho e apoio incondicional.

Agradeço também ao meu orientador, o Prof. Dr. Behrooz Miirzai,quem foi como um pai para mim, pelo tempo, paciência e apoio em tudo momento do mestrado.

Finalmente gostaria de agradecer ao ICMC pela oportunidade de fazer o mestrado e à CAPES pelo apoio financeiro.

“ Cualquiera puede ser un héroe, incluso un hombre que hace algo tan sencillo y reconfortante como ponerle un abrigo en los hombros a un niño para hacerle saber que la vida sigue.”

(Bruce Wayne)

RESUMO

RODRIGUEZ, P. A. **Regulador de Borel na K-teoria algébrica**. 2019. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Neste trabalho, nos apresentamos a K-teoria algébrica a qual é um ramo da álgebra que associa para cada anel comutativo com unidade R, uma sequencia de grupos abelianos ditos de n-ésimos K-grupos do anel R, denotada por $K_n(R)$. A meados da década de 1950, Alexander Grothendieck da a definição do $K_0(R)$ de um anel R. Em 1962, Hyman Bass e Stephen Schanuel apresenta a primeira definição adequada do $K_1(R)$ de um anel R. Em 1970, Daniel Quillen da uma definição geral dos K-grupos de um anel R a partir da $+$-construção do espaço classificante $BGL(R)$. Nosso interesse é o estudo dos K-grupos sobre o anel de inteiros $\mathscr{O}_F$ sobre um corpo numérico F. Usando alguns resultados de homologia dos grupos lineares, neste trabalho daremos a definição do mapa regulador de Borel.

Palavras-chave: K-grupos, K-teoria algebraica, Anel de inteiros, Mapa regulador de Borel.

ABSTRACT

RODRIGUEZ, P. A. **Borel Regulator in Aalgebraic K-theory**. 2019. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

In this paper, we present the algebraic K-theory, which is a branch of algebra that associates to any ring with unit R a sequence of abelian groups called n-th K-groups of R, denoted by $K_n(R)$. The mid-1950s, Alexander Grothendieck gave a definition of the $K_0(R)$ of any ring R. In 1962, Hyman Bass and Stephen Schanuel gave the first adequate definition of K_1 of any ring R. In 1970, Daniel Quillen gave a general definition of K-groups of any ring R using the $+$-construction of the classifying space $BGL(R)$. Our interest is the study of the K-groups on the ring of integers $\mathscr{O}_F$ over a number field F. Using some results of homology of linear groups, this work will give the definition of Borel's regulator map.

Keywords: K-groups, Algebraic K-theory, Ring of integers, Borel's regulator map.

SUMÁRIO

Introdução 17

1 ÁLGEBRAS DE HOPF 19
1.1 Preliminares 19
1.1.1 Sequências exatas 20
1.1.2 Módulos Especiais 22
1.1.3 Produto tensorial 23
1.1.4 Anéis e módulos graduados 24
1.2 Álgebras e coálgebras graduadas 25
1.2.1 Álgebra de Hopf 29
1.3 Álgebras de Hopf sobre corpos 32
1.4 Álgebras de Lie e álgebras de Hopf 33

2 COHOMOLOGIA DE GRUPOS E O ISOMORFISMO DE VAN EST 37
2.1 Homologia e Cohomologia de um complexo 37
2.1.1 functor Tor e Ext 40
2.2 Homologia e Cohomologia de grupo 41
2.2.1 G-módulos 41
2.2.2 Homologia de grupo 43
2.2.3 Cohomologia de grupo 44
2.3 Cohomologia de De Rham 46
2.4 Teorias de Homologia e Cohomologia 48
2.4.1 Homologia e Cohomologia singular 48
2.4.2 Homotopia racional dos H-espaços 49
2.4.2.1 Produto Whitehead 50
2.4.3 Relações entre a homologia e cohomologia de grupos 51
2.5 Cohomologia de Álgebra de Lie 52
2.5.1 Cohomologia de De Rham de um grupo de Lie 53
2.5.2 Grupos de Lie semisimples 56
2.5.3 Cohomologia relativa de álgebra de Lie 59
2.6 Cálculo da Cohomologia contínua 61

3 K-TEORIA ALGÉBRICA DE ANÉIS 63
3.1 Grupo K_0 de um anel 63

3.2 Grupo K_1 de um anel 65
3.3 O teorema da unidade 68
3.3.1 Integralidade 68
3.3.2 Retículo 71
3.4 CW-complexos 72
3.5 +-construção 77
3.6 K-teoria de Quillen 80

4 REGULADOR DE BOREL 81
4.1 Definição do Regulador de Borel 81
4.2 O posto do grupo $K_m(\mathscr{O}_F)$ 84
4.3 Os valores da Função Zeta de Dedekind 85

REFERÊNCIAS 87

APÊNDICE A GRUPOS ALGEBRICOS 89
A.1 Definições básicas 89
A.2 Extensão e restrição de escalares 90

APÊNDICE B TEORIA DE HOMOTOPIA 93
B.1 Homomorfismo de Hurewicz 93
B.2 Teorema dos coeficientes universais 93
B.3 Fibrações 94
B.4 Sequência espectral de Serre-Leray 95

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é dar a construção do mapa regular de Borel (Definição 67). Iniciamos definindo o mapa regulador de Dirichlet. Seja F um corpo numérico, seja $\mathcal{O}_F$ o anel de inteiros e seja $\mathcal{O}_F^\times$ o grupo das unidades de $\mathcal{O}_F$. Seja r_1 (respectivamente $2r_2$) o numero de mergulhos reais (respectivamente complexos) de F. No estudo de $\mathcal{O}_F^*$, Dirichlet introduze o mapa

$$\rho : \mathcal{O}_F^\times \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}.$$

A imagem deste mapa esta contida num hiperplano H. Mais ainda, $\rho(\mathcal{O}_F^\times)$ é um retículo de H. Isto é

$$\rho \otimes \mathbb{R} : \mathcal{O}_F^\times \otimes \mathbb{R} \longrightarrow H.$$

é um isomorfismo. Em particular o posto de $\mathcal{O}_F^\times$ é $r_1 + r_2 - 1$. Seja $R_D = \mathrm{Vol}(H/\rho(\mathcal{O}_F^\times))$ o covolume do retículo. Este numero é chamado regulador de Dirichlet. O fato mais interessante sobre este regulador é a formula de numero de classe:

$$R_D = \frac{\omega}{h_F} \lim_{s \longrightarrow 0} \zeta_F(s) s^{-(r_1+r_2-1)}, \tag{1}$$

onde ζ_F é a função zeta de Dedekind do corpo F, ω é o numero de raízes da unidade e h_F é o numero de classe. Dado que a função zeta de Dedekind é definida usando dados locais nos ideais primos de $\mathcal{O}_F$, esta formula pode verse como um principio local ao global altamente não trivial. Para o fato de numero de classe veja-se (NEUKIRCH, 1937).

Recordando que $\mathcal{O}_F^\times$ é o grupo $K_1(\mathcal{O}_F)$ (Teorema 18). A fim de generalizar a formula (1) aos K-grupos de ordem superior, Borel introduze , para todo $n \geq 2$, o morfismo

$$r'_{\mathrm{Bo}} : K_{2n-1}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow V_n,$$

onde V_n é um espaço vetorial real de dimensão

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_n) = d_n = \begin{cases} r_1 + r_2 & ,se \quad n \equiv 1 \mod 2 \\ r_2 & ,se \quad n \equiv 0 \mod 2. \end{cases}$$

Esses morfismos são ditos de mapas reguladores de Borel. Mais ainda, Borel tem provado que r'_{Bo} é um retículo de V_n (Corolário 3). Como consequência obtemos o posto do grupo $K_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$ é d_n.

Lichtenbaum em (LICHTENBAUM, 1973) conjetura que, se escolhemos um natural retículo L' em V_n e definimos

$$R'_{\mathrm{Bo},n} = \mathrm{CoVol}(r'_{\mathrm{Bo}}(K_{2n-1}(\mathcal{O}_F)), L'),$$

então se verifica que

$$R'_{\mathrm{Bo},n} = \pm \frac{\#K_{2n-2}(\mathscr{O}_F)}{\#K_{2n-1}(\mathscr{O}_F)_{tor}} \lim_{s \longrightarrow -p+1} \zeta_F(s)(s+p-1)^{-d_p}. \tag{2}$$

Liechtenbaum da uma concreta escolha do retículo L', mais ressaltou que, devido à falta de exemplos na época, pode ser necessário ajustar a fórmula por algum poder de π e algum número racional.

Em (BOREL, 1977) Borel mostra que

$$R'_{\mathrm{Bo},n} \sim \pi^{-d_n} \lim_{s \to -n+1} \zeta_F(s)(s+n-1)^{-d_n},$$

onde $a \sim b$ significa que existe um elemento $q \in \mathbb{Q}^{\times}$ tais que $qa = b$. O numero $R'_{Bo,n}$ é chamado o regulador de Borel.

Observação 1. O subíndice usado aqui não coincide com a convencional usada em (BOREL, 1977). Em particular o regulador de Borel $R'_{\mathrm{Bo},n}$ é R_{n-1} com a notação de (BOREL, 1977).

CAPÍTULO

1

ÁLGEBRAS DE HOPF

Neste capitulo daremos a definição de álgebras de Hopf,H-espaço e suas propriedades básicas. Denotamos por $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ o conjunto dos números naturais.

1.1 Preliminares

Um anel R é um grupo abeliano $(R, +)$, munido de um produto associativo que é distributivo com respeito à adição.

Definição 1. Seja R um anel comutativo com unidade. Um R**-modulo** M é um grupo abeliano, escrito aditivamente, com um **produto escalar**, $R \times M \longrightarrow M$, escrito por $(r, m) \longmapsto rm$ verificando o seguinte:

(1) $r(m+n) = rm + rn$ e $(r+s)m = rm + sm$ (**distributivo**),

(2) $r(sm) = (rs)m$ (**associativo**),

(3) $1m = m$ (**unitário**).

Um **submódulo** N de M é um subgrupo que é fechado sob o produto, isto é, $rn \in N$ para todo $r \in R$ e $n \in N$.

Por exemplo, no caso de R ser um corpo, um R-modulo é o mesmo que um R-espaço vetorial. Sempre entenderemos um anel R como um anel comutativo com unidade.

Definição 2. Sejam R um anel, M, N R-módulos. Dizemos que um mapa $\alpha : M \longrightarrow N$ é um R**-homomorfismo** se,

$$\alpha(rm + sn) = r\alpha(m) + s\alpha(n),$$

onde $m \in M$, $n \in N$ e $r, s \in R$. O conjunto dos R-homomorfismo α é denotado por $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ou simplesmente por $\mathrm{Hom}(M, N)$. Um homomorfismo α é dito de **isomorfismo** se é bijetivo.

Para cada homomorfismo $\alpha : M \longrightarrow N$ definimos seu **núcleo** e a sua **imagem**

$$\ker(\alpha) := \alpha^{-1}(0) \subset M \text{ e } \mathrm{Im}(\alpha) := \alpha(M) \subset N.$$

Eles são definidos como conjuntos, mais eles são submódulos.

Observação 2. Podemos dar uma estrutura de R-modulo a $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ com adição e produto por um escalar dado por:

$$(\alpha+\beta)(m) := \alpha(m)+\beta(m) \text{ e } (r\alpha)(m) := r(\alpha(m)) = \alpha(rm),$$

onde $r \in R$ e $m \in M$. Dados os homomorfismos $\alpha : L \longrightarrow M$ e $\beta : N \longrightarrow P$ eles induz , via composição, um mapa

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\alpha,\beta) : \mathrm{Hom}(M,N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(L,P) \\ f &\longmapsto \beta \circ f \circ \alpha, \end{aligned}$$

o qual é um homomorfismo. Quando α é o homomorfismo identidade id_M, denotamos por β_* ao homomorfismo $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_M,\beta)$; analogamente, denotamos por α^* ao homomorfismo $\mathrm{Hom}(\alpha,\mathrm{id}_N)$. Na lingua da Teoria de Categorias, podemos ver a $\mathrm{Hom}(M,\cdot)$ como um functor covariante e ao $\mathrm{Hom}(\cdot,N)$ como um functor contravariante definidos por

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M,\cdot) : \mathrm{Mod_R} &\longrightarrow \mathrm{Mod_R} \\ N &\longmapsto \mathrm{Hom}(M,N) \\ (f : N \to N') &\longmapsto (f_* : \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,N')), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\cdot,N) : \mathrm{Mod_R} &\longrightarrow \mathrm{Mod_R} \\ M &\longmapsto \mathrm{Hom}(M,N) \\ (f : M \to M') &\longmapsto (f^* : \mathrm{Hom}(M',N) \to \mathrm{Hom}(M,N)), \end{aligned}$$

onde $\mathrm{Mod_R}$ denota a categoria dos R-módulos.

1.1.1 Sequências exatas

Definição 3. Uma (finita ou infinita) sequência de R-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é dita **exata** em M_i se $\ker(\alpha_i) = \mathrm{Im}(\alpha_{i-1})$. A sequência é dita **exata** se é exata em cada M_i, excepto no inicio ou no final.

Exemplo 1. (1) Uma sequência $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M$ é exata se e somente se α é injetiva. Neste caso, podemos identificar L com $\alpha(L)$. Dualmente, a situação análoga com as setas invertidas, uma sequência $M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ é exata se e somente se β é sobrejetora.

(2) Uma sequência $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ é exata se e somente se α é injetiva, β é sobrejetora e $\mathrm{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$. Neste caso a sequência é dita de **sequência exata curta**.

Definição 4. Dizemos que uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M^{'} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M^{''} \longrightarrow 0$$

cinde se existe um isomorfismo $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M^{'} \oplus M^{''}$ tais que $\pi_{M'} \circ \varphi \circ \alpha = \mathrm{id}_{M'}$ e $\beta = \pi_{M''} \circ \varphi$ onde $\pi_{M'} : M^{'} \oplus M^{''} \longrightarrow M^{'}$ e $\pi_{M''} : M^{'} \oplus M^{''} \longrightarrow M^{''}$ são as projeções. Dizemos que um homomorfismo $\rho : M \longrightarrow M^{'}$ é uma **retração** de α se $\rho \circ \alpha = \mathrm{id}_{M'}$. Dualmente, dizemos que um homomorfismo $\sigma : M^{''} \longrightarrow M$ é uma **secção** de β se $\beta \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$

Proposição 1. Seja $0 \longrightarrow M^{'} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M^{''} \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta. Então as seguintes condições são equivalentes:

(1) A sequência cinde.

(2) Existe uma retração $\rho : M \longrightarrow M^{'}$ de α.

(3) Existe uma secção $\sigma : M^{''} \longrightarrow M$ de β.

Demonstração. Vide [(ALTMAN; KLEIMAN, 2012), Proposição 5.9]

Lema 1 (Lema dos cinco). Consideremos o seguinte diagrama de R-módulos

$$\begin{tikzcd}
M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\lambda_4"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\lambda_3"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\lambda_2"] & M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\lambda_1"] & M_0 \arrow[d, "\lambda_0"] \\
N_4 \arrow[r, "\beta_4"] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"] & N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_0
\end{tikzcd}$$

assumamos que as filas são exatas, então

(1) Se λ_3 e λ_1 são sobrejetoras e λ_0 é injetora, então λ_2 é sobrejetora.

(2) Se λ_3 e λ_1 são injetoras e λ_4 é sobrejetora, então λ_2 é injetora.

Demonstração. Vide [(ALTMAN; KLEIMAN, 2012), Exercício 5.14] □

Observação 3. Segue do Lema dos cinco que, se $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ são isomorfismos então λ_2 é um isomorfismo.

□

1.1.2 Módulos Especiais

Agora daremos a definição de alguns de R-módulos especiais, os quais serão usados nas construções futuras.

Definição 5. Sejam R um anel, Λ um conjunto e M um R-modulo. Dado um elemento $m_\lambda \in M$ por cada $\lambda \in \Lambda$, o submódulo **gerado** por $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, é o menor submódulo contendo a $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, isto é, é o conjunto das sumas finitas da forma $\sum r_\lambda m_\lambda$ com $r_\lambda \in R$, o qual é um submódulo. Os elementos $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ são ditos de **linearmente independente** se, sempre que $\sum r_\lambda m_\lambda = 0$ implica que $r_\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Finalmente, dizemos que $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ formam uma **base** de M se eles são linearmente independente e geram M.

Dizemos que M é **finitamente gerado** se ele possui um numero finito de geradores. Dizemos que M é **livre** se admite uma base. Pode-se provar que duas bases de um modulo livre M finitamente gerado tem o mesmo numero de elementos, neste caso o numero de elementos de uma base é dito de **posto do** M.

Exemplo 2. Seja R um anel, definimos o R-modulo $R^{\oplus\Lambda}$ dado por

$$R^{\oplus\Lambda} = \{(r_\lambda) : r_\lambda \in R \text{ com } r_\lambda = 0 \text{ para quase todo } \lambda \in \Lambda\},$$

com a adição e produto escalar em cada componente. Ele tem uma **base canônica**, a qual consiste dos elementos e_μ cuja μ-ésima componente toma o valor da **função delta de Kronecker**, isto é,

$$e_\mu := (\delta_{\mu\lambda}) \quad \text{onde} \quad \delta_{\mu\lambda} = \begin{cases} 1 & se \quad \lambda = \mu \\ 0 & se \quad \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Isto é o exemplo estândar de um R-modulo livre. Pode-se mostrar facilmente que um R-modulo livre é isomorfo a um modulo da forma $R^{\oplus\Lambda}$, onde Λ é o conjunto de índice da base.

Definição 6. Uma **apresentação livre** de um R-modulo M é uma sequência exata

$$F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde F_1, F_2 são R-módulos livres. Se F_1, F_2 são R-módulos de posto finito, então a apresentação é dita **finita**. Se M tem apresentação finita, então M é dito **finitamente apresentado**.

Definição 7. Um R-módulo P é dito de **projetivo** se, dados quaisquer homomorfismo sobrejetor $\beta : M \longrightarrow N$, homomorfismo $\alpha : P \longrightarrow N$, existe um homomorfismo $\lambda : P \longrightarrow M$ tais que, $\alpha = \beta \circ \lambda$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Na língua das categorias, um R-módulo P é projetivo se o functor $\mathrm{Hom}(P,\cdot)$ é exato. No seguinte teorema damos caracterizações para que um R-modulo seja projetivo.

Teorema 1. Sejam R um anel e P um R-modulo, os seguintes enunciados são equivalentes:

(1) O modulo P é projetivo.

(2) Toda sequência exata curta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ cinde.

(3) Existe um modulo K tais que $K \oplus P$ é livre.

(4) Toda sequência exata $N^{'} \longrightarrow N \longrightarrow N^{''}$ induz uma sequência exata

$$\mathrm{Hom}(P,N^{'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,N^{''}). \tag{1.1}$$

(5) Todo homomorfismo sobrejetor $\beta : M \longrightarrow N$ induz um homomorfismo sobrejetor

$$\beta_* : \mathrm{Hom}(P,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,N).$$

Demonstração. Vide [(ALTMAN; KLEIMAN, 2012), Proposição 5.22] □

Segue do teorema anterior que todo R-módulo livre é projetivo.

Definição 8. Um R-módulo Q é dito de **injectivo** se, dados quaisquer homomorfismo injetor $\beta : M \longrightarrow N$, homomorfismo $\alpha : M \longrightarrow Q$, existe um homomorfismo $\lambda : N \longrightarrow Q$ tais que, $\alpha = \lambda \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[dl, "\lambda"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Na língua das categorias, um R-modulo Q é injetivo se o functor $\mathrm{Hom}(\cdot,Q)$ é exato.

1.1.3 Produto tensorial

Definição 9. Sejam R um anel, M, N, P R-módulos. Dizemos que um mapa

$$\alpha : M \times N \longrightarrow P$$

é **bilinear** se é linear em cada variável, isto é, dado $m \in M$ e $n \in N$, os mapas

$$m^{'} \mapsto \alpha(m^{'},n) \quad \text{e} \quad n^{'} \mapsto \alpha(m,n^{'})$$

são R-lineares. Denotamos o conjunto de todos esses mapas por $\mathrm{Bil}_R(M,N;P)$. É claramente um R-módulo, com suma e produto por escalar dada valor a valor.

Definição 10. Sejam M, N R-módulos. Seu **Produto tensorial**, denotado por $M \otimes_R N$ ou simplesmente $M \otimes N$, é construído como o quociente do R-módulo livre $R^{\oplus(M\times N)}$ módulo o submódulo gerado pelos seguintes elementos, onde (m,n) represento o elemento $e_(m,n)$ da base canônica:

$$(m+m^{'},n)-(m,n)-(m^{'},n) \text{ e } (m,n+n^{'})-(m,n)-(m,n^{'}),$$

$$\begin{aligned}(rm,n)&-(m,rn)\\(rm,n)&-r(m,n)\\(m,rn)&-r(m,n),\end{aligned}$$

para cada $m,m^{'} \in M$ e $n,n^{'} \in N$ e $r \in R$. A construção de acima da um mapa bilinear canônico

$$\beta : M\times N \longrightarrow M\otimes_R N.$$

Denotaremos por $m\otimes n := \beta(m,n)$.

Teorema 2 (**Propriedade universal do produto tensorial**)**.** Sejam R um anel, M, N R-módulos. Então $\beta : M\times N \longrightarrow M\otimes_R N$ é o exemplo universal de mapa bilinear sobre $M\times N$, isto é, β induz um isomorfismo de R-módulos,

$$\theta : \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N,P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}_R(M,N;P).$$

Demonstração. Vide [(ALTMAN; KLEIMAN, 2012), Teorema 8.3]. □

1.1.4 Anéis e módulos graduados

Definição 11. Um anel R é $\mathbb{N}$**-graduado**, se existe uma família de subgrupos $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de R tal que

(1) $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ (como grupo abeliano), e

(2) $R_n\cdot R_m \subseteq R_{m+n}$, para todo $n,m\in\mathbb{N}$.

Um elemento não nulo $x\in R_n$ é chamado elemento homogêneo de grau n em R.

Observação 4. Todo anel R pode-se considerar $\mathbb{N}$-graduado, com a graduação trivial dada por

$$R_n = \begin{cases} R & ,se \quad n=0\\ 0 & ,se \quad n\neq 0.\end{cases}$$

Definição 12. Sejam R um anel $\mathbb{N}$-graduado e M um R-modulo. Dizemos que M é um R**-módulo graduado** (ou tem uma R-graduação) se existe uma família de subgrupos $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M tal que

(1) $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ (como grupo abeliano), e

(2) $R_n \cdot M_m \subseteq M_{m+n}$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$

Se $y \in M - \{0\}$ e $y = y_{n_1} + \cdots + y_{n_k}$, onde $y_{n_i} \in M_{n_i} - \{0\}$, os elementos $y_{n_1}, \cdots, y_{n_k}$ são ditos de **componentes homogêneas** da y. Se $x \in M_n - \{0\}$, denotamos deg $x := n$, o grau do elemento homogêneo x.

Se A e B são R-módulos graduados, então $A \otimes_R B$ é o R-módulo graduado tal que $(A \otimes_R B)_n := \bigoplus\limits_{i+j=n} A_i \otimes_R B_j$.

Definição 13 (Homomorfismo de R-módulos graduados)**.** Sejam M e N R-módulos graduados, e $\varphi : M \longrightarrow N$ um R-morfismo é chamado **homogêneo de grau** i, si $\varphi(M_n) \subseteq N_{n+i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

A partir de agora R sera um anel comutativo (consideraremos a R com a graduação trivial, salvo indicação em contrário) e todos os morfismos de R-módulos graduados serão considerados graduados e de grau 0, salvo indicação em contrário.

Observação 5. Se M é um R-módulo graduado, então cada M_n é um R-módulo ($R.M_n \subseteq M_n$).

Dado um R-modulo graduado $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$, denotaremos por M^* ao R-modulo graduado $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(M_n, R)$. Se $f : M \longrightarrow N$ é um mapa de R-módulos graduados, então $f^* : N^* \longrightarrow M^*$ é o mapa dual definido por $f^*(n^*)(m) = n^*(f(m))$, onde $n^* \in N^*$.

Definição 14. Um R-álgebra graduada $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ é dita de **tipo finito** se cada M_n é um R-modulo finitamente gerado.

Proposição 2. Sejam M e N R-módulos graduados os quais são projetivos e de tipo finito. Então

(1) O mapa $\varphi : M \longrightarrow M^{**}$ definido por $\varphi(x)(m^*) = m^*(x)$, onde $x \in M$, $m^* \in M^*$ é um isomorfismo, e

(2) o mapa $\vartheta : M^* \otimes_R N^* \longrightarrow (M \otimes_R N)^*$ definido por $\vartheta(m^* \otimes n^*)(x \otimes y) = m^*(x) \otimes n^*(y)$, onde $m^* \in M^*$, $n^* \in N^*$, $x \in A$ e $y \in B$ é um isomorfismo.

