

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Sobre a geometria local de hipersuperfícies em  $R^4$  com bordo**

**Tawana Garcia Nunez**

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em  
Matemática (PPG-Mat)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Tawana Garcia Nunez**

## Sobre a geometria local de hipersuperfícies em $R^4$ com bordo

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSAO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Ana Claudia Nabarro

**USP – São Carlos**  
**Junho de 2024**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

N972s Nunez, Tawana Garcia  
Sobre a geometria local de hipersuperfícies em R4  
com bordo / Tawana Garcia Nunez; orientadora Ana  
Claudia Nabarro. -- São Carlos, 2024.  
98 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Singularidades. 2. Hipersuperfície. 3. Bordo.  
4. Contato. 5. Classificação. I. Nabarro, Ana  
Claudia, orient. II. Título.

**Tawana Garcia Nunez**

About the local geometry of hipersurfaces in  $R^4$  with  
boundary

Doctoral dissertation submitted to the Institute of  
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in  
partial fulfillment of the requirements for the degree of  
the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL  
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Ana Claudia Nabarro

**USP – São Carlos**  
**June 2024**



# AGRADECIMENTOS

---

---

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

À Deus, que me forneceu tantas oportunidades maravilhosas e que permitiram chegar até aqui.

À Ana Claudia Nabarro, á qual me orientou durante estes anos, me guiando não apenas para um conhecimento matemático riquíssimo, mas também servindo como um grande exemplo de vida a ser seguido.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



# RESUMO

TAWANA G.N. **Sobre a geometria local de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  com bordo**. 2024. 98 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

A geometria de hipersuperfícies  $M$  em  $\mathbb{R}^4$  pode ser estudada do ponto de vista de contato, usando ferramentas da Teoria de Singularidades. Mais precisamente, estudando as singularidades de três funções especiais, a função altura que mede o contato de  $M$  com hiperplanos, a projeção em  $\mathbb{R}^2$  que mede contato de  $M$  com planos e a projeção em  $\mathbb{R}^3$  que mede o contato de  $M$  com retas. Nosso objetivo neste trabalho é o estudo do contato entre hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  com bordo e hiperplanos e retas. Para isto estudamos a teoria básica para estas hipersuperfícies e Teoria de Singularidades. Para classificar o contato desejado, precisamos entender que tipos de singularidades podem surgir nas funções citadas. Além disso, através do contato obtemos informações geométricas sobre as hipersuperfícies com bordo.

**Palavras-chave:** Singularidades, Hipersuperfície, Bordo, Contato, Classificação.



# ABSTRACT

TAWANA G.N. **About the local geometry of hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$  with boundary**. 2024. 98 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

The geometry of hypersurfaces  $M$  in  $\mathbb{R}^4$  can be studied by the viewpoint of contact, using tools from the Singularity Theory. More precisely, studying the singularities of three special functions, the height function that measures contact between  $M$  and hyperplanes, the projection in  $\mathbb{R}^2$  that measures contact between  $M$  and planes and the projection in  $\mathbb{R}^3$  that measures contact between  $M$  and lines. Our goal in this work is the study of contact between hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$  with boundary and hyperplanes and lines. For this, we study the basic theory for these hypersurfaces and the Singularity Theory. To classify the desired contact, we need to understand what types of singularities may arise in the aforementioned functions. Furthermore, through contact we obtain geometric information about hypersurfaces with boundary.

**Keywords:** Singularity, Hypersurface, Boundary, Contact, Classification.



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	PRELIMINARES . . . . .	15
2.1	Germes e jatos . . . . .	15
2.1.1	<i>Os grupos A e K</i> . . . . .	16
2.1.2	<i>Os espaços tangentes e a determinação finita</i> . . . . .	17
2.1.3	<i>O grupo B</i> . . . . .	20
2.2	Teoria de Desdobramentos . . . . .	21
2.2.1	<i>Genericidade e transversalidade</i> . . . . .	24
2.3	Geometria de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$ . . . . .	25
3	CONTATO COM HIPERPLANOS . . . . .	27
3.1	As singularidades genéricas da função altura . . . . .	27
3.2	Adjacências . . . . .	29
3.3	Condições para H . . . . .	29
3.4	A geometria proveniente do contato com hiperplanos . . . . .	38
4	CONTATO COM RETAS . . . . .	45
4.1	As singularidades genéricas da projeção ortogonal . . . . .	45
4.2	Conjunto bifurcação . . . . .	47
4.3	Estudos sobre a geometria . . . . .	67
4.3.1	<i>Informações geométricas</i> . . . . .	68
4.4	Condições para a projeção P . . . . .	87
	REFERÊNCIAS . . . . .	97



---

# INTRODUÇÃO

---

A Teoria de Singularidades, área a qual esse trabalho pretende contribuir, surgiu da necessidade de resolver problemas que a geometria diferencial não aborda e resultados importantes vieram da ideia de Rene Thom de estudar o contato de uma subvariedade com hiperplanos, retas, esferas, etc, os quais são medidos a partir das singularidades de funções especiais.

A geometria diferencial possui a noção de  $k$ -ponto de contato entre curvas planas e a generalização para subvariedades possuía problemas. Tal problema foi resolvido por Mather definindo-se o grupo de contato  $\mathcal{K}$  e com o trabalho (MONTALDI, 1986), pudemos medir o contato com os objetos citados através da  $\mathcal{K}$ -classe de aplicações e, com isso, a teoria ganhou grandes resultados nas últimas décadas.

Nesse sentido, temos o trabalho (NABARRO, 2000) o qual estudou o contato de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  com hiperplanos e retas e foi nossa inspiração para realizar o mesmo estudo, porém para hipersuperfícies com bordo. Por outro lado, também temos o trabalho (MARTINS; NABARRO, 2014), que realizou o estudo do contato entre hipersuperfícies com bordo e planos, nos mostrando o caminho para algumas investigações geométricas. Dessa forma, seja  $M$  hipersuperfície regular em  $\mathbb{R}^4$  com bordo e a família a três parâmetros de projeções em retas, chamada família de funções altura, a aplicação

$$H : M \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, u) \mapsto \langle p, u \rangle,$$

onde  $S^3$  é a esfera em  $\mathbb{R}^4$ , com centro na origem e raio um. Esta família mede o contato de  $M$  com hiperplanos em  $\mathbb{R}^4$ , perpendiculares à  $u$ .

No Capítulo 2, trazemos toda a teoria básica de Singularidades necessária para os estudos realizados e para este tivemos como principais referências (GOLUBITSKY; GUILLEMIN, 1973), (IZUMIYA *et al.*, 2016) e (MARTINET, 1982).

No Capítulo 3, estudamos a família de funções altura que, por sua vez, suas singularidades haviam sido classificadas por Arnold em (ARNOLD, 1978) e complementamos o estudo mostrando as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de  $H$  para termos tais singularidades e resultados sobre o bordo do conjunto parabólico de  $M$ , além de informações sobre os conjuntos das outras singularidades. Para facilitar as manipulações algébricas desse estudo, utilizamos o software Maple 2018.

Além da família de funções altura, também podemos definir a família de projeções em  $\mathbb{R}^3$ , que mede o contato de  $M$  com retas em  $\mathbb{R}^4$ , da forma:

$$P_u : M \times S^3 \rightarrow B$$

$$(p, u) \mapsto (u, p - \langle u, p \rangle u),$$

onde  $B = \{(u, y) \in S^3 \times \mathbb{R}^4; \langle u, y \rangle = 0\}$ , isto é,  $B$  é o fibrado tangente de  $S^3$ . O estudo das singularidades de  $P$  foi realizado por Goryunov em (GORYUNOV, 1984), porém optamos por realizá-lo novamente, utilizando uma outra abordagem. Tal classificação foi realizada com técnicas conhecidas da Teoria de Singularidades: Transversal Completa e Lema de Mather. Para o uso destas técnicas utilizamos o Software Transversal de Neil Kirk (mais detalhes sobre o software em (KIRK., 1998)), que nos auxiliou em contas e manipulações algébricas.

No Capítulo 4, realizamos então a classificação de  $P$  e buscamos características das hipersuperfícies com bordo a partir das formas normais encontradas. Estudamos o conjunto bifurcação de  $P$  e suas formas geométricas, detalhando cada região conexa de tais conjuntos. Um estudo similar foi realizado em (NOGUEIRA, 1998) para superfícies em  $\mathbb{R}^4$  e realizamos um paralelo para nossas hipersuperfícies com bordo.

Além disso, também realizamos estudos sobre o contato do bordo com o conjunto singular e suas respectivas imagens, trazendo informações sobre curvatura, direções assintóticas e etc. Esse estudo foi inspirado em (MARTINS; NABARRO, 2014), já citado anteriormente e em (BRUCE; GIBLIN, 1990), que estudou a projeção de superfícies com bordo. Também complementamos com o estudo das condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de  $P$ , que podem possibilitar novas análises em trabalhos futuros.

---

## PRELIMINARES

---

Neste capítulo trazemos todas as ferramentas da Teoria de Singularidades que serão utilizadas durante nosso trabalho. Além disso, descrevemos alguns temas sobre a geometria de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  que será objeto de nosso estudo. Inicialmente definimos germes, jatos e a equivalência entre eles, assim como a perturbação dos mesmos. Como principais referências podemos citar (GOLUBITSKY; GUILLEMIN, 1973), (IZUMIYA *et al.*, 2016) e (MARTINET, 1982).

### 2.1 Germes e jatos

Sejam  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : U_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , e  $g : U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  aplicações suaves (ou  $C^\infty$ ) definidas em vizinhanças abertas  $U_1$  e  $U_2$  de  $x$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são equivalentes e escrevemos  $f \sim g$  se, e somente se, existir uma vizinhança  $U \ni x$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset U_1 \cap U_2$  tal que  $f|_U = g|_U$ , ou seja, se  $f$  e  $g$  coincidem em uma vizinhança  $U$  de  $x$ . Esta relação é uma relação de equivalência e suas classes de equivalência são chamadas germes de aplicações suaves de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  em  $x$ .

Se  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  são representantes dos germes  $f$  e  $g$  então devemos ter  $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$  e, portanto qualquer outro representante deve assumir o mesmo valor em  $x$  como também todas as suas derivadas parciais. Denotamos por  $f : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$  um germe de aplicação em  $x$ . Sem perda de generalidade podemos tomar  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ .

Considere  $\mathcal{E}(n, p)$  o conjunto dos germes  $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$  e para  $p = 1$ , escrevemos  $\mathcal{E}_n$  e  $\mathcal{M}_n$  é o conjunto dos germes  $f$  tal que  $f(0) = 0$ . O ideal  $\mathcal{M}_n$  é gerado pelos monômios  $x_i$  (ver (BROCKER; LANDER, 1975) para a demonstração).

O germe de uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$  (isto é,  $f(0) = 0$ ) é dito singular se a matriz jacobiana de  $f$  não tem posto máximo. Caso contrário,  $f$  é dito regular.

Apresentamos algumas características dos conjuntos acima:

1.  $\mathcal{E}_n$  é um anel comutativo, com identidade  $\bar{1}$ .
2.  $\mathcal{E}_n$  é um anel local (i.e., possui um único ideal maximal, sendo este  $\mathcal{M}_n$ ).
3.  $\mathcal{E}(n, p)$  é um  $\mathcal{E}_n$ -módulo, com ação

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(n, p) &\rightarrow \mathcal{E}(n, p) \\ (f, F) &\mapsto f.F = (f.F_1, \dots, f.F_n) \end{aligned}$$

A partir deste momento iremos construir o espaço do jatos.

Sejam  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  aplicações definidas em uma vizinhança  $U$  de  $x$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  têm o mesmo  $k$ -jato em  $x$  se  $f(x) = g(x)$  e para algum sistema local de coordenadas em  $x \in \mathbb{R}^n$  e em  $f(x) \in \mathbb{R}^p$  todas as derivadas parciais de ordem  $\leq k$  das componentes de  $f$  e  $g$  coincidem em  $x$ . Observe que esta definição depende apenas de  $f$  e  $g$ . Fixando  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = f(x) \in \mathbb{R}^p$  e coordenadas locais em  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^p$ , segue que o  $k$ -jato de  $f$  é determinado pelos termos de grau  $\leq k$  nas expansões de Taylor das componentes de  $f$  com respeito a estas coordenadas. Estes são os  $k$ -jatos de aplicações  $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ . O conjunto de todos estes  $k$ -jatos é denotado por  $J^k(n, p)$ .

**Definição 2.1.1.** Definimos  $J^k(n, p)$  como o conjunto das expansões de Taylor de ordem menor ou igual a  $k$  de  $f$  em  $a$  sem o termo constante onde  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , ou seja, o conjunto de todos os  $k$ -jatos (em todos os pontos) de todas as aplicações  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , e a aplicação  $k$ -jato:

$$\begin{aligned} j^k f: \mathbb{R}^n &\rightarrow J^k(n, p) \\ a &\mapsto j^k f(a). \end{aligned}$$

Quando  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , usamos  $J^k(n)$ , para o conjunto definido acima. Neste caso podemos mostrar que as derivadas parciais de ordem  $\leq k$  de  $f \in \mathcal{E}_n$  se anulam em  $x$  se, e somente se,  $f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$  (onde  $\mathcal{M}_n^{k+1}$  é o espaço dos germes de funções cujos polinômios de Taylor de ordem  $k$  na origem são identicamente nulos). Assim, podemos identificar o espaço de  $k$ -jatos em  $x$  de aplicações  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com o espaço

$$\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^{k+1}}.$$

Logo, no caso geral, temos que

$$J^k(n, p) = \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^{k+1}} \times \dots \times \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^{k+1}} \text{ (p cópias).}$$

### 2.1.1 Os grupos $A$ e $K$

Seja  $\mathcal{A}$  o grupo formado pelos pares  $(h, k)$  de germes de difeomorfismos  $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  e  $k : \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ . Definimos a ação de  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, p)$  da forma

$$(h, k).f = k \circ f \circ h^{-1}, \quad (h, k) \in \mathcal{A}$$

onde  $f \in \mathcal{M}_n.\mathcal{E}(n, p)$ . Dizemos que dois germes  $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes se existir  $(h, k) \in \mathcal{A}$  tal que  $f = k \circ g \circ h^{-1}$ .

O grupo  $\mathcal{K}$  é o grupo dos germes de difeomorfismos  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$  que são escritos na forma

$$H(x, y) = (h(x), \bar{H}(x, y))$$

onde  $h$  é difeomorfismo e  $\bar{H}(x, 0) = 0$  para  $x \in \mathbb{R}^n$  próximo da origem. A ação de  $\mathcal{K}$  sobre  $\mathcal{M}_n.\mathcal{E}(n, p)$  é definida como

$$H.f(x) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))), \quad H \in \mathcal{K}, \quad f \in \mathcal{M}_n.\mathcal{E}(n, p).$$

Isto é

$$H.f(x) = h_x(f(h^{-1}(x))).$$

O grupo  $\mathcal{K}$  é dito grupo de contato e tem uma interpretação geométrica. Sejam  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2$ , dois pares de variedades em  $\mathbb{R}^n, 0$ . Dizemos que os pares têm o mesmo contato na origem se existe um difeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h(X_1) = X_2$  e  $h(Y_1) = Y_2$ .

Suponha que  $X_i$  é parametrizada por  $\phi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e as  $Y_i$  são definidas por submersões  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , e sejam  $f_i = g_i \circ \phi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então,

**Teorema 2.1.1.** Os pares  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  têm o mesmo contato na origem se, e somente se,  $f_1$  e  $f_2$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

*Demonstração.* Ver (MONTALDI, 1986). □

### 2.1.2 Os espaços tangentes e a determinação finita

Seja  $\mathcal{E}(n, p)$  o conjunto dos germes  $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ . O "espaço tangente" a  $\mathcal{E}(n, p)$  em  $f$  é o  $\mathcal{E}(n)$ -módulo de campos de vetores ao longo de  $f$  e será denotado por  $\theta_f$ . Assim,  $\xi \in \theta_f$ ,  $\xi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow T(\mathbb{R}^p)$  se  $\pi \circ \xi = f$  onde  $\pi_p : T(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^p$  é a projeção do fibrado tangente  $T(\mathbb{R}^p)$  de  $\mathbb{R}^p$  a  $\mathbb{R}^p$ .

Definimos  $\theta_p = \theta_{id_{\mathbb{R}^p, 0}}$  e  $\theta_n = \theta_{id_{\mathbb{R}^n, 0}}$ , onde  $id_{\mathbb{R}^p, 0}$  e  $id_{\mathbb{R}^n, 0}$  denotam os germes das aplicações identidade de  $\mathbb{R}^p, 0$  e  $\mathbb{R}^n, 0$ , respectivamente.

Seja  $\mathcal{G}$  um subgrupo de  $\mathcal{K}$ . Definimos a álgebra de Lie de  $\mathcal{G}$ , denotada por  $L\mathcal{G}$  da seguinte forma: Considere  $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n+p}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}, 0$  uma curva em  $\mathcal{G}$  tal que  $\phi_0$  é a identidade em  $\mathcal{G}$ . Derivando  $\phi$  temos um campo de vetores

$$z \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, z)|_{t=0}.$$

Definimos os homomorfismos

$$\begin{aligned} tf : \theta_n &\rightarrow \theta_f \\ \phi &\mapsto df \circ \phi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} wf : \theta_p &\rightarrow \theta_f \\ \psi &\mapsto \psi \circ f. \end{aligned}$$

Então o espaço tangente à órbita do grupo  $\mathcal{A}$  é dado por

$$\begin{aligned} T_f \mathcal{A} &= tf(\mathcal{M}_n, \theta_n) + wf(\mathcal{M}_p, \theta_p) \\ &= \mathcal{M}_n \cdot \{f_{x_1}, \dots, f_{x_n}\} + f^*(\mathcal{M}_p) \cdot \{e_1, \dots, e_p\}, \end{aligned}$$

onde  $f_{x_i}$  denota a derivada parcial de  $f$  com respeito a  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), o conjunto  $\{e_1, \dots, e_p\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^p$  considerados como elementos de  $\mathcal{E}(n, p)$  e  $f^*(\mathcal{M}_p)$  é o pull-back do ideal maximal em  $\mathcal{E}_p$ .

Além disso, o espaço tangente estendido à órbita do grupo  $\mathcal{A}$  é dado por

$$\begin{aligned} T_f \mathcal{A}_e &= tf(\theta_n) + wf(\theta_p) \\ &= \mathcal{E}_n \cdot \{f_{x_1}, \dots, f_{x_n}\} + f^*(\mathcal{E}_p) \cdot \{e_1, \dots, e_p\}. \end{aligned}$$

Definimos a  $\mathcal{A}$ -codimensão de  $f$  como

$$\mathcal{A}\text{-codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \left( \frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, p)}{T_f \mathcal{A}} \right)$$

e a  $\mathcal{A}_e$ -codimensão de  $f$  como

$$\mathcal{A}_e\text{-codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \left( \frac{\mathcal{E}(n, p)}{T_f \mathcal{A}_e} \right).$$

**Definição 2.1.2.** Um germe  $f$  é dito  $k$ - $\mathcal{A}$ -determinado se qualquer  $g$  com  $j^k g = j^k f$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente à  $f$ . Além disso,  $f$  é dito  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se é  $k$ -determinado para algum  $k$ .

Denotamos por  $\mathcal{A}_1$  o subgrupo de  $\mathcal{A}$  que consiste dos elementos de  $\mathcal{A}$  cujo 1-jato é a identidade (este é um subgrupo normal de  $\mathcal{A}$  e define o grupo de jato  $J^1 \mathcal{A} = \mathcal{A} / \mathcal{A}_1$ ). O grupo  $\mathcal{A}_1$  é um grupo de Lie.

Abaixo temos um critério para verificar se o germe é finitamente determinado.

**Teorema 2.1.2. (BRUCE, 2001)**

- (1) Um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, existe  $N$  com  $\mathcal{M}_n^N \cdot \mathcal{E}(n, p) \subset T_f \mathcal{A}$ .
- (2) Um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é  $(2r+1)$ - $\mathcal{A}$ -determinado se

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \mathcal{E}(n, p) \subset T_f \mathcal{A} + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot \mathcal{E}(n, p).$$

(3) Um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é  $r$ - $\mathcal{A}_1$ -determinado se, e somente se,

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \mathcal{E}(n, p) \subset T_f \mathcal{A}_1.$$

(4) Um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é  $r$ - $\mathcal{A}_1$ -determinado se, e somente se,

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \mathcal{E}(n, p) \subset T_f \mathcal{A}_1 + \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot (f^*(\mathcal{M}_p) \mathcal{E}_n + \mathcal{M}_n^{r+1}) \cdot \mathcal{E}(n, p).$$

A determinação finita nos diz que o germe é equivalente a um de seus polinômios de Taylor e que o problema da classificação pode ser reduzido ao espaço dos  $k$ -jatos, que é um espaço vetorial de dimensão finita. Uma questão fundamental na teoria de singularidades é obter uma classificação das  $\mathcal{A}$ -órbitas de aplicações  $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ . O teorema anterior sozinho não nos fornece uma classificação. Em nosso trabalho, utilizamos o método da Transversal Completa com Lema de Mather, dados abaixo:

**Proposição 2.1.1.** (Transversal Completa, Proposição 2.2 em (BRUCE; KIRK; PLESSIS, 1997))  
Sejam  $g$  um  $k$ -jato em  $J^k(n, p)$  e  $T$  um subespaço do conjunto  $H^{k+1}(n, p)$  dos jatos homogêneos de grau  $k+1$ , tal que

$$H^{k+1}(n, p) \subset T + T_g(J^{k+1} \mathcal{A}_1).$$

Então qualquer  $(k+1)$ -jato  $j^{k+1}f$  com  $j^k g = j^k f$  é  $J^{k+1} \mathcal{A}_1$ -equivalente a  $g+t$  para algum  $t \in T$ . O subespaço vetorial  $T$  é dito  $k+1$ -transversal completa de  $g$ .

**Lema 2.1.1.** (Lema de Mather, Lema 3.1 em (MATHER, 1969)) Seja  $\mathcal{G}$  um grupo de Lie agindo suavemente sobre a variedade de dimensão finita  $X$ . Seja  $V$  uma subvariedade conexa de  $X$ . Então  $V$  está contida em uma única órbita de  $\mathcal{G}$  se, e somente se,

- (1) para cada  $x \in V$ ,  $T_x V \subset T_x \mathcal{G}(x)$ ;
- (2)  $\dim T_x \mathcal{G}(x)$  é constante para todo  $x \in V$ .

Dessa forma, obtemos um método completo para a classificação dos germes de aplicações:

1. Dado um  $j^k f$  usamos o teorema da Transversal Completa para obter uma parametrização do  $k+1$ -jato que tem o  $k$ -jato igual a  $j^k f$ .
2. Com esta parametrização em mãos, podemos usar o Lema de Mather para produzir as órbitas.
3. Aplicamos o teste da determinação finita a cada órbita no  $k+1$ -jato (cujo  $k$ -jato é  $j^k f$ ).  
Se o germe é finitamente determinado paramos o processo. Caso contrário, consideramos o  $k+2$ -jato.

Para analisar se o germe é finitamente determinado podemos utilizar o teorema a seguir:

**Teorema 2.1.3.** (KIRK., 1998) Um germe  $f$  é  $k$ - $\mathcal{A}$ -determinado se todas as transversais completas de grau  $k + 1$  até  $2k + 1$  são vazias.

Em geral, neste trabalho estaremos mais interessados nos germes simples, que são definidos a seguir:

Seja  $f \in \mathcal{E}(n, p)$  finitamente determinado e  $\mathcal{G}$  um grupo de Lie. Dizemos que  $f$  é  $\mathcal{G}$ -simples se existe uma vizinhança  $V$  de  $j^k f$  ( $k$  grande) em  $J^k(n, p)$  tal que  $V$  contém um número finito de órbitas de  $J^k \mathcal{G}$  em  $J^k(n, p)$ .

Damon provou em (DAMON, 1984), que os resultados de determinação finita, Transversal Completa e Lema de Mather valem para uma classe grande de subgrupos de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{H}$ , os quais são ditos subgrupos geométricos de  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{A}$ . Estes são subgrupos que satisfazem algumas propriedades algébricas que garantem que todos os resultados de determinação finita e desdobramentos versais são válidos para a ação de tais subgrupos em  $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, p)$ . Trabalhamos aqui com um destes subgrupos, o grupo  $\mathcal{B}$ .

### 2.1.3 O grupo $\mathcal{B}$

Seja  $M$  hipersuperfície em  $\mathbb{R}^4$ . Escrevemos  $(x, y, z)$  como as coordenadas de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  o plano  $-xy$ . Este conjunto  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  corresponde ao bordo da hipersuperfície, cujo interior é tomado como a parte de  $\mathbb{R}^3$  com  $z > 0$ .

O grupo  $\mathcal{B}$  é o subgrupo de  $\mathcal{A}$  que consiste dos pares de germes de difeomorfismos  $(h, k)$  em  $Diff(\mathbb{R}^3) \times Diff(\mathbb{R}^p)$ , com  $h$  preservando a hipersuperfície e seu bordo (isto é,  $h$  leva a variedade  $V = \{(x, y, z); z \geq 0\}$  nela mesma). Então  $\mathcal{B}$  atua em  $\mathcal{E}(3, p)$  e classificamos as  $\mathcal{B}$ -órbitas necessárias. Assim, se  $(h, k) \in \mathcal{B}$  podemos escrever  $h(x, y, z) = (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z), zh_3(x, y, z))$ , com  $h_3(0, 0, 0) > 0$ , para germes de funções suaves  $h_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

O grupo  $\mathcal{B}$  herda a ação do grupo  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{M}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p)$ . Como já dito, foi provado por Damon em (DAMON, 1984), que os resultados de determinação finita, Transversal Completa e Lema de Mather valem para o grupo  $\mathcal{B}$ , pois este é subgrupo geométrico de  $\mathcal{A}$ .

O espaço tangente ao grupo  $\mathcal{B}$  em  $f \in \mathcal{M}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p)$  é dado por

$$T_f \mathcal{B} = \mathcal{M}(x, y, z) \cdot \{f_x, f_y\} + \mathcal{E}_3 \{zf_z\} + f^* \mathcal{M}(u_1, \dots, u_p) \cdot \{e_1, \dots, e_p\}.$$

Seja  $\mathcal{B}_1$  o subgrupo de  $\mathcal{B}$  cujos elementos tem como 1-jato em 0 a identidade. Seu espaço tangente em  $f \in \mathcal{M}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p)$  é dado por

$$T_f \mathcal{B}_1 = \mathcal{M}^2(x, y, z) \cdot \{f_x, f_y\} + \mathcal{M}(x, y, z) \{zf_z\} + f^* \mathcal{M}^2(u_1, \dots, u_p) \cdot \{e_1, \dots, e_p\}.$$

Neste trabalho estamos com uma situação similar à (BRUCE; GIBLIN, 1990), onde temos a classificação das singularidades de codimensão menor ou igual que 2 de germes  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow$

$(\mathbb{R}^2, 0)$  com difeomorfismos na fonte que preservam a variedade  $\{(x, y); y \geq 0\}$  e qualquer difeomorfismo na meta. Assim, os resultados de (BRUCE; GIBLIN, 1990) sobre determinação finita, podem ser adaptados para nosso caso, conforme Damon:

**Teorema 2.1.4.** Um germe  $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é  $\mathcal{B}$ -finitamente determinado se, e somente se, existe  $N$  com  $\mathcal{M}^N(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p) \subset T_f \mathcal{B}$ .

**Teorema 2.1.5.** Seja  $U \subset \mathcal{B}$  um subgrupo com  $\mathcal{B}_1 \subset U$  e  $J^1 U$  um grupo unipotente e  $f \in \mathcal{M}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p)$ . Se

$$\mathcal{M}^{r+1}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p) \subset T_f U$$

então  $f$  é  $r - \mathcal{B}$ -determinado.

Além disso, se tomarmos  $U = \mathcal{B}_1$ ,  $f$  será  $r - \mathcal{B}_1$ -determinado.

**Corolário 2.1.1.** Se  $f$  satisfaz

$$\mathcal{M}^l \cdot \mathcal{E}(3, p) \subset \mathcal{E}_3\{f_x, f_y, z f_z\} + f^* \mathcal{M}(u_1, \dots, u_p) \cdot \mathcal{E}(3, p) + \mathcal{M}^{l+1}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p)$$

e

$$\mathcal{M}^{r+1}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p) \subset T_f \mathcal{B}_1 + \mathcal{M}^{r+l+1}(x, y, z) \cdot \mathcal{E}(3, p)$$

então  $f$  é  $r - \mathcal{B}_1$ -determinado.

Note que se um germe é  $r - \mathcal{B}_1$ -determinado então é  $k - \mathcal{B}$ -determinado, para algum  $k \geq r$ . Podemos usar o Corolário 2.1.1 para obter o grau de  $\mathcal{B}_1$ -determinação e então a combinação do método da transversal completa e Lema de Mather para encontrar o grau de  $\mathcal{B}$ -determinação.

Para os cálculos da transversal completa,  $\mathcal{B}$ -codimensão e o uso do Lema de Mather utilizaremos o software Transversal de Neil Kirk.

## 2.2 Teoria de Desdobramentos

Considere um germe finitamente determinado. Dessa forma, consideramos uma deformação deste germe e quais singularidades surgem desta deformação. Além disso, podemos analisar quantas singularidades surgem e se existe uma família que contém todos os tipos de singularidades, ainda mais, que qualquer outra deformação de  $f$  seja obtida a partir desta família. Esta família é denominada deformação versal. Vamos enunciar os principais teoremas sobre esse tema e definir alguns objetos geométricos associados a tais famílias, que serão vistos para nossas singularidades no futuro. A referência principal para esta seção é (MARTINET, 1982).

**Definição 2.2.1.** Um desdobramento a  $s$  parâmetros de um germe  $f_0 \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, p)$  é um germe  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$ ,  $(x, u) \mapsto (f(x, u), u)$  tal que  $f_0(x) = f(x, 0)$ . Usaremos as notações:  $f_u(x) = f(x, u)$ , onde  $f_u$  é uma deformação de  $f_0$ , parametrizada por  $u \in \mathbb{R}^s$ , e  $\dot{F}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0)$ , para  $i = 1, \dots, s$ .

Iremos apresentar os resultados para o grupo  $\mathcal{A}$ , porém os resultados são análogos para o grupo  $\mathcal{B}$ .

**Definição 2.2.2.** Dois desdobramentos a  $s$  parâmetros  $F, G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$  de  $f_0$  são isomorfos se existem germes de difeomorfismos

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0$$

$$\psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$$

que são desdobramentos a  $s$  parâmetros das funções identidades sobre  $\mathbb{R}^n, 0$  e  $\mathbb{R}^p, 0$  respectivamente, tal que

$$G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}.$$

Se  $F$  e  $G$  são desdobramentos de  $f_0$  com parâmetros diferentes, a definição de isomorfismo é dada pelo pull-back: Seja  $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$ , definimos o pull-back de  $F$  por  $h$ , denotado por  $h^*F$ , como o desdobramento a  $t$  parâmetros

$$(h^*F)(x, u) = (f(x, h(v)), v).$$

Dizemos que  $F$  e  $G$  são equivalentes se existe um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$  tal que  $G$  é isomorfo a  $h^*F$  (esta é uma relação de equivalência). Se  $G$  é um desdobramento a  $t$  parâmetros de  $f_0$  e  $F$  é um desdobramento a  $s$  parâmetros de  $f_0$  ( $t$  não precisa ser necessariamente igual a  $s$ ), dizemos que  $G$  é induzida de  $F$  se existe um germe  $C^\infty$ ,  $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$  tal que  $G$  é isomorfo a  $h^*F$ .

Desta forma, definimos

**Definição 2.2.3.** 1.  $F$  é um desdobramento versal se todo desdobramento de  $f_0$  é induzido de  $F$ .

2.  $F$  é trivial se é isomorfo ao desdobramento constante  $(x, u) \mapsto (f_0(x), u)$ .

3.  $f_0$  é estável se todos os desdobramentos de  $f_0$  são triviais.

Podemos enunciar agora o teorema fundamental da existência de desdobramentos versais:

**Teorema 2.2.1.** O desdobramento  $F$  é versal se, e somente se,

$$T_{f_0} \mathcal{A}_e + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}(n, p).$$

**Corolário 2.2.1.** Sejam  $c = \mathcal{A}_e\text{-codimensão}(f_0) < \infty$  e  $\dot{F}_i$  uma base do complementar de  $T_{f_0} \mathcal{A}_e$  em  $\mathcal{E}(n, p)$ . Então  $F(x, u) = (f_0(x) + \sum_{i=1}^c u_i \dot{F}_i(x), u)$  é um desdobramento versal de  $f_0$ .

**Observação 2.2.1.** Se  $f$  é  $k$ -determinada podemos trabalhar em  $J^k(n, p)$ , isto é, basta mostrar que

$$j^k(T_f \mathcal{A} + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\}) = J^k(n, p)$$

para verificar se  $F$  é versal.

**Corolário 2.2.2.** O germe  $f_0$  possui um desdobramento versal se, e somente se, a  $\mathcal{A}_e$ -codimensão de  $f_0$  é finita.

Além disso, temos:

**Teorema 2.2.2.** O germe  $f_0$  é estável se, e somente se,  $\mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) = 0$ .

Seja  $c = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0)$ . Então o número mínimo de parâmetros para um desdobramento versal é  $c$ . Um desdobramento versal a  $c$  parâmetros de  $f_0$  é chamado miniversal.

**Teorema 2.2.3.** Todos os desdobramentos miniversais de  $f_0$  são equivalentes.

Os resultados acima no caso dos  $\mathcal{A}$ -desdobramentos são análogos, só que usamos a  $\mathcal{A}$ -codim( $f_0$ ) e supomos que  $\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, p)$  geram o complementar de  $T_{f_0}\mathcal{A}$  em  $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, p)$ . Observamos que existe o seguinte resultado em (WALL, 1981).

**Teorema 2.2.4.**  $\mathcal{A}\text{-codim}(f_0) = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) + n$ .

Considerando um desdobramento versal  $F(x, u) = (f(x, u), u)$  com parâmetro  $u$ , então podemos obter conjuntos importantes para o estudo da geometria dos germes singulares.

**Definição 2.2.4.** O conjunto singular de  $F$  é

$$\Sigma F = \{(x, u) : DF_x(x, u) \text{ é singular}\},$$

onde  $DF_x$  denota a derivada de  $F$  com relação a  $x$ .

O conjunto discriminante de  $F$  é dado por

$$\Delta F = F(\Sigma F).$$

O conjunto bifurcação é definido por

$$B_F = \{u \in \mathbb{R}^r; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ singular com } F_u \text{ não estável}\}.$$

Um resultado importante que encontramos em (BRUCE; GIBLIN, 1984) é:

**Proposição 2.2.1.** Quaisquer dois desdobramentos versais com mesmo número de parâmetros têm conjuntos singular, discriminante e bifurcação difeomorfos.

Dessa forma, quando estudamos a geometria dos germes singulares podemos tomar um desdobramento versal, sem perda de generalidade.

### 2.2.1 Genericidade e transversalidade

O objetivo principal desta seção é falar sobre o teorema de transversalidade de Thom e o conceito de genericidade a partir dos resultados de transversalidade.

Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma função  $C^\infty$ , e  $Y \subset \mathbb{R}^p$  uma variedade suave. Dizemos que  $f$  é transversal a  $Y$ , e escrevemos  $f \pitchfork Y$ , em  $x \in \mathbb{R}^n$  se  $f(x) \notin Y$  ou  $f(x) \in Y$  e

$$T_x f(\mathbb{R}^n) + T_{f(x)} Y = \mathbb{R}^p.$$

#### Observação 2.2.2.

- (i) A equação de transversalidade implica que  $\text{codim} Y \leq n$ . Se  $\text{codim} Y > n$ , então  $f$  transversal a  $Y$  significa que  $f(\mathbb{R}^n) \cap Y = \emptyset$ .
- (ii) Se  $Y = \{\text{ponto}\}$ , então  $f$  é transversal a  $Y$  se, e somente se,  $f$  é uma submersão ou  $p \notin f(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.2.5.** (GOLUBITSKY; GUILLEMIN, 1973) Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma função  $C^\infty$ , e  $Y \subset \mathbb{R}^p$  uma variedade suave com  $f$  transversal a  $Y$ . Então  $X = f^{-1}(Y)$  é uma variedade suave em  $\mathbb{R}^n$ , que tem a mesma codimensão de  $Y$ .

**Teorema 2.2.6.** (Teorema de Transversalidade de Thom (GIBSON, 1979)) Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_s$  subvariedades diferenciáveis de  $J^k(n, p)$ . O conjunto de aplicações  $C^\infty$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , para as quais  $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(n, p)$  é transversal a  $X_1, X_2, \dots, X_s$  é denso em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

**Teorema 2.2.7.** (Teorema de Montaldi (MONTALDI, 1991)) Sejam  $X, Y, Z, U$  variedades diferenciáveis e  $\mathcal{G}$  um dos grupos de Mather:  $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{H}$ . Se  $F : Y \times U \rightarrow Z$  é uma aplicação diferenciável então dada uma aplicação  $g : X \rightarrow Y$  pode-se definir uma composta  $F_g : X \times U \rightarrow Z$  por  $F_g(x, u) = F(g(x), u)$ .

1. Suponha que  $F : Y \times U \rightarrow Z$  é uma aplicação localmente  $\mathcal{G}$ -versal e seja  $S$  uma subvariedade  $\mathcal{G}^{(k)}$ -invariante de  $J^k(X, Y)$ . Então para um conjunto residual de imersões  $X \hookrightarrow Y$  a aplicação  $k$ -jato  $j_1^k F_g : X \times U \rightarrow J^k(X, Y)$  é transversal a  $S$ , onde o subscrito 1 significa que estamos considerando os  $k$ -jatos com respeito a primeira variável  $x$ .
2. Suponha que  $F : Y \times U \rightarrow Z$  é uma aplicação  $\mathcal{G}$ -versal e seja  $S$  uma subvariedade  $\mathcal{G}$ -invariante de multijatos  ${}_r J^k(X, Y)$ . Então para um conjunto residual de mergulhos  $X \hookrightarrow Y$  a aplicação multijato  ${}_r j_1^k F_g : X^{(r)} \times U \rightarrow {}_r J^k(X, Y)$  é transversal a  $S$ .

Dizemos que uma propriedade é genérica em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  se ela se verifica para um conjunto residual (ou seja, para uma interseção enumerável de conjuntos abertos densos) de aplicações.

## 2.3 Geometria de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$

Nesta sessão, veremos características de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  e tomamos como referência (IZUMIYA *et al.*, 2016) e (TENENBLAT, 1990).

Seja  $M$  o mergulho de uma variedade de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , orientada pelo campo vetorial unitário normal  $N$ , e seja  $p \in M$ . A primeira forma fundamental de  $M$  em  $p$  é a aplicação

$$I_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

e a segunda forma fundamental de  $M$  em  $p$  é a aplicação

$$II_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto \langle W_p(w), w \rangle,$$

onde  $W$  é a função Weingarten  $W_p = -dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ .

