UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Propriedades globais de uma classe de complexos diferenciais

Hugo Cattarucci Botós

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Hugo Cattarucci Botós

Propriedades globais de uma classe de complexos diferenciais

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

B748p

Botós, Hugo Cattarucci
Propriedades globais de uma classe de complexos diferenciais / Hugo Cattarucci Botós; orientador Sérgio Luís Zani. -- São Carlos, 2018.
116 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Equações diferenciais parciais lineares. 2. Complexos diferenciais. 3. Resolubilidade global. 4. Hipoeliticidade global. I. Zani, Sérgio Luís, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Hugo Cattarucci Botós

Global properties of a class of differential complexes

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
April 2018

Este trabalho é dedicado à minha família:
Antônio Sérgio Botós,
Maria Orípia Cattarucci Botós
e Juliana Cattarucci Botós.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e aos meus amigos, que sempre me apoiaram.

Agradeço também ao ICMC por me fornecer uma educação de qualidade e por ser o lugar onde conheci muitas pessoas maravilhosas.

Agradeço muitíssimo ao meu orientador Sérgio Luís Zani por ser uma pessoa muito legal e por ter me ajudado das mais diversas formas.

Por fim, agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro, número do processo 2016/06390-3.

"It is important to draw wisdom from many different places. If you take it from only one place, it becomes rigid and stale. Understanding others, the other elements, and the other nations, will help you become whole."

Iroh - Avatar: The last airbender.

RESUMO

BOTÓS, H. C. **Propriedades globais de uma classe de complexos diferenciais**. 2018. 116 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Considere a variedade $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$ com coordenadas (t,x) e considere uma 1-forma diferencial fechada e real $a(t)$ em $\mathbb{T}^n$. Neste trabalho consideramos o operador

$$\mathbb{L}_a^p = d_t + a(t) \wedge \partial_x$$

de $\mathscr{D}'_p$ em $\mathscr{D}'_{p+1}$, onde $\mathscr{D}'_p$ é o espaço das p-correntes da forma $u = \sum_{|I|=p} u_I(t,x)dt_I$. O operador acima define um complexo de cocadeia formado pelos espaços vetoriais $\mathscr{D}'_p$ e pelos homomorfismos lineares $\mathbb{L}_a^p : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_{p+1}$.

Definiremos o que significa resolubilidade global no complexo acima e caracterizaremos para quais 1-formas a o complexo é globalmente resolúvel. Faremos o mesmo com respeito a hipoeliticidade global no primeiro nível do complexo.

Palavras-chave: Resolubilidade global, hipoeliticidade global, condiçoes diofantinas, vetores de Liouville, análise de Fourier.

ABSTRACT

BOTÓS, H. C. **Global properties of a class of differential complexes**. 2018. 116 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Consider the manifold $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$ with coordinates (t,x) and let $a(t)$ be a real and closed differential 1-form on $\mathbb{T}^n$. In this work we consider the operator

$$\mathbb{L}_a^p = d_t + a(t) \wedge \partial_x$$

from $\mathscr{D}'_p$ to $\mathscr{D}'_{p+1}$, where $\mathscr{D}'_p$ is the space of all p-currents $u = \sum_{|I|=p} u_I(t,x)dt_I$. The above operator defines a cochain complex consisting of the vector spaces $\mathscr{D}'_p$ and of the linear maps $\mathbb{L}_a^p : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_{p+1}$.

We define what global solvability means for the above complex and characterize for which 1-forms a the complex is globally solvable. We will do the same with respect to global hypoellipticity on the first level of the complex.

Keywords: Global solvability, global hypoellipticity, diophantine conditions, Liouville vector, Fourier analysis.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Considere a variedade $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$ com coordenadas (t,x), onde $t \in \mathbb{T}^n$ e $x \in \mathbb{S}^1$, e fixe uma 1-forma fechada real

$$a(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)dt_k$$

em $\mathbb{T}^n$. Podemos considerar os campos

$$L_k = \partial_{t_k} + a_k\partial_x, \quad k = 1,\dots,n$$

sobre $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$. Queremos estudar os conceitos de resolubilidade e hipoeliticidade global desse sistema de campos.

O primeiro problema que discutiremos é a resolubilidade global, cuja referência é (BERGAMASCO; PETRONILHO, 1999).

Se $f_1,\dots,f_n$ são funções de $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$ então podemos considerar o sistema de equações

$$L_k u = f_k, \quad k = 1,\dots,n. \tag{1.1}$$

Queremos encontrar as condições de compatibilidade sobre as funções $f_1,\dots,f_n$ para as quais o problema é passível de ser resolvido e gostaríamos de saber quando existe solução u. A fim de discutir esse problema é interessante considerar o complexo diferencial que descreveremos a seguir.

Para cada número natural p considere o espaço $\mathscr{D}'_p$ formado pelas p-correntes [1]

$$u(t,x) = \sum_{|I|=p} u_I(t,x)dt_I,$$

[1] Uma p-corrente $v(x)$ em $\mathbb{T}^d$ é uma expressão da forma $v(x) = \sum_{|I|=p} v_I(x)dx_I$ onde cada v_I é uma distribuição em $\mathbb{T}^d$, ou seja, é uma generalização de p-formas diferenciais. Discutiremos correntes sistematicamente no capítulo seguinte.

onde cada u_I é uma distribuição em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$. Note que não há fator dx nas correntes de $\mathscr{D}'_p$ e que $\mathscr{D}'_0 = \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$. O espaço $\mathscr{D}_p$ será formado pelas p-formas diferenciais que pertencem a $\mathscr{D}'_p$.

A partir dos campos L_k podemos definir o operador $\mathbb{L}^p_a : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_{p+1}$ dado por

$$\mathbb{L}^p_a u = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|I|=p} L_k(u_I) dt_k \wedge dt_I.$$

Como a 1-forma a é fechada temos que $\mathbb{L}^{p+1}_a \mathbb{L}^p_a = 0$, ou seja, o operador acima define o complexo de cocadeia

$$\mathscr{D}'_0 \xrightarrow{\mathbb{L}^0_a} \mathscr{D}'_1 \xrightarrow{\mathbb{L}^1_a} \cdots \xrightarrow{\mathbb{L}^{p-1}_a} \mathscr{D}'_p \xrightarrow{\mathbb{L}^p_a} \mathscr{D}'_{p+1} \xrightarrow{\mathbb{L}^{p+1}_a} \cdots$$

que chamaremos de complexo diferencial.

O sistema (1.1) pode ser escrito como $\mathbb{L}^0_a u = f$ onde $f = \sum_{k=1}^n f_k dt_k$. Assim, de forma mais geral, queremos estudar a equação $\mathbb{L}^p_a u = f$ onde $f \in \mathscr{D}_{p+1}$. Repare que se existe uma solução $u \in \mathscr{D}'_p$ para tal equação então $\mathbb{L}^{p+1}_a f = \mathbb{L}^{p+1}_a \mathbb{L}^p_a u = 0$, ou seja, temos uma restrição sobre f. Adicionando uma segunda restrição, que é um pouco mais técnica e discutiremos depois, obtemos o espaço $\mathbb{E}^{p+1}_a$ das $(p+1)$-formas em $\mathscr{D}_{p+1}$, que se encontra na definição 4.27. Essencialmente, o espaço $\mathbb{E}^{p+1}_a$ é o espaço das $(p+1)$-formas diferenciais de $\mathscr{D}_{p+1}$ no qual faz sentido procurar solução para $\mathbb{L}^p_a u = f$.

Assim, podemos ser explícitos sobre o que queremos dizer com resolubilidade global: Dizemos que $\mathbb{L}^p_a$ é globalmente resolúvel se para cada $f \in \mathbb{E}^{p+1}_a$ existe uma $u \in \mathscr{D}'_p$ satisfazendo $\mathbb{L}^p_a u = f$. Classificaremos para quais 1-formas fechadas a de $\mathbb{T}^n$ temos que $\mathbb{L}^p_a$ é globalmente resolúvel.

Na definição 4.17 estabelecemos o que significa para uma 1-forma fechada a ser inteira, racional, irracional e de Liouville. Com essa terminologia podemos enunciar o teorema 4.41.

Teorema: Para cada $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ temos que $\mathbb{L}^p_a$ é globalmente resolúvel se, e só se, a é racional ou a é irracional não Liouville.

O segundo problema que trataremos é o da hipoeliticidade global do operador $\mathbb{L}_a := \mathbb{L}^0_a$, discutida no artigo (BERGAMASCO; CORDARO; MALAGUTTI, 1993).

O operador $\mathbb{L}_a$ é globalmente hipoelítico se para toda $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$ satisfazendo $\mathbb{L}_a u \in \mathscr{D}_1$ temos que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$.

O resultado principal sobre hipoeliticidade global é o teorema 5.8.

Teorema: O operador $\mathbb{L}_a$ é globalmente hipoelítico se, e só se, a é irracional não Liouville.

No artigo original se considera a variedade $M \times \mathbb{S}^1$, onde M é variedade compacta e conexa, e se usa as coordenadas $(t, x) \in M \times \mathbb{S}^1$. Para cada 1-forma fechada e real a podemos considerar o operador

$$\mathbb{L}_a = d_t + a(t) \wedge \partial_x,$$

onde d_t é a derivada exterior com respeito à variável $t \in M$. No caso em que $M = \mathbb{T}^n$ temos que esse operador $\mathbb{L}_a$ é igual ao que definimos anteriormente. O interessante de se considerar $M = \mathbb{T}^n$ é que a prova do resultado é mais elementar e preserva as ideias centrais da prova original.

A fim de demonstrarmos os teoremas enunciados anteriormente precisamos de algumas ferramentas básicas. No capítulo 2 apresentaremos de forma mais sistemática o que são distribuições e correntes em $\mathbb{T}^n$ e no capítulo 3 apresentaremos resultados básicos envolvendo séries de Fourier para funções suaves, formas diferenciais, distribuições e correntes.

CAPÍTULO

2

DISTRIBUIÇÕES E CORRENTES

2.1 Espaços localmente convexos

A fim de falarmos sobre séries de Fourier e suas convergências de forma mais simples desenvolveremos ferramentas topológicas básicas. Usaremos como referências o livro (FOLLAND, 1999) do G. Folland, onde se encontram as teorias de redes e de espaços vetoriais topológicos, e o livro (TREVES, 1967) de F. Treves, onde se encontra a teoria de espaços vetoriais topológicos.

Em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ denotaremos a bola de raio r e centro x com respeito a suas normas usuais por $B(x,r)$.

Considere o espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma seminorma em X é uma função $p:X\to\mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$ para quaisquer $x,y\in X$;
2. $p(ax)=|a|p(x)$ para cada $a\in\mathbb{K}$ e cada $x\in X$.

Provemos algumas propriedades básicas.

Proposição 2.1. Seja p uma seminorma sobre o espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$. As seguintes propriedades são válidas:

1. $p(0)=0$;
2. $p(x)\geq 0$ para todo $x\in X$.

Demonstração. 1. Seja $\alpha=0$. Temos que

$$p(0)=p(\alpha 0)=|\alpha|p(0)=0p(0)=0.$$

2. Fixe $x \in X$. Temos que $0 = x - x$ e, portanto,

$$0 = p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x),$$

de onde segue que $p(x) \geq 0$.

□

Se $p(x) = 0$ somente quando $x = 0$ então chamamos p de norma.

Note que há seminormas que não são normas. Por exemplo, se $X = C^1(\mathbb{R})$ e K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ então podemos considerar a seminorma $p(f) = \sup_{x \in K} |f'(x)|$ sobre X e essa não é norma, pois $p(f) = 0$ para $f \equiv 1$.

Definição 2.2. Um espaço localmente convexo é um espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$ munido com uma família não vazia S de seminormas. Denotaremos esse espaço por (X, S).

Claramente se S é formado por apenas uma seminorma e essa é uma norma então X é um espaço normado.

Considere um espaço localmente convexo (X, S). Assim como ocorre para espaços normados, a família de seminormas S induz uma topologia sobre X.

Suponha que temos $x \in X$, um subconjunto não vazio e finito J de S e um número real positivo ε. Denotaremos por $B(x, J, \varepsilon)$ o conjunto de todos os pontos $y \in X$ satisfazendo $p(x - y) < \varepsilon$ para cada $p \in J$.

Proposição 2.3. A família $\mathscr{B}$ formada pelos conjuntos $B(x, J, \varepsilon)$ descritos acima é uma base.

Demonstração. Claramente $X = \cup_{B \in \mathscr{B}} B$. Mostremos que se $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$ então existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Sejam

$$B_1 = B(x_1, J_1, \varepsilon_1) \quad \text{e} \quad B_2 = B(x_2, J_2, \varepsilon_2)$$

e note que $p(x - x_i) < \varepsilon_i$ para todo $p \in J_i$.

Considere $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \varepsilon_1 - p(x - x_1)$ para todo $p \in J_1$ e $\varepsilon < \varepsilon_2 - p(x_2 - x)$ para todo $p \in J_2$. Esse ε existe porque $\varepsilon_i - p(x - x_i) > 0$ para $p \in J_i$ e os conjuntos J_1 e J_2 são finitos.

Tome $B_3 = B(x, J_1 \cup J_2, \varepsilon)$ e $y \in B_3$. Para cada $p \in J_1$ temos $p(x - y) < \varepsilon$, ou seja,

$$p(x - y) < \varepsilon < \varepsilon_1 - p(x - x_1),$$

o que implica em

$$p(y - x_1) \leq p(y - x) + p(x - x_1) < \varepsilon_1.$$

Assim $y \in B_1$ e por argumento análogo $y \in B_2$. Logo, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. □

A topologia gerada pelas seminormas é a dada pela base $\mathscr{B}$.

Assim temos que $U \subset X$ é aberto se, e só se, para cada $x \in U$ existe $B(x,J,\varepsilon) \in \mathscr{B}$ satisfazendo $B(x,J,\varepsilon) \subset U$.

Observação 2.4. Se temos uma família de espaços localmente convexos (X_j,S_j), com $j \in I$, então ao considerarmos $X = \Pi_{j\in J}X_j$ e $S = \{p_j \circ \pi_j : j \in I \text{ e } p_j \in S_j\}$, onde $\pi_j : X \to X_j$ é a projeção canônica, obtemos o espaço localmente convexo (X,S). A topologia gerada por S sobre X é a topologia produto.

Mostremos que as operações básicas de (X,S) são contínuas.

Proposição 2.5. Temos as seguintes propriedades:

a) A aplicação $A : X \times X \to X$ dada por $A(x,y) = x+y$ é contínua.

b) A aplicação $M : \mathbb{K} \times X \to X$ dada por $M(\alpha,x) = \alpha x$ é contínua.

c) Toda seminorma de S é contínua.

Demonstração. a) Fixe $(x_0,y_0) \in X \times X$. Considere $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança $B(x_0+y_0,J,\varepsilon)$ de x_0+y_0. Então temos a inclusão

$$A(B(x_0,J,\varepsilon/2) \times B(y_0,J,\varepsilon/2)) \subset B(x_0+y_0,J,\varepsilon),$$

nos garantindo a continuidade de A.

b) Fixe (α_0,x_0) em $\mathbb{K} \times X$. Seja $\varepsilon > 0$ e considere uma vizinhança $B(\alpha_0 x_0,J,\varepsilon)$ de $\alpha_0 x_0$. Tome $\delta > 0$ satisfazendo

$$\delta < 1 \quad \text{e} \quad \delta < \varepsilon/(1+|\alpha_0|+p(x_0)).$$

Se $(\alpha,x) \in B(\alpha_0,\delta) \times B(x_0,J,\delta)$ então para cada $p \in J$ temos

$$\begin{aligned} p(M(\alpha,x)-M(\alpha_0,x_0)) &= p(\alpha x-\alpha_0 x_0) \\ &= p(\alpha(x-x_0)+(\alpha-\alpha_0)x_0) \\ &\leq |\alpha|p(x-x_0)+|\alpha-\alpha_0|p(x_0) \\ &\leq (|\alpha_0|+1)p(x-x_0)+|\alpha-\alpha_0|p(x_0) \\ &\leq (|\alpha_0|+p(x_0)+1)\delta < \varepsilon, \end{aligned}$$

onde estamos usando

$$|\alpha| \leq |\alpha-\alpha_0|+|\alpha_0| \leq \delta+|\alpha_0| \leq 1+|\alpha_0|$$

ao passarmos da terceira para quarta linha.

Logo, a inclusão

$$M(B(\alpha_0,\delta)\times B(x_0,J,\delta))\subset B(\alpha_0 x_0,J,\varepsilon)$$

nos garante a continuidade de M.

c) Basta notar que dado $x_0\in X$ e $\varepsilon>0$ temos que

$$p(B(x_0,p,\varepsilon))\subset(p(x_0)-\varepsilon,p(x_0)+\varepsilon).$$

$\square$

Definição 2.6. Seja (X,S) um espaço localmente convexo. Um subconjunto M de X é limitado se $\sup_{x\in M}p(x)<\infty$ para cada $p\in S$.

Definição 2.7. Duas famílias de seminormas S_1 e S_2 sobre o espaço vetorial X são equivalentes se induzem a mesma topologia.

Nosso interesse é considerar entre espaços vetoriais localmente convexos transformações lineares que são contínuas. Em particular, se (X,S) é um espaço localmente convexo então consideraremos o seu espaço dual (X',S'), onde X' é o espaço dos funcionais lineares contínuos de X e S' é formado pelas seminormas $p_x(f)=|f(x)|$ com $x\in X$. A topologia que S' gera sobre X' é conhecida como topologia fraca estrela. [1]

Dados os espaços localmente convexos (X_1,S_1) e (X_2,S_2), um isomorfismo topológico entre X_1 e X_2 é um isomorfismo linear que é homeomorfismo. Temos os seguintes resultados como consequência direta da proposição 2.5:

1. Se $x'\in X$ então a aplicação $T:X\to X$ dada por $Tx=x+x'$ é homeomorfismo;
2. Se $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ então a aplicação $T:X\to X$ dada por $T(x)=ax$ é isomorfismo topológico.

Pelo primeiro item concluímos que dado $x'\in X$ e U aberto em X temos que

$$x'+U=\{x'+x\in X:x\in U\}$$

é aberto em X. Do segundo concluímos que dado $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ temos que

$$aU=\{ax\in X:x\in U\}$$

é aberto em X.

Repare que como $x\mapsto x-x'$ é homeomorfismo, temos que se $\{x_j\}_{j\in D}$ é uma rede então $x_j\to x'$ se, e só se, $x_j-x'\to 0$. Analogamente, se $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ então $x_j\to x'$ se, e só se, $ax_j\to ax'$.

[1] Não consideraremos outra topologia sobre X', mas assim como ocorre com espaços de Banach, poderíamos definir a topologia forte e a topologia fraca sobre X'.

Proposição 2.8. Seja $T : X_1 \to X_2$ uma transformação linear. Temos que T é contínua se, e só se, T é contínua em 0.

Demonstração. A única parte não trivial desse resultado é que se T é contínua em 0 então será contínua em X_1. Fixe $x \in X_1$ e mostremos que T é contínua em x.

Considere uma rede $\{x_j\}_{j\in D}$ em X_1 convergindo para x. Como $x_j - x \to 0$ e T é contínua em 0 segue que $T(x_j) - T(x) = T(x_j - x) \to 0$, ou seja, $T(x_j) \to T(x)$. □

Em particular, um funcional $u : X \to \mathbb{K}$ é contínuo se for contínuo em 0.

Proposição 2.9. Uma rede $\{x_j\}_{j\in D}$ em X converge para $x \in X$ se, e só se,

$$p(x_j - x) \to 0$$

para todo $p \in S$.

Demonstração. Considere $x_j \to x$ em X e $p \in S$. Como $p \in S$ é uma aplicação contínua concluímos que $p(x_j - x) \to 0$.

Agora considere o caso em que $p(x_j - x) \to 0$ para todo $p \in S$ e mostremos que x_j converge para x em X.

Considere uma vizinhança $B(x,J,\varepsilon)$ de x. Como J é finito, há $N \in D$ tal que $p(x_j - x) < \varepsilon$ para todo $j \geq N$ e todo $p \in J$. De fato, se $J = \{p_1,\ldots,p_k\}$ então para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$ existe $n_i \in D$ satisfazendo $p_i(x - x_j) < \varepsilon$ para $j \geq n_i$ e, portanto, basta tomar $N \in D$ tal que $N \geq n_1,\ldots,n_k$.

Logo, para $j \geq N$ temos $x_j \in B(x,J,\varepsilon)$, finalizando a prova. □

Assim, pela proposição 2.9, se f_j é uma rede em X' e $f \in X'$ então temos que $f_j \to f$ em X' na topologia fraca estrela se, e só se, $f_j(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$.

Algumas vezes consideraremos somente a continuidade sequencial.

Definição 2.10. Sejam M e N espaços topológicos. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é sequencialmente contínua em $z \in M$ se temos $f(z_n) \to f(z)$ sempre que z_n é uma sequência de M convergindo para z. Dizemos que f é sequencialmente contínua quando for sequencialmente contínua em cada ponto de M.

Note que se $f : M \to N$ é contínua então f é sequencialmente contínua. Se M é metrizável então vale a reciproca, isto é, se f é sequencialmente contínua então f é contínua.

Agora considere os espaços localmente convexos (X_1,S_1) e (X_2,S_2).

Análogo ao que ocorre com continuidade, temos que se $T : X_1 \to X_2$ é uma aplicação linear sequencialmente contínua se, e só se, for sequencialmente contínua em 0. De fato, suponha que T é sequencialmente contínua em 0 e mostremos que é sequencialmente contínua em X_1. Se $x \in X_1$ e x_n é uma sequência de X_1 convergindo para x então $x_n - x \to 0$, ou seja, $T(x_n - x) \to 0$, o que em outras palavras significa que $T(x_n) \to T(x)$. Que continuidade sequencial implica em continuidade sequencial em 0 é evidente.

Em particular, se (X,S) é espaço localmente convexo metrizável então um funcional linear $u : X \to \mathbb{K}$ é contínuo se, e só se, u é sequencialmente contínuo, ou seja, temos que u é funcional linear contínuo quando para toda sequência x_n convergindo a 0 temos $u(x_n) \to 0$.

Definição 2.11. Uma rede $\{x_j\}_{j\in D}$ de X é de Cauchy se para cada $p \in S$ e para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in D$ tal que

$$p(x_j - x_k) < \varepsilon \text{ para } j,k \geq N.$$

Dizemos que X é completo se toda rede de Cauchy é convergente. Dizemos que o espaço é sequencialmente completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Observação 2.12. Outra forma de dizer que uma rede x_j, com $j \in D$, é de Cauchy é a seguinte: x_j é uma rede de Cauchy se para cada vizinhança V de 0 existe $N \in D$ tal que $x_j - x_k \in V$ para $j,k \geq N$. Assim, se S_1, S_2 são famílias equivalentes de seminormas em X então uma rede x_j é de Cauchy em (X,S_1) se, e só se, for de Cauchy em (X,S_2). Em particular, (X,S_1) é completo se, e só se, (X,S_2) é completo.

Proposição 2.13. Para cada h não nulo em X existe $p \in S$ tal que $p(h) > 0$ se, e só se, X é espaço Hausdorff.

Demonstração. Suponha que para cada $h \in X$ não nulo existe $p \in S$ tal que $p(h) > 0$ e mostremos que X é Hausdorff.

Tome $x,y \in X$ distintos. Existe $p \in S$ tal que $p(x-y) > 0$ pois $x - y \neq 0$.

Seja $\varepsilon = p(x-y)/3$. Definindo $U = B(x,p,\varepsilon)$ e $V = B(y,p,\varepsilon)$ temos que U e V são abertos disjuntos de X tais que $x \in U$ e $y \in V$. Portanto, X é espaço Hausdorff.

Agora suponha que X é espaço Hausdorff e mostremos que para cada $h \in X$ não nulo existe $p \in S$ satisfazendo $p(h) > 0$.

Sabendo que $h \neq 0$ e X é Hausdorff concluímos que existem as vizinhanças disjuntas $B(0,J_1,\varepsilon_1)$ e $B(h,J_2,\varepsilon_2)$ de 0 e h, respectivamente, e como $0 \notin B(h,J_2,\varepsilon_2)$ temos que há $p \in J_2$ tal que $p(h-0) \geq \varepsilon_2$, ou seja, $p(h) > 0$. $\square$

Sabemos da análise básica que se $u : M \to \mathbb{K}$ é funcional linear, onde M é um espaço normado com norma $\|\cdot\|_M$, então vale que u é contínuo se, e só se, existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C\|x\|_M$ para quaisquer x em M. No contexto mais geral de espaços localmente convexos temos o resultado a seguir.

Proposição 2.14. Seja $u : X \to \mathbb{K}$ um funcional linear. Temos que u é contínuo se, e só se, existem um subconjunto não vazio e finito J de S e uma constante real $C > 0$ tais que

$$|u(x)| \leq C \max_{p \in J} p(x)$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Assuma que u é contínua. Há um subconjunto finito $J \neq \emptyset$ de S e um número positivo δ tais que

$$u(B(0,J,\delta)) \subset B(0,1).$$

Considere $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e defina

$$y = \frac{\delta}{\varepsilon + \max_{p \in J} p(x)} x.$$

Temos que $y \in B(0,J,\delta)$, pois $p(y) < \delta$ para todo $p \in J$. Assim, sendo $|u(y)| < 1$, obtemos

$$|u(x)| < \delta^{-1} \left(\varepsilon + \max_{p \in J} p(x) \right),$$

de onde segue, fazendo $\varepsilon \to 0$, a desigualdade

$$|u(x)| \leq \delta^{-1} \max_{p \in J} p(x).$$

Agora suponha que há $C > 0$ e um subconjunto finito $J \neq \emptyset$ de S tais que

$$|u(x)| \leq C \max_{p \in J} p(x)$$

para todo $x \in X$ e mostremos que u é contínua.

Considere $\varepsilon > 0$ e tome $\delta = C^{-1}\varepsilon$. Se $x \in B(0,J,\delta)$ então $p(x) < \delta$ para cada $p \in J$ de onde obtemos

$$|u(x)| \leq C \max_{p \in J} p(x) < \varepsilon.$$

Logo, u é contínua em 0 e portanto, por ser funcional linear, é contínua. $\square$

Definição 2.15. Considere o espaço localmente convexo (X,S). Se S é equivalente a uma família enumerável de seminormas e X é espaço Hausdorff e sequencialmente completo então dizemos que X é espaço de Fréchet.

O espaço das funções suaves periódicas e o espaço das p-formas diferenciais periódicas que estudaremos nas seções seguintes são de Fréchet. Varios espaços em Matemática são naturalmente espaços de Fréchet: Todos os espaços de Banach, o espaço das funções holomorfas em uma superfície de Riemann, $C^\infty(M)$ em uma variedade suave M, o espaço de Schwartz em análise de Fourier, etc.

Proposição 2.16. Se (X,S) é espaço de Fréchet e S é finito então a topologia de X é dada pela norma $|x|_X = \max_{p\in S}|p(x)|$ e $(X,|\cdot|_X)$ é espaço de Banach.

Demonstração. Note que $|x|_X = 0$ se, e só se, $p(x) = 0$ para todo $p \in S$, o que só ocorre quando $x = 0$ por causa da proposição 2.13. Logo, $|\cdot|_X$ é norma.

Mostremos que $(X,|\cdot|_X)$ e (X,S) tem mesma topologia. Todo aberto de $(X,|\cdot|_X)$ é aberto de (X,S) pois toda bola de $(X,|\cdot|_X)$ é aberto básico de (X,S). Por outro lado, se $B = B(x,J,\varepsilon)$ é um aberto básico de (X,S) então temos que a bola $B' = B(x,|\cdot|_X,\varepsilon)$ de $(X,|\cdot|_X)$ satisfaz $B' \subset B$. Logo, todo aberto de (X,S) é aberto de $(X,|\cdot|_X)$.

Note que as sequências de Cauchy de (X,S) são as mesmas sequências de Cauchy do espaço normado $(X,|\cdot|_X)$ de acordo com a observação 2.12. Logo, $(X,|\cdot|_X)$ é espaço de Banach. $\square$

Tratemos agora do espaço de Frechet (X,S) onde S é enumerável infinito, ou seja, podemos supor que $S = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Defina a função $d_i(x,y) = \min\{1, p_i(x-y)\}$.

Temos que d_i é uma pseudo-métrica, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d_i(x,x) \geq 0$ para todo $x \in X$;
2. $d_i(x,y) = d_i(y,x)$ para quaisquer $x,y \in X$;
3. $d_i(x,y) \leq d_i(x,z) + d_i(z,y)$ para quaisquer $x,y,z \in X$.

Além disso, d_i satisfaz $d_i(x,y) \leq 1$ para quaisquer $x,y \in X$.

Defina a função
$$d(x,y) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} d_i(x,y),$$
que está bem definida, pois $2^{-i}d_i(x,y) \leq 2^{-i}$ e consequentemente
$$\sum_{i\geq 1} 2^{-i} d_i(x,y) \leq \sum_{i\geq 1} 2^{-i} = 1.$$

Das propriedades de d_i obtemos que

1. $d(x,x) \geq 0$ para todo $x \in X$;
2. Se $x,y \in X$ e $d(x,y) = 0$ então $x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$ para quaisquer $x,y \in X$;
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para quaisquer $x,y,z \in X$;

5. $d(x,y) \leq 1$.

A única propriedade acima não imediata é a segunda. Tome $x, y \in X$ tais que $d(x,y) = 0$. Então temos que $p_i(x-y) = 0$ para cada i inteiro positivo. Como X é Hausdorff, temos que $x = y$ pela proposição 2.13.

Portanto, (X,d) é espaço métrico. Denotaremos a bola de centro x e raio $r > 0$ de (X,d) por $B_{(X,d)}(x,r)$.

Proposição 2.17. A topologia de (X,d) coincide com a topologia de (X,S).

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Considere a bola $B = B_{(X,d)}(x,\varepsilon)$ e N inteiro positivo tal que

$$\sum_{i>N} 2^{-i} < 2^{-1}\varepsilon.$$

Considere as seminormas $J = \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ e defina $B' = B(x, J, 2^{-1}\varepsilon)$. Temos que $B' \subset B$. De fato, se $y \in B'$ então temos que $p_i(x-y) < 2^{-1}\varepsilon$ para $i = 1, \ldots, N$. Desta forma, temos que $d_i(x,y) < 2^{-1}\varepsilon$ para $i = 1, 2, \ldots, N$.

Assim temos que

$$\begin{aligned} d(x,y) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} d_i(x,y) &= \sum_{1\leq i\leq N} 2^{-i} d_i(x,y) + \sum_{i>N} 2^{-i} d_i(x,y) \\ &< 2^{-1}\varepsilon \sum_{1\leq i\leq N} 2^{-i} + 2^{-1}\varepsilon < 2^{-1}\varepsilon + 2^{-1}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde temos $y \in B$. Logo, todo aberto de (X,d) é aberto de (X,S).