Demonstração. Todo R-modulo projetivo finitamente gerado é finitamente apresentado, e o resultado segue de uma aplicação direita do Lema 1 (Lema dos cinco). $\square$

1.2 Álgebras e coálgebras graduadas

Para qualquer par de R-módulos graduados A e B, seja $T : A \otimes_R B \to B \otimes_R A$, o morfismo definido por

$$T(x \otimes y) = (-1)^{mn} y \otimes x,$$

onde $x \in A_m$, e $y \in B_n$.

Definição 15. Uma R**-álgebra graduada** é um R-módulo graduado A junto com um R-morfismo chamado unidade $\varepsilon : R \to A$ e um R-morfismo chamado multiplicação $\mu : A \otimes_R A \to A$ tal que as composições

$$A \xrightarrow{\cong} A \otimes_R R \xrightarrow{id \otimes \varepsilon} A \otimes_R A \xrightarrow{\mu} A$$

$$A \xrightarrow{\cong} A \otimes_R R \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} A \otimes_R A \xrightarrow{\mu} A$$

são as identidades. Uma R-álgebra graduada A é **associativa** se o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R A \otimes_R A \arrow[r, "id \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes id"'] & A \otimes_R A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes_R A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

é comutativo. Uma R-álgebra graduada é **comutativa** se o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R A \arrow[dr, "\mu"] \arrow[dd, "T"'] & \\ & A \\ A \otimes_R A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição 16. Uma R**-coalgebra graduada** é um R-módulo graduado A junto com a counidade $\eta : A \to R$ e o comultiplicação $\Delta : A \to A \otimes_R A$ tal que a composição

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_R A \xrightarrow{Id \otimes \eta} A \otimes_R R \xrightarrow{\cong} A \tag{1.2}$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_R A \xrightarrow{\eta \otimes Id} R \otimes_R A \xrightarrow{\cong} A$$

são as identidades. Uma R-coalgebra graduada A é **associativa**, se o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes_R A \arrow[d, "id \otimes \Delta"] \\ A \otimes_R A \arrow[r, "\Delta \otimes id"'] & A \otimes_R A \otimes_R A \end{tikzcd}$$

é comutativo. Uma R-coalgebra graduada A é **comutativa** se o diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \otimes_R A \arrow[dd, "T"] \\ A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\ & A \otimes_R A \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Exemplo 3. O anel R tem uma estrutura natural de R-álgebra graduada (R com graduação trivial) com a unidade ε dada pela identidade $\varepsilon = id : R \to R$ e a multiplicação μ dado pelo isomorfismo $R \otimes_R R \xrightarrow{\cong} R$. Além disso, o anel R tem também uma estrutura de R-coalgebra graduada (R com graduação trivial) com a counidade η dada pela identidade $\eta = id : R \to R$ e o coproduto Δ dado pelo isomorfismo $R \xrightarrow{\cong} R \otimes_R R$. Como a multiplicação em R é associativa, então R é um álgebra e uma coalgebra graduada associativa. É claro que se R é comutativo, essas estruturas também são comutativas onde $T : R \otimes_R R \longrightarrow R \otimes_R R$ bem dado por $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

Teorema 3. Se A é R-álgebra graduada com multiplicação $\mu : A \otimes_R A \longrightarrow A$, e o R-modulo A é projetivo e de tipo finito, então A^* é uma R-coalgebra com comultiplicação $\Delta := \mu^* : A^* \longrightarrow A^* \otimes_R A^*$, e

(1) A é associativo, se e somente se A^* é associativo,

(2) A é aumentado, se e somente se A^* é aumentado,

(3) A é comutativo, se e somente se A^* é comutativo.

Demonstração. Segue imediato da definição e a Proposição 2. □

Teorema 4. Se A é R-coálgebra graduada com comultiplicação $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_R A$, e o R-modulo A é projetivo e de tipo finito, então A^* é uma R-álgebra com multiplicação $\mu := \Delta^* : A^* \otimes_R A^* \longrightarrow A^*$, e

(1) A é associativo, se e somente se A^* é associativo,

(2) A é aumentado, se e somente se A^* é aumentado,

(3) A é comutativo, se e somente se A^* é comutativo.

Demonstração. Segue imediato da definição e a Proposição 2. □

Observação 6. Se A é projetivo e de tipo finito então A^* é projetivo e de tipo finito. A reciproca não sempre é verdadeira

Definição 17. Se $(A, \mu_A, \varepsilon_A,)$ e $(B, \mu_B, \varepsilon_B)$ um par de R-álgebras graduadas, então $A \otimes_R B$ é a R-álgebra graduada com multiplicação $\mu_{A \otimes_R B} : (A \otimes_R B) \otimes_R (A \otimes_R B) \longrightarrow A \otimes_R B$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R B \otimes_R A \otimes_R B \arrow[r, "id \otimes T \otimes id"] \arrow[dr, "\mu_{A \otimes B}"'] & A \otimes_R A \otimes_R B \otimes_R B \arrow[d, "\mu_A \otimes \mu_B"] \\ & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

é comutativo, e com unidade $\varepsilon_{A\otimes_R B}: R \longrightarrow A\otimes_R B$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R B \arrow[r, "\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B"] \arrow[dr, "\varepsilon_{A\otimes B}"'] & R\otimes_R R \arrow[d, "\cong"] \\ & R \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Se (A,Δ_A,η_A) e (B,Δ_B,η_B) um par de R-coálgebras graduadas, então $A\otimes_R B$ é a R-coálgebra graduada com coproduto $\Delta_{A\otimes_R B}: A\otimes_R B \longrightarrow (A\otimes_R B)\otimes_R (A\otimes_R B)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R B\otimes_R A\otimes_R B & A\otimes_R A\otimes_R B\otimes_R B \arrow[l, "id\otimes T\otimes id"'] \\ & A\otimes_R B \arrow[u, "\Delta_A\otimes\Delta_B"'] \arrow[ul, "\Delta_{A\otimes B}"] \end{tikzcd}$$

é comutativo, e com counidade $\eta_{A\otimes_R B}: R \longrightarrow A\otimes_R B$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R B & R\otimes_R R \arrow[l, "\eta_A\otimes\eta_B"'] \\ & R \arrow[u, "\cong"'] \arrow[ul, "\eta_{A\otimes B}"] \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição 18. (1) Seja (A,μ_A,ε_A), (B,μ_B,ε_B) duas R-álgebras graduadas. Dizemos que um R-morfismo $f: A \longrightarrow B$ é um **morfismo de álgebras** se os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & R \arrow[ul, "\varepsilon_A"] \arrow[ur, "\varepsilon_B"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes_R A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B\otimes_R B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}.$$

(2) Seja (C,Δ_c,η_C), (D,Δ_D,η_D) duas R-coalgebras graduadas. Dizemos que um R-morfismo $g: C \longrightarrow D$ é um **morfismo de coalgebras** se os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\eta_C"'] \arrow[dr, "\eta_D"] & \\ C \arrow[rr, "g"'] & & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C\otimes_R C \arrow[r, "g\otimes g"] & D\otimes_R D \\ A \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}.$$

Proposição 3. Seja A um R-módulo graduado que tem uma estrutura de R-álgebra (A,μ,ε) e uma estrutura de R-coálgebra (A,Δ,η). As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Os mapas μ e ε são morfismos de R-coálgebras.

(ii) Os mapas Δ e η são morfismo de R-álgebras.

Demonstração. Segue imediato dos seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R A \otimes_R A \otimes_R A \arrow[rr, "\mu\otimes\mu"] & & A \otimes_R A \\
A \otimes_R A \otimes_R A \otimes_R A \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes T\otimes \mathrm{id}"] & & \\
A \otimes_R A \arrow[u, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[rr, "\mu"'] & & A \arrow[uu, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \otimes_R R \arrow[r, "\cong"] & R \\
A \otimes_R A \arrow[u, "\eta\otimes\eta"] \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_R R \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] & A \otimes A \\
R \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & A \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& R & \\
C \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\varepsilon"'] & & D \arrow[ul, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

□

1.2.1 Álgebra de Hopf

Definição 19. Um R-módulo graduado A, junto com uma unidade ε, uma counidade η, um produto μ, e um coproduto Δ, é uma **Álgebra de Hopf** se,

(i) (A, μ, ε) é uma R-álgebra associativa,

(ii) (A, Δ, η) é uma R-coálgebra associativa,

(iii) μ e ε são morfismos de R-coálgebras,

(iv) Δ e η são morfismos de R-álgebras.

Observação 7. Pela proposição anterior, os itens (iii) e (iv) são equivalentes.

Pela definição temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\eta_A"] & & R \\
& R \arrow[ul, "\varepsilon_A"] \arrow[ur, "\varepsilon_R=\mathrm{id}_R"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, pois η_A é um morfismo de R-álgebras, então A pode ser considerado como a suma direita

$$A = \mathrm{Im}(\varepsilon) \bigoplus \ker(\eta) \tag{1.3}$$

e os R-módulos $\ker(\eta)$ e $\mathrm{coker}(\varepsilon)$ são isomorfos e será denotado por $\overline{A}$. Assim

$$0 \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} R \longrightarrow 0 \qquad \text{e} \qquad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow 0$$

são sequências curtas exatas. Além disso o triangulo superior direito do diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[ddr, "\cong"] & A \otimes_R A \arrow[dd, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \\
R \arrow[d, "\cong"'] & \\
R \otimes_R R & R \otimes_R A \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo desde que $\eta : A \longrightarrow R$ é a counidade da R-coalgebra. A parte inferior do diagrama é comutativa, pois $\eta : A \longrightarrow R$ é um morfismo de R-álgebras e $\eta \otimes \eta = (\eta \otimes id) \circ (id \otimes \eta)$.

Definição 20. Uma álgebra de Hopf A é **conexa** se uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:

(1) $\varepsilon : R \xrightarrow{\cong} A_0$,

(2) $\eta : A_0 \xrightarrow{\cong} R$.

Portanto, se A é uma álgebra de Hopf conexa, $\overline{A} = \bigoplus_{n>0} A_n$. Vemos que para qualquer álgebra de Hopf A, temos $A = R \bigoplus \overline{A}$ como um R-modulo,

$$A \otimes_R A = R \otimes_R R + R \otimes_R \overline{A} + \overline{A} \otimes_R R + \overline{A} \otimes_R \overline{A}, \tag{1.4}$$

e para cada $x \in A$, temos

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum x_i^{'} \otimes x_i^{''} \tag{1.5}$$

com $x_i^{'}, x_i^{''} \in \overline{A}$. Se A é conexa, então $0 < \deg\ x_i^{'} < \deg\ x$.

Observação 8. Se R é um corpo e A uma R-álgebra de tipo finito então como $A = R \bigoplus \overline{A}$ temos que $A^* = R \bigoplus \overline{A}^*$ e assim temos $\overline{A^*} = \overline{A}^*$.

Definição 21. Se A é uma álgebra de Hopf definimos $Q(A)$ como o conucleo do mapa induzido pelo produto $\mu : \overline{A} \otimes_R \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$, isto é $Q(A) = \overline{A}/\overline{A}^2$. Os elementos de $Q(A)$ são ditos de **elementos indecomponíveis de** A. E assim, temos a seguinte sequência exata

$$\overline{A} \otimes_R \overline{A} \xrightarrow{\mu} \overline{A} \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0. \tag{1.6}$$

Definição 22. Se A é uma álgebra de Hopf definimos $P(A)$ como o núcleo do mapa

$$\begin{aligned} \delta : \overline{A} &\to \overline{A} \otimes_R \overline{A} \\ x &\mapsto \sum x_i^{'} \otimes x_i^{''}, \end{aligned}$$

onde $\sum x_i^{'} \otimes x_i^{''}$ é como em (1.5). Os elementos da $P(A)$ são ditos de **elementos primitivos de** A. E assim, temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow P(A) \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{\delta} \overline{A} \otimes_R \overline{A} \tag{1.7}$$

Observação 9. Se $x \in \overline{A}$, que por (1.5) temos $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \delta(x)$. E portanto, $x \in \overline{A}$ é primitivo se e somente se $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$.

Proposição 4. Seja K um corpo e A uma álgebra de Hopf sobre K a qual é um K-modulo de tipo finito, então

(1) $P(A^*) = Q(A)^*$

(2) $Q(A^*) = P(A)^*$

Demonstração. Temos a seguintes sequências exatas

$$\overline{A} \otimes_R \overline{A} \xrightarrow{\mu} \overline{A} \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow P(A) \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{\delta} \overline{A} \otimes_R \overline{A}.$$

Dualizando e pela Proposição 2

$$0 \longrightarrow Q(A)^* \longrightarrow \overline{A}^* \xrightarrow{\mu^*} \overline{A}^* \otimes_R \overline{A}^*$$

e

$$\overline{A}^* \otimes_R \overline{A}^* \xrightarrow{\delta^*} \overline{A}^* \longrightarrow P(A)^* \longrightarrow 0$$

Por tanto, da Observação 8 temos

$$P(A^*) = Q(A)^*$$

e

$$Q(A^*) = P(A)^*.$$

□

Proposição 5. Seja K um corpo, $f : A \longrightarrow B$ um mapa de álgebras de Hopf conexas sobre K, $P(f) : P(A) \longrightarrow P(B)$, e $Q(f) : Q(A) \longrightarrow Q(B)$ são os mapas induzidos pela f. Isto é, os seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(A) \arrow[r] \arrow[d, "P(f)"] & \overline{A} \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "f"] & \overline{A} \otimes_R \overline{A} \arrow[d, "f\otimes f"] \\
0 \arrow[r] & P(B) \arrow[r] & \overline{B} \arrow[r, "\delta_B"] & \overline{B} \otimes_R \overline{B}
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\overline{A} \otimes_R \overline{A} \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "f\otimes f"] & \overline{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q(A) \arrow[r] \arrow[d, "Q(f)"] & 0 \\
\overline{B} \otimes_R \overline{B} \arrow[r, "\mu_B"] & P(B) \arrow[r] & Q(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

são comutativos. Então

(1) f é um monomorfismo se e somente se $P(f)$ é um monomorfismo ,e

(2) f é um epimorfismo se e somente se $Q(A)$ é um epimorfismo.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Proposição 3.8]. □

1.3 Álgebras de Hopf sobre corpos

Agora consideramos a R como um corpo, o qual denotaremos por K.

Definição 23. Se L é um espaço vetorial graduado sobre K, denotamos por $T(L) = \bigoplus_{n>0} T^n(L)$, onde $T^n(L) = L \otimes_K L \otimes_K \cdots \otimes_K L$ (n-vezes), a **álgebra associativa livre**, ou álgebra tensor, gerada pela L, onde a multiplicação é dada pela concatenação de elementos e a unidade pela inclusão. Denotamos também por $\Lambda(L)$ a álgebra quociente da $T(L)$ pelo ideal gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - (-1)^{mn} y \otimes x$, onde $x \in L_m$ e $y \in L_n$. A álgebra $\Lambda(L)$ a qual é dita de **álgebra associativa comutativa livre** gerada pela L. Se L é tal que $L_n = 0$ para n par, denotamos por $E(L)$ a álgebra quociente da $T(L)$ pelo ideal gerado pelos elementos da forma x^2, onde $x \in L$. A álgebra $E(L)$ é dita de **álgebra de Grassmann ou álgebra exterior** gerada pela L.

Observação 10. Se B é qualquer álgebra associativa e L como antes, e $f : L \longrightarrow B$ um mapa de espaços vetoriais graduados, então existe um único mapa $\widetilde{f} : T(L) \longrightarrow B$ tais que $\widetilde{f} \circ i = f$ onde i é a inclusão de L em $T(L)$. Além disso, se B é comutativa o mapa $\widetilde{f}$ se fatora de maneira única pela $\Lambda(L)$. Assim tanto o functor $T(.)$ e o functor $\Lambda(.)$ são functores adjuntos a esquerda do functor esquecedor, e por tanto eles preservam coprodutos (objetos de categorias)

Se $L = L' \bigoplus L''$, então $T(L)$ é o produto livre de $T(L')$ e $T(L'')$ (coproduto na categoria das álgebras associativas), e $\Lambda(L) = \Lambda(L') \otimes \Lambda(L'')$ (coproduto na categoria das álgebras comutativas associativas). Mais ainda, se L é um limite direito de espaços vetoriais sobre K, então $T(L)$ é o limite direito das correspondentes álgebras associativas livres, e $\Lambda(L)$ é o limite direito das álgebras comutativas associativas livres.

Proposição 6. Se B é uma álgebra de Hopf conexa sobre um corpo K de característica zero, então o mapa natural verifica o seguinte:

(1) $P(B) \longrightarrow Q(B)$ é monomorfismo se e somente se o produto em B é comutativo e associativo, e

(2) $P(B) \longrightarrow Q(B)$ é sobrejetivo se e somente se o coproduto da B é comutativo e associativo.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Lema 4.3] □

Proposição 7. Se B é uma álgebra de Hopf conexa com produto associativo e seja $L = Q(B)$, existe um mapa $\overline{\Delta} : T(L) \longrightarrow T(L) \otimes_K T(L)$ com o qual $T(L)$ torna-se uma álgebra de Hopf, e um mapa $f : T(L) \longrightarrow B$ de álgebras de Hopf tais que

(1) f é um sobrejetor e

(2) $Q(f) : Q(T(L)) \longrightarrow Q(B)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Proposição 4.4] □

Proposição 8. Se B é uma álgebra de Hopf com produto comutativo e associativo e $L = Q(B)$, existe um mapa $\overline{\Delta} : \Lambda(L) \longrightarrow \Lambda(L) \otimes_K \Lambda(L)$ com o qual $\Lambda(L)$ torna-se uma álgebra de Hopf, e um mapa $g : \Lambda(L) \longrightarrow \Lambda(L) \otimes_K \Lambda(L)$ de álgebras de Hopf tais que

(1) g e um epimorfismo, e

(2) $Q(g) : Q(\Lambda(L) \longrightarrow Q(B)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Proposição 4.5] □

Teorema 5 (Hopf-Leray). Se B é uma álgebra de Hopf conexa com produto comutativo e associativo sobre um corpo K de característica zero, e $L = Q(B)$, então B é isomorfo com $\Lambda(L)$ como álgebra.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Teorema 4.6] □

Teorema 6 (Samelson-Leray). Seja B uma álgebra de Hopf conexa sobre o corpo K, com produto comutativo associativo e coproduto associativo, e suponhamos que B é gerada como álgebra por um conjunto de elementos $\{x_i\}$ tais que $x_i^2 = 0$ e o grau de x_i é impar. Seja $L = P(B)$, e definimos um coproduto em $E(L)$, o álgebra exterior gerada pela L, definindo $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ para $x \in L$. Então B é isomorfa com $E(L)$ como uma álgebra de Hopf. Em particular $Q(B) \longrightarrow Q(E(L)) = L$ é um isomorfismo.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Teorema 4.10] □

1.4 Álgebras de Lie e álgebras de Hopf

Nesta secção todas as álgebras serão definidas sobre um corpo K, e devemos assumir que tem produto associativo com unidade. Mais ainda, por uma álgebra de Hopf entenderemos por uma álgebra de Hopf associativa, em outras palavras temos produto e coproduto associativo. Finalmente um espaço vetorial significara um espaço vetorial sobre K graduado.

Definição 24. Se A é uma álgebra, definimos $[\cdot,\cdot] : A \otimes_K A \longrightarrow A$ por $[x,y] = xy - (-1)^{nm} yx$, onde $x \in A_n$ e $y \in A_m$.

Uma **álgebra de Lie** is um espaço vetorial L munido de um mapa de espaços vetoriais $[\cdot,\cdot] : L \otimes_K L \longrightarrow L$ tais que para alguma álgebra A existe um monomorfismo de espaços vetoriais $f : L \longmapsto A$ tais que $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ para $x, y \in L$.

Observação 11. Pela definição anterior temos que toda álgebra associativa é uma álgebra de Lie com $[x,y] = xy - (-1)^{nm}yx$, onde $x \in A_n$ e $y \in A_m$ e $f = id_A$.

Lema 2. Se L é uma álgebra Lie, $x \in L_n$, $y \in L_m$, $z \in L_r$, então

(1) $[x,y] = (-1)^{nm+1}[y,x]$,

(2) $(-1)^{nr}[x,[y,z]] + (-1)^{mn}[y,[z,x]] + (-1)^{rn}[z,[x,y]] = 0$,

(3) $[x,[x,x]] = 0$, e

(4) $[x,x] = 0$ se n é par ou $char(K) = 2$.

Demonstração. Imediato pela definição. □

Proposição 9. Se L é uma álgebra de Lie, existe uma álgebra $U(L)$ e um monomorfismo $i : L \longrightarrow U(L)$ de álgebras de Lie tais que se A é uma álgebra, e $f : L \longrightarrow A$ é um mapa de álgebras de Lie, existe um único mapa de álgebras $\overline{f} : U(L) \longrightarrow A$ tais que $\overline{f} \circ i = f$. Se $V(L)$ e $j : L \longrightarrow V(L)$ são quaisquer outras álgebra e monomorfismo de álgebra de Lie, então $\overline{j} : U(L) \longrightarrow V(L)$ é um isomorfismo

Definição 25. Se L é uma álgebra de Lie, e i : $L \longrightarrow U(L)$ é um monomorfismo satisfazendo as condições anteriores , $U(L)$ é dito de **álgebra universal** de L.

Proposição 10. Se A é uma álgebra de Hopf, então $P(A)$ é uma subálgebra de A.

Demonstração. Sejam $x \in P(A)_n$, $y \in P(A)_m$, então

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \ \Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y,$$

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = xy \otimes 1 + 1 \otimes xy + x \otimes y + (-1)^{nm} y \otimes x,$$
$$\Delta(yx) = \Delta(y)\Delta(x) = yx \otimes 1 + 1 \otimes yx + y \otimes x + (-1)^{nm} x \otimes y,$$

$$\Delta([x,y]) = [x,y] \otimes 1 + 1 \otimes [x,y],$$

então $[x,y] \in P(A)_{n+m}$, e portanto $P(A)$ é uma subálgebra de Lie de A. □

Proposição 11. Se L é uma álgebra de Lie, existe um único mapa $\overline{\Delta} : U(L) \longrightarrow U(L) \otimes_K U(L)$ tais que $U(L)$ é uma álgebra de Hopf, e $L \subset P(U(L))$.

Definição 26. Uma álgebra de Lie L é comutativa se $[x,y]=0$ para $x,y \in L$. Se L' e L'' são álgebras de Lie, então $L' \bigoplus L''$ é a álgebra de Lie munido do mapa $[(x',x''),(y',y'')] := ([x',y'],[x'',y''])$ para $x',y' \in L'$, $x'',y'' \in L''$.

Observação 12. (1) Se L é uma álgebra de Lie comutativa, então o ideal gerado pelos elementos da forma $xy-(-1)^{nm}yx-[x,y]$ com $x \in L_n$, $y \in L_m$ em $T(L)$, é o mesmo que o ideal gerado por $xy-(-1)^{nm}yx$ com $x \in L_n$, $y \in L_m$ e assim temos que $U(L)=\Lambda(L)$.

(2) Se L e M são álgebras de Lie, então $U(L \bigoplus M) = U(L) \otimes U(M)$, pois o functor $U(.)$ é um functor adjunto a esquerda do functor esquecedor.

Teorema 7. Seja A um álgebra de Hopf conexa com coproduto comutativo sobre um corpo K de característica zero. Então o mapa $U(P(A)) \longrightarrow A$,induzido pelo mapa natural $P(A) \longrightarrow A$, é um isomorfismo de álgebras de Hopf.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Teorema 5.22] □

O teorema anterior nos diz quando uma álgebra de Hopf sobre um corpo de característica zero é gerada (como álgebra) pelos elementos primitivos.

Definição 27. Se B é um espaço vetorial, denotamos por $L(B)$ a álgebra de Lie em $T(B)$ gerado pelo espaço vetorial B.

Proposição 12. Se B é um espaço vetorial sobre K, então $U(L(B)) = T(B)$.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1959), Proposição 5.16] □

Definição 28. Se L é uma álgebra de Lie e $U(L)$ sua álgebra universal, definimos uma filtração sobre $U(L)$ definindo

$$F_0U(L) = K, \qquad F_1U(L) = K + L, \quad \text{e} \quad F_nU(L) = (F_1U(L))^n.$$

Seja $E^0 = \sum_{r,s} E^0_{r,s}U(L)$ onde $E^0_{r,s} = (F_rU(L)/F_{r-1}U(L))_{r+s}$, e $E^0_rU(L) = \sum_s E^0_{r,s}U(L)$.

Teorema 8 (Poincaré-Birkhoff-Witt). Se K é um corpo de característica zero, L uma álgebra de Lie sobre K, entao o morfismo natural

$$E^0(\Lambda(L)) \longrightarrow E^0(U(L))$$

é um isomorfismo de álgebras de Hopf bi-graduadas.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1965), Teorema 5.15]

□

Corolário 1. Se L é uma álgebra de Lie sobre K. Então existe um (não natural) isomorfismo de K-módulos entre $\Lambda(L)$ e $U(L)$.

Definição 29. Uma K-álgebra graduada, o produto é dito de **estritamente comutativa** se é comutativo e se $x^2 = 0$ para todo x homogêneo em A de grau impar.