Considere  $M$  localmente dada pelo germe de imersão na origem

$$i : (x, y, z) \mapsto (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z), W(x, y, z))$$

e  $p = i(q)$  assim, uma base para  $T_p M$  é  $\mathcal{B} = \{i_x(q), i_y(q), i_z(q)\}$  e para todo vetor  $w \in T_p M$  podemos escrever  $w = ai_x(q) + bi_y(q) + ci_z(q)$ . Logo, a primeira forma fundamental de  $M$  em  $p$  também pode ser vista pela expressão

$$a^2 \langle i_x, i_x \rangle (q) + b^2 \langle i_y, i_y \rangle (q) + c^2 \langle i_z, i_z \rangle (q) + 2ab \langle i_x, i_y \rangle (q) + 2ac \langle i_x, i_z \rangle (q) + 2bc \langle i_y, i_z \rangle (q).$$

Além disso, o vetor normal pode ser calculado da seguinte forma

$$N(q) = \frac{i_x(q) \times i_y(q) \times i_z(q)}{\|i_x(q) \times i_y(q) \times i_z(q)\|}.$$

Também podemos encontrar a expressão para a segunda forma fundamental utilizando a base  $\mathcal{B}$ ,

$$a^2 \langle i_{xx}, N \rangle (q) + b^2 \langle i_{yy}, N \rangle (q) + c^2 \langle i_{zz}, N \rangle (q) + 2ab \langle i_{xy}, N \rangle (q) + 2ac \langle i_{xz}, N \rangle (q)$$

$$+ 2bc \langle i_{yz}, N \rangle (q).$$

Note que a primeira e segunda forma fundamental são formas quadráticas que podem ser escritas em notação matricial da forma

$$I_p(w) = w^T [G]w \quad \text{e} \quad II_p(w) = w^T [H]w,$$

onde

$$G(q) = \begin{pmatrix} \langle i_x, i_x \rangle (q) & \langle i_x, i_y \rangle (q) & \langle i_x, i_z \rangle (q) \\ \langle i_x, i_y \rangle (q) & \langle i_y, i_y \rangle (q) & \langle i_y, i_z \rangle (q) \\ \langle i_x, i_z \rangle (q) & \langle i_y, i_z \rangle (q) & \langle i_z, i_z \rangle (q) \end{pmatrix},$$

$$H(q) = \begin{pmatrix} \langle i_{xx}, N \rangle(q) & \langle i_{xy}, N \rangle(q) & \langle i_{xz}, N \rangle(q) \\ \langle i_{xy}, N \rangle(q) & \langle i_{yy}, N \rangle(q) & \langle i_{yz}, N \rangle(q) \\ \langle i_{xz}, N \rangle(q) & \langle i_{yz}, N \rangle(q) & \langle i_{zz}, N \rangle(q) \end{pmatrix}$$

e denominamos matrizes da primeira e segunda forma, respectivamente (para mais detalhes ver (IZUMIYA *et al.*, 2016)).

**Definição 2.3.1.** A função curvatura normal em  $p = i(q)$  é uma aplicação  $k_n : T_pM - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que, para cada vetor  $w \in T_pM$  não-nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

**Definição 2.3.2.** Uma direção  $u$  do espaço tangente é direção assintótica se, e somente se, a curvatura normal em  $u$  se anula.

Para definir pontos parabólicos, iremos precisar da seguinte definição:

**Definição 2.3.3.** A curvatura Gaussiana de  $M$  em  $p = i(q)$  é

$$K(q) = \frac{\det H}{\det G},$$

onde  $G$  e  $H$  são as matrizes da primeira e segunda forma fundamental.

Para definir pontos hiperbólico e elíptico, vamos precisar de alguns conceitos sobre formas quadráticas (para maiores detalhes ver (LANE; BIRKHOFF, 1970), páginas 386-388).

**Teorema 2.3.1.** Seja  $Q$  uma forma quadrática sobre  $\mathbb{R}^n$ . Então existem inteiros  $s$  e  $r$  com  $s \leq r \leq n$  dependendo somente de  $Q$ , e existem coordenadas  $z_1, \dots, z_n$  para  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$Q = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_r^2.$$

O número  $s$  é dito a assinatura da forma quadrática  $Q$  e é denotado por  $\text{sign}(Q)$ . A assinatura é um invariante da forma quadrática (este fato é demonstrado em (LANE; BIRKHOFF, 1970)).

**Definição 2.3.4.** Dizemos que  $p = i(q)$  é um ponto

- (a) parabólico se  $K(q) = 0$ ;
- (b) hiperbólico se  $\text{sign}(II_p) = 1$  ou  $2$ .
- (c) elíptico se  $\text{sign}(II_p) = 0$  ou  $3$ .

## CONTATO COM HIPERPLANOS

Neste capítulo, estudamos o contato entre uma hipersuperfície  $M$  em  $\mathbb{R}^4$  com bordo e hiperplanos, através da função altura. A classificação de tais funções foi realizada por (ARNOLD, 1978) e estudamos as condições para que elas ocorram. Tomando como partida os trabalhos (NABARRO, 2000) e (BRUCE, 1984), obtivemos também as configurações genéricas do bordo do conjunto parabólico de  $M$ .

Ao longo do estudo, utilizamos por diversas vezes o software Maple para auxiliar em contas.

### 3.1 As singularidades genéricas da função altura

Seja  $M$  hipersuperfície regular em  $\mathbb{R}^4$  com bordo  $z = 0$ . A família a três parâmetros de projeções em retas, chamada família de funções altura, é a aplicação

$$H : M \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, u) \mapsto \langle p, u \rangle,$$

onde  $S^3$  é a esfera em  $\mathbb{R}^4$ , com centro na origem e raio um. Esta família mede o contato de  $M$  com hiperplanos em  $\mathbb{R}^4$ , perpendiculares à  $u$ .

Considerando  $M$  localmente dada pelo germe de imersão na origem

$$i : (x, y, z) \mapsto (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z), W(x, y, z)),$$

estamos interessados na restrição  $z \geq 0$ . Parametrizando a família de direções em  $\mathbb{R}^4$  próximas de  $(0, 0, 0, 1)$  por  $(\lambda, \beta, \mu, 1)$  a função altura é

$$H(x, y, z, \lambda, \beta, \mu) = \lambda X(x, y, z) + \beta Y(x, y, z) + \mu Z(x, y, z) + W(x, y, z).$$

Se  $u_0 = (0, 0, 0, 1)$ , teremos  $H_{u_0} = W(x, y, z)$ . As singularidades de  $H$  não são alteradas por mudanças de coordenadas na fonte (preservando o bordo) e na meta.

As singularidades que ocorrem nos pontos interiores da hipersuperfície foram classificadas usando o grupo  $\mathcal{A}$  por Arnold. Para os pontos no bordo, analisaremos as singularidades da família de funções altura segundo a  $\mathcal{B}$ -equivalência pois esta preservará as singularidades da família e o bordo da hipersuperfície  $M$ . Encontramos em (ARNOLD, 1978) uma classificação de germes  $\mathcal{B}$ -simples de tais singularidades.

Forma normal	Codimensão	Determinação	Nome
$\pm x^2 + y^2 \pm z^k$	$k - 1$	$k, k = 2, 3, 4$	$\mathcal{B}_k$
$y^2 + xz \pm x^k$	$k - 1$	$k, k = 3, 4$	$\mathcal{C}_k$
$y^2 \pm z^2 + x^3$	3	3	$\mathcal{F}_4$

Tabela 1 – Singularidades  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  segundo a  $\mathcal{B}$ -Equivalência.

Além disso, temos os germes regulares:

Forma normal	Codimensão	Determinação
$x$	0	1
$z + x^2 \pm y^k$	$k - 2$	$k, k = 2, 3, 4, 5$
$z + x^3 + y^3$	3	3

Tabela 2 – Germes regulares  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  segundo a  $\mathcal{B}$ -Equivalência.

As singularidades que podemos esperar dos membros da família  $H_{u_0}$ , pelo Teorema de Montaldi (MONTALDI, 1986), são as de codimensão menor ou igual a 3, que é a dimensão do seu espaço de parâmetros. Assim, no teorema a seguir apresentamos as possíveis singularidades simples que nossa aplicação  $H_{u_0}$  pode assumir segundo a  $\mathcal{B}$ -equivalência.

**Teorema 3.1.1.** Genericamente a aplicação  $H_{u_0}$  tem singularidades simples locais de codimensão menor ou igual a 3, ou seja, as singularidades simples do tipo  $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  e  $\mathcal{F}_4$  da Tabela 1.

Na tabela a seguir temos os desdobramentos  $\mathcal{B}_e$ -versais dos germes do teorema anterior.

Nome	Forma normal	$\mathcal{B}_e$ - Codimensão	Base $\mathcal{B}_e$ -versal
$\mathcal{B}_2$	$\pm x^2 + y^2 \pm z^2$	1	$\{z\}$
$\mathcal{B}_3$	$\pm x^2 + y^2 \pm z^3$	2	$\{z, z^2\}$
$\mathcal{B}_4$	$\pm x^2 + y^2 \pm z^4$	3	$\{z, z^2, z^3\}$
$\mathcal{C}_3$	$y^2 + xz \pm x^3$	2	$\{x, x^2\}$
$\mathcal{C}_4$	$y^2 + xz \pm x^4$	3	$\{x, x^2, x^3\}$
$\mathcal{F}_4$	$y^2 \pm z^2 + x^3$	3	$\{x, z, xz\}$

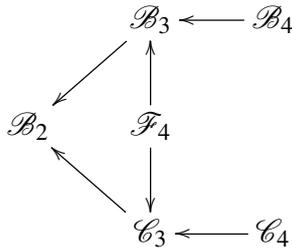
Tabela 3 – Base para desdobramentos  $\mathcal{B}_e$ -versais dos germes simples  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tais desdobramentos foram obtidos utilizando o software Transversal de Neil Kirk.

## 3.2 Adjacências

Seja  $\mathcal{G}$  um grupo de equivalência de germes. Dizemos que a  $\mathcal{G}$ -classe  $L$  é adjacente à  $\mathcal{G}$ -classe  $K$  ( $L \rightarrow K$ ) se todo germe de aplicação  $f \in L$  pode ser deformado a um germe em  $K$  por perturbações arbitrariamente pequenas. Assim, as  $\mathcal{G}$ -classes às quais  $L$  é adjacente são aquelas que aparecem em um desdobramento  $\mathcal{G}$ -versal de qualquer germe em  $L$ . Esta definição pode ser encontrada em (NOGUEIRA, 1998).

Podemos encontrar em (ARNOLD, 1978), o diagrama de adjacências para os germes listados no Teorema 3.1.1.



## 3.3 Condições para H

Para os estudos que virão utilizaremos as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor da função altura em  $(0,0,0)$ . No teorema a seguir apresentamos as condições sobre a expansão de Taylor de ordem 1.

Escrevemos o 1-jato de  $H$  da forma:

$$j^1H = a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z.$$

**Teorema 3.3.1.** O 1-jato da projeção  $H$  é da forma:

1.  $x$  se, e somente se,  $a_{100} \neq 0$  ou  $a_{010} \neq 0$ .
2.  $z$  se, e somente se,  $a_{100} = a_{010} = 0$  e  $a_{001} \neq 0$ .
3.  $0$  se, e somente se,  $a_{100} = a_{010} = a_{001} = 0$ .

Observe que  $x$  é 1-determinado de codimensão 0. Dessa forma, precisamos analisar os jatos subsequentes apenas para as formas  $z$  e  $0$ . Além disso, note que  $x$  e  $z$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, porém não são  $\mathcal{B}$ -equivalentes, ou seja, no interior de nossa hipersuperfície essas classes coincidem (ver (NABARRO, 2000)), mas no bordo determinam classes diferentes.

Inicialmente analisaremos os jatos subsequentes de  $z$ . Pela Tabela 2, tais formas normais poderão ser até 5-determinadas (considerando a restrição de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão menor ou igual a três). Assim, considerando as mudanças já realizadas nos monômios de grau 1, escrevemos o  $j^5H$  da forma:

$$\begin{aligned}
j^5 H = & z + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{011}yz + a_{101}xz + a_{300}x^3 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 \\
& + a_{111}xyz + a_{210}x^2y + a_{120}xy^2 + a_{201}x^2z + a_{102}xz^2 + a_{012}yz^2 + a_{021}y^2z + a_{400}x^4 + a_{040}y^4 + a_{004}z^4 \\
& + a_{310}x^3y + a_{301}x^3z + a_{031}y^3z + a_{130}xy^3 + a_{013}yz^3 + a_{103}xz^3 + a_{220}x^2y^2 + a_{202}x^2z^2 + a_{022}y^2z^2 \\
& + a_{112}xyz^2 + a_{121}xy^2z + a_{211}x^2yz + a_{500}x^5 + a_{050}y^5 + a_{005}z^5 + a_{410}x^4y + a_{401}x^4z + a_{041}y^4z + \\
& a_{140}xy^4 + a_{104}xz^4 + a_{014}yz^4 + a_{320}x^3y^2 + a_{230}x^2y^3 + a_{302}x^3z^2 + a_{203}x^2z^3 + a_{032}y^3z^2 + a_{023}y^2z^3 + \\
& a_{221}x^2y^2z + a_{122}xy^2z^2 + a_{212}x^2yz^2 + a_{113}xyz^3 + a_{311}x^3yz + a_{131}xy^3z,
\end{aligned}$$

onde  $a_{ijk}$  é o coeficiente do monômio  $x^i y^j z^k$ .

Note que, por mudanças de coordenadas, os termos  $a_{200}x^2$  e  $a_{020}y^2$  estão relacionados, logo, sem perda de generalidade, na proposição seguinte iremos supor  $a_{200} \neq 0$  para as quatro primeiras formas normais.

**Teorema 3.3.2.** A projeção  $H_{u_0}$  cujo 1-jato é  $z$  é equivalente a:

1.  $z + x^2 + \varepsilon y^2$  se, e somente se,  $a_{200} \neq 0$  e  $\overline{a_{020}} = a_{020} - \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2}{a_{200}} \neq 0$  ou  $a_{200} = a_{020} = 0$  e  $a_{110} \neq 0$ .
2.  $z + x^2 + \varepsilon y^3$  se, e somente se,  $a_{200} \neq 0$ ,  $\overline{a_{020}} = a_{020} - \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2}{a_{200}} = 0$  e  $\overline{a_{030}} = a_{030} + \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2 a_{210}}{a_{200}} - \frac{1}{2} \frac{a_{120} a_{110}}{a_{200}} - \frac{1}{8} \frac{a_{300} a_{110}^3}{a_{200}^3} \neq 0$ .
3.  $z + x^2 + \varepsilon y^4$  se, e somente se,  $a_{200} \neq 0$ ,  $\overline{a_{020}} = a_{020} - \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2}{a_{200}} = 0$ ,  $\overline{a_{030}} = a_{030} + \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2 a_{210}}{a_{200}} - \frac{1}{2} \frac{a_{120} a_{110}}{a_{200}} - \frac{1}{8} \frac{a_{300} a_{110}^3}{a_{200}^3} = 0$  e  $\overline{a_{040}} = a_{040} - \frac{1}{4 a_{200}} \left( a_{120} + \frac{3}{4} \frac{a_{300} a_{110}^2}{a_{200}^2} - \frac{a_{110} a_{210}}{a_{200}} \right)^2 + \frac{1}{16} \frac{a_{400} a_{110}^4}{a_{200}^4} - \frac{1}{2} \frac{a_{110} a_{130}}{a_{200}} + \frac{1}{4} \frac{a_{220} a_{110}^2}{a_{200}^2} - \frac{1}{8} \frac{a_{310} a_{110}^3}{a_{200}^3} \neq 0$ .
4.  $z + x^2 + \varepsilon y^5$  se, e somente se,  $a_{200} \neq 0$ ,  $\overline{a_{020}} = a_{020} - \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2}{a_{200}} = 0$ ,  $\overline{a_{030}} = a_{030} + \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2 a_{210}}{a_{200}} - \frac{1}{2} \frac{a_{120} a_{110}}{a_{200}} - \frac{1}{8} \frac{a_{300} a_{110}^3}{a_{200}^3} = 0$ ,  $\overline{a_{040}} = a_{040} - \frac{1}{4 a_{200}} \left( a_{120} + \frac{3}{4} \frac{a_{300} a_{110}^2}{a_{200}^2} - \frac{a_{110} a_{210}}{a_{200}} \right)^2 + \frac{1}{16} \frac{a_{400} a_{110}^4}{a_{200}^4} - \frac{1}{2} \frac{a_{110} a_{130}}{a_{200}} + \frac{1}{4} \frac{a_{220} a_{110}^2}{a_{200}^2} - \frac{1}{8} \frac{a_{310} a_{110}^3}{a_{200}^3} = 0$  e  $\overline{a_{050}} = a_{050} - \frac{1}{32} \frac{a_{500} a_{110}^5}{a_{200}^5} + \frac{1}{4} \frac{a_{230} a_{110}^2}{a_{200}^2} - \frac{1}{8} \frac{a_{320} a_{110}^3}{a_{200}^3} - \frac{1}{2} \frac{a_{140} a_{110}}{a_{200}} + \frac{1}{16} \frac{a_{410} a_{110}^4}{a_{200}^4} - \frac{1}{2 a_{200}} \left( \left( a_{130} - \frac{1}{2} \frac{a_{400} a_{110}^3}{a_{200}^3} - \frac{a_{220} a_{110}}{a_{200}} + \frac{3}{4} \frac{a_{310} a_{110}^2}{a_{200}^2} \right) - \frac{1}{2 a_{200}} \left( a_{120} + \frac{3}{4} \frac{a_{300} a_{110}^2}{a_{200}^2} - \frac{a_{210} a_{110}}{a_{200}} \right) \left( a_{210} - \frac{3}{2} \frac{a_{300} a_{110}}{a_{200}} \right) \left( a_{120} + \frac{3}{4} \frac{a_{300} a_{110}^2}{a_{200}^2} - \frac{a_{210} a_{110}}{a_{200}} \right) \right) \neq 0$ .
5.  $z + x^3 + y^3$  se, e somente se,  $a_{200} = a_{020} = a_{110} = 0$ ,  $3a_{030}a_{210} - a_{120}^2 \neq 0$ ,  
 $R = 81a_{030}^2 a_{300}^2 - 54a_{030} a_{120} a_{210} a_{300} + 12a_{030} a_{210}^3 + 12a_{120}^3 a_{300} - 3a_{120}^2 a_{210}^2 > 0$ ,  
 $\overline{a_{300}} = \frac{1}{8} \frac{1}{3a_{030} a_{210} - a_{120}^2} (2916a_{030}^4 a_{300}^3 - 2916a_{030}^3 a_{120} a_{210} a_{300}^2 + 432a_{030}^3 a_{210}^3 a_{300} +$   
 $648a_{030}^2 a_{120}^3 a_{300}^2 + 540a_{030}^2 a_{120}^2 a_{210} a_{300} - 144a_{030}^2 a_{120} a_{210}^4 - 288a_{030} a_{120}^4 a_{210} a_{300} +$   
 $68a_{030} a_{120}^3 a_{210}^3 + 32a_{120}^6 a_{300} - 8a_{120}^5 a_{210}^2 + 243a_{030}^3 a_{300}^2 \sqrt{R} - 162a_{030}^2 a_{120} a_{210} a_{300} \sqrt{R} +$   
 $36a_{030}^2 a_{210}^3 \sqrt{R} + 36a_{030} a_{120}^3 a_{300} \sqrt{R} - 9a_{030} a_{120}^2 a_{210}^2 \sqrt{R} + a_{030} (\sqrt{R})^3) \neq 0$  e  
 $\overline{a_{030}} = \frac{1}{27 \overline{a_{300}}} (23328a_{030}^4 a_{210}^3 a_{300}^2 + 23328a_{030}^3 a_{120}^3 a_{300}^3 - 864a_{030}^2 a_{120}^2 a_{210}^5 +$   
 $1728a_{030} a_{120}^6 a_{300}^2 + 108a_{030} a_{120}^4 a_{210}^4 + 972a_{030}^3 a_{210}^3 a_{300} \sqrt{R} + 1458a_{030}^2 a_{120}^3 a_{300}^2 \sqrt{R} -$

$$\begin{aligned}
& 324a_{030}^2a_{120}a_{210}^4\sqrt{R} + 153a_{030}a_{120}^3a_{210}^3\sqrt{R} - 9a_{030}a_{120}a_{210}(\sqrt{R})^3 - \\
& 6561a_{030}^3a_{120}a_{210}a_{300}^2\sqrt{R} + 1215a_{030}^2a_{120}^2a_{210}^2a_{300}\sqrt{R} - 648a_{030}a_{120}^4a_{210}a_{300}\sqrt{R} + \\
& 2a_{120}^3(\sqrt{R})^3 + 29160a_{030}^3a_{120}^2a_{210}^2a_{300}^2 - 15552a_{030}^2a_{120}^4a_{210}a_{300}^2 - \\
& 15552a_{030}^3a_{120}a_{210}^4a_{300} + 7344a_{030}^2a_{120}^3a_{210}^3a_{300} - 104976a_{030}^4a_{120}a_{210}a_{300}^3 - \\
& 864a_{030}a_{120}^5a_{210}^2a_{300} + 6561a_{030}^4a_{300}^3\sqrt{R} + 72a_{120}^6a_{300}\sqrt{R} - 18a_{120}^5a_{210}^2\sqrt{R} + \\
& 27a_{030}^2a_{300}(\sqrt{R})^3 + 78732a_{030}^5a_{300}^4 + 1728a_{030}^3a_{210}^6 \neq 0.
\end{aligned}$$

Os demais casos obtêm-se formas de codimensão maior que 3.

Agora analisaremos os jatos das funções tais que  $j^1H_u = 0$ . Pela Tabela 1, estas singularidades poderão ser até 4-determinadas (considerando a restrição de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão menor ou igual a três). Assim, considerando as mudanças já realizadas nos monômios de grau 1, escreveremos o  $j^4H$  da forma:

$$\begin{aligned}
j^4H = & a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{011}yz + a_{101}xz + a_{300}x^3 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 + \\
& a_{111}xyz + a_{210}x^2y + a_{120}xy^2 + a_{201}x^2z + a_{102}xz^2 + a_{012}yz^2 + a_{021}y^2z + a_{400}x^4 + a_{040}y^4 + a_{004}z^4 + \\
& a_{310}x^3y + a_{301}x^3z + a_{031}y^3z + a_{130}xy^3 + a_{013}yz^3 + a_{103}xz^3 + a_{220}x^2y^2 + a_{202}x^2z^2 + a_{022}y^2z^2 + \\
& a_{112}xyz^2 + a_{121}xy^2z + a_{211}x^2yz,
\end{aligned}$$

onde  $a_{ijk}$  é o coeficiente do monômio  $x^i y^j z^k$ .

Note que, por mudanças de coordenadas, os termos  $a_{200}x^2$  e  $a_{020}y^2$  estão relacionados, logo, sem perda de generalidade, na proposição seguinte iremos supor  $a_{020} \neq 0$  em alguns casos.

**Teorema 3.3.3.** A projeção  $H_{u_0}$  cujo 1-jato é nulo é equivalente a:

1.  $\mathcal{B}_2$ :  $\varepsilon_1x^2 + y^2 + \varepsilon_2z^2$  se, e somente se,  $a_{020} \neq 0$ ,  $\overline{a_{200}} = a_{200} - \frac{1}{4}\frac{a_{110}^2}{a_{020}} \neq 0$  e  $\overline{a_{002}} = \frac{4a_{020}a_{200}a_{002} - a_{020}a_{101}^2 - a_{002}a_{110}^2 + a_{110}a_{101}a_{011} - a_{200}a_{011}^2}{4a_{020}a_{200} - a_{110}^2} \neq 0$  ou  $a_{020} = a_{200} = 0$ ,  $a_{110} \neq 0$  e  $\overline{a_{002}} = a_{002} + \frac{2}{a_{110}}\left(\frac{1}{2}a_{101} - \frac{1}{4}a_{011}\right)^2 - \frac{1}{8a_{110}}(2a_{101} + a_{011})^2 \neq 0$ .
2.  $\mathcal{B}_3$ :  $\varepsilon_1x^2 + y^2 + \varepsilon_2z^3$  se, e somente se,  $a_{020} \neq 0$ ,  $\overline{a_{200}} = a_{200} - \frac{1}{4}\frac{a_{110}^2}{a_{020}} \neq 0$ ,  $\overline{a_{002}} = \frac{4a_{020}a_{200}a_{002} - a_{020}a_{101}^2 - a_{002}a_{110}^2 + a_{110}a_{101}a_{011} - a_{200}a_{011}^2}{4a_{020}a_{200} - a_{110}^2} = 0$  e  $\overline{a_{003}} = \phi_1(a_{ijk}) \neq 0$  ou  $a_{020} = a_{200} = 0$ ,  $a_{110} \neq 0$ ,  $\overline{a_{002}} = a_{002} + \frac{2}{a_{110}}\left(\frac{1}{2}a_{101} - \frac{1}{4}a_{011}\right)^2 - \frac{1}{8a_{110}}(2a_{101} + a_{011})^2 = 0$  e  $\overline{a_{003}} = \frac{1}{a_{110}^3}(a_{003}a_{110}^3 - a_{110}^2a_{101}a_{012} - a_{110}^2a_{011}a_{102} + a_{110}a_{101}^2a_{021} + a_{110}a_{101}a_{011}a_{111} + a_{110}a_{011}^2a_{201} - a_{210}a_{101}a_{011}^2 - a_{120}a_{101}^2a_{011} - a_{300}a_{011}^3 - a_{030}a_{101}^3) \neq 0$ .
3.  $\mathcal{B}_4$ :  $\varepsilon_1x^2 + y^2 + \varepsilon_2z^4$  se, e somente se,  $a_{020} \neq 0$ ,  $\overline{a_{200}} = a_{200} - \frac{1}{4}\frac{a_{110}^2}{a_{020}} \neq 0$ ,  $\overline{a_{002}} = \frac{4a_{020}a_{200}a_{002} - a_{020}a_{101}^2 - a_{002}a_{110}^2 + a_{110}a_{101}a_{011} - a_{200}a_{011}^2}{4a_{020}a_{200} - a_{110}^2} = 0$ ,  $\overline{a_{003}} = \phi_1(a_{ijk}) = 0$  e  $\overline{a_{004}} = \phi_2(a_{ijk}) \neq 0$  ou  $a_{020} = a_{200} = 0$ ,  $a_{110} \neq 0$ ,  $\overline{a_{002}} = a_{002} + \frac{2}{a_{110}}\left(\frac{1}{2}a_{101} - \frac{1}{4}a_{011}\right)^2 - \frac{1}{8a_{110}}(2a_{101} + a_{011})^2 = 0$  e  $\overline{a_{003}} = \frac{1}{a_{110}^3}(a_{003}a_{110}^3 - a_{110}^2a_{101}a_{012} - a_{110}^2a_{011}a_{102} + a_{110}a_{101}^2a_{021} + a_{110}a_{101}a_{011}a_{111} + a_{110}a_{011}^2a_{201} - a_{210}a_{101}a_{011}^2 - a_{120}a_{101}^2a_{011} - a_{300}a_{011}^3 - a_{030}a_{101}^3) = 0$  e  $\overline{a_{004}} = \phi(a_{ijk}) \neq 0$ .

4.  $\mathcal{C}_3$ :  $y^2 + xz + \varepsilon x^3$  se, e somente se,  $a_{020} \neq 0$ ,  $\overline{a_{200}} = a_{200} - \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2}{a_{020}} = 0$ ,  $\overline{a_{101}} = a_{101} - \frac{1}{2} \frac{a_{011}a_{110}}{a_{020}} \neq 0$  e  $\overline{a_{300}} = a_{300} - \frac{1}{2} \frac{a_{210}a_{110}}{a_{020}} + \frac{1}{4} \frac{a_{120}a_{110}^2}{a_{020}^2} - \frac{1}{8} \frac{a_{030}a_{110}^3}{a_{020}^3} \neq 0$ .
5.  $\mathcal{C}_4$ :  $y^2 + xz + \varepsilon x^4$  se, e somente se,  $a_{020} \neq 0$ ,  $\overline{a_{200}} = a_{200} - \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2}{a_{020}} = 0$ ,  $\overline{a_{101}} = a_{101} - \frac{1}{2} \frac{a_{011}a_{110}}{a_{020}} \neq 0$  e  $\overline{a_{300}} = a_{300} - \frac{1}{2} \frac{a_{210}a_{110}}{a_{020}} + \frac{1}{4} \frac{a_{120}a_{110}^2}{a_{020}^2} - \frac{1}{8} \frac{a_{030}a_{110}^3}{a_{020}^3} = 0$  e  $\overline{a_{400}} = a_{400} - \frac{1}{2} \frac{a_{310}a_{110}}{a_{020}} - \frac{1}{8} \frac{a_{130}a_{110}^3}{a_{020}^3} + \frac{1}{4} \frac{a_{220}a_{110}^2}{a_{020}^2} + \frac{1}{16} \frac{a_{040}a_{110}^4}{a_{020}^4} - \frac{1}{4a_{020}} \left( a_{210} - \frac{a_{120}a_{110}}{a_{020}} + \frac{3}{4} \frac{a_{030}a_{110}^2}{a_{020}^2} \right)^2 \neq 0$ .
6.  $\mathcal{F}_4$ :  $y^2 + \varepsilon z^2 + x^3$  se, e somente se,  $a_{020} \neq 0$ ,  $\overline{a_{200}} = a_{200} - \frac{1}{4} \frac{a_{110}^2}{a_{020}} = 0$ ,  $\overline{a_{101}} = a_{101} - \frac{1}{2} \frac{a_{011}a_{110}}{a_{020}} = 0$ ,  $\overline{a_{002}} = a_{002} - \frac{1}{4} \frac{a_{011}^2}{a_{020}} \neq 0$  e  $\overline{a_{300}} = a_{300} - \frac{1}{2} \frac{a_{210}a_{110}}{a_{020}} + \frac{1}{4} \frac{a_{120}a_{110}^2}{a_{020}^2} - \frac{1}{8} \frac{a_{030}a_{110}^3}{a_{020}^3} \neq 0$ .

onde as funções  $\phi_1(a_{ijk})$ ,  $\phi_2(a_{ijk})$  e  $\varphi(a_{ijk})$  são:

