Diferentes noções de diferenciabilidade para funções definidas na esfera

Mário Henrique de Castro

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 15 de Janeiro de 2007

Assinatura: ______________________

Diferentes noções de diferenciabilidade para funções definidas na esfera

Mário Henrique de Castro

Orientador: ***Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
Março/2007

Aos meus pais,
Carlos e Madalena,
com muito amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e pelas bençãos de todos os dias.

Ao Professor Valdir Antonio Menegatto, pela atenção, dedicação e paciência dedicados na orientação deste trabalho.

Aos meus pais, Carlos e Madalena, pelo amor incondicional.

Aos meus irmãos, Fernando e Aline, à minha cunhada, Ana Paula, e a todos os meus familiares pelo amor e pela amizade.

Aos meus amigos Aldício e Marcão, por me suportarem durante estes dois anos e à Dona Aparecida, por me acolher em sua casa.

Aos meus amigos do ICMC, Ana Carla, Hartmann e Márcio, e a todos os outros colegas do instituto.

Aos Professores Sérgio Luís Zani, Ana Paula Peron e Claudemir Pinheiro de Oliveira, pela ajuda no decorrer do trabalho. Aos professores Alfredo Tadeu Cousin e Carla Montorfano, pela orientação durante a graduação. E a todos os professores, das diversas instituições por onde passei, que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação.

Aos funcionários do ICMC e a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq, pela ajuda financeira.

Muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, estudamos diferentes noções de diferenciabilidade para funções definidas na esfera unitária S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Em relação à derivada usual, encontramos condições necessárias e/ou suficientes para que uma função seja diferenciável até uma ordem fixada. Para as outras duas, a derivada forte de Laplace-Beltrami e a derivada fraca, apresentamos algumas propriedades básicas e procuramos condições que garantam a equivalência destas com a diferenciabilidade usual.

Abstract

In this work we study different notions of differentiability for functions defined on the unit sphere S^{n-1} of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. With respect to the usual derivative, we find necessary and/or sufficient conditions in order that a function be differentiable up to a fixed order. As for the other two, the strong Laplace-Beltrami derivative and the weak derivative, we present some basic properties about them and search for conditions that guarantee the equivalence of them with the previous one.

Sumário

Introdução

Uma das propostas deste trabalho é reunir em um só texto boa parte dos resultados clássicos da Análise Harmônica e, mais especificamente, da Análise na Esfera, que são úteis em problemas oriundos da Teoria da Aproximação. Enunciaremos alguns resultados mais importantes e provaremos outros que não são muito conhecidos, sem deixar dúvidas quanto à validade lógica da teoria. Tentaremos deixar claro qual é a função de cada um destes resultados e, ao mesmo tempo, desenvolver um texto de fácil compreensão e que possa servir de ponto de partida para quem deseja iniciar estudos em algum assunto relativo ao contexto em foco.

A outra proposta, na verdade aquela realmente apresentada como proposta de mestrado, é estudar diferentes noções de diferenciabilidade de funções reais ou complexas definidas na esfera. A importância do estudo de tais conceitos tem origem em problemas de aproximação de funções definidas em esferas reais por funções polinomiais ou suaves. Tais problemas dependem diretamente do grau de suavidade das funções envolvidas e, conseqüentemente, módulos de suavidade convenientes têm que ser empregados. A definição de tais módulos requer o estudo de vários operadores definidos em espaços de funções compostos quase que exclusivamente por funções suaves. Nosso objetivo, então, é estudar alguns destes espaços, buscando possíveis conexões entre eles e propriedades envolvendo seus elementos.

No Capítulo 1, definimos alguns conceitos e ferramentas básicas utilizadas no trabalho, bem como as versões de resultados clássicos da Análise Matemática, alguns já adaptados ao contexto do trabalho. Nossa intenção é disponibilizar no texto o maior número possível de ferramentas, dando mais comodidade ao leitor, que não terá muita necessidade de consultar outras referências. Neste ponto, não demonstramos a maior parte dos resultados devido ao grande número de referências disponíveis. No entanto, nestes casos, indicamos a origem de cada um deles.

No Capítulo 2, introduzimos a noção usual de diferenciabilidade de funções definidas em esferas. Conceitos como os de homogeneidade e harmonicidade de funções também são explicados em detalhes. Já na primeira seção, definimos o importante operador de Laplace-Beltrami, cujas propriedades surgirão naturalmente no decorrer do trabalho. Na segunda seção, introduzimos alguns espaços de polinômios que nos auxiliam na definição dos harmônicos esféricos e no estudo de suas propriedades. Prosseguimos com o estudo de funções de quadrado Lebesgue-integrável e de expansões de Fourier de funções Lebesgue-integráveis. Antes de abordar o problema principal do capítulo, ainda apresentamos propriedades dos polinômios de Legendre, introduzimos os núcleos de reprodução dos espaços de harmônicos esféricos e enunciamos e provamos a conhecida

Fórmula da Adição. A seguir, apresentamos estimativas convenientes para os harmônicos esféricos e suas derivadas e, finalmente, resultados contendo condições necessárias e/ou suficientes sobre os coeficientes de Fourier de funções Lebesgue-integráveis, para que estas possuam um grau de suavidade pré-determinado.

O Capítulo 3 é destinado ao estudo de diferentes operadores que atuam em espaços de funções definidas em esferas. Estes operadores são de suma importância na definição do conceito de diferenciabilidade forte de Laplace-Beltrami. Na primeira seção, enunciamos e provamos o conhecido Teorema de Funk-Hecke, o qual relaciona integração na esfera com integração na reta. A seguir, mostramos a existência de sistemas fundamentais na esfera. Nas seções seguintes, introduzimos os operadores projeção, convolução, translação e diferença esféricas. Por fim, definimos a derivada forte de Laplace-Beltrami, provamos algumas de suas propriedades e a comparamos com o conceito de diferenciabilidade do capítulo anterior utilizando, para isto, espaços do tipo Sobolev.

O quarto e último capítulo é destinado ao estudo da diferenciabilidade fraca. Começamos definindo a derivada fraca, seguimos provando algumas de suas propriedades e apresentando ferramentas necessárias. Fazemos uso do conceito de aproximação da identidade e introduzimos o núcleo de Jackson generalizado apresentando estimativas convenientes. Uma das seções é destinada ao estudo da derivada da translação esférica com relação ao parâmetro. Finalizamos com alguns lemas técnicos e um resultado apresentando relações entre este conceito de diferenciabilidade e o apresentado no Capítulo 2.

As últimas páginas contêm um índice com as notações utilizadas no texto e um índice remissivo, os quais esperamos sejam úteis para o leitor.

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho, $\mathbb{R}^n$ denotará o espaço euclidiano n-dimensional e a letra U representará um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A letra Y denotará os espaços $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (números complexos). Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $x \cdot y$ o produto escalar usual de x por y e por $\|x\|$, a norma euclidiana induzida. A origem de $\mathbb{R}^n$ será representada por 0. Denotaremos o conjunto das funções reais ou complexas que são contínuas em U por $C(U, Y)$ ou, simplesmente, $C(U)$ quando o contexto permitir. Se U é aberto e r é um inteiro não-negativo, denotaremos por $C^r(U)$ o conjunto de todas as funções definidas em U que são r vezes continuamente diferenciáveis. Aqui, estamos identificando $C^0(U)$ com $C(U)$ e usando a notação $C^\infty(U) = \cap_{r\geq 0} C^r(U)$.

Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n := \{0, 1, \dots\}^n$, definimos o operador diferencial D^α por

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\,, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Representaremos por Δ o operador de Laplace em $\mathbb{R}^n$ e por ∇ o vetor gradiente de uma função diferenciável em n variáveis. Em símbolos,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \qquad \text{e} \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

A notação $L^p(U, Y)$ (ou $L^p(U)$), $1 \leq p < \infty$, será usada para representar o espaço das funções $f\colon U \to Y$ tais que

$$\int_U |f(x)|^p \, dx < \infty,$$

onde $dx := dx_1 \cdots dx_n$ é o elemento de volume correspondente à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. O leitor deve lembrar que funções que coincidem quase sempre são identificadas neste espaço. Logo, algumas igualdades deste trabalho podem ser interpretadas como válidas a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Quando $n \geq 2$, usaremos a notação S^{n-1} para representar a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$:

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

O primeiro resultado do trabalho indica como integrar uma função $f : S^{n-1} \to Y$ em um anel n-dimensional, via coordenadas polares.

Teorema 1.0.1. [9, p.78] *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\omega) r^{n-1} d\sigma_n(\omega)\,dr,$$

onde σ_n *é a restrição da medida de Lebesgue à* S^{n-1}.

Em todo o trabalho usaremos a seguinte notação conveniente

$$|S^{n-1}| := \int_{S^{n-1}} d\sigma_n.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, um ponto $\omega \in S^{n-1}$ é representável na forma

$$\omega = t\,e_n + \sqrt{1-t^2}\,\omega_{(n-1)}, \quad t := \omega \cdot e_n, \tag{1.1}$$

onde $\omega_{(n-1)}$ é um ponto do equador de S^{n-1} pertencente ao subespaço $(n-1)$-dimensional de $\mathbb{R}^n$ gerado por $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Observe que tal equador de S^{n-1} é identificável com S^{n-2}. Em particular, se escrevemos $\omega_{(n-1)} := (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 0)$ como $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \in S^{n-2}$, obtemos a relação, conhecida por Fórmula de Catalan ([12], [22, p.16], [27, p.13]),

$$d\sigma_n(\omega) = (1-t^2)^{(n-3)/2} dt\, d\sigma_{n-1}(\omega_{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Quando o contexto permitir, escreveremos simplesmente σ para denotar a medida σ_n.

O próximo resultado relaciona integração no interior de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com a integração sobre sua fronteira.

Teorema 1.0.2. (Teorema de Green) [13, p.537-538] *Sejam* U *um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* f *e* g *funções de classe* C^2 *em* U. *Se* $D \subset U$ *é um domínio compacto e sua fronteira* ∂D *é regular, então valem as fórmulas*

$$\int_D [f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)]\,dx = \int_{\partial B} f(x)\frac{\partial g}{\partial \nu}(x) - g\frac{\partial f}{\partial \nu}(x)\,dx$$

e

$$\int_D [f(x)\Delta g(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)]\,dx = \int_{\partial D} f(x)\frac{\partial g}{\partial \nu}(x)\,dx,$$

onde $\partial/\partial\nu$ *é a derivada direcional na direção da normal exterior à fronteira de* D.

Outros resultados conhecidos que usaremos são os seguintes.