Teorema 9 (Samelson-Leray). Seja A uma álgebra de Hopf conexa sobre um corpo K , com produto estritamente comutativo e $Q(A)_n = 0$ para n par. Então, o morfismo natural $E(P(A)) \longrightarrow A$, induzido pelo mapa natural $P(A) \longrightarrow A$, é um isomorfismo de álgebras de Hopf.

Demonstração. Vide [(MILNOR; MOORE, 1965), Teorema 7.20] □

CAPÍTULO

2

COHOMOLOGIA DE GRUPOS E O ISOMORFISMO DE VAN EST

Neste capitulo daremos as definições das teoria de homologia e cohomologia que usaremos mas adiante.

2.1 Homologia e Cohomologia de um complexo

Definição 30. Seja R um anel. Um sequência de R-homomorfismos

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{d_2} A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \longrightarrow 0$$

é dita de **complexo de cadeias** se $d_n \circ d_{n+1} = 0$, isto é $Im(d_{n+1}) \subset \ker(d_n)$, para todo $n \geq 0$. Denotamos este complexo por $(A_\bullet, d_\bullet)$ ou simplesmente por $A_\bullet$, os R-homomorfismos d_n são ditos de **diferencial** ou **operador bordo** de $A_.$. Dualmente, uma sequência de R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \longrightarrow A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} A^{n+2} \longrightarrow \ldots$$

é dita de **complexo de cocadeias** se $d^{n+1} \circ d^n = 0$, isto é $Im(d^n) \subset \ker(d^{n+1})$, para todo $n \geq 0$. Denotamos este complexo por $(A^\bullet, d^\bullet)$ ou simplesmente por $A^\bullet$, os R-homomorfismos d^n são ditos de **diferencial** ou **operador cobordo** de $A^\bullet$.

Definição 31. Sejam $A^1_\bullet$ e $A^2_\bullet$ dois complexos de cadeias. Uma família de R-homomorfismos $\{f_n : A^1_n \longrightarrow A^2_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita de **morfismo entre complexos de cadeias** se $f_n \circ d^1_{n+1} = d^2_{n+1} \circ f_{n+1}$, para todo $n \geq 0$. Denotamos este morfismo por $f_\bullet$. Dualmente, sejam $B^\bullet_1$ e $B^\bullet_2$ dois complexos de cocadeias. Uma família de R-homomorfismos $\{g^n : B^n_1 \longrightarrow B^n_2\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita de **morfismo entre complexos de cocadeias** se $g^{n+1} \circ d^n_1 = d^n_2 \circ g^n$, para todo $n \geq 0$. Denotamos este morfismo por $g^\bullet$.

Definição 32 (Homologia de um complexo). Seja $A_\bullet$ um complexo de cadeias , denotamos por

$C_n(A_\bullet) := A_n$, cujos elementos são chamados n-cadeias,

$Z_n(A_\bullet) := \ker(d_n)$, cujos elementos são chamados n-ciclos,

$B_n(A_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1})$, cujos elementos são chamados n-bordos ou n-ciclos triviais,

$H_n(A_\bullet) := Z_n(A_\bullet)/B_n(A_\bullet)$.

O grupo abeliano $H_n(A_\bullet)$ é dito de n-**ésimo grupo de homologia do complexo** $A_\bullet$.

De maneira dual podemos definir os grupos de cohomologia de um complexo de cocadeias, como segue.

Definição 33 (Cohomologia de um complexo). Seja $B^\bullet$ um complexo de cocadeias, denotamos por

$C^n(B^\bullet) = B^n$, cujos elementos são chamados n-cocadeias,

$Z^n(B^\bullet) = \ker(d^n)$, cujos elementos são chamados n-cociclos,

$B^n(B^\bullet) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$, cujos elementos são chamados n-cobordos ou n-cociclos triviais,

$H^n(B^\bullet) = Z^n(B^\bullet)/B^n(B^\bullet)$

O grupo abeliano $H^n(B^\bullet)$ é dito de n-**ésimo grupo de cohomologia do complexo** $B^\bullet$.

Observação 13. Todo morfismo entre complexos de cadeias $f_\bullet = \{f_n\} : A^1_\bullet \longrightarrow A^2_\bullet$ define naturalmente uma sequencia de morfismos entre os grupos de homologia, a dizer

$$\begin{aligned}(f_n)_* \colon H_n(A^1_\bullet) &\to H_n(A^2_\bullet)\\ [x] &\mapsto [f_n(x)].\end{aligned}$$

Dualmente, todo morfismo entre complexos de cocadeias $g^\bullet = \{g^n\} : B^\bullet_1 \longrightarrow B^\bullet_2$ define naturalmente uma sequencia de morfismos entre os grupos de cohomologia, a dizer

$$\begin{aligned}(g^n)^* \colon H^n(B^\bullet_1) &\to H^n(B^\bullet_2)\\ [x] &\mapsto [g^n(x)].\end{aligned}$$

Definição 34. Sejam $A^1_\bullet$ e $A^2_\bullet$ e dois morfismo de complexos $f_\bullet$, $h_\bullet$ de $A^1_\bullet$ em $A^2_\bullet$, os morfismos são chamados **homotópicos** se existe uma **homotopia** entre $f_\bullet$ e $h_\bullet$, isto é uma sequencia de R-homomorfismos $s_n : A^1_n \longrightarrow A^2_{n+1}$, para cada $n \geq 1$, tais que

(1) $f_0 - h_0 = d^2_1 \circ s_0$

(2) $f_n - h_n = s_{n-1} \circ d^1_n + d^2_{n+1} \circ s_n$ para todo $n \geq 1$.

Seja $C_\bullet$ um complexo, uma homotopia entre os morfismos de complexos $Id_{C_\bullet}$ e $0_{C_\bullet}$ é chamada **contratante**.

Dizemos que dois complexos $A^1_\bullet$ e $A^2_\bullet$ são **homotopicamente equivalentes** se existem dois morfismos $f_\bullet : A^1_\bullet \longrightarrow A^2_\bullet$ e $g_\bullet : A^2_\bullet \longrightarrow A^1_\bullet$ tais que os morfismos $f_\bullet \circ g_\bullet$ e $g_\bullet \circ f_\bullet$ são homotópicos a $id_{A^2_\bullet}$ e $id_{A^1_\bullet}$ respectivamente. Dualmente, podemos dar as definições anteriores para o caso de complexos de cocadeias.

Observação 14. É imediato mostrar que dois morfismos de complexos $f_\bullet$ e $h_\bullet$ que são homotópicos, definem o mesmo morfismo $(f_n)_*$ e $(g_n)_*$, isto é $(f_n)_* = (g_n)_*$.

Definição 35. Uma **resolução projetiva** de um R-modulo M é um complexo de R-módulos

$$P_\bullet : \ \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0,$$

onde cada P_i é um R-modulo projetivo e existe um R-homomorfismo σ tais que o complexo aumentado

$$P_\bullet \to M : \ \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\sigma} M \longrightarrow 0,$$

é exato, isto é, é uma sequência exata.

Exemplo 4. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre K e $V_p(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g}) \otimes_K \Lambda^p \mathfrak{g}$, e como $\Lambda^p \mathfrak{g}$ é um K-modulo livre, então $V_p(\mathfrak{g})$ é um $U(\mathfrak{g})$-modulo livre. Por convenção, $\Lambda^0(\mathfrak{g}) = K$, $\Lambda^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$,$V_0(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$ e $V_1(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_K \mathfrak{g}$. Definimos o morfismo de k-álgebras $\varepsilon : V_0(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \longrightarrow K$ a projeção sobre K, isto é $\varepsilon|_K = id_K$ e $\varepsilon(\mathfrak{g}) = 0$, e

$$\begin{aligned} d_1 : U(\mathfrak{g}) \otimes_K \mathfrak{g} &\longrightarrow U(\mathfrak{g}) \\ u \otimes x &\longmapsto ux, \end{aligned}$$

e assim, temos a sequencia exata

$$V_1(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_1} V_0(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Agora, para cada $n \geq 2$, definimos $d_n : V_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow V_{n-1}(\mathfrak{g})$ dada pela formula $d_n(u \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \theta_1 + \theta_2$ onde

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} ux_i \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \wedge \ldots \wedge x_p \\ \theta_2 &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_p. \end{aligned} \tag{2.2}$$

para cada $u \in U(\mathfrak{g})$ e $g_i \in \mathfrak{g}$. Para o caso $n = 2$, temos que

$$d_2(u \otimes x \wedge y) = ux \otimes y - uy \otimes x - u \otimes [x, y]$$

o complexo

$$V_\bullet(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} K : \ \ldots \longrightarrow V_1(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_1} V_0(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

é dito de **complexo de Chevalley-Eilenberg**, às vezes também é dito de complexo estândar. O **Koszul** mostrou que o complexo $V_\bullet(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} K$ é exato e assim temos uma resolução livre de K por $U(\mathfrak{g})$-módulos. Para mais detalhes veja-se [(WEIBEL, 1994), Secção 7.7].

Definição 36. Uma **resolução injetiva** de um R-modulo M é um complexo de R-módulos

$$E^\bullet : 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots,$$

onde cada E^i é um R-modulo projetivo e existe um R-homomorfismo δ tais que o complexo aumentado

$$M \to E^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\delta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots,$$

é exato, isto é, é uma sequência exata.

2.1.1 functor Tor e Ext

Definição 37 (functor Tor). Sejam R um anel, M, N R-módulos e $P_\bullet$ uma resolução projetiva de M, isto é

$$P_\bullet : \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0,$$

aplicamos o functor covariante $-\otimes_R N$ ao complexo $P_\bullet$, e temos o complexo

$$P_\bullet \otimes_R N : \dots \longrightarrow P_2 \otimes_R N \xrightarrow{d_2 \otimes Id_N} P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \otimes Id_N} P_0 \otimes_R N \longrightarrow 0,$$

e assim podemos definir o functor Tor dado por

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := H_n(P_\bullet \otimes_R N) \tag{2.4}$$

Na língua da Teoria das categorias, o functor Tor é o functor derivado do functor $-\otimes_R N$

Definição 38 (functor Ext). Sejam R um anel, M, N R-módulos e Seja $P_\bullet$ uma resolução projetiva de M, isto é

$$P_\bullet : \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0,$$

aplicamos o functor contravariante $\mathrm{Hom}(-,N)$ ao complexo $P_\bullet$, e temos o complexo

$$\mathrm{Hom}(P_\bullet,N) : 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P^0,N) \xrightarrow{d_0^*} \mathrm{Hom}(P^1,N) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}(P^2,N) \longrightarrow \dots,,$$

e assim podemos definir o functor Ext dado por

$$\mathrm{Ext}_R^n(M,N) := H^n(\mathrm{Hom}(P_\bullet,N)) \tag{2.5}$$

Na linguá da teoria das categorias, o functor Ext é o functor derivado do functor $\mathrm{Hom}(-,N)$

2.2 Homologia e Cohomologia de grupo

2.2.1 *G*-módulos

Seja G um grupo, denotaremos por $\mathbb{Z}G$ ao grupo abeliano livre gerado por G. As operações de $\mathbb{Z}$ e do G induzem de maneira natural uma soma e um produto em $\mathbb{Z}G$, munindo à $\mathbb{Z}G$ de uma estrutura de anel, dito de **o anel do grupo G com coeficientes em $\mathbb{Z}$**. Cada elemento $\alpha \in \mathbb{Z}G$ tem uma única expressão da forma $\sum\limits_{g\in G} n_g g$ onde $n_g \in \mathbb{Z}$ para todo elemento $g \in G$, e $n_g = 0$ exceto um numero finito de elementos $g \in G$. Isto é,

$$\mathbb{Z}G = \{\sum_{g\in G} n_g g : n_g \in \mathbb{Z} \text{ e } n_g = 0 \text{ exceto um numero finito de elementos de } G\} \tag{2.6}$$

a soma e o produto em $\mathbb{Z}G$ estão dadas pelas seguintes formulas:

$$\sum_{g\in G} n_g g + \sum_{g\in G} m_g g := \sum_{g\in G} (n_g + m_g) g,$$
$$(\sum_{g\in G} n_g g) \cdot (\sum_{g\in G} m_g g) := \sum_{g\in G} (\sum_{hk=g} n_h \cdot m_k) g.$$

Definição 39. Seja G um grupo. Um G-**modulo à esquerda** é um grupo abeliano A munido de uma ação de grupo $\rho : G \times A \longrightarrow A$, isto é:

(1) $\rho(e,a) = a$ para todo $a \in A$ (onde e é o elemento neutro de G),

(2) $\rho(g,\rho(h,a)) = \rho(gh,a)$, para todo $g,h \in G$ e para todo $a \in A$,

(3) $\rho(g,a_1 + a_2) = \rho(g,a_1) + \rho(g,a_2)$, para todo $g \in G$ e para todo $a_1,a_2 \in A$.

Denotaremos $\rho(g,a)$ por $g \cdot a$. Dizemos que um G-modulo A é trivial se G age trivialmente sobre A, isto é $g \cdot a = a$ para todo $g \in G$ e $a \in A$. Para nosso proposito nos consideraremos $\mathbb{Z}$ como um G-modulo trivial. Entenderemos um G-modulo como um $\mathbb{Z}G$-modulo, onde a ação de G sobre A é o produto escalar do $\mathbb{Z}G$-modulo restrito a G.

Definição 40. Seja A um G-modulo, denotamos por A^G o subgrupo G-**invariantes**, formado pelos elementos $a \in A$ tais que $g \cdot a = a$, para todo $g \in G$, isto é

$$A^G := \{a \in G : g \cdot a = a,\ \forall g \in G\}.$$

Definição 41. Sejam A, B dois G-módulos, um homomorfismo de grupos

$$f : A \longrightarrow B$$

é dito de G-**morfismo** se,

$$f(g \cdot a) = g \cdot f(a),\ \ \forall g \in G,\ \forall a \in A. \tag{2.7}$$

Além disso, os G-morfismos pode-se considerar homomorfismos de $\mathbb{Z}G$-módulos.Denotaremos por $\hom_G(A,B)$ o conjunto dos G-morfismos de A em B. Se existe-se um G-isomorfismo (isto é, um G-morfismo bijectivo cuja inversa é também um G-morfismo), dizemos que A e B são **isomorfos** e que as ações de G em A e B são **equivalentes**.

Exemplo 5 (Exemplo de G-modulo). Sejam G e H grupos abelianos. Para cada $n \geq 0$, denotamos por $\mathscr{F}(G^{n+1},H)$ o grupo formado por todas as aplicações de $G^{n+1} \longrightarrow H$, podemos munir ao $\mathscr{F}(G^{n+1},H)$ uma estrutura de G-modulo com ação à esquerda definida por

$$(g\cdot f)(g_0,\dots,g_n) := f(g^{-1}g_0,\dots,g^{-1}g_n). \tag{2.8}$$

Assim, o subgrupos dos elementos G-invariantes, para cada $n \geq 1$, é dado por

$$\mathscr{F}(G^{n+1},H)^G = \{f \in \mathscr{F}(G^{n+1},H) : f(g^{-1}g_0,\dots,g^{-1}g_n) = f(g_0,\dots,g_n), \quad \forall\, g,g_0,\dots,g_n \in G\}.$$

Podemos munir ao $\mathscr{F}(G^{n+1},H)$ de outra estrutura de G-modulo, a dizer

$$(g\cdot f)(g_0,\dots,g_n) := f(g_0g,\dots,g_ng). \tag{2.9}$$

Tais estruturas para $\mathscr{F}(G^{n+1},H)$ são equivalentes, isto é

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathscr{F}(G^{n+1},H) &\longrightarrow \mathscr{F}(G^{n+1},H)\\ f &\longmapsto \overline{f}. \end{aligned}$$

onde $\overline{f}(g_0,\dots,g_n) = f(g_0^{-1},\dots,g_n^{-1})$, $g_0,g_1,\dots,g_n \in G$. Se H é um G-modulo, podemos definir outra estrutura de G-modulo sobre $\mathscr{F}(G^{n+1},H)$, dada por

$$(g\cdot f)(g_0,\dots,g_n) := g.f(g^{-1}g_0,\dots,g^{-1}g_n). \tag{2.10}$$

Exemplo 6 (Resolução injetiva para um G-modulo). Seja A um G-modulo, consideremos a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{F}(G,A) \xrightarrow{d^0} \mathscr{F}(G^2,A) \xrightarrow{d^1} \dots$$

onde $\mathscr{F}(G^{n+1},A)$ tem a ação $(g.f)(g_0,\dots,g_n) := g.f(g^{-1},g_0,\dots,g^{-1}g_n)$ e

$$\begin{aligned} \varepsilon\colon A &\longrightarrow \mathscr{F}(G,H)\\ a &\longmapsto \varepsilon(a) \end{aligned}$$

definido por $\varepsilon(a)(g) := a$, para cada $g \in G$, com as diferencias dadas por

$$\begin{aligned} d^n\colon \mathscr{F}(G^{n+1},A) &\longrightarrow \mathscr{F}(G^{n+2},H)\\ f &\longmapsto d^n(f) \end{aligned}$$

definido por

$$\begin{aligned} \varepsilon(e)(g_0) &= e;\\ (d^nf)(g_0,\dots,g_{n+1}) &= f(1,g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_{n+1}). \end{aligned}$$

(o símbolo ˆ significa que omitimos essa variável) A sequencia acima é uma resolução injetiva de A a qual admite uma homotopia contratante (s^n) definida por

$$(s^n f)(g_0,\ldots,g_{n-1}) = f(1,g_0,\ldots,g_{n-1})$$

A resolução anterior é chamada **Resolução estândar de** A. Sempre que A seja um G-modulo, vamos a considerar o G-módulo $\mathscr{F}(G^{n+1},A)$ munido com a ação

$$(g.f)(g_0,\ldots,g_n) = g.f(g^{-1},g_0,\ldots,g^{-1}g_n),$$

a menos que se indique o contrario.

2.2.2 Homologia de grupo

Definição 42. Dado um grupo G, definimos o homomorfismo **aumentado de** G como sendo o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{g\in G} n_g g &\longmapsto \sum_{g\in G} n_g. \end{aligned}$$

Denotaremos por I_G ao núcleo do homomorfismo aumentado. Claramente $\{g-1 : g\in G\}$ é um $\mathbb{Z}$-base para I_G, definimos o **grupo de coinvariantes** do G-modulo A como o grupo abeliano

$$A_G := A/I_G A,$$

onde $I_G A$ é visto como o $\mathbb{Z}G$-submódulo de A, isto é, $I_G A$ é o $\mathbb{Z}G$-submódulo de A gerado por $\{g.a-a : g\in G, a\in A\}$. Note-se que A_G é o maior G-modulo quociente de A onde G age trivialmente.

Observação 15. Segue da definição que

$$A_G \cong \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong A\otimes_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z}$$

de fato,

$$A_G = A/I_G A \cong A\otimes_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z}G/I_G \cong A\otimes_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z} \tag{2.11}$$

Assim, podemos definir o functor $-_G$ da categoria dos G-módulos (denotada por Mod_G) na categoria dos grupos abelianos (denotada por Ab)como:

$$\begin{aligned} -_G : \mathrm{Mod}_G &\longrightarrow \mathrm{Ab} \\ A &\longmapsto A_G, \\ (f : A\to B) &\longmapsto (f_G : A_G \to B_G), \end{aligned}$$

onde $f_G : A_G \to B_G$ é tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ A_G \arrow[r, "f_G"'] & B_G \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde π são as projeções. A boa definição de f_G segue do fato

$$f(I_G A) \subset I_G B. \tag{2.12}$$

Definição 43. Seja G um grupo e A um G-modulo. Definimos os **grupos de homologia de grupo de G com coeficientes em A** por

$$H_n(G,A) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A), \tag{2.13}$$

para todo $n \geq 0$.

Observação 16. Se A é um G-modulo, segue da definição que:

$$H_0(G,A) = \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A = A_G. \tag{2.14}$$

No caso de A ser um G-modulo projetivo, isto é, A é um $\mathbb{Z}G$-modulo projetivo, temos:

$$H_n(G,A) \cong \begin{cases} A_G & ,se \quad n = 0 \\ 0 & ,se \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Exemplo 7. Seja $G = \{1\}$, então $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}$ e quaisquer G-modulo A é trivial, pois $1.a = a$ para todo $a \in A$, e por tanto $A_G = A$. Além disso $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-modulo livre, então

$$H_n(G,A) \cong \begin{cases} A & ,se \quad n = 0 \\ 0 & ,se \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

2.2.3 Cohomologia de grupo

Definição 44. Sejam G um grupo e A um G-modulo, o **n-ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em A** o qual denotamos por $H^n(G,A)$ é definido por

$$H^n(G,A) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A), \tag{2.17}$$

onde $\mathbb{Z}$ é o G-modulo trivial.

Se iniciamos com uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}G$-módulos

$$P_\bullet \longrightarrow \mathbb{Z} : \ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2.18}$$

logo aplicando o functor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-,A)$ e calculamos a cohomologia do complexo resultante, obtemos a cohomologia do grupo

$$H^n(G,A) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_\bullet,A)). \tag{2.19}$$

Observação 17. A Homologia e Cohomologia de grupos independem da escolha da resolução.

Exemplo 8. Seja $B_0(G)$ o $\mathbb{Z}G$-módulo gerado pelo simbolo $[\ ]$ o qual é isomorfo a $\mathbb{Z}G$ e assim, podemos identificar $[\ ]$ com $1 \in \mathbb{Z}G$. Para cada $n \geq 1$, seja $B_n(G)$ o $\mathbb{Z}G$-módulo livre gerado pelos símbolos $[g_1|\ldots|g_n]$ com $g_i \in G$. Seja $\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$ definido como antes, e definimos para cada $n \geq 1$,as diferencias $d_n : B_n(G) \longrightarrow B_{n-1}(G)$ dada por $d_n = \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i d_n^i$, onde

$$\begin{aligned}
&d_n^0([g_1|\ldots|g_n]) = g_1[g_2|\ldots|g_n];\\
&d_n^i([g_1|\ldots|g_n]) = [g_1|\ldots|g_ig_{i+1}|\ldots|g_n] \text{ para } i = 1,\ldots,n-1;\\
&d_n^n([g_1|\ldots|g_n]) = [g_1|\ldots|g_{n-1}].
\end{aligned}$$

e assim temos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$, a qual é dita de **Resolução Bar**

$$B(G)_\bullet \longrightarrow \mathbb{Z} : \ldots \longrightarrow B_n(G) \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(G) \ldots \longrightarrow B_2(G) \xrightarrow{d_2} B_1(G) \xrightarrow{d_1} B_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Exemplo 9. Sejam G um grupo e G^n o produto cartesiano de n copias de G. Seja $C_n(G) := G^{n+1}$ com ação dada por

$$g(g_0,g_1,\ldots,g_n) := (gg_0,gg_1,\ldots,gg_n).$$

$C_n(G)$ é um G-modulo livre com base $\{(1,g_1,\ldots,g_n) : g_i \in G\}$ e assim, para $C_0(G)$ temos que é isomorfo ao G-modulo $\mathbb{Z}G$. Para cada $n \geq 1$, definimos $\delta_n : C_n(G) \longrightarrow C_{n-1}(G)$ dada por

$$\delta_n(g_0,\ldots,g_n) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_n), \tag{2.20}$$

onde $g_i \in G$. Assim temos uma resolução livre de G-módulos sobre $\mathbb{Z}$.

$$C(G)_\bullet \longrightarrow \mathbb{Z} : \ldots \longrightarrow C_n(G) \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1}(G) \ldots \longrightarrow C_2(G) \xrightarrow{\delta_2} C_1(G) \xrightarrow{\delta_1} C_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Para cálculos, tomamos a resolução de G dada no Exemplo 9 e aplicando o functor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-,A)$ obtemos

$$C^n(G,A) = \mathrm{Hom}_G(C_{n+1}(G),A),$$

é um G-modulo, com ação dada por $g.f(g_0,\ldots,g_n) := f(gg_0,\ldots,gg_n)$. As diferencias são dadas por

$$\begin{aligned}
df(g_0,\ldots,g_n) =& g_0.f(g_1,\ldots,g_n) + \sum_{0\leq i\leq n}(-1)^{i+1}f(g_0,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_n) +\\
&(-1)^{n+1}f(g_0,\ldots,g_{n-1}).
\end{aligned}$$

E assim, nos temos o complexo de cocadeias aumentado

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^*} C^1(G,A) \xrightarrow{d^1} C^2(G,A) \xrightarrow{d^2} C^3(G,A) \xrightarrow{d^3} \ldots \tag{2.21}$$

onde $d^n = \delta_n^*$ a aumentação é dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon^* : A &\to C^1(G,A) \\ a &\mapsto \varepsilon^*(a). \end{aligned}$$

e $\varepsilon^*(a)g = g.a$, para cada $g \in G$. Por tanto

$$H^n(G,A) = H^n(C^\bullet(G,A)).$$

Observação 18. Similarmente à cohomologia de grupo, podemos definir outras teorias de cohomologias como segue:

(i) Se G é um grupo topológico e V um G-modulo com ação; $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ contínua. Tomando o complexo de cadeias aumentada com diferencias como em 2.21 e com cocadeias $C^n(G,V)$ substituído por mapas contínuos denotados por $C^n_{\text{cont}}(G,V)$, a cohomologia do complexo resultante
$$H^n_{\text{cont}}(G,V) := H^n(C^\bullet_{\text{cont}}(G,V))$$
é dita de **cohomologia contínua**.