$$\begin{aligned} \phi_1(a_{ijk}) = & \frac{1}{(a_{110}^2 - 4a_{020}a_{200})^3} (4a_{110}^2 a_{120} a_{200} a_{101} a_{011}^2 + 6a_{110}^2 a_{300} a_{020} a_{101} a_{011}^2 + \\ & 8a_{110}^3 a_{200} a_{020} a_{101} a_{012} + 8a_{110}^3 a_{200} a_{020} a_{011} a_{102} - 4a_{110}^3 a_{200} a_{101} a_{011} a_{021} \\ & - 4a_{110}^3 a_{020} a_{101} a_{011} a_{201} + 4a_{110}^2 a_{210} a_{020} a_{101}^2 a_{011} + a_{110}^6 a_{003} - 8a_{110} a_{210} a_{200} a_{020} a_{101} a_{011}^2 - \\ & 8a_{110} a_{120} a_{200} a_{020} a_{101}^2 a_{011} + 16a_{110} a_{200}^2 a_{020} a_{101} a_{011} a_{021} + 16a_{110} a_{200} a_{020}^2 a_{101} a_{011} a_{201} - \\ & 16a_{110}^2 a_{200}^2 a_{020} a_{011} a_{012} - 16a_{110}^2 a_{200} a_{020}^2 a_{101} a_{102} - 4a_{110}^2 a_{200} a_{020} a_{101}^2 a_{021} - \\ & 4a_{110}^2 a_{200} a_{020} a_{011}^2 a_{201} + 6a_{110}^2 a_{200} a_{030} a_{101}^2 a_{011} - 12a_{110} a_{300} a_{020}^2 a_{101}^2 a_{011} - \\ & 16a_{110} a_{200}^2 a_{020}^2 a_{101} a_{012} - 16a_{110} a_{200}^2 a_{020}^2 a_{011} a_{102} + 8a_{110} a_{200}^2 a_{020}^2 a_{011}^2 a_{111} - \\ & 12a_{110} a_{200}^2 a_{030} a_{101} a_{011}^2 + 8a_{110} a_{200} a_{020}^2 a_{101}^2 a_{111} + 8a_{210} a_{200} a_{020}^2 a_{101}^2 a_{011} + \\ & 8a_{120} a_{200} a_{020} a_{101} a_{011}^2 - 16a_{200}^2 a_{020}^2 a_{101} a_{011} a_{111} - a_{110}^5 a_{101} a_{012} - a_{110}^5 a_{011} a_{102} + a_{110}^4 a_{101}^2 a_{021} + \\ & a_{110}^4 a_{011}^2 a_{201} - a_{110}^3 a_{300} a_{011}^3 - a_{110}^3 a_{030} a_{101}^3 + 8a_{300} a_{020}^3 a_{101}^3 - 64a_{200}^3 a_{020}^3 a_{003} + 8a_{200}^3 a_{030} a_{011}^3 - \\ & 12a_{110}^4 a_{200} a_{020} a_{003} + 2a_{110}^4 a_{200} a_{011} a_{012} + 2a_{110}^4 a_{020} a_{101} a_{102} + a_{110}^4 a_{101} a_{011} a_{111} - \\ & a_{110}^3 a_{210} a_{101} a_{011}^2 - a_{110}^3 a_{120} a_{101}^2 a_{011} - 2a_{110}^3 a_{200} a_{011}^2 a_{111} - 2a_{110}^3 a_{020} a_{101}^2 a_{111} + \\ & 2a_{110}^2 a_{210} a_{200} a_{011}^3 + 2a_{110}^2 a_{120} a_{020} a_{101}^3 + 48a_{110}^2 a_{200}^2 a_{020}^2 a_{003} + 4a_{110}^2 a_{200}^2 a_{011}^2 a_{021} + \\ & 4a_{110}^2 a_{020}^2 a_{101}^2 a_{201} - 4a_{110} a_{210} a_{020}^2 a_{101}^3 - 4a_{110} a_{120} a_{200}^2 a_{011}^3 + 32a_{200}^2 a_{020}^2 a_{011} a_{012} - \\ & 16a_{200}^3 a_{020} a_{011}^2 a_{021} + 32a_{200}^2 a_{020}^3 a_{101} a_{102} - 16a_{200}^3 a_{020}^2 a_{101}^2 a_{201}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(a_{ijk}) = & \frac{1}{(4a_{020}a_{200} - a_{110}^2)^5} (-a_{011}^2 a_{101}^2 a_{110}^6 a_{220} - 16a_{021}^2 a_{011}^2 a_{200}^3 a_{110}^4 - \\ & 4a_{021}^2 a_{101}^2 a_{200} a_{110}^6 + 2a_{021} a_{111} a_{101}^2 a_{110}^7 - 2a_{021} a_{101}^3 a_{110}^6 a_{120} + a_{111}^2 a_{011} a_{101} a_{110}^7 - \\ & 3a_{111} a_{011}^3 a_{110}^6 a_{300} - 3a_{111} a_{101}^3 a_{110}^6 a_{030} - 32a_{011}^4 a_{200}^3 a_{110}^2 a_{120} - 24a_{011} a_{101}^3 a_{110}^4 a_{210} a_{120} a_{020} + \\ & 96a_{011} a_{101}^3 a_{110}^3 a_{300} a_{120} a_{020}^2 - 240a_{011} a_{101}^3 a_{110}^2 a_{300} a_{210} a_{020}^3 - 256a_{012} a_{021} a_{101} a_{200}^4 a_{110} a_{020}^3 - \\ & 48a_{012} a_{111} a_{011} a_{200}^2 a_{110}^5 a_{020} - 96a_{012} a_{011}^2 a_{200}^3 a_{110}^3 a_{120} a_{020} - 256a_{012} a_{011} a_{101} a_{200}^4 a_{120} a_{020}^3 - \\ & 96a_{012} a_{101}^2 a_{200}^3 a_{110}^2 a_{030} a_{020}^2 + 128a_{012} a_{101}^2 a_{200}^3 a_{110} a_{120} a_{020}^3 + 256a_{021}^2 a_{011} a_{101} a_{200}^4 a_{110} a_{020}^2 - \\ & 256a_{021} a_{111} a_{011} a_{101} a_{200}^4 a_{020}^3 + 128a_{021} a_{111} a_{101}^2 a_{200}^3 a_{110} a_{020}^3 + 256a_{021} a_{011}^2 a_{101} a_{200}^4 a_{120} a_{020}^2 + \\ & 128a_{021} a_{011} a_{101}^2 a_{200}^3 a_{210} a_{020}^3 - 48a_{021} a_{101}^3 a_{200}^3 a_{110}^2 a_{030} a_{020} + 192a_{012} a_{021} a_{101} a_{200}^3 a_{110}^2 a_{020}^2 - \\ & 48a_{012} a_{021} a_{101} a_{200}^2 a_{110}^5 a_{020} - 256a_{012} a_{111} a_{011} a_{200}^4 a_{110} a_{020}^3 + 192a_{012} a_{111} a_{011} a_{200}^3 a_{110}^2 a_{020}^2 - \\ & 128a_{012} a_{111} a_{101} a_{200}^3 a_{110}^2 a_{020}^3 + 8a_{012} a_{111} a_{101} a_{200} a_{110}^6 a_{020} + 192a_{012} a_{011}^2 a_{200}^4 a_{110}^2 a_{030} a_{020} + \\ & 192a_{012} a_{011}^2 a_{200}^4 a_{110} a_{120} a_{020}^2 - 96a_{012} a_{011}^3 a_{200}^3 a_{110}^2 a_{210} a_{020}^2 + 48a_{012} a_{011}^2 a_{200}^4 a_{110}^2 a_{210} a_{020} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 48a_{012}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 - 24a_{012}a_{011}^2a_{200}a_{110}^5a_{300}a_{020} - 12a_{012}a_{011}a_{101}a_{110}^6a_{300}a_{020} + \\
& 48a_{012}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{030}a_{020} - 48a_{012}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{120}a_{020}^2 + 192a_{012}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{300}a_{020}^4 + \\
& 24a_{012}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{210}a_{020}^2 - 96a_{012}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 - 128a_{021}^2a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020} + \\
& 256a_{021}a_{111}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020} - 128a_{021}a_{111}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{020} + 24a_{111}a_{011}^2a_{101}a_{110}^5a_{300}a_{020} + \\
& 192a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{300}a_{020}^4 + 16a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^5a_{210}a_{020} + 16a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{020}^2 + \\
& 192a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 + 192a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{030}a_{020} - \\
& 144a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^2a_{300}a_{030}a_{020} - 176a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{120}a_{020} + \\
& 96a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{120}a_{020} - 96a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{120}a_{020} - \\
& 144a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^2a_{300}a_{210}a_{020}^2 - 240a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{030}a_{020} + \\
& 144a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{300}a_{030}a_{020}^2 + 272a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{120}a_{020}^2 - \\
& 16a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{120}a_{020} + 160a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 + \\
& 256a_{201}a_{021}a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020} - 64a_{201}a_{021}a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020} - \\
& 16a_{201}a_{021}a_{011}^3a_{101}a_{200}^5a_{110}^3a_{020} - 64a_{201}a_{111}a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^3 + 32a_{011}^3a_{101}^3a_{110}^3a_{400}a_{020}^3 + \\
& 4a_{101}^4a_{200}^4a_{110}^4a_{040}a_{020} - 8a_{101}^4a_{200}^3a_{110}^3a_{130}a_{020}^2 + 16a_{101}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{220}a_{020}^3 - \\
& 32a_{101}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{310}a_{020}^4 - 64a_{201}^2a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{020}^3 + 32a_{201}^2a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020}^2 + \\
& 16a_{201}^2a_{011}^2a_{101}a_{110}^5a_{020}^2 + 128a_{201}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020} + 4a_{201}a_{102}a_{011}^7a_{110}^4a_{020} - \\
& 8a_{012}a_{021}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^6 - 12a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^4a_{130} - 6a_{031}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^6 + \\
& 4a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^5a_{220} - 24a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{040} + 6a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^5a_{130} - \\
& 16a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{120}^2 + 9a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^5a_{300}a_{030} + 5a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^5a_{210}a_{120} + \\
& 16a_{021}a_{111}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^5 - 96a_{021}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{030} + 48a_{021}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{120} - \\
& 24a_{021}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{210} + 12a_{021}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^5a_{300} - 6a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{110}^6a_{300} - \\
& 4a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^6a_{210} + 12a_{021}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^5a_{030} - 20a_{111}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{120} + \\
& 8a_{111}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^5a_{210} + 8a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^5a_{040} + 48a_{111}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{030} + \\
& 288a_{011}^3a_{101}^4a_{200}^4a_{110}^2a_{030} - 216a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{030}^2 + \\
& 72a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{030} - 4a_{201}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^6a_{120} - 6a_{201}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^6a_{030} + \\
& 4a_{102}a_{021}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^7 + 12a_{102}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^5a_{030} - 4a_{102}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^6a_{120} + \\
& 2a_{102}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^7a_{120} + 12a_{031}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^5 + 4a_{022}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^7 - \\
& 4a_{121}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^6 + 32a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{040} - 8a_{201}a_{021}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^6 + \\
& 4a_{201}a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^7 - 24a_{201}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{030} + 8a_{201}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^5a_{120} + \\
& 6a_{011}^3a_{101}^2a_{110}^5a_{210}a_{030} - 6a_{012}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^6a_{210} + 4a_{012}a_{021}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^7 + \\
& 4a_{012}a_{111}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^7 - 24a_{012}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{030} + 12a_{012}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^5a_{120} + \\
& 2a_{012}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^7a_{210} - 6a_{012}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^6a_{030} + 16a_{021}^2a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^5 - \\
& 3a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^6a_{210} - 3a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^6a_{120} + 144a_{011}^4a_{200}^4a_{110}^4a_{120}a_{030} - \\
& 72a_{011}^4a_{200}^4a_{110}^4a_{210}a_{030} + 36a_{011}^4a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{030} + 28a_{011}^4a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{120} - \\
& 12a_{011}^4a_{200}^4a_{110}^4a_{300}a_{120} + 40a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{120}^2 + 6a_{011}^3a_{101}^2a_{110}^5a_{300}a_{120} + \\
& 72a_{011}^3a_{101}^2a_{110}^3a_{300}^2a_{020} - 64a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{020}^3 - 16a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^4a_{210}a_{020} - \\
& 216a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^2a_{300}^2a_{020}^3 + 40a_{011}^3a_{101}^3a_{110}^2a_{210}^2a_{020} + 288a_{011}^3a_{101}^3a_{110}^2a_{300}^2a_{020}^4 - \\
& 12a_{101}^4a_{110}^4a_{210}a_{030}a_{020} + 36a_{101}^4a_{110}^3a_{300}a_{030}a_{020} + 28a_{101}^4a_{110}^3a_{210}a_{120}a_{020} - \\
& 72a_{101}^4a_{110}^2a_{300}a_{120}a_{020}^3 + 144a_{101}^4a_{110}^4a_{300}a_{210}a_{020}^4 + 512a_{012}a_{021}a_{011}^5a_{200}^3a_{020} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 256a_{012}a_{111}a_{101}a_{200}^4a_{020}^4 - 384a_{012}a_{011}^2a_{200}^5a_{030}a_{020}^2 - 128a_{012}a_{101}^2a_{200}^3a_{210}a_{020}^4 - \\
& 64a_{021}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + 384a_{021}a_{011}^3a_{200}^5a_{030}a_{020} - 16a_{111}^2a_{011}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + \\
& 64a_{111}a_{101}^3a_{200}^2a_{210}a_{020}^4 - 64a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{120}^2a_{020}^2 - 16a_{101}^4a_{200}a_{110}^2a_{120}^2a_{020}^2 + \\
& 64a_{031}a_{011}^3a_{200}^4a_{110}^2a_{020} + 512a_{013}a_{011}a_{200}^4a_{110}^3a_{020} - 192a_{013}a_{011}a_{200}^3a_{110}^4a_{020}^2 + \\
& 32a_{013}a_{011}a_{200}^2a_{110}^6a_{020} - 192a_{022}a_{011}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{020}^2 - 160a_{004}a_{200}^2a_{110}^6a_{020}^2 + \\
& 20a_{004}a_{200}a_{110}^8a_{020} - 128a_{031}a_{011}^3a_{200}^5a_{020}^2 - 512a_{013}a_{011}a_{200}^5a_{020}^4 + 256a_{022}a_{011}^2a_{200}^5a_{020}^3 - \\
& 512a_{103}a_{101}a_{200}^4a_{020}^5 - 2a_{103}a_{101}a_{110}^8a_{020} + 256a_{202}a_{101}^2a_{200}^3a_{020}^5 - 4a_{202}a_{101}^2a_{110}^6a_{020}^2 + \\
& 2a_{112}a_{101}^2a_{110}^7a_{020} - 128a_{301}a_{101}^3a_{200}^3a_{020}^5 - \\
& 8a_{301}a_{101}^3a_{110}^4a_{020}^3 - 2a_{121}a_{101}^3a_{110}^6a_{020} + 4a_{211}a_{101}^3a_{110}^5a_{020}^2 + 64a_{101}^4a_{200}a_{400}a_{020}^5 + \\
& 2a_{101}^4a_{110}^5a_{130}a_{020} - 4a_{101}^4a_{110}^4a_{220}a_{020}^2 + 8a_{101}^4a_{110}^3a_{310}a_{020}^3 - 16a_{101}^4a_{110}^2a_{400}a_{020}^4 - \\
& 5a_{011}^4a_{200}a_{110}^4a_{210}^2 + 3a_{011}^4a_{110}^5a_{300}a_{210} + 2a_{011}^3a_{101}a_{110}^5a_{210}^2 + 2a_{011}^3a_{101}^2a_{110}^5a_{120}^2 + \\
& 3a_{101}^4a_{110}^5a_{120}a_{030} - 3a_{111}^4a_{011}^2a_{200}a_{110}^6 - 9a_{101}^4a_{200}a_{110}^4a_{030} - 16a_{011}^4a_{200}^2a_{110}^4a_{040} - \\
& 8a_{031}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^4 - 2a_{013}a_{011}a_{200}a_{110}^8 - 4a_{022}a_{011}^2a_{200}^6a_{110} + 4a_{121}a_{011}^3a_{200}^5a_{110} - \\
& 2a_{201}a_{012}a_{011}a_{110}^8 + 2a_{201}a_{111}a_{011}^2a_{110}^7 - 2a_{201}a_{011}^3a_{110}^6a_{210} - 2a_{102}a_{021}a_{101}a_{110}^8 - \\
& a_{102}a_{111}a_{011}a_{110}^8 + a_{102}a_{011}^2a_{110}^7a_{210} + 3a_{102}a_{101}^2a_{110}^7a_{030} - a_{012}a_{111}a_{101}a_{110}^8 + \\
& 3a_{012}a_{011}^2a_{110}^7a_{300} + a_{012}a_{101}^2a_{110}^7a_{120} + 2a_{112}a_{011}^2a_{200}a_{110}^7 - a_{112}a_{011}a_{101}a_{110}^8 + \\
& 8a_{011}^4a_{200}^3a_{110}^3a_{130} - 4a_{201}^2a_{011}^2a_{110}^6a_{020} - 256a_{201}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{020}^5 - 16a_{201}^2a_{101}^2a_{110}^4a_{020}^3 + \\
& 256a_{102}^2a_{200}^3a_{110}^4a_{020} - 96a_{102}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020}^3 + 16a_{102}^2a_{200}a_{110}^6a_{020}^2 + \\
& 256a_{012}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{020}^3 + a_{121}a_{011}a_{101}^2a_{110}^7 - 2a_{211}a_{011}^3a_{200}^6a_{110} + a_{211}a_{011}^2a_{101}a_{110}^7 - \\
& 4a_{011}^4a_{200}^4a_{110}^2a_{220} - a_{004}a_{110}^{10} - 240a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{120}a_{030} + 96a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{210}a_{030} - \\
& 36a_{011}^3a_{101}a_{200}^4a_{110}^3a_{300}a_{030} - 24a_{011}^3a_{101}a_{200}^4a_{110}^2a_{210}a_{120} + \\
& 144a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{120}a_{030} + 192a_{102}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^4 - \\
& 24a_{102}a_{101}^2a_{200}^5a_{110}^3a_{030}a_{020} + 48a_{102}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^3a_{120}a_{020}^2 - 96a_{102}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{020}^3 + \\
& 192a_{102}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^4 - 384a_{012}a_{021}a_{011}a_{200}^4a_{110}^2a_{020}^2 + 96a_{012}a_{021}a_{011}a_{200}^3a_{110}^4a_{020} + \\
& 32a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{130}a_{020} - 96a_{031}a_{011}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + 48a_{031}a_{011}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{020} - \\
& 256a_{202}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^4a_{020} + 192a_{202}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^2 - 48a_{202}a_{011}a_{101}a_{200}^5a_{110}^2a_{020} + \\
& 128a_{121}a_{011}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{020} - 48a_{121}a_{011}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^2 + 128a_{211}a_{011}^2a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{020} - \\
& 48a_{211}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + 24a_{211}a_{011}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{020} - 64a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{220}a_{020}^2 + \\
& 96a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{040}a_{020} - 96a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{130}a_{020}^2 + 48a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{220}a_{020}^2 - \\
& 12a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{220}a_{020} - 96a_{301}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{020} + 48a_{301}a_{011}^2a_{101}a_{200}^4a_{110}^2a_{020} + \\
& 192a_{301}a_{011}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020} - 96a_{301}a_{011}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{020} + 48a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{310}a_{020} - \\
& 136a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}^2a_{020} - 42a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^4a_{300}a_{120}a_{020} - 32a_{021}a_{111}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020} - \\
& 8a_{021}a_{111}a_{101}^2a_{200}^5a_{110}^2a_{020} + 2a_{011}^2a_{200}^5a_{110}^3a_{310} - a_{011}^3a_{101}a_{110}^6a_{310} - a_{011}a_{101}^3a_{110}^6a_{130} - \\
& 96a_{012}^2a_{200}^3a_{110}^4a_{020}^2 + 16a_{012}^2a_{200}^2a_{110}^6a_{020} - 64a_{111}^2a_{011}^2a_{200}^4a_{020}^3 - 3a_{111}^2a_{101}^2a_{110}^6a_{020} - \\
& 16a_{011}^4a_{200}^4a_{120}a_{020} - 9a_{011}^4a_{110}^2a_{300}a_{020} - 5a_{101}^4a_{110}^4a_{120}a_{020} - 32a_{101}^4a_{110}^2a_{210}^2a_{020}^3 - \\
& 256a_{021}^2a_{011}^2a_{200}^5a_{020}^2 - 64a_{111}^2a_{101}^2a_{200}^4a_{020}^2 - 16a_{101}^4a_{200}^2a_{210}^2a_{020}^4 + 64a_{011}^4a_{200}^5a_{040}a_{020} - \\
& 1280a_{004}^4a_{200}^2a_{110}^4a_{020}^4 + 640a_{004}^3a_{200}^4a_{110}^3a_{020}^3 + 48a_{102}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{030}a_{020}^2 - \\
& 96a_{102}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{120}a_{020}^3 - 256a_{022}a_{011}a_{101}a_{200}^4a_{110}^3a_{020} + 192a_{022}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^2 - \\
& 48a_{022}a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^5a_{020} + 24a_{121}a_{011}^2a_{101}a_{200}^4a_{110}^2a_{020} - 128a_{112}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8a_{112}a_{011}a_{101}a_{200}a_{110}^6a_{020} - 128a_{011}^3a_{101}a_{200}^4a_{110}a_{040}a_{020} + 96a_{201}a_{102}a_{101}a_{200}a_{110}^4a_{020}^3 + \\
& 128a_{201}a_{012}a_{011}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 - 96a_{201}a_{012}a_{011}a_{200}^4a_{110}^4a_{020}^2 + 24a_{201}a_{012}a_{011}a_{200}a_{110}^6a_{020} - \\
& 256a_{201}a_{012}a_{101}a_{200}^3a_{110}^4a_{020}^4 + 192a_{201}a_{012}a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^3 - 48a_{201}a_{012}a_{101}a_{200}a_{110}^5a_{020}^2 - \\
& 128a_{201}a_{021}a_{011}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + 64a_{201}a_{021}a_{011}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{020} - 128a_{201}a_{021}a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^3 + \\
& 64a_{201}a_{021}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{020}^2 + 128a_{201}a_{111}a_{011}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 - 32a_{201}a_{111}a_{011}^2a_{200}^4a_{110}^3a_{020}^2 - \\
& 8a_{201}a_{111}a_{011}^2a_{200}^5a_{110}^5a_{020} - 256a_{201}a_{111}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{020}^4 - 12a_{201}a_{111}a_{011}a_{101}a_{110}^6a_{020} + \\
& 256a_{201}a_{111}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020}^4 - 128a_{201}a_{111}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 + 96a_{201}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{030}a_{020} - \\
& 64a_{201}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{120}a_{020}^2 - 16a_{201}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{120}a_{020} + 64a_{201}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 - \\
& 8a_{201}a_{011}^3a_{200}^4a_{110}^4a_{210}a_{020} - 48a_{201}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 + 20a_{021}a_{011}a_{101}^2a_{200}^5a_{110}^5a_{120} + \\
& 144a_{011}^2a_{101}^3a_{110}^3a_{300}a_{210}a_{020}^2 + 48a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{120}a_{020} + 128a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{210}^3a_{020} - \\
& 192a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^3a_{300}a_{210}a_{020}^4 - 36a_{011}^3a_{101}^4a_{110}^4a_{300}a_{030}a_{020} + 80a_{201}a_{111}a_{011}a_{101}a_{200}^4a_{110}^4a_{020} - \\
& 192a_{201}a_{011}^2a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{030}a_{020}^2 - 48a_{201}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{030}a_{020} + \\
& 160a_{201}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{020}^2 - 256a_{201}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^3 - \\
& 192a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 - 32a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{210}a_{020} - \\
& 48a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 + 144a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{030}a_{020} + \\
& 128a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{120}a_{020} - \\
& 240a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{300}a_{120}a_{020}^2 + 288a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{300}a_{210}a_{020}^3 + \\
& 96a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{030}a_{020} - 144a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{030}a_{020}^2 - \\
& 176a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{120}a_{020}^2 + 192a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{120}a_{020}^3 + \\
& 384a_{012}a_{011}a_{101}^4a_{200}^4a_{110}^4a_{030}a_{020}^2 - 96a_{012}a_{011}a_{101}^4a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{020}^2 - \\
& 576a_{021}a_{011}^2a_{101}^4a_{200}^4a_{110}^4a_{030}a_{020} + 288a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{030}a_{020} - \\
& 256a_{021}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{120}a_{020}^2 - 192a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{030}a_{020}^2 + \\
& 288a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{120}a_{030}a_{020} - 144a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{030}a_{020} + \\
& 96a_{011}^3a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{030}a_{020}^2 + 192a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{030}a_{020} - \\
& 320a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{120}a_{020}^2 + 16a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{120}a_{020} + \\
& 176a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 - 192a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 - \\
& 40a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{210}a_{020} - 48a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 - \\
& 48a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{030}a_{020} + 176a_{111}a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{020}^2 + 48a_{022}a_{011}^3a_{200}^4a_{110}^4a_{020} + \\
& 256a_{013}a_{101}a_{200}^4a_{110}^4a_{020} - 256a_{013}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 + 96a_{013}a_{101}a_{200}^5a_{110}^5a_{020}^2 - \\
& 16a_{013}a_{101}a_{200}^7a_{110}^7a_{020} + 256a_{103}a_{011}a_{200}^4a_{110}^4a_{020} - 256a_{103}a_{011}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 + \\
& 96a_{103}a_{011}a_{200}^5a_{110}^5a_{020}^2 - 16a_{103}a_{011}a_{200}^7a_{110}^7a_{020} + 512a_{103}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^4 - \\
& 192a_{103}a_{101}a_{200}^4a_{110}^4a_{020}^3 + 32a_{103}a_{101}a_{200}^6a_{110}^6a_{020}^2 + 64a_{121}a_{011}^3a_{200}^4a_{110}^4a_{020}^2 - \\
& 32a_{121}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{020} - 128a_{121}a_{011}^2a_{101}^4a_{200}^4a_{020}^3 - 128a_{112}a_{011}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{110}^3a_{020} + \\
& 96a_{112}a_{011}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^2 + 512a_{201}a_{102}a_{101}a_{200}^3a_{020}^5 - 8a_{201}a_{102}a_{101}a_{110}^6a_{020}^2 + \\
& 4a_{201}a_{012}a_{101}a_{110}^7a_{020} - 8a_{201}a_{021}a_{101}^6a_{110}^6a_{020} + 16a_{201}a_{111}a_{101}^2a_{110}^5a_{020}^2 + \\
& 12a_{201}a_{011}^3a_{110}^5a_{300}a_{020} + 384a_{201}a_{101}^3a_{200}^3a_{300}a_{020}^5 + 12a_{201}a_{101}^3a_{110}^5a_{030}a_{020} - \\
& 24a_{201}a_{101}^3a_{110}^4a_{120}a_{020}^2 + 48a_{201}a_{101}^3a_{110}^3a_{210}a_{020}^3 - 96a_{201}a_{101}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^4 + \\
& 256a_{102}a_{012}a_{200}^4a_{110}^4a_{020} - 256a_{102}a_{012}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 + 96a_{102}a_{012}a_{200}^5a_{110}^5a_{020}^2 - \\
& 16a_{102}a_{012}a_{200}^7a_{110}^7a_{020} + 256a_{102}a_{111}a_{011}^4a_{200}^4a_{020} + 4a_{102}a_{111}a_{101}a_{110}^7a_{020} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 128a_{102}a_{011}^2a_{200}^4a_{120}a_{020}^3 - 6a_{102}a_{011}^2a_{110}^6a_{300}a_{020} - 384a_{102}a_{101}^2a_{200}^2a_{300}a_{020}^5 - \\
& 6a_{102}a_{101}^2a_{110}^6a_{120}a_{020} + 12a_{102}a_{101}^2a_{110}^5a_{210}a_{020}^2 - 24a_{102}a_{101}^2a_{110}^4a_{300}a_{020}^3 - \\
& 4a_{012}a_{101}^2a_{110}^6a_{210}a_{020} - 24a_{112}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^5a_{020} + 256a_{112}a_{011}a_{101}a_{200}^4a_{020}^4 - \\
& 32a_{011}^4a_{200}^4a_{110}a_{130}a_{020} + 64a_{011}^3a_{101}a_{200}^4a_{130}a_{020}^2 + \\
& 64a_{202}a_{011}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^3 - 48a_{202}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020}^2 + 12a_{202}a_{011}^2a_{200}a_{110}^6a_{020} + \\
& 4a_{202}a_{011}a_{101}a_{110}^7a_{020} - 192a_{202}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020}^2 + 48a_{202}a_{101}^2a_{200}a_{110}^4a_{020}^3 + \\
& 64a_{022}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^3 - 48a_{022}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020}^2 + 12a_{022}a_{101}^2a_{200}a_{110}^6a_{020} - \\
& 128a_{112}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^4a_{020} + 96a_{112}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^3 - 24a_{112}a_{101}^2a_{200}a_{110}^5a_{020}^2 - \\
& 32a_{211}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + 16a_{211}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{020} - 128a_{211}a_{011}a_{101}^2a_{200}^3a_{020}^4 - \\
& 4a_{211}a_{011}a_{101}^2a_{110}^6a_{020} + 16a_{011}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{220}a_{020} + 64a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{220}a_{020}^3 + \\
& 16a_{301}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^2 - 8a_{301}a_{011}^3a_{200}a_{110}^5a_{020} - 6a_{301}a_{011}^2a_{101}a_{110}^6a_{020} + \\
& 12a_{301}a_{011}a_{101}^2a_{110}^5a_{020}^2 + 64a_{301}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{020} + 16a_{031}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 - \\
& 8a_{031}a_{101}^3a_{200}a_{110}^5a_{020} + 12a_{012}a_{101}^2a_{110}^5a_{300}a_{020}^2 + 128a_{021}^2a_{011}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{020} + \\
& 32a_{021}^2a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{020} + 8a_{021}a_{101}^3a_{110}^5a_{210}a_{020} - 24a_{021}a_{101}^3a_{110}^4a_{300}a_{020}^2 + \\
& 20a_{111}^2a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{020} - 16a_{111}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^3 + 20a_{111}^2a_{101}^2a_{200}a_{110}^4a_{020}^2 + \\
& 64a_{111}a_{011}^3a_{200}^4a_{120}a_{020}^2 + 8a_{111}a_{011}^3a_{101}^5a_{120}a_{020} - 20a_{111}a_{011}^3a_{101}^4a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 + \\
& 48a_{111}a_{101}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 - 16a_{011}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020} - 60a_{111}a_{011}a_{101}^2a_{110}^4a_{300}a_{020}^2 - \\
& 16a_{111}a_{101}^3a_{200}a_{110}^3a_{120}a_{020}^2 + 64a_{111}a_{101}^3a_{200}a_{110}^2a_{210}a_{020}^3 - \\
& 192a_{111}a_{101}^3a_{200}a_{110}a_{300}a_{020}^4 + 32a_{011}^4a_{200}^3a_{110}a_{210}a_{120}a_{020} - \\
& 24a_{011}^4a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{120}a_{020} + 24a_{011}^4a_{200}a_{110}^3a_{300}a_{210}a_{020} + 128a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{120}^2a_{020} - \\
& 64a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{210}a_{120}a_{020}^2 + 64a_{011}^3a_{101}a_{200}^2a_{110}^2a_{210}^2a_{020}^2 + 48a_{011}^3a_{101}a_{200}a_{110}^3a_{210}^2a_{020} - \\
& 36a_{011}^3a_{101}a_{110}^4a_{300}a_{210}a_{020} - 136a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{120}^2a_{020} - 96a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{300}a_{120}a_{020}^3 - \\
& 42a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{210}a_{030} - 36a_{011}a_{101}^3a_{200}^4a_{110}^2a_{120}a_{030} - 8a_{012}a_{011}a_{101}a_{200}a_{110}^6a_{120} - \\
& 60a_{111}a_{011}^2a_{101}a_{200}^4a_{110}^4a_{030} + 16a_{111}a_{011}^2a_{101}a_{200}a_{110}^5a_{120} + 24a_{111}a_{011}a_{101}^2a_{200}a_{110}^5a_{030} + \\
& 24a_{012}a_{011}a_{101}a_{200}^5a_{110}^4a_{030} - 12a_{021}a_{111}a_{011}a_{101}a_{200}a_{110}^6 + 144a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{030} - \\
& 56a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}^4a_{110}^4a_{120} + 20a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}a_{110}^5a_{210} - 72a_{021}a_{011}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{030} + \\
& 24a_{201}a_{011}^2a_{101}a_{200}a_{110}^5a_{030} - 12a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}a_{110}^6a_{030} - 32a_{121}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^3 + \\
& 16a_{121}a_{101}^3a_{200}^4a_{110}^2a_{020}^2 + 64a_{211}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{020} - \\
& 32a_{211}a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 - 8a_{011}^4a_{200}^3a_{110}^3a_{310}a_{020} + 6a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^5a_{310}a_{020} + \\
& 64a_{011}a_{101}^3a_{200}^2a_{310}a_{020}^4 + 4a_{011}a_{101}^3a_{110}^5a_{220}a_{020} - 12a_{011}a_{101}^3a_{110}^4a_{310}a_{020}^2 + \\
& 4a_{011}^4a_{200}^4a_{110}^4a_{400}a_{020} + 8a_{011}^3a_{101}a_{110}^5a_{400}a_{020} - 24a_{011}^2a_{101}^2a_{110}^4a_{400}a_{020}^2 - \\
& 320a_{111}a_{011}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^3 - 40a_{111}a_{011}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{120}a_{020} - \\
& 192a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 - 192a_{012}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{030}a_{020} + \\
& 256a_{012}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{210}a_{020}^3 + 48a_{012}a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^4a_{120}a_{020} - \\
& 192a_{012}a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 + 96a_{012}a_{011}a_{101}a_{200}^4a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 - \\
& 64a_{021}a_{111}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + 80a_{021}a_{111}a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^4a_{020} + \\
& 160a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{120}a_{020} - 256a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 - \\
& 16a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{210}a_{020} + 192a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 - \\
& 24a_{021}a_{011}^2a_{101}a_{200}^4a_{110}^4a_{300}a_{020} - 32a_{201}a_{011}^2a_{101}a_{200}^4a_{110}^4a_{120}a_{020} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16a_{201}a_{011}^2a_{101}a_{200}a_{110}^3a_{210}a_{020}^2 + 288a_{201}a_{011}^2a_{101}a_{200}a_{110}^2a_{300}a_{020}^3 + \\
& 192a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{030}a_{020}^2 - \\
& 256a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}a_{120}a_{020}^3 - 24a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}a_{030}a_{020} - \\
& 16a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}a_{120}a_{020}^2 + 160a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^3 - \\
& 576a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}a_{110}a_{300}a_{020}^4 - 192a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^2a_{030}a_{020}^2 + \\
& 256a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}a_{120}a_{020}^3 + 96a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^4a_{030}a_{020} - \\
& 96a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^3a_{120}a_{020}^2 + 384a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}a_{300}a_{020}^4 + \\
& 48a_{102}a_{011}a_{101}a_{200}^4a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 - 192a_{021}a_{011}^3a_{200}^4a_{110}a_{120}a_{020} + 96a_{021}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{210}a_{020} - \\
& 48a_{021}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020} + 24a_{021}a_{011}^2a_{101}^5a_{300}a_{020} - \\
& 8a_{021}a_{101}^3a_{200}^4a_{110}^4a_{120}a_{020} - 16a_{021}a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 + 96a_{021}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 + \\
& 192a_{111}^2a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 - 80a_{111}^2a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^2a_{020}^2 + 4a_{111}^2a_{011}a_{101}a_{200}^5a_{110}^4a_{020} - \\
& 192a_{111}a_{011}^3a_{200}^4a_{110}a_{030}a_{020} + 64a_{111}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{020} - 64a_{111}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 - \\
& 16a_{111}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{210}a_{020} + 48a_{111}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 + 128a_{111}a_{011}^2a_{101}^3a_{200}^2a_{210}a_{020}^3 - \\
& 8a_{011}^3a_{101}a_{200}^4a_{110}^3a_{310}a_{020} - 96a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{310}a_{020}^3 - 32a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^4a_{040}a_{020} + \\
& 48a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{130}a_{020}^2 - 64a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{220}a_{020}^3 - 8a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^4a_{130}a_{020} + \\
& 32a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{103}a_{020}^3 - 32a_{011}^3a_{101}a_{200}^3a_{110}^4a_{400}a_{020}^2 + 96a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{400}a_{020}^3 - \\
& 128a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^4a_{400}a_{020}^4 + 256a_{201}^2a_{011}a_{101}a_{200}^2a_{110}^4a_{020} - 128a_{201}^2a_{011}a_{101}a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^3 - \\
& 256a_{201}a_{102}a_{011}a_{200}^3a_{110}^4a_{020} + 192a_{201}a_{102}a_{011}a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^3 - 48a_{201}a_{102}a_{011}a_{200}^2a_{110}^2a_{020}^2 - \\
& 384a_{201}a_{102}a_{011}a_{200}^2a_{110}^2a_{020}^4 + 64a_{021}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{020}^2 - 64a_{021}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^3 + \\
& 192a_{111}a_{011}^2a_{101}^4a_{200}^2a_{030}a_{020}^2 + 128a_{111}a_{011}^2a_{101}^3a_{200}^2a_{120}a_{020}^3 + 48a_{111}a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{030}a_{020}^2 - \\
& 64a_{111}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{020}^3 - 192a_{011}^3a_{101}^4a_{200}^2a_{120}a_{030}a_{020} - a_{012}^2a_{200}^8a_{110}^8 - 144a_{011}^4a_{200}^5a_{030}^2 + \\
& a_{013}a_{101}a_{110}^9 + a_{103}a_{011}a_{110}^9 - a_{202}a_{011}^2a_{110}^8 - a_{022}a_{101}^2a_{110}^8 + a_{301}a_{011}^3a_{110}^7 + a_{031}a_{101}^3a_{110}^7 - \\
& a_{011}^4a_{110}^6a_{400} - a_{101}^4a_{110}^6a_{040} - 256a_{102}^2a_{200}^4a_{020}^5 - \\
& a_{102}^2a_{110}^8a_{020} - 144a_{101}^4a_{300}^5a_{020} - 256a_{012}^4a_{200}^5a_{020}^4 + \\
& 1024a_{004}a_{200}^5a_{020}^5 + a_{102}a_{012}a_{110}^9 - 96a_{011}^2a_{101}^2a_{200}^3a_{210}a_{030}a_{020}^2 + 64a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{020}^2 - \\
& 64a_{011}^3a_{101}^2a_{200}^2a_{210}a_{120}a_{020}^3 + 24a_{101}^4a_{200}^3a_{110}^2a_{120}a_{030}a_{020} - 24a_{101}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{030}a_{020}^2 + \\
& 32a_{101}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{120}a_{020}^3 + 192a_{031}a_{011}^2a_{101}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{020}^2 - 96a_{031}a_{011}^2a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 + \\
& 128a_{201}a_{011}^2a_{101}^3a_{200}^2a_{120}a_{020}^3 + 20a_{201}a_{011}^2a_{101}^5a_{210}a_{020} - 72a_{201}a_{011}^4a_{101}^4a_{300}a_{020}^2 + \\
& 256a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^2a_{210}a_{020}^4 + 20a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^5a_{120}a_{020} - 56a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 + \\
& 144a_{201}a_{011}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 - 48a_{201}a_{101}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{030}a_{020}^2 + 96a_{201}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{120}a_{020}^3 - \\
& 192a_{201}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^4 - 256a_{102}a_{021}a_{011}^4a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^2 + 192a_{102}a_{021}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{020}^2 - \\
& 48a_{102}a_{021}a_{011}^2a_{200}^5a_{110}^4a_{020} + 128a_{102}a_{021}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^2 - 96a_{102}a_{021}a_{101}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{020}^2 + \\
& 24a_{102}a_{021}a_{101}a_{200}^6a_{110}^4a_{020} - 128a_{102}a_{111}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^3a_{020}^2 + 8a_{102}a_{111}a_{011}a_{200}^6a_{110}^4a_{020} - \\
& 256a_{102}a_{111}a_{101}^3a_{200}^2a_{110}^4a_{020} + 192a_{102}a_{111}a_{101}^2a_{200}^3a_{110}^3a_{020}^2 - 48a_{102}a_{111}a_{101}a_{200}^5a_{110}^2a_{020}^2 + \\
& 192a_{102}a_{011}^4a_{200}^2a_{110}^2a_{030}a_{020}^2 - 96a_{102}a_{011}^3a_{200}^3a_{110}^2a_{030}a_{020} + 128a_{102}a_{011}^3a_{200}^2a_{110}^2a_{210}a_{020}^3 + \\
& 24a_{102}a_{011}^2a_{200}^4a_{110}^2a_{120}a_{020} - 48a_{102}a_{011}^2a_{200}^3a_{110}^2a_{210}a_{020}^2 - 96a_{102}a_{011}^2a_{200}^2a_{110}^3a_{300}a_{020}^3 + \\
& 48a_{102}a_{011}^2a_{200}^4a_{110}^3a_{300}a_{020}^2 - 256a_{102}a_{011}a_{101}^3a_{200}^2a_{210}a_{020}^4 - 8a_{102}a_{011}a_{101}^6a_{110}^2a_{210}a_{020} + \\
& 24a_{102}a_{011}a_{101}^5a_{110}^3a_{300}a_{020}^2)
\end{aligned}$$

$$\varphi(a_{ijk}) = \frac{1}{a_{110}^5}(-a_{110}^2a_{101}^2a_{011}a_{121} - a_{110}^2a_{101}a_{011}^2a_{211} + a_{110}a_{130}a_{101}^3a_{011} +$$

$$\begin{aligned}
& a_{110}a_{220}a_{101}^2a_{011}^2 + a_{110}a_{310}a_{101}a_{011}^3 + 2a_{110}^3a_{101}a_{102}a_{021} + a_{110}^3a_{101}a_{012}a_{111} + \\
& 2a_{110}^3a_{011}a_{201}a_{012} + a_{110}^3a_{011}a_{102}a_{111} - a_{110}^2a_{210}a_{011}^2a_{102} - a_{110}^2a_{120}a_{101}^2a_{012} - \\
& 3a_{110}^2a_{300}a_{011}^2a_{012} - 3a_{110}^2a_{030}a_{101}^2a_{102} - \\
& 2a_{110}^2a_{101}^2a_{021}a_{111} - a_{110}^2a_{101}a_{011}a_{111}^2 - 2a_{110}^2a_{011}^2a_{201}a_{111} + \\
& 2a_{110}a_{210}a_{011}^3a_{201} + 2a_{110}a_{120}a_{101}^3a_{021} + 3a_{110}a_{300}a_{011}^3a_{111} + 3a_{110}a_{030}a_{101}^3a_{111} - \\
& 5a_{210}a_{120}a_{101}^2a_{011}^2 - 6a_{210}a_{030}a_{101}^3a_{011} - 6a_{120}a_{300}a_{101}a_{011}^3 - 9a_{300}a_{030}a_{101}^2a_{011}^2 + \\
& a_{110}^3a_{101}a_{011}a_{112} + a_{004}a_{110}^5 - 2a_{110}^2a_{210}a_{101}a_{011}a_{012} - 2a_{110}^2a_{120}a_{101}a_{011}a_{102} \\
& - 4a_{110}^2a_{101}a_{011}a_{201}a_{021} + 4a_{110}a_{210}a_{101}^2a_{011}a_{021} + 3a_{110}a_{210}a_{101}a_{011}^2a_{111} + \\
& 3a_{110}a_{120}a_{101}^2a_{011}a_{111} + 4a_{110}a_{120}a_{101}a_{011}^2a_{201} + 6a_{110}a_{300}a_{101}a_{011}^2a_{021} + \\
& 6a_{110}a_{030}a_{101}^2a_{011}a_{201} - a_{110}^4a_{101}a_{013} - a_{110}^4a_{011}a_{103} - a_{110}^2a_{101}^3a_{031} - \\
& a_{110}^2a_{011}^3a_{301} + a_{110}a_{400}a_{011}^4 + a_{110}a_{040}a_{101}^4 - a_{110}^4a_{102}a_{012} - 2a_{210}^2a_{101}a_{011}^3 - 3a_{210}a_{300}a_{011}^4 - \\
& 2a_{120}^2a_{101}^3a_{011} - 3a_{120}a_{030}a_{101}^4 + a_{110}^3a_{101}^2a_{022} + a_{110}^3a_{011}^2a_{202}
\end{aligned}$$

Para os demais casos obtêm-se formas de codimensão maior que 3.

*Demonstração.* A demonstração segue de mudanças de coordenadas e utilizamos o software Maple para auxiliar.  $\square$

Observe que, para as singularidades  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_3$  e  $\mathcal{B}_4$ , podemos tomar a hipersuperfície com bordo  $M$  na forma de Monge e com termos mistos de grau 2 nulos. Dessa forma, os coeficientes da proposição anterior coincidem com os coeficientes da Proposição 2.3 de (NABARRO, 2000) para as singularidades do interior  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  e  $\mathcal{A}_3$ , respectivamente.

### 3.4 A geometria proveniente do contato com hiperplanos

Seja  $M$  uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^4$  com bordo. Nesta seção analisamos os conjuntos em  $M$  onde ocorrem as singularidades genéricas da função altura. Tal estudo já foi realizado em (NABARRO, 2000) para pontos no interior e tomamos esse trabalho como referência para estudar os pontos do bordo de  $M$ .

Seguindo a construção de (NABARRO, 2000) para pontos do interior, em cada ponto  $q \in M$ , podemos escolher eixos coordenados mutuamente perpendiculares  $(x, y, z, w)$  com o eixo- $w$  na direção normal a  $M$  em  $q$ . Sejam  $q$  um ponto sobre a hipersuperfície, e  $n$  um campo vetorial normal unitário em uma vizinhança  $U$  de  $q$ . Escolha três campos vetoriais unitários  $C^\infty$ ,  $v$ ,  $u$  e  $t$  no espaço tangente a  $M$  nos pontos de  $U$ , tal que eles formem uma base positivamente orientada. Logo,  $M$  pode ser escrita, localmente, em qualquer ponto  $p$  de  $U$  na forma de Monge, como o gráfico de uma função  $w = f_p(x, y, z)$ .

Seja  $V_k$  o espaço vetorial de polinômios de  $x$ ,  $y$  e  $z$  de grau  $\geq 2$  e  $\leq k$ . A construção acima define uma aplicação  $C^\infty$

$$\begin{aligned}\theta : U &\rightarrow V_k \\ p &\mapsto j^k f_p.\end{aligned}$$

Estamos interessados em analisar as formas genéricas do bordo do conjunto parabólico em  $M$ . Para tal, vamos definir para cada tipo de singularidade da função altura um estrato  $Y$  no conjunto  $V_k$  representando este tipo de singularidade. Vamos provar a transversalidade da aplicação  $\theta$  com o estrato  $Y$  para usar o Teorema 2.2.5 e mostrar que  $\theta^{-1}(Y) \subset M$ , é uma variedade regular de codimensão igual a codimensão de  $Y$ . Para fazer isto, precisamos saber qual é o espaço tangente da imagem da aplicação Monge-Taylor.

A seguir, temos a imagem da derivada da aplicação Monge-Taylor  $\theta$  e este resultado, assim como sua demonstração, pode ser encontrado em (NABARRO, 2000) e valem também para pontos no bordo.

**Proposição 3.4.1.** Seja  $\theta : U \rightarrow V_k$  e seja  $p = (x_0, y_0, z_0, w_0) \in U$ , com  $M$  escrita localmente em  $q$  como  $w = f(x, y, z)$ . A imagem de  $d\theta(p)$  é gerada por  $v_1, v_2, v_3$  tais que:

$$\begin{aligned}v_1 = j^k \left( d\theta \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) &= j^k (f_x(x, y, z) - f_x(x, y, z)f_{xx}(0, 0, 0)f(x, y, z) - \\ &f_y(x, y, z)f(x, y, z)f_{xy}(0, 0, 0) - f_z(x, y, z)f(x, y, z)f_{xz}(0, 0, 0) - f_{xx}(0, 0, 0)x - \\ &f_{xy}(0, 0, 0)y - f_{xz}(0, 0, 0)z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_2 = j^k \left( d\theta \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) &= j^k (f_y(x, y, z) - f_x(x, y, z)f_{xy}(0, 0, 0)f(x, y, z) - \\ &f_y(x, y, z)f(x, y, z)f_{yy}(0, 0, 0) - f_z(x, y, z)f(x, y, z)f_{yz}(0, 0, 0) - f_{xy}(0, 0, 0)x - \\ &f_{yy}(0, 0, 0)y - f_{yz}(0, 0, 0)z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_3 = j^k \left( d\theta \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) &= j^k (f_z(x, y, z) - f_x(x, y, z)f_{xz}(0, 0, 0)f(x, y, z) - \\ &f_y(x, y, z)f(x, y, z)f_{yz}(0, 0, 0) - f_z(x, y, z)f(x, y, z)f_{zz}(0, 0, 0) - f_{xz}(0, 0, 0)x - \\ &f_{yz}(0, 0, 0)y - f_{zz}(0, 0, 0)z).\end{aligned}$$

Em (BRUCE; GIBLIN; TARI, 1998) temos um resultado que mostra que a geometria plana de variedades é  $GL(n)$  - invariante. Assim qualquer variedade em  $J^k(n)$  resultando desta geometria é também  $GL(n)$ -invariante (ver (BRUCE; GIBLIN; TARI, 1998), páginas 175-176).