Teorema 1.0.3. (Teorema de Fubini) [9, p.67] *Sejam* $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(\mathbb{Y}, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços com medidas sigma-finitas. Se* $f \in L^1(\mu \times \nu)$, *então* $f_x \in L^1(\nu)$ *para quase todo* $x \in \mathbb{X}$, $f^y \in L^1(\mu)$ *para quase todo* $y \in \mathbb{Y}$, *as funções definidas quase sempre* $g(x) = \int f_x\,d\nu$ *e* $h(y) = \int f_y\,d\mu$ *estão, respectivamente, em* $L^1(\mu)$ *e* $L^1(\nu)$ *e*

$$\int f\,d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int \left[\int f(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

Teorema 1.0.4. [9, p.51] *Sejam* $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* L^+ *o espaço de todas as funções mensuráveis de* $\mathbb{X}$ *em* $[0, \infty]$. *Se* $f \in L^+$, *então* $\int_{\mathbb{X}} f d\mu = 0$ *se, e somente se,* $f = 0$ *q.s..*

Teorema 1.0.5. (Teorema de Schwarz) [13, p.147] *Sejam* U *um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : U \to Y$ *uma função duas vezes diferenciável no ponto* $c \in U$. *Então,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c), \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definição 1.0.6. *Dadas duas seqüências de números reais* $\{x_k\}$ *e* $\{y_k\}$, *escreveremos* $x_k = O(y_k)$ *quando*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|y_k|} < \infty.$$

Proposição 1.0.7. *Nas condições da definição 1.0.6, existe uma constante* $c > 0$ *satisfazendo* $|x_k| \leq c|y_k|$ *se, e somente se,* $x_k = O(y_k)$.

Corolário 1.0.8. *Sejam* $a, b \in (0, \infty)$ *e* $\{x_k\}$ *uma seqüência de termos reais positivos tal que* $\lim_{k \to \infty} x_k = \infty$. *Então* $ax_k + b = O(x_k)$. *Além disso, existe uma constante positiva* c *tal que* $ax_k + b \leq cx_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por $\mathcal{O}_n$ o conjunto das transformações ortogonais sobre $\mathbb{R}^n$. A ação de um elemento ρ de $\mathcal{O}_n$ sobre $x \in \mathbb{R}^n$ será denotada por ρx. As propriedades básicas que os elementos de $\mathcal{O}_n$ possuem estão registradas no lema abaixo.

Lema 1.0.9. *Valem as seguintes propriedades:*
(i) Se $\rho \in \mathcal{O}_n$ *e* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *então* $\rho x \cdot \rho y = x \cdot y$;
(ii) $\mathcal{O}_n$ *age transitivamente sobre* S^{n-1}, *isto é, se* $\omega \in S^{n-1}$ *e* $\rho \in \mathcal{O}_n$, *então existe* $\tau \in S^{n-1}$ *tal que* $\rho\tau = \omega$.

O seguinte resultado mostra a invariância da restrição da medida de Lebesgue à S^{n-1} por elementos de $\mathcal{O}_n$.

Teorema 1.0.10. [12, p.13] *Seja* $\rho \in \mathcal{O}_n$. *Se* $f \in L^1(S^{n-1})$, *então* $f \circ \rho \in L^1(S^{n-1})$ *e vale a fórmula*

$$\int_{S^{n-1}} f(\rho\omega)\, d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} f(\omega)\, d\sigma(\omega).$$

Se $f, g \in L^2(S^{n-1})$, *então*

$$\int_{S^{n-1}} f(\rho\omega)\overline{g}(\rho\omega)\, d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} f(\omega)\overline{g}(\omega)\, d\sigma(\omega).$$

Daqui em diante e sempre que for possível, usaremos o elemento de medida normalizado $d\omega := |S^{n-1}|^{-1} d\sigma(\omega)$ quando integrarmos sobre S^{n-1}.

O próximo resultado é uma adaptação para S^{n-1} de um resultado de densidade, inicialmente, para abertos com medida de Lebesgue finita.

Teorema 1.0.11. [4, p.61] *Seja* $f \in L^1(S^{n-1})$. *Se*

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega)g(\omega)\,d\omega = 0, \quad g \in C(S^{n-1}),$$

então $f = 0$.

Teorema 1.0.12. (Desigualdade de Minkowsky para integrais) [9, p.194] *Sejam* $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(\mathbb{Y}, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços com medidas sigma-finitas e* f *uma função* $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$*-mensurável sobre* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.
(i) *Se* $f \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$, *então*

$$\left[\int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leq \int_{\mathbb{Y}} \left[\int_{\mathbb{X}} f(x,y)^p\,d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y).$$

(ii) *Se* $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ *q.s., e a função* $y \mapsto \|f(\cdot,y)\|_p$ *é* ν*-integrável, então* $f(x,\cdot) \in L^1(\nu)$ *q.s., a função* $x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$ *pertence a* $L^p(\mu)$ *e*

$$\left\|\int_{\mathbb{Y}} f(\cdot,y)\,d\nu(y)\right\|_p \leq \int_{\mathbb{Y}} \|f(\cdot,y)\|_p\,d\nu(y).$$

Também utilizaremos diversos resultados sobre convergência. Entre eles, a versão complexificada do Teorema da Aproximação de Weierstrass .

Teorema 1.0.13. (Teorema da Aproximação de Weierstrass) [25, p.165] *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de funções contínuas a valores complexos sobre um compacto* K. *Assuma que*
(i) $\mathcal{A}$ *é auto-adjunta, isto é, se* $f \in \mathcal{A}$ *então* $\overline{f} \in \mathcal{A}$;
(ii) $\mathcal{A}$ *separa pontos sobre* K, *isto é, se* $x_1, x_2 \in K$, *existe* $f \in \mathcal{A}$ *tal que* $f(x_1) \neq f(x_2)$;
(iii) $\mathcal{A}$ *não se anula em pontos de* K, *isto é, se* $x \in K$, *existe* $f \in \mathcal{A}$ *tal que* $f(x) \neq 0$.
Então, o fecho uniforme de $\mathcal{A}$ *é o espaço das funções contínuas a valores complexos sobre* K. *Em outras palavras,* $\mathcal{A}$ *é denso em* $C(K)$ *quando este está munido de sua topologia da convergência uniforme.*

Teorema 1.0.14. (Teste M de Weierstrass) [25, p.148] *Seja* $\{f_k\}$ *uma seqüência de funções definidas em* U. *Assuma que existe uma seqüência* $\{M_k\}$ *de números reais tal que*

$$|f_k(x)| \leq M_k, \quad x \in U, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ *é convergente, então a série* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *converge uniformemente em* U.

O próximo resultado é citado em [15] como um corolário do Teorema de Banach-Steinhaus.

Proposição 1.0.15. [15, p.151] *Sejam* $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ *e* $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ *espaços de Banach sobre* Y *e* $\{T_k\} \subset L(V_1, V_2)$. *Assuma que:*
(i) *Para cada* $v \in V_1$, *existe algum* $M_v > 0$ *tal que* $\sup_k \|T_k(v)\|_{V_2} \leq M_v$;
(ii) *Existem* $v_0 \in V_1$, $\delta > 0$ *e um conjunto* $E \subset B(v_0, \delta) := \{v \in V_1 : \|v - v_0\|_{V_1} < \delta\}$ *tal que* E *é denso em* $B(v_0, \delta)$ *e para cada* $v \in E$ *existe* $z_v \in V_2$ *satisfazendo* $\lim_k T_k(v) = z_v$.
Então, existe um único elemento $T \in L(V_1, V_2)$ *satisfazendo* $T(v) = z_v$, $v \in V_1$. *Além disso,* $\|T\| \leq \liminf_k \|T_k\|$.

Os próximos teoremas tratam dos problemas da troca do limite com a derivada para seqüências de funções de várias variáveis e da troca dos operadores de derivação e integração, respectivamente.

Teorema 1.0.16. [13, *p*.270] *Sejam U aberto e conexo e $\{f_k\}$ uma seqüência de aplicações diferenciáveis de U em $\mathbb{R}^m$. Se $\{f_k\}$ converge em um ponto $c \in U$ e a seqüência das derivadas $\{df_k\}$ converge de maneira localmente uniforme para $g\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, então $\{f_k\}$ converge de maneira localmente uniforme para uma aplicação diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ e $df = g$. Resumindo, $d(\lim f_k) = \lim df_k$.*

Teorema 1.0.17. [9, *p*.56] *Sejam $(\mathbb{X}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \mathbb{X} \times [a, b] \to Y$. Assuma que $f(\cdot, t) : \mathbb{X} \to Y$ é integrável para cada $t \in [a, b]$. Defina*

$$F(t) = \int_{\mathbb{X}} f(x,t)\, d\mu(x).$$

(i) Se existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$, $(x,t) \in \mathbb{X} \times [a,b]$ e $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$, $x \in \mathbb{X}$, então $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$. Em particular, se $f(x,\cdot)$ é contínua para cada $x \in \mathbb{X}$, então F é contínua.
(ii) Se $\partial f/\partial t$ existe e $|(\partial f/\partial t)(x,t)| \leq g(x)$, $(x,t) \in \mathbb{X} \times [a,b]$, para alguma $g \in L^1(\mu)$, então F é diferenciável e $F'(t) = \int_{\mathbb{X}} (\partial f/\partial t)(x,t)\, d\mu(x)$.

Como último resultado preliminar, apresentamos um conhecido resultado que fornece condições necessárias e suficientes para que um operador seja fechado.

Teorema 1.0.18. [30, *p*.175] *Se $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são espaços métricos, uma aplicação f com domínio $D \subset \mathbb{X}$ e imagem $R \subset \mathbb{Y}$ é fechada se, e somente se, vale a seguinte implicação: se $\{a_k\} \subset D$, $a_k \to a$ e $f(a_k) \to b$ então $a \in D$ e $f(a) = b$.*

Capítulo 2

Diferenciabilidade sobre S^{n-1}

O objetivo deste capítulo é descrever condições necessárias e/ou suficientes para que uma função definida na esfera seja diferenciável até uma ordem especificada. A diferenciabilidade em questão, bem como outros conceitos e resultados da Análise na Esfera, serão introduzidos nas primeiras seções do capítulo.

Usaremos a notação $\mathbb{R}_0^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \neq 0\}$. Se $x \in \mathbb{R}_0^n$, escreveremos $x' := x/\|x\|$. Quando trabalharmos exclusivamente no contexto esférico manteremos a notação do capítulo anterior para indicar os pontos de S^{n-1}.

Para auxiliar na leitura do texto, lembramos que nas páginas finais há uma tabela contendo algumas das notações utilizadas.