(ii) Analogamente, se G é um grupo de Lie e V um G-modulo com ação $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ suave (C^∞). Tomando o complexo de cadeias aumentada como em 2.21 e com cocadeias $C^n(G,V)$ substituídos por mapas suaves (C^∞) denotados por $C^n_d(G,V)$, a cohomologia do complexo resultante
$$H^n_d(G,V) := H^n(C^\bullet_d(G,V))$$
é dita de **cohomologia diferenciavel**.

Proposição 13. Sejam G um grupo de Lie conexo, U um subgrupo compacto maximal e $X = G/U$. Seja $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{u}$ as álgebras de Lie de G e U. Então

2.3 Cohomologia de De Rham

Seja M uma variedade suave (de classe C^∞). Para cada $p \geq 1$ denotamos por $\Omega^p(M)$ o espaço das p-formas diferenciáveis sobre M e $\Omega^0(M)$ o espaço de funções suaves sobre M. Eles formam uma $\mathbb{R}$-álgebra graduada com produto dado pelo produto exterior $\wedge$:

$$\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{p\geq 0} \Omega^p(M). \tag{2.22}$$

Além disso, nos temos as **diferencias de De Rham** (também ditas de **derivadas exteriores**) definida como o único mapa $\mathbb{R}$-linear $d : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$ tais que satisfazem as seguintes propriedades:

1. $df =$ diferencial de f para funções suaves,

2. $d(df) = 0$

3. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$ para $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\eta \in \Omega^q(M)$.

O **complexo de De Rham** é o complexo de cocadeias das formas diferenciáveis sobre M, com as derivadas exteriores como as diferenciais:

$$\Omega^\bullet(M) : 0 \xrightarrow{d} \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots \tag{2.23}$$

e assim definimos a **cohomologia de De Rham**

$$H^n_{DR}(M) := H^n(\Omega^\bullet(M)). \tag{2.24}$$

Dado um campo vetorial X sobre M, podemos definir o operador **contração** $i_X : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(M)$, verificando as seguintes propriedades

1. $i_X\theta = \theta(X)$, para todo $\theta \in \Omega^1(M)$,

2. $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_X(\eta)$, onde $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\eta \in \Omega^q(M)$.

Também existe um operador $\mathscr{L}_X : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M)$ dito de **derivada de Lie**, definido como o único mapa $\mathbb{R}$-linear tais que:

1. $\mathscr{L}_X(f) = X(f)$ para toda função suave,

2. $\mathscr{L}_X Y = [X,Y]$ onde $[\ ,\ ]$ é o colchete de Lie.

Temos a identidade $\mathscr{L}_X = i_x \circ d + d \circ i_X$ a qual é dita de **formula magica de Cartan**, que relaciona a derivada exterior d e o operador contração i_X. Agora nos podemos expressar a diferencial de uma p-forma diferenciável em termos do colchete de Lie, a dizer

$$\begin{aligned} d\omega(X_0 \wedge \ldots \wedge X_p) = \sum_{0 \le i < j \le p} & (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \ldots \wedge \hat{X}_j \wedge \ldots \wedge X_p) + \\ \sum_{0 \le i \le p} & (-1)^i X_i . \omega(X_0 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p), \end{aligned} \tag{2.25}$$

para mais detalhes veja-se [(WARNER, 1983), Proposição 2.25].

Definição 45. Sejam M uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie e $T : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda de G sobre M. Dizemos que uma p-forma $\omega \in \Omega^p(M)$ é dita de **invariante à esquerda** se $T_g^* \omega = \omega$, para todo $g \in G$. As formas invariantes à esquerda formam uma subálgebra o qual denotamos por $\Omega^\bullet(M)_L$.

Teorema 10. Sejam M uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie compacto e $T : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda de M, então

$$\mathrm{i}_* : H^*(\Omega^\bullet(M)_L) \longrightarrow H^*_{DR}(M) \tag{2.26}$$

induzido pela inclusão é injetora. Além disso, se G é conexo temos que i_* é um isomorfismo

Demonstração. Vide [(GREUB; VANSTONE, 1973), Secção 4.3, Teorema I] □

2.4 Teorias de Homologia e Cohomologia

Nesta secção daremos a definição da homologia e cohomologia singular,alem disso daremos as principais relações entre as teorias de homologia e cohomologia definidas.

2.4.1 Homologia e Cohomologia singular

Para cada $n \geq 0$, denotamos Δ^n o n-**simplexo estândar** ao conjunto

$$\Delta^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} x_i \leq 1,\ \ 0 \leq x_i\},$$

Δ^0 é reduzido a um ponto denotado por 0. Definimos as aplicações $\delta_i^n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n+1}$, $i = 0, \ldots, n+1$ da seguinte forma

$$\delta_0^0(0) = 1 \tag{2.27}$$

$$\delta_1^0(0) = 0 \tag{2.28}$$

$$\delta_0^n(x_1, \ldots, x_n) = (1 - x_1 - \ldots - x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.29}$$

$$\delta_i^n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_n) \tag{2.30}$$

Seja X um espaço topológico. Um n-**simplexo singular** de X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$, denotamos $R_n(X)$ o conjunto de tais aplicações , e denotamos por $S_n(X)$ o $\mathbb{Z}$-modulo livre gerado por $R_n(X)$. Em particular $R_0(X) = X$ e $S_0(X)$ o $\mathbb{Z}$-modulo livre gerado por X, os elementos de $S_n(X)$ são chamados n-**cadeias singulares**. As faces de um n-simplexo singular σ são as aplicações $\sigma^i = \sigma \circ \delta_i^{n-1}$, $i = 0, \ldots, n$, o **bordo** de σ é o elemento

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma^i \in S_{n-1}(X).$$

Assim temos o complexo

$$S_\bullet \to \mathbb{Z} \colon \ \ldots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2.31}$$

onde

$$\varepsilon(\sum n_x x) = \sum n_x,$$

para cada $\sum n_x x \in S_0(X)$. Agora, seja G um grupo abeliano, aplicando o functor $- \otimes_{\mathbb{Z}} G$ e $\mathrm{Hom}(-, G)$ ao complexo (2.31), obtemos dois complexos

$$S_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \colon \ \ldots \xrightarrow{\partial_2 \otimes \mathrm{id}_G} S_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\partial_1 \otimes \mathrm{id}_G} S_0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \longrightarrow 0, \tag{2.32}$$

$$\mathrm{Hom}(S_\bullet(X), G) \colon 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_0(X), G) \xrightarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}(S_1(X), G) \xrightarrow{\partial_2^*} \ldots \tag{2.33}$$

Denotamos por $H_n(X, G)$ à homologia do complexo $S_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$, isto é

$$H_n(X, G) := H_n(S_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G),$$

a qual é dita de n-**ésimo grupo de homologia singular do espaço** X **com coeficientes em** G. Analogamente, denotamos por $H^n(X,G)$ à cohomologia do complexo $\mathrm{Hom}(S_\bullet(X),G)$, isto é

$$H^n(X,G) := H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_\bullet(X),G)).$$

a qual é dita de n-**ésimo grupo de cohomologia singular do espaço** X **com coeficientes em** G.

Teorema 11 (Teorema de De Rham). Seja M uma variedade e seja o homomorfismo

$$\begin{aligned} I_n : H^n_{DR}(M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(M;\mathbb{R}),\mathbb{R}) \\ [\omega] &\longmapsto I_n([\omega]), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I([\omega]) : H_n(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\sigma] &\longmapsto \int_\sigma \omega, \end{aligned}$$

então I_n é um isomorfismo para cada $n \geq 0$.

Demonstração. Vide [(WARNER, 1983), Teorema 5.36] □

Proposição 14. A cohomologia do grupo de Lie clássico $SU/SO(\mathbb{R})$ é dada por

$$H^*(SU/SO(\mathbb{R});\mathbb{R}) \cong \Lambda(x_5,\ldots,x_{4k+1},\ldots) \tag{2.34}$$

onde os geradores são indecomponíveis.

Demonstração. Vide [(MIMURA; TODA, 1991), Capitulo IV 3.16] □

2.4.2 Homotopia racional dos H-espaços

Definição 46. Seja (X,e) um espaço topológico com um ponto base. Dizemos que X é um H-**espaço** se existe um mapa continuo $\mu : X \times X \to X$, tais que, $\mu(x,e) = \mu(e,x) = x$, para todo $x \in X$. Dizemos que um H-espaço é **associativo** se os mapas $\mu \circ (id \times \mu)$, $\mu \circ (\mu \times id)$: $X \times X \times X \to X$ são homotopicamente equivalentes.

Observação 19. Todo grupo topológico é um H-espaço associativo, em particular um grupo de Lie é um H-espaço associativo.

Proposição 15. Sejam (X,e) um H-espaço conexo por caminhos associativo e K um corpo. Então, $H_*(X) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i(X)$ tem uma estrutura de álgebra de Hopf conexa com coproduto comutativo induzido pelo mapa diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times X$.

Demonstração. Vide [(ROTMAN, 1988), Teorema 12.42] □

O Teorema 7 tem um corolário geométrico relacionando a homologia e homotopia dos H-espaços.

2.4.2.1 Produto Whitehead

Dado (X,e) um H-espaço conexo consideremos $\pi_n(X)$ o n-ésimo grupo de homotopia com ponto base e, se define um morfismo $[\cdot,\cdot] : \pi_{n+1}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\pi_{m+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+m+1}(X)$ (para detalhes da construção ver (SAMELSON, 1953)). Daremos um bosquejo da construção. O produto $S^m\times S^n$ de duas esferas tem uma CW-descomposição em quatro células, de dimensões 0, m, n e $m+n$ (a definição de CW-complexo sera dada no Capitulo 3). A a união das três primeiras células é $S^m\vee S^n$. O mapa de colagem $S^{m+n-1}\longrightarrow S^m\vee S^n$, é dito o **mapa de Whitehead**.

A seguinte construção descreve o mapa de Whitehead a menos de homotopia. Existe uma canônica descrição do mapa $w: S^{m+n-1}\longrightarrow S^m\vee S^n$. A esfera S^{m+n-1} é a união dos seguintes conjuntos fechados

$$U=\{(x_1,\dots,x_{m+n})\in S^{m+n-1}: x_1^2+\ldots+x_{m+n}^2\le\frac{1}{2}\}$$
$$V=\{(x_1,\dots,x_{m+n})\in S^{m+n-1}: x_1^2+\ldots+x_{m+n}^2\ge\frac{1}{2}\}$$

e assim temos que $U\simeq D^m\times S^{n-1}$, $V\simeq S^{m-1}\times D^n$ e $U\cap V=S^{m-1}\times S^{n-1}$. A descomposição $S^{m+n-1}=U\cup V$ também pode-se construir da seguinte maneira

$$S^{m+n-1}=\partial D^{m+n}\simeq\partial(D^m\times D^n)=(D^m\times\partial D^n)\cup(\partial D^m\times D^n)=D^m\times S^n)\cup(S^m\times D^n)$$

e assim nosso mapa $w: S^{m+n-1}\longrightarrow S^m\vee S^n$ consiste de duas projeções

$$U=D^m\times S^{n-1}\longrightarrow D^m\longrightarrow D^m/S^{m-1}=S^m\subset S^m\vee S^n,$$
$$V=S^{m-1}\times D^n\longrightarrow D^n\longrightarrow D^n/S^{n-1}=S^n\subset S^m\vee S^n,$$

tomando a "superfície de corte"$S^{m-1}\times S^{n-1}$ num ponto.

Agora sejam $f: S^m\longrightarrow X$, $g: S^n\longrightarrow X$ dois esferoides de algum com ponto base x_0. Eles geram o mapa $S^m\vee S^n\longrightarrow X$, e a composição de este mapa com w é um esferoide $r: S^{m+n-1}\longrightarrow X$. Pode-se mostrar que a classe de homotopia de r se pode determinar pelas classes de homotopias das f e g. Assim dado $\alpha=[f]\in\pi_m(X,x_0)$ e $\beta=[g]\in\pi_n(X,x_0)$, então definimos $[\alpha,\beta]:=[r]$ o qual é dito de **Produto de Whitehead**. O mapa

$$[\cdot,\cdot]:\pi_{n+1}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\pi_{m+1}(X)\longrightarrow\pi_{n+m+1}(X) \tag{2.35}$$

verifica as seguintes propriedades:

(1) Se $\alpha\in\pi_{n+1}(X)$ e $\beta\in\pi_{m+1}(X)$, então $[\alpha,\beta]=(-1)^{nm+1}[\beta,\alpha]$

(2) Se $\alpha\in\pi_{n+1}(X)$, $\beta\in\pi_{m+1}(X)$, $\gamma\in\pi_{r+1}(X)$, então

$$(-1)^{nr}[\alpha,[\beta,\gamma]]+(-1)^{nm}[\beta,[\gamma,\alpha]]+(-1)^{nr}[\gamma,[\alpha,\beta]]=0$$

(3) Se $\alpha\in\pi_{n+1}(X)$, $\beta\in\pi_{m+1}(X)$, e $h:\pi_*(X)\longrightarrow H_*(X)$ é o mapa de Hurewicz, então

$$h([\alpha,\beta])=h(\alpha)*h(\beta)-(-1)^{(n+1)(m+1)}h(\beta)*h(\alpha).$$

para detalhes de (1),(2) vide [(FOMENKO; FUCHS, 2016),Secção 10.5] e para (3) vide (SAMELSON, 1953).

Assim, considerando $L_n := \pi_{n+1}(X,e)$ para todo $n \geq 0$ e por (1) e (2), temos que $L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n$ é uma álgebra de Lie, e o homomorfismo de Hurewicz $h : \pi_*(X,e) \longrightarrow H_*(X)$ é um morfismo de álgebras de Lie de grau 1. Além disso, pela Proposição 15 e o Teorema dos coeficientes universais para Homologia temos que $H_*(X,\mathbb{Q}) = H_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um álgebra de Hopf conexa com coproduto comutativo. Definimos $P_n(X,\mathbb{Q}) := P_n(H_*(X,\mathbb{Q}))$ e pelo Teorema 7 temos que $U(P_*(X,Q)) = H_*(X,\mathbb{Q})$.

Teorema 12 (Cartan-Serre). Seja (X,e) um H-espaço conexo por caminhos. Então o homomorfismo de Hurewicz racional é um isomorfismo de álgebras de Lie

$$h_{\mathbb{Q}} : \pi_*(X,e) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow P_*(X,\mathbb{Q}). \tag{2.36}$$

Por tanto, obtemos um isomorfismo de álgebras de Hopf

$$U(h_{\mathbb{Q}}) : U(\pi_*(X,e) \otimes \mathbb{Q}) \longrightarrow H_*(X,\mathbb{Q}). \tag{2.37}$$

Demonstração. Vide [(BASS; PEDRINI, 1997), Teorema 5.2] □

2.4.3 Relações entre a homologia e cohomologia de grupos

Sejam X um espaço topológico e G um grupo operando por homomorfismo sobre X, isto é G age sobre X e cada translação é contínua (consideramos a G com a topologia discreta), denotamos G/X o espaço de orbitas de G em X com a topologia quociente, e $\pi : X \longrightarrow G/X$ a aplicação quociente de X em X/G. Definimos uma ação de G em $R_n(X)$ por

$$(g.\sigma)(t) = g.\sigma(t)$$

e estendemos por linearidade a $S_n(X)$, e assim $S_n(X)$ é um G-modulo e

$$S_\bullet(X) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \colon \ \dots \xrightarrow{\partial_1} S_1(X) \xrightarrow{\partial_0} S_0(X) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

um complexo de G-módulos.

Lema 3. Se X é um espaço topológico contrátil, o complexo

$$S_\bullet(X) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \colon \ \dots \xrightarrow{\partial_1} S_1(X) \xrightarrow{\partial_0} S_0(X) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é exato, e portanto uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$.

Demonstração. Vide [(GUICHARDET, 1980), Lema 14.1] □

Lema 4. Sejam X um espaço topológico, G um grupo que age livremente sobre X e que $\pi : X \longrightarrow G/X$ é uma aplicação de recobrimento. Então o G-modulo $S_n(X)$ é relativamente projetivo e temos $S_\bullet(X)^G \sim S_\bullet(G/X)$ (isomorfismo de complexos) onde $S_\bullet(X)^G$ é o grupo dos elementos G-invariantes, na verdade $S_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$-modulo livre.

Demonstração. Veja [(GUICHARDET, 1980), Lema 14.2] □

Proposição 16. Seja X é um espaço topológico contrátil, G um grupo que age livre sobre X e que $\pi : X \longrightarrow G/X$ é uma aplicação de recobrimento. Então

$$H_n(G,A) \cong H_n(G/X,A) \tag{2.38}$$
$$H^n(G,A) \cong H^n(G/X,A), \tag{2.39}$$

onde A é um G-modulo trivial.

Demonstração. Pelo Lema 3 o complexo

$$S_\bullet(X) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} : \ \ldots \xrightarrow{\partial_1} S_1(X) \xrightarrow{\partial_0} S_0(X) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva do G-modulo trivial $\mathbb{Z}$, então $H_*(G,A)$ e $H^*(G,A)$ são a homologia e cohomologia dos seguintes complexos

$$\ldots \longrightarrow S_1(X) \otimes_G A \longrightarrow S_0(X) \otimes_G A \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(S_0(X),A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(S_1(X),A) \longrightarrow \ldots$$

e pelo Lema 4 temos

$$S_\bullet(X) \otimes_G A \sim S_\bullet(X)^G \otimes_{\mathbb{Z}} A \sim S_\bullet(G/X) \otimes_{\mathbb{Z}} A,$$

e assim

$$H_n(G,A) \cong H_n(G/X,A), \tag{2.40}$$

para cada $n \geq 0$. Analogamente, pelo Lema 4 e do fato que $-^G$ é um functor adjunto á esquerda do functor $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},-)$ temos que

$$\mathrm{Hom}_G(S_\bullet(X),A) \sim \mathrm{Hom}(S_\bullet(X)^G,A) \sim \mathrm{Hom}(S_\bullet(G/X),A),$$

e assim temos

$$H^n(G,A) \cong H^n(G/X,A). \tag{2.41}$$

□

2.5 Cohomologia de Álgebra de Lie

Nesta secção daremos a definição de uma álgebra de Lie com coeficientes num $\mathfrak{g}$-modulo V. Também daremos alguns isomorfismos com a cohomologia de De Rham.

2.5.1 Cohomologia de De Rham de um grupo de Lie

Sejam K um corpo e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre K. Um $\mathfrak{g}$-modulo é um espaço vetorial V sobre K sobre o qual $\mathfrak{g}$ age via um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Equivalentemente , um $\mathfrak{g}$-modulo pode ser visto como um modulo sobre o anel $U(\mathfrak{g})$. A ação correspondente de $x \in \mathfrak{g}$ sobre $v \in V$ será denotada por $x \cdot v$.

Definição 47. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre sobre um corpo K e seja V um $\mathfrak{g}$-modulo, o **n-ésimo grupo de cohomologia de $\mathfrak{g}$ com coeficientes em** V o qual é denotado por $H^n(\mathfrak{g},V)$ é definido por

$$H^n(\mathfrak{g},V) := \mathrm{Ext}^n_{U(\mathfrak{g})}(K,V). \tag{2.42}$$

Em particular, temos do Exemplo 4 uma resolução projetiva de K por $U(\mathfrak{g})$-módulos a qual gera o complexo **Chevalley-Eilenberg-Koszul** com cocadeias dadas por

$$C^n(\mathfrak{g};V) := \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g}, V) \cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^n \mathfrak{g}, V)$$

com as diferencias $d^n : C^n(g;V) \longrightarrow C^{n+1}(g;V)$ dadas por

$$\begin{aligned}(d^n f)(x_0,\dots,x_n) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x_i.f(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)+\\ &\sum_{i<j}(-1)^{i+j} f([x_i,x_j],x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n),\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde, como sempre, ˆ significa que o elemento está omitido. Assim $H^*(\mathfrak{g},V)$ é dada pela cohomologia do complexo

$$C^\bullet(\mathfrak{g};V) : 0 \longrightarrow C^0(\mathfrak{g},V) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{d^2} \dots \tag{2.44}$$

e assim $H^*(\mathfrak{g},V) = H^*(C^\bullet(\mathfrak{g};V))$, assim podemos tomar isto como a definição da cohomologia de álgebra de Lie.

Daremos uma interpretação geométrica desta definição. Vemos que a equação (2.43) é a mesma que a equação (2.25), o qual mostra que o complexo para a cohomologia de álgebra de Lie realmente se origina do complexo de De Rham. Além disso, nos temos que $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie do grupo de Lie real conexo G.

Para cada elemento $g \in G$, sejam $l_g : G \longrightarrow G$ e $r_g : G \longrightarrow G$ as ações a esquerda e direita respectivamente, dadas por:

$$l_g(x) = gx \text{ e } r_g(x) = xg, \tag{2.45}$$

para cada $x \in G$.

O subespaço das formas diferencias G-invariantes à esquerda é um subcomplexo de $\Omega^\bullet(G)$ dito de **o subcomplexo de formas G-invariantes à esquerda**, o qual é denotado por $\Omega^\bullet(G)_L$. De fato,

$$\Omega^\bullet(G)_L := \{\omega \in \Omega^\bullet(G) : l_g^*\omega = \omega \ \ ,\forall g \in G\}. \tag{2.46}$$

Note que

$$l_g^* d\omega = d(l_g^*\omega) = d\omega, \text{ se } \omega \in \Omega(G)_L.$$

Assim $(\Omega^\bullet(G)_L, d^\bullet)$ é um subcomplexo do usual complexo de De Rham $(\Omega^\bullet(G), d^\bullet)$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega^0(G)_L \xrightarrow{d} \Omega^1(G)_L \xrightarrow{d} \Omega^2(G)_L \longrightarrow \dots.$$

Analogamente, podemos definir o subcomplexo das formas invariantes a direita denotada por $(\Omega^\bullet(G)_R)$. Diremos que uma forma diferencial é dita de **invariante** se ela é invariante a esquerda e direita e denotamos este subcomplexo por $\Omega(G)_I^\bullet$.

Notamos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pode-se identificar com o espaço tangente na identidade e, T_eG, pois cada vetor $v \in T_eG$ se estende a um campo vetorial invariante á esquerda definido por $g \longmapsto (L_g)_e v$, onde $L_g : TG \longrightarrow TG$ denota a derivada da função $l_g : G \longrightarrow G$ (resp. $R_g : TG \longrightarrow TG$ denota a derivada da funcão $r_g : G \longrightarrow G$). Dada um p-forma diferenciável invariante à esquerda $\omega \in \Omega^p(G)_L$ e nos podemos só restringirnos ao morfismo $\omega_e : \Lambda^p T_eG \longrightarrow \mathbb{R}$. Isto da um isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega^\bullet(G)_L &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^\bullet \mathfrak{g}, \mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto \omega_e. \end{aligned}$$

De fato, dado um elemento $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^p \mathfrak{g}, \mathbb{R})$ podemos definir uma p-forma diferenciável denotada por $\omega^f \in \Omega^p(G)$ dada por:

$$(\omega^f)_g((X_1)_g, \dots, (X_p)_g) := f(L_{g^{-1}}(X_1)_g, \dots, L_{g^{-1}}(X_p)_g),$$

onde $g \in G$ e $X_1, \dots, X_p$ são campos vetoriais sobre G. A p-forma diferenciável ω^f definida acima é invariante à esquerda:

$$\begin{aligned} (l_g^*\omega^f)_h((X_1)_h, \dots, (X_p)_h) &= (\omega^f)_{gh}(L_g(X_1)_h, \dots, L_g(X_p)_h) \\ &= f(L_{(gh)^{-1}} L_g(X_1)_h, \dots, L_{(gh)^{-1}} L_g(X_p)_h) \\ &= f(L_{h^{-1}}(X_1)_h, \dots, L_{h^{-1}}(X_p)_h) \\ &= (\omega^f)_h((X_1)_h, \dots, (X_p)_h), \end{aligned}$$

e assim ω^f é invariante à esquerda, isto é, $\omega^f \in \Omega^p(G)_L$. Isto prova a sobrejetividade de Φ.

Vejamos a injectividade da φ. Seja $\omega \in \Omega^p(G)_L$ tais que $\omega_e = 0$ e $g \in G$ um elemento quaisquer, nos temos :

$$\begin{aligned} \omega_g((X_1)_g, \dots, (X_p)_g) &= \omega_g(L_g L_{g^{-1}}(X_1)_g, \dots, L_g L_{g^{-1}}(X_p)_g) \\ &= (l_g^*\omega)_e(L_g^{-1}(X_1)_g, \dots, L_{g^{-1}}(X_p)_g) \\ &= \omega_e(L_{g^{-1}}(X_1)_g, \dots, L^{g^{-1}}(X_p)_g) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o qual implica que $\omega = 0$, e assim provamos que φ é um isomorfismo.