Dessa forma, dada  $f$  com uma singularidade consideramos um transversal a  $GL(3)$ -órbita desta  $f$  e trabalhamos neste transversal. Isso se deve ao fato de o estrato  $Y$  de um determinado tipo de singularidade poder ser visto como o estrato  $\bar{Y}$  deste tipo de singularidade neste transversal cartesiano a  $GL(3)$ -órbita desta  $f$ . Assim, o espaço tangente de  $Y$  é gerado pelo espaço tangente de  $\bar{Y}$  e pelo espaço tangente à  $GL(3)$ -órbita de  $f$ . Então, para mostrar a transversalidade da aplicação  $\theta$  com o estrato  $Y$  precisamos também dos geradores do espaço tangente à  $GL(3)$ -órbita de  $f$ . Abaixo trazemos o resultado de (NABARRO, 2000) que calcula tais geradores.

**Lema 3.4.1.** Os geradores do espaço tangente à  $GL(3)$ -órbita de  $f$  em  $J^k(3)$ , em  $f$ , são:

$$\begin{aligned} u_1 &= xf_x, & u_2 &= yf_x, & u_3 &= zf_x, \\ u_4 &= yf_y, & u_5 &= xf_y, & u_6 &= zf_y, \\ u_7 &= xf_z, & u_8 &= yf_z, & u_9 &= zf_z. \end{aligned}$$

A partir de agora analisamos as formas genéricas do bordo do conjunto parabólico de  $M$  para as singularidade  $\mathcal{B}_3$ ,  $\mathcal{B}_4$ ,  $\mathcal{C}_4$  e  $\mathcal{F}_4$  da função altura. As singularidades  $\mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  não serão apresentadas pois seus estratos tem codimensão 0 em  $V_2$ .

**Proposição 3.4.2.** As singularidades  $\mathcal{B}_3$  ocorrem localmente sobre uma curva suave no bordo de  $M$ , ou seja, o bordo do conjunto parabólico de  $M$  é esta curva de singularidade  $\mathcal{B}_3$ .

*Demonstração.* Suponha que  $f$  tem uma singularidade  $\mathcal{B}_3$  na origem e tome, pelo Teorema 3.3.3 e considerando  $M$  na forma de Monge,  $f$  da forma

$$a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{003}z^3,$$

onde  $a_{020} \neq 0$ ,  $a_{200} \neq 0$ ,  $a_{002} = 0$  e  $a_{003} \neq 0$ . Dessa forma, tomando  $j^2f = a_{200}x^2 + a_{020}y^2$ , pelo Lema 3.4.1, o espaço tangente à  $GL(3)$ -órbita de  $f$  em  $V_2$  é  $\mathbb{R}\langle x^2, xy, xz, y^2, yz \rangle$ , logo um transversal à órbita é dado por  $j^2f + a_{\tilde{0}02}z^2$ , onde  $a_{\tilde{0}02} \in \mathbb{R}$ . Assim, no transversal, o estrato  $\mathcal{B}_3$  é dado por  $a_{\tilde{0}02} = 0$ , isto é, uma variedade de codimensão 1 em  $V_2$ . Como dito anteriormente, a ideia é mostrar quando a imagem de  $\theta$  é transversal ao estrato- $\mathcal{B}_3$  em  $V_2$ , isto é, quando ocorre

$$d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f\mathcal{B}_3 = V_2.$$

Vamos analisar cada um destes conjuntos separados.

O espaço tangente ao estrato  $\mathcal{B}_3$  em  $V_2$  ( $T_f\mathcal{B}_3$ ) é o kernel de uma forma diferenciável  $\xi$ . Como  $\xi$  tem que anular o tangente ao estrato  $\mathcal{B}_3$  no transversal e os geradores do tangente de  $GL(3)(f)$  então  $\xi = da_{002}$ .

Os geradores do espaço tangente à imagem de  $\theta$  em  $V_2$  (ver Proposição 3.4.1), são

$$\begin{aligned} v_1 &= 2a_{210}xy + a_{120}y^2 + 3a_{300}x^2 + a_{102}z^2 + 2a_{201}xz + a_{111}yz, \\ v_2 &= 2a_{120}xy + 3a_{030}y^2 + a_{210}x^2 + a_{012}z^2 + a_{111}xz + 2a_{021}yz, \\ v_3 &= a_{111}xy + a_{021}y^2 + a_{201}x^2 + 3a_{003}z^2 + 2a_{102}xz + 2a_{012}yz. \end{aligned}$$

Note que, a imagem de  $\theta$  não seria transversal ao estrato  $\mathcal{B}_3$  se, e somente se,  $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\} + \text{kernel } \xi \not\subset V_2$ , ou seja,  $v_1, v_2, v_3$  pertencem ao kernel  $\xi$ . Isto ocorre se, e somente se,

$$\xi(v_1) = 0 \Leftrightarrow a_{102} = 0,$$

$$\xi(v_2) = 0 \Leftrightarrow a_{012} = 0,$$

$$\xi(v_3) = 0 \Leftrightarrow a_{003} = 0.$$

Mas, como  $\xi(v_3) = a_{003} \neq 0$  para uma singularidade  $\mathcal{B}_3$  então a imagem de  $\theta$  é sempre transversal ao estrato  $\mathcal{B}_3$  em  $V_2$ . Então pelo Teorema 2.2.5, a variedade  $\mathcal{B}_3$  no bordo de  $M$ , que é igual a  $\theta^{-1}(\mathcal{B}_3)$ , é sempre uma curva suave já que o estrato  $\mathcal{B}_3$  tem codimensão 1 em  $V_2$  e o bordo de  $M$  tem dimensão 2.  $\square$

**Observação 3.4.1.** Observe que a prova da proposição anterior nos dá informações precisas (ou seja, as condições para ocorrer a transversalidade) sobre a densidade a que se refere o Teorema 2.2.6 e o mesmo se repetirá na prova da Proposição 3.4.4. Usamos as condições que aparecem para obter novas informações geométricas.

Vamos estudar o significado da não transversalidade de  $\theta$  ao estrato  $\mathcal{B}_3$ .

**Proposição 3.4.3.** O ponto  $(0, 0, 0)$  do bordo do conjunto parabólico é singular se, e somente se,  $a_{102} = a_{012} = a_{003} = 0$ , ou seja, se, e somente se,  $\theta$  não é transversal ao estrato  $\mathcal{B}_3$ .

*Demonstração.* Seja

$$j^3 f = a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{003}x^3 + a_{210}x^2y + a_{120}xy^2 + a_{030}y^3 + a_{021}y^2z + a_{012}yz^2 + a_{003}z^3 + \\ a_{102}xz^2 + a_{201}x^2z + a_{111}xyz,$$

com  $a_{002} = 0$ ,  $a_{200} \neq 0$  e  $a_{020} \neq 0$ , ou seja, pelo Teorema 3.3.3,  $f$  tem singularidade  $\mathcal{B}_3$  na origem. Podemos calcular o bordo do conjunto parabólico, pela equação

$$\det(\text{Hess } f(x, y, z)) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = 0,$$

cujos primeiros jatos são  $8a_{200}a_{020}a_{102}x + 8a_{200}a_{020}a_{012}y + 24a_{200}a_{020}a_{003}z$ .

Dessa forma, as singularidades ocorrem nos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $\nabla(\det(\text{Hess } f(x, y, z))) = 0$ , isto é,  $8a_{200}a_{020}(a_{102}, a_{012}, 3a_{003}) = (0, 0, 0)$ . Logo, o conjunto parabólico é singular se, e somente se,  $a_{102} = a_{012} = a_{003} = 0$  e, pela demonstração da proposição anterior,  $\theta$  não é transversal ao estrato  $\mathcal{B}_3$ .  $\square$

**Proposição 3.4.4.** As singularidades  $\mathcal{B}_4$  da função altura ocorrem em pontos isolados da curva  $\mathcal{B}_3$ .

*Demonstração.* Suponha que  $f$  tem uma singularidade  $\mathcal{B}_4$  na origem e tome, pelo Teorema 3.3.3 e considerando  $M$  na forma de Monge,  $f$  da forma

$$a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{003}z^3 + a_{004}z^4,$$

onde  $a_{020} \neq 0$ ,  $a_{200} \neq 0$ ,  $a_{002} = 0$ ,  $a_{003} = 0$  e  $a_{004} \neq 0$ . Dessa forma, pelo Lema 3.4.1, um transversal à órbita de  $\mathcal{B}_4$  em  $V_3$  é dado por  $j^3 f + a_{\tilde{0}02} z^2 + f_3$ , onde  $a_{\tilde{0}02} \in \mathbb{R}$  e  $f_3 = a_{\tilde{3}00} x^3 + a_{\tilde{2}10} x^2 y + a_{\tilde{1}20} x y^2 + a_{\tilde{0}30} y^3 + a_{\tilde{0}21} y^2 z + a_{\tilde{0}12} y z^2 + a_{\tilde{0}03} z^3 + a_{\tilde{1}02} x z^2 + a_{\tilde{2}01} x^2 z + a_{\tilde{1}11} x y z$ , com  $a_{\tilde{i}jk} \in \mathbb{R}$ . Assim, no transversal, o estrato  $\mathcal{B}_4$  é dado por  $a_{\tilde{0}02} = 0$  e  $a_{\tilde{0}03} = 0$ , isto é, uma variedade de codimensão 2 em  $V_3$ . Como dito anteriormente, a ideia é mostrar quando a imagem de  $\theta$  é transversal ao estrato- $\mathcal{B}_4$  em  $V_3$ , isto é, quando ocorre

$$d_p \theta(\mathcal{B}_4) + T_f \mathcal{B}_4 = V_3,$$

vamos analisar cada um destes conjuntos separados.

O espaço tangente do estrato- $\mathcal{B}_4$  em  $V_3$  é a interseção do kernel de duas formas diferenciáveis  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Como  $\xi_1$  e  $\xi_2$  tem que anular o tangente ao estrato- $\mathcal{B}_4$  no transversal e os geradores do espaço tangente de  $GL(3).f$ , dados no Lema 3.4.1, então  $\xi_1 = da_{002}$  e  $\xi_2 = a_{020} a_{102} da_{101} + a_{200} a_{012} da_{011} - 2a_{200} a_{020} da_{003}$ .

Calculando os geradores do espaço tangente à imagem de  $\theta$  em  $V_3$ , utilizando a Proposição 3.4.1 com  $f = a_{200} x^2 + a_{020} y^2 + j^3 f + j^4 f$  e as condições acima citadas,

$$\begin{aligned} v_1 = & a_{111} y z + 3a_{300} x^2 + 2a_{210} x y + a_{120} y^2 + 2a_{201} x z + a_{102} z^2 + (4a_{400} - 4a_{200}^3) x^3 + 3a_{310} x^2 y \\ & + 3a_{301} x^2 z + (-4a_{200}^2 a_{020} + 2a_{220}) x y^2 + 2a_{211} x y z + 2a_{202} x z^2 + a_{112} y z^2 + a_{121} y^2 z + a_{130} y^3 \\ & + a_{103} z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 = & a_{111} x z + 3a_{030} y^2 + a_{210} x^2 + 2a_{120} x y + a_{012} z^2 + 2a_{021} y z + a_{310} x^3 + (2a_{220} - 4a_{020}^2 a_{200}) x^2 y \\ & + a_{211} x^2 z + 3a_{130} x y^2 + 2a_{121} x y z + a_{112} x z^2 + (4a_{040} - 4a_{020}^3) y^3 + 3a_{031} y^2 z + 2a_{022} y z^2 \\ & + a_{013} z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 = & 2a_{112} x y z + a_{121} x y^2 + a_{211} x^2 y + a_{111} x y + 4a_{004} z^3 + a_{201} x^2 + 2a_{102} x z + 2a_{012} y z + a_{021} y^2 \\ & + a_{301} x^3 + a_{031} y^3 + 3a_{013} y z^2 + 3a_{103} x z^2 + 2a_{202} x^2 z + 2a_{022} y^2 z \end{aligned}$$

A imagem de  $\theta$  não é transversal ao estrato- $\mathcal{B}_4$  se, e somente se,  $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\} + \text{kernel } \xi_1 \cap \text{kernel } \xi_2 \subsetneq V_3$ . Como  $\text{kernel } \xi_1 \cap \text{kernel } \xi_2$  tem codimensão dois, esta não transversalidade significa que existem dois vetores, linearmente independentes,  $\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3$  ( $j = 1, 2$ ), tal que

$$\xi_1(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = -(a_{102} \lambda_j + a_{012} \mu_j) = 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \xi_2(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = & (2a_{020}(a_{201} a_{102} - a_{200} a_{103}) + a_{200} a_{012} a_{111}) \lambda_j + (a_{020} a_{102} a_{111} \\ & + 2a_{200}(a_{012} a_{021} - a_{020} a_{013})) \mu_j + 2(a_{020} a_{102}^2 + a_{200} a_{012}^2 - 4a_{200} a_{020} a_{004}) \beta_j = 0 \end{aligned}$$

para  $j = 1, 2$ . Isto é, fazendo  $x = \lambda_j$ ,  $y = \mu_j$ ,  $z = \beta_j$ , teremos que ter duas soluções linearmente independentes para o sistema:

$$a_{102} x + a_{012} y = 0$$

$$\begin{aligned} & (2a_{020}(a_{201} a_{102} - a_{200} a_{103}) + a_{200} a_{012} a_{111}) x + (a_{020} a_{102} a_{111} + 2a_{200}(a_{012} a_{021} - a_{020} a_{013})) y \\ & + 2(a_{020} a_{102}^2 + a_{200} a_{012}^2 - 4a_{200} a_{020} a_{004}) z = 0 \end{aligned}$$

Como estas são equações de planos, temos que:

- (i) Se  $a_{020}a_{102}^2 + a_{200}a_{012}^2 - 4a_{200}a_{020}a_{004} \neq 0$  então  $a_{102} = a_{012} = 0$  pois o coeficiente de  $z$  na primeira equação é zero, e portanto, ela tem que gerar o espaço todo, para termos duas soluções linearmente independentes. Assim, já que temos  $a_{003} = 0$  para  $\mathcal{B}_4$ , pela Proposição 3.4.3, o conjunto  $\mathcal{B}_3$  é singular.
- (ii) Se  $a_{020}a_{102}^2 + a_{200}a_{012}^2 - 4a_{200}a_{020}a_{004} = 0$  então para que os planos sejam paralelos temos que ter  $(a_{020}a_{102}a_{111} + 2a_{200}(a_{012}a_{021} - a_{020}a_{013}))a_{102} - (2a_{020}(a_{201}a_{102} - a_{200}a_{103}) + a_{200}a_{012}a_{111})a_{012} = 0$  e a primeira igualdade deste item, juntamente com a Proposição 3.3.3, nos diz que a singularidade é  $\mathcal{B}_{\geq 5}$ .

Assim, a imagem de  $\theta$  não é transversal ao estrato  $\mathcal{B}_3$  na singularidade  $\mathcal{B}_4$  quando o bordo do conjunto parabólico é singular, ou quando a singularidade é do tipo  $\mathcal{B}_{k \geq 5}$ . Observe que para o conjunto  $\mathcal{B}_3$  ser singular em  $\mathcal{B}_4$ , precisamos de 4 condições, portanto  $\theta$  não encontra este estrato ( $\mathcal{B}_3$  com bordo do conjunto parabólico singular), ou seja, o caso não é genérico. Então pelo Teorema 2.2.5, a variedade  $\mathcal{B}_4$  no bordo de  $M$ , que é igual a  $\theta^{-1}(\mathcal{B}_4)$ , ocorre em pontos isolados da curva  $\mathcal{B}_3$  já que o estrato  $\mathcal{B}_4$  tem codimensão dois em  $V_3$  e o bordo de  $M$  também possui dimensão 2.  $\square$

As singularidades  $\mathcal{C}_4$  e  $\mathcal{F}_4$  também ocorrem em pontos isolados e as demonstrações são similares a anterior.

**Observação 3.4.2.** Podemos descrever a geometria na vizinhança dos pontos singulares  $\mathcal{B}_3$ ,  $\mathcal{B}_4$ ,  $\mathcal{C}_4$  e  $\mathcal{F}_4$ .

1. Considere a singularidade  $\mathcal{B}_3$  e o modelo  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + az^2x + bz^2y$ . Note que

$$\det(\text{Hess } f(x, y, z)) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2az \\ 0 & 2 & 2bz \\ 2az & 2bz & 6z + 2az + 2by \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, o conjunto parabólico é uma superfície tangente ao plano  $6z + 2ax + 2by = 0$  e o núcleo de  $D^2f$  é  $(0, 0, 1)$ , transversal ao bordo. Observamos que tal núcleo não é tangente à superfície parabólica.

2. Considere a singularidade  $\mathcal{B}_4$  e o modelo  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 + az^2x + bz^2y$ . O conjunto parabólico é uma superfície tangente ao plano  $2ax + 2by = 0$  e o núcleo de  $D^2f$  é novamente  $(0, 0, 1)$ , transversal ao bordo. Observamos que o núcleo é tangente à superfície parabólica.
3. Considere a singularidade  $\mathcal{C}_4$  e o modelo  $f(x, y, z) = y^2 + xz + x^4$ . Neste caso, não existem pontos parabólicos em uma vizinhança do bordo. As superfícies assintóticas intersectam o

bordo em curvas tangentes ao eixo  $-x$ . De fato, a equação das direções assintóticas é

$$\begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0$$

ou seja,  $dy^2 + dx dz + 6x^2 dx^2 = 0$ . Note que na origem, fazendo  $dz = 0$ , temos que  $(1, 0, 0)$  é a única direção assintótica.

4. Considere a singularidade  $\mathcal{F}_4$  da forma  $f(x, y, z) = y^2 + z^2 + x^3$ . O núcleo de  $D^2 f$  é  $(1, 0, 0)$ , o qual é tangente ao bordo.

## CONTATO COM RETAS

Neste capítulo, estudamos o contato entre uma hipersuperfície  $M$  em  $\mathbb{R}^4$  com bordo e retas. Este contato pode ser medido pela família de projeções em  $\mathbb{R}^3$ , às quais classificamos, estudamos as condições para que ocorram, seus conjuntos bifurcação e realizamos análises geométricas.

Ao longo do estudo, utilizamos por diversas vezes os software Maple para auxiliar em contas e Transversal, de Neil Kirk, para a realizar a classificação.

### 4.1 As singularidades genéricas da projeção ortogonal

Seja  $M$  hipersuperfície regular em  $\mathbb{R}^4$ , com bordo  $z = 0$ . A família de projeções em  $\mathbb{R}^3$ , que mede o contato de  $M$  com retas em  $\mathbb{R}^4$ , é definida pela aplicação:

$$P_u : M \times S^3 \rightarrow B$$

$$(p, u) \mapsto (u, p - \langle u, p \rangle u),$$

onde  $B = \{(u, y) \in S^3 \times \mathbb{R}^4; \langle u, y \rangle = 0\}$ , isto é,  $B$  é o fibrado tangente de  $S^3$ . Consideramos  $M$  localmente dada pelo germe de imersão na origem

$$i : (x, y, z) \mapsto (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z), W(x, y, z)),$$

estamos interessados na restrição  $z \geq 0$ . Escolhemos uma carta em  $S^3$  próxima de  $(0, 1, 0, 0)$  dada por  $(\lambda, 1, \beta, \mu)$ . Então  $P$  pode ser reescrita, na vizinhança da origem, da forma:

$$P((x, y, z), ((\lambda, \beta, \mu))) = (X - \lambda Y, Z - \beta Y, W - \mu Y).$$

Se  $u_0 = (0, 1, 0, 0)$ , temos  $P_{u_0} = (X(x, y, z), Z(x, y, z), W(x, y, z))$ . As  $\mathcal{H}$ -classes de  $P_{u_0}$  fornecem informações sobre o contato de  $M$  com a reta em  $\mathbb{R}^4$  na direção de  $u_0$  mas não com retas vizinhas. Então consideramos as singularidades que ocorrem nos pontos interiores da

hipersuperfície e foram classificadas usando o grupo  $\mathcal{A}$  em (MARAR; TARI, 1996). Para os pontos no bordo, analisamos as singularidades da família de projeções segundo a  $\mathcal{B}$  - equivalência pois esta preservará as singularidades da família e o bordo da hipersuperfície  $M$ .

Estamos interessados em saber como a família  $P$  estratifica o seu espaço de parâmetros  $S^3$  em relação às singularidades genéricas simples. Segundo o Teorema de Montaldi em (MONTALDI, 1986), as singularidades que podemos esperar dos membros da família  $P$  são as de  $\mathcal{B}_e$  - codimensão menor ou igual à 3, que é a dimensão do seu espaço de parâmetros. No teorema a seguir apresentamos as possíveis singularidades para nossa família de projeções segundo a  $\mathcal{B}$  - equivalência.

**Teorema 4.1.1.** As  $\mathcal{B}$  - classes das singularidades finitamente determinadas e simples de germes de  $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$  de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão menor ou igual à 3 e seus desdobramentos  $\mathcal{B}_e$ -versais estão na Tabela 4.

Nº	Forma normal	$\mathcal{B}_e$ -Cod	Det	$\mathcal{B}_e$ -Desdobramento Versal
I	$(x, y, z)$	0	1	
II	$(x, y, z^2 + xz)$	0	2	
III	$(x, y, xz + z^3 + yz^2)$	0	3	
IV, V, VI	$(x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^k z^2),$ $k = 2, 3, 4$	$k - 1$	$k + 2$	$\{y^i z^2 e_3; i = 0, \dots, k - 2\}$
VII	$(x, y, xz + yz^2 + z^4)$	1	5	$\{z^3 e_3\}$
VIII	$(x, y, z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z)$	1	3	$\{z e_3\}$
IX	$(x, z + xy, y^2)$	0	2	
X, XI, XII	$(x, z + y^3 + \varepsilon x^k y, y^2)$ $k = 2, 3, 4$	$k - 1$	$k + 1$	$\{x^i y e_2; i = 0, \dots, k - 2\}$
XIII	$(x, z + x^2 y + \varepsilon y^5, y^2)$	2	5	$\{y e_2, y^3 e_2\}$
XIV	$(x, z + x^2 y + \varepsilon y^7, y^2)$	3	7	$\{y e_2, y^3 e_2, y^5 e_2\}$
XV	$(x, z + xy^3 + \varepsilon x^3 y, y^2)$	3	4	$\{y e_2, x y e_2, x^2 y e_2\}$

Tabela 4 – Germes simples  $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$  e seus desdobramentos  $\mathcal{B}_e$ -versais.

*Demonstração.* Estas formas normais foram obtidas utilizando as técnicas de classificação de Transversal Completa, Lema de Mather e resultados sobre determinação finita. Para tal, contamos com a ajuda do software Transversal de Neil Kirk.  $\square$

Esta classificação é dita ter sido realizada por (GORJUNOV, 1984), porém não a encontramos explicitamente.

Além dos germes da Tabela 4, também podemos ter germes não simples apresentados na Tabela 5.

**Observação 4.1.1.** 1. Note que o germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^8)$  não possui módulo, porém é não simples pois ele tem uma perturbação que é equivalente à  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^7 + az^8)$  e a demonstração deste fato será elucidada na Seção 4.2.

Nº	Forma normal	$\mathcal{B}_e$ -Cod	Det
XVI	$(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^8)$	3	8
XVII	$(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^7 + az^8)$	3	-
XVIII	$(x, y, xz + z^4 + yz^3 + ay^2z^2 + y^3z^2)$	3	6
XIX	$(x, y, z^3 + yz^2 + ay^2z + xyz + bx^2z + \varepsilon x^3z)$	3	4
XX	$(x, y, z^3 + \varepsilon y^2z + xz^2 + ax^2z + \varepsilon x^3z)$	3	4
XXI	$(x, y, z^3 + yz^2 + ay^2z + \varepsilon x^2z + \varepsilon y^3z)$	3	4

Tabela 5 – Classificação segundo a  $\mathcal{B}$  - Equivalência (germes não simples).

2. Além disso, não foi possível pela capacidade dos computadores que temos acesso, mostrar que o germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^7 + az^8)$  é 8-determinado, porém com o auxílio do Software Transversal vimos que as transversais completas de grau 9 até 15 são vazias, sugerindo assim que ele realmente seja 8-determinado, mas a prova não foi concluída.

## 4.2 Conjunto bifurcação

Vamos agora estudar o conjunto bifurcação dos germes  $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$  de codimensão menor ou igual à 3, segundo a  $\mathcal{B}_e$ -equivalência com  $z \geq 0$  e considerando o bordo  $z = 0$ .

Como vimos na Seção 2.2 o conjunto bifurcação de nossos germes é o subconjunto do espaço dos parâmetros dado por

$$B_F = \{u \in \mathbb{R}^r; \exists x \text{ singular com } F_u \text{ não estável}\},$$

onde  $F$  é um desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal de nosso germe.

Desta forma, analisamos o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal de cada germe e quais singularidades surgem nesta perturbação, buscando as condições para termos singularidades de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão maior ou igual que 1. São tais condições que determinam o conjunto bifurcação procurado.

As mudanças de coordenadas e todas as contas necessárias foram realizadas utilizando o Software Maple 2018 e as figuras foram plotadas com o auxílio do Geogebra, Maple 2018 e Canva. A seguir explicitamos o conjunto bifurcação de cada germe e quais singularidades surgem a partir das perturbações. Tal análise também nos possibilita encontrar as adjacências de cada germe e este tema será tratado posteriormente.

Aqui estamos utilizando os grupos  $\mathcal{A}_e$  para singularidades no interior e  $\mathcal{B}_e$  para singularidades no bordo. Para as singularidades do bordo estamos utilizando os germes da Tabela 4 e para as singularidades do interior os germes da Tabela 6 encontrada em (NABARRO, 2000).

Onde  $*$  denota o tipo de  $h$  que pode ser  $\mathcal{A}_k (\pm x^2 \pm y^{k+1})$ ,  $D_k (x^2y \pm y^{k-1})$ ,  $E_6 (x^3 \pm y^4)$ ,  $E_7 (x^3 + xy^3)$ ,  $E_8 (x^3 + y^5)$ , e  $\mu$  denota o número de Milnor destas singularidades. Além disso, os germes  $6_1$ ,  $6_2$  e  $5_4$  são não simples.

Tipo	Forma normal	$\mathcal{A}_e$ -Codimensão
$II$	$(x, y, z^2)$	0
$3_*$	$(x, y, z^3 + h(x, y)z)$	$\mu(h)$
$4_1^k$	$(x, y, z^4 + xz + \varepsilon y^k z^2), k \geq 1$	$k - 1$
$4_2^k$	$(x, y, z^4 + (y^2 + \varepsilon x^k)z + xz^2), k \geq 2$	$k$
$5_1$	$(x, y, z^5 + xz + yz^2)$	1
$5_2$	$(x, y, z^5 + xz + y^2 z^2 + yz^3)$	2
$5_3$	$(x, y, z^5 + xz + yz^3)$	3
$6_1$	$(x, y, yz + xz^2 + z^6 + \varepsilon z^8 + Az^9)$	2
$6_2$	$(x, y, yz + xz^2 + z^6 + z^9)$	3
$5_4$	$(x, y, yz + x^2 z^2 + z^5 + \varepsilon z^6 + Az^7)$	3

Tabela 6 – Classificação segundo a  $\mathcal{A}$  - Equivalência

Note que os germes  $I$ ,  $II$ ,  $III$  e  $IX$  da Tabela 4 são  $\mathcal{B}$ -estáveis e, portanto, seus conjuntos bifurcações são vazios. Analisamos com detalhes os germes restantes.

Primeiramente vamos analisar os germes com 1-jato da forma  $(x, y, 0)$ . Ao se perturbar a singularidade  $(0, 0, 0)$  do germe inicial com o desdobramento, aparecem novas singularidades  $(x, y, z)$  e as singularidades com  $z = 0$  são aquelas que estão no bordo.

#### IV Germe $(x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2)$ .

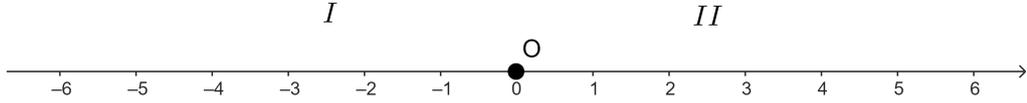
Considere o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal  $(x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2 + az^2)$ . Um ponto  $(x, y, z)$  deste germe é uma singularidade se  $2\varepsilon y^2 z + 2az + 3z^2 + x = 0$ . Realizando a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  que leva o ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  na origem e outras mudanças de coordenadas na fonte e na meta, obtemos

$$(x, y, xz + (\varepsilon y_0^2 + a + 3z_0)z^2 + 2\varepsilon y_0 y z^2 + z^3 + \varepsilon y^2 z^2).$$

No interior, se  $\varepsilon y_0^2 + a + 3z_0 \neq 0$ , realizando mudanças de coordenadas, temos  $(x, y, z^2)$  e se  $\varepsilon y_0^2 + a + 3z_0 = 0$ , pela Proposição 3.4 de (NABARRO, 2000), p.50, obtemos  $(x, y, xz + z^3 + y^2 z)$ , ambos  $\mathcal{A}$ -estáveis.

Note que no bordo ( $z = 0$ ), temos  $\varepsilon y_0^2 + a + 3z_0 = \varepsilon y_0^2 + a$  e as singularidades são quaisquer pontos da forma  $(0, y, 0)$ . Assim, no bordo, se  $\varepsilon y_0^2 + a \neq 0$  então temos o germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$  e se  $\varepsilon y_0^2 + a = 0$  dependemos do valor de  $y_0$ .

Veremos a seguir que o conjunto bifurcação do germe é  $B_f = \{0\} \subset \mathbb{R}$ .



No bordo, chamamos de singularidades especiais as singularidades  $(0, y_0, 0)$  tal que existe  $y_0$  que satisfaz  $\varepsilon y^2 + a = 0$ . Assim, com as mudanças anteriores, obtemos

(a) Na origem  $O$ , ou seja,  $a = 0$ :

Temos que  $y_0 = 0$  corresponde à única singularidade de multiplicidade 2 de  $\varepsilon y^2 + a = 0$  e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2)$ .

Nos casos (b) e (c) abaixo, temos que o ponto  $(0, y, 0)$  tal que  $\varepsilon y^2 + a \neq 0$  são equivalentes ao germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$  e os outros pontos  $(0, y, 0)$  são tais que  $\varepsilon y^2 + a = 0$ :

(b) Na região  $I = \{a \in \mathbb{R}; a < 0\}$ :

Se  $\varepsilon = 1$ , então temos duas singularidades especiais  $(0, \pm\sqrt{-a}, 0)$  equivalentes à  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$ , de codimensão nula.

(c) Na região  $II = \{a \in \mathbb{R}; a > 0\}$ :

Se  $\varepsilon = -1$ , temos duas singularidades especiais  $(0, \pm\sqrt{a}, 0)$  equivalentes ao germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$ .

V Germe  $(x, y, xz + z^3 + y^3 z^2)$ .

Considere o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal  $(x, y, xz + z^3 + y^3 z^2 + az^2 + byz^2)$  e  $(x_0, y_0, z_0)$  uma singularidade, ou seja, satisfaz  $2y_0^3 z_0 + 2by_0 z_0 + 2az_0 + 3z_0^2 + x_0 = 0$ . Realizando a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  e mudanças de coordenadas na fonte e na meta, obtemos

$$(x, y, xz + (y_0^3 + by_0 + a + 3z_0)z^2 + (3y_0^2 + b)yz^2 + z^3 + 2z_0 y^3 z + 3y_0 y^2 z^2 + y^3 z^2).$$

Assim, no interior, por mudanças de coordenadas, se  $y_0^3 + by_0 + a + 3z_0 \neq 0$  temos o germe  $\mathcal{A}$ -estável  $(x, y, z^2)$  e se  $y_0^3 + by_0 + a + 3z_0 = 0$ , utilizando a Proposição 3.4 de (NABARRO, 2000), obtemos o germe  $(x, y, xz + z^3 + y^2z)$ , também de codimensão nula.

Já no bordo, as singularidades são da forma  $(0, y_0, 0)$  e a forma anterior se resume à  $(x, y, xz + (y_0^3 + by_0 + a)z^2 + (3y_0^2 + b)yz^2 + z^3 + 3y_0y^2z^2 + y^3z^2)$ .

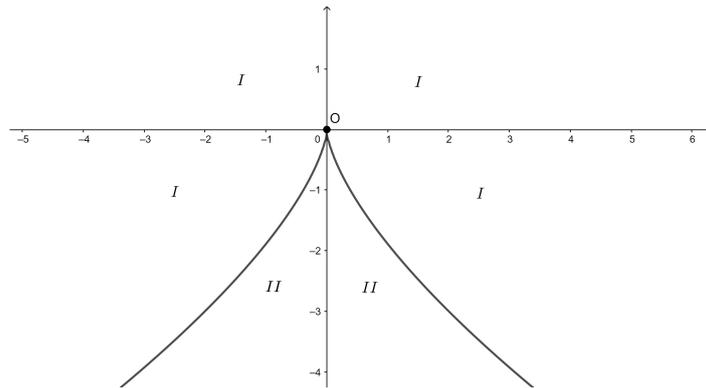
Veremos que o conjunto bifurcação é dado por

$$B_f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; \exists (0, y, 0) \in \mathbb{R}^3, \text{ com } y^3 + by + a = 0 \text{ e } 3y^2 + b = 0\}.$$

Este conjunto também pode ser descrito como a cúspide

$$B_f = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2; \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27} = 0 \right\},$$

que é o discriminante  $\Delta = \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27} = 0$  da equação cúbica  $x^3 + bx + a = 0$ .



Chamamos de singularidades especiais as singularidades  $(0, y, 0)$  tal que existe  $y$  que satisfaz  $y^3 + by + a = 0$ , note que neste caso, sempre existe pelo menos um  $y$  tal que  $y^3 + by + a = 0$ , para qualquer  $(a, b)$  do plano e o conjunto bifurcação é o conjunto onde existe uma raiz  $y$  de  $y^3 + by + a = 0$  com multiplicidade maior ou igual à 2, ou seja, onde o discriminante  $\Delta = \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}$  da equação cúbica  $y^3 + by + a = 0$  se anula. Com as análises feitas anteriormente, obtemos:

Nos casos (a) até (d) abaixo, temos que o ponto  $(0, y, 0)$  tal que  $y_0^3 + by_0 + a \neq 0$  são equivalentes ao germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$  e os outros pontos  $(0, y, 0)$  são tais que  $y_0^3 + by_0 + a = 0$ .

(a) Na origem  $O$ , ou seja,  $(a, b) = (0, 0)$ :

Temos que  $y_0 = 0$  e corresponde à única singularidade de multiplicidade 3 e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, y, xz + z^3 + y^3z^2)$ .

(b) Sobre a cúspide  $\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27} = 0$ , com  $(a, b) \neq (0, 0)$  ( $\Delta = 0$ ):

Para qualquer  $(a, b)$  nesta curva, podemos escrever

$$3y^2 + b = \left(y - \sqrt{-\frac{b}{3}}\right) \left(y + \sqrt{-\frac{b}{3}}\right),$$

$$y^3 + by + a = \left(y - \sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^2 \left(y + 2\sqrt{-\frac{b}{3}}\right), \text{ se } a > 0$$

$$y^3 + by + a = \left(y + \sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^2 \left(y - 2\sqrt{-\frac{b}{3}}\right), \text{ se } a < 0.$$

Assim, dado quaisquer  $(a, b)$  na cúspide, temos sempre uma singularidade especial  $\left(0, \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}, 0\right)$ , correspondente à raiz de multiplicidade 2 da cúbica  $y^3 + by + a$ , com a forma normal  $(x, y, xz + z^3 + y^2z^2)$  de codimensão 1 e uma singularidade especial  $\left(0, \pm 2\sqrt{-\frac{b}{3}}, 0\right)$ , raiz simples da cúbica, equivalente à  $(x, y, xz + yz^2 + z^3)$  que possui codimensão igual à 0.

(c) Região  $I = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2; b > \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}\right\}$ :

Temos apenas uma singularidade especial com a forma normal  $(x, y, xz + yz^2 + z^3)$ , de codimensão nula. Nesta região,  $\Delta > 0$  e temos apenas uma raiz simples  $y$  da equação  $y^3 + by + a = 0$ .

(d) Região  $II = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2; b < \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}\right\}$ :

Temos três singularidades especiais equivalentes à  $(x, y, xz + yz^2 + z^3)$  de codimensão 0, ou seja, nessa região  $\Delta < 0$  e temos três raízes simples que anulam a cúbica.

VI Germe  $(x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^4 z^2)$ .

Considere o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal  $(x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^4 z^2 + az^2 + byz^2 + cy^2 z^2)$  e uma singularidade  $(x_0, y_0, z_0)$ , ou seja, satisfaz  $2\varepsilon y_0^4 z + 2cy_0^2 z + 2by_0 z + 2az + 3z^2 + x = 0$ . Realizando a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  e mudanças de coordenadas na fonte e na meta, obtemos

$$(x, y, xz + (\varepsilon y_0^4 + cy_0^2 + by_0 + a + 3z_0)z^2 + (4\varepsilon y_0^3 + 2cy_0 + b)yz^2 + z^3 + 8\varepsilon y_0 z_0 y^3 z + (6\varepsilon y_0^2 + c)y^2 z^2 + 2\varepsilon z_0 y^4 z + 4\varepsilon y_0 y^3 z^2 + \varepsilon y^4 z^2).$$

Assim, no interior, por mudanças de coordenadas, temos  $(x, y, z^2)$  se  $\varepsilon y_0^4 + cy_0^2 + by_0 + a + 3z_0 \neq 0$  e, pela Proposição 3.4 de (NABARRO, 2000),  $(x, y, xz + z^3 + y^2 z)$  se  $\varepsilon y_0^4 + cy_0^2 + by_0 + a + 3z_0 = 0$ , ambas de codimensão nula.

Já no bordo, as singularidades são da forma  $(0, y_0, 0)$  e a forma normal se resume à  $(x, y, xz + (\varepsilon y_0^4 + cy_0^2 + by_0 + a)z^2 + (4\varepsilon y_0^3 + 2cy_0 + b)yz^2 + z^3 + (6\varepsilon y_0^2 + c)y^2 z^2 + 4\varepsilon y_0 y^3 z^2 + \varepsilon y^4 z^2)$ . Logo, veremos que o conjunto bifurcação é

$$B_f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; \exists(0, y, 0), \text{ com } \varepsilon y^4 + cy^2 + by + a = 0 \text{ e } 4\varepsilon y^3 + 2cy + b = 0\},$$

que também pode ser descrito pela parametrização

$$(3\epsilon y^4 + cy^2, -4\epsilon y^3 - 2cy, c),$$

que descreve a superfície conhecida como Rabo de Andorinha (discriminante  $\Delta = 0$  da equação quártica, onde  $\Delta = -16\epsilon ac^4 + 4\epsilon b^2 c^3 + 128a^2 c^2 + 27b^4 - 256\epsilon a^3 - 144ab^2 c$ ).

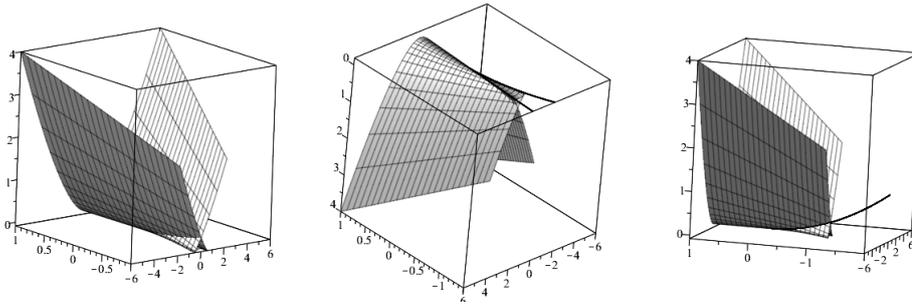


Figura 1 – Superfície Rabo de Andorinha.