Por outro lado, seja $B = B(x,J,\varepsilon)$ um aberto básico de (X,S). Seja N inteiro positivo tal que $J \subset \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$.

Tome $\varepsilon' > 0$ satisfazendo $\varepsilon' < 1$ e $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Se $B' = B_{(X,d)}(x, 2^{-N}\varepsilon')$ então temos $B' \subset B$. De fato, se $y \in B'$ e $p_i \in J$ então temos que

$$2^{-i} d_i(x,y) \leq d(x,y) < 2^{-N}\varepsilon'$$

e consequentemente, levando em conta que $i \leq N$,

$$d_i(x,y) < 2^{-N+i}\varepsilon' \leq \varepsilon'.$$

Logo, como $\varepsilon' < 1$, temos que $d_i(x-y) = p_i(x-y)$ e, portanto, obtemos

$$p_i(x-y) < \varepsilon' \leq \varepsilon,$$

ou seja, $B' \subset B$.

Portanto, todo aberto de (X,S) é aberto de (X,d). $\square$

Proposição 2.18. Temos que uma sequência x_n é de Cauchy em (X,S) se, e só se, for de Cauchy em (X,d).

Demonstração. Seja x_n uma sequência de Cauchy de (X,d). Seja V uma vizinhança de 0. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{(X,d)}(0,\varepsilon) \subset V$. Há $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ para $n,m \geq N$. Note que pela fórmula da métrica temos $d(x_n,x_m) = d(x_n - x_m,0)$, ou seja, $x_n - x_m \in V$ para $n,m \geq N$. Logo, x_n é sequência de Cauchy em (X,S).

Reciprocamente, considere uma sequência de Cauchy de (X,S). Fixando $\varepsilon > 0$ temos que há $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in B_{(X,d)}(0,\varepsilon)$ para $n,m \geq N$. Logo, $d(x_n,x_m) = d(x_n - x_m,0) < \varepsilon$ para $n,m \geq N$, ou seja, x_n é sequência de Cauchy em (X,d). □

Logo, (X,d) é completo, pois (X,S) é de Fréchet.

Assim concluímos que todo espaço de Frechét é metrizável e admite uma métrica completa. No caso em que (X,S) é um espaço de Frechet e $u : X \to \mathbb{K}$ é um funcional linear temos que $u \in X'$ quando verificamos $u(x_n) \to 0$ para toda sequência x_n de X convergindo para 0.

2.2 Funções e formas diferenciais no toro

O toro n-dimensional é o quociente $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. A projeção natural Π de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{T}^n$ é dada por $\Pi(x) = x + 2\pi\mathbb{Z}^n$ e a topologia do toro é a topologia quociente. Sabemos da geometria que se considerarmos $\mathbb{T}^n$ como variedade suave, temos que $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ é recobrimento universal suave. Em particular, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ há uma vizinhança aberta U de x em $\mathbb{R}^n$ e uma vizinhança V de $\Pi(x) = x + 2\pi\mathbb{Z}^n$ tais que $\Pi : U \to V$ é difeomorfismo.

A seguir estudaremos alguns espaços de funções em $\mathbb{T}^n$ e como esses se traduzem para espaços de funções em $\mathbb{R}^n$.

Lembre-se que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é 2π-periódica se satisfaz

$$f(x + 2\pi m) = f(x)$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Com frequência será utilizado o termo função periódica para designarmos funções 2π-periódicas.

Se X é um conjunto então $\mathrm{Fun}(X)$ será o espaço das funções de X em $\mathbb{C}$. Denotaremos por $\mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^n)$ formado pelas funções periódicas.

Considere o pullback $\Pi^* : \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R}^n)$, que é a aplicação linear dada pela expressão $\Pi^*\phi = \phi \circ \Pi$. Repare que se $\phi \in \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n)$ então $\Pi^*\phi$ é 2π-periódica. De fato, se $k \in \mathbb{Z}^n$ então $\Pi^*\phi(x + 2\pi k) = \Pi^*\phi(x)$, pois

$$\Pi(x + 2\pi k) = x + 2\pi k + 2\pi\mathbb{Z}^n = x + 2\pi\mathbb{Z}^n = \Pi(x).$$

Assim, temos a aplicação linear $\Pi^* : \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.19. A aplicação linear

$$\Pi^* : \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$$

é isomorfismo linear.

Demonstração. Mostremos primeiramente a injetividade. Se $\phi \in \ker \Pi^*$ então $\phi \circ \Pi(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, para cada $x + 2\pi\mathbb{Z}^n \in \mathbb{T}^n$ temos $\phi(x + 2\pi\mathbb{Z}^n) = 0$ e consequentemente $\phi = 0$.

Agora mostremos que Π^* é sobrejetora. Se $f \in \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ então podemos definir a função $\phi(x + 2\pi\mathbb{Z}) = f(x)$ e teremos $\Pi^*\phi = f$. Note que a função ϕ está bem definida, pois se $x + 2\pi\mathbb{Z}^n = x' + 2\pi\mathbb{Z}^n$ então $x - x' \in 2\pi\mathbb{Z}^n$ e consequentemente temos $f(x) = f(x')$. □

O espaço vetorial formado pelas funções periódicas contínuas de $\mathbb{R}^n$ será denotado por $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ e o espaço vetorial formado pelas funções periódicas suaves de $\mathbb{R}^n$ será denotado por $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.20. O isomorfismo linear $\Pi^* : \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ nos fornece os seguintes isomorfismos lineares

$$C(\mathbb{T}^n) \overset{\Pi^*}{\to} C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad C^\infty(\mathbb{T}^n) \overset{\Pi^*}{\to} C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Se $\phi \in C(\mathbb{T}^n)$ então $\Pi^*\phi = \phi \circ \Pi$ é contínua, pois Π é suave. Da mesma forma, se ϕ é suave então $\Pi^*\phi$ é suave.

Por outro lado, se $f \in C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ então $\phi = (\Pi^*)^{-1} f$ é contínua como consequência de Π ser difeomorfismo local. De fato, tome $z \in \mathbb{T}^n$ e seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $z = x + 2\pi\mathbb{Z}^n$. Como Π é recobrimento suave, existem uma vizinhança aberta U de x e uma vizinhança aberta V de $z = \Pi(x)$ tal que $\Pi : U \to V$ é difeomorfismo, que denotaremos por h. Assim, como $\phi|_V = f|_U \circ h^{-1}$, segue que ϕ é contínua em V. Logo, por z ser arbitrário, segue que ϕ é contínua. Da mesma forma, se $f \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ então $(\Pi^*)^{-1} f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. □

Definição 2.21. A norma que consideraremos em $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ é $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Assim, temos que $\Pi^* : C(\mathbb{T}^n) \to C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ é isomorfismo isométrico, pois

$$\sup_{z \in \mathbb{T}^n} |f(z)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\Pi^* f(x)|.$$

Sendo $C(\mathbb{T}^n)$ espaço de Banach segue que $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ é espaço de Banach.

Podemos identificar o espaço $C(\mathbb{T}^n)$ naturalmente com o espaço $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$, o que na pratica significa que funções contínuas $\mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ podem ser vistas como funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ contínuas e 2π-periódicas, e vice-versa.

Traduzamos algumas operações básicas que podemos executar com funções periódicas para funções no toro.

Quando $a \in \mathbb{R}^n$ e $f \in \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$, temos que $f(\cdot + a)$, dada por $x \mapsto f(x+a)$, é uma função periódica e consequentemente podemos considerar a aplicação

$$\tau_a : \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$$

dada por $\tau_a(f) = f(\cdot + a)$.

No caso em que $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n)$, podemos definir $\tau_a(f)$ pela expressão $\tau_a(f) = (\Pi^*)^{-1} \circ \tau_a \circ \Pi^* f$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n) & \xrightarrow{\tau_a} & \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n) \\
{\scriptstyle \Pi^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi^*} \\
\mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\tau_a} & \mathrm{Fun}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

Se $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{T}^n)$ então denotaremos $\tau_a(f)$ por $f(\cdot + a)$.

Uma função f de $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ pode ser derivada e sua derivada é uma função de $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$. Podemos então considerar a aplicação linear

$$\partial^\alpha : C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$$

dada por $f \mapsto \partial^\alpha f$, onde α é um multi-índice. Assim podemos definir $\partial^\alpha : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então definimos $\partial^\alpha f = (\Pi^*)^{-1} \circ \partial^\alpha \circ \Pi^* f$ e assim teremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty(\mathbb{T}^n) & \xrightarrow{\partial^\alpha} & C^\infty(\mathbb{T}^n) \\
{\scriptstyle \Pi^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi^*} \\
C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\partial^\alpha} & C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

Definição 2.22. A topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é dada pelas seminormas

$$p_\alpha(f) = \sup_{z \in \mathbb{T}^n} |\partial^\alpha f(z)|,$$

onde α é multi-índice. A topologia de $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^n)$ é dada da mesma forma, isto é, pelas seminormas

$$q_\alpha(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|,$$

onde α é multi-índice. Às vezes denotaremos o espaço localmente convexo $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ por $\mathscr{D}(\mathbb{T}^n)$.

Considere $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Como $\partial^\alpha f = (\Pi^*)^{-1} \circ \partial^\alpha \circ \Pi^* f$ e consequentemente $\Pi^*(\partial^\alpha f) = \partial^\alpha \circ \Pi^* f$ segue que

$$\sup_{z \in \mathbb{T}^n} |\partial^\alpha f(z)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha [\Pi^* f](x)|$$

para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Logo, $\Pi^* : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ é isomorfismo topológico. Desta forma, podemos identificar $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$.

Pela proposição 2.9, uma sequência ϕ_k em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ se para cada multi-índice α a sequência $\partial^\alpha \phi_k$ converge uniformemente para 0. Teremos que ϕ_k converge para $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ se $\phi_k - \phi$ converge para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Proposição 2.23. O espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é Hausdorff.

Demonstração. Segue da proposição 2.13, pois se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é uma função não nula então $p_0(f) = \sup_{z \in \mathbb{T}^n} |f(z)| > 0$. □

Na proposição a seguir usaremos o espaço vetorial $C^k_{\text{per}}(\mathbb{R}^n) = \text{Fun}_{\text{per}}(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n)$ das funções periódicas de classe C^k.

Proposição 2.24. Seja ϕ_k uma sequência de Cauchy em $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$. Existe $\phi \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_k \to \phi$ em $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ é espaço sequencialmente completo.

Demonstração. Como para cada multi-índice α temos que $\partial^\alpha \phi_k$ é uniformemente de Cauchy, temos que há $g_\alpha \in C_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial^\alpha \phi_k$ converge uniformemente para g_α.

Seja $g = g_0$. Mostremos que $g \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ e $g_\alpha = \partial^\alpha g$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tais que existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ satisfazendo $\partial^\beta = \partial_j \partial^\alpha$. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que

$$\partial^\alpha \phi_k(x + h_j e_j) = \partial^\alpha \phi_k(x) + \int_0^{h_j} \partial^\beta \phi_k(x + t_j e_j) dt_j,$$

onde $e_1, \ldots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Fazendo $k \to \infty$ e observando que $\partial^\alpha \phi_k$ e $\partial^\beta \phi_k$ convergem uniformemente temos que

$$g_\alpha(x + h_j e_j) = g_\alpha(x) + \int_0^{h_j} g_\beta(x + t_j e_j) dt_j,$$

ou seja, $\partial_j g_\alpha$ existe e vale g_β.

Note que g é contínua. Fixe N inteiro não negativo. Suponha que $g \in C^N_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ e que para todo multi-índice α satisfazendo $|\alpha| \leq N$ tenhamos $\partial^\alpha g = g_\alpha$. Se β é um multi-índice de comprimento $N+1$ então para algum multi-índice α de comprimento N e um inteiro j em $\{1, \ldots, n\}$ temos $\partial^\beta = \partial_j \partial^\alpha$. Assim, pelo cálculo feito acima, $\partial_j g_\alpha$ existe e é igual a g_β. Como $g_\alpha = \partial^\alpha g$ por hipótese segue que $g_\beta = \partial^\beta g$. Logo, para cada multi-índice β de comprimento $N+1$ temos que $\partial^\beta g$ existe e se iguala a função contínua g_β. Logo, $g \in C^{N+1}_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ e $g_\alpha = \partial^\alpha g$ para todo α tal que $|\alpha| \leq N+1$.

Assim, por indução, concluímos que $g \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ e $g_\alpha = \partial^\alpha g$ para todo multi-índice α. Logo, ϕ_k converge para g em $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$. □

Corolário 2.25. O espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é sequencialmente completo.

Demonstração. Basta notar que $\Pi^* : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ é isomorfismo topológico. Como $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ é sequencialmente completo segue o resultado. □

Proposição 2.26. O espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é espaço de Fréchet.

Demonstração. Basta notar que a topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é dada por uma família enumerável de seminormas e com essas seminormas temos que $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é Hausdorff e sequencialmente completo. □

Como $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é espaço de Fréchet, segue que é um espaço metrizável e admite uma métrica completa, ou seja, podemos trabalhar com continuidade do ponto de vista sequencial.

Proposição 2.27. Considere o multi-índice α. A aplicação $\partial^\alpha : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é contínua.

Demonstração. Seja f_k uma sequência de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ convergindo para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, ou seja, $\partial^\beta f_k \to 0$ uniformemente para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$. Temos que $\partial^\beta \partial^\alpha f_k \to 0$ uniformemente para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$. Logo, $\partial^\alpha f_k \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. □

Definição 2.28. Uma lista de números inteiros $J = (j_1, j_2, \ldots, j_p)$ satisfazendo

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$$

será chamada de p-lista ordenada. Usaremos a notação $|J| = p$ para denotar que J é p-lista ordenada.

Sabemos da geometria que uma p-forma diferencial ω sobre o toro n-dimensional é da forma

$$\omega = \sum_{|J|=p} a_J dx_J,$$

onde as funções a_J pertencem $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Denotaremos por $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ o espaço das p-formas diferenciais sobre $\mathbb{T}^n$.

A aplicação $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ induz o pullback

$$\Pi^* : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \wedge^p),$$

dado em coordenadas por

$$\Pi^* \left(\sum_{|J|=p} a_J dx_J \right) = \sum_{|J|=p} \Pi^*(a_J) dx_J.$$

Considere o espaço vetorial $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n, \wedge^p)$ formado pelas p-formas

$$\sum_{|J|=p} b_J dx_J$$

em $\mathbb{R}^n$, onde $b_J \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$. Claramente temos que

$$\Pi^* : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n, \wedge^p)$$

é isomorfismo linear.

Definição 2.29. Sobre $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ podemos considerar a topologia dada pelas seminormas

$$N_\alpha \left(\sum_{|J|=p} a_J dx_J \right) = \max_{|J|=p} \|\partial^\alpha a_J\|_\infty,$$

onde α é multi-índice. As vezes denotaremos esse espaço por $\mathscr{D}(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$.

Assim, temos que uma sequência

$$\omega_m = \sum_{|J|=p} a_{m,J} dx_J \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$$

converge para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ se para cada multi-índice α e para cada p-lista ordenada J temos que $\partial^\alpha a_{m,J}$ converge uniformemente para 0 quando m tende ao infinito. Teremos que ω_m converge para $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ se $\omega_m - \omega$ converge para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$.

Proposição 2.30. O espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ é Hausdorff.

Demonstração. Segue da proposição 2.13, pois se $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ é uma p-forma não nula então $N_0(\omega) > 0$. □

Proposição 2.31. Seja ω_m uma sequência de Cauchy em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$. Existe uma p-forma diferencial ω tal que $\omega_m \to \omega$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$, ou seja, o espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ é sequencialmente completo.

Demonstração. Note que a sequência $\omega_m = \sum_{|J|=p} a_{m,J} dx_J$ de p-formas diferenciais é de Cauchy se, e só se, para cada p-lista ordenada J temos que a sequência $a_{m,J}$ é de Cauchy em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Seja a_J o limite de $a_{m,J}$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, que existe porque $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é espaço de Fréchet. Temos então que $\omega_m \to \omega$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$, onde $\omega = \sum_{|J|=p} a_J dx_J$. □

Proposição 2.32. O espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ é espaço de Fréchet.

Demonstração. Basta notar que a topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ é dada por uma família enumerável de seminormas e com essas seminormas temos que $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ é Hausdorff e sequencialmente completo. □

Note que assim como ocorre em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, podemos definir

$$\partial^\alpha : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$$

pela expressão

$$\partial^\alpha \omega = \sum_{|J|=p} \partial^\alpha a_J dx_J.$$

Proposição 2.33. Considere o multi-índice α. A aplicação

$$\partial^\alpha : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$$

é contínua.

Demonstração. Argumento análogo ao feito em 2.27. □

Como sabemos da geometria de variedades, sobre as formas diferenciais temos a derivada exterior $d : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{p+1})$, dada pela fórmula

$$d\left(\sum_{|J|=p} a_J dx_J\right) = \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^{n} \partial_k a_J dx_k \wedge dx_J,$$

que, além de ser uma aplicação linear, é contínua. De fato, se $\omega_m \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ então seus coeficientes convergem para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ quando $m \to \infty$. De onde segue que os coeficientes de $d\omega_m$ tendem a 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Definição 2.34. Uma p-forma diferencial

$$\omega = \sum_{|J|=p} a_J dx_J$$

em $\mathbb{T}^n$ é constante se para cada p-lista ordenada J temos que $a_J \in \mathbb{C}$.

Observação 2.35. Note que nossa definição depende de coordenadas, se fizéssemos uma troca de cartas, poderíamos ter que nas novas cartas os coeficientes deixassem de ser constantes. Uma maneira sem coordenadas de ver as p-formas constantes descritas acima é reparar que elas são as p-formas harmônicas de $\mathbb{T}^n$ com sua métrica Riemanniana usual. Mais precisamente, podemos induzir a métrica Riemanniana usual de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{T}^n$ pela aplicação Π e consequentemente definir o operador de Beltrami-Laplace Δ, que independe de coordenadas, sobre as p-formas. Uma p-forma ω é harmônica se $\Delta\omega = 0$. Mostremos que as p-formas constantes são as p-formas harmônicas.

Se

$$\omega = \sum_{|J|=p} a_J dx_J$$

é uma p-forma então

$$\Delta\omega = \sum_{|J|=p} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 a_J\right) dx_J.$$

Note que $\Delta\omega = 0$ se, e só se, as funções $\Pi^*(a_J) \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ são harmônicas. Pelo princípio do máximo, uma função harmônica e periódica é constante. Claramente toda p-forma constante é harmônica.

Assim, uma p-forma é harmônica se, e só se, for constante.

2.3 Integração

No que segue denotaremos por χ_A a função característica de A.

Seja $B_{\mathbb{T}^n}$ a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{T}^n$. Sobre $\mathbb{T}^n$ podemos estabelecer a medida de Borel $\mu : B_{\mathbb{T}^n} \to [0,\infty)$ dada por

$$\mu(A) = |\Pi^{-1}(A) \cap [0,2\pi]^n|,$$

onde $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Se $A \in B_{\mathbb{T}^n}$ então $\chi_A \circ \Pi = \chi_{\Pi^{-1}(A)}$, pois $\Pi(x) \in A$ se, e só se, $x \in \Pi^{-1}(A)$.

Assim temos

$$\begin{aligned}\mu(A) = |\Pi^{-1}(A) \cap [0,2\pi]^n| &= \int_{[0,2\pi]^n} \chi_{\Pi^{-1}(A)}(x)dx \\ &= \int_{[0,2\pi]^n} \chi_A \circ \Pi(x)dx.\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)d\mu(x) = \int_{[0,2\pi]^n} f \circ \Pi(x)dx \tag{2.36}$$

para funções Borel mensuráveis $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ que são não negativas ou integráveis.

Como temos uma medida sobre $\mathbb{T}^n$ podemos considerar os espaços $L^p(\mathbb{T}^n)$. Denotaremos a norma de $L^p(\mathbb{T}^n)$ por $\|\cdot\|_p$.

Proposição 2.37. O espaço $C(\mathbb{T}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{T}^n)$ para todo $p \in [1,\infty)$.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e considere a função $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$.

Temos que $\Pi^* f = f \circ \Pi$ é mensurável e sua restrição a $[0,2\pi]^n$ pertence a $L^p([0,2\pi]^n)$. De fato, que $\Pi^* f$ é mensurável segue de Π ser contínua e como, pela identidade (2.36), temos

$$\int_{[0,2\pi]^n} |f \circ \Pi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty,$$

segue que a restrição de $f \circ \Pi$ a $[0,2\pi]^n$ pertence a $L^p([0,2\pi]^n)$.

Sabemos da teoria da medida que existe uma função $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$ com suporte em $(0,2\pi)^n$ tal que

$$||f \circ \Pi - \phi||_{L^p([0,2\pi]^n)} < \varepsilon.$$

Defina $\tilde{\phi}(x) = \phi(x - 2\pi k)$ dado que $x \in 2\pi k + [0,2\pi]^n$. Temos que $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é periódica, continua e $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$ para todo $x \in [0,2\pi]^n$.

Seja $g \in C(\mathbb{T}^n)$ a função satisfazendo $\Pi^* g = \tilde{\phi}$. Concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} |f(x) - g(x)|^p d\mu(x) &= \int_{[0,2\pi]^n} |f \circ \Pi(x) - g \circ \Pi(x)|^p dx \\ &= \int_{[0,2\pi]^n} |f \circ \Pi(x) - \phi(x)|^p dx < \varepsilon^p,\end{aligned}$$

ou seja, $||f - g||_p < \varepsilon$. □

Proposição 2.38. Se $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ é integrável, ou mensurável não negativa, então

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x+a)d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)d\mu(x).$$

Demonstração. Por (2.36) temos

$$\int_{\mathbb{T}^n} \tau_a(f)(x)d\mu(x) = \int_{[0,2\pi]^n} \tau_a(f)\circ\Pi(x)dx$$

e como

$$\tau_a(f)\circ\Pi = \Pi^*\tau_a(f) = \tau_a\Pi^*(f) = f\circ\Pi(\cdot+a)$$

segue que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \tau_a(f)(x)d\mu(x) = \int_{[0,2\pi]^n} f\circ\Pi(x+a)dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x+a)d\mu(x) = \int_{[0,2\pi]^n} f\circ\Pi(x+a)dx. \tag{2.39}$$

Suponhamos que $n = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f\circ\Pi(x+a)dx &= \int_a^{2\pi+a} f\circ\Pi(x)dx \\
&= \int_a^{2\pi} f\circ\Pi(x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f\circ\Pi(x)dx \\
&= \int_a^{2\pi} f\circ\Pi(x)dx + \int_0^{a} f\circ\Pi(x+2\pi)dx \\
&= \int_a^{2\pi} f\circ\Pi(x)dx + \int_0^{a} f\circ\Pi(x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} f\circ\Pi(x)dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} f\circ\Pi(x+a)dx = \int_0^{2\pi} f\circ\Pi(x)dx.$$

Para $n > 1$ temos que

$$\int_{[0,2\pi]^n} f\circ\Pi(x+a)dx = \int_{[0,2\pi]^n} f\circ\Pi(x)dx$$

aplicando o caso em que $n = 1$ e o teorema de Fubini, ou seja, usando 2.36 e 2.39 segue que

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x+a)d\mu(x) = \int_{[0,2\pi]^n} f\circ\Pi(x+a)dx = \int_{[0,2\pi]^n} f\circ\Pi(x)dx = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)d\mu(x).$$

□

As vezes denotaremos a função f de $\mathbb{T}^n$ em $\mathbb{C}$ e a função periódica $f\circ\Pi$ pela mesma letra f. Também escreveremos a integral

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)d\mu(x)$$

como sendo

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx.$$

2.4 Distribuições e correntes no toro

Definição 2.40. O espaço $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ das distribuições do toro n-dimensional é o dual do espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Sobre $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ consideraremos a topologia fraca estrela.

Proposição 2.41. A aplicação linear $J : C(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ dada por

$$\langle Jf, \phi \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

está bem definida, é injetora e contínua.

Demonstração. Considere $f \in C(\mathbb{T}^n)$ e mostremos que $Jf \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Se $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} |\langle Jf, \phi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)||\phi(x)|dx \\ &\leq (2\pi)^n \|f\|_\infty \|\phi\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim, pela proposição 2.14, temos que $Jf : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, ou seja, a aplicação J está bem definida.

Mostremos que J é injetora. Se $Jf = 0$ então temos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\phi(x)dx = 0$$

para todo $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Queremos mostrar que $f = 0$ e para essa finalidade consideraremos $\tilde{f} = \Pi^* f \in C_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ e mostraremos que $\tilde{f} = 0$.

Pela identidade (2.36) obtemos

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\phi(x)dx = \int_{[0,2\pi]^n} f(\Pi x)\phi(\Pi x)dx = \int_{[0,2\pi]^n} \tilde{f}(x)\Pi^*(\phi)(x)dx.$$

Assim, temos que

$$\int_{[0,2\pi]^n} \tilde{f}(x)\Pi^*(\phi)(x)dx = 0$$

para toda função $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, ou seja,

$$\int_{[0,2\pi]^n} \tilde{f}(x)\phi(x)dx = 0$$

para toda função $\phi \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$.

Em particular, para toda $\phi \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ real temos

$$\int_{[0,2\pi]^n} Re(\tilde{f}(x))\phi(x)dx + i\int_{[0,2\pi]^n} Im(\tilde{f}(x))\phi(x)dx = 0.$$

Podemos então supor que $\tilde{f}$ é uma função real.

Tome $\psi \in C_c^\infty((0,2\pi)^n)$ real. Há $\phi \in C_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ real tal que $\phi|_{[0,2\pi]^n} = \psi|_{[0,2\pi]^n}$ e, portanto,

$$\int_{[0,2\pi]^n} \tilde{f}(x)\psi(x)dx = 0.$$

Seja $x_0 \in (0,2\pi)^n$ e suponha $\tilde{f}(x_0) > 0$. Como $\tilde{f}$ é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0,\varepsilon) \subset (0,2\pi)^n$ e $\tilde{f}(x) > \tilde{f}(x_0)/2$ para todo $x \in B(x_0,\varepsilon)$. Considerando $\psi \in C_c^\infty(B(x_0,\varepsilon))$ real, não negativa e satisfazendo $\psi(x_0) > 0$ concluímos que

$$0 = \int_{[0,2\pi]^n} \tilde{f}(x)\psi(x)dx = \int_{B(x_0,\varepsilon)} \tilde{f}(x)\psi(x)dx \geq \frac{\tilde{f}(x_0)}{2} \int_{B(0,\varepsilon)} \psi(x)dx > 0,$$

o que é uma contradição.

Logo, $\tilde{f}(x_0)$ não pode ser positivo. Por argumento análogo se conclui que $\tilde{f}(x_0)$ não pode ser negativo. Logo, $\tilde{f}(x_0) = 0$.

Como $\tilde{f}$ se anula em $(0,2\pi)^n$ e é contínua segue que $\tilde{f} = 0$ em $[0,2\pi]^n$. Desta forma, por $\tilde{f}$ ser periódica, temos $\tilde{f} = 0$ e, consequentemente, $f = 0$, provando assim a injetividade de J.

Agora mostremos que J é contínua. Tome uma sequência $f_k \in C(\mathbb{T}^n)$ convergindo para 0 uniformemente. Se $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $\langle Jf_k, \phi\rangle \to 0$ pois

$$|\langle Jf_k, \phi\rangle| \leq (2\pi)^n \|f_k\|_\infty \|\phi\|_\infty \to 0.$$

Assim, $Jf_k \to 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ pela proposição 2.9 e, portanto, J é contínua. □

Observação 2.42. Com algumas pequenas modificações, o argumento acima funciona se trocarmos $C(\mathbb{T}^n)$ por $L^1(\mathbb{T}^n)$. Isto é, a aplicação $J : L^1(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ dada por

$$\langle Jf, \phi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\phi(x)dx$$

está bem definida, é injetora e é contínua. Basta observar que parte da demonstração acima usa que se $g \in C([0,2\pi]^n)$ e

$$\int_{[0,2\pi]^n} g(x)\psi(x)dx = 0 \quad \forall \psi \in C_c^\infty((0,2\pi)^n) \tag{2.43}$$

então $g = 0$. No caso em que $g \in L^1([0,2\pi]^n)$ e vale a afirmação 2.43, teremos que $g = 0$ em quase todo ponto como consequência do teorema da diferenciação de Lebesgue.

Podemos pensar em $C(\mathbb{T}^n)$ como subespaço de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Uma função $f \in C(\mathbb{T}^n)$ é então vista como a distribuição descrita pela identidade

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\phi(x)dx.$$

A injetividade da aplicação J no resultado acima impede que duas funções distintas de $C(\mathbb{T}^n)$ deem origem a mesma distribuição. Desta forma podemos ver que distribuições generalizam de certa forma funções contínuas.

A seguir definiremos o que é a derivada de uma distribuição. A motivação desse conceito vem da integração por partes.

Proposição 2.44. Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ então vale a identidade

$$\langle \partial^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \phi \rangle$$

para toda ϕ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. Basta provar que $\langle \partial_j f, \phi \rangle = -\langle f, \partial_j \phi \rangle$ e depois usar que $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Mostremos a identidade $\langle \partial_j f, \phi \rangle = -\langle f, \partial_j \phi \rangle$.