Lembrando a diferencial dada por (2.25). Sejam ω uma p-forma diferenciável invariante à esquerda e $X_0,\dots,X_p$ campos vetoriais invariantes à esquerda, então nos temos a formula:

$$d\omega(X_0,\dots,X_p) = \sum_{0\leq i<j\leq p} (-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p). \tag{2.47}$$

Analogamente, seja o complexo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^* \mathfrak{g},\mathbb{R})$ onde $\mathbb{R}$ é o $\mathfrak{g}$-modulo com ação trivial, e assim temos por (2.43):

$$\mathrm{d}\, f(x_0\wedge\dots\wedge x_p) = \sum_{0\leq i<j\leq p} f([x_i,x_j]\wedge x_0\wedge\dots\wedge\hat{x}_i\wedge\dots\wedge\hat{x}_j\wedge\dots\wedge x_p), \tag{2.48}$$

onde $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^p \mathfrak{g},\mathbb{R})$ e $x_0,\dots x_p \in T_eG = \mathfrak{g}$. E assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega^p(G)_L \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega^{p+1}(G)_L \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^p\mathfrak{g},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^{p+1}\mathfrak{g},\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

comutativo. O qual da o isomorfismo

$$H^*(\Omega^\bullet(G)_L) \cong H^*(\mathfrak{g},\mathbb{R}), \tag{2.49}$$

onde $\Omega^\bullet(G)_L$ denota o complexo das formas diferenciáveis invariantes à esquerda.

Observação 20. Se G é um grupo de Lie compacto conexo, então pelo Teorema 10 nos temos que

$$H^*_{DR}(G,\mathbb{R}) \cong H^*(\Omega(G)^\bullet_L) \cong H^*(\mathfrak{g},\mathbb{R}). \tag{2.50}$$

Lema 5. Sejam G um grupo de Lie e $\mathrm{u} : G \longrightarrow G$ o mapa inversão da G, então

$$\mathrm{u}^*\,\omega = (-1)^p\omega,\ \ \forall\omega \in \Omega^p(G)_L. \tag{2.51}$$

Demonstração. Nos temos que

$$(\mathrm{du})_g = -R^{-1}_{g^{-1}}\circ L^{-1}_g, \forall g \in G. \tag{2.52}$$

Assim, para cada $g \in G$ e $x_1,\dots,x_p \in T_eG$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{u}^*\,\omega)_g(L_gx_1,\dots,L_gx_p) =& \omega_{g^{-1}}(d\,\mathrm{u}L_gx_1,\dots,d\,\mathrm{u}L_gx_p)\\
=&\omega_{g^{-1}}(-R_{g^{-1}}x_1,\dots,-R_{g^{-1}}x_p)\\
=&(-1)^p(R^*_{g^{-1}}\omega)_e(x_1,\dots,x_p)\\
=&(-1)^p\omega_e(x_1,\dots,x_p)\\
=&(-1)^p\omega_g(L_gx_1,\dots,L_gx_p),
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\mathrm{u}^*\,\omega = (-1)^p \omega. \tag{2.53}$$

□

Proposição 17. Seja G um grupo de Lie conexo, então as formas G-invariantes são fechados, isto é, $d\omega = 0$ para cada $\omega \in \Omega^p(G)_I$ para cada $p \geq 0$.

Demonstração. Dado que as formas G-invariantes formam um subcomplexo do complexo de De Rham, temos

$$(-1)^{p+1} d\omega = \mathrm{u}^*\,\mathrm{d}\,\omega = d\,\mathrm{u}^*\,\omega = d((-1)^p\omega) = (-1)^p\,\mathrm{d}\,\omega, \quad \forall \omega \in \Omega(G)_I,$$

então

$$d\omega = 0. \tag{2.54}$$

□

Assim nos temos a inclusão $\Omega^\bullet(G)_I \longrightarrow \Omega^\bullet(G)$ e como as formas G-invariantes $\Omega^\bullet(G)_I$ são exatas, então nos temos o seguinte morfismo natural

$$\Omega^\bullet(G)_I \longrightarrow H^*_{DR}(G). \tag{2.55}$$

Teorema 13. Seja G um grupo de Lie compacto e conexo, então o mapa

$$\Omega^\bullet(G)_I \longrightarrow H^*_{DR}(G) \tag{2.56}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Vide [(GREUB; VANSTONE, 1973), Secção 4.10, Teorema III] □

Teorema 14. Sejam M uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie compacto e $T : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda de G sobre M. Então o homomorfismo induzido pela inclusão

$$\mathrm{i}_* : H^*(\Omega^\bullet(M)^G) \longrightarrow H^*_{DR}(M),$$

é injetora. Se G é conexo, então i_* é um isomorfismo.

Demonstração. Vide [(GREUB; VANSTONE, 1973), Secção 4.3, Teorema I] □

2.5.2 Grupos de Lie semisimples

Definição 48. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo K. Uma forma bilinear simétrica $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ é dita **invariante** se

$$\kappa([x,y],z) = \kappa(x,[y,z]), \tag{2.57}$$

para cada $x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$.

Definição 49. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo K, para cada $x \in \mathfrak{g}$ definimos o morfismo $ad_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ o qual é chamado de **endomorfismo adjunto** dado por:

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y],$$

onde $x, y \in \mathfrak{g}$ e $[\ ,\ ]$ é o colchete da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Ela verifica a seguinte propriedade simples de verificar:

$$\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y], \text{ onde } x, y \in \mathfrak{g},$$

e assim

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_x \end{aligned}$$

é um morfismo de algebras de Lie.

Agora, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita, o traço da composição de dois tais endomorfismos define uma forma bilinear simétrica $\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ dada por

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) \tag{2.58}$$

a qual é dita de **forma de Cartan-Killing de** $\mathfrak{g}$. A forma de Cartan-Killing é invariante:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{g}}([x, y], z) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{[x,y]} \circ \mathrm{ad}_z) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z \circ \mathrm{ad}_z) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{[y,z]}) \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]). \end{aligned}$$

Proposição 18. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples, então toda forma bilinear invariante sobre $\mathfrak{g}$ é um múltiplo por um escalar da forma de Cartan-Killing.

Teorema 15 (Critério de semisimplicidade de Cartan). Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semisimple se e somente se $\kappa_{\mathfrak{g}}$ é não degenerada.

Demonstração. Vide [(HILGERT; NEEB, 2010), Teorema 5.5.9] □

Definição 50. Seja $\mathfrak{g}$ um álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Um endomorfismo de álgebra de Lie $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tais que $\tau^2 = id$ é dito de **involução**. Uma involução $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é dita de **involução de Cartan sobre** $\mathfrak{g}$, se:

$$\kappa_{\tau}(x, y) := -\kappa_{\mathfrak{g}}(x, \tau(y))$$

é simétrica e definida positiva, onde $x, y \in \mathfrak{g}$.

Desde que τ é uma involução, ela só pode ter autovalores ± 1. Denotaremos por $\mathfrak{k}$ ao auto-espaço correspondente ao autovalor 1:

$$\mathfrak{k} := \{x \in \mathfrak{g} : \tau(x) = x\},$$

e denotamos por $\mathfrak{p}$ ao auto-espaço correspondente ao autovalor -1:

$$\mathfrak{p} := \{x \in \mathfrak{g} : \tau(x) = -x\}.$$

E assim temos a descomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Observação 21. Se $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma involução de Cartan, então se verifica que:

- $\kappa_{\mathfrak{g}}$ é definida negativa sobre $\mathfrak{k}$,
- $\kappa_{\mathfrak{g}}$ é definida positiva sobre $\mathfrak{p}$.

Além disso, temos que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, isto é, se $x \in \mathfrak{k}$ e $y \in \mathfrak{p}$, então $[x,y] \in \mathfrak{p}$. De fato,

$$\tau([x,y]) = [\tau(x), \tau(y)] = [x, -y] = -[x,y].$$

Analogamente, nos temos que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

Para cada subgrupo compacto maximal K é associada uma involução de Cartan $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ e temos a correspondente descomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \tag{2.59}$$

onde

$$\mathfrak{k} := \{x \in \mathfrak{g} : \tau(x) = x\}, \quad \mathfrak{p} := \{x \in \mathfrak{g} : \tau(x) = -x\}. \tag{2.60}$$

a forma bilinear $\kappa_{\mathfrak{g}}$ é definida negativa sobre $\mathfrak{k}$ e definida negativa sobre $\mathfrak{p}$. Além disso,

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}. \tag{2.61}$$

Teorema 16 (**Descomposição de Cartan**)**.** Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$, τ uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ a correspondente descomposição de Cartan. Se $K := \{g \in G : \tau \circ \mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad} \circ \tau(g)$, então $L(K) = \mathfrak{k}$, e

$$\begin{aligned} \Phi\colon K \times \mathfrak{p} &\longrightarrow G, \\ (k,x) &\longmapsto k \exp_G x \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

Demonstração. Vide [(HILGERT; NEEB, 2010), Teorema 13.1.7] □

2.5.3 Cohomologia relativa de álgebra de Lie

Nesta subsecção nos estamos interessado em estudar $X = G(\mathbb{R})/K$, onde G é um $\mathbb{Q}$-grupo algebraico e K o subgrupo compacto maximal em $G(\mathbb{R})$. Além disso, definir a **Cohomologia relativa de álgebra de Lie** a qual denotaremos por $H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V)$ onde $\mathfrak{k}$ é a álgebra de Lie de U.

Nos temos que para cada $x \in \mathfrak{g}$, existe um endomorfismo associado $\mathscr{L}_x : C^p(\mathfrak{g},V) \longrightarrow C^p(\mathfrak{g},V)$ e um mapa linear $\mathrm{i}_x : C^p(\mathfrak{g},V) \longrightarrow C^{p-1}(\mathfrak{g},V)$ dados por

$$(\mathscr{L}_x f)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{1\leq i\leq p} f(x_1 \wedge \ldots \wedge [x_i,x] \wedge \ldots \wedge x_n) + x.f(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \tag{2.62}$$

$$(\mathrm{i}_x f)(x_1,\ldots,x_{p-1}) = f(x \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p-1}) \tag{2.63}$$

os mapas três mapas estão relacionados pela formula magica de Cartan

$$\mathscr{L}_x = d^{p-1} \circ \mathrm{i}_x + \mathrm{i}_x \circ d^p. \tag{2.64}$$

Denotamos por $C^p(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V)$ o subespaço de $C^p(\mathfrak{g};V)$ dado pelos elementos anulados por i_x e $\mathscr{L}_x$, para cada $x \in \mathfrak{k}$:

$$C^p(\mathfrak{g},\mathfrak{u};V) := \{f \in C^p(\mathfrak{g},V) : \mathrm{i}_x f = 0,\ \ \mathscr{L}_x f = 0,\ \ \forall x \in \mathfrak{u}\} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(\bigwedge^p \mathfrak{g}/\mathfrak{k},V). \tag{2.65}$$

Claramente, se $f \in C^p(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V)$ implica que $df \in C^{p+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V)$. E assim temos o seguinte complexo

$$\mathbb{R} \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V) : 0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d} C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V) \xrightarrow{d} C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V) \longrightarrow \ldots \tag{2.66}$$

e assim definimos $H^p(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V) := H^p(C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{k};V))$.

Seja G um grupo de Lie conexo, K um subgrupo compacto maximal de G. Seja $X := G/K$ o espaço homogêneo. Então pelo Teorema 16 temos que X é difeomorfo a um espaço vetorial. E assim contráctil. Existe uma ação à direita de G sobre X definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{r} : X \times G &\longrightarrow X \\ (Ux,g) &\longmapsto Uxg. \end{aligned}$$

Esta ação induz uma ação à esquerda de G sobre o complexo de De Rham $\Omega^*(X,\mathbb{R})$

Observação 22. O complexo

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \ldots$$

é uma resolução injectiva de G-módulos para $\mathbb{R}$. Por tanto o grupo de cohomologia contínua do G-modulo $\mathbb{R}$ é o grupo de cohomologia do complexo $\Omega^\bullet(X,\mathbb{R})^G$ (como na definição de G-invariantes). Isto é

$$H^*_{\mathrm{cont}}(G,\mathbb{R}) \cong H^*(\Omega^\bullet(X,\mathbb{R})^G). \tag{2.67}$$

A proposição seguinte da uma interpretação geométrica da Cohomologia relativa das álgebras de Lie:

Proposição 19. Seja G grupo de Lie conexo, K subgrupo compacto maximal de G e $X = G/K$. Seja $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ as álgebras de Lie de G e K. O isomorfismo $\varphi : \Omega^{\bullet}(G,\mathbb{R})_L \longrightarrow C^{\bullet}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \pi^* : \Omega^{\bullet}(X) &\longrightarrow \Omega^{\bullet}(G) \\ \omega &\longmapsto \pi^*\omega, \end{aligned}$$

onde $\pi : G \longrightarrow G/K$ é a projeção. Elas induzem um isomorfismo natural

$$\Omega^{\bullet}(X,\mathbb{R})^G \longrightarrow C^{\bullet}(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathbb{R}).$$

Por tanto, nos temos o seguinte isomorfismo de cohomologia

$$H^*(\Omega^{\bullet}(X)^G) \cong H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{k};\mathbb{R}). \tag{2.68}$$

Demonstração. Segue imediato da definição da φ. □

Observação 23. Se nas hipótese da Proposição 19 adicionamos a condição de que G seja compacto, então pelo Teorema 14 temos o isomorfismo

$$H^*_{DR}(X,\mathbb{R}) \cong H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{u};\mathbb{R}). \tag{2.69}$$

Teorema 17 (Van Est). Seja G um grupo de Lie conexo, U um subgrupo compacto maximal. Sejam g e u as álgebras de Lie de G e U, existe um isomorfismo

$$\beta : H^*_{\text{cont}}(G,\mathbb{R}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{u},\mathbb{R}) \tag{2.70}$$

Demonstração. Segue imediato da observação 22 e a proposição 19 . □

Definição 51. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e seja $j : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ uma subálgebra. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é **reduzido** em $\mathfrak{g}$ se a representação $\theta_{\mathfrak{h}}$ é semisimples. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é **noncohomologous to zero** se é reduzido em $\mathfrak{g}$ e o morfismo

$$j^* : H^*(\mathfrak{g}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{h}) \tag{2.71}$$

é sobrejetivo

Proposição 20. Seja $\mathfrak{h}$ uma **noncohomologous to zero** subálgebra de $\mathfrak{g}$. Então o morfismo

$$H(\mathfrak{g},\mathfrak{h})^* \longrightarrow H^*(\mathfrak{g})$$

é injectivo.

Demonstração. Vide [(GREUB; VANSTONE, 1976), Secção 10.18, Teorema IX] □

2.6 Cálculo da Cohomologia contínua

Nesta secção apresentaremos o isomorfismo de Van Est o qual permite calcular a cohomologia contínua de um grupo de Lie.

Seja G um grupo algébrico redutivo definido sobre $\mathbb{R}$. Nos assumimos que $G(\mathbb{R})$ é um grupo de Lie conexo. Então $G(\mathbb{C})$ é um grupo redutivo conexo complexo. Seja $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ a álgebra de Lie de $G(\mathbb{R})$. Então $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ é a álgebra de Lie de $G(\mathbb{C})$.
Seja K um subgrupo compacto maximal de $G(\mathbb{R})$, seja $\mathfrak{k}$ a álgebra de Lie de K e seja

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

a descomposição de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ com respeito a $\mathfrak{k}$. Então

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

é uma forma compacta de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$(Ver (Springer Monographs in Mathematics) Joachim Hilgert, Karl-Hermann Neeb (auth.)-Structure and Geometry of Lie Groups -Springer-Verlag New York (2012), Proposition 13.2.5.). Por tanto, o grupo de Lie correspondente G_u é um subgrupo compacto maximal de $G(\mathbb{C})$ que contem a K.
Denotaremos por $X := G(\mathbb{R})/K$ e $X_u := G_u/K$, X_u é dita de compacto gêmeo do espaço simétrico X o qual é determinado pelo par $(G(\mathbb{R}), K)$. Desde que X_u é determinado a menos de isomorfismos pelo grupo $G(\mathbb{R})$, e todas as aplicações são fixadas pelo subgrupo compacto K, nos denotamos X_u por $CT(G(\mathbb{R}))$ e dito de compacto gêmeo de $G(\mathbb{R})$. Agora consideramos as ações de $G(\mathbb{R})$ sobre X e G_u sobre X_u dadas por $(g,p) \mapsto pg$. Segue da Proposição 19, o complexo $C^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{k}, \mathbb{R})$ é isomorfo ao complexo das formas $G(\mathbb{R})$-invariantes sobre X e $C^*(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}, \mathbb{R})$ ao complexo das formas G_u-invariantes sobre $CT(G(\mathbb{R}))$. Desde que G_u é o subgrupo compacto maximal, pela Observação 23 temos o isomorfismo

$$\alpha : H^*_{DR}(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}, \mathbb{R}). \tag{2.72}$$

Seja

$$l : C^*(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}; \mathbb{R}) \longrightarrow C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \mathbb{R}) \tag{2.73}$$

um isomorfismo que envia $f \in C^p(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}; \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^p i\mathfrak{p}, \mathbb{R})$ a $l(f) = i^p f \in C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^p \mathfrak{p}, \mathbb{R})$,

$$l(f)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) := f(ix_1 \wedge \ldots \wedge ix_p),$$

onde $x_1, \ldots, x_p \in \mathfrak{p}$. Denotaremos por γ' a composição

$$\gamma' : H^*_{DR}(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \xrightarrow{\alpha} H^*(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}, \mathbb{R}) \xrightarrow{l^*} H^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{k}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\beta^{-1}} H^*_{\mathrm{cont}}(G(\mathbb{R}), \mathbb{R}), \tag{2.74}$$

onde β^{-1} é a inversa do isomorfismo de Van Est.
Desde que α, β^{-1} e j são isomorfismos, temos que γ' é um isomorfismo. Por tanto, nos podemos usar o fato que a cohomologia de grupos de Lie clássicos e seus espaços homogêneos associados são conhecidas, para calcular a cohomologia contínua de grupo dos grupos de Lie clássicos.

CAPÍTULO

3

K-TEORIA ALGÉBRICA DE ANÉIS

Neste capitulo definiremos os K-grupos clássicos K_0, K_1 e daremos a definição geral dos K-grupos de um anel dada por Quillen.

3.1 Grupo K_0 de um anel

Lembrando que um **monoide abeliano** é um conjunto M munido de uma operação $(+)$ associativa, comutativa e um elemento identidade 0. Um morfismo de monoides $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo de conjuntos tais que $f(0) = 0$ e $f(m+m') = f(m) + f(m')$.

Exemplo 10. O exemplo mais conhecido de monoide um abeliano é $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, os números naturais com elemento identidade 0.

Definição 52. O **grupo realizado** de um monoide abeliano M é um grupo abeliano $M^{-1}M$ munido de um morfismo de monoides $f : M \longrightarrow M^{-1}M$ que verifica a seguinte propriedade universal, para todo grupo abeliano A e todo morfismo de monoides $\alpha : M \longrightarrow A$, existe um único morfismo de grupos abelianos $\overline{\alpha} : M^{-1}M$ tas que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & M^{-1}M \arrow[d, "\overline{\alpha}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Todo monoide abeliano M tem um grupo realizado. Uma maneira de construir é tomar o quociente do grupo abeliano livre $F(M)$ com símbolos $[m]$, $m \in M$ pelo subgrupo $R(M)$ gerado pelas relações $[m+n] - [m] - [n]$. Agora, dado um morfismo de monoides $M \longrightarrow N$, o mapa $M \longrightarrow N \longrightarrow N^{-1}N$ se estende unicamente para um morfismo $M^{-1}M \longrightarrow N^{-1}N$. Assim o mapa $M \longmapsto M^{-1}M$ é um functor da categoria de monoides abelianos à categoria de grupos abelianos.

Também pode-se ver que é adjunto a esquerda do functor esquecedor, devido ao isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\text{monoide abeliano}}(M,A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M^{-1}M,A). \tag{3.1}$$

Proposição 21. Seja M um monoide abeliano. Então:

(1) Todo elemento de $M^{-1}M$ é da forma $[m]-[n]$ para algum $m,n \in M$,

(2) Se $m,n \in M$, então $[m]=[n]$, se e somente se $m+p=n+p$ para algum $p \in M$,

(3) O morfismo de monoides $M \times M \longrightarrow M^{-1}M$ mandando (m,n) a $[m]-[n]$ é sobrejetivo.

(4) Por tanto $M^{-1}M$ é o quociente (como conjunto) de $M \times M$ pela relação de equivalência gerada por $(m,n) \sim (m+p,n+p)$.

Demonstração. Todo elemento de um grupo abeliano livre é uma diferencia de suma de seus gerados, e em $F(M)$ nos temos $[m_1]+[m_2]+\cdots \equiv [m_1+m_2+\cdots]$ modulo $R(M)$. Portanto todo elemento de $M^{-1}M$ é uma diferencia de geradores. Esto prova (1) e (3). Para (2), suponha que $[m]-[n]=0$ em $M^{-1}M$. Então no grupo abeliano livre $F(M)$ nos temos

$$[m]-[n] = \sum([a_i+b_i]-[a_i]-[b_i]) - \sum([c_j+d_j]-[c_j]-[d_j]),$$

e assim temos

$$[m]+\sum([a_i]+[b_i])+\sum[c_j+d_j] = [n]+\sum[a_i+b_i]+\sum([c_j]+[d_j]). \tag{3.2}$$

Agora em um grupo abeliano livre, duas sumas de geradores $\sum[x_i]$ e $\sum[y_j]$ sao iguais se, elas tem o mesmo numero de termos e existe uma permutação σ tais que $y_i = x_{\sigma(i)}$. Por tanto os gerado do lado esquerdo e direito de 3.2 sua iguais salvo uma permutação. Isto podemos entender que em M a suma dos termos do lado esquerdo e direito de 3.2 são os mesmos, isto é ,

$$m+\sum(a_i+b_i)+\sum(c_j+d_j) = n+\sum(a_i+b_i)+\sum(c_j+d_j)$$

em M. O qual conclui (2), a parte (4) segue de (1) e (2). □

Definição 53. Seja R um anel.E seja $P(R)$ o conjunto das classes de isomorfismo dos R-módulos projetivos finitamente gerados munido da suma direta $\oplus$ e o elemento identidade 0, o qual é um monoide abeliano. O **grupo de Grothendieck de** R, denotado por $K_0(R)$, é o grupo realizado de $P(R)$.

Observação 24. Se R é uma anel comutativo, $K_0(R)$ é um anel comutativo com $1=[R]$, porque o monoide $P(R)$ é um comutativo semianel com produto $\otimes_R$. Isto segue do seguinte fato: $\otimes_R$ é distributivo sobre $\oplus$; $P\otimes_R L \cong L\otimes_R P$ e $P\otimes_R R \cong P$; se P,L são R-módulos finitamente gerados, então $P\otimes_R L$ também é um R-modulo projetivo finitamente gerado.

Exemplo 11. Seja K um corpo. Então o monoide abeliano $P(K)$ é isomorfo a $\mathbb{N}$, assim $K_0(K) = \mathbb{Z}$. Um argumento similar é usado para mostrar que $K_0(R) = \mathbb{Z}$ para todo anel local R e também para todo Dominio de ideais principais (DIP). Em particular $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

K_0 é um functor da categoria de anéis à categoria de grupos topológicos e da categoria de anéis comutativos à categoria de anéis comutativos. Para ver isto, suponhamos que $R \longrightarrow S$ é um morfismo de anéis, o mapa $\otimes_R S : P(R) \longrightarrow P(S)$ definido por $P \longmapsto P \otimes_R S$ é um morfismo de monoides, e por tanto um morfismo de grupo $\otimes_R S : K_0(R) \longrightarrow K_0(S)$. Se R, S são anéis comutativos, então $\otimes_R S : K_0(R) \longrightarrow K_0(S)$ é um morfismo de anéis, pois $\otimes_R S : P(R) \longrightarrow P(S)$ é um morfismo de semianéis:

$$(P \otimes_R L) \otimes_R S \cong (P \otimes_R S) \otimes_S (L \otimes_R S) \tag{3.3}$$

3.2 Grupo K_1 de um anel

Seja R um anel associativo com unidade . Consideremos o grupo $GL_n(R)$ das $n \times n$ matrizes invertíveis com coeficientes em R. Denotamos $e_{ij}^{(n)}(\lambda)$ para cada $\lambda \in R$ e $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ a matriz $n \times n$ tendo 1's na diagonal e 0's fora, exceto na posição (i, j) onde tem a λ. Tais matrizes são ditas de **elementares**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & j & & & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Existem as seguintes relações para matrizes elementais.

1. $e_{ij}^{(n)}(\lambda)e_{ij}^{(n)}(\mu) = e_{ij}^{(n)}(\lambda + \mu), \ \forall \lambda, \ \mu \in R.$
2. $[e_{ij}^{(n)}(\lambda), e_{jk}^{(n)}(\mu)] = e_{ik}^{(n)}(\lambda\mu)$, para $i \neq k$.
3. $[e_{ij}^{(n)}(\lambda), e_{kl}^{(n)}(\mu)] = 1$, para $j \neq k, i \neq l$.