2.1 Funções homogêneas e o operador de Laplace-Beltrami

Definição 2.1.1. *Seja $f : S^{n-1} \to Y$. A extensão radial de f é a função $\tilde{f}$ dada por $\tilde{f}(x) := f(x')$, $x \in \mathbb{R}_0^n$.*

Definição 2.1.2. *Se r é um inteiro não-negativo, diremos que uma função $f : S^{n-1} \to Y$ é r vezes diferenciável (respectivamente, continuamente diferenciável), se $\tilde{f}$ é r vezes diferenciável (respectivamente, continuamente diferenciável) em $\mathbb{R}_0^n$. Nestas condições, para cada multi-índice α satisfazendo $|\alpha| \leq r$, definimos $D^\alpha f := (D^\alpha \tilde{f})|_{S^{n-1}}$.*

Notação: Escreveremos $D^k = D^\alpha$, quando $\alpha_k = 1$ e $\alpha_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, k, \ldots, n\} \backslash \{k\}$.

Denotamos o espaço da funções que são r vezes continuamente diferenciáveis no sentido acima por $C^r(S^{n-1}, Y)$ ou, simplesmente, $C^r(S^{n-1})$ quando o contexto permitir.

Definição 2.1.3. *Se $f : S^{n-1} \to X$ é duas vezes diferenciável, a expressão*

$$\Delta_n f := (\Delta \tilde{f})|_{S^{n-1}}$$

está bem definida. O operador Δ_n é denominado operador de Laplace-Beltrami. Indutivamente, temos

$$\Delta_n^r f = \Delta_n \Delta_n^{r-1} f, \quad r \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \backslash \{0\},$$

quando f é $2r$ vezes diferenciável.

Definição 2.1.4. *Se $\lambda \in \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \to Y$ é homogênea de grau λ, se $f(tx) = t^\lambda f(x)$, $t > 0$, $x \neq 0$.*

O próximo resultado é bem conhecido e pode ser encontrado em [8, p.437].

Teorema 2.1.5. (Fórmula de Euler para funções homogêneas) *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e homogênea de grau λ. Então, $x \cdot \nabla f(x) = \lambda f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Observação 2.1.6. Se f é uma função homogênea de grau λ e existe $\partial f / \partial x_j$, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, então esta última é homogênea de grau $\lambda - 1$, pois

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(tx + hx_j) - f(tx)}{h} \\
&= \lim_{(h/t) \to 0} \frac{f(t[x + (h/t)x_j]) - f(tx)}{(th/t)} \\
&= t^{\lambda - 1} \lim_{(h/t) \to 0} \frac{f(x + (h/t)x_j) - f(x)}{(h/t)} \\
&= t^{\lambda - 1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_0.
\end{aligned}$$

Observação 2.1.7. Se $f : S^{n-1} \to Y$, então $\tilde{f}$ é homogênea de grau 0 uma vez que

$$\tilde{f}(tx) = f\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = f\left(\frac{t}{|t|}\frac{x}{\|x\|}\right) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = t^0 \tilde{f}(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_0.$$

Mais ainda, pela observação anterior, $\Delta \tilde{f}$ é homogênea de grau -2, pois

$$\Delta \tilde{f}(tx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j^2}(tx) = \sum_{j=1}^{n} t^{-2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j^2}(x) = t^{-2} \Delta \tilde{f}(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_0.$$

Observação 2.1.8. A igualdade na última observação toma a seguinte forma quando $x \in S^{n-1}$:

$$\Delta \tilde{f}(t\omega) = t^{-2} \Delta_n f(\omega), \quad t > 0, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

As propriedades acima são utilizadas na prova do próximo resultado.

Teorema 2.1.9. *Se $f, g \in C^2(S^{n-1})$, então*

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega) \Delta_n g(\omega)\, d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} \Delta_n f(\omega) g(\omega)\, d\sigma(\omega).$$

Demonstração: Sejam $f, g \in C^2(S^{n-1})$. Não é difícil verificar que a função $\tilde{h} = \tilde{g} \Delta \tilde{f} - \tilde{f} \Delta \tilde{g}$ é Lebesgue-integrável no conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 \leq x \leq 2\}$. Pelo Teorema 1.0.1 temos que

$$\int_A \tilde{h}(x)\, dx = \int_1^2 \int_{S^{n-1}} \tilde{h}(r\omega) r^{n-1} d\sigma(\omega)\, dr.$$

Entretanto, a observação anterior revela que

$$\begin{aligned}\tilde{h}(r\omega) &= \tilde{g}(r\omega)\Delta\tilde{f}(r\omega) - \tilde{f}(r\omega)\Delta\tilde{g}(r\omega)\\ &= g(\omega)r^{-2}\Delta_n f(\omega) - f(\omega)r^{-2}\Delta_n g(\omega)\\ &= r^{-2}\left(g(\omega)\Delta_n f(\omega) - f(\omega)\Delta_n g(\omega)\right), \quad r>0, \quad \omega\in S^{n-1},\end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\int_A \tilde{h}(x)\,dx = \int_1^2 r^{n-3}\,dr\int_{S^{n-1}}\left(g(\omega)\Delta_n f(\omega) - f(\omega)\Delta_n g(\omega)\right)\,d\sigma(\omega).$$

Por outro lado, o Teorema de Green garante que a integral no lado esquerdo da equação anterior toma a forma

$$\int_{\|x\|=2}\left(\tilde{g}(x)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\nu}(x) - \tilde{f}(x)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\nu}(x)\right)dx - \int_{\|x\|=1}\left(\tilde{g}(x)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\nu}(x) - \tilde{f}(x)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\nu}(x)\right)dx.$$

Como $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são homogêneas de grau 0 e, portanto, constantes ao longo de retas normais a S^{n-1}, então $\partial\tilde{f}/\partial\nu$ e $\partial\tilde{g}/\partial\nu$ são nulas. Combinando as informações anteriores, concluímos que

$$\int_1^2 r^{n-3}\,dr\int_{S^{n-1}}\left(g(\omega)\Delta_n f(\omega) - f(\omega)\Delta_n g(\omega)\right)\,d\sigma(\omega) = 0.$$

Como

$$\int_1^2 r^{n-3}\,dr \neq 0,$$

o resultado segue. ■

A próxima proposição fornece uma caracterização alternativa para o conceito de homogeneidade.

Proposição 2.1.10. *Sejam $\lambda\in\mathbb{R}$, $F:\mathbb{R}^n\to Y$ uma função e f sua restrição a S^{n-1}. São equivalentes:*
(i) F é homogênea de grau λ;
(ii) $F(x) = \|x\|^\lambda f(x')$, $x\in\mathbb{R}^n_0$.

Demonstração: Se F é homogênea de grau λ, então

$$F(x) = F(\|x\|x') = \|x\|^\lambda F(x') = \|x\|^\lambda f(x'), \quad x\neq 0.$$

Se a igualdade vale, então

$$F(tx) = \|tx\|^\lambda f\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = t^\lambda\|x\|^\lambda f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = t^\lambda F(x), \quad t>0, \quad x\neq 0.$$

Isto conclui a prova. ■

Lema 2.1.11. *Se $m\in\mathbb{Z}$, então $\Delta(\|x\|^m) = m(m+n-2)\|x\|^{m-2}$.*

Demonstração: Como

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\|x\|^m = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{m/2} = m\|x\|^{m-2}x_j, \quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\|x\|^m &= m\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\|x\|^{m-2}x_j\right)\\ &= m\left(\|x\|^{m-2}+x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\|x\|^{m-2}\right)\\ &= m\left[\|x\|^{m-2}+(m-2)\|x\|^{m-4}x_j^2\right], \quad j\in\{1,\ldots,n\}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta(\|x\|^m) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\|x\|^m\\ &= m\sum_{j=1}^n\left[\|x\|^{m-2}+(m-2)\|x\|^{m-4}x_j^2\right]\\ &= m\left[n\|x\|^{m-2}+(m-2)\|x\|^{m-4}\|x\|^2\right]\\ &= m(m+n-2)\|x\|^{m-2},\end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

Notação: No que segue, denotaremos o número $m(m+n-2)$ por $\lambda_{m,n}$.

Proposição 2.1.12. *Sejam $m \in \mathbb{Z}$, $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e f a restrição de F a S^{n-1}. Se F é homogênea de grau m, então*

$$\Delta F(x) = \lambda_{m,n}\|x\|^{m-2}f(x') + \|x\|^{m-2}\Delta_n f(x'), \quad x \in \mathbb{R}_0^n.$$

Demonstração: Consideremos inicialmente o caso $m = 0$. Pela Observação 2.1.6, ΔF é homogênea de grau -2. Logo, pela Proposição 2.1.10 temos

$$\Delta F(x) = \|x\|^{-2}(\Delta F)|_{S^{n-1}}(x'), \quad x \in \mathbb{R}_0^n.$$

Mas, se F é homogênea de grau 0 e $f = F|_{S^{n-1}}$, então $F = \tilde{f}$ em $\mathbb{R}_0^n$. Assim, a Definição 2.1.3 implica que $(\Delta F)|_{S^{n-1}} = \Delta_n f$. Portanto,

$$\Delta F(x) = \|x\|^{-2}\Delta_n f(x'), \quad x \in \mathbb{R}_0^n.$$

Suponha agora que $m \neq 0$. Sabemos que se $H, G \in C^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$\Delta(HG) = G\Delta H + 2\nabla G\cdot\nabla H + H\Delta G. \tag{2.1}$$

Vamos usar esta igualdade com $H(x) := \|x\|^m$, $G(x) := \tilde{f}(x)$ e $x \in \mathbb{R}_0^n$. O vetor ∇G é tangente à S^{n-1}, uma superfície de nível de H. Como ∇H é ortogonal a S^{n-1}, então

$$\nabla G\cdot\nabla H = 0. \tag{2.2}$$

Se F é homogênea de grau m, segue da Observação 2.1.6 e da Proposição 2.1.10 que

$$\|x\|^{m-2}\Delta_n f(x') = \|x\|^{m-2}\Delta\tilde{f}(x') = \|x\|^m\left(\|x\|^{-2}\Delta\tilde{f}(x')\right) = \|x\|^m\Delta\tilde{f}(x).$$

Assim, obtemos que

$$H(x)\Delta G(x) = \|x\|^{m-2}\Delta_n f(x'). \tag{2.3}$$

Agora, pelo Lema 2.1.11 e pela Definição 2.1.1, temos

$$G(x)\Delta H(x) = \tilde{f}(x)\lambda_{m,n}\|x\|^{m-2} = \lambda_{m,n}\|x\|^{m-2}f(x'). \tag{2.4}$$

Finalmente, segue da Proposição 2.1.10 e novamente pela Definição 2.1.1 que

$$H(x)G(x) = \|x\|^m\tilde{f}(x) = \|x\|^m f(x') = F(\|x\|x') = F(x).$$

Substituindo esta última igualdade e as equações (2.2), (2.3) e (2.4) em (2.1), vem que

$$\Delta F(x) = \lambda_{m,n}\|x\|^{m-2}f(x') + \|x\|^{m-2}\Delta_n f(x').$$

Isto conclui a prova. ■

2.2 Polinômios harmônicos e harmônicos esféricos

Nesta seção, introduzimos vários espaços polinomiais utilizados no trabalho, bem como algumas propriedades envolvendo os mesmos.