Considere primeiramente $g, \psi \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R})$. Por integração por partes temos

$$\int_{[0,2\pi]} g'(x)\psi(x)dx = [g(2\pi)\psi(2\pi) - g(0)\psi(0)] - \int_{[0,2\pi]} g(x)\psi'(x)dx.$$

Como $g\phi \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R})$, segue $g(2\pi)\psi(2\pi) - g(0)\psi(0) = 0$ e, portanto,

$$\int_{[0,2\pi]} g'(x)\psi(x)dx = -\int_{[0,2\pi]} g(x)\psi'(x)dx.$$

Se $g, \phi \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ então aplicando o resultado unidimensional acima com respeito à variável x_j obtemos

$$\int_{[0,2\pi]} \partial_j g(x)\psi(x)dx_j = -\int_{[0,2\pi]} g(x)\partial_j \psi(x)dx_j.$$

Integrando a identidade acima concluímos que

$$\int_{[0,2\pi]^n} \partial_j g(x)\psi(x)dx = -\int_{[0,2\pi]^n} g(x)\partial_j \psi(x)dx.$$

Agora considere $g = \Pi^* f$ e $\psi = \Pi^* \phi$. Como $\Pi^* \partial_j = \partial_j \Pi^*$ e fazendo uso da identidade (2.36) temos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \partial_j f(x)\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\partial_j \phi(x)dx,$$

ou seja, $\langle \partial_j f, \phi \rangle = -\langle f, \partial_j \phi \rangle$. □

Definição 2.45. Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ e α um multi-índice. A derivada $\partial^\alpha u$ da distribuição u é a distribuição $\partial^\alpha u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ dada pela fórmula

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$$

para todo $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Para definição acima fazer sentido é preciso mostrar que $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, isto é, que o funcional linear $\partial^\alpha u$ é contínuo. Como o funcional linear u é contínuo temos que, pela proposição 2.14, existem $C > 0$ e N inteiro positivo tais que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \max_{|\beta| \leq N} \|\partial^\beta \phi\|_\infty \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Assim

$$|\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle| = |\langle u, \partial^\alpha \phi \rangle| \le C \max_{|\beta| \le N} \|\partial^{\beta+\alpha}\phi\|_\infty \le C \max_{|\beta| \le N+|\alpha|} \|\partial^\beta \phi\|_\infty,$$

o que, novamente pela proposição 2.14, implica que $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Desta forma, podemos considerar a aplicação linear $\partial^\alpha : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ dada por $u \mapsto \partial^\alpha u$ e a proposição a seguir nos garantirá sua continuidade.

Proposição 2.46. A aplicação linear $\partial^\alpha : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ é contínua.

Demonstração. Seja $\{u_j\}_{j\in D}$ uma rede em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ tal que $u_j \to 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, ou seja, $u_j \to 0$ na topologia fraca estrela. Temos que $\partial^\alpha u_j \to 0$, pois $\langle \partial^\alpha u_j, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_j, \partial^\alpha \phi \rangle \to 0$ para toda ϕ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. □

Podemos também definir a multiplicação de uma distribuição u em $\mathbb{T}^n$ por uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ como sendo o funcional linear $\phi u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\langle \phi u, \psi \rangle = \langle u, \phi \psi \rangle \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

A continuidade de ϕu segue da seguinte observação. Se ψ_k é uma sequência de funções de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ convergindo para 0 então $\phi \psi_k \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Daí segue que $\langle \phi u, \psi_k \rangle = \langle u, \phi \psi_k \rangle \to 0$.

Definamos agora, análogo às distribuições, as p-correntes. Para que a definição a seguir faça sentido, definiremos $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) = \{0\}$ para cada p inteiro negativo. Assim, temos que $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ está bem definido para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.47. Considere $p \in \mathbb{Z}$. O espaço $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ das p-correntes do toro n-dimensional é o dual do espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p})$. Sobre $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ consideraremos a topologia fraca estrela.

A teoria de correntes sobre uma variedade qualquer pode ser encontrada em (DEMAILLY, 2003).

Observação 2.48. Se $p \in \mathbb{Z}$ e satisfaz $p > n$ ou $p < 0$ então sabemos que $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p}) = \{0\}$, ou seja, $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p) = \{0\}$.

Assim, a seguir suporemos que $0 \le p \le n$.

Definição 2.49. Considere a p-lista ordenada J e a $(n-p)$-lista ordenada I. Definimos $\tau_{J,I}$ como sendo o termo que aparece na identidade

$$dx_J \wedge dx_I = \tau_{J,I} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Note que $\tau_{J,I}$ pode valer 0, 1 ou -1.

Definição 2.50. Se J é uma p-lista ordenada então podemos considerar a $(n-p)$-lista J^* formada pelos números em $\{1,2,\ldots,n\}$ que não aparecem em J. Chamaremos J^* de lista complementar de J.

Considere o espaço $C(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ das p-formas

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J$$

onde cada u_J é função contínua. Sobre esse espaço podemos considerar a norma

$$\|u\|_\infty = \max_{|J|=p} \|u_J\|$$

e claramente temos que $(C(\mathbb{T}^n, \wedge^p), \|\cdot\|_\infty)$ é espaço de Banach.

Análogo à proposição 2.41, temos o resultado a seguir.

Proposição 2.51. A aplicação linear $T : C(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ dada por

$$\langle Tu, \omega \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} u \wedge \omega$$

está bem definida, é injetora e contínua.

Demonstração. Seja $u \in C(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$. Temos que

$$\langle Tu, \omega \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} u \wedge \omega$$

para todo $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p})$.

Mostremos que $\langle Tu, \cdot \rangle$ é uma p-corrente, isto é, que o funcional acima é contínuo. Como $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p})$ é espaço de Fréchet temos que verificar que se temos uma sequência de $(n-p)$-formas ω_k convergindo para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p})$ então $\langle u, \omega_k \rangle \to 0$.

Em coordenadas temos

$$\omega_k = \sum_{|I|=n-p} a_{I,k}(x) dx_J,$$

onde $a_{I,k} \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para cada $(n-p)$-lista ordenada I e daí temos

$$\begin{aligned} \langle Tu, \omega_k \rangle &= \sum_{|J|=p} \sum_{|I|=n-p} \int_{\mathbb{T}^n} u_J a_{I,k} dx_J \wedge dx_I \\ &= \sum_{|J|=p} \int_{\mathbb{T}^n} u_J a_{J^*,k} dx_J \wedge dx_{J^*} \\ &= \sum_{|J|=p} \tau_{J,J^*} \int_{\mathbb{T}^n} u_J(x) a_{J^*,k}(x) dx_1 \ldots dx_n \to 0, \end{aligned}$$

pois para cada p-lista ordenada J temos que u_J é uma função limitada e $a_{J^*,k}$ converge uniformemente para 0.

Desta forma, o funcional linear $\langle Tu, \cdot \rangle$ é uma p-corrente.

Mostremos que T é injetora. Tome

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J,$$

em $C(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ e suponha que $Tu = 0$.

Repare que para todo $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ temos

$$\langle u_J, \phi \rangle = \tau_{J,J^*} \int_{\mathbb{T}^n} u \wedge \phi dx_{J^*} = 0,$$

ou seja, cada u_J é uma distribuição nula e consequentemente, pela proposição 2.41, u_J é uma função nula. Assim, $u = 0$, finalizando a prova da injetividade de T.

Por fim, mostremos que T é contínua. Se

$$u_k = \sum_{|J|=p} u_{J,k} dx_J$$

é uma sequência de $C(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ que converge para 0 então para cada p-lista ordenada J temos que $u_{J,k}$ converge para 0 uniformemente. Se

$$\omega = \sum_{|I|=n-p} a_I dx_I$$

é uma $(n-p)$-forma diferencial então temos

$$\langle Tu_k, \omega \rangle = \sum_{|J|=p} \tau_{J,J^*} \int_{\mathbb{T}^n} u_{J,k} a_{J^*} dx_1 \ldots dx_n.$$

Como a_{J^*} é uma função limitada e $u_{J,k} \to 0$ uniformemente para cada p-lista ordenada J, temos que a integral acima vai para 0 quando $k \to \infty$ e, portanto, temos que $Tu_k \to 0$ na topologia fraca estrela. Logo, T é contínua. $\square$

Logo, $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ pode ser visto como uma extensão natural de $C(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ e se $u \in C(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ então denotaremos Tu apenas por u.

O que mostraremos a seguir é que toda p-corrente pode ser vista unicamente como uma expressão

$$\sum_{|J|=p} u_J dx_J,$$

onde cada u_J é uma distribuição.

Considere a p-lista ordenada J e uma distribuição u_J. Definiremos a p-corrente $u = u_J dx_J$. Dada a $(n-p)$-forma suave

$$\omega = \sum_{|I|=n-p} a_I dx_I$$

definimos

$$\langle u, \omega \rangle = \sum_{|I|=n-p} \tau_{J,I} u_J(a_I).$$

Para a p-lista ordenada J, a única $(n-p)$-lista ordenada I satisfazendo $\tau_{J,I} \neq 0$ é $I = J^*$, ou seja, podemos escrever $\langle u, \omega \rangle = \tau_{J,J^*} u_J(a_{J^*})$.

Primeiramente, note que u é funcional linear. De fato,

$$\begin{aligned}\langle u, \omega + \lambda \omega' \rangle &= \tau_{J,J^*} u_J(a_{J^*} + \lambda a'_{J^*}) \\ &= \tau_{J,J^*} u_J(a_{J^*}) + \lambda \tau_{J,J^*} u_J(a'_{J^*}) \\ &= \langle u, \omega \rangle + \lambda \langle u, \omega' \rangle,\end{aligned}$$

onde

$$\omega = \sum_{|I|=n-p} a_I dx_I \quad \text{e} \quad \omega' = \sum_{|I|=n-p} a'_I dx_I$$

são $(n-p)$-formas diferenciais e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Mostremos que o funcional linear $u : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to \mathbb{C}$ é contínuo. Seja

$$\omega_k = \sum_{|I|=n-p} a_{I,k} dx_I$$

uma sequência convergindo para 0. Para cada $(n-p)$-lista ordenada I temos que $a_{I,k} \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ quando $k \to \infty$, ou seja, $\langle u, \omega_k \rangle = \tau_{J,J^*} \langle u_J, a_{J^*,k} \rangle \to 0$. Portanto, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$.

Considere agora para cada p-lista ordenada J uma distribuição u_J. Seguindo o procedimento acima temos as p-correntes $u_J dx_J$. Podemos, portanto, considerar a p-corrente

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J.$$

O resultado a seguir nos garante que todas as p-correntes são dessa forma.

Proposição 2.52. Considere a aplicação linear $R : \Pi_{|J|=p} \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ dada por

$$R\left((u_J)_{|J|=p}\right) = \sum_{|J|=p} u_J dx_J.$$

A aplicação R é isomorfismo topológico.

Demonstração. Mostremos que R é injetora.

Se $u = (u_J)_{|J|=p} \in \Pi_{|J|=p} D'(\mathbb{T}^n)$ e $R(u) = 0$ então precisamos mostrar que cada distribuição u_J é nula.

Seja J uma p-lista ordenada. Temos que

$$\langle u_J, \phi \rangle = \tau_{J,J^*} \langle R(u), \phi dx_{J^*} \rangle = 0,$$

de onde se concluí que $u_J = 0$, finalizando o argumento.

Agora mostremos a sobrejetividade de R. Seja u uma p-corrente e defina para cada p-lista ordenada J o funcional linear $u_J : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to \mathbb{C}$ dado por $\langle u_J, \phi\rangle = \tau_{J,J^*}\langle u, \phi dx_{J^*}\rangle$.

Note que u_J é distribuição, pois se ϕ_k é uma sequência convergindo para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $\phi_k dx_{J^*} \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p})$ e, portanto, $\langle u_J, \phi_k\rangle \to 0$. Assim, concluímos que $(u_J)_{|J|=p}$ pertence a $\Pi_{|J|=p}\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Defina
$$v = R\left((u_J)_{|J|=p}\right) = \sum_{|J|=p} u_J dx_J.$$

Para concluirmos que R é sobrejetora falta mostrar que $v = u$. Para cada $(n-p)$-forma diferencial
$$\omega = \sum_{|I|=n-p} a_I dx_I$$
temos que
$$\begin{aligned} v(\omega) &= \sum_{|J|=p} \langle u_J dx_J, \omega\rangle \\ &= \sum_{|J|=p} \tau_{J,J^*}\langle u_J, a_{J^*}\rangle \\ &= \sum_{|J|=p} \langle u, a_{J^*} dx_{J^*}\rangle \\ &= \langle u, \sum_{|J|=p} a_{J^*} dx_{J^*}\rangle = u(\omega), \end{aligned}$$
pois
$$\omega = \sum_{|J|=p} a_{J^*} dx_{J^*},$$
já que $J \mapsto J^*$ é uma bijeção entre o conjunto das p-listas ordenadas e o conjunto das $(n-p)$-listas ordenadas.

Portanto, R é sobrejetora.

Assim, já temos que R é isomorfismo linear.

Mostremos que R é contínua. Seja $\{(u_{J,k})_{|J|=p}\}_{k\in D}$ uma rede convergindo para 0 na topologia produto e seja $u_k = R((u_{J,k})_{|J|=p})$. Precisamos mostrar que $u_k \to 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$. Note que $u_{J,k} \to 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ para cada p-lista ordenada J.

Para cada $(n-p)$-forma
$$\omega = \sum_{|I|=n-p} a_I dx_I$$
temos que
$$\langle u_k, \omega\rangle = \sum_{|J|=p} \tau_{J,J^*}\langle u_{J,k}, a_{J^*}\rangle \to 0,$$

pois $\langle u_{J,k}, a_{J^*}\rangle \to 0$.

Por fim, falta mostrar que R^{-1} é uma aplicação contínua. Se

$$u_k = \sum_{|J|=p} u_{J,k} dx_J,$$

com $k \in D$, é uma rede de p-correntes convergindo para 0 na topologia fraca estrela então $\langle u_k, \omega\rangle \to 0$ para toda $(n-p)$-forma diferencial ω. Fixe a p-lista ordenada J e a função $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Temos que $\langle u_{J,k}, \phi\rangle = \tau_{J,J^*}\langle u_k, \phi dx_{J^*}\rangle \to 0$, ou seja, $(u_{J,k})_{|J|=p} \to 0$ em $\Pi_{|J|=p}\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. □

O resultado anterior nos garante que p-correntes são sempre expressões da forma

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J,$$

onde cada u_J é distribuição. Essa representação é única como consequência da injetividade de R. Além disso, como consequência da continuidade de R e R^{-1}, temos que uma rede de p-correntes

$$u_k = \sum_{|J|=p} u_{J,k} dx_J$$

converge para 0 em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ se, e só se, $u_{J,k} \to 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ para toda p-lista ordenada J.

Definição 2.53. Sejam u uma p-corrente e α um multi-índice. A derivada $\partial^\alpha u$ é a p-corrente dada pela fórmula

$$\langle \partial^\alpha u, \omega\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \omega\rangle.$$

Precisamos mostrar que $\partial^\alpha u$ é de fato uma p-corrente. Claramente $\partial^\alpha u$ é funcional linear. Mostremos sua continuidade. Se $\omega_k \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p})$ então $\partial^\alpha \omega_k \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^{n-p})$ e, portanto, $\langle u, \partial^\alpha \omega_k\rangle \to 0$, de onde segue o resultado.

Note que da definição de derivada para distribuições temos que vale a identidade

$$\partial^\alpha u = \sum_{|J|=p} \partial^\alpha u_J dx_J.$$

Verifiquemos essa afirmação. Seja

$$\omega = \sum_{|I|=n-p} a_I dx_I$$

uma $(n-p)$-forma diferencial. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha u, \omega\rangle &= (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha \omega\rangle \\
&= (-1)^\alpha \sum_{|J|=p} \tau_{J,J^*}\langle u_J, \partial^\alpha a_{J^*}\rangle \\
&= \sum_{|J|=p} \tau_{J,J^*}\langle \partial^\alpha u_J, a_{J^*}\rangle = \left\langle \sum_{|J|=p} \partial^\alpha u_J dx_J, \omega \right\rangle,
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

Proposição 2.54. A aplicação linear

$$\partial^\alpha : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$$

é contínua.

Demonstração. Considere a rede de p-correntes

$$u_k = \sum_{|J|=p} u_{J,k} dx_J,$$

com $k \in D$, convergindo para 0 em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$.

Como foi observado anteriormente, temos que $u_{J,k} \to 0$ para cada p-lista ordenada J. Pela proposição 2.46 temos que $\partial^\alpha u_{J,k} \to 0$, de onde segue que

$$\partial^\alpha u_k = \sum_{|J|=p} \partial^\alpha u_{J,k} dx_J \to 0.$$

□

Se $L = (l_1, \ldots, l_p)$ é uma lista de p elementos de $\{1, \ldots, n\}$, não necessariamente em ordem ou dois a dois distintos, então para cada p-lista ordenada J podemos definir $\sigma(L,J)$ como sendo o número satisfazendo $dx_L = \sigma(L,J)dx_J$.

Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ então definiremos udx_L como sendo a p-corrente

$$\sum_{|J|=p} \sigma(L,J) u dx_J.$$

Note que isso nos permite definir o produto exterior $\omega \wedge u$, onde ω é uma q-forma diferencial e u é uma p-corrente. De fato, se

$$\omega = \sum_{|I|=q} a_I dx_I \text{ e } u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J$$

então definimos o produto $\omega \wedge u$ pela fórmula

$$\omega \wedge u = \sum_{|I|=q} \sum_{|J|=p} a_I u_J dx_I \wedge dx_J,$$

que está bem definido pois podemos sempre multiplicar uma distribuição por uma função suave. Note que $\omega \wedge u$ é uma $p+q$-corrente.

Análogo ao que ocorre na geometria com produto exterior de formas, temos que se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$, $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^q)$ e $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^r)$ então

$$\eta \wedge (\omega \wedge u) = (\eta \wedge \omega) \wedge u$$

e, portanto, podemos escrever simplesmente $\eta \wedge \omega \wedge u$.

Assim como é feito para formas podemos definir a derivada exterior

$$d : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^{p+1})$$

pela fórmula

$$du = \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^{n} \partial_k u_J dx_k \wedge dx_J.$$

Repare que essa aplicação é contínua como consequência da continuidade da derivada $\partial_k : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

CAPÍTULO

3

SÉRIES DE FOURIER

Desenvolveremos a seguir a teoria básica de séries de Fourier para distribuições periódicas e estenderemos a teoria para correntes. As referências usadas foram (FOLLAND, 1999), (FOLLAND, 1992), (STEIN; SHAKARCHI, 2003) e (ZANI, 1988).

3.1 Série de Fourier de funções suaves

Uma sequência de números complexos $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente se para cada k inteiro não negativo existe $C(k)>0$ tal que

$$|a_\alpha| \leq \frac{C(k)}{(1+|\alpha|)^k}$$

para todo $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, onde $|\alpha| = |\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$.

Lema 3.1.

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|\alpha|)^{n+1}} < \infty.$$

Demonstração. Considere a função $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/(1+|\alpha|)^{n+1}$ se x pertence a $(\alpha_1-1,\alpha_1]\times\cdots\times(\alpha_n-1,\alpha_n]$, onde $\alpha\in\mathbb{Z}^n$.

Note que

$$f(x) \leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}(|x|+1)^{n+1}} \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

pois se $x\in(\alpha_1-1,\alpha_1]\times\cdots\times(\alpha_n-1,\alpha_n]$ então $n|x| \geq |x_1|+\cdots+|x_n| \geq |\alpha|-n$, ou seja, $(n+1)(|x|+1) \geq n|x|+n+1 \geq |\alpha|+1$.

Por fim, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{(1+|\alpha|)^{n+1}} &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(|x|+1)^{n+1}} \\ &= \frac{\sigma(S^{n-1})}{(n+1)^{n+1}}\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(r+1)^{n+1}}dr \\ &\leq \frac{\sigma(S^{n-1})}{(n+1)^{n+1}}\int_0^\infty \frac{1}{(r+1)^2}dr<\infty,\end{aligned}$$

onde $\sigma : B_{\mathbb{S}^{n-1}} \to [0,\infty)$ é a medida de Lebesgue na esfera. □

Proposição 3.2. Se $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente e

$$S_k(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\|\alpha|\leq k}} a_\alpha e^{ix\alpha}$$

então S_k converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. Mostremos que S_k é sequência de Cauchy em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Fixe o multi-índice β e suponha que temos $k,m\in\mathbb{N}$ tais que $k>m$.

$$|\partial^\beta S_k(x)-\partial^\beta S_m(x)| \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\ m<|\alpha|\leq k}} |\alpha^\beta||a_\alpha| \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\ m<|\alpha|\leq k}} (1+|\alpha|)^{|\beta|}|a_\alpha|.$$

Como a_α é rapidamente decrescente existe $C>0$ tal que

$$(1+|\alpha|)^{|\beta|}|a_\alpha| \leq (1+|\alpha|)^{|\beta|}\frac{C}{(1+|\alpha|)^{n+|\beta|+1}} = \frac{C}{(1+|\alpha|)^{n+1}} \quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n.$$

Portanto,

$$|\partial^\beta S_k(x)-\partial^\beta S_m(x)| \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\ m<|\alpha|\leq k}} \frac{C}{(1+|\alpha|)^{n+1}}$$

para todo $x\in\mathbb{T}^n$, ou seja,

$$\|\partial^\beta S_k-\partial^\beta S_m\|_\infty \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\ m<|\alpha|\leq k}} \frac{C}{(1+|\alpha|)^{n+1}}.$$

Pelo lema 3.1 temos que dado $\varepsilon>0$ existe N inteiro positivo tal que

$$\|\partial^\beta S_k-\partial^\beta S_m\|_\infty < \varepsilon$$

para $k,m\geq N$.

Logo, a sequência S_k é de Cauchy em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, de onde segue que S_k converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, pois esse espaço é sequencialmente completo. □

Proposição 3.3. Se $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente então sabemos do resultado anterior que podemos definir

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{ix\alpha}$$

em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Vale a identidade

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ix\alpha}dx.$$

Demonstração. Como a sequência S_k converge para f em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ temos que converge uniformemente.

Assim temos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ix\alpha}dx = \lim_{k\to\infty}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}^n\\|\beta|\leq k}} a_\beta\int_{\mathbb{T}^n} e^{ix(\beta-\alpha)}dx$$

e como a integral de $e^{ix(\beta-\alpha)}$ é não nula somente quando $\beta=\alpha$, segue que

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ix\alpha}dx = a_\alpha\int_{\mathbb{T}^n} dx = a_\alpha(2\pi)^n.$$

Portanto,

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ix\alpha}dx.$$

□

Definição 3.4. Os coeficientes de Fourier de $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ são

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ix\alpha}dx$$

com $\alpha\in\mathbb{Z}^n$.

Escreveremos frequentemente $\mathscr{F}(f)(\alpha)$ no lugar de $\widehat{f}(\alpha)$.

Proposição 3.5. Se $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então temos que $\{\widehat{f}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é uma sequência de decrescimento rápido.

Demonstração. Fixe k inteiro não negativo. Seja β um multi-índice de tamanho $|\beta|=k$.

Repare que

$$\begin{aligned}
(-i)^{|\beta|}\alpha^\beta\widehat{f}(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} f(x)\alpha^\beta(-i)^{|\beta|}e^{-ix\alpha}dx\\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} f(x)\partial^\beta(e^{-ix\alpha})dx\\
&= \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} \partial^\beta(f(x))e^{-ix\alpha}dx = (-1)^{|\beta|}\widehat{\partial^\beta f}(\alpha),
\end{aligned}$$

onde na passagem da segunda para terceira linha foi usado integração por partes.

Assim temos

$$i^{|\beta|}\alpha^\beta \widehat{f}(\alpha) = \widehat{\partial^\beta f}(\alpha).$$

Com isso em mãos concluímos que

$$\begin{aligned}
|\alpha|^k|\widehat{f}(\alpha)| &= |\widehat{f}(\alpha)|(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|)^k \\
&= |\widehat{f}(\alpha)| \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}|\alpha^\beta| \\
&= \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}|\alpha^\beta \widehat{f}(\alpha)| \\
&= \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}|\widehat{\partial^\beta f}(\alpha)| \\
&\leq \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}\|\partial^\beta f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Note que se $\alpha \neq 0$, vale a desigualdade $1+|\alpha| \leq 2|\alpha|$ e consequentemente

$$(1+|\alpha|)^k|\widehat{f}(\alpha)| \leq 2^k|\alpha|^k|\widehat{f}(\alpha)| \leq 2^k \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}\|\partial^\beta f\|_\infty.$$

Definindo

$$C(k) = \max\left\{|\widehat{f}(0)|, 2^k \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}\|\partial^\beta f\|_\infty\right\}$$

obtemos

$$|\widehat{f}(\alpha)| \leq \frac{C(k)}{(1+|\alpha|)^k}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, ou seja, $\{\widehat{f}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é uma sequência de decrescimento rápido. □

Seja $s(\mathbb{Z}^n)$ o espaço das sequências rapidamente decrescentes. Note que esse espaço é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Podemos definir a transformada de Fourier $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^n)$ como sendo a transformação linear que associa a cada f a sequência $\mathscr{F}(f) : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\mathscr{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-i\alpha x}dx.$$

Observe que há duas formas de escrever sequências indexadas por $\mathbb{Z}^n$. Podemos pensar que são funções de $\mathbb{Z}^n$ em $\mathbb{C}$ ou podemos pensar que são listas $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$. Em outras palavras, podemos escrever $\mathscr{F}f$ ou $\{\mathscr{F}(f)(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ para denotarmos a mesma sequência.

A proposição 3.5 nos confirma que essa aplicação está bem definida. Além disso, é claro que $\mathscr{F}$ é linear.

Lema 3.6. A transformada de Fourier $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^n)$ é sobrejetora.

Demonstração. Tome $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$. Pela proposição 3.2 temos que

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{i\alpha x}$$

é uma função de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Pela proposição 3.3 segue que $\mathscr{F}(f) = \{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$. □

Mostremos agora que $\mathscr{F}$ é injetora e, portanto, isomorfismo linear. Para isso precisamos do fato de que polinômios trigonométricos são densos em $C(\mathbb{T}^n)$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ sabemos que $e^{ix\alpha} \in C(\mathbb{T}^n)$. Considere o conjunto dos polinômios trigonométricos complexos $\mathscr{A} = \mathrm{span}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\{e^{i\alpha x}\}$. Note que $\mathscr{A}$ é uma subálgebra de $C(\mathbb{T}^n)$ que separa pontos, contém as constantes e é fechado para conjugação. Logo, pelo teorema de Stone-Weierstrass, $\mathscr{A}$ é denso em $C(\mathbb{T}^n)$. Assim, toda função contínua e periódica pode ser aproximada uniformemente por uma sequência de polinômios trigonométricos.

Lema 3.7. A transformada de Fourier $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^n)$ é injetora.

Demonstração. Considere $h \in \ker(\mathscr{F})$. Note que $\widehat{h}(\alpha) = (2\pi)^{-n}(h, e^{i\alpha x})_{L^2(\mathbb{T}^n)}$. Assim, como $\widehat{h}(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ temos que h é ortogonal à álgebra dos polinômios trigonométricos. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos

$$||h-p||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} = ||h||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} + ||p||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \geq ||h||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

para todo polinômio trigonométrico p.

Seja $\varepsilon > 0$. Há um polinômio trigonométrico p tal que $||h-p||_\infty \leq \varepsilon$ e consequentemente

$$||h||_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq ||h-p||_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq (2\pi)^{n/2}||h-p||_\infty \leq (2\pi)^{n/2}\varepsilon,$$

de onde, fazendo $\varepsilon \to 0$, segue que $||h||_{L^2(\mathbb{T}^n)} = 0$. Como h é contínua concluímos que $h = 0$. □

Proposição 3.8. A transformada de Fourier $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^n)$ é isomorfismo linear.

Demonstração. Consequência imediata dos dois lemas anteriores. □

A inversa de $\mathscr{F}$ é a aplicação $\mathscr{F}^{-1} : s(\mathbb{Z}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada por

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{i\alpha x},$$

pois

$$\mathscr{F}\left\{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{i\alpha x}\right\}(\beta) = a_\beta$$

pela proposição 3.3.

Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $f = \mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F}(f)$, ou seja,

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) e^{i\alpha x},$$

onde a convergência da série acima ocorre em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. A série acima é a série de Fourier de f.

3.2 Série parcial de Fourier de função suave

Seja $\mathbb{T}^n$ o toro de dimensão $n = n_1 + n_2$ e coordenadas (x_1, x_2), onde $x_j \in \mathbb{T}^{n_j}$ para $j = 1, 2$. Observe que essa quebra de coordenadas faz sentido porque $\mathbb{T}^n$ é naturalmente identificado com $\mathbb{T}^{n_1} \times \mathbb{T}^{n_2}$.

Uma sequência $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}}$ de funções de $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ é rapidamente decrescente se para cada k inteiro positivo e cada $\beta \in \mathbb{N}^{n_1}$ existe $C(k,\beta) > 0$ tal que

$$\|(1+|\alpha|)^k \partial^\beta a_\alpha\|_\infty \leq C(k,\beta)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$. Em outras palavras, a_α é de decrescimento rápido se a sequência $(1+|\alpha|)^k a_\alpha$ é limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ para todo k inteiro positivo.

Denotaremos o conjunto das sequências $\mathbb{Z}^{n_2} \to C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ rapidamente decrescentes por $s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$. Esse é claramente espaço vetorial complexo.

Proposição 3.9. Considere a sequência $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}} \in s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$ e defina

$$S_k(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2} \\ |\alpha| \leq k}} a_\alpha(x_1) e^{i\alpha x_2}.$$

Temos que S_k converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. Fixe o multi-índice $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^{n_1} \times \mathbb{N}^{n_2}$ e suponha $k > m$

$$\begin{aligned}
|\partial^\beta S_k(x) - \partial^\beta S_m(x)| &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2} \\ m < |\alpha| \leq k}} |\alpha^{\beta_2} \partial_{x_1}^{\beta_1} a_\alpha(x_1) e^{i\alpha x_2}| \\
&\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2} \\ m < |\alpha| \leq k}} |\alpha|^{|\beta_2|} |\partial_{x_1}^{\beta_1} a_\alpha(x_1)| \\
&\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2} \\ m < |\alpha| \leq k}} (1+|\alpha|)^{|\beta_2|} |\partial_{x_1}^{\beta_1} a_\alpha(x_1)| \\
&\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2} \\ m < |\alpha| \leq k}} (1+|\alpha|)^{|\beta_2|} \|\partial_{x_1}^{\beta_1} a_\alpha\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como a_α é rapidamente decrescente temos que existe $C = C(n_2 + |\beta_2| + 1, \beta_1) > 0$ tal que

$$\|(1+|\alpha|)^{n_2+|\beta_2|+1}\partial_{x_1}^{\beta_1} a_\alpha\|_\infty \leq C$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$. Assim temos

$$(1+|\alpha|)^{|\beta_2|}\|\partial_{x_1}^{\beta_1} a_\alpha\|_\infty \leq (1+|\alpha|)^{|\beta_2|}\frac{C}{(1+|\alpha|)^{n_2+|\beta_2|+1}} = \frac{C}{(1+|\alpha|)^{n_2+1}}.$$

Portanto,

$$|\partial^\beta S_k(x) - \partial^\beta S_m(x)| \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}\\ m<|\alpha|\leq k}} \frac{C}{(1+|\alpha|)^{n_2+1}}$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$, ou seja,

$$\|\partial^\beta S_k - \partial^\beta S_m\|_\infty \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}\\ m<|\alpha|\leq k}} \frac{C}{(1+|\alpha|)^{n_2+1}}.$$

Pelo lema 3.1 temos que dado $\varepsilon > 0$ existe N inteiro positivo tal que

$$\|\partial^\beta S_k - \partial^\beta S_m\|_\infty < \varepsilon$$

para $k, m \geq N$.