Tais matrizes geram o **subgrupo de matrizes elementais** $E_n(R) \subseteq GL_n(R)$. Temos o morfismo natural definido por

$$\begin{aligned} \varphi : GL_n(R) &\hookrightarrow GL_{n+1}(R) \\ M &\mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

o qual induz o morfismo

$$\varphi : E_n(R) \hookrightarrow E_{n+1}(R). \tag{3.4}$$

Por tanto, nos podemos definir os limites direitos

$$GL(R) := \varinjlim GL_n(R) \tag{3.5}$$

$$E(R) := \varinjlim E_n(R). \tag{3.6}$$

O grupo $GL(R)$ pode ser entendido como o grupo de matrizes arbitrariamente grande. Para a multiplicação de matrizes de diferentes tamanhos, usamos o morfismo φ.

Observação 25. Das relações anteriores temos que $[E_n(R), E_n(R)] = E_n(R)$ para $n \geq 3$. E assim temos que $E(R) = [E(R), E(R)]$ o qual diz que $E(R)$ é perfeito.

Lema 6 (Whitehead)**.** Para cada matriz $A \in GL_n(R)$ temos que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(R). \tag{3.7}$$

Demonstração. Para cada $B \in M_n(R)$, claramente $\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$. E usando a identidade

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A^{-1} - I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A - I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

□

Proposição 22. Seja R um anel, então

$$E(R) = [E(R), E(R)] = [GL(R), GL(R)]. \tag{3.9}$$

Demonstração. Sejam $M, N \in GL(R)$ sem perda de generalidade, nós podemos supor que $M, N \in GL_n(R)$

$$\begin{pmatrix} [M,N] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MNM^{-1}N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MN & 0 \\ 0 & (MN)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

e segue do Lema de Whitehead que $[M, N] \in E(R)$ o qual implica que $[GL(R), GL(R)] \subseteq E(R)$. Portanto temos que $[GL(R), GL(R)] = E(R)$, pois

$$E(R) = [E(R), E(R)] \subseteq [GL(R), GL(R)].$$

□

A não comutatividade de $GL(R)$ é medida por $E(R) = [GL(R), GL(R)]$. Esto sugere, que se deve estudar o abelianizador de $GL(R)$.

Definição 54. Seja R um anel, o grupo K_1 é dado por

$$K_1(R) := GL(R)/E(R) = GL(R)^{\text{ab}} = H_1(GL(R), (Z)).$$

Pelo lema de Whitehead, o produto $[M][N] := [MN]$ em $K_1(R)$. Pode ser visto como a "matriz escalonada"

$$\begin{pmatrix} MN & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}$$

então $[MN] = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ em $K_1(R)$.

Observação 26. O homomorfismo de grupos $\det : GL_n(R) \longrightarrow R^\times$ pode ser estendido a $\det : GL(R) \longrightarrow R^\times$ o qual é um homomorfismo de grupos, pois se $M, N \in GL(R)$ temos que

$$\det \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(M).$$

Para mais detalhes veja-se (ARTIN, 1957).

Definição 55. Seja R um anel, o **grupo linear especial** $SL(R)$ é definido por

$$SL(R) := \{M \in GL(R) : \det(M) = 1\}.$$

Vemos que $E(R) \subseteq SL(R)$, então $[E(R), E(R)] \subseteq [SL(R), SL(R)] \subseteq [GL(R), GL(R)]$, segue da Proposição 22 que $E(R) = [SL(R), SL(R)]$.

Seja $SK_1(R) := SL(R)/[SL(R), SL(R)] = SL(R)/E(R)$. Nos temos uma sequencia exata curta que cinde

$$0 \longrightarrow SL(R) \hookrightarrow GL(R) \xrightarrow{\det} R^\times \longrightarrow 0 \tag{3.11}$$

O qual implica que $GL(R) \cong SL(R) \oplus R^\times$ (a secção é dada pela inclusão $R^\times = GL_1(R) \hookrightarrow GL(R)$), e como $E(R) \subseteq SL(R)$, então a sequencia (3.11) induz a sequencia exata curta que cinde

$$0 \longrightarrow SK_1(R) \longrightarrow K_1(R) \xrightarrow{\det} R^\times \longrightarrow 0, \tag{3.12}$$

isto é, $K_1(R) \cong SK_1(R) \oplus R^\times$. Neste trabalho, nos estamos interessados no caso quando $R = \mathscr{O}_F$, onde $\mathscr{O}_F$ o anel de inteiros de um corpo numérico F.

Teorema 18 (Bass-Milnor-Serre). Seja F um corpo numérico e seja $\mathscr{O}_F$ seu anel de inteiros. Então $SK_1(\mathscr{O}_F) = 0$. Em particular, $K_1(\mathscr{O}_F) \cong \mathscr{O}_F^\times$.

Demonstração. Vide [(MILNOR, 1971), Corolário 16.3] □

3.3 O teorema da unidade

3.3.1 Integralidade

Um corpo numérico é uma extensão F de $\mathbb{Q}$. Um elemento $y \in F$ é dito **integral**, se y é zero de um polinômio mônico $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Daremos a definição de integralidade de um fato mais geral.

Definição 56. Seja $A \subseteq B$ uma extensão de anéis. Um elemento de $b \in B$ é dito **integral** sobre A, se satisfaz uma equação mônica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \ \ n \geq 1,$$

com coeficientes $a_i \in A$. O anel B é dito **integral** sobre A se todos os elementos $b \in B$ são integrais sobre A.

Proposição 23. Seja $A \subseteq B$ uma extensão de anéis. Um numero finito de elementos $b_1, b_2, \cdots, b_r \in B$ são integrais sobre A se e somente se $A[b_1, b_2, \cdots, b_r]$ visto como A-módulo é finitamente gerado.

Demonstração. Vide [(NEUKIRCH, 1937), Proposição 2.2] □

Observação 27. Seja $A \subseteq B$ uma extensão de anéis. Dados $x, y \in B$ integrais sobre A, então pela Proposição 23 temos que $A[x,y]$ é um A-módulo finitamente gerado. Além disso, vemos que $A[x,y,xy] = A[x,y,x+y] = A[x,y]$ e pela Proposição 23 temos que $x+y, xy \in B$ são integrais sobre A.

Proposição 24. Seja $A \subseteq B \subseteq C$ duas extensões de anéis. Se C é integral sobre B e B é integral sobre A, então C é integral sobre A.

Demonstração. Seja $c \in C$, então existe uma equação mônica

$$c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \cdots + b_1 c + b_0 = 0,$$

com $b_i \in B$ e como B é integral sobre A, então pela Proposição 23 temos que $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$ é um A-modulo finitamente gerado. E por tanto temos que $c \in C$ é integral sobre $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$, novamente pela Proposição 23 temos que $A[b_1, \cdots, b_{n-1}, c]$ é um $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$-módulo finitamente gerado e como $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$ é um A-módulo finitamente gerado, então $A[b_1, \cdots, b_{n-1}, c]$ é um A-módulo finitamente gerado e assim c é integral sobre A. Por tanto C é integral sobre A. □

Dada $A \subseteq B$ uma extensão de anéis, pela Observação 27 temos provado que o conjunto dos elementos integrais de B sobre A

$$\overline{A} := \{b \in B : b \text{ é integral sobre } A\}$$

formam um anel o qual é dito de **fecho integral de A sobre B**. Dizemos que A é **integralmente fechado** sobre B, se $A = \overline{A}$. Segue da Proposição 23 que $\overline{A}$ é integralmente fechado sobre B. Se A é um domínio integral com corpo de frações K, então o fecho integral $\overline{A}$ de A sobre K é dita de **normalização** de A, e A é dito simplesmente **integralmente fechado** se $A = \overline{A}$.

Observação 28. Todo Domínio de fatoração única D é integralmente fechado. De fato, sejam K o corpo de fracões de D e $a/b \in K$ $(a, b \in D)$ é integral sobre D, isto é

$$(a/b)^n + a_{n-1}(a/b)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

com $a_i \in D$, então

$$a^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + a_0 b^n = 0$$

assim todo elemento primo p que divide a b também divide a a, tomando a/b reduzido temos que $a/b \in D$. Por tanto D é integralmente fechado.

Lema 7. Seja A um domínio integralmente fechado, K seu corpo de fracões, $L|K$ uma extensão finita de corpos , B o fecho integral de A em L. Então B é integralmente fechado.

Demonstração. Primeiro vejamos que cada elemento de L é da forma b/a com $b \in B$ e $a \in A$. Seja $l \in L$ como $L|K$ é uma extensão finita, então temos que

$$l^n + k_{n-1}l^{n-1} + \cdots + k_0 = 0,$$

com $k_i \in K$ e como K é o corpo de fracões de A, temos que

$$a_n l^n + a_{n-1}l^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

com $a_i \in A$, multiplicando por a^{n-1} temos que $a_n l \in L$ é integral sobre A. E assim $b = a_n l \in B$, isto é $l = b/a_n$ com $b \in B$ e $a_n \in A$. Isto mostra que L é o corpo de frações de B e como B é o fecho integral de A em L, então $B = \overline{B}$. Por tanto, B é integralmente fechado. □

Lema 8. Sejam A, B e L como acima. Então, $\beta \in L$ é integral sobre A se e somente se o polinômio minimal $p(X) \in K[X]$ tem seus coeficientes em A.

Demonstração. Seja $\beta \in L$ zero do polinômio $g(X) \in A[X]$. Então $p(X)$ divide a $g(X)$ em $K[X]$, todas as raízes $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ são integrais sobre A, e assim todos os coeficientes de $p(X) \in K[X]$ são integrais sobre A. Por tanto $p(X) \in A[X]$. □

Definição 57. Seja $L|K$ uma extensão finita de corpos. O **traço** e a **norma** de um elemento $x \in L$ são dadas pelo traço e a determinante, respectivamente, do endomorfismo

$$\begin{aligned} T_x : L &\longrightarrow L \\ \alpha &\longmapsto x\alpha, \end{aligned}$$

do K-espaço vetorial L. Isto é, $\mathrm{Tr}_{L|K}(x) := \mathrm{Tr}(T_x)$ e $N_{L|K}(x) := \det(T_x)$.

No polinômio característico de T_x, é dado por

$$f_x(t) = \det(tI_n - T_x) = t^n - k_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n k_n \in K[t],$$

onde $n = [L : K]$, reconhecemos o traço e a norma por $a_1 = \mathrm{Tr}_{L|K}(x)$ e $a_n = N_{L|K}(x)$. Desde que $T_{x+y} = T_x + T_y$ e $T_{xy} = T_x \circ T_y$, obtemos os homomorfismo

$$\mathrm{Tr}_{L|K} : L \longrightarrow K \ \text{ e } \ N_{L|K} : L^\times \longrightarrow K^\times$$

No caso onde a extensão $L|K$ é separável, a traça e a norma tem uma interpretação mediante a Teoria de Galois.

Proposição 25. Se $L|K$ é uma extensão finita e separável e $\sigma : L \longrightarrow \overline{K}$ varia sobre os K-mergulhos de L na clausura algebraica $\overline{K}$ de K, então nos temos

(i) $f_x(t) = \prod_\sigma (t - \sigma x)$,

(ii) $\mathrm{Tr}_{L|K}(x) = \sum_\sigma \sigma(x)$,

(iii) $N_{L|K}(x) = \prod_\sigma \sigma(x)$.

Demonstração. Vide [(NEUKIRCH, 1937), Proposição 2.6] □

Definição 58. Um sistema de elementos $\omega_1, \cdots, \omega_n \in B$ tal que, para cada $b \in B$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear

$$b = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n,$$

com coeficientes em $a_i \in A$, é dita de **base integral de B sobre A** (ou uma A-base de B). Uma base integral de B sobre A é também uma base de L sobre K, a cardinalidade n sempre é igual ao grau $[L : K]$ da extensão.

Proposição 26. Sejam $L|K$ uma extensão finita e separável, A um DIP, então todo B-módulo $M \neq 0$ de L é um A-módulo livre de posto $[L : K]$. Em particular, B admite uma base integral sobre A.

Demonstração. Vide [(NEUKIRCH, 1937), Proposição 2.10] □

Observação 29. Nosso principal interesse nas considerações de integralidade é estudar o fecho integral $\mathscr{O}_F \subseteq F$ de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ em um corpo numérico F. Pela Proposição 26, todo $\mathscr{O}_F$-módulo finitamente gerado $\mathfrak{a}$ de F admite uma $\mathbb{Z}$ base $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$,

$$\mathfrak{a} = \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_n.$$

Teorema 19. Seja F um corpo numérico. O anel $\mathscr{O}_F$ é noetheriano, integralmente fechado, e todo ideal primo $\mathfrak{p} \neq 0$ é maximal.

Demonstração. Vide [(NEUKIRCH, 1937), Teorema 3.1] □

Definição 59. Um domínio, noetheriano, integralmente fechado no qual todo ideal primo não nulo é maximal é dito de **domínio de Dedekind**. Assim $\mathscr{O}_F$ é um domínio de Dedekind.

3.3.2 Retículo

Definição 60. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n. Um **retículo** em V é um subgrupo da forma

$$\Gamma := \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \cdots + \mathbb{Z}v_r \tag{3.13}$$

com $v_1, v_2, \cdots, v_r$ vetores linearmente independente em V. A r-tupla $(v_1, \cdots, v_r)$ é dita de **base** e o conjunto

$$\Phi := \{x_1v_1 + \cdots + x_rv_r : x_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq x_i < 1\}$$

é dito de **paralelepípedo fundamental**. O retículo é dito de **completo** ou uma $\mathbb{Z}$-estrutura de V se r=n. Para um paralelepípedo fundamental Φ de um retículo completo

$$\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \cdots + \mathbb{Z}v_n, \tag{3.14}$$

em V. O **covolume** de Γ é definido por

$$R_\Phi := \mathrm{Vol}(V/\Gamma) = |\det(v_1, \cdots, v_n)|. \tag{3.15}$$

Observação 30. Se $\Gamma := \mathbb{Z}v_1' + \mathbb{Z}v_2' + \cdots + \mathbb{Z}v_n'$ é outra base, então a matriz cambio de base entre $\{v_i\}$ e $\{v_i'\}$ tem determinante ± 1 (é invertível e com coeficientes inteiros), assim o covolume independe da escolha da base.

A completitude de um retículo é equivalente ao fato que o conjunto de todas as traslações $\Phi + \lambda, \forall \lambda \in \Gamma$ cobrem V. A definição de acima faz uso de uma escolha de vetores linearmente independentes, mas precisamos de uma caracterização de retículos que seja independente da escolha. Note que, um retículo é um subgrupo finitamente gerado de V. Pero não necessariamente cada grupo finitamente gerado é um retículo, por exemplo, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} \subseteq \mathbb{R}$ não é um retículo. Pero cada retículo $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_r$ tem uma propriedade especial, ser um subgrupo **discreto** de V. Isto é, para cada ponto $\lambda \in \Gamma$ é um ponto isolado no sentido que não existe uma vizinhança que contenha outro ponto de Γ. De fato, se

$$\lambda = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r \in \Gamma,$$

então, estendendo $v_1, \cdots, v_r$ a uma base $v_1, \cdots, v_n$ de V, o conjunto

$$\{x_1v_1 + \cdots + x_nv_n : x_i \in \mathbb{R}, |a_i - x_i| < 1 \text{ para cada } i = 1, \cdots m\}$$

claramente é uma vizinhança. Esta propriedade é necessária para caracterizar.

Proposição 27. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Um subgrupo Γ de V é um retículo se e somente se é discreto.

Demonstração. Vide [(NEUKIRCH, 1937), Proposição 4.2] □

Teorema 20 (Teorema das unidades de Dirichlet). O grupo $K_1(\mathscr{O}_F) \cong \mathscr{O}_F^\times$ é finitamente gerado, mais precisamente,

$$K_1(\mathscr{O}_F) \cong \mathscr{O}_F^\times \cong \mathbb{Z}^{r1+r2-1} \oplus \mu_F,$$

onde

. r_1 é o numero de mergulhos reais $\sigma_1, \cdots \sigma_{r_1} : F \to \mathbb{R}$

. r_2 é o numero de pares de mergulhos complexos $\sigma_{r_1+1}, \cdots \sigma_{r_1+r_2}, \overline{\sigma_{r_1+1}}, \cdots, \overline{\sigma_{r_1+r_2}} : F \to \mathbb{C}$

. μ_F é o grupo das unidades de F. Isto é, $\mu_F = \{x \in F : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tais que } x^n = 1\}$.

Demonstração. Vide [(NEUKIRCH, 1937), Teorema 7.4] □

3.4 CW-complexos

Um espaço topológico X e $f : X \longrightarrow Y$ uma função sobrejetora sobre um conjunto Y. Então $\tau_Y^f = \{\ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U)$ é um aberto de $X\}$ é uma topologia sobre Y. Esta topologia é a mais fina sobre Y tal que f é continua. Tal topologia τ_Y^f é dito de **topologia quociente** sobre Y com respeito a f. Um função continua sobrejetora $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos é dita de **mapa quociente** se tem a seguinte propriedade: $U \subseteq Y$ é aberto se, e somente se $f^{-1}(U) \subseteq X$ é aberto. Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma mapa quociente, então Y é dito de **espaço quociente** de X.
Se R é uma relação de equivalência sobre X, então X/R denota o conjunto das classes de equivalência. A **aplicação canônica** $\pi : X \longrightarrow X/R$ que envia $x \in X$ na sua classe de equivalência. O **espaço quociente** X/R é definido pelo conjunto X/R junto com a topologia quociente com respeito a π.
Sejam $A \subseteq X$, $j : A \longrightarrow X$ a inclusão e $f : A \longrightarrow Y$ uma função continua. Nós identificamos na suma topológica $X \sqcup Y$ para cada $a \in A$ o ponto $a \in X$ com o ponto $f(a) \in Y$, isto é, nós consideramos a relação de equivalência sobre a suma topológica $X \sqcup Y$ com classe de equivalência $[z] = \{z\}$ para $z \notin A \sqcup f(A)$ e $[z] = \{z\} \cup f^{-1}(z)$ para $z \in f(A)$. O espaço quociente é denotado por $Y \cup_f X$ o qual é dito de **espaço adjunto** obtido por **colagem** X via f sobre Y. As inclusões canônicas $X \longrightarrow X \sqcup Y$ e $Y \longrightarrow X \sqcup Y$ induz as funções continuas $F : X \longrightarrow Y \cup_f X$ e $J : Y \longrightarrow Y \cup_f X$, a função continua $J : Y \longrightarrow Y \cup_f X$ é um mergulho.

Proposição 28. Seja $A \subseteq X$ um subconjunto fechado. Então temos a seguinte propriedades:

(1) J é um mergulho fechado.

(2) F restrita a $X \setminus A$ é um mergulho aberto.

(3) Se X, Y são espaços T_1 (Resp. espaços T_4), então $Y \cup_f X$ é um espaço T_1 (Resp. espaços T_4).

(4) Se f é uma aplicação quociente, então F é uma aplicação quociente.

Demonstração. Vide [(DIECK, 2008), Proposição 1.2.4] □

Usamos os subconjuntos padrão de espaços euclidianos S^{n-1}, $\mathbb{D}^n$, $E^n = \mathbb{D}^n \setminus S^{n-1}$, $(n \geq 1)$. Nós estabeleceremos $S^{-1} = \emptyset$ e seja $\mathbb{D}^0$ um ponto, por tanto $E^0 = \mathbb{D}^0$. Uma **célula k-dimensional**(ou uma **k-célula**) em um espaço topológico X é um subconjunto e^k o qual é, com a topologia de subespaço, homeomorfo a E^k. Um ponto é sempre uma 0-célula. Seja X um espaço topológico. Para $n \geq 1$ e seja $\varphi = \langle \varphi_\lambda \rangle : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda^{n-1} \longrightarrow X$ uma aplicação continua, onde $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda^{n-1}$ é a união disjunta de esferas de dimensão $n-1$, $S_\lambda^{n-1} \subset \mathbb{D}_\lambda^n$, $\lambda \in \Lambda$. Definamos a n-ésima extensão celular de X com aplicação de colagem φ e aplicação característica F como o espaço adjunto $X \cup_\varphi (\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{D}_\lambda^n)$. Assim a n-ésima extensão celular de X da o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cap"] & X \arrow[d, "J"] \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{D}_\lambda^n \arrow[r, "F"] & X \cup_\varphi (\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{D}_\lambda^n) \end{tikzcd}$$

Observação 31. Como $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda^{n-1}$ é um subconjunto fechado de $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{D}_\lambda^n$. Então pela proposição anterior a n-ésima extensão celular de X contem ao espaço X como subespaço fechado e contem a $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda^n$ como subespaço aberto. Assim as n-células $e_\lambda^n := F(E_\lambda^n)$ são as componentes conexas do complementar do espaço topológico X.

Definição 61. Um espaço CW**-complexo** (ou um **complexo Whitehead**) é um espaço topológico X junto com uma sequencia de subespaços $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^{n-1} \subseteq X^n \subseteq \cdots \subseteq X$ tal que:

(1) $X = \bigcup_{0 \leq n} X^n$,

(2) O espaço topológico X^0 é discreto.

(3) Para cada $n \geq 1$, X^n é homeomorfo a uma n-ésima extensão celular de X^{n-1}.

(4) a topologia de X é coerente com a sequencia,isto é, um subconjunto $A \subseteq X$ é fechado se, e somente se, $A \cap X^n$ é um fechado em X^n para cada .

Um subconjunto $A \subseteq X$ de um CW-complexo é um **subcomplexo** se é a união de células e o fecho de cada célula em A esta contida em A. Seja G um grupo agindo sobre um espaço topológico X.

- Dizemos que G age livre e propriamente descontinua, se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U_x de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G - \{e\}$ (e elemento neutro do grupo G).

- Dizemos que G age celularmente sobre X, se verifica o seguinte:

  (i) Para cada $g \in G$ e cada célula aberta E_λ de X, a traslação da esquerda gE_λ é uma célula aberta de X da mesma dimensão.

  (ii) Se $gE_\lambda = E_\lambda$, então $g = e$ (e elemento neutro do grupo G).

Observação 32. Pela definição dada cima. Seja X um espaço topológico tal que G age celulamente sobre X, então G age livre e propriamente descontinua sobre X.

Lema 9. Seja X um espaço topológico Hausdorff e G uma ação livre e propriamente descontinua sobre X, então o mapa quociente $\pi : X \longrightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração. Primeiro provemos que π é uma aplicação aberta. Seja $U \subset X$ um aberto. Desde que X/G tem a topologia quociente, $\pi(U)$ é um aberto de X/G se e somente se $\pi^{-1}(\pi(U))$ é um aberto de X. Da definição do π, temos

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

Desde que cada $g \in G$ induz um homeomorfismo de X, gU é um aberto para todo $g \in G$, e assim $\pi^{-1}(\pi(U))$ é um aberto de X.
Agora provemos o lema. Nós necessitamos provar que π é uma aplicação de recobrimento. Para isto, seja $[x] \in X/G$ fixo arbitrário. Seja U_x uma vizinhança de x dada pela ação G (G age livre e propriamente descontinua). Assim temos as seguintes propriedades de π:

(i) $\pi(U_x)$ é uma vizinhança de x, pois π é uma aplicação aberta.

(ii) $\{gU_x\}_{g \in G}$ é uma descomposição aberta disjunta de $\pi^{-1}(p(U_x))$ $(\pi^{-1}(\pi(U_x)) = \bigsqcup_{g \in G} gU_x)$.

(iii) $\pi|_{gU_x} : gU_x \longrightarrow \pi(gU_x) = \pi(U_x)$ é uma aplicação continua, aberta e sobrejetora (gU_x é um aberto de X).

Portanto, resta verificar que $\pi|_{gU_x}$ é injetora. Em efeito, sejam $x_1, x_2 \in U_x$ tal que $\pi(gx_1) = \pi(gx_2)$. Assim temos, $[x_1] = [gx_1] = [gx_2] = [x_2]$ em X/G. Seja $h \in G$ tal que $x_1 = hx_2$ e como $x_1 \in U_x$ e $hx_2 \in hU_x$, o qual implica que $U_x \cap hU_x = \emptyset$, e assim $h = e$, e assim $gx_1 = gx_2$. Portanto, $\pi : X \longrightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento. □

Proposição 29. Seja X um espaço topológico e G uma grupo que age livre e propriamente descontinua sobre X, então:

(1) a aplicação quociente $p: X \longrightarrow X/G$, $p(x) = Gx$, é espaço de recobrimento normal,

(2) G é o grupo de transformações de Deck de seu espaço de recobrimento $p: X \longrightarrow X/G$ se X é conexo por caminhos.

(3) G é isomorfo a $\pi_1(X/G)/p_*(\pi_1(X))$ se X é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos.

Demonstração. Vide [(HATCHER, 2002), Proposição 1.40] □

Proposição 30. Seja $p: (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X, x_0)$ uma aplicação de recobrimento, então $p_*: \pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ é um isomorfismo para todo $n \geq 2$.