Definição 2.2.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma função $f \in C^2(U)$ é harmônica se $\Delta f = 0$.*

Os espaços aos quais refere-se o parágrafo acima são os seguintes:

- $P(\mathbb{R}^n)$ = *conjunto dos polinômios em n variáveis reais;*
- $P^k(\mathbb{R}^n)$ = *subconjunto de $P(\mathbb{R}^n)$ formado pelos polinômios de grau menor ou igual a k;*
- $P_h^m(\mathbb{R}^n)$ = *subconjunto de $P(\mathbb{R}^n)$ formado pelos polinômios que são homogêneos de grau m;*
- $H^m(\mathbb{R}^n)$ = *subconjunto de $P_h^m(\mathbb{R}^n)$ formado pelos polinômios que são harmônicos.*

Notação: Se $\mathbb{X}(\mathbb{R}^n)$ é um dos espaços definidos acima, escreveremos

$$\mathbb{X}(S^{n-1}) := \{p|_{S^{n-1}} : p \in X(\mathbb{R}^n)\}.$$

O próximo resultado dá condições suficientes para que um polinômio homogêneo seja harmônico.

Lema 2.2.2. *Seja $p \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$. Uma condição suficiente para que $p \in H^m(\mathbb{R}^n)$ é*

$$\int_{S^{n-1}} p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) = 0, \quad q \in P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Assuma que a condição vale e seja $q \in P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a Proposição 2.1.12 temos que

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \Delta p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) &= \lambda_{m,n}\int_{S^{n-1}} p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) + \int_{S^{n-1}} \Delta_n p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{n-1}} \Delta_n p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega).\end{aligned}$$

Similarmente, com a ajuda do Teorema 2.1.9, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \Delta_n p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) &= \int_{S^{n-1}} p(\omega)\Delta_n\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{n-1}} p(\omega)\Delta\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) - \lambda_{m-2,n}\int_{S^{n-1}} p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{n-1}} p(\omega)\Delta\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega)\end{aligned}$$

Como $\|\cdot\|^2\Delta\overline{q} \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\int_{S^{n-1}} \Delta p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} p(\omega)\Delta\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} p(\omega)\|\omega\|^2\Delta\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) = 0.$$

Como q é arbitrário, tomando $q = \Delta p$ e usando o Teorema 1.0.4, deduzimos que $\Delta p = 0$ q.s. em S^{n-1}. Como $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\Delta p = 0$ em S^{n-1}. Portanto, pela homogeneidade de p temos que $\Delta p = 0$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $p \in H^m(\mathbb{R}^n)$. ■

Definição 2.2.3. *Um harmônico esférico de grau m e dimensão n é a restrição de um polinômio de $H^m(\mathbb{R}^n)$ à S^{n-1}. Denotaremos o espaço $H^m(S^{n-1})$ dos harmônicos esféricos de grau m e dimensão n por $\mathcal{H}_m^n$.*

O próximo teorema mostra que $\mathcal{H}_m^n$ está contido no autoespaço de Δ_n associado ao autovalor $-\lambda_{m,n}$.

Teorema 2.2.4. *Se $p \in \mathcal{H}_m^n$, então $\Delta_n p = -\lambda_{m,n} p$.*

Demonstração: Segue da igualdade

$$0 = \Delta p = \lambda_{m,n} p + \Delta_n p\,, \quad p \in \mathcal{H}_m^n,$$

uma conseqüência direta da Proposição 2.1.12. ■

Teorema 2.2.5. *Se $m \neq k$, então*

$$\int_{S^{n-1}} p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) = 0, \quad p \in \mathcal{H}_m^n, \quad q \in \mathcal{H}_k^n.$$

Demonstração: Sejam $p \in \mathcal{H}_m^n$ e $q \in \mathcal{H}_k^n$, $m \neq k$. Aplicando o Teorema 2.1.9 e, em seguida, o Teorema 2.2.4 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^{n-1}} \Delta_n p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) - \int_{S^{n-1}} p(\omega)\Delta_n \overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) \\ &= -\lambda_{m,n} \int_{S^{n-1}} p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) + \lambda_{k,n} \int_{S^{n-1}} p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega) \\ &= (\lambda_{k,n} - \lambda_{m,n}) \int_{S^{n-1}} p(\omega)\overline{q}(\omega)\, d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Como $m \neq k$, o resultado segue. ■

Nosso próximo objetivo é provar que qualquer polinômio sobre $\mathbb{R}^n$, quando restrito à S^{n-1}, pode ser escrito como soma de harmônicos esféricos. Antes, porém, definiremos um produto interno em $P_h^m(\mathbb{R}^n)$.

Podemos representar um polinômio $p \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$ na forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in Y, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Para cada $p \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$, podemos associar um operador diferencial

$$p(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$$

obtido de $p(x)$ trocando-se cada monômio $x_j^{\alpha_j}$ pelo correspondente operador diferencial $\partial^{\alpha_j}/\partial x_j^{\alpha_j}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Fixemos agora $q \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$ na forma

$$q(x) = \sum_{|\beta|=m} b_\beta x^\beta, \quad \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Como $|\alpha| = m = |\beta|$, temos

$$D^\alpha q(x) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right) \sum_{|\beta|=m} b_\beta x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = \sum_{|\beta|=m} b_\beta \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} x_1^{\beta_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} x_n^{\beta_n}.$$

Agora, notemos que

- Se $\alpha_n = \beta_n$ então $\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} x_n^{\beta_n} = \alpha_n!, \quad \alpha! := \alpha_n! \dots \alpha_1!$;
- Se $\alpha_n > \beta_n$ então $\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} x_n^{\beta_n} = 0$;
- Se $\alpha_n < \beta_n$ então $\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} x_n^{\beta_n} = \beta_n \dots \beta_{n-\alpha_n} x_n^{\beta_n-(\alpha_n+1)}$.

Mas, se $\alpha_n < \beta_n$, então $\alpha_j > \beta_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n-1\}$ e, assim, $\partial^{\alpha_j} x_j^{\beta_j}/\partial x_j^{\alpha_j} = 0$. Portanto,

$$D^\alpha \overline{q}(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \\ \alpha! \overline{b}_\alpha\,, & \text{se} \quad \alpha = \beta \end{cases}.$$

Obtemos, então, a forma

$$\langle\langle p\,,\,q\rangle\rangle_m := \sum_{|\alpha|=m} \alpha! a_\alpha \overline{b}_\beta,$$

sesquilinear sobre $P_h^m(\mathbb{R}^n)$, a qual define um produto interno sobre $P_h^m(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.2.6. *A aplicação $\varphi : P_h^m(\mathbb{R}^n) \to P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n)$, definida por $\varphi(p) = \Delta p$, é sobrejetora.*

Demonstração: Suponhamos que φ não seja sobrejetora. Então, existe $q \in P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n)$, não-nulo e $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_m$-ortogonal à imagem de φ, ou seja, tal que

$$\overline{\langle\langle \Delta p\,,\,q\rangle\rangle_{m-2}} = \langle\langle q\,,\,\Delta p\rangle\rangle_{m-2} = 0, \quad p \in P_h^m(\mathbb{R}^n).$$

Tomando $p = \|\cdot\|^2 q$, segue do Teorema de Schwarz que

$$0 = \langle\langle q\,,\,\Delta p\rangle\rangle_{m-2} = q(D)\Delta\overline{p} = \Delta q(D)\overline{p} = p(D)\overline{p} = \langle\langle p\,,\,p\rangle\rangle_m.$$

Logo, $p = 0$ e, por conseguinte, $q = 0$, o que é uma contradição. ■

Teorema 2.2.7. *Cada $p \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$ possui uma única decomposição na forma*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{l} \|x\|^{2j} p_{m-2j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $l = \lfloor m/2 \rfloor$ e $p_{m-2j} \in H^{m-2j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{0, \ldots, l\}$.

Demonstração: Primeiro, observe que qualquer polinômio com grau de homogeneidade menor que 2 é harmônico. Logo, só precisamos considerar os casos em que $m \geq 2$. Definimos o conjunto

$$B_m^n := \|x\|^2 P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n) := \left\{\|x\|^2 q(x) :\ q \in P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Vamos provar que $P_h^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n) \oplus B_m^n$. Sejam $r(x) = \|x\|^2 q(x) \in B_m^n$ e $p \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$ não-nulo, então

$$r(D) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\, q(D) = \Delta q(D).$$

Pelo Teorema de Schwarz obtemos

$$\langle\langle r\,,\,p\rangle\rangle_m = \Delta q(D)\overline{p} = q(D)\Delta\overline{p} = q(D)\overline{\Delta p} = \langle\langle q\,,\,\Delta p\rangle\rangle_{m-2}.$$

Em particular, podemos concluir que $\langle\langle r\,,\,p\rangle\rangle_m = 0$, $r \in B_m^n$ se, e só se, $\langle\langle q\,,\,\Delta p\rangle\rangle_{m-2} = 0$, $q \in P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Mas, a última condição equivale a $\Delta p = 0$, isto é, que $p \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Repetindo a prova para $m-2$, obtemos

$$\begin{aligned} B_m^n = \|x\|^2 P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n) &= \|x\|^2 \left(H^{m-2}(\mathbb{R}^n) \oplus B_{m-2}^n\right) \\ &= \|x\|^2 H^{m-2}(\mathbb{R}^n) \oplus \|x\|^4 P_h^{m-4}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue por recorrência. ■

Corolário 2.2.8. *Se $p \in P^m(\mathbb{R}^n)$, então $p|_{S^{n-1}}$ pode ser escrito como soma de harmônicos esféricos de grau no máximo m.*

Demonstração: Segue direto do teorema anterior. ■

Corolário 2.2.9. *$P(S^{n-1}) = [\cup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_m^n]$.*

Demonstração: Segue do corolário anterior. ■

Proposição 2.2.10. *Seja m um inteiro não negativo. Então,*

$$d_m^n := \dim P_h^m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Demonstração: Claramente, d_m^n é igual a quantidade de monômios x^α, com $|\alpha| = m$. Vamos, então, calcular essa quantidade. Para tanto, consideremos $h(t) = (1-t)^{-1}$, $|t| < 1$, cuja representação em série de Taylor centrada na origem é $h(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m$. Usando tal expansão, deduzimos que

$$\prod_{j=1}^{n}(1-x_jt)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=m} x^\alpha\right)t^m, \quad \|x\| < 1.$$