Logo, a sequência S_k é de Cauchy em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ de onde segue que S_k converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, pois esse espaço é sequencialmente completo. □

Definição 3.10. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. A transformada parcial de Fourier de f com respeito à variável x_2 é a sequência de funções de $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ dada por

$$\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\int_{\mathbb{T}^{n_2}} f(x_1,x_2)e^{-i\alpha x_2}dx_2$$

com $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$.

Proposição 3.11. Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $\{\mathscr{F}_{x_2} f(x_1,\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}}$ é uma sequência em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ rapidamente decrescente.

Demonstração. Fixe k inteiro não negativo e $\beta_1 \in \mathbb{N}^{n_1}$.

Por um cálculo análogo ao feito no início da demonstração da proposição 3.5 temos que dado o multi-índice $\beta_2 \in \mathbb{N}^{n_2}$ vale a identidade

$$i^{|\beta_2|}\alpha^{\beta_2}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha) = \mathscr{F}_{x_2}(\partial_{x_2}^{\beta_2} f)(x_1,\alpha).$$

Assim temos

$$i^{|\beta_2|}\alpha^{\beta_2}\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha) = \mathscr{F}_{x_2}(\partial_{x_1}^{\beta_1}\partial_{x_2}^{\beta_2} f)(x_1,\alpha).$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}
|\alpha|^k|\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha)| &= |\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha)|(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{n_2}|)^k \\
&= |\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha)|\sum_{|\beta_2|=k}\frac{k!}{\beta_2!}|\alpha^{\beta_2}| \\
&= \sum_{|\beta_2|=k}\frac{k!}{\beta_2!}|\alpha^{\beta_2}\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha)| \\
&= \sum_{|\beta_2|=k}\frac{k!}{\beta_2!}|\mathscr{F}_{x_2}(\partial_{x_1}^{\beta_1}\partial_{x_2}^{\beta_2}f)(x_1,\alpha)| \\
&\leq \sum_{|\beta_2|=k}\frac{k!}{\beta_2!}\|\partial_{x_1}^{\beta_1}\partial_{x_2}^{\beta_2}f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Note que se $\alpha \neq 0$, vale a desigualdade $1+|\alpha| \leq 2|\alpha|$ e consequentemente

$$\begin{aligned}
(1+|\alpha|)^k|\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha)| &\leq 2^k|\alpha|^k|\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha)| \\
&\leq 2^k\sum_{|\beta_2|=k}\frac{k!}{\beta_2!}\|\partial_{x_1}^{\beta_1}\partial_{x_2}^{\beta_2}f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Definindo

$$C(k,\beta_1) = \max\left\{\|\partial_{x_1}^{\beta_1}f\|_\infty, 2^k\sum_{|\beta_2|=k}\frac{k!}{\beta_2!}\|\partial_{x_1}^{\beta_1}\partial_{x_2}^{\beta_2}f\|_\infty\right\}$$

obtemos

$$\sup_{x_1\in\mathbb{T}^{n_1}}|\partial_{x_1}^{\beta_1}\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha)| \leq \frac{C(k,\beta_1)}{(1+|\alpha|)^k}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$, ou seja, $\mathscr{F}_{x_2}(f)$ é uma sequência de decrescimento rápido. □

Assim, temos que a aplicação linear $\mathscr{F}_{x_2} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$ está bem definida.

Lema 3.12. A aplicação $\mathscr{F}_{x_2}$ é sobrejetora.

Demonstração. Considere $\{a_\alpha\} \in s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$. Pela proposição 3.9 temos que existe f em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada por

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} a_\alpha(x_1)e^{i\alpha x_2},$$

onde a convergência ocorre em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e consequentemente em $C(\mathbb{T}^n)$. Desta forma,

$$\int_{\mathbb{T}^{n_2}} f(x_1,x_2)e^{-i\alpha x_2}dx_2 = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{n_2}} a_\beta(x_1)\int_{\mathbb{T}^{n_2}} e^{i(\beta-\alpha)x_2}dx_2 = (2\pi)^{n_2}a_\alpha(x_1),$$

ou seja,

$$\mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1,\alpha) = a_\alpha(x_1),$$

finalizando o argumento. □

Lema 3.13. A aplicação $\mathscr{F}_{x_2}$ é injetora.

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\mathscr{F}_{x_2}(f) = 0$.

Fixe $\overline{x_1} \in \mathbb{T}^{n_1}$. Temos a função $h(x_2) = f(\overline{x_1}, x_2)$ em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_2})$ e, portanto, podemos expandi-la em série de Fourier:

$$h(x_2) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{h}(\alpha) e^{i\alpha x_2},$$

onde a convergência ocorre em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_2})$. Note que $\widehat{h}(\alpha) = \mathscr{F}_{x_2}(f)(\overline{x_1}, \alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$, ou seja, $h = 0$. Portanto, como $\overline{x_1}$ é arbitrário, segue que $f = 0$. $\square$

Dos dois lemas anteriores obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.14. A aplicação linear $\mathscr{F}_{x_2} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$ é isomorfismo linear. Sua inversa $\mathscr{F}_{x_2}^{-1} : s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1})) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é dada por

$$\mathscr{F}_{x_2}^{-1}(\{a_\alpha(x_1)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}})(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}} a_\alpha(x_1) e^{i\alpha x_2},$$

onde a convergência ocorre em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Em particular, se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então temos

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}} \mathscr{F}_{x_2}(f)(x_1, \alpha) e^{i\alpha x_2}$$

convergindo em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. A série descrita acima é a série parcial de Fourier de f com respeito à variável x_2.

Analogamente, podemos definir $\mathscr{F}_{x_1} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^{n_1}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_2}))$ pela fórmula

$$\mathscr{F}_{x_1}(f)(\alpha, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n_1}} \int_{\mathbb{T}^{n_1}} f(x_1, x_2) e^{-i\alpha x_1} dx_1$$

e essa aplicação será isomorfismo linear.

Discutamos a relação entre as transformadas $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_{x_1}$ e $\mathscr{F}_{x_2}$.

Proposição 3.15. Considere $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}$. São válidas as seguintes identidades:

$$\mathscr{F}_{x_1}[\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1, \alpha_2)](\alpha_1) = \mathscr{F}_{x_2}[\mathscr{F}_{x_1}(\phi)(\alpha_1, x_2)](\alpha_2) = \mathscr{F}(\phi)(\alpha).$$

Demonstração. Note que

$$\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1, \alpha_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n_2}} \int_{\mathbb{T}^{n_2}} \phi(x_1, x_2) e^{-\alpha_2 x_2} dx_2,$$

de onde segue a identidade

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{x_1}[\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1,\alpha_2)](\alpha_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{n_1}}\int_{\mathbb{T}^{n_1}}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\int_{\mathbb{T}^{n_2}}\phi(x)e^{-\alpha_2 x_2}dx_2\right)e^{-i\alpha_1 x_1}dx_1\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{T}^{n}}\phi(x)e^{-i\alpha x}dx\\ &= \mathscr{F}(f)(\alpha).\end{aligned}$$

Assim temos

$$\mathscr{F}_{x_1}[\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1,\alpha_2)](\alpha_1) = \mathscr{F}(\phi)(\alpha)$$

e de maneira análoga temos

$$\mathscr{F}_{x_2}[\mathscr{F}_{x_1}(\phi)(\alpha_1,x_2)](\alpha_2) = \mathscr{F}(\phi)(\alpha).$$

□

Corolário 3.16. Se $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então valem as identidades:

1. Para cada $\alpha_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}$ temos

$$\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1,\alpha_2) = \sum_{\alpha_1\in\mathbb{Z}^{n_1}}\mathscr{F}(\phi)(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_1 x_1}$$

   com convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$.

2. Para cada $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}$ temos

$$\mathscr{F}_{x_1}(\phi)(\alpha_1,x_2) = \sum_{\alpha_2\in\mathbb{Z}^{n_2}}\mathscr{F}(\phi)(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 x_2}$$

   com convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_2})$.

Demonstração. Mostraremos somente o primeiro item, pois o segundo é análogo.

Como $\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1,\alpha_2) \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$, temos

$$\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1,\alpha_2) = \sum_{\alpha_1\in\mathbb{Z}^{n_1}}\mathscr{F}_{x_1}\left(\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1,\alpha_2)\right)(\alpha_1)e^{i\alpha_1 x_1}$$

com convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ e da identidade

$$\mathscr{F}_{x_1}\left(\mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1,\alpha_2)\right)(\alpha_1) = \mathscr{F}(\phi)(\alpha_1,\alpha_2)$$

segue o resultado. □

3.3 Série de Fourier de distribuição

Uma sequência de números complexos $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é de crescimento lento se existe k inteiro não negativo e $C>0$ tal que $|a_\alpha|\leq C(1+|\alpha|)^k$ para cada $\alpha\in\mathbb{Z}^n$. O conjunto $s'(\mathbb{Z}^n)$ das sequências de números complexos de crescimento lento forma um espaço vetorial complexo.

Observação 3.17. Se $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é sequência de crescimento lento e $\{b_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é sequência de decrescimento rápido então a série

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha b_\alpha$$

converge absolutamente. De fato, há $C>0$ e N inteiro positivo tais que

$$|a_\alpha|\leq C(1+|\alpha|)^N \quad \text{e} \quad (1+|\alpha|)^{N+n+1}|b_\alpha|\leq C \quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n$$

e, portanto,

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|a_\alpha b_\alpha|\leq C^2\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{(1+|\alpha|)^{n+1}}<\infty$$

pelo lema 3.1.

Proposição 3.18. Seja $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência de crescimento lento. Temos que a sequência

$$S_k(x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\ |\alpha|\leq k}} a_\alpha e^{i\alpha x}$$

é convergente em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. O limite dessa sequência será denotado por

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{i\alpha x}.$$

Demonstração. Sejam N um inteiro positivo e $C>0$ tais que $|a_\alpha|\leq C(1+|\alpha|)^N$ para todo $\alpha\in\mathbb{Z}^n$.

Considere

$$c_\alpha=\frac{a_\alpha}{(1+|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2)^{N+n+1}}$$

e defina

$$v_k=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\ 0<|\alpha|\leq k}} c_\alpha e^{ix\alpha}.$$

Note que

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}|c_\alpha|\leq C\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{(1+|\alpha|)^{n+1}}<\infty,$$

onde a primeira desigualdade segue da estimativa de a_α e da desigualdade

$$(1+|\alpha|)\leq(1+|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2).$$

O último termo é finito por causa do lema 3.1.

Logo, a sequência v_k é uniformemente de Cauchy e consequentemente converge para uma função v em $C(\mathbb{T}^n)$, isto é,

$$v(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} c_\alpha e^{i\alpha x}$$

em $C(\mathbb{T}^n)$.

Como $v_k \to v$ em $C(\mathbb{T}^n)$, temos que $v_k \to v$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Seja $L = (1-\Delta)^{n+N+1}$. Pela proposição 2.46 temos que $Lv_k \to Lv$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Repare que $(1-\Delta)e^{ix\alpha} = (1+|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2)e^{ix\alpha}$, ou seja, $L(c_\alpha e^{ix\alpha}) = a_\alpha e^{ix\alpha}$ e consequentemente $Lv_k = S_k - a_0$.

Tomando $u = Lv + a_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, temos que $S_k \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. □

Definição 3.19. Considere $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Os coeficientes de Fourier de u são dados por

$$\widehat{u}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle u, e^{-ix\alpha}\rangle.$$

Proposição 3.20. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ então a sequência $\{\widehat{u}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é de crescimento lento.

Demonstração. Como u é um funcional linear contínuo temos, pela proposição 2.14, que existem $C > 0$ e N inteiro positivo tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \max_{|\beta|\leq N} \|\partial^\beta \phi\|_\infty.$$

Fixe um multi-índice β satisfazendo $|\beta| \leq N$. Por um cálculo direto obtemos $\partial^\beta e^{-ix\alpha} = (-i\alpha)^\beta e^{-ix\alpha}$ de onde segue que $|\partial^\beta e^{-ix\alpha}| = |\alpha^\beta| \leq |\alpha|^N \leq (1+|\alpha|)^N$.

Assim, temos

$$(2\pi)^n |\widehat{u}(\alpha)| = |\langle u, e^{-ix\alpha}\rangle| \leq C \max_{|\beta|\leq N} \|\partial^\beta e^{-ix\alpha}\|_\infty \leq C(1+|\alpha|)^N.$$

Logo, dado $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, temos que $\{\widehat{u}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \in s'(\mathbb{Z}^n)$. □

Podemos definir a transformada de Fourier como sendo a aplicação

$$\mathscr{F} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{T}^n)$$

dada por $\mathscr{F}(u)(\alpha) = \widehat{u}(\alpha)$. Claramente a aplicação $\mathscr{F}$ é linear. Além disso, se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então

$$\langle u, e^{-ix\alpha}\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-ix\alpha} dx,$$

ou seja, a transformada de Fourier para distribuições é extensão da transformada de Fourier para funções suaves discutida anteriormente.

Lema 3.21. A transformada de Fourier $\mathscr{F}: \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^n)$ é sobrejetora.

Demonstração. O resultado 3.18 nos fornece a sobrejetividade de $\mathscr{F}$. De fato, tome a sequência a_α em $s'(\mathbb{Z}^n)$ e defina

$$u_k = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^n \\ |\beta| \leq k}} a_\beta e^{ix\beta}.$$

Pela proposição 3.18, temos que u_k converge para uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ com respeito a topologia fraca estrela. Logo,

$$\widehat{u}(\alpha) = (2\pi)^{-n}\langle u, e^{-ix\alpha}\rangle = \lim_{k\to\infty}(2\pi)^{-n}\langle u_k, e^{-ix\alpha}\rangle.$$

Tomando $k \geq |\alpha|$ concluí-se que

$$\begin{aligned}
\langle u_k, e^{-ix\alpha}\rangle &= \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^n \\ |\beta| \leq k}} a_\beta \langle e^{ix\beta}, e^{-ix\alpha}\rangle \\
&= \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^n \\ |\beta| \leq k}} a_\beta \int_{\mathbb{T}^n} e^{ix(\beta-\alpha)} dx \\
&= (2\pi)^n a_\alpha,
\end{aligned}$$

de onde segue que $\mathscr{F}(u)(\alpha) = a_\alpha$ e consequentemente $\mathscr{F}$ é sobrejetora. □

Lema 3.22. A transformada de Fourier $\mathscr{F}: \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^n)$ é injetora.

Demonstração. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ e $\mathscr{F}u = 0$ então $\langle u, e^{ix\alpha}\rangle = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Além disso,

$$\phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{T}^n} \widehat{\phi}(\alpha) e^{ix\alpha}$$

para toda $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, onde a convergência ocorre em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Portanto, para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ vale a identidade

$$\langle u, \phi\rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\phi}(\alpha)\langle u, e^{ix\alpha}\rangle = 0,$$

ou seja, $u = 0$. □

Proposição 3.23. A aplicação $\mathscr{F}: \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^n)$ é isomorfismo linear.

Demonstração. Consequência dos dois lemas anteriores. □

A inversa de $\mathscr{F}$ é a função $\mathscr{F}^{-1}: s'(\mathbb{Z}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ dada por

$$\mathscr{F}^{-1}(\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{ix\alpha},$$

onde a série acima converge em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Repare que $C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ e $s(\mathbb{Z}^n) \subset s'(\mathbb{Z}^n)$. Assim se pensarmos em $\mathscr{F}$ como isomorfismo de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ em $s'(\mathbb{Z}^n)$ então a restrição $\mathscr{F}: C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^n)$ é isomorfismo pela proposição 3.8.

3.4 Série parcial de Fourier de distribuição

Considere os inteiros positivos n_1, n_2 tais que $n = n_1 + n_2$.

Antes de falarmos sobre séries parciais de Fourier para distribuições precisamos definir o produto tensorial de distribuições.

Definição 3.24. Se $u_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ e $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_2})$ então definimos $u_1 \otimes u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ como sendo a distribuição

$$u_1 \otimes u_2(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}_1(\alpha_1)\widehat{u}_2(\alpha_2)e^{i\alpha x},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$.

Para vermos que a distribuição $u_1 \otimes u_2$ está bem definida é necessário mostrar que

$$\{\widehat{u}_1(\alpha_1)\widehat{u}_2(\alpha_2)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \in s'(\mathbb{Z}^n).$$

De fato, há $C_j > 0$ e N_j inteiro não negativo tais que $|\widehat{u}_j(\alpha_j)| \leq C_j(1+|\alpha_j|)^{N_j}$ para todo $\alpha_j \in \mathbb{Z}^{n_j}$, com $j = 1, 2$. Tomando $C = C_1C_2$ e $N = N_1 + N_2$, temos que $|\widehat{u}_1(\alpha_1)\widehat{u}_2(\alpha_2)| \leq C(1+|\alpha|)^N$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Assim a série

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}_1(\alpha_1)\widehat{u}_2(\alpha_2)e^{i\alpha x}$$

converge em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ e seu limite é o que estamos definindo como $u_1 \otimes u_2$. Repare também que vale a relação $\mathscr{F}(u_1 \otimes u_2)(\alpha_1, \alpha_2) = \widehat{u}_1(\alpha_1)\widehat{u}_2(\alpha_2)$.

Observação 3.25. No que segue usaremos que se $u_2(x_2) = e^{i\alpha x_2}$, onde $\alpha \in \mathbb{N}^{n_2}$, então temos

$$u_1 \otimes u_2(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{n_1}} \widehat{u_1}(\beta)e^{i(\beta,\alpha)x}$$

com convergência em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. De fato, pela definição de $u_1 \otimes u_2$ temos que para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ vale a identidade

$$\langle u_1 \otimes u_2(x), \phi(x)\rangle = \sum_{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}_1(\beta)\widehat{u}_2(\gamma)\langle e^{i(\beta,\gamma)x}, \phi(x)\rangle.$$

Como $\widehat{u}_1(\beta)\widehat{u}_2(\gamma)$, com $(\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^n$, é uma sequência de números complexos de crescimento lento e $\langle e^{i(\beta,\gamma)x}, \phi(x)\rangle = (2\pi)^n\widehat{\phi}(-(\beta,\gamma))$, com $(\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^n$, é uma sequência de números complexos de decrescimento rápido, segue que a série acima é absolutamente convergente pela observação 3.17 e consequentemente temos

$$\sum_{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}_1(\beta)\widehat{u}_2(\gamma)\langle e^{i(\beta,\gamma)x}, \phi(x)\rangle = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{n_1}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{u}_1(\beta)\widehat{u}_2(\gamma)\langle e^{i(\beta,\gamma)x}, \phi(x)\rangle$$

e, como $\widehat{u_2}$ vale zero para todo multi-índice diferente de α e $\widehat{u_2}(\alpha) = 1$, temos

$$\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{n_1}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{u}_1(\beta)\widehat{u}_2(\gamma)\langle e^{i(\gamma,\beta)x}, \phi(x)\rangle = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{u}_1(\beta)\langle e^{i(\beta,\alpha)x}, \phi(x)\rangle,$$

que é o resultado desejado.

Por argumento análogo ao feito com produto tensorial de distribuições, temos que se $u_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ e $u_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_2})$ então $u_1 \otimes u_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Note também que nesse caso vale a identidade $u_1 \otimes u_2(x) = u_1(x_1)u_2(x_2)$ para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^n$, ou seja, $u_1 \otimes u_2$ é simplesmente o produto das funções u_1 e u_2. De fato, como para cada $x = (x_1, x_2)$ as séries

$$\sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}} \widehat{u_1}(\alpha_1) e^{i\alpha_1 x_1} \quad \text{e} \quad \sum_{\alpha_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{u_2}(\alpha_2) e^{i\alpha_2 x_2}$$

convergem absolutamente, segue que

$$\left(\sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}} \widehat{u_1}(\alpha) e^{i\alpha_1 x_1} \right) \left(\sum_{\alpha_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{u_2}(\alpha) e^{i\alpha_2 x_2} \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u_1}(\alpha) \widehat{u_2}(\alpha) e^{i\alpha x},$$

ou seja, $u_1(x_1)u_2(x_2) = u_1 \otimes u_2(x_1, x_2)$.

Proposição 3.26. Vale a identidade

$$\langle u_1 \otimes u_2(x), \phi_1 \otimes \phi_2(x) \rangle = \langle u_1(x_1), \phi_1(x_1) \rangle \langle u_2(x_2), \phi_2(x_2) \rangle,$$

onde $u_j \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_j})$ e $\phi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_j})$, com $j = 1, 2$.

Demonstração. Note que

$$\langle u_1 \otimes u_2(x), \phi_1 \otimes \phi_2(x) \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u_1}(\alpha_1) \widehat{u_2}(\alpha_2) \langle e^{i\alpha x}, \phi_1 \otimes \phi_2(x) \rangle.$$

Pelo teorema de Fubini temos

$$\langle e^{i\alpha x}, \phi_1 \otimes \phi_2(x) \rangle = \langle \phi_1(x_1), e^{i\alpha_1 x_1} \rangle \langle \phi_2(x_2), e^{i\alpha_2 x_2} \rangle,$$

de onde segue que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u_1}(\alpha_1) \widehat{u_2}(\alpha_2) \langle e^{i\alpha x}, \phi_1 \otimes \phi_2(x) \rangle =$$
$$\left(\sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}} \widehat{u_1}(\alpha_1) \langle \phi_1(x_1), e^{i\alpha_1 x_1} \rangle \right) \left(\sum_{\alpha_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{u_2}(\alpha_2) \langle \phi_2(x_2), e^{i\alpha_1 x_2} \rangle \right) =$$
$$\langle u_1(x_1), \phi_1(x_1) \rangle \langle u_2(x_2), \phi_2(x_2) \rangle,$$

que é resultado desejado.

Observe que o cálculo acima é permitido, pois as séries

$$\sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}} \widehat{u_1}(\alpha_1) \langle \phi_1(x_1), e^{i\alpha_1 x_1} \rangle \quad \text{e} \quad \sum_{\alpha_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}} \widehat{u_2}(\alpha_2) \langle \phi_2(x_2), e^{i\alpha_2 x_2} \rangle$$

convergem absolutamente. De fato, como $\widehat{u_1}(\alpha_1)$, com $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}$, é sequência de crescimento lento e $\langle \phi_2(x_2), e^{i\alpha_1 x_2} \rangle = (2\pi)^{n_1} \widehat{\phi_1}(-\alpha_1)$, com $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}$, é sequência de decrescimento rápido, segue pela observação 3.17 que a primeira série é absolutamente convergente. Analogamente se mostra a convergência absoluta da segunda série. $\square$

Definição 3.27. Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Definimos a transformada parcial de Fourier de u com respeito à variável x_2 como sendo a sequência $\mathscr{F}_{x_2}(u)$ que associa a cada $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$ a distribuição $\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ dada por

$$\langle \mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha), \phi(x_1)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\langle u(x), \phi(x_1)e^{-ix_2\alpha}\rangle.$$

Mostremos que de fato $\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$. Claramente essa aplicação é funcional linear. Devemos apenas justificar sua continuidade.

Se $\phi_k \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ então $\phi_k(x_1)e^{-ix_2\alpha} \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e, portanto,

$$\langle \mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha), \phi_k(x_1)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\langle u(x), \phi_k(x_1)e^{-ix_2\alpha}\rangle \to 0,$$

nos garantindo a continuidade do funcional $\mathscr{F}_{x_2}(u)(x,\alpha)$.

Vejamos agora o que significa para uma sequência de distribuições $\mathbb{Z}^{n_2} \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ ser de crescimento lento. Considere $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Da continuidade de u sabemos, pela proposição 2.14, que existem $C > 0$ e N inteiro positivo tais que $|u(\psi)| \leq C \max_{|\beta|\leq N} \|\partial^\beta \psi\|_\infty$ para toda $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Assim, temos que se $(\phi,\alpha) \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1}) \times \mathbb{N}^{n_2}$ então

$$\begin{aligned}
|\langle \mathscr{F}_2(u)(x_1,\alpha), \phi(x_1)\rangle| &= \frac{1}{(2\pi)^{n_2}}|\langle u, \phi(x_1)e^{-ix_2\alpha}\rangle| \\
&\leq C \max_{|(\beta,\gamma)|\leq N} \|\partial_{x_1}^\beta \partial_{x_2}^\gamma(\phi(x_1)e^{-x_2\alpha})\|_\infty \\
&\leq C \max_{|(\beta,\gamma)|\leq N} \|\partial_{x_1}^\beta \phi\|_\infty |(i\alpha)^\gamma| \\
&\leq C \max_{||\beta|\leq N} \|\partial_{x_1}^\beta \phi\|_\infty (1+|\alpha|)^N,
\end{aligned}$$

onde $(\beta,\gamma) \in \mathbb{N}^{n_1} \times \mathbb{N}^{n_2}$.

Portanto, existem $C > 0$ e N inteiro positivo tais que

$$|\langle \mathscr{F}_2(u)(x_1,\alpha), \phi(x_1)\rangle| \leq C \max_{|\beta|\leq N} \|\partial_{x_1}^\beta \phi\|_\infty (1+|\alpha|)^N \quad \forall (\phi,\alpha) \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1}) \times \mathbb{N}^{n_2}.$$

Definição 3.28. Uma sequência $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}}$ de distribuições de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ é de crescimento lento se existem $C > 0$ e N inteiro positivo tais que

$$|\langle u_\alpha(x_1), \phi(x_1)\rangle| \leq C \max_{|\beta|\leq N} \|\partial_{x_1}^\beta \phi\|_\infty (1+|\alpha|)^N \quad \forall (\phi,\alpha) \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1}) \times \mathbb{N}^{n_2}.$$

O conjunto de todas as sequências $\mathbb{Z}^{n_2} \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ de crescimento lento é espaço vetorial complexo e será denotado por $s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$.

Assim, para cada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ temos que $\{\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}}$ é uma sequência de distribuições de crescimento lento e, portanto, a transformada de Fourier $\mathscr{F}_{x_2}$ é uma aplicação linear de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ em $s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$. Mostraremos a seguir que $\mathscr{F}_{x_2}$ é isomorfismo linear.

Proposição 3.29. Seja $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} \in s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$. Temos que a sequência

$$S_k(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}\\ |\alpha|\leq k}} u_\alpha(x_1)\otimes e^{i\alpha x_2}$$

é convergente em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. O limite dessa sequência será denotado por

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} u_\alpha(x_1)\otimes e^{i\alpha x_2}.$$

Demonstração. Note que $u_\alpha \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$. Podemos escrever

$$u_\alpha(x_1) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{n_1}} \mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)e^{ix_1\beta},$$

onde a convergência ocorre em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$. Pela observação 3.25, temos que

$$u_\alpha(x_1)\otimes e^{-i\alpha x_2} = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{n_1}} \mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)e^{i(x_1,x_2)(\beta,\alpha)},$$

onde a convergência ocorre em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Logo,

$$S_k(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}\\ |\alpha|\leq k}} \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{n_1}} \mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)e^{i(\beta,\alpha)(x_1,x_2)}.$$

Como $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} \in s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$, temos que existem N inteiro positivo e $C>0$ tais que

$$|\langle u_\alpha,\phi\rangle| = C\max_{|\beta'|\leq N}\|\partial_{x_1}^{\beta'}\phi\|_\infty(1+|\alpha|)^N \quad \forall(\phi,\alpha)\in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})\times\mathbb{N}^{n_2},$$

ou seja, escolhendo $\phi(x_1) = e^{-i\beta x_1}$ e notando que $\mathscr{F}(u_\alpha)(\beta) = (2\pi)^{-n_1}\langle u_\alpha(x_1), e^{-i\beta x_1}\rangle$, obtemos

$$|\mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)| \leq (2\pi)^{-n_1}C(1+|\beta|)^N(1+|\alpha|)^N \quad \forall(\beta,\alpha)\in\mathbb{N}^n.$$

Das desigualdades $(1+|\alpha|)\leq(1+|(\alpha,\beta)|)$ e $(1+|\beta|)\leq(1+|(\alpha,\beta)|)$ concluímos que

$$|\mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)| \leq (2\pi)^{-n_1}C(1+|(\alpha,\beta)|)^{2N} \quad \forall(\beta,\alpha)\in\mathbb{N}^n,$$

ou seja,

$$\{\mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)\}_{(\beta,\alpha)\in\mathbb{Z}^n} \in s'(\mathbb{Z}^n).$$

Logo, temos que a série

$$u(x) := \sum_{(\beta,\alpha)\in\mathbb{Z}^n} \mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)e^{i(\beta,\alpha)(x_1,x_2)}$$

converge em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Falta concluir que $S_k \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Se $\theta \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então pela observação 3.17 a série

$$\langle u,\theta\rangle = \sum_{(\beta,\alpha)\in\mathbb{Z}^n} \mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)\langle e^{i(\beta,\alpha)(x_1,x_2)},\theta\rangle$$

converge absolutamente. Assim,

$$\begin{aligned}\langle u,\theta\rangle &= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}}\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{n_1}} \mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)\langle e^{i(\beta,\alpha)(x_1,x_2)},\theta\rangle\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}\\ |\alpha|\leq k}}\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{n_1}} \mathscr{F}(u_\alpha)(\beta)\langle e^{i(\beta,\alpha)(x_1,x_2)},\theta\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle S_k,\theta\rangle,\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Lema 3.30. A aplicação linear $\mathscr{F}_{x_2} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^{n_2},\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$ é sobrejetora.

Demonstração. Considere $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} \in s'(\mathbb{Z}^{n_2},\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$. Defina

$$u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} u_\alpha(x_1)\otimes e^{i\alpha x_2}.$$

Pelo resultado anterior u está bem definida e pertence a $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, pois a série acima converge em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}_{x_2}u(x_1,\alpha),\phi(x_1)\rangle =&\frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\langle u(x_1,x_2),\phi(x_1)e^{-i\alpha x_2}\rangle\\ =&\frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^{n_2}}\langle u_\gamma(x_1)\otimes e^{i\gamma x_2},\phi(x_1)e^{-i\alpha x_2}\rangle\\ =&\frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^{n_2}}\langle u_\gamma(x_1),\phi(x_1)\rangle\langle e^{i\gamma x_2},e^{-i\alpha x_2}\rangle\\ =&\langle u_\alpha(x_1),\phi(x_1)\rangle,\end{aligned}$$

pois $\langle e^{i\gamma x_2},e^{-i\alpha x_2}\rangle$ vale 0 quando $\gamma\neq\alpha$ e $(2\pi)^{n_2}$ se $\gamma=\alpha$.

Logo, $\mathscr{F}_{x_2}(u) = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}}$, ou seja, $\mathscr{F}_{x_2}$ é sobrejetora. □

Lema 3.31. A aplicação linear $\mathscr{F}_{x_2} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^{n_2},\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$ é injetora.