Chamamos de singularidades especiais as singularidades  $(0, y, 0)$  tal que existe  $y$  que satisfaz  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a = 0$ . Nos itens abaixo, se  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a \neq 0$  obtemos o germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$  e se a condição se anular dependemos dos outros coeficientes.

Inicialmente, vamos estratificar o conjunto bifurcação, onde  $\Delta = 0$ :

- (a) Na origem  $O$ , isto é,  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ :

Temos que  $y_0 = 0$  e corresponde à única singularidade de multiplicidade 4 de  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a$  e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, y, xz + z^3 + \epsilon y^4 z^2)$ , que possui codimensão igual à 3.

- (b) Sobre a cúspide  $6\epsilon y^2 + c = 0$  menos a origem (Figura 1 central):

Dado  $(a, b, c)$ , temos uma singularidade especial correspondente à raiz de multiplicidade 3 da quártica, com a forma normal  $(x, y, xz + z^3 + y^3 z^2)$  de codimensão 2 e uma singularidade especial, raiz simples de  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a = 0$  (ou seja,  $4\epsilon y^3 + 2cy + b \neq 0$ ), equivalente à  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$ , de codimensão 0.

- (c) Sobre a parábola (Figura 1 à direita):

Para qualquer  $(a, b, c)$  nesta curva temos duas singularidades especiais com a forma normal  $(x, y, xz + z^3 + \epsilon y^2 z^2)$  de codimensão 1 e as demais singularidades com a forma  $(x, y, xz + z^2)$  de codimensão igual à 0. As singularidades especiais são obtidas da quártica  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a$  que sobre a parábola possui duas raízes reais de multiplicidade 2, ou seja,  $4\epsilon y^3 + 2cy + b = 0$ .

- (d) Sobre a fronteira do tetraedro:

Temos uma singularidade especial (correspondente à raiz de multiplicidade 2 da quártica) com a forma normal  $(x, y, xz + z^3 + \epsilon y^2 z^2)$  de codimensão 1 e duas singularidades

especiais (raízes simples de  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a = 0$ ) com a forma  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$  que possui codimensão 0.

- (e) Sobre a superfície rabo de andorinha e fora das regiões descritas anteriormente (Figura 1 à esquerda):

Temos uma singularidade especial equivalente à  $(x, y, xz + z^3 + \epsilon y^2 z^2)$  de codimensão 1. Esta é correspondente à raiz real da quártica  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a$  que, neste caso, é de multiplicidade 2, as outras duas raízes são simples e complexas.

A partir daqui  $4\epsilon y^3 + 2cy + b \neq 0$ , ou seja, as raízes da quártica não possuem multiplicidade maior ou igual à 2 ( $\Delta \neq 0$ ). Assim, estamos no interior das 3 componentes conexas determinadas pela superfície. Para qualquer ponto  $(a, b, c)$  temos que qualquer  $(0, y, 0)$  é equivalente à singularidade  $(x, y, xz + z^2)$ , de codimensão igual à 0. Além disso,

- (f) Na região do tetraedro:

Temos quatro singularidades especiais com a forma normal  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$ , de codimensão nula. Nesta região,  $\Delta < 0$  e temos quatro raízes reais simples de  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a = 0$ .

- (g) No complementar da superfície rabo de andorinha, acima da superfície (tomando como referência a Figura 1 à esquerda),  $a > 0$ :

Nesta região,  $\Delta < 0$  e a quártica  $\epsilon y^4 + cy^2 + by + a = 0$  tem quatro raízes complexas simples.

- (h) No complementar da superfície rabo de andorinha, abaixo da superfície (tomando como referência a Figura 1 à esquerda),  $a < 0$ :

Nesta região,  $\Delta > 0$  e temos 2 singularidades especiais (raízes simples) equivalentes à  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$ , de codimensão 0.

### VII Germe $(x, y, xz + yz^2 + z^4)$ .

Considere o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal  $(x, y, xz + yz^2 + z^4 + az^3)$  e uma singularidade  $(x_0, y_0, z_0)$ , ou seja, satisfaz  $3az^2 + 4z^3 + 2yz + x = 0$ . Realizando a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  e mudanças de coordenadas na fonte e na meta, obtemos

$$(x, y, xz + (3az_0 + 6z_0^2 + y_0)z^2 + yz^2 + (a + 4z_0)z^3 + z^4).$$

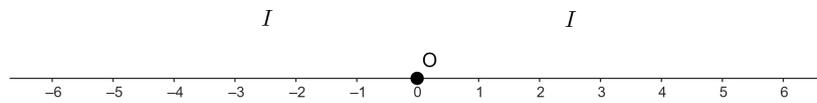
No interior, dado  $a \in \mathbb{R}$ , todas as possíveis singularidades de uma perturbação são  $\mathcal{A}$ -estáveis. Mais detalhadamente:

- a) Quando  $3az + 6z^2 + y = 0$  e  $a + 4z = 0$ , temos uma singularidade  $(\frac{1}{16}a^3, \frac{3}{8}a^2, -\frac{1}{4}a)$  equivalente à  $(x, y, xz + yz^2 + z^4)$ , de codimensão 0.
- b) Quando  $3az + 6z^2 + y = 0$  e  $a + 4z \neq 0$ , temos infinitas singularidades com a forma normal  $(x, y, xz + z^3 + y^2z)$ , todas de codimensão zero.

- c) Quando  $3az + 6z^2 + y \neq 0$ , temos infinitas singularidades com a forma normal  $(x, y, z^2)$ , também de codimensão nula.

Para tais conclusões utilizamos a Proposição 3.4 de (NABARRO, 2000).

Vamos analisar agora a forma normal no bordo  $(x, y, xz + y_0z^2 + yz^2 + az^3 + z^4)$  e veremos que o conjunto bifurcação deste caso é  $B_f = \{0\} \subset \mathbb{R}$ .



Para este germe, chamamos de singularidade especial apenas  $(0, 0, 0)$ . Note que no bordo os pontos singulares são  $(x, y, z) = (0, y, 0)$  pois  $3az^2 + 4z^3 + 2yz + x = x = 0$ . Vamos analisar o comportamento no bordo para cada região.

- (a) Na origem  $O$ , isto é,  $a = 0$ :

Temos que  $(x_0, y_0, x_0) = (0, 0, 0)$  e a singularidade é equivalente ao próprio germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^4)$ .

- (b) Na região  $I = \{a \in \mathbb{R}; a \neq 0\}$ .

Temos uma singularidade especial  $(0, 0, 0)$  equivalente à  $(x, y, xz + yz^2 + z^3)$  e as demais singularidades  $(0, y, 0)$ , com  $y \neq 0$  são equivalentes à  $(x, y, xz + z^2)$ , todas de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão igual à 0.

### VIII Germe $(x, y, z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z)$ .

Seja  $(x, y, z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z + az)$  um desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal e  $(x_0, y_0, z_0)$  uma singularidade, portanto,  $\varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_1 y^2 + a + 2z = 0$ . Realizando a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  e mudanças de coordenadas na fonte e na meta, obtemos

$$(x, y, 2\varepsilon_2 x_0 xz + 2\varepsilon_1 y_0 yz + z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z).$$

Se  $x_0 \neq 0$  então, por mudanças de coordenadas, no interior obtemos o germe  $(x, y, z^2)$  e no bordo obtemos  $(x, y, xz + z^2)$ , ambos estáveis. Se  $x_0 = 0$ , podemos reduzir a forma

anterior a  $(x, y, 2\varepsilon_1 y_0 y z + z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z)$  e realizando a mudança  $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$  acompanhada de mudança na meta, obtemos  $(x, y, 2\varepsilon_1 y_0 x z + z^2 + \varepsilon_1 x^2 z + \varepsilon_2 y^2 z)$ . Vamos analisar o comportamento no bordo para cada região mais detalhadamente:

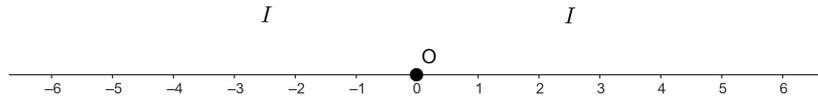
(a) Na origem  $O$ , isto é,  $a = 0$ :

Temos que  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$  e a singularidade é equivalente ao próprio germe  $(x, y, z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z)$ .

(b) Região  $I = \{a \in \mathbb{R}; a \neq 0\}$ :

Temos o germe  $(x, y, xz + z^2)$  de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 0.

Assim, seu conjunto bifurcação é  $B_f = \{0\} \subset \mathbb{R}$ .



Agora vamos analisar os germes com 1-jato da forma  $(x, z, 0)$ . Neste caso, temos germes do tipo  $(x, z + h(x, y), y^2)$  e o conjunto singular destes é o plano  $y = 0$ , ou seja, pontos da forma  $(x, 0, z)$ . Já vimos que ao se perturbar a singularidade  $(0, 0, 0)$  do germe inicial com o desdobramento, aparecem novas singularidades da forma  $(x, 0, z)$  e que singularidades com  $z = 0$  são aquelas que estão no bordo.

**X** Germe  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$ .

Este germe tem  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 1 e  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y + ay, y^2)$ , com singularidade  $(x_0, 0, z_0)$ . Considerando o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal, aparecem novas singularidades no interior e no bordo.

No interior, para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , realizando a translação para origem  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y, z - z_0)$  e as mudanças  $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - (\varepsilon x_0^2 + a)y)$ ,  $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$  e  $(x, y, z) \mapsto (x, y - \varepsilon x^2 z - z^3 - 2\varepsilon x_0 x z, z)$ , obtemos o germe  $\mathcal{A}$ -estável  $(x, y, z^2)$ .

Vamos agora analisar a forma normal da perturbação na região do bordo, com  $z_0 = 0$ . Note que a mudança  $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - (\varepsilon x_0^2 + a)y)$  não pode ser realizada na  $\mathcal{B}$ -equivalência.

Neste caso, após a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y, z)$  temos  $(x, z + (\epsilon x_0^2 + a)y + 2\epsilon xy + \epsilon x^2 y + y^3, y^2)$  e, portanto, temos dois casos a serem considerados a depender se  $\epsilon x_0^2 + a$  se anula ou não. Se  $\epsilon x_0^2 + a \neq 0$ , aplicando as mudanças

$$(x, y, z) \mapsto \left(x, \frac{1}{\epsilon x_0^2 + a}y - \frac{1}{\epsilon x_0^2 + a}z, z\right)$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(x, y - \frac{2\epsilon x_0 xy}{\epsilon x_0^2 + a} + \frac{2\epsilon x_0 xz}{\epsilon x_0^2 + a} - \frac{\epsilon x^2 y}{\epsilon x_0^2 + a} + \frac{\epsilon x^2 z}{\epsilon x_0^2 + a} - \frac{y^3}{(\epsilon x_0^2 + a)^3} + \frac{3y^2 z}{(\epsilon x_0^2 + a)^3} - \frac{3yz^2}{(\epsilon x_0^2 + a)^3} + \frac{z^3}{(\epsilon x_0^2 + a)^3}, z\right),$$

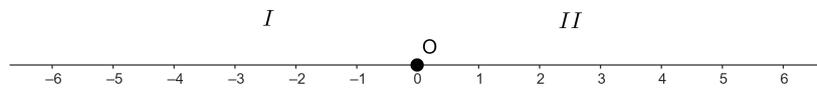
$$(x, y, z) \mapsto \left(x, y + \frac{4x_0^2 x^2 y}{(\epsilon x_0^2 + a)^2} - \frac{4x_0^2 x^2 z}{(\epsilon x_0^2 + a)^2} + \frac{4x_0 x^3 y}{(\epsilon x_0^2 + a)^2} - \frac{4x_0 x^3 z}{(\epsilon x_0^2 + a)^2} + \frac{8\epsilon x_0 xy^3}{(\epsilon x_0^2 + a)^4} - \frac{24\epsilon x_0 xy^2 z}{(\epsilon x_0^2 + a)^4} + \frac{24\epsilon x_0 xyz^2}{(\epsilon x_0^2 + a)^4} - \frac{8\epsilon x_0 xz^3}{(\epsilon x_0^2 + a)^4}, z\right),$$

$$(x, y, z) \mapsto (y, x, z),$$

acompanhadas de mudanças na meta quando necessário, obtemos  $(x, y, xz + z^2)$ , de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão nula.

Se  $\epsilon x_0^2 + a = 0$ , chamamos  $(x_0, 0, 0)$  de singularidade especial e estamos com a forma normal  $(x, z + 2\epsilon x_0 xy + \epsilon x^2 y + y^3, y^2)$ .

Veremos que o conjunto bifurcação deste germe é  $B_f = \{0\} \subset \mathbb{R}$ .



Ou seja, com as mudanças anteriores obtemos:

(a) Na origem  $O$  (ou seja,  $a = 0$ ):

Temos que  $x_0 = 0$  é a única raiz de multiplicidade 2 de  $\epsilon x^2 + a = 0$  e corresponde à singularidade especial  $(0, 0, 0)$  e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, z + y^3 + \epsilon x^2 y, y^2)$ .

(b) Região  $I = \{a \in \mathbb{R}; a < 0\}$ :

Se  $\varepsilon = 1$ , temos duas singularidades especiais  $(\pm\sqrt{-a}, 0, 0)$  equivalentes à  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão igual à 0. Se  $\varepsilon = -1$ ,  $-x^2 + a \neq 0$  para todo  $a < 0$ .

(c) Região  $II = \{a \in \mathbb{R}; a > 0\}$ :

Se  $\varepsilon = 1$ ,  $x^2 + a \neq 0$  para todo  $a > 0$ . Se  $\varepsilon = -1$ , temos duas singularidades especiais  $(\pm\sqrt{a}, 0, 0)$  equivalentes à  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão igual à 0.

**XI** Germe  $(x, z + y^3 + x^3y, y^2)$ .

O  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal do germe é  $(x, z + y^3 + x^3y + ay + bxy, y^2)$ , ou seja, ele possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão igual à 2 e singularidades na forma  $(x_0, 0, z_0)$ . Considerando o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal, aparecem novas singularidades no interior e no bordo.

Note que, as singularidades em pontos do interior são sempre equivalentes à  $(x, y, z^2)$ , para qualquer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , pois realizando a translação para origem  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y, z - z_0)$  obtemos

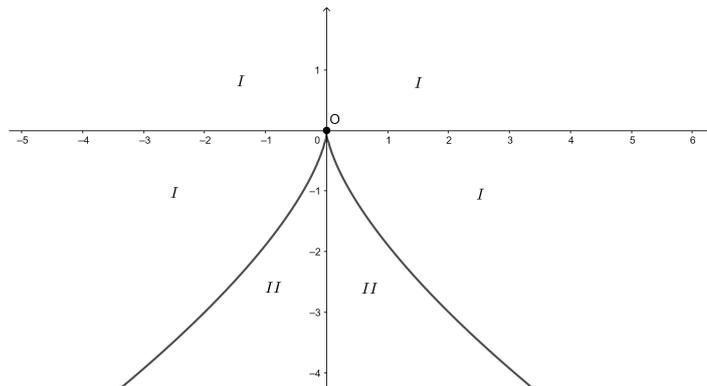
$$(x, (x_0^3 + bx_0 + a)y + z + (3x_0^2 + b)xy + y^3 + 3x_0x^2y + x^3y, y^2),$$

ou seja, considerando a  $\mathcal{A}$ -equivalência obtemos a singularidade  $(x, y, z^2)$ , de codimensão nula. Além disso, considerando a  $\mathcal{B}$ -equivalência, se  $x_0^3 + bx_0 + a = 0$  então obtemos a singularidade  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, z + xy, y^2)$ , se  $3x_0^2 + b \neq 0$ , a forma normal  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2y, y^2)$ , de codimensão 1, se  $3x_0^2 + b = 0$  e  $x_0 \neq 0$  ou a forma  $(x, z + y^3 + x^3y, y^2)$  se  $x_0 = 0$  e  $3x_0^2 + b = b = 0$ , note que neste caso estamos com  $a = b = 0$ , ou seja, estamos na origem com o próprio germe. Por outro lado, se  $x_0^3 + bx_0 + a \neq 0$  então obtemos a singularidade  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$ .

Dessa forma, concluímos que o conjunto bifurcação deste germe é  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2; x^3 + bx + a = 0 \text{ e } 3x^2 + b = 0\}$ . Note que este conjunto, assim como no germe  $V$ , pode ser descrito como a cúspide

$$B_f = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2; \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27} = 0 \right\}$$

e, portanto, a análise das regiões será análoga à este item.



Note que sempre existe pelo menos um  $x$  tal que  $x^3 + bx + a = 0$ , para qualquer  $a, b$  do plano e o conjunto bifurcação é o conjunto onde existe uma raiz  $x$  de  $x^3 + bx + a = 0$  com multiplicidade maior ou igual à 2. Chamamos de singularidades especiais as singularidades no bordo  $(x_0, 0, 0)$  tal que existe  $x_0$  que satisfaz  $x_0^3 + bx_0 + a = 0$ . Assim, com as mudanças anteriores obtemos:

Nos itens (a) até (d) abaixo, temos que o ponto  $(x_0, 0, 0)$  tal que  $x_0^2 + bx_0 + a \neq 0$  são equivalentes ao germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$ .

(a) Na origem  $O$  (isto é,  $(a, b) = (0, 0)$ ):

Temos que  $x_0 = 0$  e corresponde à única singularidade de multiplicidade 3 de  $x^3 + bx + a = 0$  e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, z + y^3 + x^3y, y^2)$ .

(b) Sobre a cúspide  $\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27} = 0$ , com  $(a, b) \neq (0, 0)$  ( $\Delta = 0$ ):

Para qualquer  $(a, b)$  nesta curva, podemos escrever

$$3x^2 + b = 3 \left( x - \sqrt{-\frac{b}{3}} \right) \left( x + \sqrt{-\frac{b}{3}} \right),$$

$$x^3 + bx + a = \left( x - \sqrt{-\frac{b}{3}} \right)^2 \left( x + 2\sqrt{-\frac{b}{3}} \right), \text{ se } a > 0,$$

$$x^3 + bx + a = \left( x + \sqrt{-\frac{b}{3}} \right)^2 \left( x - 2\sqrt{-\frac{b}{3}} \right), \text{ se } a < 0.$$

Assim, dado  $(a, b)$  na cúspide, temos uma singularidade especial  $\left( \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}, 0, 0 \right)$ , correspondente à raiz de multiplicidade 2 da cúbica  $x^3 + bx + a$ , com a forma normal  $(x, z + y^3 + x^2y, y^2)$  de codimensão 1 e uma singularidade especial  $\left( \pm 2\sqrt{-\frac{b}{3}}, 0, 0 \right)$ , raiz simples da cúbica, equivalente à  $(x, z + xy, y^2)$  que possui codimensão igual à 0.

(c) Região  $I = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2; b > \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27} \right\}$ :

Temos uma singularidade especial com a forma normal  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão igual à 0. Nesta região,  $\Delta > 0$  e temos apenas uma raiz real simples  $x_0$  de  $x^3 + bx + a = 0$ .

(d) Região  $II = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2; b < \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27} \right\}$ :

Temos três singularidades especiais equivalentes à  $(x, z + xy, y^2)$  de codimensão nula, ou seja, temos três raízes simples da cúbica  $x^3 + bx + a = 0$  (nessa região  $\Delta < 0$ ).

**XII** Germe  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^4y, y^2)$ .

Considere o  $\mathcal{B}_\varepsilon$ -desdobramento versal  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^4y + ay + bxy + cx^2y, y^2)$  e uma singularidade  $(x_0, 0, z_0)$ . Assim, aplicando a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y, z - z_0)$  obtemos

$$(x, (\varepsilon x_0^4 + cx_0^2 + bx_0 + a)y + z + (4\varepsilon x_0^3 + 2cx_0 + b)xy +$$

$$(6\epsilon x_0^2 + c)x^2y + y^3 + 4\epsilon x_0x^3y + \epsilon x^4y, y^2).$$

Dessa forma, no interior, sempre obtemos a singularidade  $(x, y, z^2)$ , de codimensão nula. Veremos que o conjunto bifurcação deste germe é

$$B_f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; \epsilon x^4 + cx^2 + bx + a = 0 \text{ e } 4\epsilon x^3 + 2cx + b = 0\},$$

que também pode ser escrito pela parametrização

$$(\epsilon 3x^4 + cx^2, -4\epsilon x^3 - 2cx, c).$$

Note que esta é a superfície Rabo de Andorinha que encontramos como o conjunto bifurcação do germe *VI*, assim, seguimos o mesmo raciocínio durante a análise.

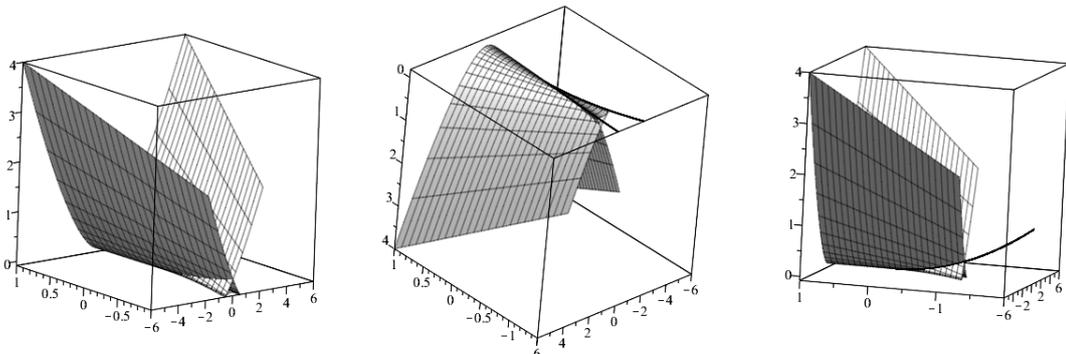


Figura 2 – Superfície Rabo de Andorinha.

Observe que o conjunto bifurcação é o conjunto onde existe uma raiz  $x_0$  de  $\epsilon x^4 + cx^2 + bx + a = 0$  com multiplicidade maior ou igual à 2. Chamamos de singularidades especiais as singularidades  $(x_0, 0, 0)$  tal que existe  $x_0$  raiz de  $\epsilon x^4 + cx^2 + bx + a = 0$ .

Nos itens abaixo, se  $\epsilon x^4 + cx^2 + bx + a \neq 0$  obtemos o germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + x^2)$ .

Inicialmente, vamos estratificar o conjunto bifurcação, onde  $\Delta = 0$ :

- (a) Na origem  $O$ , ou seja,  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ :

Temos que  $x_0 = 0$  corresponde à única singularidade de multiplicidade 4 e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, z + y^3 + \epsilon x^4y, y^2)$ , que possui codimensão 3.

- (b) Sobre a cúspide  $6\epsilon x^2 + c = 0$ , menos a origem (Figura 2 central):

Dado  $(a, b, c)$  sobre a curva, temos uma singularidade especial correspondente à raiz de multiplicidade 3 da quártica, com a forma normal  $(x, z + y^3 + x^3y, y^2)$  de codimensão 2 e uma singularidade especial, raiz simples de  $\epsilon x^4 + cx^2 + bx + a = 0$ , equivalente à  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão 0.

- (c) Sobre a parábola (Figura 2 à direita):

Para qualquer  $(a, b, c)$  nesta curva temos duas singularidades especiais com a forma normal  $(x, z + y^3 + \epsilon x^2y, y^2)$  de codimensão 1. Tais singularidades são obtidas da

quártica  $\varepsilon x^4 + cx^2 + bx + a = 0$  que sobre a parábola possui duas raízes reais de multiplicidade 2.

(d) Sobre a fronteira do tetraedro:

Temos uma singularidade especial (correspondente à raiz de multiplicidade 2 da quártica) com a forma normal  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$  de codimensão 1 e duas singularidades especiais (correspondentes às raízes simples) equivalentes à  $(x, z + xy, y^2)$  de codimensão nula.

(e) Sobre a superfície rabo de andorinha e fora das regiões descritas anteriormente (Figura 2 à esquerda):

Temos uma singularidade especial equivalente à  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$  de codimensão 1. A singularidade especial é correspondente à raiz real da quártica  $\varepsilon x^4 + cx^2 + bx + a$  que, neste caso, é de multiplicidade 2, as outras duas raízes são simples e complexas.

A partir daqui  $4\varepsilon x^3 + 2cx + b \neq 0$ , ou seja, as raízes da quártica não possuem multiplicidade maior ou igual à 2 ( $\Delta \neq 0$ ). Assim, estamos no interior das 3 componentes conexas determinadas pela superfície. Para qualquer ponto  $(a, b, c)$  temos que qualquer  $(x, 0, 0)$  é equivalente à singularidade  $(x, y, xz + z^2)$ , de codimensão igual à 0. Além disso,

(f) Na região do tetraedro:

Temos quatro singularidades especiais com a forma normal  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão 0. Nesta região,  $\Delta < 0$  e temos quatro raízes reais simples de  $\varepsilon x^4 + cx^2 + bx + a = 0$ .

(g) No complementar da superfície rabo de andorinha, acima da superfície (tomando como referência a Figura 2 à esquerda):

Nesta região,  $\Delta < 0$  e a quártica  $\varepsilon x^4 + cx^2 + bx + a = 0$  tem quatro raízes complexas simples.

(h) No complementar da superfície rabo de andorinha, abaixo da superfície (tomando como referência a Figura 2 à esquerda):

Nesta região,  $\Delta > 0$  e temos 2 singularidades especiais (raízes simples) equivalentes à  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão nula.

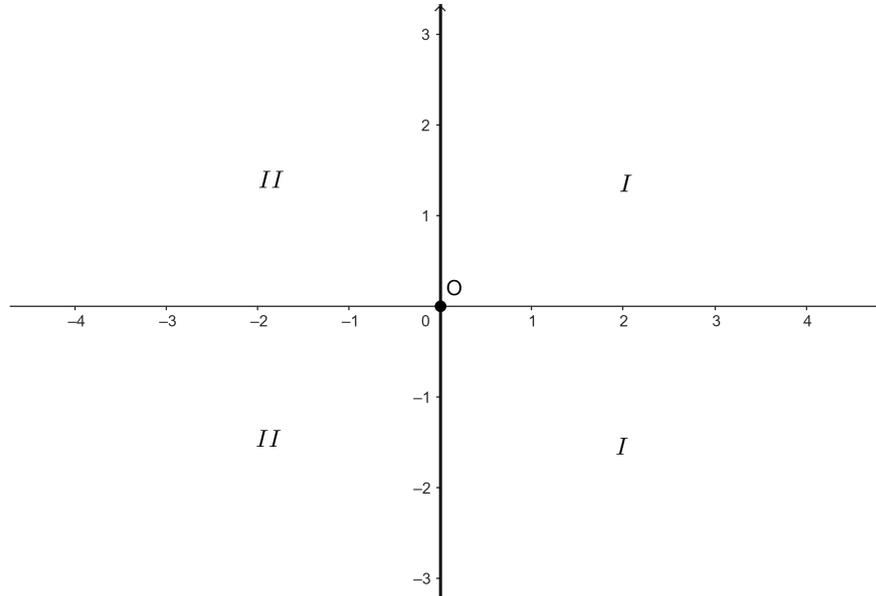
### XIII Germe $(x, z + x^2 y + \varepsilon y^5, y^2)$ .

Seja  $(x, z + x^2 y + \varepsilon y^5 + ay + by^3, y^2)$  o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal deste germe e  $(x_0, 0, z_0)$  uma singularidade. Considerando o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal, aparecem novas singularidades no interior e no bordo.

As singularidades em pontos do interior são sempre equivalentes à  $(x, y, z^2)$ , para qualquer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , que tem  $\mathcal{A}_e$ -codimensão 0. Para isso, realizando a translação para origem  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y, z - z_0)$  obtemos

$$(x, z + (x_0^2 + a)y + 2x_0 xy + by^3 + x^2 y + \varepsilon y^5, y^2).$$

No bordo, se  $x_0^2 + a \neq 0$ , realizando mudanças de coordenadas, temos que o germe é equivalente à  $(x, y, xz + z^2)$ , de codimensão nula. Veremos que o conjunto bifurcação do germe é  $B_f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a = 0\} = \text{eixo-}b$ .



Chamamos de singularidades especiais as singularidades  $(x_0, 0, 0)$  tal que existe  $x_0$  raiz de  $x^2 + a = 0$ . Ou seja, com as mudanças anteriores, obtemos:

(a) Na origem  $O = (0, 0)$ :

Temos que  $x_0 = 0$  e corresponde à singularidade de multiplicidade 2 de  $x^2 + a = 0$  e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^5, y^2)$ .

(b) Eixo- $b$  menos a origem:

Temos uma singularidade especial  $(0, 0, 0)$  com a forma normal  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2y, y^2)$  que possui codimensão igual à 1, obtida da equação  $x^2 + a = 0$ .

(c) Região  $I = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a > 0\}$ :

Aqui  $x^2 + a \neq 0$ , para todo  $a > 0$ .

(d) Região  $II = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a < 0\}$ :

Temos duas singularidades especiais (raízes simples)  $(\pm\sqrt{-a}, 0, 0)$  com a forma normal  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão 0.

XIV Germe  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^7, y^2)$ .

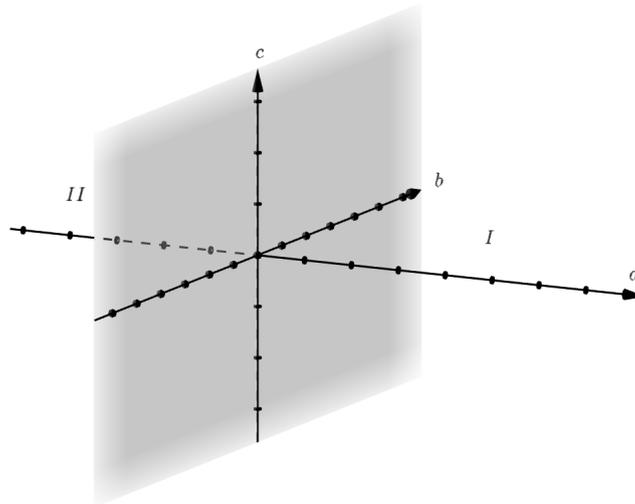
Tome o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal do germe  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^7 + ay + by^3 + cy^5, y^2)$  e uma singularidade  $(x_0, 0, z_0)$ . Considerando o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal, aparecem novas singularidades no interior e no bordo.

Note que as singularidades em pontos do interior são sempre equivalentes à  $(x, y, z^2)$ , para qualquer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Para isso, realizando a translação para origem  $(x, y, z) \mapsto$

$(x - x_0, y, z - z_0)$  obtemos

$$(x, (x_0^2 + a)y + z + 2x_0xy + by^3 + x^2y + cy^5 + \varepsilon y^7, y^2).$$

Já no bordo, se  $x_0^2 + a \neq 0$  então, realizando mudanças de coordenadas, temos o germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$ . Veremos que o conjunto bifurcação de  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^7, y^2)$  é  $B_f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = 0\} = \text{plano-}bc$ .



Chamamos de singularidades especiais as singularidades  $(x_0, 0, 0)$  com  $x_0$  satisfazendo  $x^2 + a = 0$ . Assim, com as mudanças anteriores obtemos:

Inicialmente, vamos estratificar o conjunto bifurcação:

(a) Na origem  $O = (0, 0, 0)$ :

Temos que  $x_0 = 0$  e corresponde à singularidade de multiplicidade 2 de  $x^2 + a = 0$ , neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^7, y^2)$ .

(b) Eixo- $c$  menos a origem:

Temos uma singularidade especial  $(0, 0, 0)$  equivalente à  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^5, y^2)$  que possui codimensão igual à 2, obtida da raiz de multiplicidade 2 de  $x^2 + a = 0$ .

(c) Plano- $bc$  menos o eixo- $c$ .

Temos uma singularidade especial  $(0, 0, 0)$  da forma  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2y, y^2)$ , que possui codimensão 1 e, novamente a singularidade especial é raiz de multiplicidade 2 de  $x^2 + a = 0$ .

A partir daqui, estamos no complementar do conjunto bifurcação, ou seja,  $a \neq 0$ .

(d) Região  $I = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a > 0\}$ :

Aqui  $x^2 + a \neq 0$  para todo  $a > 0$ .

(e) Região  $II = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a < 0\}$ :

Temos duas singularidades especiais  $(\pm\sqrt{-a}, 0, 0)$ , correspondentes às raízes simples de  $x^2 + a = 0$ , de codimensão igual à 0.

XV Germe  $(x, z + \varepsilon x^3 y + xy^3, y^2)$ .

Seja  $(x, z + \varepsilon x^3 y + xy^3 + ay + bxy + cx^2 y, y^2)$  um  $\mathcal{B}_\varepsilon$ -desdobramento versal e  $(x_0, 0, z_0)$  uma singularidade. Considerando este desdobramento, aparecem novas singularidades no interior e no bordo.

As singularidades em pontos do interior tem a forma normal  $(x, y, z^2)$ , para qualquer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , que tem  $\mathcal{A}_\varepsilon$ -codimensão 0. De fato, realizando a translação para origem  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y, z - z_0)$  obtemos

$$(x, (\varepsilon x_0^3 + cx_0^2 + bx_0 + a)y + z + (3\varepsilon x_0^2 + 2cx_0 + b)xy + (3\varepsilon x_0 + c)x^2 y + x_0 y^3 + \varepsilon x^3 y + xy^3, y^2).$$

Já no bordo, se  $\varepsilon x_0^3 + cx_0^2 + bx_0 + a \neq 0$  então obtemos o germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$ .

Veremos que o conjunto bifurcação deste germe é

$$B_f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; \varepsilon x^3 + cx^2 + bx + a = 0 \text{ e } 3\varepsilon x^2 + 2cx + b = 0\}.$$

Podemos também escrever este conjunto através da parametrização

$$(2\varepsilon x^3 + cx^2, -2cx - 3\varepsilon x^2, c),$$

que descreve a superfície singular conhecida como Cuspidal edge.

Observe também que sobre a superfície temos a curva dada pela equação  $3\varepsilon x_0 + c = 0$  e se esta não se anula, mas  $x_0 = 0$  então temos  $a = b = 0$  e  $c \neq 0$ , ou seja, estamos sobre o eixo- $c$  e fora da origem. Dessa forma, temos 5 regiões para descrever.

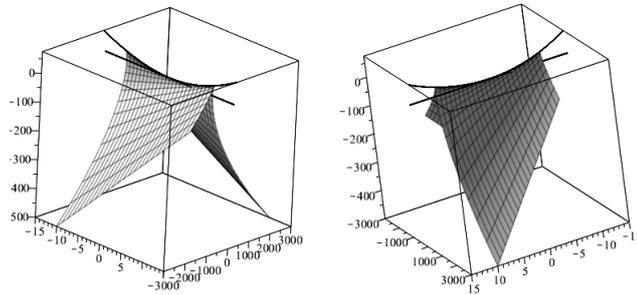


Figura 3 – Superfície Cuspidal Edge, quando  $\varepsilon = 1$ .

Note que sempre existe pelo menos um  $x$  tal que  $\varepsilon x^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , para qualquer  $a, b, c$  e o conjunto bifurcação é o conjunto onde existe uma raiz  $x$  de  $\varepsilon x^3 + cx^2 + bx + a = 0$  com multiplicidade maior ou igual à 2. Dessa forma, chamamos de singularidades especiais as singularidades  $(x_0, 0, 0)$  tal que existe  $x_0$  raiz da equação  $\varepsilon x^3 + cx^2 + bx + a = 0$ . Ou seja, com as mudanças anteriores, obtemos:

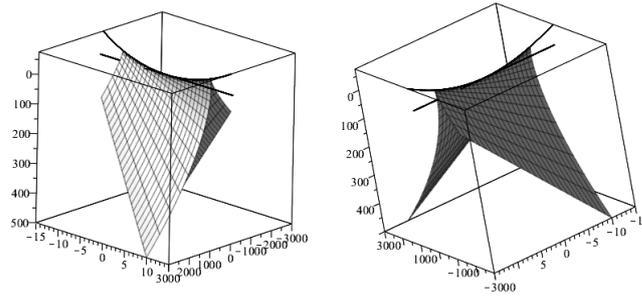


Figura 4 – Superfície Cuspidal Edge, quando  $\varepsilon = -1$ .

- (a) Na origem  $O$ , ou seja,  $a = b = c = 0$ :

Temos que  $x_0 = 0$  e corresponde à única singularidade de multiplicidade 3 da cúbica e, neste caso, é equivalente ao próprio germe  $(x, z + \varepsilon x^3 y + xy^3, y^2)$ .

- (b) Sobre a curva  $3\varepsilon x + c = 0$ , parametrizada por  $(-\varepsilon x^3, 3\varepsilon x^2, -3\varepsilon x)$  (desenhada em preto nas Figuras 3 e 4) na superfície e fora da origem:

Para qualquer  $(a, b, c)$  nesta curva temos uma singularidade especial  $(-\varepsilon \frac{c}{3}, 0, 0)$  com a forma normal  $(x, z + \varepsilon x^3 y + y^3, y^2)$ , que possui codimensão igual à 2, obtida da condição  $\varepsilon x^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , sendo que ela também satisfaz  $c + 3\varepsilon x = 0$ , sendo assim a esperada raiz de multiplicidade 3.

- (c) Sobre o eixo- $c$  e fora da origem (representado em preto nas Figuras 3 e 4):

Temos uma singularidade especial  $(0, 0, 0)$  (correspondente à raiz de multiplicidade 2 da cúbica) equivalente à  $(x, z + x^2 y + \varepsilon y^5, y^2)$ , que possui codimensão igual à 2 e uma singularidade especial (raiz simples) equivalente à  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão zero.

- (d) Sobre a superfície e fora das regiões descritas anteriormente:

Temos uma singularidade especial  $(x, 0, 0)$ , com  $x \neq 0$  com a forma normal  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$  (correspondente à raiz de multiplicidade 2 da cúbica), que possui codimensão igual à 1 e uma singularidade especial (raiz simples) com a forma  $(x, z + xy, y^2)$ , de codimensão 0.

- (e) No complementar da superfície:

Temos uma ou três singularidades especiais com a forma normal  $(x, z + xy, y^2)$  se  $\varepsilon x^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , de codimensão igual à 0.

Apresentados os conjuntos bifurcações dos germes simples, iremos demonstrar que o germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^8)$  é não simples e isto segue durante a construção do conjunto bifurcação.

XVI Germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^8)$

Considere o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^8 + az^3 + bz^4 + cz^7)$  e uma singularidade  $(x_0, y_0, z_0)$ , ou seja,  $7cz_0^6 + 8\varepsilon z_0^7 + 4bz_0^3 + 5z_0^4 + 3az_0^2 + 2yz_0 + x = 0$ . Realizando a translação  $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  e mudanças de coordenadas na fonte e na meta, obtemos

$$\begin{aligned} & (x, y, xz + (28\varepsilon z_0^6 + 21cz_0^5 + 6bz_0^2 + 10z_0^3 + 3az_0 + y_0)z^2 + yz^2 + \\ & (56\varepsilon z_0^5 + 35cz_0^4 + 4bz_0 + 10z_0^2 + a)z^3 + (70\varepsilon z_0^4 + 35cz_0^3 + b + 5z_0)z^4 + \\ & (56\varepsilon z_0^3 + 21cz_0^2 + 1)z^5 + (28\varepsilon z_0^2 + 7cz_0)z^6 + (8\varepsilon z_0 + c)z^7 + \varepsilon z^8). \end{aligned}$$

Explicitamos os conjuntos bifurcação do interior (considerando  $\mathcal{A}$ -equivalência) e do bordo ( $\mathcal{B}$ -equivalência) separados, para fazer uma análise mais detalhada.