Por outro lado, a expansão de $g(t) = (1-t)^{-n}$, $|t| < 1$, é da forma

$$g(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\binom{n+m-1}{m}t^m.$$

Comparando-se convenientemente as séries acima, vemos que a quantidade de monômios da forma x^α coincide com $(n+m-1)!(m!(n-1)!)^{-1}$. ■

Proposição 2.2.11. *O operador $\phi : P_h^m(\mathbb{R}^n) \to P_h^m(S^{n-1})$, definido por $\phi(p) = p|_{S^{n-1}}$, é um isomorfismo.*

Demonstração: Sendo ϕ linear e sobrejetora, basta provarmos que ϕ é injetora. Entretanto, a injetividade segue da igualdade $p(x) = \|x\|^m q(x')$, $x \in \mathbb{R}_0^n$, dada pela Proposição 2.1.10, onde q é a restrição de p à S^{n-1}. ■

Proposição 2.2.12. *Se B_m^n é o conjunto introduzido na prova do Teorema 2.2.7, então $dim B_m^n = d_{m-2}^n$.*

Demonstração: Seja $\psi : P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n) \to B_m^n$ dada por $\psi(p)(x) = \|x\|^2 p$, $p \in P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. A própria definição de B_m^n revela que ψ é sobrejetora. Por outro lado, se $p, q \in P_h^{m-2}(\mathbb{R}^n)$ e $\|x\|^2 p(x) = \|x\|^2 q(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, obviamente $p(x) = q(x)$, $x \in \mathbb{R}_0^n$. Por continuidade, $p = q$, e ψ é injetora. O resultado segue. ■

Teorema 2.2.13. *A dimensão a_m^n de $\mathcal{H}_m^n$ é dada por*

$$a_m^n = \frac{(2m+n-2)(n+m-3)!}{m!(n-2)!},$$

a menos que $n + m < 3$.

Demonstração: Combinando-se a decomposição em soma direta descrita na prova do Teorema 2.2.7 e a Proposição 2.2.12 obtemos imediatamente que $\dim H^m(\mathbb{R}^n) = d_m^n - d_{m-2}^n$. O restante segue da Proposição 2.2.10. ■

Observação 2.2.14. Alguns valores especiais para a_m^n são os seguintes:

$$a_0^n = 1\,; \qquad a_1^n = n\,; \qquad a_m^2 = 2\,(m > 0)\,; \qquad a_m^3 = 2m + 1\,.$$

Corolário 2.2.15. *Vale a seguinte estimativa para o valor encontrado no teorema anterior:* $a_m^n = O(m^{n-2})$, $n \geq 2$.

Demonstração: Não é difícil ver que

$$\frac{(2m+n-2)(n+m-3)!}{m!(n-2)!} = \frac{(2m+n-2)(n+m-2)\cdots(m-1)}{m+n-2(n-2)!}.$$

Logo,

$$\frac{(2m+n-2)(n+m-3)!}{m!(n-2)!} = \frac{2m^{n-1} + \Gamma_m^n}{(m+n-2)(n-2)!} = \frac{m^{n-2} + (\Gamma_m^n/m)}{[1+(n-2)/m](n-2)!}\,,$$

onde Γ_m^n é um polinômio em n e m, cuja maior potência de m é $n-2$. Segue que

$$\frac{a_m^n}{m^{n-2}} = \frac{2 + (\Gamma_m^n/m^{n-1})}{[1+(n-2)/m](n-2)!} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{(n-2)!}\,,$$

o que conclui a prova. ■

2.3 $L^2(S^{n-1})$ e expansões em séries de Fourier

Nesta seção, consideraremos o espaço de Hilbert $L^2(S^{n-1})$ munido de seu produto interno usual

$$(f,g)_2 = \int_{S^{n-1}} f(\omega)\overline{g}(\omega)\,d\omega, \quad f,g \in L^2(S^{n-1}),$$

bem como da norma induzida, $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)_2}$, $f \in L^2(S^{n-1})$. Lembramos que o elemento de medida $d\omega$ corresponde ao múltiplo de $d\sigma_n$ que garante a normalização

$$\int_{S^{n-1}} d\omega = 1.$$

Cada $\mathcal{H}_m^n$, $m \in \mathbb{N}$, é um subespaço vetorial de $L^2(S^{n-1})$. Além disso, o Teorema 2.2.5 revela que $\mathcal{H}_m^n$ e $\mathcal{H}_l^n$ são $(\,,\,)_2$-ortogonais quando $m \neq l$.

O primeiro resultado desta seção mostra que qualquer função contínua sobre S^{n-1} pode ser aproximada, de forma uniforme, por polinômios de $P(\mathbb{R}^n)$. Sempre assumiremos que $C(S^{n-1})$ está munido de sua norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Lema 2.3.1. *$P(S^{n-1})$ é um subespaço denso de $C(S^{n-1})$.*

Demonstração: É uma conseqüência do Teorema da Aproximação de Weierstrass. ■

No próximo resultado veremos que toda função de $L^2(S^{n-1})$ pode ser aproximada por polinômios sobre S^{n-1}, na topologia de $L^2(S^{n-1})$.

Lema 2.3.2. *$P(S^{n-1})$ é um subespaço denso de $L^2(S^{n-1})$.*

Demonstração: É conseqüência imediata do fato de $C(S^{n-1})$ ser um subespaço denso de $L^2(S^{n-1})$. ■

O lema abaixo é um resultado clássico de Análise Funcional.

Lema 2.3.3. [3, p.153] *Seja M um subespaço vetorial de um espaço de Hilbert X. São equivalentes:*
(i) M é um subespaço denso de X;
(ii) O complemento ortogonal de M em X é trivial.

Teorema 2.3.4. $L^2(S^{n-1}) = \overline{[\cup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_m^n]} = \oplus_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_m^n$.

Demonstração: Segue do Lema 2.3.2, Lema 2.3.3 e Corolário 2.2.9. ■

O teorema anterior revela que se $\{h_m^k : k = 1, ..., a_m^n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_m^n$, $m \in \mathbb{N}$, então $\{h_m^k : k = 1, ..., a_m^n,\ m \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto ortonormal completo de $L^2(S^{n-1})$. Logo, se $f \in L^2(S^{n-1})$, existe uma expansão de Fourier associada

$$f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} h_m^k,$$

onde $\hat{f}_{m,k} := \left(f, h_m^k\right)_2$, $k \in \{1, \ldots, a_m^n\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Notação: No restante do trabalho, os conjuntos $\{h_m^k : k = 1, ..., a_m^n\}$ e $\{h_m^k : k = 1, ..., a_m^n,\ m \in \mathbb{N}\}$ representarão uma base ortonormal de $\mathcal{H}_m^n$ e um subconjunto ortonormal completo de $L^2(S^{n-1})$, respectivamente, em relação ao produto interno de $L^2(S^{n-1})$.

Teorema 2.3.5. *Sejam $f, g \in L^2(S^{n-1})$. Se*

$$g = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} h_m^k\,,$$

então $f = g$ q.s..

Demonstração: Nas condições do teorema, temos que $\hat{g}_{m,k} = \hat{f}_{m,k}$, ou seja,

$$(f - g, h_m^k)_2 = 0, \quad k \in \{1, ..., a_m^n\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a conclusão segue do Teorema 2.3.4 e do Lema 2.3.3. ■

2.4 Núcleos de reprodução dos espaços $\mathcal{H}_m^n$

O termo núcleo de reprodução geralmente refere-se a espaços de Hilbert construídos a partir de funções positivas definidas ou afins. Utilizaremos a idéia de núcleo de reprodução para demonstrar um importante resultado conhecido por Fórmula da Adição. Para mais informações sobre este assunto, sugerimos [1].

Definição 2.4.1. *Seja V um espaço de Hilbert de funções com domínio D. Uma função $\varphi\colon D \times D \to \mathbb{R}$ é um núcleo de reprodução de V se:*
(i) Fixado $y \in D$, a função $x \in D \mapsto \varphi(x, y)$ é um elemento de V;
(ii) (Propriedade reprodutora) *Fixado $y \in D$, $f(y) = \langle f\,, \varphi(\cdot\,, y)\rangle$, $f \in V$, onde $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ denota o produto interno de V.*

Fixado m (e ainda n), vamos estudar algumas propriedades da função $F_m\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to Y$ definida por

$$F_m(\omega, \tau) = \sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\omega)\overline{h_m^j}(\tau).$$

Nosso objetivo nesta seção é provar que F_m é um núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_m^n$.

Lema 2.4.2. *A função F_m independe da escolha da base ortonormal de $\mathcal{H}_m^n$.*

Demonstração: Suponhamos que $\{l_m^1, \ldots, l_m^{a_m^n}\}$ é uma outra base ortonormal de $\mathcal{H}_m^n$. Podemos escrever

$$l_m^j = \sum_{i=1}^{a_m^n} c_{i,j} h_m^i, \quad c_{i,j} \in Y.$$

Note que, por esta última igualdade,

$$\delta_{j,j'} = (l_m^j, l_m^{j'})_2 = \sum_{i,i'} c_{i,j}\, \overline{c_{i',j'}}\, (h_m^i, h_m^{i'})_2 = \sum_{i,i'} c_{i,j}\, \overline{c_{i',j'}}\, \delta_{i,i'} = \sum_{i} c_{i,j}\, \overline{c_{i,j'}},$$

o que mostra que a matriz com entradas $c_{i,j}$ é unitária.