Demonstração. Se $\mathscr{F}_{x_2}(u) = 0$ então $\langle u(x_1,x_2),\phi(x_1)e^{-ix_2\beta}\rangle = 0$ para toda $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ e todo $\beta\in\mathbb{Z}^{n_2}$.

Tomando $\phi(x_1) = e^{-i\alpha x_1}$, com $\alpha\in\mathbb{Z}^{n_1}$, concluímos que $\mathscr{F}(u)(\alpha,\beta) = 0$. Como $\mathscr{F}$: $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)\to s'(\mathbb{Z}^n)$ é isomorfismo linear, segue que $u=0$. □

Proposição 3.32. A transformada parcial de Fourier

$$\mathscr{F}_{x_2} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^{n_2},\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$$

é isomorfismo linear.

Demonstração. Consequência imediata dos dois lemas anteriores. □

A sua inversa é a função $\mathscr{F}_{x_2}^{-1} : s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ dada por

$$\mathscr{F}_{x_2}^{-1}(\{u_\alpha\}_{\alpha\in Z^{n_2}})(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} u_\alpha(x_1) \otimes e^{ix_2\alpha}$$

com a convergência ocorrendo em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

A fim de simplificar a notação, omitiremos $\otimes$ em expressões como a acima e assim a inversa pode ser escrita como

$$\mathscr{F}_{x_2}^{-1}(\{u_\alpha\}_{\alpha\in Z^{n_2}})(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} u_\alpha(x_1) e^{ix_2\alpha}.$$

Mostremos que a definição de transformada parcial de Fourier para distribuições é coerente com à feita para funções suaves. Para isso, devemos primeiramente mostrar que $s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1})) \subset s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$.

Seja $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} \in s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$. Temos que para cada k inteiro não negativo e cada $\beta \in \mathbb{Z}^{n_1}$ há $C(k,\beta) > 0$ tal que

$$\|\partial_{x_1}^\beta a_\alpha\|_\infty \leq \frac{C(k,\beta)}{(1+|\alpha|)^k}.$$

Em particular, temos que

$$\|a_\alpha\|_\infty \leq C(0,0)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$.

Se $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$, tomando $C' = (2\pi)^{n_1} C(0,0)$, obtemos

$$|\langle a_\alpha, \phi\rangle| \leq (2\pi)^{n_1} \|a_\alpha\|_\infty \|\phi\|_\infty \leq C' \|\phi\|_\infty$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$. Portanto, $\{a_\alpha\} \in s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$.

Se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então considerando $\mathscr{F}_{x_2}$ da forma como foi definida para distribuições temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha), \phi(x_1)\rangle &= (2\pi)^{-n_2} \langle u, \phi(x_1) e^{-ix_2\alpha}\rangle \\
&= (2\pi)^{-n_2} \int_{\mathbb{T}^n} u(x_1,x_2)\phi(x_1) e^{-ix_2\alpha} dx_1 dx_2 \\
&= (2\pi)^{-n_2} \int_{\mathbb{T}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{T}^{n_2}} u(x_1,x_2) e^{-ix_2\alpha} dx_2 \right) \phi(x_1) dx_1,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha) = (2\pi)^{-n_2} \int_{\mathbb{T}^{n_2}} u(x_1,x_2) e^{-ix_2\alpha} dx_2,$$

concordando assim com a definição feita para funções suaves.

Desta forma, temos que o isomorfismo $\mathscr{F}_{x_2} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$ é uma extensão do isomorfismo $\mathscr{F}_{x_2} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$.

Claramente podemos definir $\mathscr{F}_{x_1} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to s'(\mathbb{Z}^{n_1}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_2}))$ de forma análoga e teremos um isomorfismo. Discutamos a relação entre as transformadas $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_{x_1}$ e $\mathscr{F}_{x_2}$.

Proposição 3.33. A seguinte identidade é válida

$$\mathscr{F}_{x_1}[\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2)](\alpha_1) = \mathscr{F}_{x_2}[\mathscr{F}_{x_1}(u)(\alpha_1,x_2)](\alpha_2) = \mathscr{F}(u)(\alpha) \quad \forall u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n).$$

Demonstração. Fixe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^n$. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ então

$$\langle \mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2), \phi(x_1)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\langle u(x), \phi(x_1)e^{-i\alpha_2 x_2}\rangle \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$$

de onde segue a identidade

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{x_1}[\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2)](\alpha_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{n_1}}\frac{1}{(2\pi)^{n_2}}\langle u(x), e^{-i\alpha_1 x_1}e^{-i\alpha_2 x_2}\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\langle u(x), e^{-i\alpha x}\rangle \\ &= \mathscr{F}(u)(\alpha).\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\mathscr{F}_{x_1}[\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2)](\alpha_1) = \mathscr{F}(u)(\alpha)$$

e por argumento análogo temos

$$\mathscr{F}_{x_2}[\mathscr{F}_{x_1}(u)(\alpha_1,x_2)](\alpha_2) = \mathscr{F}(u)(\alpha).$$

□

Corolário 3.34. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ então vale as identidades:

1. Para cada $\alpha_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}$ temos

$$\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}} \mathscr{F}(u)(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_1 x_1}$$

com convergência em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$.

2. Para cada $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}$ temos

$$\mathscr{F}_{x_1}(u)(\alpha_1,x_2) = \sum_{\alpha_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}} \mathscr{F}(u)(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 x_2}$$

com convergência em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_2})$.

Demonstração. Mostraremos somente o primeiro item, pois o segundo é análogo.

Como $\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$, obtemos

$$\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}} \mathscr{F}_{x_1}\left(\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2)\right)(\alpha_1) e^{i\alpha_1 x_1}$$

com convergência em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ e da identidade

$$\mathscr{F}_{x_1}\left(\mathscr{F}_{x_2}(u)(x_1,\alpha_2)\right)(\alpha_1) = \mathscr{F}(u)(\alpha_1,\alpha_2)$$

segue o resultado. □

3.5 Série de Fourier de formas e correntes

Seja a_α, com $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, uma sequência de p-formas constantes[1] com

$$a_\alpha = \sum_{|J|=p} a_{\alpha,J} dx_J.$$

Dizemos que a_α é uma sequência de p-formas constantes de decrescimento rápido (crescimento lento) se para cada p-lista ordenada J temos que a sequência $a_{\alpha,J}$ é uma sequência de números complexos de decrescimento rápido (crescimento lento).

Seja $s(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ o espaço das sequências de p-formas constantes de decrescimento rápido e seja $s'(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ o espaço das sequências de p-formas constantes de crescimento lento. Como $s(\mathbb{Z}^n)$ e $s'(\mathbb{Z}^n)$ são espaços vetoriais, segue que $s(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ e $s'(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ também são.

Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$. Temos que

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J,$$

onde $u_J \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Defina a transformada de Fourier de u pela fórmula

$$\mathscr{F}u(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathscr{F}(u_J)(\alpha) dx_J.$$

Como para cada p-lista ordenada J tem-se $\mathscr{F}(u_J) \in s'(\mathbb{Z}^n)$, concluímos que $\mathscr{F}u \in s'(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ e, portanto, a transformada de Fourier é uma aplicação linear de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ em $s'(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$.

Proposição 3.35. A aplicação $\mathscr{F} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to s'(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ é isomorfismo linear.

[1] Ver definição 2.34.

Demonstração. Comecemos pela injetividade. Se $\mathscr{F}(u) = 0$ então para cada p-lista ordenada J temos $\mathscr{F}(u_J) = 0$ e consequentemente pela proposição 3.23 concluímos que $u_J = 0$, ou seja, $u = 0$.

Agora, mostremos que $\mathscr{F}$ é sobrejetora. Seja $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \in s'(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$.

Defina para cada p-lista ordenada J a distribuição $u_J = \mathscr{F}^{-1}(\{a_{\alpha,J}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n})$. Temos que

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J$$

satisfaz $\mathscr{F}u = \{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$. $\square$

Se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ então $\mathscr{F}(u) \in s(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ e se $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \in s(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ então

$$\mathscr{F}^{-1}(\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{ix\alpha}$$

pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$, pois para cada p-lista ordenada J a sequência $\{a_{\alpha,J}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ é de decrescimento rápido. Assim, temos que a restrição $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to s(\mathbb{Z}^n, \wedge^p)$ é isomorfismo.

3.6 Série parcial de Fourier de formas e correntes

Quando trabalhamos com funções suaves podemos pensar em $C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ como subespaço de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. De fato, se $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$ então podemos considerar a função $\tilde{\phi}(x) := \phi \otimes 1(x) = \phi(x_1)$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, onde $1 : \mathbb{T}^{n_2} \to \mathbb{C}$ é a função constante que vale 1 em todo ponto. Mais precisamente, temos a inclusão $I : C^\infty(\mathbb{T}^{n_1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada por $I(\phi) = \phi \otimes 1$. Claramente essa aplicação é injetora e $I : C^\infty(\mathbb{T}^{n_1}) \to I(C^\infty(\mathbb{T}^{n_1}))$ é isomorfismo topológico.

Analogamente, podemos considerar a inclusão $I : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ dada por $I(u) = u \otimes 1$. Verifiquemos que essa aplicação é injetora. Se $u \otimes 1 = 0$ então

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\alpha_1)\widehat{1}(\alpha_2)e^{i\alpha x} = 0$$

com convergência em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, de onde segue que $\widehat{u}(\alpha_1) = 0$ para todo $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}$, já que $\widehat{u}(\alpha_1)\widehat{1}(\alpha_2) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ e $\widehat{1}(0) = 1$. Assim, pela proposição 3.23, segue que $u = 0$.

Essa inclusão é também contínua. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $\langle I(u), \phi\rangle = (2\pi)^{n_2}\langle u(x_1), \mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1, 0)\rangle$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle u \otimes 1, \phi\rangle &= (2\pi)^n \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\alpha_1)\widehat{1}(\alpha_2)\widehat{\phi}(-\alpha)\\ &= (2\pi)^n \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{n_1}} \widehat{u}(\beta)\widehat{\phi}(-\beta, 0) = (2\pi)^{n_2}\langle u(x_1), \mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1, 0)\rangle,\end{aligned}$$

onde a observação 3.17 nos garante a convergência absoluta das séries acima.

Assim, se $u_j \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ é uma rede convergindo para 0 em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$, teremos

$$\langle I(u_j), \phi \rangle = (2\pi)^{n_2} \langle u_j(x_1), \mathscr{F}_{x_2}(\phi)(x_1, 0) \rangle \to 0$$

para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, ou seja, I é contínua.

Considere $I^{-1} : I(\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Se $u_j \otimes 1$ é uma rede de $I(\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$ tal que $u_j \otimes 1 \to 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ então pela proposição 3.26 temos

$$(2\pi)^{n_2} \langle u_j, \phi \rangle = \langle u_j, \phi \rangle \langle 1, 1 \rangle = \langle u_j \otimes 1, \phi \otimes 1 \rangle \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1})$$

e daí concluímos que $u_j \to 0$.

Assim, a aplicação linear $I : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}) \to I(\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$ é isomorfismo topológico.

Logo, podemos ver $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ como subespaço vetorial e topológico de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ e escreveremos apenas u no lugar de $u \otimes 1$.

Seja a_α, com $\alpha \in \mathbb{Z}^{n_2}$, uma sequência de p-correntes sobre $\mathbb{T}^n$ com

$$a_\alpha = \sum_{|J|=p} a_{\alpha,J} dx_J,$$

onde $a_{\alpha,J} \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ para cada p-lista ordenada J.

Dizemos que a a_α é uma sequência de p-formas de decrescimento rápido se para cada p-lista ordenada J temos que a sequência $a_{\alpha,J}$ pertence a $s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$ e dizemos que a_α é uma sequência de p-correntes de crescimento lento se para cada p-lista ordenada J temos que $a_{\alpha,J}$ pertence a $s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$.

Seja $s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}, \wedge^p))$ o conjunto das sequências de p-formas diferenciais de decrescimento rápido e seja $s'(\mathbb{Z}^n, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}, \wedge^p))$ o conjunto das sequências de p-correntes de crescimento lento. Esses dois conjuntos são espaços vetoriais complexos, pois $s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}))$ e $s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}))$ são espaços vetoriais complexos.

A transformada de Fourier com respeito à variável x_2 é a aplicação

$$\mathscr{F}_{x_2} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}, \wedge^p))$$

dada pela expressão

$$\mathscr{F}_{x_2}\left(\sum_{|J|=p} u_J dx_J \right)(x_1, \alpha) = \sum_{|J|=p} \mathscr{F}_{x_2}(u_J)(x_1, \alpha) dx_J.$$

Proposição 3.36. A aplicação $\mathscr{F}_{x_2} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}, \wedge^p)$ é isomorfismo linear.

Demonstração. Comecemos pela injetividade. Se $\mathscr{F}_{x_2}(u) = 0$ então para cada p-lista ordenada J temos $\mathscr{F}_{x_2}(u_J) = 0$ e consequentemente pela proposição 3.32 concluímos que $u_J = 0$, ou seja, $u = 0$.

Agora mostremos que $\mathscr{F}_{x_2}$ é sobrejetora. Seja $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} \in s'(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1}, \wedge^p))$.

Defina para cada p-lista ordenada J a distribuição $u_J = \mathscr{F}_{x_2}^{-1}(\{a_{\alpha,J}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}})$. Temos que

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J$$

satisfaz $\mathscr{F}_{x_2}(u) = \{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}}$. □

Definição 3.37. Se

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dx_J$$

é uma p-corrente em $\mathbb{T}^{n_1}$ e v é uma distribuição no toro $\mathbb{T}^{n_2}$ então definimos

$$u\otimes v = \sum_{|J|=p} u_J \otimes v dx_J.$$

Assim podemos escrever a transformada inversa como sendo

$$\mathscr{F}_{x_2}^{-1}(\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}})(x_1,x_2) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} a_\alpha(x_1)\otimes e^{ix_2\alpha}.$$

A fim de simplificar mais a notação, omitiremos o simbolo $\otimes$ de expressões como a acima e escreveremos

$$\mathscr{F}_{x_2}^{-1}(\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}})(x_1,x_2) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n_2}} a_\alpha(x_1) e^{ix_2\alpha}$$

já que o produto tensorial é apenas uma generalização da multiplicação.

Observação 3.38. Se restringirmos $\mathscr{F}_{x_2}$ para $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p)$ então temos o isomorfismo

$$\mathscr{F}_{x_2} : C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^p) \to s(\mathbb{Z}^{n_2}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^{n_1}, \wedge^p)).$$

CAPÍTULO

4

RESOLUBILIDADE GLOBAL

4.1 Complexo diferencial

Nesse capítulo discutiremos o complexo diferencial descrito na Introdução e estudaremos o conceito de resolubilidade global.

Denotaremos por (t,x) as coordenadas do toro $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$, onde $t \in \mathbb{T}^n$ e $x \in \mathbb{S}^1$, e consideraremos uma 1-forma diferencial fechada $a(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)dt_i$ sobre $\mathbb{T}^n$. No que segue, sempre suporemos que as formas diferenciais são reais.

Proposição 4.1. A seguinte identidade é válida

$$\partial_j a_i = \partial_i a_j \tag{4.2}$$

para $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Demonstração. Como $da = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dt_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j a_i dt_j \wedge dt_i$, temos que

$$\begin{aligned}
da &= \sum_{1\leq i<j\leq n} \partial_j a_i dt_j \wedge dt_i + \sum_{1\leq j<i\leq n} \partial_j a_i dt_j \wedge dt_i \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} \partial_j a_i dt_j \wedge dt_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} \partial_i a_j dt_i \wedge dt_j \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} \partial_j a_i dt_j \wedge dt_i - \sum_{1\leq i<j\leq n} \partial_i a_j dt_j \wedge dt_i \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} [\partial_j a_i - \partial_i a_j] dt_j \wedge dt_i.
\end{aligned}$$

Como a é forma fechada, isto é, $da = 0$, temos que $\partial_j a_i - \partial_i a_j = 0$ para todo i,j pois, como sabemos da geometria, os vetores $dt_j \wedge dt_i$, com $1 \leq i < j \leq n$, são linearmente independentes em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^2)$. $\square$

A seguir estabeleceremos o complexo diferencial que estudaremos. A fim de defini-lo precisamos primeiramente definir os campos $L_k = \partial_{t_k} + a_k(t)\partial_x$ sobre $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$. Repare que $[L_r, L_s] = 0$ para todo $r, s \in \{1, \ldots, n\}$, pois por (4.2) temos

$$[L_r, L_s] = (\partial_{t_r} a_s - \partial_{t_s} a_r)\,\partial_x = 0.$$

Definição 4.3. Para cada $p \in \mathbb{N}$ considere o espaço $\mathscr{D}'_p$ das p-correntes da forma

$$\sum_{|J|=p} u_J(t,x)dt_J$$

em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$. Em outras palavras, estamos apenas considerando p-correntes sem o fator dx. Denotaremos por $\mathscr{D}_p$ o espaço das p-formas diferenciais que pertencem a $\mathscr{D}'_p$.

Em particular,

$$\mathscr{D}_0 = C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1) \quad \text{e} \quad \mathscr{D}'_0 = \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1).$$

Observação 4.4. No artigo (BERGAMASCO; PETRONILHO, 1999) são usadas as notações $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1; \wedge^{p,0}) := \mathscr{D}'_p$ e $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1; \wedge^{p,0}) := \mathscr{D}_p$.

Definição 4.5. Seja $p \in \mathbb{N}$. Associado aos campos $L_1, \ldots, L_n$ descritos acima definimos o operador diferencial

$$\mathbb{L}_a^p : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_{p+1}$$

dado por

$$\mathbb{L}_a^p(u) = \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^n L_i(u_I)dt_i \wedge dt_I,$$

onde $u = \sum_{|I|=p} u_I dt_I$.

Proposição 4.6. Para cada $p \in \mathbb{N}$ temos $\mathbb{L}_a^{p+1} \circ \mathbb{L}_a^p = 0$.

Demonstração. Se $u = \sum_{|I|=p} u_I dt_I \in \mathscr{D}'_p$ então

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_a^{p+1} \circ \mathbb{L}_a^p(u) &= \sum_{|I|=p} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n L_j L_i u_I dt_j \wedge dt_i \wedge dt_I \\
&= \sum_{|I|=p} \sum_{1 \le j < i \le n} (L_j L_i - L_i L_j) u_I dt_j \wedge dt_i \wedge dt_I \\
&= \sum_{|I|=p} \sum_{1 \le j < i \le n} [L_j, L_i] u_I dt_j \wedge dt_i \wedge dt_I = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a identidade $\mathbb{L}_a^{p+1} \circ \mathbb{L}_a^p = 0$. □

Os espaços vetoriais $\mathscr{D}'_p$ conectados pelos homomorfismos $\mathbb{L}_a^p$ descritos acima, que satisfazem $\mathbb{L}_a^{p+1} \circ \mathbb{L}_a^p = 0$, definem um complexo de cocadeia. Chamaremos esse complexo de cocadeia de complexo diferencial associado a 1-forma a.

Quando temos uma p-corrente $u = \sum_{|I|=p} u_I dt_I$ podemos calcular sua derivada exterior com respeito à variável t, que denotaremos por $d_t u$. Mais precisamente, temos a aplicação

$$d_t : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_{p+1}$$

dada por

$$d_t u = \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^{n} \partial_{t_i} u_I dt_i \wedge dt_I.$$

Se X é um campo suave em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$ então podemos definir a aplicação

$$X : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_p$$

dada pela fórmula

$$Xu = \sum_{|I|=p} X u_I dt_I$$

e se b pertence a $\mathscr{D}_1$ então podemos definir

$$b \wedge X : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_{p+1}$$

pela fórmula $b \wedge X(u) = b \wedge (Xu)$.

Proposição 4.7. Para cada $p \in \mathbb{N}$ temos $\mathbb{L}^p_a = d_t + a \wedge \partial_x$.

Demonstração. Seja $u = \sum_{|I|=p} u_I dt_I$ um elemento de $\mathscr{D}'_p$.

Como $L_i(u_I) = \partial_{t_i} u_I + a_i \partial_x u_I$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}^p_a(u) = \mathbb{L}^p_a\left(\sum_I u_I dt_I\right) &= \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^{n} L_i u_I dt_i \wedge dt_I \\
&= \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^{n} \partial_{t_i} u_I dt_i \wedge dt_I + \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_x u_I dt_i \wedge dt_I \\
&= d_t\left(\sum_{|I|=p} u_I dt_I\right) + a \wedge \partial_x \left(\sum_{|I|=p} u_I dt_I\right) \\
&= (d_t + a \wedge \partial_x)u.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a identidade $\mathbb{L}^p_a = d_t + a \wedge \partial_x$. □

4.2 Formas de Liouville

Proposição 4.8. Seja a uma 1-forma diferencial fechada. Existem as 1-formas diferenciais b e c tais que b é constante, c é exata e $a = b + c$. Além disso, essa decomposição de a é única, isto é, se há outras 1-formas diferenciais b' e c', constante e exata, respectivamente, e temos $a = b + c = b' + c'$ então $b = b'$ e $c = c'$.

Demonstração. Considere $a = \sum_{i=1}^{n} a_i dt_i$ e as curvas $\gamma_i : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ dadas por

$$\gamma_i(s) = s e_i$$

onde $e_1, \ldots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Defina $b = \sum_{i=1}^{n} b_i dt_i$ em $\mathbb{T}^n$ onde

$$b_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi \circ \gamma_i} a.$$

Seja $\tilde{a} = \Pi^* a$. Segue que $\tilde{a} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i dt_i$ é uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ com $\tilde{a}_i = \Pi^* a_i$, ou seja, com coeficientes $\tilde{a}_i$ periódicos.

Se escrevermos a 1-forma constante $\tilde{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i dt_i$ em $\mathbb{R}^n$ então $\tilde{b} = \Pi^* b$.

Assim temos $d(\tilde{a} - \tilde{b}) = d\tilde{a} = d(\Pi^* a) = \Pi^* da = 0$ e como toda forma fechada é exata em $\mathbb{R}^n$ concluímos que há uma função suave $\tilde{C} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $d\tilde{C} = \tilde{a} - \tilde{b}$.

Como $d\tilde{C}$ é uma 1-forma fechada em $\mathbb{R}^n$, temos que vale a identidade

$$\tilde{C}(y) - \tilde{C}(x) = \int_\alpha d\tilde{C} = \int_\alpha \tilde{a} - \tilde{b}$$

para quaisquer pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e qualquer curva $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(t_0) = x$ e $\alpha(t_1) = y$.

Mostremos que $\tilde{C}$ é periódica. Fixe $x \in \mathbb{R}^n$ e note que

$$\tilde{C}(x + 2\pi e_i) - \tilde{C}(x) = [\tilde{C}(x + 2\pi e_i) - \tilde{C}(2\pi e_i)] - [\tilde{C}(x) - \tilde{C}(0)] + [\tilde{C}(2\pi e_i) - \tilde{C}(0)]. \tag{4.9}$$

Temos que

$$\tilde{C}(2\pi e_i) - \tilde{C}(0) = \int_{\gamma_i} \tilde{a} - \tilde{b} = \int_{\Pi \circ \gamma_i} a - \int_{\Pi \circ \gamma_i} b = \int_{\Pi \circ \gamma_i} a - 2\pi b_i = 0 \tag{4.10}$$

e além disso, como cada $\tilde{a}_j$ é função periódica, vale

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x + 2\pi e_i) - \tilde{C}(2\pi e_i) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} (\tilde{a}_j(2\pi e_i + tx) - b_j) x_j dt \qquad (4.11) \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} (\tilde{a}_j(tx) - b_j) x_j dt = \tilde{C}(x) - \tilde{C}(0). \end{aligned}$$

Portanto, aplicando (4.10) e (4.11) em (4.9) temos que para cada i vale a identidade $\tilde{C}(x + 2\pi e_i) = \tilde{C}(x)$ de onde segue que $\tilde{C}$ é periódica.

Como $\tilde{C}$ é suave e periódica, existe $C \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\tilde{C} = \Pi^* C$. Se fizermos $c = dC$ obtemos que c é uma 1-forma diferencial exata em $\mathbb{T}^n$ e vale $a = b + c$.

Mostremos a unicidade da decomposição. Sejam b' e c' duas 1-formas diferenciais em $\mathbb{T}^n$ tais que b' é constante, c' é exata e $a = b' + c'$. Escrevamos $b' = \sum_{i=1}^{n} b'_i dt_i$ onde $b'_i \in \mathbb{R}$.

Temos $b' - b = c - c'$. Note que como $c - c'$ é 1-forma exata obtemos

$$\int_{\Pi^* \gamma_i} c - c' = 0$$

e consequentemente
$$2\pi(b_i' - b_i) = \int_{\Pi^*\gamma_i} c - c' = 0$$
para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $b' = b$ e, portanto, $c = c'$. □

Observação 4.12. Dada uma 1-forma diferencial a fechada, temos pela proposição anterior que existe uma única 1-forma constante a_0 de modo que $a - a_0$ é exata. Assim, existe $A \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ satisfazendo $dA = a - a_0$. Note que essa função A não é a única satisfazendo essa relação, pois se $c \in \mathbb{R}$ então $d(A + c) = dA = a - a_0$. Por outro lado, se $A' \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ satisfaz $dA' = a - a_0$ então $d(A' - A) = 0$, ou seja, $d\Pi^*(A' - A) = \Pi^* d(A' - A) = 0$, o que significa que $\Pi^*(A' - A)$ é constante e, consequentemente, $A' - A$ é constante. Em resumo, temos $a = a_0 + dA$, onde a_0 é a única 1-forma constante satisfazendo a expressão e a função $A \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é única a menos de constante.

Definição 4.13. Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que α é inteiro se $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ e racional se $\alpha \in \mathbb{Q}^n$. Se α não for um vetor racional então diremos que é irracional.

Definição 4.14. Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que α é vetor de Liouville se α é irracional, existe $C > 0$ e existem as sequências $p_m = (p_{m,1}, p_{m,2}, \dots, p_{m,n}) \in \mathbb{Z}^n$ e $q_m \in \mathbb{N}$ satisfazendo
$$q_m \geq 2 \text{ e } \max_{i=1,\dots,n} \left| \alpha_i - \frac{p_{m,i}}{q_m} \right| \leq \frac{C}{q_m^m}$$
para todo $m \in \mathbb{N}$.

Proposição 4.15. Podemos sempre trocar a constante $C > 0$ da definição acima por 1, isto é, dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ temos que α é de Liouville se, e só se, α é irracional e existem as sequências $p_m = (p_{m,1}, p_{m,2}, \dots, p_{m,n}) \in \mathbb{Z}^n$ e $q_m \in \mathbb{N}$ satisfazendo
$$q_m \geq 2 \text{ e } \max_{i=1,\dots,n} \left| \alpha_i - \frac{p_{m,i}}{q_m} \right| \leq \frac{1}{q_m^m}$$
para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ vetor de Liouville. Existe $C > 0$ e existem as sequências $p_m = (p_{m,1}, p_{m,2}, \dots, p_{m,n}) \in \mathbb{Z}^n$ e $q_m \in \mathbb{N}$ satisfazendo
$$q_m \geq 2 \text{ e } \max_{i=1,\dots,n} \left| \alpha_i - \frac{p_{m,i}}{q_m} \right| \leq \frac{C}{q_m^m}$$
para todo $m \in \mathbb{N}$.

Fixe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k \geq C$, defina $p_m' = p_{m+k}$ e $q_m' = q_{m+k}$ e note que $q_m' \geq 2$. Temos que
$$\max_{i=1,\dots,n} \left| \alpha_i - \frac{p_{m+k,i}}{q_{m+k}} \right| \leq \frac{C}{q_{m+k}^{m+k}},$$

ou seja,

$$\max_{i=1,\dots,n}\left|\alpha_i-\frac{p'_{m,i}}{q'_m}\right|\leq\frac{C}{(q'_m)^{m+k}}$$

e, como $q'_m\geq 2$, temos que $(q'_m)^k\geq C$, ou seja, $C/(q'_m)^k\leq 1$. Logo

$$\max_{i=1,\dots,n}\left|\alpha_i-\frac{p'_{m,i}}{q'_m}\right|\leq\frac{1}{(q'_m)^{m}}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$.

A recíproca do resultado é imediata. □

Observação 4.16. Podemos sempre supor que a sequência q_m que surge na definição de vetor de Liouville é estritamente crescente. Mostremos que isso é verdade. Dado um vetor de Liouville α, existem as sequências $p_m\in\mathbb{Z}^n$ e $q_n\in\mathbb{N}$ tais que $q_m>1$ e $\max_j|\alpha_j-p_{m,j}/q_m|\leq q_m^{-m}$. Repare que $p_{m,j}/q_m\to\alpha_j$ e $\max_j|\alpha_j-p_{m,j}/q_m|\leq 1$. Para algum j temos que α_j é irracional e, além disso, $|p_{m,j}|\leq(|\alpha_j|+1)q_m$. Se q_m é uma sequência limitada então a sequência $p_{m,j}$ é limitada também, de onde segue que $\{p_{m,j}/q_m; m\in\mathbb{N}\}$ é finito, contradizendo $p_{m,j}/q_m\to\alpha_j$. Logo, a sequência q_m é ilimitada. Seja $\tilde{q}_k=q_{m_k}$ uma subsequência de q_m estritamente crescente e seja $\tilde{p}_k=p_{m_k}$. Como $m_k\geq k$ temos que $\max_j|\alpha_j-\tilde{p}_{k,j}/\tilde{q}_k|\leq q_{m_k}^{-m_k}\leq\tilde{q}_k{}^{-k}$, que é o que queríamos mostrar.

Um número de Liouville é um vetor de Liouville em $\mathbb{R}$. Note primeiramente que existem números de Liouville. Tome por exemplo

$$\alpha=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j!}}.$$

Repare que esse número é irracional porque sua expansão em base 2 não é periódica. Além disso, podemos tomar

$$q_m=2^{m!}\quad\text{e}\quad p_m=\sum_{j=1}^{m}\frac{2^{m!}}{2^{j!}}$$

e teremos

$$\left|\alpha-\frac{p_m}{q_m}\right|\leq\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{j!}}\leq\sum_{j=(m+1)!}^{\infty}\frac{1}{2^{j}}=\frac{1}{2^{(m+1)!-1}}\leq\frac{1}{q_m^m}$$

porque $(m+1)!-1=m!m+m-1\geq m!m$.

Assim, números de Liouville existem e de fato, usando a mesma técnica, trocando 2 por outro inteiro positivo, obtemos infinitos exemplos de números de Liouville. Note também que múltiplos inteiros não nulos de um número de Liouville são também Liouville.