No interior, se  $28\varepsilon z_0^6 + 21cz_0^5 + 6bz_0^2 + 10z_0^3 + 3az_0 + y_0 \neq 0$  então temos a singularidade  $\mathcal{A}$ -estável  $(x, y, z^2)$ . Agora se o coeficiente do monômio  $z^2$  se anula, então dependemos dos valores dos outros coeficientes e utilizamos aqui a Proposição 3.4 de (NABARRO, 2000). Se  $56\varepsilon z_0^5 + 35cz_0^4 + 4bz_0 + 10z_0^2 + a \neq 0$  então obtemos o germe  $(x, y, xz + z^3 + y^2z)$ , de codimensão nula, por outro lado, se  $56\varepsilon z_0^5 + 35cz_0^4 + 4bz_0 + 10z_0^2 + a = 0$  e  $70\varepsilon z_0^4 + 35cz_0^3 + b + 5z_0 \neq 0$  então temos o germe  $\mathcal{A}$ -estável  $(x, y, xz + yz^2, z^4)$ . Agora se todas as equações anteriores se anulam e  $56\varepsilon z_0^3 + 21cz_0^2 + 1 \neq 0$  temos o germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^5)$ , de codimensão 1 e se  $56\varepsilon z_0^3 + 21cz_0^2 + 1 = 0$ , realizando mudanças de coordenadas, se  $28\varepsilon z_0^2 + 7cz_0 \neq 0$ ,  $8\varepsilon z_0 + c \neq 0$ ,  $-\frac{1}{112} \frac{15c^2 + 128\varepsilon cz + 512z^2}{z(c+4\varepsilon z)} \neq 0$  e  $\frac{1}{1568} \frac{(c+8\varepsilon z)(23c^2 + 32c\varepsilon z + 128z^2)}{z^2(c+4\varepsilon z)^2} \neq 0$  então obtemos o germe não simples  $(x, y, xz + yz^2 + z^6 + \varepsilon z^8 + Az^9)$ , que possui  $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2.

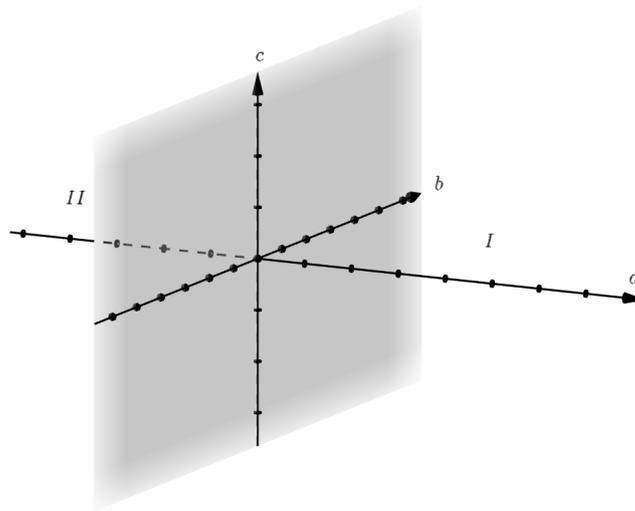
Dessa forma, o conjunto bifurcação no interior é  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; 21cz^5 + 28\varepsilon z^6 + 6bz^2 + 10z^3 + 3az + y = 0, 35cz^4 + 56\varepsilon z^5 + 4bz + 10z^2 + a = 0 \text{ e } 35cz^3 + 70\varepsilon z^4 + b + 5z = 0\}$ , este conjunto também pode ser escrito pela parametrização

$$\left( -\frac{1}{6} \frac{56\varepsilon z^6 - 10z^3 + 5y}{z}, \frac{5}{18} \frac{28\varepsilon z^6 - 8z^3 + y}{z^2}, -\frac{1}{126} \frac{280\varepsilon z^6 + 10z^3 + y}{z^5} \right).$$

Por outro lado no bordo, nossas singularidades são  $(0, y_0, 0)$  e nossa forma normal se resume a  $(x, y, xz + y_0z^2 + yz^2 + az^3 + bz^4 + z^5 + cz^7 + \varepsilon z^8)$ . Assim, se  $y_0 \neq 0$  então obtemos o germe  $\mathcal{B}$ -estável  $(x, y, xz + z^2)$  e se  $y_0 = 0$ , dependemos do valor de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Se  $y_0 = 0$  e  $a \neq 0$  então obtemos a singularidade  $(x, y, xz + yz^2 + z^3)$ , de codimensão nula e se  $y_0 = a = 0$  mas  $b \neq 0$  então temos o germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^4)$ , de codimensão 1 (este germe é 5-determinado, desta forma, com algumas mudanças de coordenadas, podemos eliminar o termo  $z^5$  sem afetar os coeficientes dos monômios de grau menor que 5). Agora, se  $y_0 = a = b = c = 0$  obtemos o próprio germe e se  $y_0 = a = b = 0$  e  $c \neq 0$  então obtemos o germe não simples  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + z^7 + Az^8)$ , provando assim que  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^8)$  também é não simples.

Assim, o conjunto bifurcação no bordo é  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = 0\} = \text{plano-}bc$ .

Vamos analisar cada região separadamente:



(a) Na origem  $O = (0, 0, 0)$ :

Temos que a singularidade  $(x_0, y_0, x_0) = (0, 0, 0)$  é equivalente ao próprio germe  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + \varepsilon z^8)$ .

(b) Eixo- $c$  menos a origem:

Temos uma singularidade  $(0, 0, 0)$  com a forma normal  $(x, y, xz + yz^2 + z^5 + z^7 + Az^8)$ , que possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 3 e é não simples.

(c) Plano- $bc$  menos o eixo- $c$ .

Temos uma singularidade  $(0, 0, 0)$  da forma  $(x, y, xz + yz^2 + z^4)$ , que possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 1.

(d) Fora do plano- $bc$ . Temos uma singularidade  $(0, 0, 0)$  equivalente à  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$ , de codimensão 0.

Como consequência da análise anterior temos os diagramas de adjacências. Como vimos na Seção 3.2, as  $\mathcal{B}$ -classes às quais  $L$  é adjacente são aquelas que aparecem em um desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal de qualquer germe em  $L$ . Dessa forma, a análise que realizamos nesta seção nos permite apresentar as adjacências dos germes  $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ , descrito nos diagramas a

seguir:

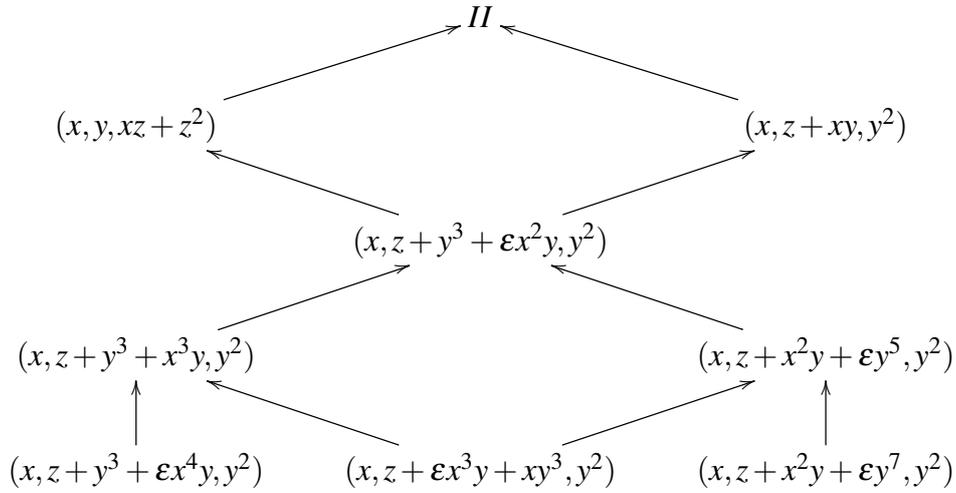


Diagrama dos germes com 1-jato  $(x, z, 0)$ .

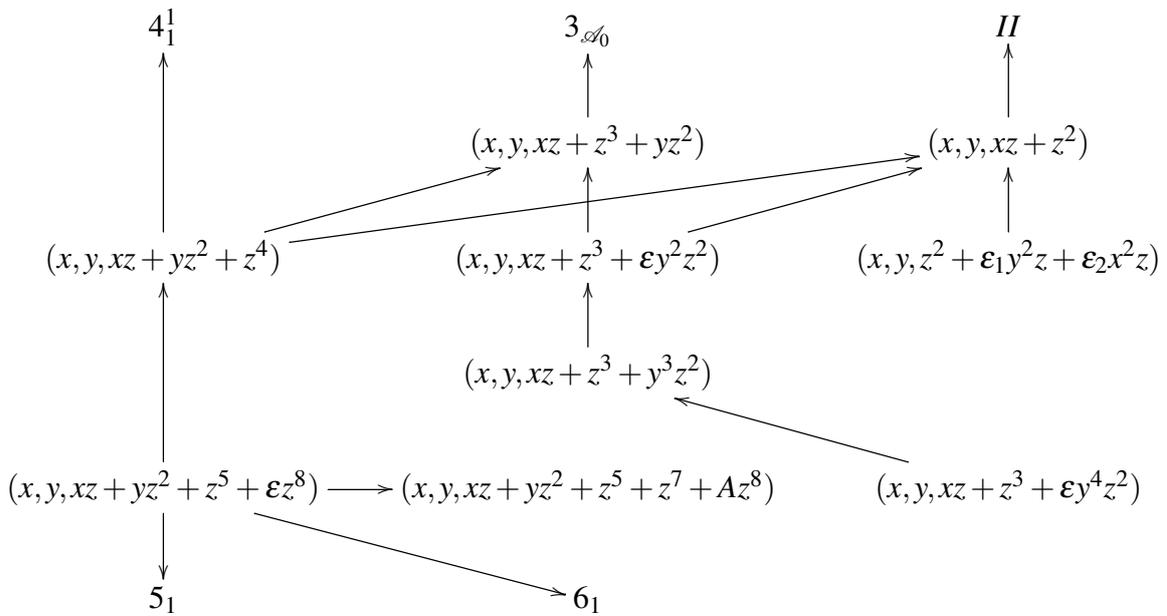


Diagrama dos germes com 1-jato  $(x, y, 0)$ .

Onde as singularidades  $II, 3_{\mathcal{A}_0}, 4_1^1, 5_1, 6_1$  são as da Tabela 6.

### 4.3 Estudos sobre a geometria

Nesta seção vamos estudar algumas propriedades geométricas dos germes  $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  dados na Tabela 4, os quais surgem de projeções ortogonais de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  com bordo.

Para cada um dos germes da Tabela 4, é interessante encontrar uma hipersuperfície  $M$  para a qual a família de projeções ortogonais realiza um desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal do germe.

Mais precisamente, suponha que

$$i : (x, y, z) \mapsto (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z), W(x, y, z)),$$

é um germe de imersão em  $(0, 0, 0)$ , tal que  $M$  seja imagem de  $i$ . Estamos interessados na restrição  $z \geq 0$ , onde  $z = 0$  representa o bordo de  $M$ .

Escreva a projeção ortogonal como na Seção 4.1, ou seja,

$$P((x, y, z), (\lambda, \beta, \mu)) = (X - \lambda Y, Z - \beta Y, W - \mu Y).$$

Para realizar um desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal, não temos problema com desdobramentos a 1-parâmetro, mas com 2 ou 3 parâmetros para obter uma imersão bem definida, escrevemos um desdobramento versal 'simétrico' da forma

$$(X(x, y, z) - \lambda Y(x, y, z), Z(x, y, z) - \beta Y(x, y, z), W(x, y, z) - \mu Y(x, y, z)),$$

e no caso de 2 parâmetros,  $\lambda$ ,  $\beta$  ou  $\mu$  serão nulos, a depender do germe. Ou seja, o truque é obter os mesmos monômios em todas as coordenadas.

Como o conjunto bifurcação para quaisquer desdobramentos versais são difeomorfos, então vamos realizar as contas com o desdobramento que for melhor para cada situação.

Para cada forma normal apresentamos a figura do bordo,  $\Sigma f$  (o conjunto singular do germe) e o conjunto  $K$  (o núcleo da diferencial de  $f$ ). Também estudamos a imagem de  $\Sigma f$  e a imagem do bordo por membros da família do desdobramento versal. Aqui temos o intuito de reconhecer cada caso através do comportamento geométrico e também fornecemos informações sobre a singularidade da restrição do germe ao bordo.

O conjunto  $f^{-1}(0)$  é a origem para todos os germes, por isso, não será analisado e o germe  $I$  é uma submersão. Nas figuras, representamos o bordo e sua imagem por quadriculado na cor cinza; conjunto singular e sua imagem em quadriculado preto (parte de  $z \geq 0$ ) e pontilhado cinza (parte "virtual" onde  $z < 0$ ).

### 4.3.1 Informações geométricas

Note que para germes em que o 1-jato é  $(x, y, 0)$ , ou seja, germes equivalentes à  $(x, y, f_3(x, y, z))$ , a matriz jacobiana é da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_{3_x} & f_{3_y} & f_{3_z} \end{pmatrix},$$

assim, o conjunto singular do germe é  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f_{3_z}(x, y, z) = 0\}$ .

Analogamente, para germes com o 1-jato da forma  $(x, z, 0)$ , ou seja, germes equivalentes à  $(x, z + g(x, y), y^2)$ , a matriz jacobiana é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_x & g_y & 1 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

logo, nestes casos, o conjunto singular é o plano  $y = 0$ .

II Germe  $f(x, y, z) = (x, y, xz + z^2)$  de  $\mathcal{B}_e$ -cod 0, ou seja, é um germe estável e é realizado pela imersão  $i(x, y, z) = (x, z, y, xz + z^2)$ . Esta hipersuperfície  $M$  possui  $(0, 0, 0, 1)$  como vetor normal na origem e sua função curvatura normal é  $k_n(w) = 2ac + 2c^2$ , onde  $w$  é vetor tangente unitário escrito da forma  $a(1, 0, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) + c(0, 1, 0, 0) \in T_0M$ , isto é,  $w$  é o vetor  $(a, c, b, 0) \in \mathbb{R}^4$ . Assim, as direções assintóticas satisfazem  $2ac + 2c^2 = 0$ , ou seja, são da forma  $(a, 0, b, 0)$  ou  $(-c, c, b, 0)$  e, portanto, a direção de projeção  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica. Além disso, note que as matrizes da primeira e segunda forma fundamental são

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Logo,  $K(0) = \frac{\det(H)}{\det(G)} = 0$ , ou seja, a origem é um ponto parabólico de  $M$ .

Como  $j^1 f = (x, y, 0)$  então o conjunto singular de  $f$  é

$$\Sigma f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2z = 0\},$$

ou seja, o plano  $(-2z, y, z)$ . Além disso,  $K = \ker df(0) = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$ , isto é,  $K$  é o eixo- $z$ .

Note que os vetores diretores do plano  $(-2z, y, z)$  são  $(0, 1, 0)$  e  $(-2, 0, 1)$ , assim, o plano  $z = 0$  (bordo),  $K$  e  $\Sigma f$  são transversais entre si (ver Figura 5, esquerda).

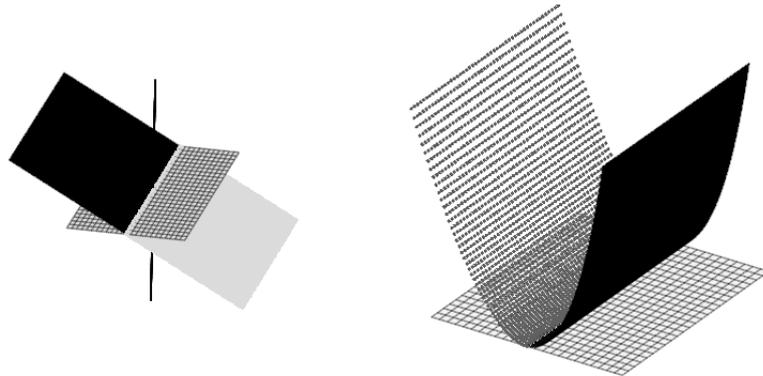


Figura 5 – Conjunto singular, bordo e suas respectivas imagens do germe II.

A imagem do bordo é  $f(x, y, 0) = (x, y, 0)$ , ou seja, o plano  $z = 0$  e a imagem do conjunto singular é a superfície dada por  $f(-2z, y, z) = (-2z, y, -z^2)$ . Logo, a imagem do bordo e do conjunto singular são tangentes em todos os pontos onde se intersectam, ou seja, pontos da forma  $(0, y, 0)$ , pois os vetores tangentes da superfície  $f(\Sigma f)$  em  $(y, 0)$  são  $(0, 1, 0)$  e  $(-2, 0, 0)$  que geram o plano  $z = 0$  (ver Figura 5, direita).

III Germe  $f(x, y, z) = (x, y, xz + z^3 + yz^2)$ , com  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 0.

Uma realização para  $f$  é  $i(x, y, z) = (x, z, y, xz + z^3 + yz^2)$  e a hipersuperfície  $M$ , imagem de  $i$ , possui na origem vetor normal  $(0, 0, 0, 1)$  e segunda forma fundamental  $II_0(w) = k_n(w) = 2ac$ , onde  $w = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) + c(0, 1, 0, 0) \in T_0M$  é unitário. Assim, as direções assintóticas são da forma  $(a, 0, b, 0)$  ou  $(0, c, b, 0)$ , ou seja,  $(0, 1, 0, 0)$  é direção assintótica de  $M$ . Além disso, assim como no item anterior a curvatura Gaussiana de  $M$  se anula na origem, isto é, 0 é um ponto parabólico de  $M$ .

O conjunto  $K$  de  $f$  é o eixo  $-z$  e o conjunto singular de  $f$  é a superfície dada por  $g(y, z) = (-3z^2 - 2yz, y, z)$ . Assim, o bordo e  $\Sigma f$  se encontram em pontos da forma  $(0, y, 0)$  e como os vetores tangentes de  $\Sigma f$  são  $(-2z, 1, 0)$  e  $(-6z - 2y, 0, 1)$  então o bordo e  $\Sigma f$  são transversais. Além disso, o bordo também é transversal à  $K$ , porém  $\Sigma f$  e  $K$  não são transversais (ver Figura 6, esquerda).

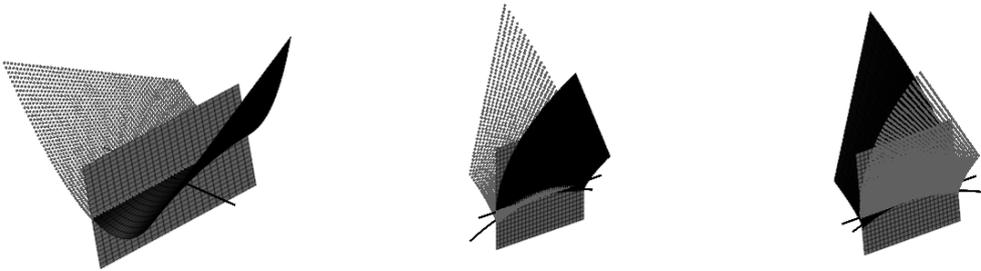


Figura 6 – Conjunto singular, bordo e suas respectivas imagens por duas perspectivas do germe III.

Note que a imagem do bordo é o plano  $z = 0$ , a imagem do conjunto singular é a superfície dada por  $f(-3z^2 - 2yz, y, z) = (-3z^2 - 2yz, y, -2z^3 - yz^2)$  e que tais conjuntos se encontram ao longo das curvas  $(0, y, 0)$  e  $(z^2, -2z, 0)$ , que são imagem dos pontos da forma  $(y, 0)$  e  $(-2z, z)$ .

Ainda mais, como os vetores tangentes ao conjunto singular são  $(-2z, 1, -z^2)$  e  $(-6z - 2y, 0, -6z^2 - 2yz)$  então na origem a superfície  $f(\Sigma f)$  possui apenas o vetor tangente  $(0, 1, 0)$ , ou seja, na origem tal superfície não possui plano tangente. Além disso, a imagem do bordo e esta superfície são tangentes no eixo  $-y$  (exceto na origem) e transversais nos pontos  $(-2z, z)$ , com  $z \neq 0$ , como podemos ver na Figura 6, centro e direita.

IV Germe  $f(x, y, z) = (x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2)$ , com desdobramento  $F(x, y, z, a) = (x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2 + az^2)$  e  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 1.

Para encontrar uma realização, tomamos o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal alternativo  $(x + \lambda z, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2)$ , obtendo a realização  $i(x, y, z) = (x, z, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2)$ . Neste contexto, o vetor normal à  $M$  em 0 é  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $k_n(0) = II_0(w) = 2ac$ , com  $w \in T_0M$  e  $\|w\| = 1$ ,  $K(0) = 0$  e as direções assintóticas são da forma  $(a, 0, b, 0)$  e  $(0, c, b, 0)$ , ou seja,  $(0, 1, 0, 0)$  é direção assintótica de  $M$  e a origem é um ponto parabólico da hipersuperfície  $M$ .

O conjunto  $K$  de  $f$  é o eixo  $-z$  e o conjunto singular de  $f$  é a superfície  $(-3z^2 - \varepsilon 2y^2 z, y, z)$ . Assim, o bordo e  $K$  são perpendiculares na origem e  $K$  não é transversal ao conjunto singular em 0. Além disso,  $\Sigma f$  e o bordo se encontram sobre o eixo  $-y$  onde são transversais, pois os pontos  $(0, y, 0)$  são imagem de  $(y, 0)$  e os vetores tangentes à superfície em  $(y, 0)$  são  $(0, 1, 0)$  e  $(-2\varepsilon y^2, 0, 1)$  (ver Figura 7, esquerda para  $\varepsilon = 1$  e direita para  $\varepsilon = -1$ ).

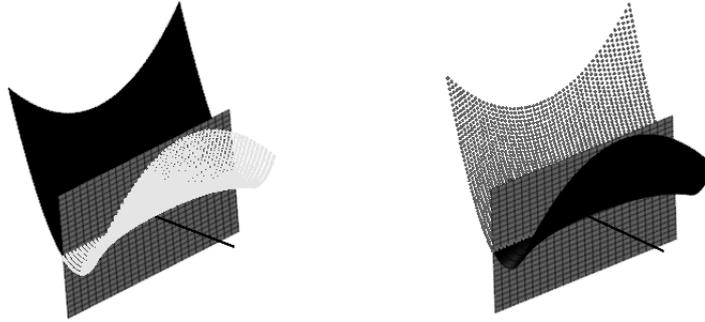


Figura 7 – Conjunto singular,  $K$  e o bordo para  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon = -1$  do germe IV.

A imagem do bordo é o plano  $z = 0$  e a imagem do conjunto singular é a superfície

$$(-2\varepsilon y^2 z - 3z^2, y, -\varepsilon y^2 z^2 - 2z^3).$$

Note que, tais conjuntos se encontram em pontos da forma  $(0, y, 0)$  e  $(\frac{1}{4}y^4, y, 0)$  que são imagens de  $(y, 0)$  e  $(y, -\frac{\varepsilon}{2}y^2)$ , respectivamente. Além disso, os vetores tangentes à  $f(\Sigma f)$  são

$$(-4\varepsilon yz, 1, -2\varepsilon yz^2) \text{ e } (-6z - 2\varepsilon y^2, 0, -6z^2 - 2\varepsilon y^2 z).$$

Assim, a imagem do bordo e  $f(\Sigma f)$  são tangentes ao longo do eixo  $-y$  (exceto na origem) e na origem  $f(\Sigma f)$  possui apenas o vetor  $(0, 1, 0)$  não nulo. Já em pontos da forma  $(\frac{1}{4}y^4, y, 0)$ , com  $y \neq 0$ , a superfície e o bordo são transversais (ver Figura 8, esquerda para  $\varepsilon = 1$  e direita para  $\varepsilon = -1$ ). Neste caso, os vetores tangentes à imagem do conjunto singular são  $(2y^3, 1, -\frac{\varepsilon}{2}y^5)$  e  $(\varepsilon y^2, 0, -\frac{1}{2}y^4)$ .

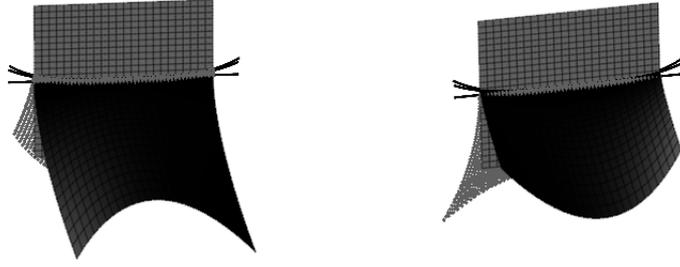


Figura 8 – Imagem do conjunto singular e do bordo para  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon = -1$  do germe  $IV$ .

Observamos que a superfície  $f(\Sigma f)$  possui uma linha cuspidal  $(\frac{1}{3}y^4, y, -\frac{\varepsilon}{27}y^6)$  que não está contida no plano  $z = 0$ , mas intercepta o plano transversalmente. Assim, as partes virtual e real da superfície não são separadas pelo plano.

Ao perturbarmos utilizando o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal  $F(x, y, z, a) = (x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2 + az^2)$ , obtemos que o conjunto singular é a superfície  $(-3z^2 - 2\varepsilon y^2 z - 2az, y, z)$  e a sua imagem é

$$(-3z^2 - 2\varepsilon y^2 z - 2az, y, -2z^3 - \varepsilon y^2 z^2 - az^2).$$

Além disso, o bordo é preservado pela perturbação. Assim, tais imagens se encontram ao longo do eixo  $-y$  e sobre os pontos onde  $-2z - \varepsilon y^2 - a = 0$  e os vetores tangentes à  $F(\Sigma F)$  são

$$(-4\varepsilon yz, 1, -2\varepsilon yz^2) \text{ e } (-6z - 2\varepsilon y^2 - 2a, 0, -6z^2 - 2\varepsilon y^2 z - 2az).$$

Quando  $\varepsilon = 1$ , ao perturbarmos por valores negativos, obtemos que a imagem do bordo por  $F$  e  $F(\Sigma F)$  são tangentes ao longo do eixo  $-y$ , exceto para os dois pontos  $(0, \pm\sqrt{-a}, 0)$ . Já para valores de  $a$  positivos, os conjuntos são tangentes em todos os pontos da forma  $(0, y, 0)$ . Quando  $\varepsilon = -1$ , ao perturbarmos por valores positivos, a imagem do bordo por  $F$  e  $F(\Sigma F)$  são tangentes em pontos da forma  $(0, y, 0)$ , exceto em  $(0, \pm\sqrt{a}, 0)$ , e quando perturbamos por valores negativos, os conjuntos são tangentes ao longo de todo o eixo  $-y$ . Já para os pontos  $(y, -\frac{1}{2}(\varepsilon y^2 + a))$ , os vetores tangentes a superfície que é imagem do conjunto singular são

$$\left(2y(y^2 + \varepsilon a), 1, -\frac{\varepsilon}{2}y(\varepsilon y^2 + a)\right) \text{ e } \left(\varepsilon y^2 + a, 0, -\frac{1}{2}(\varepsilon y^2 + a)^2\right).$$

Note que quando  $\varepsilon y^2 + a$  se anula, estamos novamente sobre o eixo  $-y$  e temos os pontos onde não há tangência. Quando  $\varepsilon y^2 + a \neq 0$ , obtemos que as imagens do bordo e do conjunto singular são transversais. Veja Figura 9 para  $\varepsilon = 1$  e 10 para  $\varepsilon = -1$ .

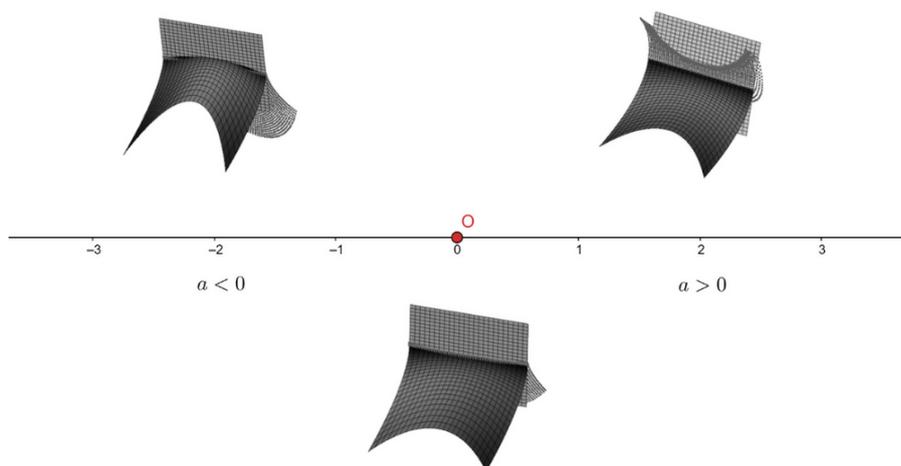


Figura 9 – Imagem do conjunto singular e do bordo perturbados para  $\varepsilon = 1$  do germe *IV*.

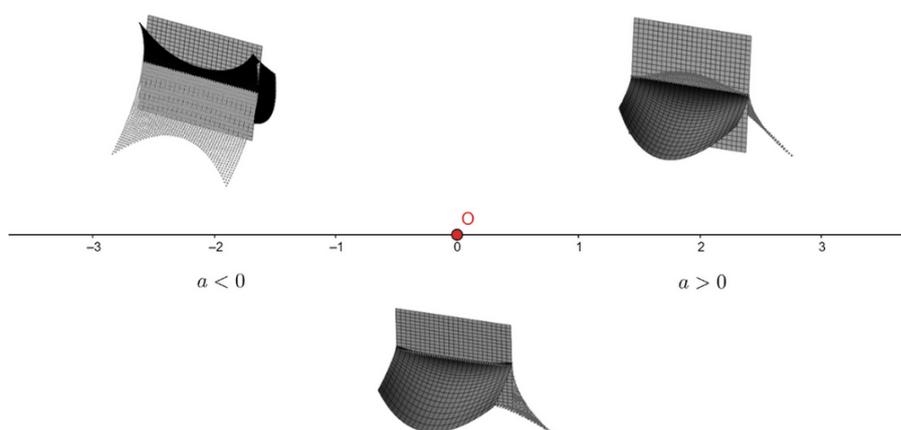


Figura 10 – Imagem do conjunto singular e do bordo perturbados para  $\varepsilon = -1$  do germe *IV*.

*V* Germe  $f(x, y, z) = (x, y, xz + z^3 + y^3z^2)$ , que possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 2 e desdobramento versal  $F(x, y, z) = (x, y, xz + z^3 + y^3z^2 + az^2 + byz^2)$ .

Neste caso, não conseguimos obter uma imersão bem definida a partir do desdobramento dado inicialmente e, por esse motivo, tomamos o desdobramento simétrico

$$(x + \lambda(z + yz^2), y, xz + z^3 + y^3z^2 + \mu(z + yz^2)).$$

Tal desdobramento é  $\mathcal{B}_e$ -versal pois, utilizando o software Transversal, vemos que os vetores  $(z + yz^2, 0, 0)$  e  $(0, 0, z + yz^2)$  formam uma base para o complementar do tangente (logo é transversal e pelo Teorema 2.2.1, é versal). Neste contexto, podemos realizar o germe com a imersão

$$i(x, y, z) = (x, z + yz^2, y, xz + z^3 + y^3z^2).$$

A hipersuperfície  $M$  imagem de  $i$ , possui na origem vetor normal  $(0, 0, 0, 1)$ , curvatura Gaussiana nula e curvatura normal  $k_n(w) = II_0(w) = 2ac$ , onde  $w \in T_0M$  é unitário. Assim, a origem é um ponto parabólico e  $(0, 1, 0, 0)$  é direção assintótica de  $M$ .

O conjunto singular de  $f$  é a superfície  $(-3z^2 - 2y^3z, y, z)$  e  $K$  é o eixo  $-z$ . Assim, como vemos na Figura 11 esquerda,  $\Sigma f$  e o bordo se encontram sobre o eixo  $-y$  e, nestes pontos, os vetores tangentes a superfície  $\Sigma f$  são  $(0, 1, 0)$  e  $(-2y^3, 0, 1)$ , logo, o conjunto singular e o bordo  $z = 0$  são transversais. Além disso,  $K$  é perpendicular ao bordo na origem, mas não é transversal à  $\Sigma f$ .

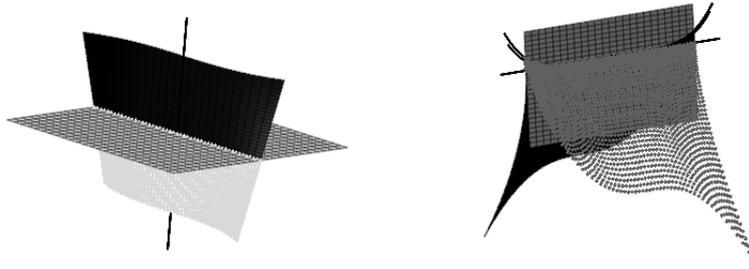


Figura 11 – Conjunto singular, bordo e suas respectivas imagens do germe  $V$ .

A imagem do bordo é o plano  $z = 0$  e do conjunto singular é a superfície

$$(-3z^2 - 2y^3z, y, -2z^3 - y^3z^2),$$

assim, esses conjuntos se encontram ao longo do eixo  $-y$  e da curva imagem dos pontos  $(y, -\frac{1}{2}y^3)$ , dessa forma, são tangentes em pontos da forma  $(0, y, 0)$ , com  $y \neq 0$ , pois em tais pontos os vetores tangentes à  $f(\Sigma f)$  são  $(0, 1, 0)$  e  $(-2y^2, 0, 0)$ , já na origem possuímos apenas o vetor tangente  $(0, 1, 0)$ . Em pontos das forma  $(y, -\frac{1}{2}y^3)$ , os vetores tangentes à imagem do conjunto singular são

$$\left(3y^5, 1, -\frac{3}{4}y^8\right) \text{ e } \left(y^3, 0, -\frac{1}{2}y^6\right),$$

logo,  $f(\Sigma f)$  e a imagem do bordo são transversais ao longo da curva, com exceção da origem (ver Figura 11 direita).

Observe que a superfície  $f(\Sigma f)$  possui uma linha cuspidal  $(\frac{1}{3}y^6, y, -\frac{1}{27}y^9)$  que não está contida no plano  $z = 0$ , mas intercepta o plano transversalmente. Assim, as partes virtual e real da superfície não são separadas pelo plano.

Ao perturbarmos utilizando o  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento inicial, obtemos que a imagem do conjunto singular será a superfície

$$(-3z^2 - 2y^3z - 2az - 2byz, y, -2z^3 - y^3z^2 - az^2 - byz^2)$$

e a imagem do bordo por  $F$  é o plano  $z = 0$ . Assim, tais conjuntos se encontram sobre o eixo  $-y$  e sobre a curva  $-2z - y^3 - a - by = 0$ . Note que os vetores tangentes à superfície  $F(\Sigma F)$  serão

$$(2z(-3y^2 - b), 1, z^2(-3y^2 - b)) \text{ e } (2(-3z - y^3 - a - by), 0, 2z(-3z - y^3 - a - by)).$$

Logo, em pontos sobre o eixo  $-y$  ocorre a tangência se, e somente se,  $y^3 + a + by \neq 0$  (neste caso, estamos fora do conjunto bifurcação do germe) e quando a condição se anula possuímos apenas um vetor tangente não nulo. Como vimos na Seção 4.2, o conjunto bifurcação de  $f$  é uma cúspide. A tangência ocorrerá sobre todo o eixo  $-y$  exceto em apenas um ponto quando estamos perturbando acima da cúspide, em 2 pontos sobre a cúspide e em três pontos abaixo da cúspide.

Já sobre a curva  $-2z - y^3 - a - by = 0$ , se temos  $z = \frac{-y^3 - a - by}{2} = 0$  estamos sobre o eixo  $-y$  e já detalhamos o comportamento, então falaremos de quando  $z \neq 0$  (estamos fora do conjunto bifurcação). Assim, como  $-3z - y^3 - a - by = -\frac{1}{2}(-y^3 - a - by) \neq 0$  então a superfície  $F(\Sigma F)$  e o plano  $z = 0$  serão transversais. Ver Figura 12.

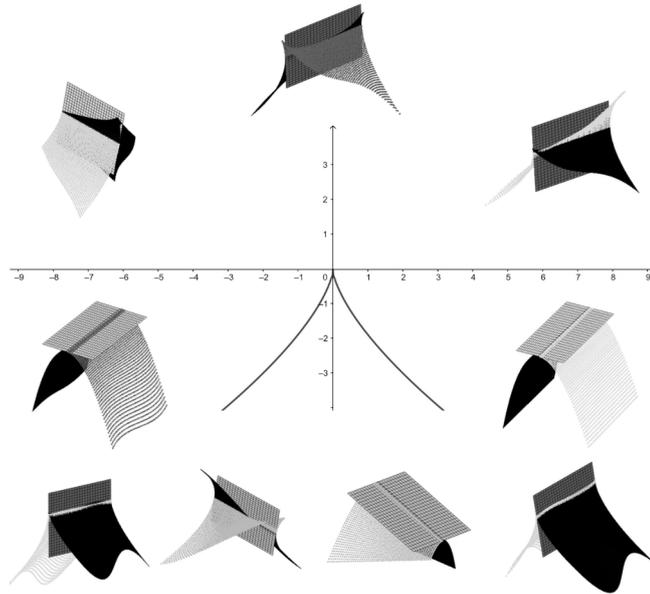


Figura 12 – Imagem do conjunto singular e do bordo pela perturbação do germe  $V$ .

VI Germe  $f(x, y, z) = (x, y, xz + z^3 + \epsilon y^4 z^2)$ , com desdobramento  $F(x, y, z) = (x, y, xz + z^3 + \epsilon y^4 z^2 + az^2 + byz^2 + cy^2 z^2)$  e  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 3.

Neste caso, novamente não conseguimos um desdobramento simétrico a partir do germe original e tomamos o germe equivalente  $(x, y, y^2 + xz + z^3 + \epsilon y^4 z^2)$ , obtendo o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal simétrico

$$(x + \lambda(z + yz^2 + y^2 z^2), y + \beta(z + yz^2 + y^2 z^2), y^2 + xz + z^3 + \epsilon y^4 z^2 + \mu(z + yz^2 + y^2 z^2)).$$

Neste contexto, uma realização será a imersão

$$(x, z + yz^2 + y^2z^2, y, y^2 + xz + z^3 + \varepsilon y^4 z^2).$$

A hipersuperfície  $M$  imagem desta aplicação possui como base para o espaço tangente na origem  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ , logo, possui vetor normal  $(0, 0, 0, 1)$  e a segunda forma fundamental para  $w \in T_0M$  unitário é  $II_0(w) = 2ac + 2b^2$ , isto é, as direções assintóticas são da forma  $(a, 0, 0, 0)$  e  $(-\frac{b^2}{c}, c, b, 0)$  e, portanto,  $(0, 1, 0, 0)$  é direção assintótica da hipersuperfície  $M$ . Além disso, a curvatura Gaussiana  $K(0) = 2$  e note que por mudanças de coordenadas podemos reescrever a forma quadrática  $2ac + 2b^2$  da forma  $a^2 + b^2 + c^2$ , ou seja, como vimos na Seção 2.3,  $\text{sign}(II_0) = 3$  e a origem é um ponto elíptico.