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_j l_m^j(\omega)\overline{l_m^j}(\tau) &= \sum_j \left(\sum_i c_{i,j} h_m^i(\omega)\right)\left(\sum_{i'} \overline{c_{i',j} h_m^{i'}(\tau)}\right) \\
&= \sum_{j,i,i'} c_{i,j}\, \overline{c_{i',j}}\, h_m^i(\omega)\overline{h_m^{i'}}(\tau) \\
&= \sum_{i,i'} \left(\sum_j c_{i,j}\, \overline{c_{i',j}}\right) h_m^i(\omega)\overline{h_m^{i'}}(\tau),
\end{aligned}$$

Juntando as informações acima, obtemos

$$\sum_j l_m^j(\omega)\overline{l_m^j}(\tau) = \sum_{i,i'} \delta_{i,i'} h_m^i(\omega)\overline{h_m^{i'}}(\tau) = \sum_i h_m^i(\omega)\overline{h_m^i}(\tau),$$

o que conclui a prova. ■

Lema 2.4.3. *$F_m(\rho\omega, \rho\tau) = F_m(\omega, \tau)$, $\rho \in \mathcal{O}_n$, $\omega, \tau \in S^{n-1}$.*

Demonstração: Vamos provar que se $\rho \in \mathcal{O}_n$, então $\{h_m^j \circ \rho_n : j = 1, \ldots, a_m^n\}$, com $\rho_n := \rho|_{S^{n-1}}$, é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_m^n$. Assim, o resultado seguirá do lema anterior. Para $m = 0$ não há o que provar. Assuma que $m > 0$ e fixe $j \in \{1, \ldots, a_m^n\}$. Pela definição de $\mathcal{H}_m^n$ temos que existe $p \in H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $p|_{S^{n-1}} = h_m^j$. Como

$$p(\rho x) = \|\rho x\|^m p((\rho x)') = \|x\|^m p(\rho x'), \quad x \in \mathbb{R}_0^n,$$

e $p(\rho 0) = 0$, segue da Proposição 2.1.10 que $p \circ \rho \in P_h^m$, $\rho \in \mathcal{O}_n$. Agora, como $\Delta(p \circ \rho) = \Delta p \circ \rho$, $\rho \in \mathcal{O}_n$, vemos que $p \circ \rho \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Como ρ aplica S^{n-1} sobre S^{n-1}, segue que

$$(p \circ \rho)|_{S^{n-1}} = (p|_{S^{n-1}}) \circ \rho_n = h_m^j \circ \rho_n.$$

Logo, $h_m^j \circ \rho_n \in \mathcal{H}_m^n$. A ortonormalidade de $\{h_m^j \circ \rho_n : j = 1, \ldots, a_m^n\}$ é conseqüência do Teorema 1.0.10. ■

No próximo resultado, utilizamos o símbolo "$'$" somente para distinguir os pontos.

Lema 2.4.4. *Sejam $\omega, \omega', \tau, \tau' \in S^{n-1}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) Existe $\rho \in \mathcal{O}_n$ tal que $\rho\omega = \omega'$ e $\rho\tau = \tau'$;
(ii) $\omega \cdot \tau = \omega' \cdot \tau'$.

Demonstração: Se (i) vale, podemos usar a invariância do produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ por $\mathcal{O}_n$ para concluir que

$$\omega \cdot \tau = \rho\omega \cdot \rho\tau = \omega' \cdot \tau'.$$

Reciprocamente, suponha que (ii) vale. Como $\mathcal{O}_n$ age transitivamente sobre S^{n-1}, existe $\rho_1 \in \mathcal{O}_n$ tal que $\rho_1\omega = \omega'$. Logo,

$$\omega' \cdot \tau' = \omega \cdot \tau = \rho_1\omega \cdot \rho_1\tau = \omega' \cdot \rho_1\tau.$$

Da mesma forma, podemos encontrar $\rho_2 \in \mathcal{O}_n$ tal que $\rho_2\omega' = \omega'$ e $\rho_2\rho_1\tau = \tau'$. A condição (i) segue tomando-se $\rho = \rho_2\rho_1 \in \mathcal{O}_n$. ■

Lema 2.4.5. *Existe uma função φ_m de uma variável tal que $F_m(\omega, \tau) = \varphi_m(\omega \cdot \tau)$, ou seja, F_m é uma função de $\omega \cdot \tau$.*

Demonstração: Só precisamos provar que a função φ_m está bem definida. Assuma que $\omega \cdot \tau = \omega' \cdot \tau'$. Segue do Lema 2.4.4 que existe $\rho \in \mathcal{O}_n$ tal que $\rho\omega = \omega'$ e $\rho\tau = \tau'$. Portanto, pelo Lema 2.4.3 temos

$$\varphi_m(\omega \cdot \tau) = F_m(\omega, \tau) = F_m(\rho\omega, \rho\tau) = F_m(\omega', \tau') = \varphi_m(\omega' \cdot \tau'),$$

e o lema segue. ■

O próximo resultado analisa a propriedade de reprodução de F_m.

Lema 2.4.6. *Se $p_k \in \mathcal{H}_k^n$, então*

$$\int_{S^{n-1}} p_k(\omega) F_m(\tau, \omega)\, d\omega = \delta_{k,m} p_m(\tau).$$

Demonstração: Pela definição de F_m e pela linearidade da integral temos que

$$\int_{S^{n-1}} p_k(\omega) F_m(\tau, \omega)\, d\omega = \sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\tau) \int_{S^{n-1}} p_k(\omega) \overline{h_m^j}(\omega)\, d\omega = \sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\tau)(p_k, h_m^j)_2.$$

Por outro lado, o Teorema 2.2.5 implica que

$$\sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\omega)(p_k, h_m^j)_2 = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ p_m(\omega), & k = m \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_{S^{n-1}} p_k(\omega) F_m(\tau, \omega)\, d\omega = \delta_{k,m} p_m(\omega).$$

O resultado segue. ■

Corolário 2.4.7. *A função F_m é um núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_m^n$.*

2.5 Polinômios de Legendre e a Fórmula da Adição

Nesta seção, provamos a Fórmula da Adição para harmônicos esféricos e deduzimos algumas de suas conseqüências básicas.

Teorema 2.5.1. *Sejam $\tau \in S^{n-1}$ e $\ell_m \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Assuma que:*
(i) $\ell_m(\tau) = 1$;
(ii) ℓ_m é uma função τ-zonal, ou seja, se $\rho \in \mathcal{O}_n$ satisfaz $\rho\tau = \tau$, então $\ell_m(\rho x) = \ell_m(x)$.
Então, ℓ_m é unicamente determinada por

$$\ell_m(x) = \|x\|^m P_m^n(x' \cdot \tau), \quad x \in \mathbb{R}_0^n,$$

onde P_m^n é um polinômio em uma variável.

Demonstração: Primeiro, vejamos que podemos tomar $\tau = e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ sem perder a generalidade. Seja $\rho \in \mathcal{O}_n$ tal que $\rho^{-1}\tau = e_n$ e considere a função $\ell_m \circ \rho$. Assim, $\ell_m(\rho e_n) = \ell_m(\tau) = 1$ e se $\rho_1 \in \mathcal{O}_n$ é tal que $\rho_1 e_n = e_n$, então

$$\rho\rho_1\rho^{-1}\tau = \rho\rho_1 e_n = \rho e_n = \tau.$$

Agora, segue de (ii) que

$$\ell_m(\rho\rho_1 x) = \ell_m(\rho\rho_1\rho^{-1}\rho x) = \ell_m(\rho x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

o que prova que $\ell_m \circ \rho$ satisfaz (i) e (ii) com $\tau = e_n$. No que segue, assumimos que $\tau = e_n$. Seja $\omega \in S^{n-1}$. Expandindo $\ell_m(x)$ em relação a $x_{(n-1)} := (x_1, \ldots, x_{n-1})$, obtemos

$$\ell_m(x) = \sum_{j=0}^{m} x_n^j r_{m-j}(x_{(n-1)}),$$

onde $r_{m-j} \in P_h^{m-j}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \ldots, m$. Seja $\rho \in \mathcal{O}_n$ tal que $\rho\tau = \tau$. Se $\rho' = \rho|_{\mathbb{R}^{n-1}}$, onde identificamos $\mathbb{R}^{n-1}$ com o subespaço de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a e_n, então $\rho' \in \mathcal{O}_{n-1}$ e, por (ii),

$$\sum_{j=0}^{m} x_n^j r_{m-j}(\rho' x_{(n-1)}) = \sum_{j=0}^{m} x_n^j r_{m-j}(x_{(n-1)}),$$

isto é, cada r_{m-j} é invariante por $\rho' \in \mathcal{O}_{n-1}$. Logo, cada r_{m-j} é constante em S^{n-2} (visto como a interseção de S^{n-1} com $\mathbb{R}^{n-1}$). Se $x_{(n-1)} \neq 0$, concluímos então que

$$r_{m-j}(x_{(n-1)}) = \|x_{(n-1)}\|^{m-j} r_{m-j}\left(\frac{x_{(n-1)}}{\|x_{(n-1)}\|}\right) = \|x_{(n-1)}\|^{m-j} c_{m-j},$$

onde cada c_{m-j} é constante. Como cada r_{m-j} é um polinômio, segue que $c_{m-j} = 0$ se $m-j$ é ímpar. Vejamos, pois, o que ocorre quando $m-j$ é par. Podemos escrever o laplaciano na forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \Delta', \quad \Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Como $\ell_m \in H^m(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\ell_m(x) &= \sum_{j=0}^{m} \Delta\left(x_n^j r_{m-j}(x_{(n-1)})\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \left(r_{m-j}(x_{(n-1)}) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} x_n^j + x_n^j \Delta' r_{m-j}(x_{(n-1)})\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m} j(j-1) r_{m-j}(x_{(n-1)}) x_n^{j-2} + \sum_{j=0}^{m} x_n^j \Delta' r_{m-j}(x_{(n-1)}). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} x_n^j \Delta' r_{m-j}(x_{(n-1)}) &= -\sum_{j=0}^{m} j(j-1) r_{m-j}(x_{(n-1)}) x_n^{j-2} \\ &= -\sum_{j=0}^{m-2} (j+1)(j+2) r_{m-j-2}(x_{(n-1)}) x_n^j \end{aligned}$$

e temos que

$$\Delta' r_{m-j}(x_{(n-1)}) = -(j+1)(j+2) r_{m-j-2}(x_{(n-1)}).$$

Juntando as informações anteriores,

$$\begin{aligned} -(j+1)(j+2)\|x_{(n-1)}\|^{m-j-2}c_{m-j-2} &= -(j+1)(j+2)r_{m-j-2}(x_{(n-1)}) \\ &= \Delta' r_{m-j}(x_{(n-1)}). \end{aligned}$$

Como $r_{m-j}(x_{(n-1)}) = c_{m-j}\|x_{(n-1)}\|^{m-j}$, segue do Lema 2.1.11 que

$$\begin{aligned} -(j+1)(j+2)\|x_{(n-1)}\|^{m-j-2}c_{m-j-2} &= c_{m-j}\Delta'\|x_{(n-1)}\|^{m-j} \\ &= c_{m-j}(m-j)[(m-j)+n-3]\|x_{(n-1)}\|^{m-j-2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$-(j+1)(j+2)c_{m-j-2} = c_{m-j}(m-j)[(m-j)+n-3], \quad j \in \{0, \ldots, m-2\}. \tag{2.5}$$

Lembrando a condição (i) e usando a homogeneidade dos polinômios r_{m-j}, temos que

$$1 = \ell_m(\tau) = r_0(\tau_{(n-1)}) + \sum_{j=0}^{m-1} r_{m-j}(\tau_{(n-1)}) = r_0(\tau_{(n-1)}).$$