Agora que sabemos da existência de números de Liouville podemos produzir alguns vetores de Liouville. Se α é um número de Liouville então $(\alpha,x)\in\mathbb{R}^2$ é vetor de Liouville se x é racional ou se x é múltiplo inteiro de α.

A pergunta natural a se fazer é a seguinte: Todo par $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, onde α,β são números de Liouville, é vetor de Liouville? A resposta é não. No artigo (BERGAMASCO, 1999), mais precisamente no exemplo 4.9, é construído um contra-exemplo fazendo uso de frações contínuas.

Definição 4.17. Para uma 1-forma diferencial a fechada definimos:

1. a é inteira se $(2\pi)^{-1}\int_\sigma a\in\mathbb{Z}$ para cada 1-ciclo σ em $\mathbb{T}^n$.
2. a é racional se há q inteiro positivo tal que qa é uma 1-forma inteira. Caso contrário, dizemos que a é irracional.
3. a é de Liouville se for irracional, se existir uma sequência de 1-formas diferenciais a_m inteiras e se existir uma sequência $q_m\in\mathbb{N}$ tais que $q_m\geq 2$ e $q_m^m(a-q_m^{-1}a_m)$ é limitado em $C^\infty(\mathbb{T}^n;\wedge^1)$, isto é, é limitado com respeito a cada seminorma que define a topologia desse espaço.

Sejam $[\sigma_1],\ldots,[\sigma_n]$ geradores de $H_1(\mathbb{T}^n,\mathbb{Z})$, o primeiro grupo de homologia singular de $\mathbb{T}^n$, onde cada $\sigma_i:[0,2\pi]\to\mathbb{T}^n$ é curva suave. Considere a aplicação linear $I:H^1(\mathbb{T}^n;\mathbb{R})\to\mathbb{R}^n$, onde $H^1(\mathbb{T}^n;\mathbb{R})$ é o primeiro grupo de cohomologia de de Rham, definida por

$$I([\beta])=(I([\beta])_1,\ldots,I([\beta])_n)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\sigma_1}\beta,\ldots,\int_{\sigma_n}\beta\right). \tag{4.18}$$

Note que cada uma das integrais está bem definida, isto é, independe da escolha de representante da classe $[\beta]$ e da classe $[\sigma_i]$. De fato, se β β' são formas diferenciais fechadas e $[\beta]=[\beta']$ então $\beta-\beta'$ é forma exata e portanto há $C\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\beta-\beta'=dC$. Assim, pelo teorema de Stokes, temos:

$$\int_{\sigma_i}(\beta-\beta')=\int_{\sigma_i}dC=\int_{\partial\sigma_i}C=\int_0 C=0,$$

já que cada σ_i é um 1-ciclo e consequentemente $\partial\sigma_i=0$. Logo, concluímos que

$$\int_{\sigma_i}\beta=\int_{\sigma_i}\beta'.$$

De forma similar, se σ_i e σ_i' são 1-ciclos em $\mathbb{T}^n$ tais que $[\sigma_i]=[\sigma_i']$ então há uma 2-cadeia singular Γ_i satisfazendo $\partial\Gamma_i=\sigma_i-\sigma_i'$. Se β é 1-forma diferencial fechada então pelo teorema de Stokes temos

$$\int_{\sigma_i}\beta-\int_{\sigma_i'}\beta=\int_{\sigma_i-\sigma_i'}\beta=\int_{\partial\Gamma_i}\beta=\int_{\Gamma_i}d\beta=0.$$

Proposição 4.19. Se a é uma 1-forma diferencial fechada então

1. a é inteira se, e só se, $I([a])$ é inteiro;
2. a é racional se, e só se, $I([a])$ é racional;

3. a é de Liouville se, e só se, $I([a])$ é de Liouville.

Demonstração. 1. Se a é inteira então para $i = 1, \ldots, n$ obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_i} a \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $I([a]) \in \mathbb{Z}^n$.

Por outro lado, se $I([a]) \in \mathbb{Z}^n$ então temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_i} a \in \mathbb{Z}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Assim, se $[\sigma]$ é um 1-ciclo de $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$ então $[\sigma] = \sum_{i=1}^{n} c_i[\sigma_i]$ com coeficientes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ e consequentemente

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_i} a \in \mathbb{Z}.$$

2. Basta notar que a é racional se, e só se, existe q inteiro positivo tal que qa é uma 1-forma inteira, o que pelo item anterior equivale a dizer que existe q inteiro positivo satisfazendo $I([qa]) = qI([a]) \in \mathbb{Z}^n$, ou seja, $I([a]) \in \mathbb{Q}^n$.

3. Primeiro mostremos que se $a = \sum_{i=1}^{n} a_i dt_i$ é uma 1-forma diferencial de Liouville então $I([a])$ é vetor de Liouville. Note que $I([a])$ é irracional pelo item anterior.

   Existe uma sequência $a_m = \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} dt_i$ de 1-formas inteiras juntamente com uma sequência $q_m \in \mathbb{N}$ tais que $q_m \geq 2$ e $q_m^m(a - q_m^{-1} a_m)$ é sequência limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^n; \wedge^1)$. Portanto, existe $C > 0$ tal que

$$\max_{i=1,\ldots,n} \left\| q_m^m (a_i - q_m^{-1} a_{m,i}) \right\|_\infty \leq C.$$

   Defina $p_m = I([a_m])$. Do primeiro item segue que $p_m \in \mathbb{Z}^n$. Além disso,

$$\begin{aligned}
q_m^m \left| I([a])_j - \frac{p_{m,j}}{q_m} \right| = |I([q_m^m(a - q_m^{-1} a_m)])_j| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_j} q_m^m (a - q_m^{-1} a_m) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_j} \sum_{i=1}^{n} q_m^m (a_i - q_m^{-1} a_{m,i}) dt_i \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\sigma_j} q_m^m (a_i - q_m^{-1} a_{m,i}) dt_i \right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^{2\pi} q_m^m [a_i \circ \sigma_j(s) - q_m^{-1} a_{m,i} \circ \sigma_j(s)] \sigma_j^*(dt_i) \right|.
\end{aligned}$$

   Como $\sigma_j^*(dt_i)$ é uma 1-forma diferencial no intervalo $[0, 2\pi]$ segue que existe a função g_{ij} pertencente a $C^\infty([0, 2\pi])$ tal que $\sigma_j^*(dt_i) = g_{ij} ds$ e portanto temos

$$q_m^m \left| I([a])_j - \frac{p_{m,j}}{q_m} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} |q_m^m [a_i \circ \sigma_j(s) - q_m^{-1} a_{m,i} \circ \sigma_j(s)]| |g_{ij}(s)| ds$$
$$\leq nC \max_{1 \leq i,j \leq n} ||g_{i,j}||_\infty.$$

Tomando $\tilde{C} = nC \max_{1 \leq i,j \leq n} ||g_{i,j}||_\infty$ concluímos que

$$\max_{j=1,\ldots,n} \left| I([a])_j - \frac{p_{m,j}}{q_m} \right| \leq \frac{\tilde{C}}{q_m^m}.$$

Daí segue que $I([a])$ é vetor de Liouville.

Provemos agora o resultado recíproco. Suponha que $I([a])$ é de Liouville. Pelo item anterior sabemos que a não é racional. Considere os 1-ciclos $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_n]$ obtidos a partir das curvas fechadas $\gamma_i : [0, 2\pi] \to \mathbb{T}^n$ definidas por $\gamma_i(s) = se_i + 2\pi\mathbb{Z}^n$, com $e_1, \ldots, e_n$ sendo a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Há $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, com $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $[\gamma_i] = \sum_{j=1}^n c_{ij}[\sigma_j]$ em $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$. Seguindo a observação 4.12 temos $a = a_0 + dA$ e portanto

$$a_{0i} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} a = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{\sigma_j} a = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} I([a])_j.$$

Sejam $p_m = (p_{m,1}, \ldots, p_{m,n}) \in \mathbb{Z}^n$, $q_m \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$q_m \geq 2 \quad e \quad \max_{i=1,\ldots,n} \left| I([a])_i - \frac{p_{m,i}}{q_m} \right| \leq \frac{C}{q_m^m}.$$

Defina $a_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} p_{m,j} dt_i + q_m dA$. Temos que cada a_m é uma 1-forma inteira e

$$a - q_m^{-1} a_m = \sum_{i=1}^{n} \left[a_{0i} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_m^{-1} p_{m,j} \right] dt_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} [I([a])_j - q_m^{-1} p_{m,j}] dt_i.$$

Portanto,

$$q_m^m [a - q_m^{-1} a_m] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_m^m [I([a])_j - q_m^{-1} p_{m,j}] dt_i,$$

o que nos garante que a sequência $q_m^m [a - q_m^{-1} a_m]$ é limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^1)$, já que

$$\max_{i=1,\ldots,n} \left\| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_m^m [I([a])_j - q_m^{-1} p_{m,j}] \right\|_\infty \leq nC \max_{i,j=1,\ldots,n} |c_{ij}|$$

e para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ temos

$$\max_{i=1,\ldots,n} \left\| \partial^\alpha \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_m^m [I([a])_j - q_m^{-1} p_{m,j}] \right) \right\|_\infty = 0.$$

□

Observação 4.20. Segue da observação 4.12 que uma 1-forma fechada a é da forma $a_0 + dA$ e consequentemente temos que $I([a]) = I([a_0])$. Assim, temos que a é inteira se, e só se, a_0 é inteira; a é racional se, e só se, a_0 é racional e a é de Liouville se, e só se, a_0 é de Liouville. Note também que ser inteiro, racional, irracional ou de Liouville é determinado pela classe de cohomologia da forma a já que se $[a] = [b]$ em $H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ então $I([a]) = I([b])$.

Observação 4.21. Repare que na definição de 1-forma de Liouville podemos supor que q_m é sequência estritamente crescente. De fato, a justificativa se baseia na feita na observação 4.16 . Seja a uma 1-forma de Liouville e considere q_m e a_m de acordo com a definição de forma de Liouville, isto é, $q_m \geq 2$ e $q_m^m[a - a_m q_m^{-1}]$ é limitado em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^1)$. Seja $\alpha = I(a)$ e $p_m = I(a_m)$. Temos que α é vetor de Liouville, $p_m \in \mathbb{Z}^n$ e existe uma constante $C > 0$ tal que $\max_j |\alpha_j - p_{m,j}/q_m| \leq C/q_m^m$. Por argumento análogo ao feito em 4.16 se conclui que a sequência q_m é ilimitada e podemos trocar q_m por uma subsequência estritamente crescente.

4.3 Resolubilidade global

Proposição 4.22. Considere a 1-forma diferencial fechada $a = a_0 + dA$ decomposta de acordo com a observação 4.12 e o recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ dado por $\Pi(x) = x + 2\pi\mathbb{Z}^n$. Sejam $f \in \mathscr{D}_{p+1}$, com $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, e $u \in \mathscr{D}'_p$ satisfazendo $\mathbb{L}_a^p u = f$. Então temos:

1. $\mathbb{L}_a^{p+1} f = 0$;

2. Se $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $d\psi_j = \Pi^*(ja_0)$ então

$$e^{i(\psi_j(t)+jA(t))}\mathscr{F}_x f(t, j)$$

é uma $(p+1)$-forma exata em $\mathbb{T}^n$ para cada j inteiro tal que ja_0 é 1-forma inteira [1].

Observação 4.23. Mostraremos que $e^{i\psi_j}$ é uma função periódica no caso em que ja_0 é 1-forma inteira e assim $e^{i(\psi_j(t)+jA(t))}\mathscr{F}_x f(t, j)$ será uma $(p+1)$-forma diferencial em $\mathbb{T}^n$.

Demonstração. 1. Basta notar que $\mathbb{L}_a^{p+1} f = \mathbb{L}_a^{p+1}\mathbb{L}_a^p u = 0$.

2. Aplicando a transformada de Fourier com respeito a x em

$$\mathbb{L}_a^p u = d_t u + a \wedge \partial_x u = f$$

temos

$$d_t \mathscr{F}_x u(t, j) + jia(t) \wedge \mathscr{F}_x u(t, j) = \mathscr{F}_x f(t, j). \tag{4.24}$$

Seja j inteiro tal que ja_0 é 1-forma inteira e sejam $P, Q \in \mathbb{R}^n$ tais que $\Pi(P) = \Pi(Q)$. Considere também a curva $\tilde{\sigma}(s) = P + s(Q - P)$, com $0 \leq s \leq 1$. Como $\Pi(\tilde{\sigma}(0)) =$

[1] A função ψ_j existe pois $\Pi^*(ja_0)$ é 1-forma diferencial fechada em $\mathbb{R}^n$, ou seja, é também exata.

$\Pi(\tilde{\sigma}(1))$, temos que a curva $\sigma = \Pi \circ \tilde{\sigma}$ é 1-ciclo em $\mathbb{T}^n$. Além disso, sendo $d\psi_j = \Pi^*(ja_0)$, obtemos

$$\psi_j(P) - \psi_j(Q) = \int_{\tilde{\sigma}} \Pi^*(ja_0) = \int_{\sigma} ja_0 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Portanto, $e^{i\psi_j(t)}$ é uma função de $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, podemos ver $e^{i\psi_j(t)}$ como elemento de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Multiplicando a identidade (4.24) pela função $B \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada por $B(t) = e^{i(\psi_j(t)+jA(t))}$ obtemos

$$B(t)d_t\mathscr{F}_x u(t,j) + jiB(t)a(t) \wedge \mathscr{F}_x u(t,j) = B(t)\mathscr{F}_x f(t,j),$$

ou seja,

$$B(t)d_t\mathscr{F}_x u(t,j) + d_tB(t) \wedge \mathscr{F}_x u(t,j) = B(t)\mathscr{F}_x f(t,j),$$

pois $d_tB(t) = jiB(t)a(t)$.

Logo,

$$d_t[B(t)\mathscr{F}_x u(t,j)] = B(t)\mathscr{F}_x f(t,j),$$

de onde segue que $e^{i(\psi_j(t)+jA(t))}\mathscr{F}_x f(t,j) = B(t)\mathscr{F}_x f(t,j)$ é uma $(p+1)$-forma diferencial exata.

□

Observação 4.25. Repare que o argumento acima é análogo ao método do fator integrante usado para resolver equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. A função $B(t)$ é de certa forma o fator integrante da equação (4.24).

Observação 4.26. A proposição anterior nos fornece as condições de compatibilidade para o operador $\mathbb{L}^p_a$, isto é, restringe o conjunto das f para as quais existe a possibilidade de solução para a equação $\mathbb{L}^p_a u = f$. Isso é bastante similar ao que ocorre com o sistema de equações $\nabla u = f$ em $\mathbb{R}^3$, onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é suave e $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$. Como $\nabla \times \nabla = 0$, devemos ter que $\nabla \times f = 0$.

Definição 4.27. Considere a 1-forma diferencial fechada $a = a_0 + dA$ decomposta de acordo com a observação 4.12. Sejam $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $\mathbb{E}^{p+1}_a$ o conjunto das $(p+1)$-formas diferenciais $f \in \mathscr{D}_{p+1}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{L}^{p+1}_a f = 0$;
2. Para cada j inteiro tal que ja_0 é uma 1-forma inteira temos que $e^{i(\psi_j(t)+jA(t))}\mathscr{F}_x f(t,j)$ é $(p+1)$-forma diferencial exata em $\mathbb{T}^n$, onde $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz $d_t\psi_j = \Pi^*(ja_0)$.

Dizemos que $\mathbb{L}^p_a$ é globalmente resolúvel quando para cada $f \in \mathbb{E}^{p+1}_a$ existe $u \in \mathscr{D}'_p$ tal que $\mathbb{L}^p_a u = f$.

Em outras palavras, o espaço $\mathbb{E}^{p+1}_a$ é o conjuntos das formas diferenciais $f \in \mathscr{D}_{p+1}$ onde faz sentido procurar soluções para equação $\mathbb{L}^p_a u = f$.

Observação 4.28. Note que a definição acima independe da escolha de A e ψ_j. De fato, pela observação 4.12 temos que se $A' \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ satisfaz $a = a_0 + dA'$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $A' = A + c$ e daí segue que $e^{i(\psi_j(t)+jA'(t))}\mathscr{F}_x f(t,j)$ é exata se, e só se, $e^{i(\psi_j(t)+A(t))}\mathscr{F}_x f(t,j)$ é exata. Da mesma forma, se ψ_j' satisfaz $d_t\psi_j' = \Pi^*(ja_0)$ então ψ_j' difere de ψ_j por uma constante e segue que $e^{i(\psi_j'(t)+jA(t))}\mathscr{F}_x f(t,j)$ é exata se, e só se, $e^{i(\psi_j(t)+jA(t))}\mathscr{F}_x f(t,j)$ é exata.

O próximo resultado nos garante que a fim de mostrar que $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel podemos supor que a é uma 1-forma constante.

Proposição 4.29. Considere a 1-forma diferencial fechada $a = a_0 + dA$ decomposta de acordo com a observação 4.12. Temos que $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel se, e só se, $\mathbb{L}_{a_0}^p$ é globalmente resolúvel.

Demonstração. Considere a p-corrente $u \in \mathscr{D}_p'$. Mostremos que $e^{ikA(t)}\mathscr{F}_x u(t,k)$, com $k \in \mathbb{Z}$, é uma sequência em $s'(\mathbb{Z}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p))$.

Como estamos aplicando a transformada de Fourier a cada distribuição u_I que aparece na expressão $u(t,x) = \sum_{|I|=p} u_I(t,x)dt_I$, podemos supor que $p = 0$, isto é, mostraremos que se $u = u(t,x)$ é uma distribuição então $e^{ikA(t)}\mathscr{F}_x u(t,k)$, com $k \in \mathbb{Z}$, é uma sequência de $s'(\mathbb{Z}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n))$. Sabemos que a transformada $\mathscr{F}_x u(t,k)$ é uma sequência de $s'(\mathbb{Z}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n))$, isto é, existem $C > 0$ e N inteiro não negativo tais que

$$|\langle \mathscr{F}_x u(t,k), \phi(t)\rangle| \le C \sup_{|\beta|\le N} \|\partial^\beta \phi\|_\infty (1+|k|)^N \quad \forall (\phi,k) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)\times\mathbb{Z}.$$

Fixe $(\phi,k) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)\times\mathbb{Z}$. Aplicando a relação acima trocando ϕ por $e^{ikA(t)}\phi$ obtemos:

$$|\langle e^{ikA(t)}\mathscr{F}_x u(t,k), \phi(t)\rangle| = |\langle \mathscr{F}_x u(t,k), e^{ikA(t)}\phi(t)\rangle| \le C \sup_{|\beta|\le N} \left|\partial^\beta (e^{ikA(t)}\phi(t))\right| (1+|k|)^N.$$

Como

$$\partial^\beta (e^{ikA(t)}\phi(t)) = \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma \phi(t) (ik)^{|\beta|-|\gamma|} e^{ikA(t)} \partial^{\beta-\gamma} A(t)$$

temos que

$$\sup_{|\beta|\le N} \left\|\partial^\beta (e^{ikA(t)}\phi(t))\right\|_\infty \le C' \max_{|\beta|\le 2N} \|\partial^\beta \phi(t)\|_\infty (1+|k|)^N$$

para alguma constante C' dependente de N e A, ou seja,

$$|\langle e^{ikA(t)}\mathscr{F}_x u(t,k), \phi(t)\rangle| \le CC' \sup_{|\beta|\le 2N} \|\partial^\beta \phi\|_\infty (1+|k|)^{2N}.$$

Assim, concluímos que $e^{ikA(t)}\mathscr{F}_x u(t,k)$ define uma sequência em $s'(\mathbb{Z}, \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n, \wedge^p))$ para toda p-corrente u em $\mathscr{D}_p'$.

Agora considere a aplicação $S : \mathscr{D}'_p \to \mathscr{D}'_p$ dada por

$$S(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikA(t)} \mathscr{F}_x u(t,k) e^{ikx},$$

que está bem definida pelo argumento acima.

A inversa de S é dada por

$$S^{-1}(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikA(t)} \mathscr{F}_x u(t,k) e^{ikx}.$$

De fato, dada a p-corrente $u \in \mathscr{D}'_p$ temos

$$S \circ S^{-1}(u) = S\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikA(t)} \mathscr{F}_x u(t,k) e^{ikx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikA(t)} e^{-ikA(t)} \mathscr{F}_x u(t,k) e^{ikx} = u$$

e da mesma forma verificamos $S^{-1} \circ S(u) = u$.

Assim temos que S é automorfismo linear de $\mathscr{D}'_p$. Note também que S é automorfismo linear de $\mathscr{D}_p$.

Mostremos que $S \circ \mathbb{L}^p_a \circ S^{-1} = \mathbb{L}^p_{a_0}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}^p_a \circ S^{-1}(u) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_t + a \wedge \partial_x)[\mathscr{F}_x u(t,k) e^{-ikA(t)} e^{ikx}] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_t \mathscr{F}_x u(t,k) - ikd_tA \wedge \mathscr{F}_x u(t,k) + ika \wedge \mathscr{F}_x u(t,k)) e^{-ikA(t)} e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_t \mathscr{F}_x u(t,k) + ik(a - d_tA) \wedge \mathscr{F}_x u(t,k)) e^{-ikA(t)} e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_t \mathscr{F}_x u(t,k) + ika_0 \wedge \mathscr{F}_x u(t,k)) e^{-ikA(t)} e^{ikx} \\
&= S^{-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_t \mathscr{F}_x u(t,k) + ika_0 \wedge \mathscr{F}_x u(t,k)) e^{ikx}\right) \\
&= S^{-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_t + a_0 \wedge \partial_x)[\mathscr{F}_x u(t,k) e^{ikx}]\right) \\
&= S^{-1} \circ \mathbb{L}^p_{a_0} u,
\end{aligned}$$

de onde segue a identidade.

A identidade $S(\mathbb{E}^{p+1}_a) = \mathbb{E}^{p+1}_{a_0}$ é válida. Verifiquemos essa afirmação. Considere a primitiva ψ_j da equação $d_t \psi_j = \Pi^* ja_0$. Se $f \in \mathbb{E}^{p+1}_a$ então $e^{i\psi_j(t) + ijA(t)} \mathscr{F}_x f(t,j)$ é uma $(p+1)$-forma exata para cada j em que ja_0 é 1-forma inteira. Como $\mathscr{F}_x Sf(t,j) = e^{ijA(t)} \mathscr{F}_x f(t,j)$, concluímos que $e^{i\psi_j(t)} \mathscr{F}_x Sf(t,j)$ é uma $(p+1)$-forma exata sempre que ja_0 é 1-forma inteira. Além disso, se $\mathbb{L}^{p+1}_a f = 0$ então $\mathbb{L}^{p+1}_{a_0} Sf = S\mathbb{L}^{p+1}_a f = 0$, ou seja, $S(\mathbb{E}^{p+1}_a) \subset \mathbb{E}^{p+1}_{a_0}$. Por argumento similar temos que $S^{-1}(\mathbb{E}^{p+1}_{a_0}) \subset \mathbb{E}^{p+1}_a$.

Mostremos que se $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel então $\mathbb{L}_{a_0}^p$ é globalmente resolúvel: Se $f \in \mathbb{E}_{a_0}^{p+1}$ então temos que $S^{-1}f \in \mathbb{E}_a^{p+1}$. Existe $u \in \mathscr{D}'_p$ satisfazendo $\mathbb{L}_a^p u = S^{-1}f$, ou seja, $\mathbb{L}_{a_0}^p Su = S\mathbb{L}_a^p u = f$, finalizando o argumento. Similarmente se mostra que se $\mathbb{L}_{a_0}^p$ é globalmente resolúvel então $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel. □

Observação 4.30. Na proposição anterior fica bem claro por que precisamos supor que a é 1-forma diferencial real. Se a parte imaginaria de A fosse não nula então não poderíamos usar $|e^{ikA(t)}| = 1$ como foi usado no argumento acima ao garantirmos a convergência da série que define S.

Definição 4.31. Sejam J uma p-lista ordenada e $r \in \{1,\dots,n\}$. Escreveremos $r \in J$ para afirmarmos que r é uma das coordenadas de J. Escreveremos $r \notin J$ caso contrário. Se $r \in J$ então denotaremos por $J - r$ a $(p-1)$-lista ordenada obtida omitindo r de J. Além disso, similar ao que foi feito na definição 2.49, denotaremos por $\tau_{r,J-r}$ o número que satisfaz

$$dx_r \wedge dx_{J-r} = \tau_{r,J-r} dx_J.$$

Observação 4.32. Aplicando a transformada de Fourier na equação $\mathbb{L}_a^p u = f$ obtemos a equação

$$i\left(\sum_{1\le m\le n} [k_m + ja_m]dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(u)(k,j) = \mathscr{F}(f)(k,j)$$

e aplicando a transformada de Fourier na equação $\mathbb{L}_a^{p+1} f = 0$ obtemos

$$i\left(\sum_{1\le m\le n} [k_m + ja_m]dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(f)(k,j) = 0.$$

Nas equações acima, precisamos primeiramente explicitar os candidatos a $\mathscr{F}(u)$ em termos de $\mathscr{F}(f)$. Em outras palavras, precisamos estudar o seguinte complexo de cocadeia da Álgebra Linear: Se V é um espaço vetorial e $\xi \in V \setminus \{0\}$ então podemos definir o complexo de cocadeia

$$0 \to \wedge^0 V \xrightarrow{T} \wedge^1 V \xrightarrow{T} \wedge^2 V \xrightarrow{T} \wedge^3 V \xrightarrow{T} \cdots$$

onde $Tu = \xi \wedge u$. Note que $T^2 = 0$. Para resolvermos as equações obtidas a partir da transformada de Fourier é necessário mostrar que a sequência acima é exata, isto é, temos de mostrar que a equação $\xi \wedge v = g$ tem solução desde que $\xi \wedge g = 0$. Mais precisamente, supondo que

$$\xi = i\left(\sum_{1\le m\le n} [k_m + ja_m]dt_m\right) \neq 0 \quad \text{e} \quad g = \mathscr{F}(f)(k,j)$$

temos que v é um candidato para $\mathscr{F}(u)(k,j)$.

Além disso, é necessário saber expressões explicitas para v, pois precisamos saber qual é o crescimento da sequência candidata para ser $\mathscr{F}(u)$.

Assim, naturalmente precisamos do lema a seguir.

Lema 4.33. Seja V um espaço vetorial real ou complexo de dimensão n. Definimos $\wedge^{-1}V = \{0\}$. Sejam $\xi \in V \setminus \{0\}$, $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e $g \in \wedge^{p+1}V$.

1. Existe $v \in \wedge^p V$ satisfazendo $\xi \wedge v = g$ se, e só se, $\xi \wedge g = 0$;

2. Se $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ é base de V, $\xi \wedge g = 0$ e $r \in \{1, \dots, n\}$ é tal que $\xi_r \neq 0$ então
$$v_0 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\in J}} \tau_{r,J-r}\xi_r^{-1} g_J e_{J-r}$$
satisfaz $\xi \wedge v_0 = g$, onde $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ e $g = \sum_{|J|=p+1} g_J e_J$.

3. Seja $v_0 \in \wedge^p V$ satisfazendo $\xi \wedge v_0 = g$. Temos que as soluções de $\xi \wedge v = g$ são todas da forma
$$v = v_0 + \xi \wedge w$$
com $w \in \wedge^{p-1}V$.

Demonstração. 1. Se existe $v \in \wedge^p V$ satisfazendo $\xi \wedge v = g$ então $\xi \wedge g = \xi \wedge \xi \wedge v = 0$.

O resultado recíproco será demonstrado no item a seguir.

2. Note que $B' = \{\xi\} \cup \{e_i : i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } i \neq r\}$ é base de V.

Como $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ segue que
$$e_r = \xi_r^{-1}\xi - \sum_{\substack{1\le i\le n \\ i\neq r}} \xi_r^{-1}\xi_i e_i. \tag{4.34}$$

Sendo $g = \sum_{|J|=p+1} g_J e_J$, temos
$$g = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\in J}} g_J e_J + \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\notin J}} g_J e_J.$$

Note que utilizando a identidade (4.34) obtemos
$$\sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\in J}} g_J e_J = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\in J}} \tau_{r,J-r}\xi_r^{-1} g_J \xi \wedge e_{J-\{r\}} - \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\in J}} \sum_{\substack{1\le i\le n \\ i\neq r}} \tau_{r,J-r}\xi_r^{-1}\xi_i g_J e_i \wedge e_{J-\{r\}}$$

e, portanto, podemos definir
$$g_1 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\in J}} \tau_{r,J-r}\xi_r^{-1} g_J \xi \wedge e_{J-\{r\}}$$

e $g_2 = g - g_1$, ou seja,
$$g_2 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\notin J}} g_J e_J - \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r\in J}} \sum_{\substack{1\le i\le n \\ i\neq r}} \tau_{r,J-r}\xi_r^{-1}\xi_i g_J e_i \wedge e_{J-\{r\}}.$$

Como B' é base de V temos que os elementos e_I, onde $|I| = p+1$ e $r \notin I$, são linearmente independentes em $\wedge^{p+1}V$. O vetor g_2 é combinação linear de elementos dessa forma, isto é,

$$g_2 = \sum_{\substack{|I|=p+1 \\ r\notin I}} a_I e_I.$$

Além disso, $g_1 = \xi \wedge v_0$.

Da identidade $\xi \wedge g = 0$ obtemos $\xi \wedge g_1 + \xi \wedge g_2 = 0$. Do item anterior, como $g_1 = \xi \wedge v_0$, obtemos $\xi \wedge g_1 = 0$, ou seja, $\xi \wedge g_2 = 0$. Logo, temos

$$\sum_{\substack{|I|=p+1 \\ r\notin I}} a_I \xi \wedge e_I = 0.$$

Levando em conta que B' é base de V, temos que os elementos $\xi \wedge e_I$ são linearmente independentes, onde $|I| = p+1$ e $r \notin I$. Logo, cada coordenada a_I de g_2 é nula. Portanto, $g_2 = 0$ e consequentemente $g = \xi \wedge v_0$.

3. Seja v solução de $\xi \wedge v = g$. Mostremos que $v = v_0 + \xi \wedge w$ para algum $w \in \wedge^{p-1}V$. Se $p = 0$ então v, v_0 são escalares, ou seja, $\xi \wedge (v - v_0) = (v - v_0)\xi = 0$ implica que $v = v_0$. Logo, $v = v_0 + \xi \wedge 0$ com $0 \in \wedge^{-1}V = \{0\}$.

   Suponha $p \geq 1$.

   Seja $u = v - v_0$. Considere uma base $f_1, \ldots, f_n$ para V onde $f_1 = \xi$. Escrevendo u nessa base temos

$$u = \sum_{|J|=p} u_J f_J.$$

   Como $\xi \wedge u = f_1 \wedge u = 0$ temos que

$$\sum_{\substack{|J|=p \\ 1\notin J}} u_J f_1 \wedge f_J = 0$$

   e, consequentemente, $u_J = 0$ para todo J tal que $|J| = p$ e $1 \notin J$.