O conjunto singular é a superfície  $(-3z^2 - 2\varepsilon y^4 z, y, z)$  e  $K = \text{eixo}-z$ . Note que os vetores tangentes à superfície são  $(-8\varepsilon y^3 z, 1, 0)$  e  $(-6z - 2\varepsilon y^4, 0, 1)$ . Logo,  $K$  é transversal ao bordo, mas não à  $\Sigma f$  na origem. Além disso, o conjunto singular e o bordo se encontram ao longo do eixo  $-y$  e nestes pontos os conjuntos são transversais (ver Figura 13, esquerda).

A imagem do bordo, o plano  $z = 0$ , e do conjunto singular, a superfície

$$(-3z^2 - 2\varepsilon y^4 z, y, -2z^3 - \varepsilon y^4 z^2),$$

se encontram sobre o eixo  $-y$  e a curva  $(y, -\frac{\varepsilon}{2}y^4)$ . Note que os vetores tangentes à superfície  $f(\Sigma f)$  são

$$(-6z - 2\varepsilon y^4, 0, -6z^2 - 2\varepsilon y^4 z) \text{ e } (-8\varepsilon y^3 z, 1, -4\varepsilon y^3 z^2),$$

assim, tal superfície é tangente ao plano  $z = 0$  ao longo das semirretas  $(0, y, 0)$ , com  $y > 0$  e  $y < 0$  e na origem temos apenas o vetor tangente  $(0, 1, 0)$ . Além disso, sobre a curva  $(y, -\frac{\varepsilon}{2}y^4)$  a superfície  $f(\Sigma f)$  e o plano  $z = 0$  são transversais (com exceção da origem). Veja a Figura 13, central para  $\varepsilon = 1$  e direita para  $\varepsilon = -1$ .

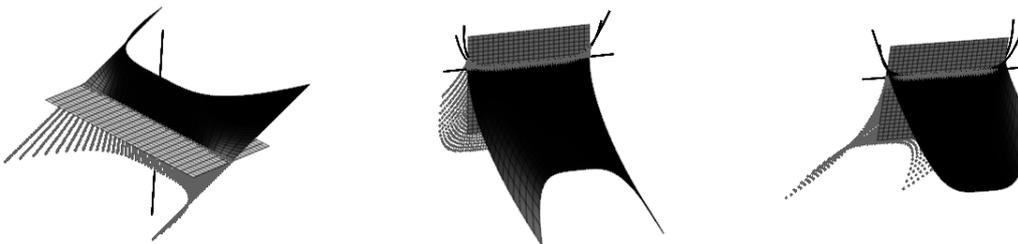


Figura 13 – Conjunto singular, bordo e suas respectivas imagens do germe VI.

Observe que a superfície  $f(\Sigma f)$  possui uma linha cuspidal  $(\frac{1}{3}y^8, y, -\frac{\varepsilon}{27}y^{12})$  que não está contida no plano  $z = 0$ , mas intercepta o plano transversalmente. Assim, as partes virtual e real da superfície não são separadas pelo plano.

Ao perturbarmos com o desdobramento  $F$  obtemos que a imagem do bordo é preservada e a imagem do conjunto singular é a superfície dada por

$$(-3z^2 - 2\epsilon y^4 z - 2az - 2byz - 2cy^2 z, y, -2z^3 - \epsilon y^4 z^2 - az^2 - byz^2 - cy^2 z^2).$$

Note que tais conjuntos se intersectam ao longo do eixo  $-y$  e da curva  $-2z - \epsilon y^4 - a - by - cy^2 = 0$  e os vetores tangentes à superfície  $F(\Sigma F)$  são

$$(2(-3z - \epsilon y^4 - a - by - cy^2), 0, 2z(-3z - \epsilon y^4 - a - by - cy^2))$$

$$\text{e } (-8\epsilon y^3 z - 2bz - 4cyz, 1, -4\epsilon y^3 z^2 - bz^2 - 2cyz^2).$$

Assim, ao longo do eixo  $-y$  o plano  $z = 0$  e a superfície  $F(\Sigma F)$  são tangentes desde que  $\epsilon y^4 + a + by + cy^2 \neq 0$ , caso contrário, obtemos apenas o vetor tangente  $(0, 1, 0)$  não nulo. Como vimos na Seção 4.2, o conjunto bifurcação é a superfície rabo de andorinha e vamos perturbar o germe ao longo das regiões conexas desta superfície, onde a quártica define as singularidades especiais (pontos em que as imagens do conjunto singular e do bordo deixam de ser tangentes). Dessa forma, a superfície  $F(\Sigma F)$  e o plano  $z = 0$  deixam de ser tangentes em 2 pontos quando perturbamos sobre a cúspide ou a parábola, em 3 pontos sobre o tetraedro, em 1 ponto no restante do conjunto bifurcação e quando estamos no exterior da superfície Rabo de Andorinha a tangência deixa de ocorrer em dois pontos abaixo da superfície e em 4 pontos na região interna do tetraedro (quando estamos acima da Rabo de Andorinha a tangência ocorre em todos os pontos). Para mais detalhes veja a Figura 14 quando  $\epsilon = 1$  e Figura 15 quando  $\epsilon = -1$ .

Já ao longo da curva  $-2z - \epsilon y^4 - a - by - cy^2 = 0$ , se  $z = \frac{-\epsilon y^4 - a - by - cy^2}{2} = 0$ , então estamos novamente sobre o eixo  $-y$ , logo, tomamos  $z \neq 0$  (estamos fora do conjunto bifurcação). Neste caso, como  $-3z - \epsilon y^4 - a - by - cy^2 = -\frac{1}{2}(-\epsilon y^4 - a - by - cy^2) \neq 0$  então temos a transversalidade entre a superfície  $F(\Sigma F)$  e o plano  $z = 0$ .

**VII** Germe  $f(x, y, z) = (x, y, xz + yz^2 + z^4)$ , que possui codimensão igual à 1 e desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal  $F(x, y, z) = (x, y, xz + yz^2 + z^4 + az^3)$ .

Para obtermos uma realização bem definida, tomamos o desdobramento alternativo  $(x, y + \beta z, xz + z^4 + yz^2)$  e então, uma realização é  $(x, z, y, xz + yz^2 + z^4)$ . A hipersuperfície  $M$  imagem desta aplicação possui na origem um ponto parabólico e vetor normal  $(0, 0, 0, 1)$ , ainda mais, a segunda forma fundamental de  $M$  é  $2ac$  e, portanto, a direção de projeção  $(0, 1, 0, 0)$  é assintótica de  $M$ .

O conjunto singular é a superfície  $(-2yz - 4z^3, y, z)$  e  $K$  é o eixo  $-z$ . Note que os vetores tangentes à  $\Sigma f$  são  $(-2z, 1, 0)$  e  $(-2y - 12z^2, 0, 1)$ , desta forma a superfície  $\Sigma f$  é transversal ao bordo nos pontos de interseção  $(0, y, 0)$ , além disso, o bordo também é transversal à  $K$  na origem. Porém,  $K$  e  $\Sigma$  não são transversais em 0 (ver Figura 16).

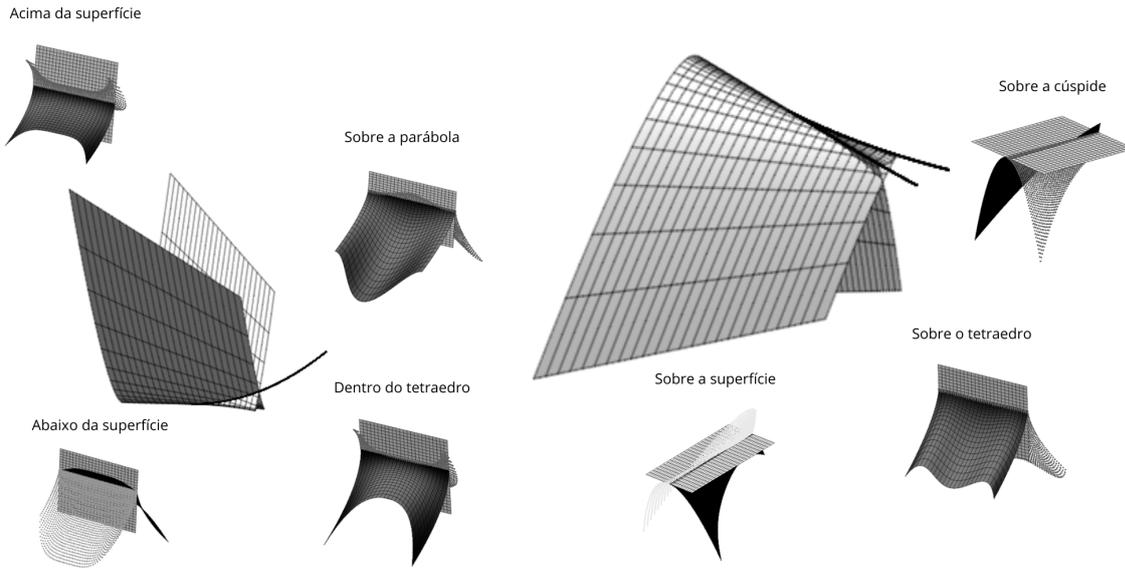


Figura 14 – Imagem do conjunto singular e do bordo para  $\varepsilon = 1$  do germe VI.

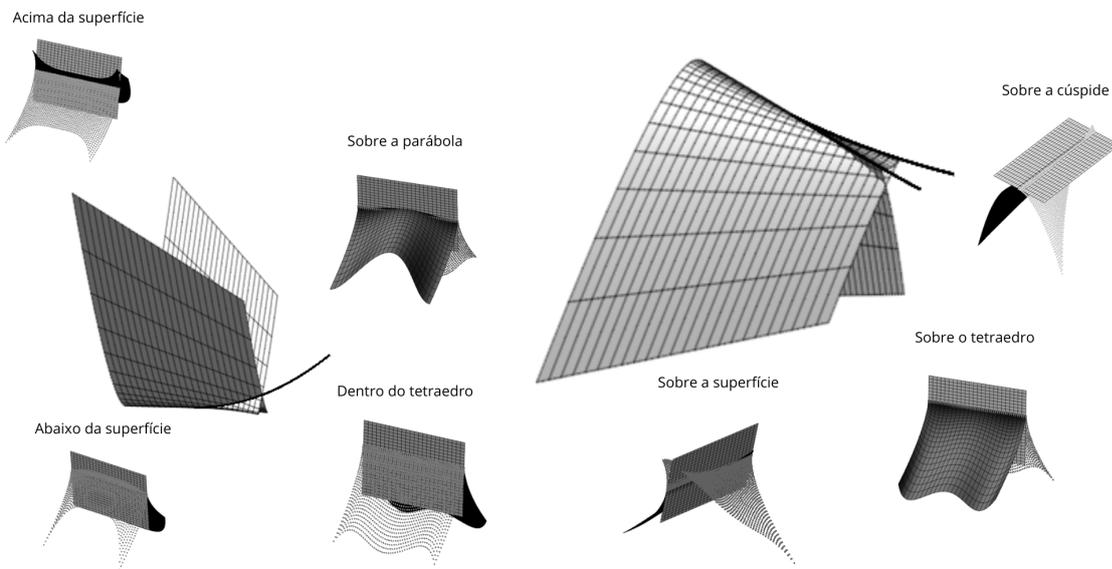


Figura 15 – Imagem do conjunto singular e do bordo para  $\varepsilon = -1$  do germe VI.

Além disso, a imagem do bordo por  $f$  é o plano  $z = 0$  e a restrição ao conjunto singular é a superfície Rabo de Andorinha (parametrizada como em (MARAR, ))

$$(-2yz - 4z^3, y, -yz^2 - 3z^4).$$

Note que a superfície rabo de andorinha e o plano  $-xy$  se encontram ao longo do eixo  $-y$  e sobre a curva  $(-3z^2, z)$ , e os vetores tangentes à superfície são

$$(-2z, 1, -z^2) \text{ e } (-2y - 12z^2, 0, -2yz - 12z^3).$$

Assim, em pontos da forma  $(0, y, 0)$ , com  $y \neq 0$ , a imagem do bordo é tangente à  $f(\Sigma f)$  e na origem temos apenas um vetor tangente não nulo. Além disso, sobre a curva  $(-3z^2, z)$  tais conjuntos são transversais (exceto na origem), ver Figura 17.

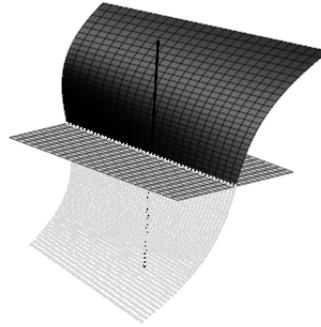


Figura 16 – Conjunto singular,  $K$  e o bordo do germe VII.

Ao perturbarmos o germe pelo desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal  $F(x, y, z) = (x, y, xz + yz^2 + z^4 + az^3)$ , obtemos que  $\Sigma F$  é a superfície  $(-2yz - 4z^3 - 3az^2, y, z)$  e sua imagem é

$$(-2yz - 4z^3 - 3az^2, y, -yz^2 - 3z^4 - 2az^3),$$

ainda mais, a imagem do bordo é o plano  $-xy$ . Além disso, o comportamento do contato entre a imagem do bordo e do conjunto singular se mantém, ocorrendo tangência ao longo do eixo  $-y$  (exceto na origem) e transversalidade sobre a curva  $(-3z^2, -2az, z)$  fora da origem, como podemos ver na Figura 17

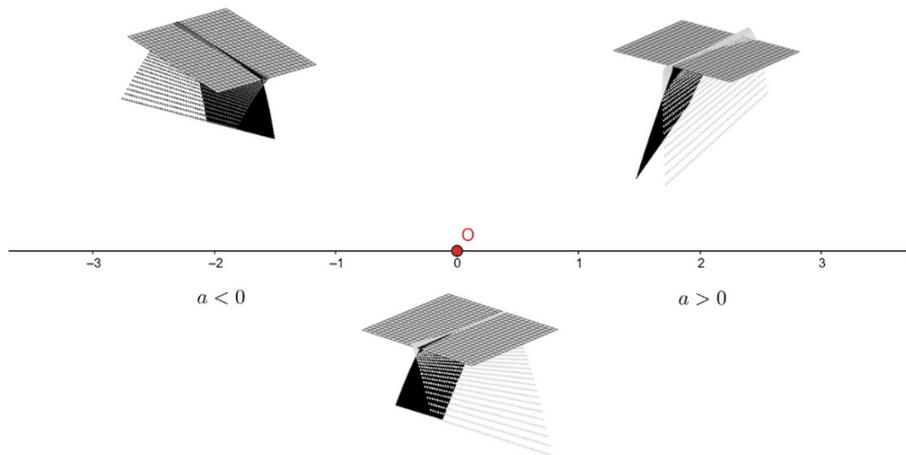


Figura 17 – Imagem do conjunto singular e do bordo do germe VII.

VIII Germe  $f(x, y, z) = (x, y, z^2 + \epsilon_1 y^2 z + \epsilon_2 x^2 z)$ , que possui codimensão 1.

Podemos realizar  $f$  com a imersão  $i(x, y, z) = (x, z, y, z^2 + \epsilon_1 y^2 z + \epsilon_2 x^2 z)$ . Assim, a hipersuperfície  $M$  imagem de  $i$  possui na origem vetor normal  $(0, 0, 0, 1)$ , curvatura normal  $k_n(w) = II_0(w) = 2c^2$ , onde  $w \in T_0M$  e  $\|w\| = 1$ , ou seja, as direções assintóticas são  $(a, 0, b, 0)$  e  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica de  $M$ . Ainda mais, como  $K(0) = 0$  então a origem é um ponto parabólico da hipersuperfície.

O conjunto  $K$  de  $f$  é o eixo  $-z$  e o conjunto singular de  $f$  é  $\Sigma f = \{(x, y, z); 2z + \varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 x^2 = 0\}$ , o qual é a superfície parabolóide (se  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , ver Figura 18, esquerda para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  e central para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ ) ou sela (se  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , ver Figura 18, direita). Desta forma,  $\Sigma f$  e o bordo  $z = 0$  são transversais a  $K$  na origem. Quando  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $\Sigma f$  e o bordo  $z = 0$  são tangentes entre si na origem e para  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , também ocorre a tangência entre o bordo e  $\Sigma f$  na origem e nas retas de intercessão  $y = \pm x$  temos a transversalidade entre tais superfícies.

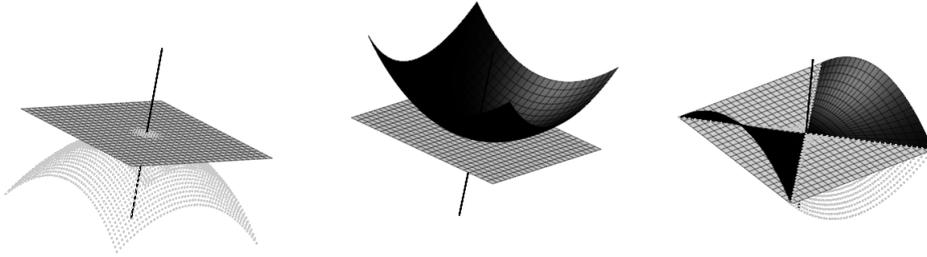


Figura 18 – Conjunto singular,  $K$  e o bordo do germe VIII.

Além disso, a imagem de  $\Sigma f$  é dada pela superfície  $\left(x, y, -\left(\frac{1}{2}x^2 + \lambda \frac{1}{2}y^2\right)^2\right)$ , onde  $\lambda = 1$  se  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  e  $\lambda = -1$  se  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  e a imagem do bordo é o plano  $z = 0$ . Desta forma, como os vetores tangentes à  $f(\Sigma f)$  são

$$\left(1, 0, -2\lambda x \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{\lambda}{2}x^2\right)\right) \text{ e } \left(0, 1, -2y \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{\lambda}{2}x^2\right)\right)$$

então a imagem de  $\Sigma f$  e do bordo são tangentes apenas na origem quando  $\lambda = 1$  e ao longo das curvas  $(x, x, 0)$  e  $(x, -x, 0)$  quando  $\lambda = -1$  (ver Figuras 19, 20 e 21).

Além disso, quando perturbamos com o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal  $F(x, y, z, a) = (x, y, z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z + az)$ , o conjunto singular será  $(x, y, -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 x^2 + a))$  e sua imagem

$$\left(x, y, -\frac{1}{4}(\varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_1 y^2 + a)^2\right).$$

Note que tais conjuntos se encontram onde  $\varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_1 y^2 + a = 0$  e para os pontos que satisfazem essa equação os vetores tangentes à  $F(\Sigma F)$  serão  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$ . Assim, como podemos ver na Figura 19, ao perturbarmos a forma com  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  por valores positivos, a imagem do bordo não possui contato com a superfície. Já quando perturbamos por valores negativos, obtemos que o plano  $z = 0$  é tangente à superfície nos pontos sobre a circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{-a}$ .

Quando perturbamos a forma com  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$  por parâmetros positivos obtemos que o plano  $z = 0$  é tangente à superfície nos pontos sobre a circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{a}$  e por valores negativos não possuem contato, como podemos ver na Figura 20.

E quando perturbamos a forma com  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  obtemos que o plano  $z = 0$  é tangente à superfície nos pontos sobre a hipérbole de equação  $\varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_1 y^2 + a = 0$ , veja Figura 21.

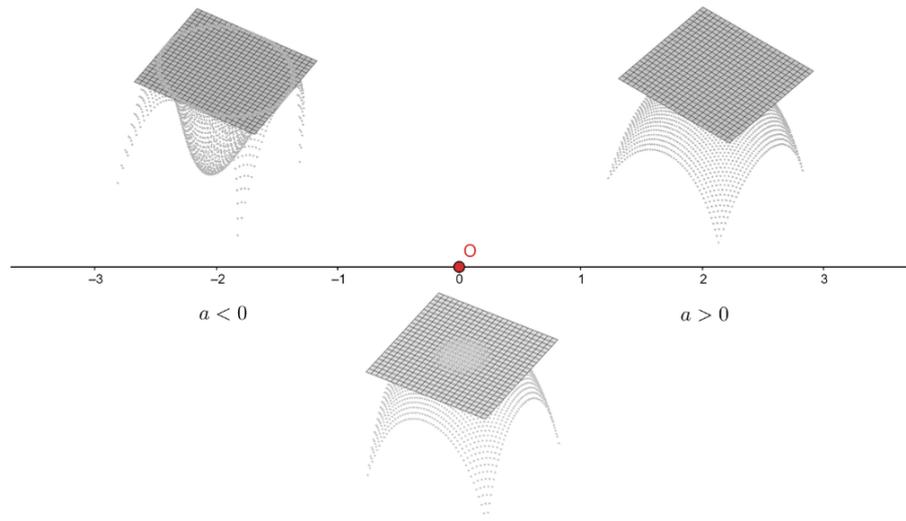


Figura 19 – Imagem do conjunto singular e do bordo para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  do germe VIII.

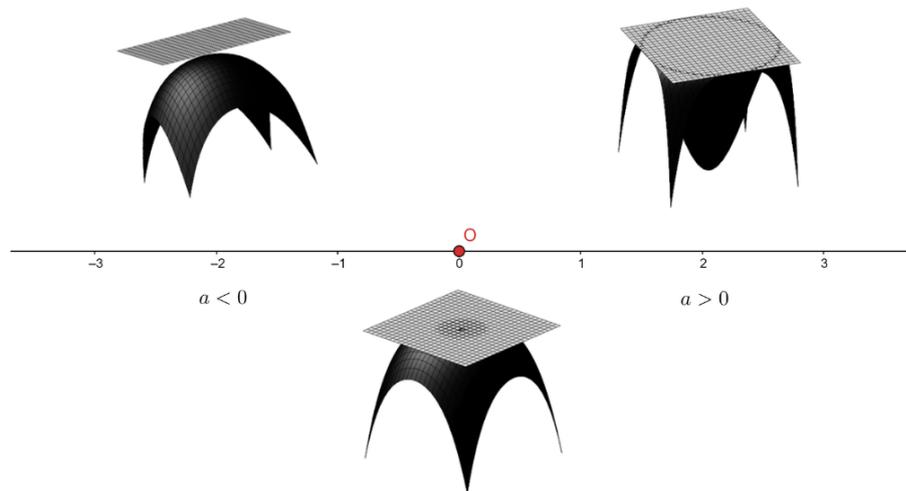


Figura 20 – Imagem do conjunto singular e do bordo para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$  do germe VIII.

IX Germe  $f(x, y, z) = (x, z + xy, y^2)$ , que possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 0.

Uma realização para  $f$  é a imersão  $i(x, y, z) = (x, y, z + xy, y^2)$ . Assim, a hipersuperfície  $M$  imagem desta aplicação, possui na origem vetor normal  $(0, 0, 0, -1)$  e curvatura normal  $k_n(w) = II_0(w) = -2b^2$  com  $w$  vetor tangente unitário, ou seja, as direções assintóticas de  $M$  são da forma  $(a, 0, c, 0)$ , isto é, a direção de projeção  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica. Além disso, a origem é um ponto parabólico pois  $K(0) = 0$ .

O conjunto  $K$  de  $f$  é o eixo  $-y$  e o conjunto singular de  $f$  é o plano  $y = 0$ . Logo, o conjunto singular e o bordo são perpendiculares e  $K$  é uma reta contida no bordo (ver Figura 22). Este comportamento se repetirá para todos os germes cujo 1-jato é  $(x, z, 0)$ .

Além disso, a imagem do conjunto singular é o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo é o conjunto de todos os pontos  $(A, B, C)$  tais que existem  $(x, y, 0)$  com  $f(x, y, 0) = (A, B, C)$ ,

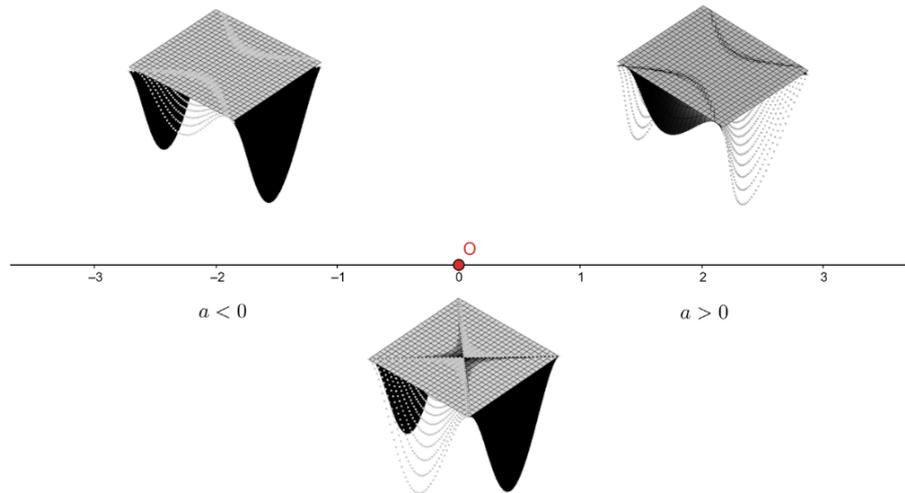


Figura 21 – Imagem do conjunto singular e do bordo para  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  do germe VIII.

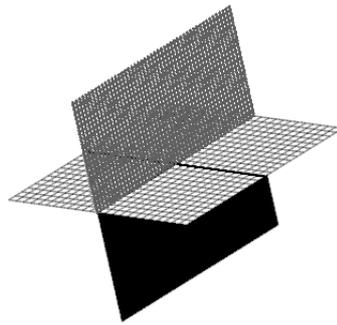


Figura 22 – Conjunto singular,  $K$  e bordo do germe IX.

ou seja, todos os pontos  $(A, B, C)$  com  $(x, y, 0)$  satisfazendo

$$\begin{cases} A = x \\ B = xy \\ C = y^2 \end{cases}$$

Dessa forma, a imagem do bordo é o subespaço  $(A, B, C)$ , com  $C \geq 0$  e a imagem do conjunto singular está contida neste conjunto.

X Germe  $f(x, y, z) = (x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$ , com  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal  $F(x, y, z) = (x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y + ay, y^2)$  e  $\text{cod} = 1$ .

Aqui  $i(x, y, z) = (x, y, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$  realiza  $f$  e a imagem de  $i$  é uma hipersuperfície onde a origem é um ponto parabólico (pois a curvatura Gaussiana se anula) e possui vetor normal  $(0, 0, 0, -1)$ . Assim, a curvatura normal é  $k_n = -2b^2$  e as direções assintóticas são da forma  $(a, 0, c, 0)$ , isto é,  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica para a imagem de  $i$ .

Os conjuntos singular e  $K$  são como no germe  $IX$ , assim, o bordo e  $\Sigma f$  são planos transversais e  $K$  uma reta contida no bordo.

A imagem de  $\Sigma f$  é o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo é o conjunto dos pontos  $(A, B, C)$  tais que existe  $(x, y, 0)$  satisfazendo

$$\begin{cases} A = x \\ B = y^3 + \varepsilon x^2 y, \\ C = y^2 \end{cases}$$

isto é, o conjunto de todos os pontos  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } y^3 + \varepsilon A^2 y - B = 0, C \geq 0\}$ . Como  $y^3 + \varepsilon A^2 y - B = 0$  sempre possui pelo menos uma raiz real, então a imagem do bordo é o subespaço  $(A, B, C)$ , com  $C \geq 0$  e a imagem do conjunto singular está contida neste conjunto.

Note que quando perturbamos este germe usando o desdobramento  $F$  este comportamento se mantém, sendo a imagem do conjunto singular pela perturbação ainda o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo o conjunto  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } y^3 + (\varepsilon A^2 + a)y - B = 0, C \geq 0\} = \{(A, B, C); C \geq 0\}$ .

**XI** Germe  $f(x, y, z) = (x, z + y^3 + x^3 y, y^2)$ , com desdobramento  $F(x, y, z) = (x, z + y^3 + x^3 y + ay + bxy, y^2)$  e  $\text{cod} = 2$ .

Buscamos encontrar um desdobramento versal simétrico de  $f$  e o termo candidato a aparecer em duas coordenadas (pois possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 2) de nosso desdobramento seria  $(y + xy)$ , porém apenas o vetor  $(0, y + xy, 0)$  estaria no espaço complementar. Dessa forma, tomaremos o germe equivalente  $(x, z + y^3 + x^3 y + x^2, y^2)$  e, a partir dele, conseguimos o desdobramento versal simétrico

$$(x + \lambda(y + xy), z + y^3 + x^3 y + x^2 + \beta(y + xy), y^2),$$

pois  $(0, y + xy, 0)$  e  $(y + xy, 0, 0)$  formam uma base para o espaço complementar. Neste contexto, podemos realizar o germe com a imersão

$$i(x, y, z) = (x, y + xy, z + y^3 + x^3 y + x^2, y^2).$$

Note que uma base para o espaço tangente desta hipersuperfície  $M$  em  $0$  é  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ , logo, para todo vetor tangente  $w$  unitário escrito nesta base, temos que a segunda forma fundamental é  $-2b^2$ , ou seja, as direções da forma  $(a, 0, c, 0)$  são assintóticas, isto é, a direção de projeção  $(0, 1, 0, 0)$  não é assintótica. Além disso, o vetor normal é  $(0, 0, 0, -1)$  e a curvatura Gaussiana também se anula na origem, isto é,  $0$  é um ponto parabólico.

Os conjuntos singular e  $K$  são como no germe  $IX$ , assim, o bordo e  $\Sigma f$  são planos transversais e  $K$  uma reta contida no bordo. Além disso, a imagem do conjunto singular

é o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo é o conjunto dos pontos  $(A, B, C)$  tais que existe  $(x, y, 0)$  satisfazendo

$$\begin{cases} A = x \\ B = y^3 + \varepsilon x^3 y, \\ C = y^2 \end{cases}$$

ou seja, novamente é o subespaço dos pontos  $(A, B, C)$ , com  $C \geq 0$  e  $(x, z, 0)$  está contido neste conjunto.

Quando perturbamos utilizando o desdobramento F, obtemos o mesmo comportamento sendo a imagem do conjunto singular perturbado o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo o subespaço  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } y^3 + (A^3 + a + bA)y - B = 0, C \geq 0\} = \{(A, B, C); C \geq 0\}$ .

**XII** Germe  $f(x, y, z) = (x, z + y^3 + \varepsilon x^4 y, y^2)$ , com desdobramento  $F(x, y, z) = (x, z + y^3 + \varepsilon x^4 y + ay + bxy + cx^2 y, y^2)$  e codimensão igual a 3.

Neste item tomaremos o germe equivalente  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^4 y + x^2 + xy^2, y^2)$  para encontrar o desdobramento simétrico  $\mathcal{B}_e$ -versal

$$(x + \lambda(y + xy + x^2 y), z + y^3 + \varepsilon x^4 y + x^2 + xy^2 + \beta(y + xy + x^2 y), y^2 + \mu(y + xy + x^2 y))$$

e a realização  $(x, y + xy + x^2 y, z + y^3 + \varepsilon x^4 y + x^2 + xy^2, y^2)$ . Novamente, a origem é ponto parabólico,  $k_n(w) = II_0(w) = -2b^2$ , com  $w \in T_0 M$  e  $\|w\| = 1$ , e  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica da hipersuperfície  $M$ .

O comportamento do bordo,  $\Sigma f$  e  $K$  é o mesmo do germe IX. Note que a imagem do conjunto singular novamente é o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo é formada pelos pontos  $(A, B, C)$ , com  $(x, y, 0)$  satisfazendo

$$\begin{cases} A = x \\ B = y^3 + \varepsilon x^4 y, \\ C = y^2 \end{cases}$$

ou seja, o conjunto  $\{(A, B, C); C \geq 0\}$  e a imagem de  $\Sigma F$  está contida neste conjunto.

Quando perturbamos utilizando o desdobramento F, obtemos o mesmo comportamento sendo a imagem do conjunto singular  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } y^3 + (\varepsilon A^4 + bA + cA^2)y - B = 0, C \geq 0\} = \{(A, B, C); C \geq 0\}$ .

**XIII** Germe  $f(x, y, z) = (x, z + x^2 y + \varepsilon y^5, y^2)$ , que possui codimensão igual a 2 e desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal  $F(x, y, z) = (x, z + x^2 y + \varepsilon y^5 + ay + by^3, y^2)$ .

Assim como no item anterior, não conseguimos um desdobramento versal simétrico a partir do germe original, desta forma tomaremos o germe equivalente  $(x, z + x^2 y + \varepsilon y^5 + y^4, y^2)$

e o desdobramento simétrico será

$$(x, z + x^2y + \varepsilon y^5 + y^4 + \beta(y + y^3), y^2 + \mu(y + y^3)).$$

Neste contexto, podemos realizar o germe com a imersão

$$i(x, y, z) = (x, y + y^3, z + x^2y + \varepsilon y^5 + y^4, y^2)$$

e a imagem de  $i$  é uma hipersuperfície que possui na origem vetor normal  $(0, 0, 0, -1)$ , curvatura Gaussiana nula e curvatura normal  $k_n(w) = -2b^2$ , com  $w$  vetor tangente unitário, assim,  $0$  é um ponto parabólico e  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica da hipersuperfície.

Como anteriormente, o bordo e  $\Sigma f$  são planos transversais e  $K$  uma reta contida no bordo. Além disso, a imagem do conjunto singular é o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo o conjunto formado por todos os pontos  $(A, B, C)$  tais que existe  $(x, y, 0)$  com

$$\begin{cases} A = x \\ B = \varepsilon y^5 + x^2y, \\ C = y^2 \end{cases}$$

ou seja, o conjunto  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } y^5 + A^2y - B = 0, C \geq 0\}$  e, como  $y^5 + A^2y - B = 0$  sempre possui raiz em  $\mathbb{R}$ , então a imagem do conjunto singular é o subespaço dos pontos  $(A, B, C)$  com  $C \geq 0$ . Dessa forma, a imagem do conjunto singular está contida na imagem do bordo.

Note que este comportamento se mantém ao perturbarmos o germe pelo desdobramento  $F$ , com a imagem do conjunto singular sendo  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } \varepsilon y^5 + by^3 + (A^2 + a)y - B = 0, C \geq 0\}$ , isto é, o subespaço  $\{(A, B, C); C \geq 0\}$ .

XIV Germe  $f(x, y, z) = (x, z + x^2y + \varepsilon y^7, y^2)$ , que possui desdobramento  $F(x, y, z) = (x, z + x^2y + \varepsilon y^7 + ay + by^3 + cy^5, y^2)$  e  $\text{cod} = 3$ .

Para obtermos um desdobramento simétrico em que o termo  $(y + y^3 + y^5)$  apareça nas 3 coordenadas (pois o germe possui codimensão 3), tomaremos o germe equivalente  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^7 + y^4 + xy^2, y^2)$ , obtendo o desdobramento  $\mathcal{B}_e$ -versal simétrico

$$(x + \lambda(y + y^3 + y^5), z + x^2y + \varepsilon y^7 + y^4 + xy^2 + \beta(y + y^3 + y^5), y^2 + \mu(y + y^3 + y^5))$$

e a realização

$$(x, y + y^3 + y^5, z + x^2y + \varepsilon y^7 + y^4 + xy^2, y^2).$$

Tal hipersuperfície  $M$  possui na origem vetor normal  $(0, 0, 0, -1)$ , curvatura Gaussiana nula e curvatura normal  $-2b^2$ , para  $w$  tangente unitário. Logo,  $0$  é ponto parabólico e  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica de  $M$ .

O comportamento do bordo,  $\Sigma f$  e  $K$  são análogos ao do germe  $IX$ . Já a imagem do conjunto singular é o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo é o conjunto dos pontos  $(A, B, C)$  tais que existe  $(x, y, 0)$  satisfazendo

$$\begin{cases} A = x \\ B = \varepsilon y^7 + x^2 y, \\ C = y^2 \end{cases}$$

isto é, o subespaço formado pelos pontos  $(A, B, C)$ , com  $C \geq 0$ . Note que a imagem do conjunto singular está contida na imagem do bordo.

Ao perturbarmos os conjuntos seus comportamentos se mantêm, sendo a imagem do bordo  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } \varepsilon y^7 + cy^5 + by^3 + (A^2 + a)y - B = 0, C \geq 0\} = \{(A, B, C); C \geq 0\}$ .

XV Germe  $f(x, y, z) = (x, z + xy^3 + \varepsilon x^3 y, y^2)$ , que possui  $\mathcal{B}_e$ -desdobramento versal  $F(x, y, z) = (x, z + xy^3 + \varepsilon x^3 y + ay + bxy + cx^2 y, y^2)$  e codimensão igual a 3.

Neste item, obtemos o desdobramento versal simétrico

$$(x + \lambda(y + xy + x^2 y), z + xy^3 + \varepsilon x^3 y + x^2 + y^4 + \beta(y + xy + x^2 y), y^2 + \mu(y + xy + x^2 y))$$

a partir do germe equivalente  $(x, z + xy^3 + \varepsilon x^3 y + x^2 + y^4, y^2)$ , obtendo a realização

$$(x, y + xy + x^2 y, z + xy^3 + \varepsilon x^3 y + x^2 + y^4, y^2).$$

A imagem desta aplicação é a hipersuperfície  $M$  que possui vetor normal na origem  $(0, 0, 0, -1)$ , segunda forma fundamental  $-2b^2$  e curvatura Gaussiana nula, isto é, a origem é um ponto parabólico e  $(0, 1, 0, 0)$  não é direção assintótica de  $M$ .

Os conjuntos  $\Sigma f$  e  $K$  são os mesmo do germe  $IX$ . Já a imagem do conjunto singular é novamente o plano  $(x, z, 0)$  e a imagem do bordo os pontos  $(A, B, C)$  tais que existe  $(x, y, 0)$  com

$$\begin{cases} A = x \\ B = xy^3 + \varepsilon x^3 y, \\ C = y^2 \end{cases}$$

ou seja, o conjunto  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } Ay^3 + \varepsilon A^3 y - B = 0, C \geq 0\}$  e, como  $Ay^3 + \varepsilon A^3 y - B = 0$  sempre possui raiz em  $\mathbb{R}$ , então este é o subespaço  $\{(A, B, C); C \geq 0\}$ . Note que novamente a imagem do conjunto singular está contida na imagem do bordo.

Além disso, ao perturbarmos o germe por  $F$  obtemos o mesmo comportamento, sendo a imagem do bordo por  $F$  o conjunto  $\{(A, B, C); \exists y, \text{ com } Ay^3 + (\varepsilon A^3 + a + bA + cA^2)y - B = 0, C \geq 0\} = \{(A, B, C); C \geq 0\}$ .

## 4.4 Condições para a projeção P

Nesta sessão estudamos as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor da projeção  $P_u$  em  $(0,0,0)$ . No teorema a seguir apresentamos as condições sobre a expansão de Taylor de ordem 1.

Considere  $P_u = (P_{u_1}, P_{u_2}, P_{u_3})$ . Escrevemos o 1-jato de  $P_u$  da forma:

$$j^1 P_u = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz).$$

No teorema abaixo quando supomos que  $a \neq 0$  estamos impondo que  $P_{u_{ix}} \neq 0$  para algum  $i$ , caso este seja o coeficiente  $d$  ou  $g$  basta fazer uma troca de coordenadas na meta e renomear.