Como r_0 é constante, $c_0 = r_0 = 1$. Desta forma, usando a fórmula (2.5), obtemos os valores de c_{m-j} para $m-j$ par e maior que 0. Finalmente,

$$\begin{aligned} \ell_m(\omega) &= \sum_{j=0}^{m}{}' \, \omega_n^j r_{m-j}(\omega_{(n-1)}) \\ &= \sum_{j=0}^{m}{}' \, \omega_n^j c_{m-j}(\omega_1^2 + \cdots + \omega_{n-1}^2)^{(m-j)/2} \\ &= \sum_{j=0}^{m}{}' \, c_{m-j} t^j (1-t^2)^{(m-j)/2}, \end{aligned}$$

onde $t = \omega_n$, $\omega_1^2 + \cdots + \omega_{n-1}^2 = 1 - t^2$. A soma $\sum{}'$ inclui apenas os $j \in \{0, \ldots, m\}$ para os quais $m-j$ é par. Agora, dado $x \in \mathbb{R}^n$, como ℓ_m é homogêneo de grau $m > 0$, segue da Proposição 2.1.10 que

$$\ell_m(x) = \|x\|^m \ell_m(x') = \|x\|^m P_m^n(x' \cdot \tau), \quad x \in \mathbb{R}_0^n,$$

onde

$$P_m^n(t) = \sum_{j=0}^{m}{}' \, c_{m-j} t^j (1-t^2)^{(m-j)/2}.$$

A prova está, finalmente, completa. ■

Definição 2.5.2. *O polinômio P_m^n de grau m definido no teorema anterior é chamado de polinômio de Legendre de grau m e dimensão n.*

Observação 2.5.3. É fácil ver que $P_m^n(1) = 1$. Mais ainda, se m é par, então $m - j$ par implica que j também é par. Logo,

$$\begin{aligned} P_m^n(-t) &= \sum_{j=0}^{m}{}' \, c_{m-j}(-t)^j \left[1 - (-t)^2\right]^{(m-j)/2} \\ &= \sum_{j=0}^{m}{}' \, c_{m-j} t^j (1 - t^2)^{(m-j)/2} \\ &= P_m^n(t). \end{aligned}$$

Analogamente, se m é ímpar, então $P_m^n(-t) = -P_m^n(t)$. Portanto,

$$P_m^n(-t) = (-1)^m P_m^n(t).$$

Teorema 2.5.4. *Vale a fórmula* $F_m(\omega, \tau) = a_m^n P_m^n(\omega \cdot \tau)$.

Demonstração: Pelo Lema 2.4.5 temos que $F_m(\tau, \tau)$, $\tau \in S^{n-1}$, é constante. Logo,

$$\begin{aligned} a_m^n &= \sum_{j=1}^{a_m^n} \int_{S^{n-1}} h_m^j(\omega) \overline{h_m^j}(\omega) d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} \sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\omega) \overline{h_m^j}(\omega) d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} F_m(\omega, \omega) d\omega \\ &= F_m(\tau, \tau). \end{aligned}$$

Agora, fixando $\tau \in S^{n-1}$, segue da definição que $(a_m^n)^{-1} F_m(\cdot\,, \tau) \in \mathcal{H}_m^n$. Além disso, essa função satisfaz as condições do Teorema 2.5.1. Portanto,

$$P_m^n(\omega \cdot \tau) = \frac{1}{a_m^n} F_m(\omega, \tau).$$

Esta é a igualdade do enunciado. ■

Corolário 2.5.5. (Fórmula da Adição) *Vale a igualdade*

$$\sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\omega) \overline{h_m^j}(\tau) = a_m^n P_m^n(\omega \cdot \tau), \quad \tau, \omega \in S^{n-1}.$$

Demonstração: Segue imediatamente da definição de F_m e do teorema anterior. ■

Corolário 2.5.6. *Seja* $m \in \mathbb{N}$. *Então, os coeficientes de* P_m^n *são reais, isto é,* $\overline{P_m^n}(t) = P_m^n(t)$, $t \in [-1, 1]$.

Demonstração: Pela Fórmula da Adição,

$$\overline{P_m^n}(\omega \cdot \tau) = \frac{1}{a_m^n} \sum_{j=1}^{a_m^n} \overline{h_m^j}(\omega) h_m^j(\tau) = P_m^n(\tau \cdot \omega) = P_m^n(\omega \cdot \tau).$$

Isto basta. ■

Corolário 2.5.7. *Vale a igualdade*

$$\sum_{j=1}^{a_m^n} |h_m^j(\omega)|^2 = a_m^n, \quad \omega \in S^{n-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Pela demonstração do Teorema 2.5.4 temos que $P_m^n(1) = 1$. Portanto, para qualquer $\omega \in S^{n-1}$, temos, pela Fórmula da Adição, que

$$\sum_{j=1}^{a_m^n} |h_m^j(\omega)|^2 = a_m^n P_m^n(\omega \cdot \omega) = a_m^n P_m^n(1) = a_m^n.$$

Isto conclui a prova. ■

Corolário 2.5.8. *Valem as estimativas* $-1 \leq P_m^n(t) \leq 1$, $t \in [-1, 1]$.

Demonstração: Segue da Fórmula da Adição e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|P_m^n(\omega \cdot \tau)|^2 = \left| \frac{1}{a_m^n} \sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\omega)\overline{h_m^j}(\tau) \right|^2 \leq \left[\frac{1}{a_m^n} \sum_{j=1}^{a_m^n} |h_m^j(\omega)|^2 \right] \left[\frac{1}{a_m^n} \sum_{j=1}^{a_m^n} |h_m^j(\tau)|^2 \right].$$

Portanto, o resultado segue do Corolário 2.5.7. ■

2.6 Estimativas para os harmônicos esféricos e suas derivadas

Os harmônicos esféricos, bem como suas derivadas de qualquer ordem, são restrições de funções de classe C^∞ a um conjunto compacto. Como tal, eles definem funções limitadas. Nessa seção, nosso objetivo é obter limitantes convenientes para estas funções.

Lema 2.6.1. *Sejam* $m \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Se* $p \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$, *então a aplicação* $x \in \mathbb{R}^n \to \|\nabla D^\alpha p(x)\|^2$ *é um polinômio homogêneo de grau* $2(m - |\alpha| - 1)$.

Demonstração: Sejam $p \in P_h^m(\mathbb{R}^n)$ e $k = |\alpha|$. A Observação 2.1.6 nos conta que $D^\alpha p \in P_h^{m-k}(\mathbb{R}^n)$. Da mesma forma, $\partial D^\alpha p / \partial x_j \in P_h^{m-k-1}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo,

$$\|\nabla D^\alpha p(tx)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| t^{m-k-1} \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha p(x) \right|^2 = t^{2(m-k-1)} \|\nabla D^\alpha p(x)\|^2, \quad t > 0, \quad x \neq 0,$$

e o resultado segue. ■

Lema 2.6.2. *A derivada direcional* $\partial/\partial\nu$ *na direção da normal exterior à* S^{n-1} *satisfaz a fórmula*

$$\|x\| \frac{\partial}{\partial \nu} p(x) = mp(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in P_h^m(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Para $m = 0$ é óbvio. Seja, pois, $m > 0$. Escrevendo p na forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

e usando coordenadas esféricas obtemos

$$p(x) = p(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (rp_1)^{\alpha_1} \dots (rp_n)^{\alpha_n} = r^m \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n},$$

onde $p_j = x_j(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Segue que

$$r\frac{\partial}{\partial \nu} p(x) = r\left(\frac{\partial}{\partial \nu} r^m\right) \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} = mr^m \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} = mp(x),$$

o que ratifica a fórmula. ■

Lema 2.6.3. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to Y$ uma função homogênea de grau $\lambda \neq -n$. Então,*

$$\int_{\|x\| \leq 1} f(x)\, dx = \frac{1}{n + \lambda} \int_{S^{n-1}} f(\omega)\, d\sigma(\omega).$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.0.1 temos

$$\int_{\|x\| \leq 1} f(x)\, dx = \int_0^1 \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1}\, d\sigma(x')\, dr.$$

Assim, pela Proposição 2.1.10, obtemos

$$\int_{\|x\| \leq 1} f(x)\, dx = \int_0^1 r^{\lambda+n-1} dr \int_{S^{n-1}} f(x')\, d\sigma(x') = \frac{1}{n + \lambda} \int_{S^{n-1}} f(\omega)\, d\sigma(\omega),$$

a fórmula do enunciado. ■

Teorema 2.6.4. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes afirmações:*
(i) Se $m \neq 0$, existe uma constante $c(n)$ tal que

$$|h_m^n(\omega)| \leq c(n) m^{(n-2)/2}, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

(ii) Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| + m > 0$, então existe uma constante $c(|\alpha|, n)$ tal que

$$|D^\alpha [\|x\|^m h_m^n(x')]| \leq c(|\alpha|, n) m^{|\alpha| + (n-2)/2} \|x\|^{m - |\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}_0^n.$$

Demonstração: Primeiro, notemos que $|h_0^1| = 1$, de modo que a desigualdade em (i) não vale para $m = 0$. Porém, se $m \in \mathbb{Z}_+$, então a afirmação (i) segue do Corolário 2.5.7 e do Corolário 2.2.15.