   Logo, a identidade $u = \xi \wedge w$ ocorre tomando

$$w = \sum_{\substack{|J|=p \\ 1\in J}} u_J f_{J-1} \in \wedge^{p-1}V,$$

   ou seja, $v = v_0 + \xi \wedge w$.

   O resultado recíproco é evidente. Se $v = v_0 + \xi \wedge w$ para algum $w \in \wedge^{p-1}V$ então

$$\xi \wedge v = \xi \wedge v_0 = g,$$

   pois $\xi \wedge \xi \wedge w = 0$.

□

Lema 4.35. Seja $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ um vetor de Liouville. Temos que existem uma sequência (p_m,q_m) e um número $l\in\{1,\dots,n\}$ tais que $p_m=(p_{m,1},\dots,p_{m,n})$ é vetor inteiro, q_m é uma sequência de inteiros estritamente crescente,

$$q_m\geq 2 \quad \text{e} \quad \max_{j=1,\dots,n}|p_{m,j}-a_jq_m|=|p_{m,l}-a_lq_m|\leq\frac{1}{(|p_{m,l}|+|q_m|)^m}$$

para cada m inteiro positivo.

Demonstração. Como a é de Liouville, existe uma sequência $(\hat{p}_m,\hat{q}_m)$ tal que $\hat{p}_m$ é uma sequência de vetores inteiros, $\hat{q}_m$ é uma sequência de inteiros estritamente crescente, $\hat{q}_m\geq 2$ e

$$\max_{j=1,\dots,n}\left|\frac{\hat{p}_{m,j}}{\hat{q}_m}-a_j\right|\leq\frac{1}{\hat{q}_m^m}$$

para todo m inteiro positivo. Definindo $q_m=\hat{q}_{m+1}$ e $p_m=\hat{p}_{m+1}$, concluímos que

$$\max_{j=1,\dots,n}\left|p_{m,j}-a_jq_m\right|\leq\frac{1}{q_m^m}. \tag{4.36}$$

Seja $l\in\{1,\dots,n\}$ tal que

$$I_l=\{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\max_{j=1,\dots,n}|p_{m,j}-a_jq_m|=|p_{m,l}-a_lq_m|\}$$

é um conjunto infinito. Note que tal l existe porque $\mathbb{N}\setminus\{0\}=\cup_{l=1}^n I_l$.

Existe então uma subsequência $(p'_k,q'_k)=(p_{m_k},q_{m_k})$ de (p_m,q_m) tal que

$$|p'_{k,l}-a_lq'_k|=\max_{j=1,\dots,n}|p'_{k,j}-a_jq'_k|$$

para todo k inteiro positivo.

Logo, sabendo que ${q'_k}^{m_k}\geq{q'_k}^k$ porque $m_k\geq k$, conclui-se que para todo inteiro positivo k vale

$$|p'_{k,l}-a_lq'_k|=\max_{j=1,\dots,n}|p'_{k,j}-a_jq'_k|\leq\frac{1}{{q'_k}^k}.$$

Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que existem $l\in\{1,\dots,n\}$ e uma sequência (p_m,q_m) tais que $p_m=(p_{m,1},\dots,p_{m,n})$ é uma sequência de vetores inteiros, q_m é uma sequência de inteiros estritamente crescente, $q_m\geq 2$ e

$$\max_{j=1,\dots,n}|p_{m,j}-a_jq_m|=|p_{m,l}-a_lq_m|\leq\frac{1}{q_m^m} \tag{4.37}$$

para todo m inteiro positivo.

Seja k um inteiro positivo tal que $2^k>2+|a_l|$.

Temos $|p_{m,l}-q_ma_l|\leq 1$ para todo m inteiro positivo, ou seja, temos $|p_{m,l}|\leq 1+|a_l|q_m$. Portanto, obtemos

$$|p_{m,l}|+q_m\leq 1+q_m|a_l|+q_m\leq(2+|a_l|)q_m\leq 2^kq_m,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2^k}\frac{1}{q_m} \le \frac{1}{|p_{m,l}|+q_m}. \tag{4.38}$$

Tome $\tilde{p}_m = p_{m+km}$ e $\tilde{q}_m = q_{m+km}$. Usando que $\tilde{q}_m \ge 2$ e as desigualdades (4.37) e (4.38) temos:

$$\max_{j=1,\dots,n} |\tilde{p}_{m,j} - a_j\tilde{q}_m| \le \frac{1}{q_{m+km}^{m+km}} = \frac{1}{\tilde{q}_m^{m+km}} = \left(\frac{1}{\tilde{q}_m^k}\frac{1}{\tilde{q}_m}\right)^m \le \left(\frac{1}{2^k}\frac{1}{\tilde{q}_m}\right)^m \le \frac{1}{(|\tilde{p}_{m,l}|+\tilde{q}_m)^m}.$$

Logo, $(\tilde{p}_m,\tilde{q}_m)$ é a sequência desejada. $\square$

Lema 4.39. Seja $a = \sum_{k=1}^n a_k dt_k$ uma 1-forma constante. Considere $i, j \in \{1,\dots,n\}$ e defina $b = \sum_{k=1}^n b_k dt_k$ pela fórmula $b_k = a_k$ se $k \neq i$ e $k \neq j$, $b_j = a_i$ e $b_i = a_j$, ou seja, b é obtida a partir de a permutando as coordenadas i e j. Temos que $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel se, e só se, $\mathbb{L}_b^p$ é globalmente resolúvel.

Demonstração. Considere o difeomorfismo $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ dado por $(At)_k = t_k$ se $k \notin \{i, j\}$, $(At)_i = t_j$ e $(At)_j = t_i$, ou seja, A é a aplicação que permuta as coordenadas t_i e t_j.

Note que $A^*a = b$ porque $A^*dt_k = dt_k$ se k não é i ou j e A^* permuta dt_i e dt_j. Além disso, da geometria de variedades sabemos que

$$d_t \circ A^* = A^* \circ d_t \quad \text{e} \quad b\wedge A^*u = A^*a\wedge A^*u = A^*(a\wedge u).$$

Portanto, temos que $\mathbb{L}_b^p A^* = A^*\mathbb{L}_a^p$. De fato,

$$\mathbb{L}_b^p A^*u = d_t A^*u + b\wedge\partial_x A^*u = d_t A^*u + A^*a\wedge A^*\partial_x u = A^*(d_t u + a\wedge\partial_x u) = A^*\mathbb{L}_a^p u.$$

Observe que $A^*\mathbb{E}_a^{p+1} = \mathbb{E}_b^{p+1}$.

Mostremos que se $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel então $\mathbb{L}_b^p$ também é. Se $g \in \mathbb{E}_b^{p+1}$ e $u \in \mathscr{D}'_p$ é solução de $\mathbb{L}_a^p u = (A^{-1})^*g$ então $\mathbb{L}_b^p A^*u = g$. Analogamente, $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel quando $\mathbb{L}_b^p$ é globalmente resolúvel.

$\square$

Lema 4.40. Considere o vetor de Liouville $a = (a_1,\dots,a_n)$ e considere p_m e q_m de acordo com o lema 4.35. Dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C > 0$ tal que

$$(1+|(p_m,q_m)|)^N \le C(|p_{m,l}|+q_m)^{m/2} \quad \forall m\in\mathbb{Z}.$$

Demonstração. Note que $\max_{j=1,\dots,n}|p_{m,j} - a_j q_m| \le 1$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$|p_{m,j}| \le |a_j|q_m + 1 \le q_m(1+|a_j|),$$

de onde segue que

$$|p_m| \le q_m C \quad \forall m\in\mathbb{Z}$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de m.

Assim, como $1+|(p_m,q_m)| = 1+|p_m|+q_m \leq q_m(2+C)$ e $|p_{m,l}|+q_m \geq q_m$, temos que

$$\frac{(1+|(p_m,q_m)|)^N}{(|p_{m,l}|+q_m)^{m/2}} \leq (2+C)^N q_m^{N-m/2} \to 0$$

quando $m \to \infty$, pois q_m é estritamente crescente e, consequentemente, $q_m \to \infty$. Assim, a sequência

$$\frac{(1+|(p_m,q_m)|)^N}{(|p_{m,l}|+q_m)^{m/2}}$$

é limitada. □

Teorema 4.41. Para cada $p \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ temos que $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel se, e só se, a é racional ou a é irracional e não de Liouville.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que a é 1-forma constante por causa da proposição 4.29 e da observação 4.20.

Parte 1: Primeiro mostremos que se a é racional ou irracional e não de Liouville então $\mathbb{L}_a^p$ é globalmente resolúvel.

Suponha que a é uma 1-forma constante irracional e não de Liouville.

Queremos resolver a equação $\mathbb{L}_a^p u = f$ onde $f \in \mathbb{E}_a^{p+1}$. Sabemos que $\mathbb{L}_a^p u = d_t u + a \wedge \partial_x u$ e aplicando a transformada Fourier obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(d_t u)(k,j) &= \sum_{1\leq m\leq n}\sum_{|I|=p} \mathscr{F}(\partial_{t_m} u_I)(k,j)dt_m \wedge dt_I \\
&= \sum_{1\leq m\leq n}\sum_{|I|=p} ik_m \mathscr{F}(u_I)(k,j)dt_m \wedge dt_I \\
&= i\left(\sum_{1\leq m\leq n} k_m dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(u)(k,j).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(a \wedge \partial_x u)(k,j) &= \sum_{1\leq m\leq n}\sum_{|I|=p} \mathscr{F}(\partial_x u_I)(k,j) a_m dt_m \wedge dt_I \\
&= \sum_{1\leq m\leq n}\sum_{|I|=p} ij \mathscr{F}(u_I)(k,j) a_m dt_m \wedge dt_I \\
&= i\left(\sum_{1\leq m\leq n} j a_m dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(u)(k,j).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathscr{F}(\mathbb{L}_a^p u)(k,j) = i\left(\sum_{1\leq m\leq n} [k_m + j a_m] dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(u)(k,j)$$

e consequentemente a equação $\mathbb{L}_a^p u = f$ se torna

$$i\left(\sum_{1\leq m\leq n}[k_m + ja_m]dt_m\right)\wedge \mathscr{F}(u)(k,j) = \mathscr{F}(f)(k,j). \tag{4.42}$$

Para $j=0$ temos que a 1-forma ja é inteira, ou seja, pela definição de $\mathbb{E}_a^{p+1}$ temos que a $(p+1)$-forma $\mathscr{F}_x(f)(t,0)$ é exata. Logo, $\mathscr{F}(f)(0,0)=0$. De fato, considere uma p-forma diferencial α em $\mathbb{T}^n$ satisfazendo $d_t\alpha = \mathscr{F}_x(f)(t,0)$. Repare que

$$\mathscr{F}_t(d_t\alpha)(k) = i\left(\sum_{1\leq m\leq n} k_m dt_m\right)\wedge \mathscr{F}_t(\alpha)(k)$$

e daí temos que $\mathscr{F}_t(d_t\alpha)(0)=0$.

Assim, como $\mathscr{F}(f)(0,0) = \mathscr{F}_t\{\mathscr{F}_x(f)(t,0)\}(0)$ e $\mathscr{F}_x(f)(t,0) = d_t\alpha$, concluímos que $\mathscr{F}(f)(0,0)=0$.

Com isso em mente, podemos tomar $\mathscr{F}(u)(0,0)=0$ e não contradiremos a equação (4.42).

Como $f\in\mathbb{E}_a^{p+1}$, temos $\mathbb{L}_a^{p+1}f=0$, ou seja,

$$\left(\sum_{1\leq m\leq n}[k_m + ja_m]dt_m\right)\wedge \mathscr{F}(f)(k,j) = 0. \tag{4.43}$$

Fixe $(k,j)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}$ e considere um inteiro $M\in\{1,\dots,n\}$ satisfazendo

$$|k_M + ja_M| = \max_{m=1,\dots,n}|k_m + ja_m|.$$

Como a é irracional, temos que a identidade

$$\sum_{1\leq m\leq n}[k'_m + j'a_m]dt_m = 0$$

ocorre se, e só se, $(k',j')=0$. Assim, como $(k,j)\neq 0$ segue que $k_M + ja_M\neq 0$.

Aplicando o lema 4.33 às identidades (4.42) e (4.43) obtemos que

$$\mathscr{F}(u)(k,j) = \sum_{\substack{|J|=p+1\\ M\in J}} \tau_{M,J-M}\frac{\mathscr{F}(f_J)(k,j)}{i(k_M + ja_M)}dt_{J-M}$$

satisfaz (4.42).

Assim, temos os coeficientes de Fourier para construir a solução u. Mostraremos que esses coeficientes decrescem rapidamente.

Note que

$$\max_{|I|=p}|\mathscr{F}(u_I)(k,j)| \leq \frac{1}{|k_M + ja_M|}\max_{|J|=p+1}|\mathscr{F}(f_J)(k,j)|.$$

Como a não é de Liouville temos que existe L inteiro positivo tal que

$$\max\left\{\left|a_m - \frac{p'_m}{q}\right|; m = 1, \dots, n\right\} \geq \frac{1}{q^L}$$

para cada $p' \in \mathbb{Z}^n$ e para cada inteiro $q \geq 2$.

Se $|j| \geq 2$ então

$$|k_M + ja_M| = \max_{m=1,\dots,n} |k_m + ja_m| = |j| \max_{m=1,\dots,n} \left|a_m - \frac{k_m}{-j}\right| \geq |j|^{-L+1}.$$

Como $|j| \leq 1 + |(k,j)|$ segue que $|j|^{-L+1} \geq (1 + |(k,j)|)^{-L+1}$, de onde obtemos

$$|k_M + ja_M| \geq (1 + |(k,j)|)^{-L+1}.$$

Se $j \in \{1, -1\}$ então considere a distância D entre $(a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbb{Z}^n$ com respeito a norma $|x|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Como $(a_1, \dots, a_n) \notin \mathbb{Z}^n$ segue que $D > 0$. Portanto, temos

$$|k_M + ja_M| = \max_{m=1,\dots,n} |k_m + ja_m| \geq D \geq D(1 + |(k,j)|)^{-L+1}.$$

Se $j = 0$ então $k \neq 0$, pois $(k,j) \neq 0$. Assim,

$$|k_M + ja_M| = |k_M| \geq 1 \geq (1 + |(k,j)|)^{-L+1}.$$

Considere a constante positiva $C = \min\{1, D\}$. Temos que C depende apenas de a, já que D depende apenas de a, e concluímos que a desigualdade

$$|k_M + ja_M| \geq C(1 + |(k,j)|)^{-L+1}$$

é válida para qualquer que seja o par (k,j) não nulo inicialmente fixado.

Desta forma,

$$\frac{1}{|k_M + ja_M|} \leq C^{-1}(1 + |(j,k)|)^{L-1}$$

e consequentemente

$$\max_{|I|=p} |\mathscr{F}(u_I)(k,j)| \leq C^{-1} \max_{|J|=p+1} |\mathscr{F}(f_J)(k,j)|(1 + |(j,k)|)^{L-1}. \tag{4.44}$$

A desigualdade 4.44 vale para todo $(k,j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ já que ambos lados da desigualdade se anulam quando $(k,j) = (0,0)$.

Como $f \in \mathscr{D}_{p+1}$, temos que $\mathscr{F}(f) \in s(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}, \wedge^{p+1})$. Fixando $N \in \mathbb{N}$ existe $C' > 0$ tal que

$$\max_{|J|=p+1} |\mathscr{F}(f_J)(k,j)| \leq C'(1 + |(k,j)|)^{-N-L+1}$$

para cada $(k,j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$.

Logo,

$$\max_{|I|=p} |\mathscr{F}(u_I)(k,j)| \leq C^{-1}C'(1+|(k,j)|)^{-N}$$

para cada $(k,j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$. Portanto, $\mathscr{F}(u) \in s(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}, \wedge^p)$ e consequentemente

$$u(t,x) = \sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}} \mathscr{F}(u)(k,j)e^{ikt+ijx}$$

está bem definida e pertence a $\mathscr{D}_p$. Como por construção $\mathbb{L}_a^p u = f$, finalizamos a prova para o caso em que a é irracional e não de Liouville.

Agora tratemos o caso em que a é racional. Novamente considere $f \in \mathbb{E}_a^{p+1}$. Queremos encontrar $u \in \mathscr{D}'_p$ tal que $\mathbb{L}_a^p u = f$.

Seja q o menor inteiro positivo tal que qa é uma 1-forma inteira e considere os subconjuntos dos números inteiros $A_1 = q\mathbb{Z}$ e $A_2 = \mathbb{Z} \setminus A_1$.

Considere também o espaço S_m^p, com $m = 1,2$, formado pelas p-formas $v \in \mathscr{D}_p$ tais que

$$v(t,x) = \sum_{j\in A_m} \mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{ijx}.$$

Claramente temos $\mathscr{D}_p = S_1^p \oplus S_2^p$.

Como qa é uma 1-forma inteira temos que qNa é forma inteira para cada N inteiro e daí segue que para cada j em A_1 podemos considerar $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $d\psi_j = \Pi^*(ja)$ e definir $T : S_1^p \to S_1^p$ como sendo

$$T(v) = \sum_{j\in A_1} \mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{-i\psi_j(t)}e^{ijx}.$$

Note que $e^{i\psi_j(t)}$ é função periódica pela observação 4.23.

Precisamos garantir que essa função T está bem definida. Fixe $v \in S_1^p$ e considere $b_j = 0$ se $j \in A_2$ e $b_j = \mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{-i\psi_j(t)}$ se $j \in A_1$. Queremos mostrar que a série

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j(t)e^{ijx}$$

converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1, \wedge^p)$ e para isso mostraremos que b_j é sequência em $s(\mathbb{Z}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^n, \wedge^p))$.

Fixe a p-lista ordenada I. Temos que $\mathscr{F}_x(v_I) \in s(\mathbb{Z}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^n))$ e consequentemente para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $\beta \in \mathbb{N}^n$ existe $C(k,\beta) > 0$ satisfazendo

$$\|(1+|j|)^k \partial^\beta \mathscr{F}_x(v_I)(t,j)\|_\infty \leq C(k,\beta)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Para cada $j \in A_1$ sabemos que $d_t\psi_j = \Pi^*(ja)$ e daí segue que $\partial_{t_m} e^{-i\psi_j(t)} = -ija_m e^{-i\psi_j(t)}$.

Assim temos

$$|\partial^\beta e^{-i\psi_j(t)}| \leq C_1(1+|j|)^{|\beta|} \quad \forall j \in A_1$$

para alguma constante positiva C_1 dependendo de β.

Logo, há uma constante $C_2 > 0$ dependendo somente de v_I, β, k e a tal que

$$\|(1+|j|)^k \partial_t^\beta \left(\mathscr{F}_x(v_I)(t,j)e^{-i\psi_j(t)}\right)\|_\infty \leq C_2$$

para todo $j \in A_1$.

Portanto, $b_j \in s(\mathbb{Z}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^n, \wedge^p))$ e graças à proposição 3.36 e à observação 3.38 podemos definir

$$T(v)(t,x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} b_j(t)e^{ijx}.$$

Note que T é isomorfismo linear porque tem inversa

$$T^{-1}(v) = \sum_{j \in A_1} \mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{i\psi_j(t)}e^{ijx}.$$

Além disso, temos $T^{-1} \circ \mathbb{L}_a^p \circ T = d_t$. De fato, se $v \in S_1^p$ então

$$\mathbb{L}_a^p \circ T(v) = \sum_{j \in A_1} d_t[\mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{-i\psi_j(t)}]e^{ijx} + \sum_{j \in A_1} a \wedge \mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{-i\psi_j(t)}\partial_x(e^{ijx}).$$

Por um cálculo direto obtemos

$$d_t[\mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{-i\psi_j(t)}]e^{ijx} = d_t[\mathscr{F}_x(v)(t,j)]e^{-i\psi_j(t)}e^{ijx} - a \wedge \mathscr{F}_x(v)(t,j)e^{-i\psi_j(t)}\partial_x(e^{ijx})$$

e portanto vale a identidade

$$\mathbb{L}_a^p \circ T(v) = \sum_{j \in A_1} d_t[\mathscr{F}_x(v)(t,j)]e^{-i\psi_j(t)}e^{ijx} = T \circ d_t(v),$$

de onde segue $T^{-1} \circ \mathbb{L}_a^p \circ T = d_t$.

Podemos escrever $f = f_1 + f_2$ onde

$$f_1(t,x) = \sum_{j \in A_1} \mathscr{F}_x(f)(t,j)e^{ijx} \quad \text{e} \quad f_2(t,x) = \sum_{j \in A_2} \mathscr{F}_x(f)(t,j)e^{ijx}.$$

Definindo $g_1 = T^{-1}f_1$, temos

$$\mathscr{F}_x(g_1)(t,j) = \mathscr{F}_x(f)(t,j)e^{i\psi_j(t)} \quad \forall j \in A_1.$$

Além disso, utilizando a identidade acima obtemos $\mathscr{F}(g_1)(0,j) = 0$ para $j \in A_1$ como consequência de $\mathscr{F}_x(f)(t,j)e^{i\psi_j(t)}$ ser uma $(p+1)$-forma exata. Assim, $\mathscr{F}(g_1)(0,j) = 0$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.

A fim de resolver a equação $\mathbb{L}_a^p u = f_1$, resolveremos a equação $d_t v = g_1$. Aplicando a transformada de Fourier na equação $d_t v = g_1$ obtemos:

$$i\left(\sum_{m=1}^{n} k_m dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(v)(k,j) = \mathscr{F}(g_1)(k,j).$$

Defina $\mathscr{F}(v)(0,j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Note que isso não contradiz a equação acima já que $\mathscr{F}(g_1)(0,j) = 0$ para todo j inteiro. Além disso, como $\mathbb{L}_a^{p+1}(f_1) = 0$, temos que $d_t(g_1) = 0$, pois $d_t(g_1) = T^{-1} \circ \mathbb{L}_a^{p+1} \circ T(g_1) = T^{-1} \circ \mathbb{L}_a^{p+1}(f_1) = 0$, ou seja,

$$i\left(\sum_{m=1}^{n} k_m dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(g_1)(k,j) = 0.$$

Fixe agora $k \neq 0$ e $M \in \{1,\dots,n\}$ satisfazendo $k_M \neq 0$. Pelo lema 4.33 podemos tomar

$$\mathscr{F}(v)(k,j) = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ M\in J}} \tau_{M,J-M}(ik_M)^{-1}\mathscr{F}(g_{1,J})(k,j)dt_{J-M}.$$

Como para cada $(p+1)$-lista ordenada J vale

$$|(ik_M)^{-1}\mathscr{F}(g_{1,J})(k,j)| \leq |\mathscr{F}(g_{1,J})(k,j)|,$$

já que $|k_M| \geq 1$, podemos definir

$$v(t,x) = \sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}^n\times A_1} \mathscr{F}(v)(k,j)e^{ikt}e^{ijx}$$

como elemento de $\mathscr{D}_p$ e por construção $d_t v = g_1$.

Definindo $u_1 = Tv$ obtemos $\mathbb{L}_a^p u_1 = \mathbb{L}_a^p \circ Tv = T \circ d_t v = Tg_1 = f_1$.

Agora encontremos $u_2 \in S_2^p$ tal que $\mathbb{L}_a^p u_2 = f_2$. O argumento feito aqui é precisamente o mesmo realizado no caso em que a é irracional e não de Liouville. Sem perda de generalidade podemos supor que $q > 1$, pois se $q = 1$ então $A_1 = \mathbb{Z}$ e o problema já foi resolvido.

Temos

$$i\left(\sum_{1\leq m\leq n} [k_m + ja_m]dt_m\right) \wedge \mathscr{F}(u_2)(k,j) = \mathscr{F}(f_2)(k,j)$$

e daí podemos supor que $\mathscr{F}(u_2)(k,j) = 0$ para todo $j \in A_1$.

Considere então (k,j) com $j \in A_2$. Note primeiramente que se $j \in A_2$ então ja não é forma inteira. De fato, suponha que ja é uma 1-forma inteira. Existem m,r inteiros tais que $j = qm + r$ e $0 \leq r < q$. Como ja e qma são 1-formas inteiras temos que ra também é uma 1-forma inteira. Como $0 \leq r < q$, segue que $r = 0$ e, assim, se ja é 1-forma inteira então $j \in A_1$, que é uma contradição. Assim, se $j \in A_2$ então ja não é inteira.

Como ja não é inteira, obtemos $\max_{m=1,\ldots,n}|k_m+ja_m|>0$ e consequentemente podemos tomar

$$\mathscr{F}(u_2)(k,j)=\sum_{\substack{|J|=p+1\\ M\in J}}\tau_{M,J-M}\frac{\mathscr{F}(f_{2,J})(k,j)}{i(k_M+ja_M)}dt_{J-M},$$

onde $M\in\{1,\ldots,n\}$ e satisfaz $|k_M+ja_M|=\max_{m=1,\ldots,n}|k_m+ja_m|$.

Para cada $s\in\{1,\ldots,q-1\}$ considere a distância D_s entre $(a_1,\ldots,a_n)$ e $s^{-1}\mathbb{Z}^n$ com respeito a norma $|x|_\infty=\max_{m=1,\ldots,n}|x_m|$. Como sa não é inteira para $s=1,\ldots,q-1$, temos que cada D_s é positivo. Considere o número positivo $D=\min_{s=1,\ldots,q-1}D_s$. Sendo $j\in A_2$, temos que $j=qd+s$ para algum $d\in\mathbb{Z}$ e algum $s\in\{1,\ldots,q-1\}$ e daí segue que

$$\begin{aligned}\max_{m=1,\ldots,n}|k_m+ja_m| &= \max_{m=1,\ldots,n}|k_m+dqa_m+sa_m|\\ &= s\max_{m=1,\ldots,n}\left|a_m-\frac{-k_m-dqa_m}{s}\right|\\ &\geq \max_{m=1,\ldots,n}\left|a_m-\frac{-k_m-dqa_m}{s}\right|\geq D_s\geq D.\end{aligned}$$

Logo, $|k_M+ja_M|\geq D$.

Por argumento análogo ao feito para o caso em que a é forma irracional e não de Liouville, obtemos que a função

$$u_2(t,x)=\sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}^n\times A_2}\mathscr{F}(u_2)(k,j)e^{ikt}e^{ijx}$$

está bem definida, pertence a $\mathscr{D}_p$ e satisfaz $\mathbb{L}_a^p u_2=f_2$.

Por fim, temos que $u=u_1+u_2$ pertence a $\mathscr{D}_p$ e satisfaz $\mathbb{L}_a^p u=f$.

Parte 2: Agora mostremos que se a é de Liouville então $\mathbb{L}_a^p$ não é globalmente resolúvel para cada $p\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Sendo $a=\sum_{k=1}^n a_k dt_k$ constante e de Liouville temos que $(a_1,\ldots,a_n)$ é um vetor de Liouville.

Pelo lema 4.35 temos que existem $l\in\{1,\ldots,n\}$ e uma sequência (p_m,q_m) tais que p_m é uma sequência de vetores inteiros, q_m é uma sequência de inteiros estritamente crescente, $q_m\geq 2$ e

$$|p_{m,l}-a_lq_m|=\max_{j=1,\ldots,n}|p_{m,j}-a_jq_m|\leq\frac{1}{(|p_{m,l}|+|q_m|)^m} \tag{4.45}$$

para cada m inteiro positivo.

Sem perda de generalidade, pelo lema 4.39, podemos supor que $l=1$.

Seja $\alpha_m=(|p_{m,1}|+q_m)^{m/2}$. Quando $p=0$ defina $u_m(t,x)=\alpha_m e^{i(p_mt-xq_m)}$ e note que

$$\mathbb{L}_a^0 u_m=(d_t+a\wedge\partial_x)u_m=i\alpha_m e^{i(p_mt-xq_m)}\left\{\sum_{j=1}^n[p_{m,j}-a_jq_m]dt_j\right\}.$$

Se $p\in\{1,\ldots,n-1\}$ então defina

$$u_m(t,x)=\alpha_m e^{i(p_mt-xq_m)}dt_2\wedge\cdots\wedge dt_{p+1}$$

e note que

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_a^p u_m &= (d_t + a \wedge \partial_x) u_m \\ &= i\alpha_m e^{i(p_m t - x q_m)} \left\{ \sum_{j=1}^{n} [p_{m,j} - a_j q_m] dt_j \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1} \right\}.\end{aligned}$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos a função F_j dada por

$$F_j(x,t) = \sum_{m>0} i\alpha_m [p_{m,j} - a_j q_m] e^{i(p_m t - x q_m)},$$

que está bem definida e pertence a $C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^n)$ por causa do lema 4.40 e da desigualdade

$$|i\alpha_m [p_{m,j} - a_j q_m]| \leq \frac{1}{(|p_{m,1}| + |q_m|)^{m/2}},$$

que é consequência imediata da desigualdade 4.45.

Para $p = 0$ defina

$$f(x,t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x,t) dt_j$$

e para $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ defina

$$f(x,t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x,t) dt_j \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}.$$

Logo, temos $f \in \mathscr{D}_{p+1}$. Mostremos que $f \in \mathbb{E}_a^{p+1}$.

Primeiro, mostremos que $\mathbb{L}_a^{p+1} f = 0$. Note que

$$f = \sum_{m>0} \mathbb{L}_a^p (u_m)$$

e que a convergência ocorre em $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1, \wedge^{p+1})$. Portanto,

$$\mathbb{L}_a^{p+1} f = \sum_{m>0} \mathbb{L}_a^{p+1} \mathbb{L}_a^p u_m = 0.$$

Além disso, como a é irracional temos que o único j tal que ja é uma 1-forma inteira é $j = 0$, ou seja, temos de verificar que $\mathscr{F}_x(f)(t,0)$ é uma $(p+1)$-forma exata[2], o que é verdade porque $\mathscr{F}_x(f)(t,0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^n$. De fato, basta notar que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ temos $\mathscr{F}_x(F_j)(t,0) = 0$, pois $q_m \neq 0$ para todo m inteiro positivo.

A fim de mostrarmos que $\mathbb{L}_a^p$ não é globalmente resolúvel mostraremos que para cada $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ não existe solução $v \in \mathscr{D}'_p$ para a equação

$$\mathbb{L}_a^p v = f. \tag{4.46}$$

[2] Na definição 4.27 podemos escolher $\psi_0 = 0$ e, já que a é constante, podemos escolher $A = 0$.