Demonstração. Vide [(HATCHER, 2002), Proposição 4.1] □

Teorema 21 (Whitehead). Se o mapa $f: X \longrightarrow Y$ entre espaços CW-complexo induz isomorfismos $f_*: \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ para todo $n \geq 1$ e bijecção para $n = 0$, então f é uma equivalência homotópica. No caso f seja a inclusão de um subcomplexo $X \hookrightarrow Y$, a inclusão é forte: X é um retrato por deformação de Y.

Demonstração. Vide [(HATCHER, 2002), Teorema 4.5] □

A partir de agora todos os espaços topológicos terão o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo.

Teorema 22. Seja G um grupo. Então existe um CW-complexo contráctil $\widehat{X_G}$ tal que G age livre e celularmente sobre $\widehat{X_G}$ (e portanto propriamente descontinua) e $\widehat{X_G}/G$ é um CW-complexo.

Demonstração. Vide [(ROSENBERG, 1994), Teorema 5.1.15] □

Corolário 2. Seja G e $\widehat{X_G}$ como no teorema anterior, então $p: \widehat{X_G} \longrightarrow \widehat{X_G}/G$ é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração. Segue do Teorema 22 e o Lema 9. □

Definição 62 (espaço classificante). Seja G um grupo. Um espaço topológico X é dito de **espaço classificante de** G ou um espaço $K(G,1)$, se X é conexo por caminhos, tem espaço de recobrimento universal e $\pi_1(X, x_0) = G$.

O Teorema 22 garante a existência do espaço classificante para quaisquer grupo G, nos denotamos ao espaço classificante de G por BG e seu espaço de recobrimento universal por EG. Pelo lema 9 temos que $\pi : EG \longrightarrow BG$ é uma aplicação de recobrimento e segue da proposição 30 e do fato que EG é contrátil, que :

$$\pi_n(BG, p(x_0)) \cong \pi_n(EG, x_0) = 0, \tag{3.16}$$

,

para todo $n \leq 2$. Além disso, pela proposição 29 temos que:

$$G \cong \frac{\pi_1(BG, p(x_0))}{p_*(\pi_n(EG, x_0))} = \pi_1(BG, p(x_0)).$$

E assim temos que

$$\pi_n(BG, p(x_0)) \cong \begin{cases} G & si \quad n = 1, \\ 0 & si \quad n \neq 0. \end{cases}$$

O seguinte Teorema, mostra que o tipo de homotopia do espaço classificante de G é unicamente determinado por G.

Exemplo 12. Seja G um grupo, sabemos que G age livre e propriamente descontinua sobre EG e o mapa $\pi : X \longrightarrow G/X$ uma aplicação de recobrimento, então pela Proposição 16 temos que

$$H_n(G, M) \cong H_n(BG, M), \tag{3.17}$$

$$H^n(G, M) \cong H^n(BG, M). \tag{3.18}$$

onde M é um G-modulo trivial. Em particular

$$H_n(G, \mathbb{Z}) \cong H_n(BG, \mathbb{Z}), \tag{3.19}$$

$$H^n(G, \mathbb{Z}) \cong H^n(BG, \mathbb{Z}), \tag{3.20}$$

onde $\mathbb{Z}$ é visto como G-modulo trivial.

Proposição 31. Seja X um CW-complexo conexo por caminhos e seja Y o espaço classificante de G. Então todo homomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é induzido por um mapa $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, isto é $\varphi = f_*$, que é único a menos de homotopia fixando x_0.

Demonstração. Vide [(HATCHER, 2002), Proposição 1B.9] □

Observação 33. Se X é um CW-complexo conexo por caminhos tais que $\pi_1(X, x_0) = G$ e $\pi_n(X, x_0) = 0$ para $n > 1$, para algum $x_0 \in X$, então pela Proposição 30 e o Teorema 21, o espaço de recobrimento universal de X tem todos seus grupos de homotopia triviais e por tanto é contrátil. E segue da Proposição 31 que o tipo de homotopia do espaço classificante é unicamente determinado por G.

3.5 +-construção

Nesta secção, daremos a $+$-construção, o qual é o resultado da colagem de células para modificar o grupo fundamental, sem modificar os grupos de homologia.

Definição 63. Seja X um espaço topológico, **o grupoide fundamental** de X é a categoria denotada por $\pi(X)$ onde:

1. $\text{Ob}(\pi(X)) := X$
2. $\text{Hom}(x,y) := \{[\alpha] : \alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tais que $\alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\}$, onde $[\alpha]$ representa a classe de homotopia de α.

Observação 34. 1. Como a definição sugere, isto é um **grupoide**, que é uma categoria a qual todo morfismo são isomorfismo. Para ver a inversa do $[\alpha]$ só basta tomar a classe de homotopia do caminho inverso α^{-1}.

2. Além disso temos que $\text{Hom}(x,x) = \pi_(X,x)$, e assim podemos entender esta categoria como simplesmente uma maneira de organizar todos os grupos fundamentais de X e todos os isomorfismos entre eles induzidos por caminhos.

Definição 64. Seja X um espaço topológico, um **sistema de coeficientes locais** sobre X é um functor contravariante

$$\mathscr{H} : \pi(X) \longrightarrow \text{Gr}_{\text{Ab}} \tag{3.21}$$

do grupoide fundamental de X na categoria de grupos abelianos.

Observação 35. Se X é um espaço conexo por caminhos com ponto base $x_0 \in X$, então ter uma ação de um grupo A sobre $\pi_1(X,x_0)$ sobre G é equivalente a pedir um sistema de coeficientes locais para X.

Exemplo 13. 1. Sejam X um espaço topológico e A um grupo abeliano. Definimos $\mathscr{H} : \pi(X) \longrightarrow \text{Gr}_{\text{Ab}}$ por $\mathscr{H}(x) = A$ e $\mathscr{H}([\alpha]) = Id_A$ para todo caminho α. Este é o sistema de coeficiente locais constante, o qual denotaremos só por A.

2. Seja X um espaço topológico, definimos $\mathscr{H} : \pi(X) \longrightarrow \text{Gr}_{\text{Ab}}$ por

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(x) &= \pi(X,x) \\ \mathscr{H}([\alpha]) &:= \alpha_{\#} : \pi_1(X,\alpha(1)) \longrightarrow \pi_1(X,\alpha(0)) \end{aligned}$$

onde $\alpha_{\sharp}$ é o mapa definido por:

$$\alpha_{\#}([\lambda]) = [\alpha * \lambda * \alpha^{-1}].$$

onde se pode mostrar facilmente que o homomorfismo $\alpha_\#$ independe do representante λ e depende só da classe de homotopia de α, e por tanto é um isomorfismo com inversa $(\alpha^{-1})_\#$.

3. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação continua, se $\mathscr{H}$ é um sistema de parâmetros locais para Y então o mapa f induz um sistema de parâmetros $f^*(G) : \pi(X) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{Ab}}$ sobre X, dado por:

$$(f^*\mathscr{H})(x) := \mathscr{H}(f(x))$$
$$(f^*\mathscr{H})([\alpha]) := \mathscr{H}([\alpha \circ f]), \text{ para todo morfismo } [\alpha] \text{ em } \pi(Y).$$

Definição 65. Sejam X um espaço topológico e $\mathscr{H}$ um sistema de coeficientes locais de X. Definimos

$$C_n(X,\mathscr{H}) = \{\sum g_i \otimes \sigma_i : \sigma_i : \Delta^n \longrightarrow X, g_i \in \mathscr{H}(\sigma_i(e_0))\} \subseteq \bigoplus_{x \in X} \mathscr{H}(x) \otimes_{\mathbb{Z}} C_n(X)$$

e

$$\partial_n : C_n(X,\mathscr{H}) \longrightarrow C_{n-1}(X,\mathscr{H})$$

dado por

$$\partial_n(g \otimes \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i g \otimes \delta_i \sigma + \mathscr{H}(\lambda_\sigma)(g) \otimes \delta_0 \sigma.$$

Teorema 23 (Quillen). Seja X um CW-complexo conexo por caminhos, N um subgrupo normal perfeito de $\pi_1(X,x)$. Então existe um CW-complexo X^+ (dependendo de N), dita de $+$-construção relativa a N e um mapa $i : (X,x) \longrightarrow (X^+,x^+)$ tais que:

(i) existe uma sequencia exata curta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(X,x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X^+,x^+) \longrightarrow 0, \tag{3.22}$$

(ii) para cada sistema de coeficientes locais $\mathscr{H}$ de X^+,

$$f_* : H_n(X, f^*\mathscr{H}) \longrightarrow H_n(X^+,\mathscr{H}) \tag{3.23}$$

é um isomorfismo para todo $n \geq 0$,

(iii) se $g : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ é uma aplicação continua tais que

$$N \subset \ker(g_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)),$$

então existe uma aplicação continua $h : (X^+,x^+) \longrightarrow (Y,y)$, única a menos de homotopia, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (X^+,x^+) \arrow[dl, "h"] \\ & (Y,y) & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração. Vide [(SRINIVAS, 1991), Teorema 2.1] □

Observação 36.
1. A construção de X^+ é por colagem de 2-células e 3-células a X, e assim X^+ é um par-*CW* (relativo) de dimensão 3, tomamos $x^+ = x$.
2. Tomando $\mathbb{Z}$ o sistema de coeficientes locais constante sobre X^+, entao o sistema de coeficientes locais $f^*\mathbb{Z}$ induzido pela f é $\mathbb{Z}$. E assim pelo item (ii) temos que

$$H_n(X,\mathbb{Z}) \cong H_n(X^+,\mathbb{Z}), \tag{3.24}$$

para todo $n \geq 0$, isto quer dizer que X e X^+ tem o mesmo grupo de homologia. Além disso, o item (iii) caracteriza X^+ ao menos de homotopia.

Proposição 32. Seja $p : (\widehat{X},\widehat{x}) \longrightarrow (X,x)$ o espaço de recobrimento de X correspondente ao subgrupo normal perfeito $N \triangleleft \pi_1(X,x)$, e seja $(\widetilde{X}^+,\widetilde{x}^+)$ o universal espaço de recobrimento de (X^+,x^+). Então $(\widetilde{X}^+,\widetilde{x}^+)$ é, a menos de homotopia, o resultado de aplicar a +-construção de $(\widehat{X},\widehat{x})$ relativa a N.

Demonstração. Vide [(SRINIVAS, 1991), Proposição 2.3] □

Proposição 33. Se $f_i : (X_i,x_i) \longrightarrow (\widehat{X}_i^{\,+},\widehat{x}_i^{\,+})$, $i = 1,2$ são obtidos da +-construção de X_i relativa ao subgrupo normal perfeito $N_i \triangleleft \pi_i(X_i,x_i)$. Então $(f_1, f_2) : (X_1 \times X_2,(x_1,x_2)) \longrightarrow (X_1^+ \times X_2^+,(x_1^+,x_2^+))$ é, a menos de homotopia, o resultado de aplicar a +-construção a $X_1 \times X_2$ relativa a $N_1 \times N_2 \triangleleft \pi_1(X_1 \times X_2,(x_1,x_2))$.

Demonstração. Para X_i temos uma sequencia exata curta

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow \pi_1(X_i,x_i) \xrightarrow{(f_i)_*} \pi_1(X_i^+,x_i^+) \longrightarrow 0 \tag{3.25}$$

para cada $i = 1,2$, e assim temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow N_1 \times N_2 \longrightarrow \pi_1(X_1 \times X_2,(x_1,x_2)) \xrightarrow{(f_1 \times f_2)_*} \pi(X_1^+ \times X_2^+,(x_1^+,x_2^+)) \longrightarrow 0$$

e assim se verifica (i) do Teorema 23. Por um argumento similar pode-se provar (ii). E (iii), caracteriza o tipo de homotopia do espaço resultante. □

Exemplo 14. Sejam R um anel com unidade e $X = BGL(R)$, o espaço classificante do grupo linear geral infinito $GL(R)$. Pela Proposição 22 temos que $E(R) \triangleleft GL(R) = \pi_1(BGL(R),x_0)$ é um subgrupo normal perfeito. Assim pelo Teorema 23 existe um *CW*-complexo $BGL(R)^+$, a +-construção de $BGL(R)$ relativo a $E(R)$, e assim temos que:

$$H_n(BGL(R)^+,\mathbb{Z}) \cong H_n(BGL(R),\mathbb{Z}) \cong H_n(GL(R),\mathbb{Z}). \tag{3.26}$$

Seja $\widehat{BGL(R)}$ o espaço de recobrimento de $BGL(R)$ correspondente a $E(R)$, isto é $\pi_1(\widehat{BGL(R)}) = E(R)$, segue da proposição 30 que $\widehat{BGL(R)}$ é o espaço classificante de $E(R)$, isto é $BE(R) = \widehat{BGL(R)}$. E segue da proposição 32 que $BE(R)^+$ é o espaço de recobrimento universal de $BGL(R)^+$.

3.6 K-teoria de Quillen

Nesta secção, generalizaremos a definição dos grupos K_0 e K_1 e definiremos os K-grupos de ordem superior dado por Quillen.

Definição 66. Sejam R um anel com unidade e $K_0(R)$ o grupo de Grotendieck. Definimos para cada $n \geq 0$, o ***n*-ésimo *K*-grupo do anel** R como sendo o n-ésimo grupo de homotopia do espaço $BGL(R)^+ \times K_0(R)$, onde $BGL(R)^+$ é a $+$-construção de $BGL(R)$ relativa a $E(R)$ e $K_0(R)$ é considerado um espaço topológico discreto, isto é

$$K_n^Q(R) := \pi_n(BGL(R)^+ \times K_0(R)). \tag{3.27}$$

Segue da definição que

$$K_0^Q(R) = \pi_0(BGL(R)^+ \times K_0(R)) \cong \pi_0(K_0(R)) = K_0(R), \tag{3.28}$$

e pelo Teorema 23 (Quillen) temos

$$K_1^Q(R) \cong \pi_1(BGL(R)^+) \cong GL(R)/[GL(R), GL(R)] = K_1(R), \tag{3.29}$$

e assim, vemos que a definição de Quillen generaliza os grupos K_0 e K_1 de R definidos anteriormente.

CAPÍTULO

4

REGULADOR DE BOREL

Neste capitulo, daremos a definição de um regulador e apresentaremos o Teorema de Borel. Além disso, daremos um teorema para poder calcular o posto do K-grupos para o anel de inteiros de um corpo numérico.

4.1 Definição do Regulador de Borel

Seja F um corpo numérico, isto é uma extensão de corpo finita dos números racionais $\mathbb{Q}$, e seja $\mathscr{O}_F$ seu anel de inteiros. Para cada $m \geq 2$, o mapa **regulador do Borel** é um homomorfismo

$$K_m(\mathscr{O}_F) \longrightarrow V_m \tag{4.1}$$

do m-ésimo K-grupo do anel $\mathscr{O}_F$ a algum $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Para o caso $R = \mathscr{O}_F$, segue do Teorema de Bass-Milnor-Serre que $SL(\mathscr{O}_F) = E(\mathscr{O}_F)$. Além disso, pelo Exemplo 14 nos temos que $BSL(\mathscr{O}_F)^+$ é o espaço de recobrimento universal de $BGL(\mathscr{O}_F)^+$ e assim nos temos

$$\pi_m(BSL(\mathscr{O}_F)^+) \cong \pi_m(BGL(\mathscr{O}_F)^+) \quad , \forall m \geq 2. \tag{4.2}$$

Por tanto o morfismo de Hurewicz e o Teorema de Cartan-Serre induz o isomorfismo

$$h_{\mathbb{Q}} : K_m(\mathscr{O}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow P_m(SL(\mathscr{O}_F), \mathbb{Q}), \text{ para cada } m \geq 2. \tag{4.3}$$

Seja G um $\mathbb{Q}$-grupo algebraico afim. Assumimos que $G(\mathbb{R})$ é um grupo de Lie conexo. Seja Γ um grupo discreto, quaisquer homomorfismo de grupos $\varphi : \Gamma \longrightarrow G(\mathbb{R})$ induz um morfismo

$$\varphi^* : H^*_{\text{cont}}(G(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(\Gamma, \mathbb{R}) = H^*_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{R}) \tag{4.4}$$

Além disso, nos construímos o isomorfismo γ' dado em (2.74), isto é

$$\gamma' : H^*_{DR}(CT(G(\mathbb{R}))) \longrightarrow H^*_{\text{cont}}(G(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \tag{4.5}$$

Assim, obtemos um morfismo

$$j := \varphi^* \circ \gamma^{'} : H^*_{DR}(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(\Gamma, \mathbb{R}). \tag{4.6}$$

pela construção este morfismo é uma morfismo de álgebras e pela compacidade da $CT(G(\mathbb{R}))$, nos podemos dualizar j, o dual sera denotado por $j^{\vee}$, isto é

$$j^{\vee} : H_*(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow H_*(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}). \tag{4.7}$$

Desde que j é um morfismo de álgebras, $j^{\vee}$ é um morfismo de coálgebras. Por tanto induz um morfismo, denotado por $j^{\vee}$, entre os subespaços primitivos na homologia

$$j^{\vee} : P_*(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow P_*(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}). \tag{4.8}$$

Para cada $n \geq 1$ denotamos $G_n := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} SL_{n,F}$ o $\mathbb{Q}$-grupo algebraico afim, isto é, nos vemos a $SL_{n,F}$ como um $\mathbb{Q}$-grupo algebraico afim. O subgrupo $SL_n(\mathscr{O}_F)$ é um subgrupo discreto de $G_n(\mathbb{R})$. Seja

$$j_n^{\vee} : H_*(SL_n(\mathscr{O}_F), \mathbb{R}) \longrightarrow H_*(CT(G_n(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \tag{4.9}$$

Denotamos por

$$G(\mathbb{R}) = \varinjlim G_n(\mathbb{R}),$$
$$CT(G(\mathbb{R})) = \varinjlim CT(G_n(\mathbb{R})).$$

assim, passando limite a (4.9), obtemos o morfismo

$$j^{\vee} : H_*(SL(\mathscr{O}_F), \mathbb{R}) \longrightarrow H_*(CT(G_n(\mathbb{R})), \mathbb{R}). \tag{4.10}$$

Definição 67. Seja $m \geq 2$. Definimos o m-ésimo **mapa regulador de Borel** , denotado por $r^{'}_{Bo}$, definido por

$$\mathrm{r}^{'}_{\mathrm{Bo}} : K_m(\mathscr{O}_F) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{Hur} P_m(SL_n(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \xrightarrow{j^{\vee}} P_m(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \tag{4.11}$$

Teorema 24. Seja $e = \max(1, \mathrm{sdim})$. Então $H_m(GL_n(R), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(GL_{n+1}(R), \mathbb{Z})$ e $H_m(E_n(R), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(E_{n+1}(R), \mathbb{Z})$ são sobrejetoras para $n \geq 2m + e - 1$, injetoras para $n \geq 2m + e$ $(m \geq 0)$.

Demonstração. Vide [(KALLEN, 1980), Teorema 4.11] □

No caso de R ser um domínio de Dedekind, temos que $e = 1$. E assim podemos dar a seguinte definição

Definição 68. Sejam n, m inteiros positivos. Dizemos que n, m esta no rango estável se n é impar e $m \geq (n-1)/2$.

Segue do Teorema 24, a condição $m \geq (n-1)/2$ assegura que os morfismos

$$H_m(SL_n(\mathscr{O}_F),\mathbb{Q}) \longrightarrow H_m(SL(\mathscr{O}_F),\mathbb{Q}), \tag{4.12}$$
$$H^m(SL(\mathbb{C}),\mathbb{R}) \longrightarrow H^m(SL_n(\mathbb{C}),\mathbb{R}), \tag{4.13}$$

e o correspondente morfismo para $SL_n(\mathbb{R})$ são isomorfismos.

Observação 37. A condição n impar na definição anterior, implica que a inclusão $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{u}_n$ é noncohomologus to zero. Além disso, pela Proposição 20 temos que

$$H^*(\mathfrak{u}_n,\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})) \longrightarrow H^*(\mathfrak{u}_n) \tag{4.14}$$

é injectiva.

Para obter informação sobre o mapa regulador de Borel, nos precisamos estudar o morfismo $j^\vee$. Isto é proporcionado pela Teoria de Borel dos grupos aritméticos. Seja G um subgrupo de $GL(V)$, onde V é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de dimensão finita. Seja L um retículo de V . Denotamos por G_L ao subgrupo de $G(\mathbb{Q})$ que deixa a L fixo, isto é

$$G_L := \{g \in G(\mathbb{Q}) : g(L) = L\}. \tag{4.15}$$

Definição 69. Um subgrupo Γ de $G(\mathbb{Q})$ é dito **aritmético** se é comensurável, isto é, se $\Gamma \cap G_L$ tem índice finito em Γ e em G_L.

Teorema 25 (Borel). Seja G um semisimples $\mathbb{Q}$-grupo algebraico e seja Γ um subgrupo aritmético de $G(\mathbb{R})$, com $\varphi : \Gamma \longrightarrow G(\mathbb{R})$ a inclusão. Seja $CT(G(\mathbb{R}))$ o gêmeo compacto de $G(\mathbb{R})$ e j como em (4.6). Então existe um numero $\rho(G)$ tais que

$$j : H^m(CT(G(\mathbb{R})),\mathbb{R}) \longrightarrow H^m(\Gamma,\mathbb{R}). \tag{4.16}$$

é um isomorfismo para $m \geq \rho(G)$. Esse numero $\rho(G)$ só depende da estrutura algébrica de G.

Demonstração. Ver[Stable real cohomology of arithmetic groups] □

Observação 38. Para qualquer álgebra de Lie G, o numero $\rho(G)$ pode ser pequeno. Por exemplo $\rho(SL_n) = n/4$. Mais, no caso de interesse $G_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R})$, quando fazemos tender n ao infinito, $\rho(G_n)$ também vai para o infinito.

O seguinte Corolário segue da observação anterior e da estabilidade dos grupos de cohomologia real dos grupos aritméticos.

Corolário 3. Seja $m \geq 2$ um numero inteiro. Então o mapa regulador de Borel induz um isomorfismo

$$\mathrm{r}'_{\mathrm{Bo}} : K_m(\mathscr{O}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \longrightarrow P_m(CT(G(\mathbb{R}));\mathbb{R}) \tag{4.17}$$

4.2 O posto do grupo $K_m(\mathscr{O}_F)$

Sejam F um corpo numérico e $\mathscr{O}_F$ seu anel de inteiros. Seja Σ o conjunto de imersões complexas de F, seja Υ o conjunto de **archimedean places** de F. Denotaremos $\Upsilon_{\mathbb{R}}$ ao conjunto de **places** correspondentes as imersões reais e $\Upsilon_{\mathbb{C}}$ ao conjuntos de **places** correspondentes as imersões complexas. Seja $d = [F : \mathbb{Q}]$, como é usual, denotamos $r_1 = \#\Upsilon_{\mathbb{R}}$ e $r_2 = \#\Upsilon_{\mathbb{C}}$. Então $d = r_1 + 2r_2$. Para um m fixo escolhemos um inteiro n tais que m, n estão no rango estável.

Seja $G_n = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} SL_{n,\mathbb{F}}$, então pelo Exemplo **??** o grupo de Lie $G_n(\mathbb{R})$ é dado por $G_n(\mathbb{R}) = \Pi_{\upsilon\in\Upsilon_{\mathbb{R}}} SL_n(\mathbb{R}) \times \Pi_{\upsilon\in\Upsilon_{\mathbb{C}}} SL_n(\mathbb{C})$. Pela construção do gêmeo compacto, podemos fazer componente a componente. Para o grupo $SL_n(\mathbb{R})$ temos que o subgrupo compacto maximal é $SO_n(\mathbb{R})$. Sua complexificação é $SL_n(\mathbb{C})$ e seu subgrupo compacto maximal é SU_n. Por tanto, o gêmeo compacto é $CT(SL_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})/SU_n$. Para o grupo $SL_n(\mathbb{C})$ o subgrupo compacto maximal é SU_n. A complexificação é $SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C})$, com a inclusão

$$\begin{aligned} SL_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto (\overline{M}, M) \end{aligned}$$

A conjugação complexa é dada por

$$\begin{aligned} \tau : SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C}) \\ (M,N) &\longmapsto (\overline{N}, \overline{M}). \end{aligned}$$

Assim o subgrupo compacto maximal da complexificação é $SU_n \times SU_n$ e o gêmeo compacto é homeomorfo a SU_n. Por tanto, tomando limite direito, o gêmeo compacto $CT(G(\mathbb{R}))$ é homeomorfo a $(SU/SO(\mathbb{R}))^{r_1} \times SU^{r_2}$.