**Teorema 4.4.1.** O 1-jato da projeção  $P_u$  é equivalente a:

1.  $(x, y, z)$  se, e somente se,  $(a \neq 0, e - \frac{bd}{a} \neq 0$  e  $\frac{aei-afh-bdi+bf g+cdh-ceg}{ea-db} \neq 0)$  ou  $(a \neq 0, e - \frac{bd}{a} = 0, f - \frac{cd}{a} \neq 0$  e  $h - \frac{bg}{a} \neq 0)$ .
2.  $(x, y, 0)$  se, e somente se,  $(a \neq 0, e - \frac{bd}{a} \neq 0$  e  $\frac{aei-afh-bdi+bf g+cdh-ceg}{ea-db} = 0)$  ou  $(a \neq 0, e - \frac{bd}{a} = f - \frac{dc}{a} = 0$  e  $h - \frac{gb}{a} \neq 0)$ .
3.  $(x, z, 0)$  se, e somente se,  $(a \neq 0, e - \frac{bd}{a} = h - \frac{gb}{a} = 0$  e  $f - \frac{dc}{a} \neq 0$  ou  $i - \frac{gc}{a} \neq 0)$  ou  $(a = d = g = 0, e \neq 0$  e  $c - \frac{bf}{e} \neq 0$  ou  $i - \frac{hf}{e} \neq 0)$  ou  $(a = d = e = g = 0, f \neq 0$  e  $b \neq 0$  ou  $h \neq 0)$  ou  $(a = d = e = f = g = 0, h \neq 0$  e  $c \neq 0)$  ou  $(a = d = e = f = g = h = 0, b \neq 0$  e  $i \neq 0)$ .

Os demais casos obtém-se formas de codimensão maior que 3.

*Demonstração.* Usamos o Maple para auxiliar nas mudanças de coordenadas. Considere o  $j^1 P_u$  como anteriormente. Denotamos por  $(x, y, z)$  as coordenadas da fonte e  $(X, Y, Z)$  as da meta. Para dar uma ideia dos cálculos, faremos os casos para quando  $a \neq 0$ . Os outros casos são totalmente análogos.

Suponha  $a \neq 0$  e considere a mudança de coordenadas na meta

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y - \frac{d}{a}X, Z - \frac{g}{a}X \right),$$

reduzindo a expressão do 1-jato de  $P_u$  para

$$j^1 P_u = \left( ax + by + cz, \left( e - \frac{db}{a} \right) y + \left( f - \frac{dc}{a} \right) z, \left( h - \frac{gb}{a} \right) y + \left( i - \frac{gc}{a} \right) z \right).$$

A partir daqui iremos separar em casos analisando os coeficientes:

**Caso 1:** Suponha  $e - \frac{db}{a} \neq 0$  e considere a mudança

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y, Z - \frac{h - \frac{gb}{a}}{e - \frac{db}{a}} Y \right),$$

obtendo

$$\left( ax + by + cz, \left( e - \frac{db}{a} \right) y + \left( f - \frac{dc}{a} \right) z, \left( \left( i - \frac{gc}{a} \right) - \frac{\left( h - \frac{gb}{a} \right) \left( f - \frac{dc}{a} \right)}{e - \frac{db}{a}} \right) z \right) =$$

$$\left( ax + by + cz, \left( e - \frac{db}{a} \right) y + \left( f - \frac{dc}{a} \right) z, \left( \frac{aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}{ea - db} \right) z \right).$$

**Caso 1.1:** Suponha  $\frac{aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}{ea - db} \neq 0$  e considere as mudanças

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y, \frac{1}{\left( \frac{aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}{ea - db} \right)} Z \right), \quad (X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y - \left( f - \frac{dc}{a} \right) Z, Z \right),$$

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, \frac{1}{\left( e - \frac{db}{a} \right)} Y, Z \right), \quad (X, Y, Z) \mapsto (X - bY - cZ, Y, Z) \quad \text{e} \quad (X, Y, Z) \mapsto \left( \frac{1}{a} X, Y, Z \right),$$

obtendo a submersão  $(x, y, z)$ , a qual é 1-determinada e possui  $\mathcal{B}_e - \text{cod} = 0$ .

**Caso 1.2:** Suponha  $\frac{aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}{ea - db} = 0$  e considere as mudanças

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, \frac{1}{\left( e - \frac{db}{a} \right)} \left( y - \left( f - \frac{dc}{a} \right) z \right), z \right), \quad (X, Y, Z) \mapsto \left( X - \frac{b}{\left( e - \frac{db}{a} \right)} Y, Y, Z \right)$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{1}{a} \left( x - \left( c - \frac{b \left( f - \frac{dc}{a} \right)}{\left( e - \frac{db}{a} \right)} z \right), y, z \right),$$

obtendo o 1-jato da forma  $(x, y, 0)$ .

**Caso 2:** Suponha  $e - \frac{db}{a} = 0$ , ou seja, estamos com o 1-jato da forma

$$\left( ax + by + cz, \left( f - \frac{dc}{a} \right) z, \left( h - \frac{gb}{a} \right) y + \left( i - \frac{gc}{a} \right) z \right).$$

**Caso 2.1:** Suponha  $f - \frac{dc}{a} \neq 0$ ,  $h - \frac{gb}{a} \neq 0$  e tome as mudanças

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, \frac{1}{\left( f - \frac{dc}{a} \right)} Y, Z \right), \quad (X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y, Z - \left( i - \frac{gc}{a} \right) Y \right),$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( X, Y, \frac{1}{\left( h - \frac{gb}{a} \right)} Z \right), \quad (X, Y, Z) \mapsto (X - bZ - cY, Y, Z) \quad \text{e}$$

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( \frac{1}{a} X, Y, Z \right),$$

obtendo  $(x, z, y)$  que é equivalente a  $(x, y, z)$ .

**Caso 2.2:** Suponha  $f - \frac{dc}{a} = 0$ ,  $h - \frac{gb}{a} \neq 0$  e considere as mudanças

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, \frac{1}{\left(h - \frac{gb}{a}\right)} \left( y - \left( i - \frac{gc}{a} \right) z \right), z \right), \quad (X, Y, Z) \mapsto \left( X - \frac{b}{\left(h - \frac{gb}{a}\right)} Y, Y, Z \right)$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{1}{a} \left( x - \left( c - \frac{b \left( i - \frac{gc}{a} \right)}{\left( h - \frac{gb}{a} \right)} \right) \right), y, z \right),$$

obtendo novamente  $(x, y, 0)$ .

**Caso 2.3:** Suponha  $f - \frac{dc}{a} \neq 0$  (ou  $i - \frac{gc}{a} \neq 0$ ) e  $h - \frac{gb}{a} = 0$ , então podemos reduzir o 1-jato à forma  $(ax + by + cz, z, 0)$ . Considere as mudanças

$$(X, Y, Z) \mapsto (X - cY, Y, Z) \quad \text{e} \quad (x, y, z) \mapsto \left( \frac{1}{a}(x - by), y, z \right),$$

obtendo novamente  $(x, z, 0)$ .

**Caso 2.4:** Suponha  $f - \frac{dc}{a} = h - \frac{gb}{a} = i - \frac{gc}{a} = 0$ , neste caso obtemos  $(x, 0, 0)$  que possui codimensão maior que 3.  $\square$

Observe que  $(x, y, z)$  é 1-determinado de codimensão 0. Dessa forma, precisamos analisar os jatos subsequentes apenas para as formas  $(x, y, 0)$  e  $(x, z, 0)$ . Além disso, note que  $(x, y, 0)$  e  $(x, z, 0)$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, porém não são  $\mathcal{B}$ -equivalentes, ou seja, no interior de nossa hipersuperfície essas classes coincidem, mas no bordo determinam classes diferentes. Para o interior de nossa hipersuperfície, portanto, podemos utilizar a classificação encontrada em (NABARRO, 2000).

Inicialmente analisaremos os 2-jatos subsequentes de  $(x, z, 0)$ . Observe que os monômios da forma  $x^i$  podem ser obtidos através de mudanças de coordenadas na meta, assim após as mudanças nos monômios de grau 1, escreveremos o  $j^2 P_u$  da forma:

$$(x, z + a_{110}xy + a_{020}y^2 + a_{101}xz + a_{011}yz + a_{002}z^2, b_{110}xy + b_{020}y^2 + b_{101}xz + b_{011}yz + b_{002}z^2).$$

**Teorema 4.4.2.** A projeção  $P_u$  possui a singularidade  $(x, z + xy, y^2)$  se, e somente se,  $a_{110} - \frac{a_{020}b_{110}}{b_{020}} \neq 0$  e  $b_{020} \neq 0$ . Além disso, se  $a_{110} - \frac{a_{020}b_{110}}{b_{020}} = 0$  e  $b_{020} \neq 0$  então o 2-jato de  $P_u$  é da forma  $(x, z, y^2)$ .

*Demonstração.* Considere o  $j^2 P_u$  como anteriormente. Denotamos por  $(x, y, z)$  as coordenadas da fonte e  $(X, Y, Z)$  as da meta. Considere as mudanças de coordenadas

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z - a_{101}xz - a_{011}yz - a_{002}z^2) \quad \text{e} \quad (X, Y, Z) \mapsto (X, Y, Z - b_{101}XY - b_{002}Y^2),$$

obtendo

$$j^2 P_u = (x, z + a_{110}xy + a_{020}y^2, b_{110}xy + b_{020}y^2 + b_{011}yz).$$

Suponha, sem perda de generalidade, que  $b_{020} \neq 0$  e considere

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, y - \frac{b_{110}}{2b_{020}}x, z \right),$$

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y + \left( \frac{a_{110}b_{110}}{2b_{020}} - \frac{a_{020}b_{110}^2}{4b_{020}^2} \right) X^2, Z + \frac{b_{110}^2}{4b_{020}}X^2 + \frac{b_{110}b_{011}}{2b_{020}}XY \right)$$

obtendo

$$j^2P_u = \left( x, z + \left( a_{110} - \frac{a_{020}b_{110}}{b_{020}} \right) xy + a_{020}y^2, b_{020}y^2 + b_{011}yz \right).$$

Considere agora

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, y - \frac{b_{011}}{2b_{020}}z, z \right),$$

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y + \frac{b_{011}}{2b_{020}} \left( a_{110} - \frac{a_{020}b_{110}}{b_{020}} \right) XY - \frac{a_{020}b_{011}^2}{4b_{020}^2}Y^2, Z + \frac{b_{011}^2}{4b_{020}}Y^2 \right)$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, y, z + \frac{a_{020}b_{011}}{b_{020}}yz \right), \quad (X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y, \frac{1}{b_{020}}Z \right)$$

e  $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y - a_{020}Z, Z)$ ,

ficando com

$$j^2P_u = \left( x, z + \left( a_{110} - \frac{a_{020}b_{110}}{b_{020}} \right) xy, y^2 \right).$$

Desta forma, se  $a_{110} - \frac{a_{020}b_{110}}{b_{020}} \neq 0$ , obtemos facilmente a singularidade  $(x, z + xy, y^2)$ , a qual é 2-determinada de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 0. Se  $a_{110} - \frac{a_{020}b_{110}}{b_{020}} = 0$  então obtemos  $(x, z, y^2)$ .

Caso  $b_{020} = 0$  obtemos germes de codimensões maiores de 3.  $\square$

Trabalharemos agora com as singularidades com 2-jato  $(x, z, y^2)$ . Tais singularidades podem ser até 7-determinadas (considerando a restrição de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão menor ou igual a três). Além disso, por mudanças na meta podemos facilmente eliminar os monômios da forma  $x^i$ ,  $y^j$ , com  $j$  par, e  $x^i y^j$ , com  $j$  par. Assim, considerando as mudanças já realizadas nos monômios de graus 1 e 2, escreva

$$j^7P_u = (x, z + a_{030}y^3 + a_{210}x^2y + a_{003}z^3 + a_{012}yz^2 + a_{021}y^2z + a_{102}xz^2 + a_{201}x^2z$$

$$+ a_{111}xyz + a_{310}x^3y + a_{130}xy^3 + a_{004}z^4 + a_{013}yz^3 + a_{022}y^2z^2 + a_{031}y^3z + a_{103}xz^3 + a_{202}x^2z^2$$

$$+ a_{301}x^3z + a_{112}xyz^2 + a_{121}xy^2z + a_{211}x^2yz + a_{050}y^5 + a_{410}x^4y + a_{230}x^2y^3 + a_{041}y^4z + a_{032}y^3z^2$$

$$+ a_{023}y^2z^3 + a_{014}yz^4 + a_{401}x^4z + a_{302}x^3z^2 + a_{203}x^2z^3 + a_{104}xz^4 + a_{221}x^2y^2z + a_{122}xy^2z^2$$

$$+ a_{212}x^2yz^2 + a_{311}x^3yz + a_{131}xy^3z + a_{113}xy^2z^3 + a_{005}z^5 + a_{006}z^6 + a_{015}yz^5 + a_{105}xz^5 + a_{024}y^2z^4$$

$$+ a_{204}x^2z^4 + a_{303}x^3z^3 + a_{033}y^3z^3 + a_{402}x^4z^2 + a_{042}y^4z^2 + a_{051}y^5z + a_{501}x^5z + a_{150}xy^5 + a_{510}x^5y$$

$$\begin{aligned}
& +a_{330}x^3y^3 + a_{222}x^2y^2z^2 + a_{321}x^3y^2z + a_{231}x^2y^3z + a_{213}x^2yz^3 + a_{312}x^3yz^2 + a_{123}xy^2z^3 + a_{132}xy^3z^2 \\
& + a_{411}x^4yz + a_{141}xy^4z + a_{114}xyz^4 + a_{007}z^7 + a_{070}y^7 + a_{016}yz^6 + a_{025}y^2z^5 + a_{034}y^3z^4 + a_{043}y^4z^3 \\
& + a_{052}y^5z^2 + a_{061}y^6z + a_{106}xz^6 + a_{205}x^2z^5 + a_{304}x^3z^4 + a_{403}x^4z^3 + a_{502}x^5z^2 + a_{601}x^6z + a_{205}x^2y^5 \\
& + a_{430}x^4y^3 + a_{610}x^6y + a_{511}x^5yz + a_{151}xy^5z + a_{115}xyz^5 + a_{421}x^4y^2z + a_{241}x^2y^4z + a_{124}xy^2z^4 \\
& + a_{142}xy^4z^2 + a_{214}x^2yz^4 + a_{412}x^4yz^2 + a_{322}x^3y^2z^2 + a_{232}x^2y^3z^2 + a_{223}x^2y^2z^3 + a_{331}x^3y^3z \\
& + a_{313}x^3yz^3 + a_{133}xy^3z^3, y^2),
\end{aligned}$$

onde  $a_{ijk}$  é coeficiente do monômio  $x^i y^j z^k$ .

**Teorema 4.4.3.** A projeção  $P_u$  cujo 2-jato é  $(x, z, y^2)$  possui as singularidades:

1.  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$  se, e somente se,  $a_{030} \neq 0$  e  $a_{210} \neq 0$ .
2.  $(x, z + xy^3 + \varepsilon x^3 y, y^2)$  se, e somente se,  $a_{030} = a_{210} = 0$ ,  $a_{310} \neq 0$  e  $a_{130} \neq 0$ .
3.  $(x, z + y^3 + x^3 y, y^2)$  se, e somente se,  $a_{030} \neq 0$ ,  $a_{210} = 0$  e  $a_{310} \neq 0$ .
4.  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^4 y, y^2)$  se, e somente se,  $a_{030} \neq 0$ ,  $a_{210} = a_{310} = 0$  e  $a_{410} \neq 0$ .
5.  $(x, z + x^2 y + \varepsilon y^5, y^2)$  se, e somente se,  $a_{030} = 0$ ,  $a_{210} \neq 0$  e  $a_{050} - \frac{a_{130}^2}{4a_{210}} \neq 0$ .
6.  $(x, z + x^2 y + \varepsilon y^7, y^2)$  se, e somente se,  $a_{030} = 0$ ,  $a_{210} \neq 0$ ,  $a_{050} - \frac{a_{130}^2}{4a_{210}} = 0$  e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4a_{210}^2} (4a_{070}a_{210}^3 - a_{130}^2 a_{210}^2 a_{021} - 3a_{130}^3 a_{310} + 2a_{130}^2 a_{210}^2 a_{021} + a_{130}^2 a_{210} a_{230} \\
& 2a_{150} a_{130} a_{210}^2 + 10a_{130} a_{210} a_{310} a_{050} - 4a_{210}^3 a_{021} a_{050}) \neq 0.
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Considere o  $j^7 P_u$  como anteriormente. Denotamos por  $(x, y, z)$  as coordenadas da fonte e  $(X, Y, Z)$  as da meta. Vamos trabalhar inicialmente com os monômios de grau 3, porém já considerando como as mudanças realizadas alterarão os monômios de graus maiores no 7-jato de  $P_u$ .

Considere a mudança de coordenadas na meta

$$(X, Y, Z) \mapsto (X, Y - a_{003}Y^3 - a_{021}YZ - a_{102}XY^2 - a_{201}X^2Y, Z),$$

e a mudança de coordenadas na fonte

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z - a_{012}yz^2 - a_{111}xyz).$$

Note que na mudança anterior, precisamos garantir que esta preserve o bordo  $z \geq 0$ , ou seja, escrevendo  $h_3(x, y, z) = z - a_{012}yz^2 - a_{111}xyz = z(1 - a_{012}yz - a_{111}xy) = zh_{031}(x, y, z)$ , basta que  $h_{031}(0, 0, 0) = 1 > 0$ , o que de fato ocorre. Dessa forma, obtemos

$$j^3 P_u = (x, z + a_{210}x^2y + a_{030}y^3, y^2).$$

Neste momento, temos quatro casos a serem analisados. Se  $a_{030} \neq 0$  e  $a_{210} \neq 0$  então, realizando as mudanças de coordenadas

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{\sqrt[3]{a_{030}^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{|a_{210}|}} x, \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}}} y, z \right) \text{ e } (X, Y, Z) \mapsto \left( \frac{\sqrt{|a_{210}|}}{\sqrt[3]{a_{030}^{\frac{1}{2}}}} X, Y, \sqrt[3]{a_{030}^2} Z \right),$$

obtemos a singularidade  $(x, z + y^3 + \varepsilon x^2 y, y^2)$ , a qual é 3-determinada e de  $\mathcal{B}_e - \text{cod} = 1$ .

Se  $a_{030} = a_{210} = 0$  então obtemos

$$j^4 P_u = (x, z + a_{310} x^3 y + a_{130} x y^3 + a_{004} z^4 + a_{013} y z^3 + a_{022} y^2 z^2 + a_{031} y^3 z + a_{103} x z^3 + a_{202} x^2 z^2 + a_{301} x^3 z + a_{112} x y z^2 + a_{121} x y^2 z + a_{211} x^2 y z, y^2).$$

Considere as mudanças

$$(X, Y, Z) \mapsto (X, Y - a_{004} Y^4 - a_{022} Y^2 Z - a_{103} X Y^3 - a_{202} X^2 Y^2 - a_{301} X^3 Y, Z)$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z - a_{013} y z^3 - a_{031} y^3 z - a_{112} x y z^2 - a_{121} x y^2 z - a_{211} x^2 y z),$$

observando que a mudança anterior preserva o bordo.

Após aplicar tais mudanças obtemos

$$j^4 P_u = (x, z + a_{310} x^3 y + a_{130} x y^3, y^2).$$

Se  $a_{310} \neq 0$  e  $a_{130} \neq 0$ , obtemos a singularidade  $(x, z + x^3 y + \varepsilon x y^3, y^2)$ , a qual é 4-determinada e de  $\mathcal{B}_e - \text{cod} = 3$ .

Caso  $a_{310} = 0$  ou  $a_{130} = 0$  então obtemos singularidades de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão maiores que três.

Se  $a_{030} \neq 0$  e  $a_{210} = 0$  então, realizando as mudanças

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}}} y, z \right) \text{ e } (X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y, \sqrt[3]{a_{030}^2} Z \right),$$

obtemos

$$j^5 P_u = (x, z + y^3 + \frac{a_{310}}{\sqrt[3]{a_{030}}} x^3 y + \frac{a_{130}}{a_{030}} x y^3 + a_{004} z^4 + \frac{a_{013}}{\sqrt[3]{a_{030}}} y z^3 + \frac{a_{022}}{\sqrt[3]{a_{030}^2}} y^2 z^2 + \frac{a_{031}}{a_{030}} y^3 z + a_{103} x z^3 + a_{202} x^2 z^2 + a_{301} x^3 z + \frac{a_{112}}{\sqrt[3]{a_{030}}} x y z^2 + \frac{a_{121}}{\sqrt[3]{a_{030}^2}} x y^2 z + \frac{a_{211}}{\sqrt[3]{a_{030}}} x^2 y z + y^5 \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}^5}} (a_{050} - a_{030} a_{021}) + \frac{a_{410}}{\sqrt[3]{a_{030}}} x^4 y + x^2 y^3 \frac{1}{a_{030}} (a_{230} - a_{030} a_{201}) + y^4 z \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}^4}} (a_{041} - a_{021}^2) + y^3 z^2 \frac{1}{a_{030}} (a_{032} - 3 a_{030} a_{003} - a_{012} a_{021}) + y^2 z^3 \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}^2}} (a_{023} - 4 a_{003} a_{021} - 2 a_{012}^2) + y z^4 \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}}} (a_{014} - 3 a_{003} a_{012}) + x^4 z (a_{401} - a_{201}^2) + x^3 z^2 (a_{302} - 3 a_{102} a_{201}) + x^2 z^3 (a_{203} - 4 a_{003} a_{201} - 2 a_{102}^2) + x z^4 (a_{104} - 5 a_{003} a_{102}) + x^2 y^2 z \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}^2}} (a_{221} - 2 a_{021} a_{201} - a_{111}^2) + x y^2 z^2 \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}^2}} (a_{122} - 3 a_{021} a_{102} - 3 a_{012} a_{111}) + x^2 y z^2 \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}}} (a_{212} - a_{012} a_{201} - 2 a_{102} a_{111}) + x^3 y z \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}}} (a_{311} - a_{201} a_{111}) + x y^3 z \frac{1}{a_{030}} (a_{131} - a_{021} a_{111} - 2 a_{030} a_{102}) + x y z^3 \frac{1}{\sqrt[3]{a_{030}}} (a_{113} - 3 a_{003} a_{111} - 2 a_{012} a_{102}) + z^5 (a_{005} - 3 a_{003}^2), y^2).$$

Aplicando as mudanças

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y - a_{004}Y^4 - \frac{a_{022}}{\sqrt[3]{a_{030}^2}}Y^2Z - a_{103}XY^3 - a_{202}X^2Y^2 - a_{301}X^3Y, Z \right)$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, y, z - \frac{a_{013}}{\sqrt[3]{a_{030}}}yz^3 - \frac{a_{031}}{a_{030}}y^3z - \frac{a_{112}}{\sqrt[3]{a_{030}}}xyz^2 - \frac{a_{121}}{\sqrt[3]{a_{030}^2}}xy^2z - \frac{a_{211}}{\sqrt[3]{a_{030}}}x^2yz \right),$$

observando que a mudança na fonte preserva o bordo. Após aplicar tais mudanças obtemos

$$j^4P_u = (x, z + y^3 + \frac{a_{310}}{\sqrt[3]{a_{030}}}x^3y + \frac{a_{130}}{a_{030}}xy^3, y^2).$$

Considere as mudanças

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y - \frac{a_{130}}{a_{030}}XY, Z \right), \quad (x, y, z) \mapsto \left( x, y, z + \frac{a_{130}}{a_{030}}xz \right)$$

$$\text{e } (x, y, z) \mapsto \left( x, y, z + \frac{a_{130}^2}{a_{030}^2}x^2z \right),$$

obtendo  $j^4P_u = (x, z + y^3 + \frac{a_{310}}{\sqrt[3]{a_{030}}}x^3y, y^2)$ .

Suponha  $a_{310} \neq 0$ , obtemos a singularidade  $(x, z + y^3 + x^3y, y^2)$ , a qual é 4-determinada de  $\mathcal{B}_e - \text{cod} = 2$ .

Considere agora  $a_{310} = 0$ . Neste caso, realizando mudanças na meta e na fonte, como anteriormente, obtemos

$$j^5P_u = (x, z + y^3 + \frac{a_{410}}{(a_{030})^{1/3}}x^4y, y^2).$$

Assim, se  $a_{410} \neq 0$  então obtemos a singularidade 5-determinada  $(x, z + y^4 + \varepsilon x^4y, y^2)$ . Caso  $a_{410} = 0$  então temos singularidades de  $\mathcal{B}_e$ -codimensão maiores que 3.

Se  $a_{030} = 0$  e  $a_{210} \neq 0$  então, realizamos as mudanças

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, \frac{1}{a_{210}}y, z \right) \text{ e } (X, Y, Z) \mapsto (X, Y, a_{210}^2Z),$$

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y - a_{004}Y^4 - \frac{a_{022}}{a_{210}^2}Y^2Z - a_{103}XY^3 - a_{202}X^2Y^2 - a_{301}X^3Y - \frac{a_{121}}{a_{210}^2}XYZ, Z \right),$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, y, z - \frac{a_{013}}{a_{210}}yz^3 - \frac{a_{031}}{a_{210}^3}y^3z - \frac{a_{112}}{a_{210}}xyz^2 - \frac{a_{211}}{a_{210}^2}x^2yz \right),$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( x, y - \frac{a_{310}}{a_{210}}xy, z \right) \text{ e } \left( x - \frac{a_{130}}{2a_{210}^3}y^2, y, z \right),$$

acompanhadas de mudanças na meta quando necessárias, obtendo  $j^4P_u = (x, z + x^2y, y^2)$ .

Realizando mudanças na fonte e na meta como anteriormente encontramos

$$j^5P_u = \left( x, z + x^2y + \frac{1}{a_{210}^5} \left( a_{050} - \frac{a_{130}^2}{4a_{210}} \right) y^5, y^2 \right).$$

Assim, se  $\frac{1}{a_{210}^5} \left( a_{050} - \frac{a_{130}^2}{4a_{210}} \right) \neq 0$  obtemos a singularidade  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^5, y^2)$ , a qual é 5-determinada e possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão igual a 2.

Caso  $\frac{1}{a_{210}^5} \left( a_{050} - \frac{a_{130}^2}{4a_{210}} \right) = 0$  com mudanças na fonte e na meta análogas obtemos

$$j^7 P_u = (x, z + x^2y + a'_{070}y^7, y^2),$$

onde

$$a'_{070} = \frac{1}{4a_{210}^{10}} (4a_{070}a_{210}^3 - a_{130}^2a_{210}^2a_{021} - 3a_{130}^3a_{310} + 2a_{130}^2a_{210}^2a_{021} + a_{130}^2a_{210}a_{230} - 2a_{150}a_{130}a_{210}^2 + 10a_{130}a_{210}a_{310}a_{050} - 4a_{210}^3a_{021}a_{050}). \quad \textit{false}$$

Portanto, se  $a'_{070} \neq 0$  então obtemos a singularidade  $(x, z + x^2y + \varepsilon y^7, y^2)$  que é 7-determinada e possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão 3. Caso  $a'_{070} = 0$  obteremos singularidades de codimensão maiores que 3.  $\square$

Agora analisaremos os 2-jatos subseqüente de  $(x, y, 0)$ . Observe que os monômios da forma  $x^i, y^j$  e  $x^i y^j$  podem ser obtidos através de mudanças de coordenadas na meta, assim, escreveremos o  $j^2 P_u$  já levando isso em consideração.

$$j^2 P_u = (x, y, a_{002}z^2 + a_{101}xz + a_{011}yz).$$

**Teorema 4.4.4.** A projeção  $P_u$  possui a singularidade  $(x, y, z^2 + xz)$  se, e somente se,  $a_{002} \neq 0$  e  $(a_{101} \neq 0$  ou  $a_{011} \neq 0)$ . Além disso, caso  $a_{002} = 0$  e  $(a_{101} \neq 0$  ou  $a_{011} \neq 0)$  então 2-jato de  $P_u$  é da forma  $(x, y, xz)$  e caso  $a_{002} \neq 0$  e  $a_{101} = a_{011} = 0$  então 2-jato de  $P_u$  é da forma  $(x, y, z^2)$ .

*Demonstração.* Considere o  $j^2 P_u$  como anteriormente. Denotaremos por  $(x, y, z)$  as coordenadas da fonte e  $(X, Y, Z)$  as da meta.

Suponha  $a_{002} \neq 0, a_{101} \neq 0$  e  $a_{011} = 0$ . Dessa forma, realizando as seguintes mudanças de coordenadas

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y, \frac{1}{a_{002}}Z \right), (x, y, z) \mapsto \left( \frac{a_{002}}{a_{101}}x, y, z \right), \text{ e } (X, Y, Z) \mapsto \left( \frac{a_{101}}{a_{002}}X, Y, Z \right),$$

obtemos a forma normal  $(x, y, z^2 + xz)$ .

Suponha agora  $a_{002} \neq 0, a_{101} = 0$  e  $a_{011} \neq 0$ . Considerando as mudanças

$$(X, Y, Z) \mapsto \left( X, Y, \frac{1}{a_{002}}Z \right), (x, y, z) \mapsto \left( x, \frac{a_{002}}{a_{011}}y, z \right), \text{ e } (X, Y, Z) \mapsto \left( X, \frac{a_{011}}{a_{002}}Y, Z \right),$$

obtemos  $(x, y, z^2 + yz)$ , que é equivalente a  $(x, y, z^2 + xz)$ .

Por fim, se  $a_{002} \neq 0, a_{101} \neq 0$  e  $a_{011} \neq 0$ , basta aplicar as mudanças

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{1}{a_{101}}(x - a_{011}y), y, z \right), (X, Y, Z) \mapsto \left( a_{101}X + a_{011}Y, Y, \frac{1}{a_{002}}Z \right), \\ (x, y, z) \mapsto (a_{002}x, y, z) \text{ e } (X, Y, Z) \mapsto \left( \frac{1}{a_{002}}X, Y, Z \right),$$

para obter novamente a singularidade  $(x, y, z^2 + xz)$ , a qual é 2-determinada e possui  $\mathcal{B}_e$ -codimensão igual a 0.

Se  $a_{002} \neq 0$  mas  $a_{101} = a_{011} = 0$ , obtemos  $(x, y, z^2)$ , bastando utilizar a mudança de coordenada  $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, \frac{1}{a_{002}}Z)$ .

Se  $a_{002} = 0$  mas  $a_{101} \neq 0$  ou  $a_{011} \neq 0$ , obtemos facilmente  $(x, y, xz)$ .

Agora, se  $a_{002} = a_{101} = a_{011} = 0$  então obtemos  $(x, y, 0)$ , este caso resultará em germes com codimensões maiores que três ou não simples e, portanto, não iremos explicitar aqui as subsequentes contas.  $\square$

Analisaremos agora o caso quando 2-jato de  $P_u$  é da forma  $(x, y, z^2)$ . Escreva

$$j^3 P_u = (x, y, z^2 + a_{003}z^3 + a_{012}yz^2 + a_{021}y^2z + a_{102}xz^2 + a_{201}x^2z + a_{111}xyz).$$

**Teorema 4.4.5.** A projeção  $P_u$  possui a singularidade  $(x, y, z^2 + \varepsilon_1 y^2 z + \varepsilon_2 x^2 z)$  se, e somente se,  $a_{201} \neq 0$  e  $a_{111}^2 - 4a_{021}a_{201} \neq 0$  ou  $a_{201} = 0$  e  $a_{111} \neq 0$ .

*Demonstração.* A demonstração segue de maneira análoga às anteriores.  $\square$

Caso contrário, obtemos singularidades de codimensão maior que 3.

Analisaremos agora as singularidades subsequentes de  $(x, y, xz)$ . Considerando que os monômios da forma  $x^i, y^j$  e  $x^i y^j$  podem ser obtidos facilmente, escrevemos o 6-jato da forma

$$\begin{aligned} j^6 P_u = & (x, y, xz + a_{003}z^3 + a_{012}yz^2 + a_{021}y^2z + a_{102}xz^2 + a_{201}x^2z + a_{111}xyz + a_{004}z^4 + a_{013}yz^3 \\ & + a_{022}y^2z^2 + a_{031}y^3z + a_{103}xz^3 + a_{202}x^2z^2 + a_{301}x^3z + a_{211}x^2yz + a_{121}xy^2z + a_{112}xyz^2 + a_{005}z^5 \\ & + a_{014}yz^4 + a_{023}y^2z^3 + a_{032}y^3z^2 + a_{041}y^4z + a_{104}xz^4 + a_{203}x^2z^3 + a_{302}x^3z^2 + a_{401}x^4z + a_{221}x^2y^2z \\ & + a_{212}x^2yz^2 + a_{122}xy^2z^2 + a_{311}x^3yz + a_{131}xy^3z + a_{113}xyz^3 + a_{006}z^6 + a_{015}yz^5 + a_{024}y^2z^4 + a_{033}y^3z^3 \\ & + a_{042}y^4z^2 + a_{051}y^5z + a_{105}xz^5 + a_{204}x^2z^4 + a_{303}x^3z^3 + a_{402}x^4z^2 + a_{501}x^5z + a_{222}x^2y^2z^2 + a_{411}x^4yz \\ & + a_{141}xy^4z + a_{114}xyz^4 + a_{231}x^2y^3z + a_{213}x^2yz^3 + a_{321}x^3y^2z + a_{312}x^3yz^2 + a_{123}xy^2z^3 + a_{132}xy^3z^2). \end{aligned}$$

Observe que denotamos por  $a_{ijk}$  o coeficiente do monômio  $x^i y^j z^k$ .

**Teorema 4.4.6.** A projeção  $P_u$  cujo 2-jato é  $(x, y, xz)$  possui as singularidades:

1.  $(x, y, xz + z^3 + yz^2)$  se, e somente se,  $a_{003} \neq 0$  e  $a_{012} \neq 0$ .
2.  $(x, y, xz + z^3 + \varepsilon y^2 z^2)$  se, e somente se,  $a_{003} \neq 0$ ,  $a_{012} = 0$  e  $a_{022} - a_{021}a_{102} \neq 0$ .
3.  $(x, y, xz + z^3 + y^3 z^2)$  se, e somente se,  $a_{003} \neq 0$ ,  $a_{012} = 0$ ,  $a_{022} - a_{021}a_{102} = 0$  e  $-3a_{021}a_{102}a_{111} + a_{112}a_{021} + a_{031}a_{102} + 2a_{022}a_{111} - a_{032} \neq 0$ .

4.  $(x, y, xz + z^3 + \epsilon y^4 z^2)$  se, e somente se,  $a_{003} \neq 0$ ,  $a_{012} = 0$ ,  $a_{022} - a_{021}a_{102} = 0$ ,  
 $-3a_{021}a_{102}a_{111} + a_{112}a_{021} + a_{031}a_{102} + 2a_{022}a_{111} - a_{032} = 0$  e  $a_{042} - 3a_{021}^2 a_{102}a_{201} -$   
 $4a_{021}a_{102}a_{111}^2 + a_{121}a_{021}a_{102} + 3a_{112}a_{021}a_{111} + a_{021}^2 a_{202} + 2a_{021}a_{201}a_{022} + 3a_{031}a_{102}a_{111} +$   
 $a_{022}a_{111}^2 - a_{031}a_{112} - a_{122}a_{021} - a_{041}a_{102} - 2a_{032}a_{111} \neq 0$ .
5.  $(x, y, xz + yz^2 + z^4)$  se, e somente se,  $a_{003} = 0$ ,  $a_{012} \neq 0$  e  $a_{004} \neq 0$ .

*Demonstração.* A demonstração segue de maneira análoga às anteriores. □

## REFERÊNCIAS

---

ARNOLD, V. Critical points of functions on a manifold with boundary, the simples lie groups  $\mathcal{B}_k$ ,  $\mathcal{C}_k$ , and  $\mathcal{F}_4$  and singularities of evolutes. **Russ. Math. Surv.**, p. 33–99, 1978. Citado nas páginas 14, 27, 28 e 29.

BROCKER, T.; LANDER, L. **Differentiable Germs and Catastrophes**. Cambridge University Press, 1975. Citado na página 15.

BRUCE, J. Projections and reflections of generic surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . **Math. Scand.**, n. 54, p. 262–278, 1984. Citado na página 27.

\_\_\_\_\_. Classifications in singularity theory and their applications. **Kluwer Academic Publishers**, v. 21, p. 3–33, 2001. Citado na página 18.

BRUCE, J.; GIBLIN, P. **Curves and singularities**. Cambridge University Press., 1984. Citado na página 23.

\_\_\_\_\_. Projections of surfaces with boundary. **Proc. London Math Soc.**, v. 3, n. 60, p. 392–416, 1990. Citado nas páginas 14, 20 e 21.

BRUCE, J.; GIBLIN, P.; TARI, F. Families of surfaces: height functions and projections to planes. **Math. Scand.**, v. 82, n. 2, p. 165–185, 1998. Citado na página 39.

BRUCE, J.; KIRK, N.; PLESSIS, . du. Complete transversaks and the classification of singularities. **Nonlinearity**, v. 10, n. 1, p. 253–275, 1997. Citado na página 19.

DAMON, J. The unfolding and determinancy theorems for subgroups of  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{K}$ . **Mem. Amer. Math. Soc.**, v. 50, n. 306, p. 1–88, 1984. Citado na página 20.

GIBSON, C. Singular points of smooth mappings. **Pitman Research Notes in Mathematics**, n. 25, 1979. Citado na página 24.

GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. **Stable Mappings and their singularities**. Monografia (Graduation) — Springer - Verlag, New York, 1973. Citado nas páginas 13, 15 e 24.

GORYUNOV, V. Singularities of projections of full intersections, translated from itogi nauki i tekhniki, seriya sovremennye problemy matematiki. **Plenum Publishing Corporation**, v. 22, p. 207–239, 1984. Citado nas páginas 14 e 46.

IZUMIYA, S.; ROMERO, C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. **Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint**. [S.l.: s.n.], 2016. Citado nas páginas 13, 15, 25 e 26.

KIRK., N. P. **Transversal: A Maple Package for Singularity Theory**. [S.l.], 1998. Citado nas páginas 14 e 20.

LANE, S. M.; BIRKHOFF, G. Álgebra, the macmillan company. **Collier-Macmillan LTD, London**, p. 386–87, 1970. Citado na página 26.

- MARAR, T. **Discriminação de raízes**. [S.l.]. Citado na página 78.
- MARAR, W. L.; TARI, F. On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^3$ . **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, n. 119, p. 469–481, 1996. Citado na página 46.
- MARTINET, J. Singularities of smooth functions and maps. **Cambridge University Press**, 1982. Citado nas páginas 13, 15 e 21.
- MARTINS, L.; NABARRO, A. Projections of hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$  with boundary to planes. **Glasgow Math. J.**, n. 56, p. 149–167, 2014. Citado nas páginas 13 e 14.
- MATHER, J. Stability of  $c^\infty$  mappings iv:classification of stable germs by  $\mathcal{R}$ -algebras. **Glasgow Math. J.**, n. 37, p. 223–248, 1969. Citado na página 19.
- MONTALDI, J. On contact between submanifolds. **Michigan Math. J.**, n. 33, p. 195–199, 1986. Citado nas páginas 13, 17, 28 e 46.
- \_\_\_\_\_. On generic composite of maps. **Bull. Lond. Math. Soc.**, n. 23, p. 81–85, 1991. Citado na página 24.
- NABARRO, A. Tese de doutorado. **Sobre a geometria local de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$** , 2000. Citado nas páginas 13, 27, 29, 38, 39, 47, 48, 50, 51, 54, 65 e 89.
- NOGUEIRA, A. Tese de doutorado. **Superfícies em  $\mathbb{R}^4$  e dualidade**, 1998. Citado nas páginas 14 e 29.
- TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. [S.l.: s.n.], 1990. Citado na página 25.
- WALL, C. Finite determinacy of smooth map germs. **Bull. Lond. Math. Soc.**, n. 13, p. 481–539, 1981. Citado na página 23.
- HAWES, W. Tese de Doutorado **Multi-dimensional Motions of the Plane and Space**, 1994. Nenhuma citação no texto.