Suponha então que existe uma solução $v \in \mathscr{D}'_p$ para equação (4.46). Aplicando a transformada de Fourier na equação (4.46) obtemos

$$i\sum_{l=1}^{n}[k_l + ja_l]dt_l \wedge \mathscr{F}v(k,j) = \mathscr{F}f(k,j).$$

Mostraremos que não tem como $\mathscr{F}v$ ser de crescimento lento, contradizendo que v é uma p-corrente. Temos então de determinar $\mathscr{F}v(p_m,-q_m)$, ou seja, resolver a equação

$$i\sum_{l=1}^{n}[p_{m,l} - q_m a_l]dt_l \wedge \mathscr{F}v(p_m,-q_m) = \mathscr{F}f(p_m,-q_m).$$

Sendo $\mathbb{L}_a^{p+1}f = 0$ temos também a seguinte identidade:

$$i\sum_{l=1}^{n}[p_{m,l} - q_m a_l]dt_l \wedge \mathscr{F}f(p_m,-q_m) = 0.$$

Note que como $\mathscr{F}\{\mathbb{L}_a^p u_m\}(p_m,-q_m) = \mathscr{F}f(p_m,-q_m)$ temos

$$i\sum_{l=1}^{n}[p_{m,l} - q_m a_l]dt_l \wedge \mathscr{F}u_m(p_m,-q_m) = \mathscr{F}f(p_m,-q_m).$$

Pelo lema 4.33 conclui-se que $\mathscr{F}v(p_m,-q_m)$ é da forma

$$\mathscr{F}v(p_m,-q_m) = \mathscr{F}u_m(p_m,-q_m) + \left\{i\sum_{l=1}^{n}[p_{m,l} - q_m a_l]dt_l\right\} \wedge w_m, \tag{4.47}$$

onde $w_m \in \wedge^{p-1}V$ e $V = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{dt_j : j = 1,\ldots,n\}$.

Quando $p = 0$ temos $\wedge^{p-1}V = \wedge^{-1}V = \{0\}$, ou seja,

$$\mathscr{F}v(p_m,-q_m) = \mathscr{F}u_m(p_m,-q_m) = \alpha_m = (|p_{m,1}| + |q_m|)^{m/2}.$$

Pelo lema 4.40 o crescimento de $\mathscr{F}(v)(k,j)$ não é lento e, portanto, temos uma contradição. De fato, se o crescimento dessa sequência fosse lento, existiria uma constante $C > 0$ e um número inteiro positivo N tal que

$$|\mathscr{F}(v)(k,j)| \leq C(1 + |(k,j)|)^N \quad \forall (k,j) \in (k,j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$$

e daí teríamos

$$|\mathscr{F}(v)(p_m,-q_m)| \leq C(1 + |(p_m,q_m)|)^N \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

contradizendo o lema 4.40.

Tratemos o caso em que $p \in \{1,\ldots,n-1\}$. Da identidade (4.47) segue que

$$i\left\{\sum_{l=1}^{n}[p_{m,l} - a_l q_m]dt_l\right\} \wedge w_m = \mathscr{F}v(p_m,-q_m) - \mathscr{F}u_m(p_m,-q_m). \tag{4.48}$$

Considere as seguntes funções de m:

$$M = \sum_{l=1}^{n} M_l dt_l := i\sum_{l=1}^{n}[p_{m,l} - a_l q_m]dt_l,$$
$$x = \sum_{|J|=p-1} x_J dt_J := w_m,$$
$$y = \sum_{|K|=p} y_K dt_k := \mathscr{F}v(p_m, -q_m) - \mathscr{F}u_m(p_m, -q_m).$$

A equação (4.48) se torna $M \wedge x = y$.

Para atingirmos uma contradição é suficiente trabalhar com os termos envolvendo $dt_1, \ldots, dt_{p+1}$, ou seja, trabalharemos com a identidade

$$\sum_K y_K dt_K = \sum_{l=1}^{p+1} M_l dt_l \wedge \sum_J x_J dt_J$$

onde $K = (k_1, \ldots, k_p)$ é p-lista ordenada, $J = (j_1, \ldots, j_{p-1})$ é $(p-1)$-lista ordenada, $k_p \leq p+1$ e $j_{p-1} \leq p+1$.

Para simplificar mais a notação escreveremos y^i e dt^i para denotar y_I e dt_I, respectivamente, onde I é obtido de $(1, 2, \ldots, p+1)$ omitindo i, e $x^{j,k}$ e $dt^{j,k}$ para denotar y_J e dt_J, respectivamente, onde $j < k$ e J é obtido de $(1, 2, \ldots, p+1)$ omitindo j e k. Assim da equação acima obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p+1} y^i dt^i &= \sum_{l=1}^{p+1} \sum_{1\leq j<k\leq p+1} x^{j,k} M_l dt_l \wedge dt^{j,k} \\
&= \sum_{l=1}^{p+1} \sum_{l<k\leq p+1} x^{l,k} M_l dt_l \wedge dt^{l,k} + \sum_{l=1}^{p+1} \sum_{1\leq j<l} x^{j,l} M_l dt_l \wedge dt^{j,l} \\
&= \sum_{1\leq l<k\leq p+1} x^{l,k} M_l (-1)^{l-1} dt^k + \sum_{1\leq j<l\leq p+1} x^{j,l} M_l (-1)^l dt^j \\
&= \sum_{1\leq j<i\leq p+1} x^{j,i} M_j (-1)^{j-1} dt^i + \sum_{1\leq i<j\leq p+1} x^{i,j} M_j (-1)^j dt^i
\end{aligned}$$

e, portanto, podemos explicitar y^i:

$$y^i = \sum_{1\leq j<i} x^{j,i} M_j (-1)^{j-1} + \sum_{i<j\leq p+1} x^{i,j} M_j (-1)^j. \tag{4.49}$$

Note que vale a seguinte igualdade

$$\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} M_i y^i = 0. \tag{4.50}$$

De fato, fazendo uso da expressão (4.49) temos

$$\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} M_i y^i = \sum_{1\leq j<i\leq p+1} (-1)^{i+j} x^{j,i} M_i M_j + \sum_{1\leq i<j\leq p+1} (-1)^{i+j+1} x^{i,j} M_i M_j = 0.$$

Voltando às variáveis originais descritas na página 102 temos que

$$M_l = i[p_{m,l} - a_l q_m] \quad \text{e} \quad y = \mathscr{F}v(p_m, -q_m) - \mathscr{F}u_m(p_m, -q_m).$$

Como v é distribuição, temos que $\mathscr{F}(v)$ tem crescimento lento. Além disso, temos

$$\mathscr{F}u_m(p_m, -q_m) = \alpha_m dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1},$$

ou seja, para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande vale

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|\alpha_m + y_1|}{(1+|(p_m, q_m)|)^N} < \infty.$$

De forma análoga temos que as sequências $y^2, \ldots, y^{p+1}$ satisfazem

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|y_i|}{(1+|(p_m, q_m)|)^N} < \infty$$

para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Repare em dois detalhes: 1) Como a é uma 1-forma irracional, M_1 nunca se anula. 2) $|M_j| \leq |M_1|$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Pela equação (4.50) segue que

$$y^1 = \sum_{j=2}^{p+1} (-1)^j \frac{M_j}{M_1} y^j$$

de onde concluímos que para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande vale

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|y_1|}{(1+|(p_m, q_m)|)^N} < \infty.$$

Assim, como $\alpha_m = (y_1 + \alpha_m) - y_1$, temos que para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande vale

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_m}{(1+|(p_m, q_m)|)^N} \leq \sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|y_1 + \alpha_m|}{(1+|(p_m, q_m)|)^N} + \sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|y_1|}{(1+|(p_m, q_m)|)^N} < \infty,$$

contradizendo o lema 4.40.

□

Observação 4.51. Repare que na prova da primeira parte nós mostramos que existe uma solução $u \in \mathscr{D}'_p$ para $\mathbb{L}^p_a u = f$, o que mostra a resolubilidade global. Além disso, as soluções obtidas são regulares, isto é, pertencem a $\mathscr{D}_p$. Em outras palavras, a demonstração acima nos garante existência de solução regular se a é racional ou irracional não-Liouville.

CAPÍTULO

5

HIPOELITICIDADE GLOBAL

Agora investigaremos para quais 1-formas fechadas e reais a de $\mathbb{T}^n$ temos a hipoeliticidade global para o primeiro nível do complexo diferencial definido pelos operadores $\mathbb{L}_a^p$ e estudado no capítulo anterior. Nesta sessão denotaremos $\mathbb{L}_a^0$ por $\mathbb{L}_a$.

Observação 5.1. Os resultados discutidos a seguir estão na primeira parte do artigo (BERGAMASCO; CORDARO; MALAGUTTI, 1993). Mais precisamente, nesse artigo se considera uma variedade M compacta e uma 1-forma diferencial a fechada e real sobre M. O operador estudado é $\mathbb{L}_a : \mathscr{D}'(M \times \mathbb{S}^1) \to \mathscr{D}'(M \times \mathbb{S}^1, \wedge^1)$, dado por

$$\mathbb{L}_a(u) = d_t u + a \wedge \partial_x.$$

Em nossa discussão, a fim de deixá-la mais simples, nos restringiremos ao caso em que $M = \mathbb{T}^n$.

Definição 5.2. Dizemos que $\mathbb{L}_a$ é globalmente hipoelítico se

$$\mathscr{E} = \{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1) : \mathbb{L}_a(u) \in \mathscr{D}_1\} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1).$$

Em outras palavras, $\mathbb{L}_a$ é globalmente hipoelítico se para qualquer família de funções suaves $f_1, \dots, f_n$ definidas em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$ não existe uma solução $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$ para o sistema de equações

$$\partial_{t_k} u + a_k \partial_x u = f_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

De fato, basta lembrar que

$$\mathbb{L}_a u = \sum_{k=1}^{n} L_k(u) dt_k,$$

onde $L_k = \partial_{t_k} + a_k \partial_x$.

Lema 5.3. Se $u \in \mathscr{E}$ então $\mathscr{F}_x(u)(t,k) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para cada k inteiro.

Demonstração. Considere o operador $P = \sum_{j=1}^n L_j L_j$. Temos

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^n \left(\partial_{t_j} + a_j \partial_x\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\partial_{t_j}^2 + 2a_j\partial_{t_j}\partial_x + a_j^2\partial_x^2 + (\partial_{t_j}a_j)\partial_x\right). \end{aligned}$$

Seja $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{F}_x u(t,k)e^{ikx}$ um elemento de $\mathscr{E}$.

Apliquemos P à série de Fourier de u. Denotemos $\mathscr{F}_x(u)(t,k)$ por $u_k(t)$.

$$\begin{aligned} Pu &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^n \left(\partial_{t_j}^2 u_k(t) + 2a_jik\partial_{t_j}u_k(t) - k^2a_j^2 + ik(\partial_{t_j}a_j)u_k\right)e^{ikx} = \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\Delta u_k + \left[\sum_{j=1}^n 2a_jik\partial_{t_j}u_k(t) + ik(\partial_{t_j}a_j)u_k - k^2a_j^2\right]\right)e^{ikx}. \end{aligned}$$

Logo, para cada k inteiro temos

$$\Delta u_k + \left[\sum_{j=1}^n 2a_jik\partial_{t_j}u_k(t) + ik(\partial_{t_j}a_j)u_k\right] = \mathscr{F}_x(P(u))(t,k) + \sum_{j=1}^n k^2a_j^2.$$

Note que o operador

$$\Delta + \left[\sum_{j=1}^n 2a_jik\partial_{t_j} + ik(\partial_{t_j}a_j)\right]$$

é elítico e consequentemente hipoelítico, ou seja, a função u_k é suave para cada k inteiro, pois $\mathscr{F}_x(P(u))(t,k)$ é suave como consequência da suavidade de $P(u)$. $\square$

Lema 5.4. Seja $u \in \mathscr{E}$. Se para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $C > 0$ tal que

$$\|(1+|j|)^N \mathscr{F}_x(u)(t,j)\|_\infty \leq C \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

então $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$.

Demonstração. Precisamos mostrar que para cada $N \in \mathbb{N}$ e cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe $C(N,\alpha) > 0$ tal que

$$\|(1+|j|)^N \partial^\alpha \mathscr{F}_x(u)(t,j)\|_\infty \leq C(N,\alpha) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{5.5}$$

ou seja, temos de mostrar que $\mathscr{F}_x(u) \in s(\mathbb{Z}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^n))$ e consequentemente teremos que u é função suave.

Como $f := \mathbb{L}_a u$ é uma 1-forma diferencial em $\mathscr{D}_1$ temos que

$$\partial_{t_k} u + a_k \partial_x u = f_k,$$

onde $f_1, \ldots, f_n$ são funções suaves em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$ e $f = \sum_{k=1}^n f_k dt_k$.

Aplicando a transformada de Fourier com respeito à variável x na equação acima obtemos

$$\partial_{t_k} \mathscr{F}_x(u)(t,j) = \mathscr{F}_x(f_k)(t,j) - a_k ij \mathscr{F}_x(u)(t,j). \tag{5.6}$$

Agora provemos a estimativa (5.5). Faremos isso por indução sobre o tamanho do multi-índice α. Se $|\alpha| = 0$ então o resultado é válido por hipótese.

Considere o número natural m e suponha que para cada $N \in \mathbb{N}$ e cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq m$ tenhamos

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|(1+|j|)^N \partial^\alpha \mathscr{F}_x(u)(t,j)\|_\infty < \infty.$$

Seja $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\beta| = m+1$. Então $\partial^\beta = \partial_{t_k} \partial^\alpha$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$ e algum $\alpha \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo $|\alpha| = m$. Logo, aplicando ∂^α na equação (5.6) obtemos

$$\partial^\beta \mathscr{F}_x(u)(t,j) = \partial^\alpha \mathscr{F}_x(f_k)(t,j) - ij \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^{\alpha-\gamma} a_k(t) \partial^\gamma \mathscr{F}_x(u)(t,j).$$

Considere $N \in \mathbb{N}$. Levando a identidade acima em consideração, temos que para cada j inteiro vale

$$\|(1+|j|)^N \partial^\beta \mathscr{F}_x(u)(t,j)\|_\infty \leq$$
$$\|(1+|j|)^N \partial^\alpha \mathscr{F}_x(f_k)(t,j)\|_\infty + \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \|\partial^{\alpha-\gamma} a_k\|_\infty \|(1+|j|)^{N+1} \partial^\gamma \mathscr{F}_x(u)(t,j)\|_\infty.$$

Aplicando nossa hipótese de indução e sabendo que $\mathscr{F}_x(f_k) \in s(\mathbb{Z}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^n))$, temos que

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|(1+|j|)^N \partial^\beta \mathscr{F}_x(u)(t,j)\|_\infty < \infty,$$

finalizando a prova. □

Lema 5.7. A seguinte desigualdade é válida:

$$|\mathrm{sen}(x)| \geq 2\sqrt{2}\pi^{-1}|x| \quad \forall x \in (-\pi/4, \pi/4).$$

Demonstração. Como a segunda derivada de $\mathrm{sen}(x)$ é uma função não positiva no intervalo $0 \leq x \leq \pi/4$, temos que o conjunto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/4, y \leq \mathrm{sen}(x)\}$ é convexo e daí segue que o segmento de reta ligando $(0,0)$ e $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$ está contido em Ω, ou seja, $\mathrm{sen}(x) \geq 2\sqrt{2}\pi^{-1}x$.

Para $-\pi/4 \leq x \leq 0$ usamos que $\mathrm{sen}(-x) \geq 2\sqrt{2}\pi^{-1}(-x)$. □

Teorema 5.8. Seja a uma 1-forma diferencial fechada. Temos que $\mathbb{L}_a$ é globalmente hipoelítico se, e só se, a é irracional não Liouville.

Demonstração. Analisemos o caso em que a é racional. Seja q um número inteiro positivo tal que qa é forma inteira. Como a 1-forma $\Pi^*(qa)$ está definida em $\mathbb{R}^n$ e é fechada sabemos que existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_t\psi = \Pi^*(qa)$ e como qa é 1-forma inteira temos que $e^{i\psi}$ é uma função periódica. Podemos assim definir a distribuição

$$u(t,x) = \sum_{N=1}^{\infty} e^{iN\psi(t)} e^{-iqNx}.$$

Mostremos que de fato a expressão acima define uma distribuição. Repare que

$$\partial_{t_j} e^{iN\psi(t)} = e^{iN\psi(t)} iN\partial_{t_j}\psi(t) = iNqa_j e^{iN\psi(t)}$$

e daí segue que para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ existe uma constante $B > 0$, que não depende de N, tal que

$$\left\| \partial^\alpha e^{iN\psi(t)} \right\|_\infty \leq B(1+Nq)^{|\alpha|}.$$

Portanto, a seguinte desigualdade é válida

$$\left| \langle \partial^\alpha e^{iN\psi(t)}, \phi(t) \rangle \right| \leq (2\pi)^n B(1+|qN|)^{|\alpha|} \|\phi\|_\infty \quad \forall (N,\phi) \in \mathbb{N} \times C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Da desigualdade acima segue que a distribuição u está bem definida.

Essa distribuição não é suave. De fato, suponha que u é suave. Temos que $\mathscr{F}_x u(t,k)$ é uma sequência de decrescimento rápido e assim existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{T}^n} |(1+|qN|) e^{iN\psi(t)}| \leq C$$

para cada inteiro N positivo, ou seja, vale a desigualdade $1 + |qN| \leq C$, o que é uma contradição porque podemos tomar N arbitrariamente grande. Logo, u não é suave.

No entanto, como

$$d_t e^{iN\psi(t)} = iqNe^{iN\psi(t)} a \quad \text{e} \quad \partial_x e^{-iqNx} = -iqNe^{-iqNx}$$

temos que $\mathbb{L}_a u = d_t u + au = 0$ e consequentemente $\mathbb{L}_a$ não é globalmente hipoelítico.

Agora analisemos o caso em que a é forma de Liouville. Existe uma sequência (a_j, q_j) onde a_j é uma sequência de 1-formas inteiras, q_j é uma sequência de números naturais estritamente crescente, $q_j \geq 2$ e $q_j^j(q_j^{-1}a_j - a)$ é uma sequência em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^1)$ limitada. Em particular, a sequência a_j/q_j é limitada.

Considere $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $d_t\psi_j = \Pi^*(a_j)$. Como a_j é uma 1-forma inteira temos que $e^{i\psi_j(t)}$ é uma função periódica.

De forma similar ao que fizemos anteriormente defina a distribuição

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i\psi_j(t)} e^{-iq_j x}.$$

Mostremos que essa distribuição está bem definida. Repare que

$$d_t e^{i\psi_j(t)} = i a_j(t) e^{i\psi_j(t)} = i\frac{a_j}{q_j} e^{i\psi_j(t)} q_j.$$

Como a_j/q_j é limitado em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ segue que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe uma constante $B' > 0$, que não depende de q_j, tal que

$$\left\| \partial^\alpha e^{i\psi_j(t)} \right\|_\infty = B'(1+|q_j|)^{|\alpha|} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Portanto, obtemos a desigualdade

$$\left| \langle \partial^\alpha e^{i\psi_j(t)}, \phi(t) \rangle \right| \leq (2\pi)^n B'(1+|q_j|)^{|\alpha|} \|\phi\|_\infty \quad \forall (j,\phi) \in \mathbb{N} \times C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

e assim concluímos que a distribuição u está bem definida.

Primeiro note que u não é suave. A prova é bem similar à feita para o caso em que a é racional. Suponha que u é suave e concluamos que q_j é limitada, o que contradiz que q_j é sequência estritamente crescente. De fato, basta notar que existe $C > 0$ tal que

$$\|(1+q_j) e^{i\psi_j(t)}\|_\infty \leq C$$

para cada j inteiro positivo, pois $\mathscr{F}_x u(t, -q_j) = e^{i\psi_j(t)}$ e $\mathscr{F}_x u$ é uma sequência de decrescimento rápido, ou seja, $|q_j| \leq C$ para todo j, o que é falso.

Agora mostremos que $\mathbb{L}_a u$ é uma 1-forma diferencial e concluamos que $\mathbb{L}_a$ não é globalmente hipoelítico. Note que

$$\mathbb{L}_a u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} i q_j (q_j^{-1} a_j - a) e^{i\psi_j(t)} e^{-iq_j x},$$

ou seja, se $b_k(t) = \mathscr{F}_x \mathbb{L}_a u(t,k)$ então b_k é nulo quando $k \neq -q_j$ e

$$b_{-q_j}(t) = i q_j (q_j^{-1} a_j - a) e^{i\psi_j(t)}.$$

Temos de mostrar que b_k é uma sequência de decrescimento rápido, ou seja, é preciso mostrar que para cada $d \in \mathbb{N}$ a sequência

$$(1+|q_j|)^d [i q_j (q_j^{-1} a_j - a) e^{i\psi_j(t)}]$$

é limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^1)$. A razão disso ser verdade é a seguinte, note que a expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{(1+|q_j|)^d}{q_j^{j-2}} \left[i q_j^j (q_j^{-1} a_j - a) q_j^{-1} e^{i\psi_j(t)} \right].$$

A sequência $(1+|q_j|)^d q_j^{-j+2}$ é limitada em $\mathbb{R}$, a sequência $iq_j^j(q_j^{-1}a_j - a)$ é limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^1)$ e a sequência $q_j^{-1}e^{i\psi_j(t)}$ é limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, e assim a sequência b_{-q_j}, que é o produto dessas três sequencias, é limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^1)$. Para chegar nessa conclusão é necessário reparar que o produto de duas sequências limitadas de funções suaves é uma sequência limitada como consequência da regra do produto (lei de Leibniz).

Logo, construímos uma distribuição u não suave tal que $\mathbb{L}_a u$ é uma 1-forma diferencial, ou seja, $\mathbb{L}_a$ não é globalmente hipoelítico.

Nos resta provar que $\mathbb{L}_a$ é globalmente hipoelítico no caso em que a é irracional e não de Liouville. Considere então $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$ tal que $f = \mathbb{L}_a u$ é uma 1-forma diferencial.

Sejam $v_j(t) = \mathscr{F}_x u(t,j)$ e $g_j(t) = \mathscr{F}_x f(t,j)$. Observe que pelo lema 5.3 a distribuição v_j é uma função suave.

Mostraremos que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S})$ fazendo uso do lema 5.4. Fixe o número natural N. Precisamos encontrar uma constante C que satisfaça a hipótese do lema.

Aplicando a transformada $\mathscr{F}_x$ à equação $\mathbb{L}_a u(t,x) = f(t,x)$ temos

$$d_t v_j + ijv_j a = g_j. \tag{5.9}$$

Para cada j podemos supor que a função v_j e a 1-forma g_j estão definidas em $\mathbb{R}^n$ e são periódicas. Também suporemos que a é uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ e portanto a é periódica.

Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_t\psi = a$ e note que $d_t e^{ij\psi(t)} = ije^{ij\psi(t)}a$, ou seja, podemos usar a exponencial $e^{ij\psi(t)}$ como fator integrante em (5.9). Temos

$$d_t\left(e^{ij\psi(t)}v_j\right) = e^{ij\psi(t)}d_t v_j + ijv_j e^{ij\psi(t)}a = e^{ij\psi(t)}g_j$$

e daí segue que

$$e^{ij\psi(t')}v_j(t') = e^{ij\psi(t)}v_j(t) + \int_t^{t'} e^{ij\psi(s)}g_j(s). \tag{5.10}$$

Note que essa integral só está bem definida porque a 1-forma $e^{ij\psi}g_j$ é fechada.

Considere as curvas $\sigma_k(s) = se_k + 2\pi\mathbb{Z}^n$ com s variando no intervalo $[0,2\pi]$. Podemos definir a função I descrita em (4.18) levando tais curvas em consideração. Sabemos que $I(a)$ é irracional quando a é irracional. Como $I(a)$ não é vetor de Liouville, existem $C>0$ e L, inteiro positivo, tais que

$$\max_{k=1,\ldots,n}\left|[I(a)]_k - \frac{p'_k}{q}\right| \geq \frac{C}{|q|^L} \tag{5.11}$$

para todo $q \geq 2$ e todo vetor inteiro p'. Como podemos trocar p' por $-p'$ segue que o resultado vale para todo q inteiro satisfazendo $|q| \geq 2$ e todo vetor inteiro p'. Se $q = 1$ ou -1 então a desigualdade continua verdadeira se trocarmos a constante C acima por outra suficientemente grande, pois $I(a)$ é vetor irracional e, consequentemente, sua distância a $\mathbb{Z}^n$ é positiva. Assim, podemos supor que a desigualdade acima vale para todo $q \neq 0$ e todo vetor inteiro p'.

Fixe j inteiro não nulo e $t \in \mathbb{R}^n$. Podemos reescrever a equação (5.10) para o ponto $t' = t + 2\pi e_k$ como

$$(e^{-ij[\psi(t+2\pi e_k)-\psi(t)]} - 1)v_j(t) = -e^{-ij\psi(t+2\pi e_k)} \int_t^{t+2\pi e_k} e^{ij\psi(s)} g_j(s),$$

onde estamos usando que v_j é função periódica.

Usando as notações

$$z_{k,j}(t) = e^{-ij[\psi(t+2\pi e_k)-\psi(t)]} \quad \text{e} \quad b_{k,j}(t) = -e^{-ij\psi(t+2\pi e_k)} \int_t^{t+2\pi e_k} e^{ij\psi(s)} g_j(s)$$

podemos reescrever a equação acima como sendo

$$(z_{k,j}(t) - 1)v_j(t) = b_{k,j}(t). \tag{5.12}$$

Temos de estudar o comportamento do fator $z_{k,j}(t) - 1$ para podermos isolar $v_j(t)$ na equação acima.

Repare que $z_{k,j}(t)$ pertence ao círculo unitário. Suponha que para algum k' tenhamos $z_{k',j}(t)$ satisfazendo $\mathrm{Re}(z_{k',j}(t)) \leq 0$, isto é, $z_{k',j}(t)$ está no segundo ou no terceiro quadrante do plano complexo. Então temos que $|z_{k',j}(t) - 1| \geq \sqrt{2}$. Assim da equação (5.12) obtemos

$$|v_j(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|b_{k',j}(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \max_{k=1,\ldots,n} |b_{k,j}(t)|.$$

Agora suponha que para cada ponto $z_{k,j}(t)$ tenhamos $\mathrm{Re}(z_{k,j}(t)) > 0$, isto é, $z_{k,j}(t)$ está no primeiro ou no quarto quadrante.

Para cada k existe $r_k \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $z_{k,j} = e^{ir_k}$. Utilizando as fórmulas do arco duplo da trigonometria temos

$$e^{ir_k} - 1 = \cos(r_k) - 1 + i\mathrm{sen}(r_k) = 2\mathrm{sen}(r_k/2)[-\mathrm{sen}(r_k/2) + i\cos(r_k/2)]$$

e daí concluímos que $|e^{ir_k} - 1| = 2|\mathrm{sen}(r_k/2)|$.

Pelo lema 5.7 concluímos que $|e^{ir_k} - 1| \geq 2\sqrt{2}\pi^{-1}|r_k|$.

Para cada k existe um único p_k inteiro tal que $-j[\psi(t+2\pi e_k) - \psi(t)] = 2\pi p_k + r_k$. Logo temos:

$$|z_{k,j}(t) - 1| \geq 2\sqrt{2}\pi^{-1}| - j[\psi(t+2\pi e_k) - \psi(t)] - 2\pi p_k|.$$

Agora utilizando a desigualdade (5.11) temos

$$\begin{aligned}\max_{k=1,\ldots,n} |z_{k,j}(t) - 1| &\geq 2\sqrt{2}\pi^{-1} \max_{k=1,\ldots,n} |j[\psi(t+2\pi e_k) - \psi(t)] + 2\pi p_k| \\ &= 4\sqrt{2}|j| \max_{k=1,\ldots,n} \left| I(a)_k + \frac{p_k}{j} \right| \geq \frac{4\sqrt{2}C}{|j|^{L-1}}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde usamos que $I(a)_k = (2\pi)^{-1}(\psi(t+2\pi e_k) - \psi(t))$.

Da equação (5.12) temos que

$$\max_{k=1,\dots,n} |z_{k,j}(t) - 1||v_j(t)| = \max_{k=1,\dots,n} |b_{k,j}(t)|$$

e fazendo uso da desigualdade (5.13) concluímos que

$$|v_j(t)| \leq \frac{|j|^{L-1}}{4\sqrt{2}C} \max_{k=1,\dots,n} |b_{k,j}(t)|.$$

Logo, existe uma constante $C' > 0$ satisfazendo

$$|v_j(t)| \leq C'(1+|j|)^{L-1} \max_{k=1,\dots,n} |b_{k,j}(t)| \quad \forall (j,t) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n.$$

Como a sequência $(1+|j|)^{N+L-1} g_j(t)$ é limitada em $C^\infty(\mathbb{T}^n, \wedge^1)$, pois g_j é uma sequência de $s(\mathbb{Z}, \mathscr{D}(\mathbb{T}^n, \wedge^1))$, temos que $(1+|j|)^{N+L-1} \max_{k=1,\dots,n} |b_{k,j}(t)|$ é uma sequência limitada em $C(\mathbb{R}^n)$.

Assim

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in\mathbb{T}^n} (1+|j|)^N |v_j(t)| < \infty$$

e pelo lema 5.4 concluímos que u é suave. $\square$

REFERÊNCIAS

BERGAMASCO, A. P. Remarks about global analytic hypoellipticity. **Transactions of the American Mathematical Society**, JSTOR, p. 4113–4126, 1999. Citado na página 81.

BERGAMASCO, A. P.; CORDARO, P. D.; MALAGUTTI, P. A. Globally hypoelliptic systems of vector fields. **Journal of functional analysis**, v. 114, n. 2, p. 267–285, 1993. Citado nas páginas 18 e 105.

BERGAMASCO, A. P.; PETRONILHO, G. Global solvability of a class of involutive systems. **Journal of mathematical analysis and applications**, v. 233, n. 1, p. 314–327, 1999. Citado nas páginas 17 e 76.

DEMAILLY, J.-P. **Complex analytic and differential geometry**. [s.n.], 2003. Disponível em: <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>. Acesso em: 18/05/2017. Citado na página 42.

FOLLAND, G. B. **Fourier Analysis And Its Applications**. [S.l.]: The Wadsworth & Brooks, EUA, 1992. Citado na página 51.

____. **Real analysis: modern techniques and their applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, EUA, 1999. Citado nas páginas 21 e 51.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Fourier Analysis: An Introduction**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. Citado na página 51.

TREVES, F. **Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels**. [S.l.]: Academic Press, New York, London, 1967. Citado na página 21.

ZANI, S. **Hipoeliticidade Global para Operadores de Segunda Ordem**. Dissertação (Mestrado) — ICMC-USP, 1988. Citado na página 51.

ÍNDICE

ICMC USP
SÃO CARLOS