Teorema 26 (Borel). O posto do grupo $K_m(\mathscr{O}_F)$ para $m \geq 2$ é dado por

$$\mathrm{rk}(K_m(\mathscr{O}_F)) = \begin{cases} 0 & ,se \quad m \equiv 0 \mod 2, \\ r_1 + r_2 & ,se \quad m \equiv 1 \mod 4, \\ r_2 & ,se \quad m \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Corolário 3, temos que

$$\mathrm{rk}(K_m(\mathscr{O}_F)) = \dim_{\mathbb{R}} P_m(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \tag{4.18}$$

e pela dualidade temos que

$$\dim_{\mathbb{R}} P_m(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} Q^m(CT(G(\mathbb{R})), \mathbb{R}) \tag{4.19}$$

Além disso, pela Proposição 14 temos

$$H^*(SU/SO(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \cong \Lambda(x_5, x_9, \cdots, x_{4k+1}, \cdots) \tag{4.20}$$

e pelo Exemplo 18 temos

$$H^*(SU,\mathbb{R}) \cong \Lambda(x_3,x_5,\cdots,x_{2k+1},\cdots) \tag{4.21}$$

assim, pela formula de Kunneth, temos

$$H^*(CT(G(\mathbb{R}))) \cong \Lambda(x_5,x_9,\cdots,x_{4k+1},\cdots)^{\otimes r_1} \otimes \Lambda(x_3,x_5,\cdots,x_{2k+1},\cdots)^{\otimes r_2} \tag{4.22}$$

e assim temos

$$\dim_{\mathbb{R}} Q^m(CT(G(\mathbb{R})),\mathbb{R}) = \begin{cases} 0 & ,se \quad m \equiv 0 \mod 2, \\ r_1 + r_2 & ,se \quad m \equiv 1 \mod 4, \\ r_2 & ,se \quad m \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

□

4.3 Os valores da Função Zeta de Dedekind

Nesta secção daremos o Teorema do Borel, o qual relaciona o regulador de Borel com os valores da função zeta de Dedekind. Uma das principais razones para usar $P_{2n-1}(CT(G(\mathbb{R})),\mathbb{R})$ como objeto no mapa regulador de Borel é que tem uma estrutura integral natural. Desde que a K-teoria é definida usando homotopia, [(LICHTENBAUM, 1973)] propôs usar o retículo dado pela imagem de $\pi_{2n-1}(CT(G(\mathbb{R})),e)$ sob o morfismo de Hurewicz. Denotamos por L'_{2n-1} este retículo, isto é $L'_{2n-1} := \mathrm{h}(\pi_{2n-1}(CT(G(\mathbb{R})),e))$.

A função Zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ é associada com o corpo $\mathbb{Q}$. Ela se generaliza da seguinte maneira para um corpo numérico qualquer F de grau $n = [F : \mathbb{Q}]$.

Definição 70. A **função zeta de Dedekind** do corpo numérico F é definida pela serie

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{O}_F} \frac{1}{[\mathscr{O}_F : \mathfrak{a}]^s}$$

onde $[\mathscr{O}_F : \mathfrak{a}]$ é o índice de $\mathfrak{a}$ sobre $\mathscr{O}_F$, o qual denotaremos por $N_{F|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ e é dita de **norma absoluta**.

Proposição 34. A serie $\zeta_F(s)$ converge absolutamente e uniformemente no domínio $\mathrm{Re}(s) \geq 1+\delta$ para cada $\delta > 0$, temos que

$$\zeta_F(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N_{F|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s}}, \tag{4.23}$$

onde $\mathfrak{p}$ varia nos ideais primos de $\mathscr{O}_F$.

Demonstração. Vide [(NEUKIRCH, 1937), Capitulo VII,5,5.1]. □

Pelo Corolário 3, temos que $\mathrm{r}'_{Bo}(K_{2n-1}(\mathscr{O}_F))$ é um retículo em $P_{2n-1}(CT(G(\mathbb{R})),\mathbb{R})$. Agora vamos a definir o regulador de Borel.

Definição 71. O **regulador de Borel**, $R'_{Bo,n}$, é o covolume do retículo

$$\mathrm{r}'_{Bo}(K_{2n-1}(\mathscr{O}_F)) \subset P_{2n-1}(CT(G(\mathbb{R})),\mathbb{R}), \tag{4.24}$$

com respeito ao retículo L'_{2n-1}.

Definição 72. Sejam $x,y \in \mathbb{R}$, escrevemos $x \sim y$ se existe $q \in \mathbb{Q} - \{0\}$ com $x = qy$.

Teorema 27 (**Borel**)**.** Seja F um corpo numérico. Então, para cada $n \geq 2$ temos

$$R'_{Bo,n} \sim \pi^{-d_n} \lim_{s \to -n+1} \zeta_F(s)(s+n-1)^{-d_n}, \tag{4.25}$$

onde $d_n = \mathrm{rk}(K_{2n-1}(\mathscr{O})_F) = \dim_{\mathbb{R}}(P_{2n-1}(CT(G(\mathbb{R}))),\mathbb{R})$.

Demonstração. Vide [(WEIL, 1995); Capitulo VII, Teorema 3]. $\square$

REFERÊNCIAS

ALTMAN, A.; KLEIMAN, S. **A Term of Commutative Algebra**. [S.l.]: Worldwide Center of Mathematics, 2012. Citado nas páginas 21, 23 e 24.

ARTIN, E. **Geometric Algebra**. New York: Interscience Publishers, INC., 1957. Citado na página 67.

BASS, A. O. K. H.; PEDRINI, C. **Algebraic K-theory and its applications**. Singapure: World scientific publishing, 1997. Citado na página 51.

BOREL, A. Cohomologie de sl_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa**, v. 4, p. 613–636, 1977. Citado na página 18.

DIECK, T. tom. **Algebraic Topology**. Zürich: European Mathematical Society, 2008. Citado nas páginas 73, 93 e 95.

FOMENKO, A.; FUCHS, D. **Homotopical Topology**. New York: Springer-Verlag, 2016. Citado na página 51.

GREUB, S. H. W.; VANSTONE, R. **Connections, curvature and cohomology. Volume II**. New York and London: Academic Press, 1973. Citado nas páginas 47 e 56.

____. **Connections, curvature and cohomology. Volume III**. New York and London: Academic Press, 1976. Citado na página 60.

GUICHARDET, A. **Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie**. Paris: CEDIC, 1980. Citado nas páginas 51 e 52.

HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Citado nas páginas 75 e 76.

HILGERT, J.; NEEB, K.-H. **Structure and Geometry of Lie Groups**. New York: Springer-Verlag, 2010. Citado nas páginas 57 e 58.

KALLEN, W. van der. Homology stability for linear groups. **Inventiones math**, v. 60, p. 269–295, 1980. Citado na página 82.

LICHTENBAUM, S. Values of zeta functions, étale cohomology, and algebraic k-theory. **Lecture Notes in Math**, v. 342, p. 489–501, 1973. Citado nas páginas 17 e 85.

MAY, J. P. **A Concise Course in Algebraic Topology**. Chicago: University Of Chicago Press, 1999. Citado na página 94.

MILNE, J. S. **Basic Theory of Affine Group Schemes**. [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página 91.

MILNOR, J. **Introduction to Algebraic K-Theory**. New Jersey: Princeton University Press, 1971. Citado na página 67.

MILNOR, J. W.; MOORE, J. C. On the structure of hopf algebras. **preprint**, p. 1–36, 1959. Citado nas páginas 32, 33 e 35.

____. On the structure of hopf algebras. **The Annals of Mathematics**, v. 81, n. 2, p. 211–264, 1965. Citado nas páginas 35 e 36.

MIMURA, M.; TODA, H. **Topology of Lie Groups I and II**. United States of America: American Mathematical Society, 1991. Citado na página 49.

NEUKIRCH, J. **Algebraic Number Theory**. New York: Springer-Verlag, 1937. Citado nas páginas 17, 68, 70, 71, 72 e 85.

ROSENBERG, J. **Algebraic K-theory and its applications**. New York: Springer-Verlag, 1994. Citado na página 75.

ROTMAN, J. J. **An Introduction to Algebraic Topology**. New York: Springer-Verlag, 1988. Citado na página 49.

SAMELSON, H. A connection between the whitehead and the pontryagin product. **The Annals of Mathematics**, v. 75, n. 4, p. 744–752, 1953. Citado nas páginas 50 e 51.

SRINIVAS, V. **Algebraic K-theory**. Boston: Birkhäuser, 1991. Citado na página 79.

WARNER, F. W. **Foundations of differentiable manifolds and Lie groups**. New York: Springer-Verlag, 1983. Citado nas páginas 47 e 49.

WEIBEL, C. A. **An Introduction to Homological Algebra**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. Citado na página 40.

WEIL, A. **Basic Number Theory**. New York: Springer, 1995. Citado na página 86.

APÊNDICE

A

GRUPOS ALGEBRICOS

A.1 Definições básicas

Definição 73. Um **grupo afim** G sobre um corpo K é um objeto na categoria de functores representáveis da categoria K-Alg $\longrightarrow$ Set.

Se G é representado por uma K- álgebra finitamente gerada, então G é dito de **grupo algébrico afim**.

Observação 39. Na definição anterior quer dizer que um grupo algébrico afim G, não é mais que um functor $G : \text{K-Alg} \longrightarrow \text{Set}$ o qual é isomorfo ao functor $\text{Hom}_{\text{K-Alg}}(\mathscr{O}(G), -) : \text{K-Alg} \longrightarrow \text{Set}$, para alguma K-álgebra finitamente gerada $\mathscr{O}(G)$ a qual é dita de **anel coordenado de** G. Além disso, existe uma transformação natural $m : G \times G \longrightarrow G$ tais que para cada K-álgebra R o morfismo multiplicação

$$m(R) : G(R) \times G(R) \longrightarrow G(R) \tag{A.1}$$

da uma estrutura de grupo sobre $G(R)$, $G(R)$ é chamado o **grupo de R-pontos**

Definição 74. Um morfismo de K-grupos afim $G \longrightarrow H$ é só uma transformação natural de functores.

O produto de K-grupos afins G e H ,denotado por $G \times H$, é só o functor

$$\begin{aligned} : \text{K-Alg} &\longrightarrow \text{Set} \\ R &\longmapsto G(R) \times H(R) \end{aligned}$$

o qual é um functor representado por $\mathscr{O}(G) \otimes_R \mathscr{O}(H)$, isto é,

$$\text{Hom}_{\text{K-Alg}}(\mathscr{O}(G), R) \times \text{Hom}_{\text{K-Alg}}(\mathscr{O}(H), R) \cong \text{Hom}_{\text{K-Alg}}(\mathscr{O}(G) \otimes_R \mathscr{O}(H), R) \tag{A.2}$$

Exemplo 15. Seja GL_n o functor definido por

$$\begin{aligned} GL_{n,K} : \text{K-Alg} &\longrightarrow \text{Set} \\ R &\longmapsto GL_n(R) \end{aligned}$$

onde $GL_{n,K}(R)$ é o conjunto das $n \times n$ matrizes invertíveis sobre R., isto é, as matrizes com determinante em $R^\times$. Claramente $GL_{n,K}$ é um K-grupo algébrico afim, desde que é representado pela K-álgebra

$$\frac{K[X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{nn}, Y]}{\langle det(X_{ij})Y - 1\rangle} \tag{A.3}$$

onde $det(X_{ij})$ é o polinômio de n^2 variáveis $X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{nn}$ dado por

$$det(X_{ij}) := \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)} \tag{A.4}$$

o grupo $GL_{1,K}$ é usualmente denotado por G_m (grupo multiplicativo), desde que $G_m(R)$ pode ser identificado com $R^\times$.

Exemplo 16. Seja $SL_{n,K}$ o functor definido por

$$\begin{aligned} SL_{n,K} : \text{K-Alg} &\longrightarrow \text{Set} \\ R &\longmapsto SL_n(R) \end{aligned}$$

onde $SL_{n,K}(R)$ é o conjunto das $n \times n$ matrizes invertíveis sobre R e determinante 1. Claramente $SL_{n,K}$ é um K-grupo algébrico afim, desde que é representado pela K-álgebra

$$\frac{K[X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{nn}]}{\langle det(X_{ij}) - 1\rangle} \tag{A.5}$$

Dizemos que H é um **subgrupo afim de** G, se H é um subfunctor fechado de G tais que $H(R)$ é um subgrupo de $G(R)$ para toda K-álgebra R. O fato que H é um subfunctor de G diz que H é representado por um quociente de $\mathscr{O}(G)$.

A.2 Extensão e restrição de escalares

Definição 75. Sejam L uma K-álgebra e G uma K-grupo algébrico afim, podemos obter um L-grupo algébrico afim G_L o qual é dito de **extensão de escalar**. Suponhamos $G = \text{Hom}(\mathscr{O}(G), -)$ nos definimos

$$\begin{aligned} G_L : \text{L-Alg} &\longrightarrow \text{Set} \\ R &\longmapsto \text{Hom}_{\text{L-Alg}}(\mathscr{O}(G) \otimes_K L, R) \end{aligned}$$

Definição 76. Seja G um L-grupo algébrico afim, podemos definir um K-grupo algébrico afim denotado por $\mathrm{Res}_{L/K}\, G$ dito de **restrição por escalares** definido por

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{L/K}\, G : \text{K-Alg} &\longrightarrow \text{Set} \\ R &\longmapsto G(R \otimes_K L) \end{aligned}$$

Se $\mathrm{Res}_{L/K}\, G$ é representável e dado por um grupo afim , dizemos que a restrição por escalares existe.

Proposição 35. Seja L uma K-álgebra e como K-modulo é projetivo finitamente gerado. Então, para cada L-grupo afim G, existe a restrição por escalares $\mathrm{Res}_{L/K}\, G$. O functor

$$H \longmapsto H_L \quad e \quad H \longmapsto \mathrm{Res}_{L/K}\, H \tag{A.6}$$

são adjuntos, isto é, existe uma bijecção natural

$$\mathrm{Hom}_L(H_L, W) \cong \mathrm{Hom}_K(H, \mathrm{Res}_{L/K}\, H). \tag{A.7}$$

Demonstração. Vide [(MILNE, 2012), Capitulo V,5] □

Proposição 36. Seja $K^{'}/K$ uma extensão finita de corpos e separável, e seja $\overline{K}$ um corpo contendo todas as conjugações de $K^{'}$, isto é $|\mathrm{Hom}_K(K^{'}, \overline{K})| = [K^{'} : K]$ então

$$(\mathrm{Res}_{K'/K}\, G)_K \cong \prod_{\alpha : K' \to \overline{K}} \alpha G \tag{A.8}$$

onde αG é o K-grupo afim G obtido pela extensão por escalares com respeito a $\alpha : K^{'} \longrightarrow \overline{K}$

Demonstração. Vide [(MILNE, 2012), Capitulo V,5] □

Exemplo 17. Sejam F um corpo numérico e $G^{'} = SL_{n,F}$ tomando a sua restrição $G := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\, G^{'}$, então $G(\mathbb{R})$ é um grupo de Lie Real e se descompõe como r_1 copias de $SL_n(\mathbb{R})$ vezes r_2 copias de $SL_n(\mathbb{C})$

$$SL_n(\mathbb{R}) \times \cdots \times SL_n(\mathbb{R}) \times SL_n(\mathbb{C}) \times \cdots \times SL_n(\mathbb{C}) \tag{A.9}$$

onde r_1 é o numero de lugares reais sobre F e r_2 é o numero de lugares complexos sobre F.

APÊNDICE

B

TEORIA DE HOMOTOPIA

B.1 Homomorfismo de Hurewicz

Definição 77. Seja X um espaço topológico conexo, dizemos que X é $(n-1)$-**conexo** se $\pi_i(X,x) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Definição 78. Seja (X,x) um espaço topológico com ponto base. Para cada $n \geq 1$, existe um homomorfismo natural $\mathrm{h} : \pi_n(X,x) \longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z})$ dito de **homomorfismo de Hurewicz**, definido por

$$\begin{aligned} \mathrm{h} : \pi_n(X,x) &\longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto [f_*([S^n])] \end{aligned}$$

onde $[S^n]$ denota ao gerador do grupo de homologia $H_n(S^n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 28 (Hurewicz). Seja X um espaço topológico $(n-1)$-conexo $(n \geq 1)$. Então o homomorfismo de Hurewicz

$$\begin{aligned} \mathrm{h} : \pi_n(X,x) &\longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto [f_*([S^n])] \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Vide [(DIECK, 2008), Teorema 20.1.1] □

B.2 Teorema dos coeficientes universais

Teorema 29 (Teorema dos coeficientes universais para Homologia). Sejam X um espaço topológico, R um DIP (Domínio de ideais principais) e M um R-modulo, então existe uma sequencia exata curta para todo $n \geq 0$ tais que

$$0 \longrightarrow H_n(X;R) \otimes_R M \xrightarrow{\alpha} H_n(X;M) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X;R),M) \longrightarrow 0 \tag{B.1}$$

onde $\alpha : [z] \otimes m \mapsto [z \otimes m]$, a qual escinde, isto é

$$H_n(X;M) = H_n(X;R) \otimes_R M \bigoplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(X);M) \tag{B.2}$$

para cada $n \geq 0$. Mais,a sequencia não escinde de maneira natural.

Demonstração. Vide [(MAY, 1999), Capitulo 17.1]. Ver [J.P. May, A concise course in Algebraic Topology, Teorema (Universal coefficient), pag 132]. □

Teorema 30 (Teorema dos coeficientes universais para Cohomologia). Sejam X um espaço topológico, R um DIP (Domínio de ideais principais) e M um R-modulo, então existe uma sequencia exata curta para todo $n \geq 0$ tais que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(X),M) \longrightarrow H^n(X;M) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(H_n(X;R),M) \longrightarrow 0 \tag{B.3}$$

onde $\beta([f])([z]) = f(z)$ onde $[f] \in H^n(X;M)$ e $[z] \in H_n(X;R)$, a qual escinde, isto é

$$H^n(X;M) = \mathrm{Hom}(H^n(X;R),M) \bigoplus \mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(X),M) \tag{B.4}$$

para cada $n \geq 0$. Mais,a sequencia não escinde de maneira natural.

Demonstração. Vide [(MAY, 1999), Capitulo 17.1]. □

B.3 Fibrações

Nesta secção E, B e Y denotaram espaços topológicos, $I = [0,1]$. Denotamos por $i_0 : Y \longrightarrow Y \times I$ o mapa definido por

$$\begin{aligned} i_0 : Y &\longrightarrow Y \times I \\ y &\longmapsto (y,0) \end{aligned}$$

Definição 79. Um mapa $p : E \longrightarrow B$ é dito de **fibração**, se dado um mapa $f : Y \longrightarrow E$ e $h : Y \times I \longrightarrow B$ tais que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

comuta, existe um mapa $H : Y \times I \longrightarrow E$ tais que $p \circ H = h$.

Denotamos por $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ à fibração $E \xrightarrow{p} B$ com fibra $F \cong p^{-1}(b)$, onde b é um ponto base de B.

Proposição 37. Seja $p : E \longrightarrow B$ uma fibração, seja $b \in B$ um ponto base de B e seja $F := p^{-1}(b)$ uma fibra. Então existe uma sequência exata longa relacionando os grupos de homotopia de E, B, F, isto é,

$$\cdots \to \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \to \cdots \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B)$$

Demonstração. Vide [(DIECK, 2008), Teorema 6.3.2] □

B.4 Sequência espectral de Serre-Leray

Definição 80. Uma família de objetos $E^r_{p,q}$ (onde $E^r_{p,q} = 0$, a menos que $p, q \geq 0$) munida de umas **diferenciais** $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$ é dita de **sequência espectral homológica** se, $d^r_{p,q} \circ d^r_{p+r,q-r+1} = 0$ e o objeto $E^{r+1}_{p,q}$ é isomorfo à homologia do complexo $E^r_{*,*}$ no nível $\{p,q\}$, isto é

$$\cdots \longrightarrow E^r_{p+r,q-r+1} \xrightarrow{d^r_{p+r,q-r+1}} E^r_{p,q} \xrightarrow{d^r_{p,q}} E^r_{p-r,q+r-1} \longrightarrow \cdots$$

e

$$E^{r+1}_{p,q} \cong \frac{\ker(d^r_{p,q})}{\mathrm{Im}(d^r_{p+r,q-r+1})}.$$

Dualmente, podemos definir uma sequência espectral cohomologica.

Definição 81. Uma família de objetos $E^{p,q}_r$ (onde $E^{p,q}_r = 0$, a menos que $p, q \geq 0$) munida de umas **diferenciais** $d^{p,q}_r : E^{p,q}_r \longrightarrow E^{p+r,q-r+1}_r$ é dita de **sequência espectral cohomológica** se, $d^{p,q}_r \circ d^{p+r,q-r+1}_r = 0$e o objeto $E^{p,q}_{r+1}$ é isomorfo à cohomologia do complexo $E^{*,*}_r$ no nível $\{p,q\}$, isto é

$$\cdots \longrightarrow E^{p-r,q+r-1}_r \xrightarrow{d^{p-r,q+r-1}_r} E^{p,q}_r \xrightarrow{d^{p,q}_r} E^{p+r,q-r+1}_r \longrightarrow \cdots$$

e

$$E^{p,q}_{r+1} \cong \frac{\ker(d^{p,q}_r)}{\mathrm{Im}(d^{p-r,q+r-1}_r)}.$$

Teorema 31 (**A sequência espectral homológica Leray-Serre**)**.** Seja G um grupo abeliano. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é conexo por caminhos, F é conexo. Então existe uma sequência espectral, $\{E^r_{*,*}, d^r\}$, convergindo a $H_*(E,G)$, com

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B; \mathscr{H}_q(F,G)),$$

a homologia do espaço B com coeficientes locais na homologia da fibra de p. Além disso, esta sequencia espectral é natural com respeito aos mapas entre fibrações preservando fibra.

Teorema 32 (**A sequência espectral cohomológica Leray-Serre**). Seja R um anel comutativo com unidade. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é conexo por caminhos, F é conexo. Então existe uma sequência espectral de álgebras $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, convergindo a $H^*(E,R)$ como uma álgebra, com

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathscr{H}^q(F,G)),$$

a cohomologia do espaço B com coeficientes locais na fibra da cohomologia de p. Esta sequência espectral é natural com respeito aos mapas entre fibrações preservando fibra. Além disso, o produto cup $\smile$ sobre a cohomologia com coeficientes locais e o produto $._2$ sobre $E_2^{*,*}$ são relacionados por

$$u._2 v = (-1)^{p'q} u \smile v,$$

onde $u \in E_2^{p,q}$ e $v \in E_2^{p',q'}$.

Exemplo 18. O grupo de Lie clássico $SU(n)$ é o grupo de $n \times n$ matrizes unitárias ($A\overline{A}^t = I$) de determinante 1. fixando um vector $v_0 \in \mathbb{C}^n$, definimos

$$\begin{aligned} p : SU(n) &\longrightarrow S^{2n-1} \\ A &\longmapsto Av_0. \end{aligned}$$

pode-se mostrar que este mapa é uma fibração com fibra o subgrupo de $SU(n)$ que fixa v_0, o qual é $SU(n-1)$. O subgrupo $SU(2)$ pode ser identificado com a esfera S^3. E assim

$$H^*(SU(2);R) \cong H^*(S^3;R) \cong \Lambda(x_3). \tag{B.5}$$

Considerando a fibração $SU(n-1) \hookrightarrow SU(n) \xrightarrow{p} S^{2n-1}$ e aplicando a sequencia espectral de Leray-Serre. Suponhamos que x_{2n-1} gera $H^*(S^{2n-1};R)$ como uma álgebra exterior, isto é , $H^*(S^{2n-1};R) \cong \Lambda(x_{2n-1})$. Por indução, nos temos

$$H^*(SU(n-1);R) \cong \Lambda(x_3, x_5, \cdots, x_{2n-3}).$$

Desde que esta é uma sequencia espectral de álgebras, nos precisamos só considerar os geradores da álgebra para descrever as diferenciais. Para $n \geq 2$, S^{2n-1} é simplesmente conexo e assim o sistema de coeficientes locais sobre o espaço base é simples. Além disso, pelo teorema dos coeficientes universais, temos

$$E_2^{*,*} \cong H^*(B;R) \otimes H^*(F;R) \cong \Lambda(x_{2n-1}) \otimes \Lambda(x_3, x_5, \cdots, x_{2n-3}).$$

Os geradores da álgebra são encontrados em bigraus, de modo que todas as diferencias são zero e a sequencia espectral colapsa no termo E_2. E assim, temos

$$H^*(SU(n);R) \cong \Lambda(x_3, x_5, \cdots, x_{2n-1}).$$

e a indução é completada.

Exemplo 19. Do exemplo anterior, podemos estender para calcular $H^*(U(n);R)$, onde $U(n)$ é o grupo de transformações lineares de $\mathbb{C}^n$ que preservam o produto interno. O grupo $U(n)$ se relaciona a $SU(n)$ via a fibração:

$$SU(n) \hookrightarrow U(n) \xrightarrow{\det} S^1$$

e além disso, $U(n) \simeq U(1) \times SU(n) \simeq S^1 \times SU(n)$. Assim, pelo teorema dos coeficientes universais temos

$$H^*(U(n);R) \cong H^*(S^1;R) \otimes H^*(SU(n);R) \cong \Lambda(x_1, x_3, \cdots, x_{2n-1}). \tag{B.6}$$

ICMC USP
SÃO CARLOS