Para justificar (ii), consideramos casos separados. Se $|\alpha| = 0 \neq m$, então (ii) segue diretamente de (i). Se $|\alpha| > 0 = m$, obtemos a igualdade. Resta-nos analisar o caso em que $m > 0$ e $|\alpha| > 0$. Vamos analisar apenas o caso $m > 0$ e $|\alpha| = 1$, uma vez que o caso geral é apenas, e tão somente, uma adaptação deste. Começamos definindo

$$p(x) := \|x\|^m h_m^n(x'), \quad x \in \mathbb{R}_0^n.$$

Pela Proposição 2.1.10 e pela definição de $\mathcal{H}_m^n$, temos que $p \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Como o Teorema 1.0.5 justifica a igualdade

$$\Delta \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta p = 0,$$

da Observação 2.1.6 obtemos que $\partial p/\partial x_j \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$. Então, podemos encontrar constantes $c_j \in Y$ tais que

$$\frac{\partial p}{\partial x_j}(x') = \sum_{l=1}^{a_{m-1}^n} c_l h_{m-1}^l(x').$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pelo Corolário 2.5.7 obtemos

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x_j}(x') \right|^2 \leq \left(\sum_{l=1}^{a_{m-1}^n} |c_l|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{a_{m-1}^n} |h_{m-1}^n(x')|^2 \right) \leq a_{m-1}^n \sum_{l=1}^{a_{m-1}^n} |c_l|^2.$$

Como

$$\sum_{l=1}^{a_{m-1}^n} |c_l|^2 = \int_{S^{n-1}} \left| \frac{\partial p}{\partial x_j}(\omega) \right|^2 d\sigma(\omega) \leq \int_{S^{n-1}} \|\nabla p(\omega)\|^2 \, d\sigma(\omega),$$

chegamos a

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x_j}(x') \right|^2 \leq a_{m-1}^n \int_{S^{n-1}} \|\nabla p(\omega)\|^2 \, d\sigma(\omega).$$

Sendo $\|\nabla p\|^2$ homogênea de grau $2(m-1)$ pelo Lema 2.6.1, uma aplicação do Lema 2.6.3 nos leva a

$$\int_{S^{n-1}} \|\nabla p(\omega)\|^2 \, d\sigma(\omega) = (2m+n-2) \int_{\mathcal{B}_n} \|\nabla p(x)\|^2 \, dx,$$

onde $\mathcal{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Mas, como p é harmônico, segue do Teorema 1.0.2 que

$$\int_{S^{n-1}} \overline{p}(\omega) \frac{\partial p}{\partial \nu}(\omega) \, d\sigma(\omega) = \int_{\mathcal{B}_n} \overline{p}(x) \Delta p(x) \, dx + \int_{\mathcal{B}_n} \|\nabla p(x)\|^2 \, dx = \int_{\mathcal{B}_n} \|\nabla p(x)\|^2 \, dx.$$

No entanto, pelo Lema 2.6.2 e pela definição de p, temos que

$$\int_{S^{n-1}} \overline{p}(\omega) \frac{\partial p}{\partial \nu}(\omega) \, d\sigma(\omega) = m \int_{S^{n-1}} |p(\omega)|^2 \, d\sigma(\omega) = m \int_{S^{n-1}} |h_m^n(\omega)|^2 \, d\sigma(\omega) = m.$$

Combinando os dados acima, vem que

$$\int_{S^{n-1}} \|\nabla p(\omega)\|^2 d\sigma(\omega) = m(2m+n-2).$$

Voltando à desigualdade e aplicando o Teorema 2.2.15 e o Lema 1.0.8, encontramos

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x_j}(x')\right|^2 \leq c_1(n)(m-1)^{n-2}m(2m+n-2) \leq c(|\alpha|,n)^2 m^n.$$

Conseqüentemente,

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x_j}(x')\right| \leq c(|\alpha|,n)m^{1+(n-2)/2}.$$

Como $\partial p/\partial x_j$ é homogêneo de grau $m-1$, a desigualdade anterior implica que

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x_j}(x)\right| \leq c(|\alpha|,n)m^{1+(n-2)/2}\|x\|^{m-1}.$$

Isto conclui a prova. ■

2.7 Diferenciabilidade em $L^1(S^{n-1})$

Nosso objetivo agora é obter condições necessárias e/ou suficientes para que uma função integrável sobre S^{n-1} tenha uma ordem de diferencibilidade finita. Como no caso de séries de Fourier usuais, veremos que tais condições estão intimamente relacionadas ao decaimento dos coeficientes de Fourier da função. Para o caso em que a ordem de diferenciabilidade é infinita, as condições tornam-se necessárias e suficientes.

Notação: Escreveremos $f_k \xrightarrow{u} f$ para indicar que a seqüência de funções $\{f_k\}$ converge uniformemente para a função f.

Lema 2.7.1. *Se $f_k \xrightarrow{u} f$ em S^{n-1}, então $\tilde{f}_k \xrightarrow{u} \tilde{f}$ em $\mathbb{R}^n_0$.*

Demonstração: Segue diretamente da Definição 2.1.1. ■

Lema 2.7.2. *Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $\{f_k\}$ uma seqüência de funções de $C^r(S^{n-1})$. Se $f_k \xrightarrow{u} f$ e $D^\alpha f_k \xrightarrow{u} g_\alpha$, $|\alpha| \leq r$, então $f \in C^r(S^{n-1})$ e $D^\alpha f = g_\alpha$.*

Demonstração: Se $r = 0$, o resultado segue do Teorema da Continuidade do Limite Uniforme ([13, p.268]). Assuma agora que $r = 1$. Em vista do enunciado, vamos assumir ainda que para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, existe uma função contínua g_j tal que $\partial f_k/\partial x_j \xrightarrow{u} g_j$. Pelo Lema 2.7.1 temos que $\partial \tilde{f}_k/\partial x_j \xrightarrow{u} \tilde{g}_j$ em $\mathbb{R}^n_0$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Conseqüentemente, $d\tilde{f}_k \xrightarrow{u} G$, onde $d\tilde{f}_k = (\partial \tilde{f}_k/\partial x_j)_{1\times n}$ e $G = (\tilde{g}_j)_{1\times n}$. Segue do Teorema 1.0.16 que $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n_0)$ e $d\tilde{f} = G$, onde $d\tilde{f} = (\partial \tilde{f}/\partial x_j)_{1\times n}$. Portanto, $\partial \tilde{f}/\partial x_j = \tilde{g}_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. A conclusão do lema segue por restrição à S^{n-1}. O caso geral segue por um procedimento similar ao acima descrito. ■

A seguir, apresentamos os resultados principais deste capítulo.

Teorema 2.7.3. *Sejam $r \in \mathbb{Z}_+$ e $f \in L^1(S^{n-1})$. Se existir uma função $g \in C^{2r}(S^{n-1})$ tal que $g = f$ q.s., então $|\hat{f}_{m,k}| = O(m^{-2r})$, $k \in \{1,\ldots,a^k_m\}$.*

Demonstração: Primeiro, assumimos a existência de f como descrito no enunciado e fixamos k e m. Pelo Teorema 2.2.4 temos que

$$\hat{f}_{m,k} = (-\lambda_{m,n})^{-r}(f, \Delta_n^r h_m^k)_2.$$

No entanto, pela hipótese, Teorema 2.1.9 e Desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que

$$|(f, \Delta_n^r h_m^k)_2| = |(g, \Delta_n^r h_m^k)_2| = |(\Delta_n^r g, h_m^k)_2| \leq \|\Delta_n^r g\|_2 \|h_m^k\|_2 = \|\Delta_n^r g\|_2.$$

Combinando os fatos acima e empregando o Corolário 1.0.8, encontramos uma constante $c(n)$ tal que

$$|\hat{f}_{m,k}| \leq c(n) m^{-2r} \|\Delta_n^r g\|_2.$$

O resultado segue. ■

Corolário 2.7.4. *Sejam r e f como no teorema anterior. Se existir uma função $g \in C^r(S^{n-1})$ tal que $g = f$ q.s., então $|\hat{f}_{m,k}| = O(m^{-s})$, $k \in \{1, \ldots, a_m^k\}$, onde $s = 2\lfloor r/2 \rfloor$.*

Demonstração: O resultado é conseqüência do teorema anterior, analisando-se separadamente os casos r par e r ímpar. ■

Analisamos agora a recíproca dos resultados acima.

Teorema 2.7.5. *Sejam $r \in \mathbb{Z}_+$ e $f \in L^1(S^{n-1})$. Se $|\hat{f}_{m,k}| = O(m^{-2r})$, $k \in \{1, \ldots, a_m^k\}$, e $4r \geq 3n - 2$, então existe uma função $g \in C^s(S^{n-1})$ tal que $g = f$ q.s., onde $s = \lfloor (4r - 3n + 2)/2 \rfloor$.*

Demonstração: Fixemos um inteiro não negativo j tal que $2j \leq 4r - 3n + 2$. Tomemos $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq j$ e consideremos a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} D^\alpha h_m^k.$$

Pretendemos utilizar o Teste M de Weierstrass para garantir a convergência uniforme da série. Pelo Teorema 2.6.4-(ii) temos que

$$\left| \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} D^\alpha h_m^k(\omega) \right| \leq \sum_{k=1}^{a_m^n} |\hat{f}_{m,k}| |D^\alpha h_m^k(\omega)| \leq c(|\alpha|, n) \sum_{k=1}^{a_m^n} m^{|\alpha| + (n-2)/2} |\hat{f}_{m,k}|, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Se $|\hat{f}_{m,k}| = O(m^{-2r})$, então

$$\sum_{k=1}^{a_m^n} m^{|\alpha| + (n-2)/2} |\hat{f}_{m,k}| = \sum_{k=1}^{a_m^n} m^{|\alpha| - 2r + (n-2)/2} m^{2r} |\hat{f}_{m,k}| \leq c_1(n) a_m^n m^{|\alpha| - 2r + (n-2)/2}.$$

Agora, segue das condições impostas sobre $|\alpha|$ e r e do Teorema 2.2.15 que

$$a_m^n m^{|\alpha| - 2r + (n-2)/2} \leq a_m^n m^{-n} = \frac{a_m^n}{m^{n-2}} m^{-2} \leq c_2(n) m^{-2}, \quad m > 0.$$

Combinando as informações acima, obtemos

$$\left|\sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} D^\alpha h_m^k\right| \leq c_4 m^{-2}, \quad m > 0,$$

onde $c_4 = c(|\alpha|, n)c_1(n)c_2(n)$. Garantimos, assim, a convergência uniforme da série para uma função contínua g_α. Definindo $g := g_0$, podemos usar o Lema 2.7.2 para concluir que $g \in C^j(S^{n-1})$ e $D^\alpha g = g_\alpha$. Como isto vale para qualquer j satisfazendo $2j \leq 4r - 3n + 2$, então $g \in C^s(S^{n-1})$. Finalmente, $g = f$ q.s., devido ao Teorema 2.3.5 e o resultado está provado. ■

Teorema 2.7.6. *Seja $f \in L^1(S^{n-1})$. São equivalentes:*
(i) Existe uma função $g \in C^\infty(S^{n-1})$ tal que $g = f$ q.s.;
(ii) $|\hat{f}_{m,k}| = O(m^{-r})$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração: Conseqüência do Corolário 2.7.4 e do Teorema 2.7.5. ■

Capítulo 3

Diferenciabilidade forte de Laplace-Beltrami

Agora, introduzimos outra noção de diferenciabilidade de funções definidas em S^{n-1}: a derivada forte de Laplace-Beltrami. Para isto, estudaremos rapidamente alguns importantes operadores associados: a projeção, a translação e a diferença esféricas. Incluiremos provas para vários resultados importantes, como por exemplo, o Teorema de Funk-Hecke.

Deste capítulo em diante, usaremos a letra X para representar qualquer dos espaços $C(S^{n-1})$ e $L^p(S^{n-1})$, $1 \leq p < \infty$.

3.1 O Teorema de Funk-Hecke

Nosso objetivo aqui é provar o Teorema de Funk-Hecke, o qual relaciona integração em S^{n-1} com integração no intervalo $[-1, 1]$.

Consideremos o espaço $L^{1,n} := L^1\left([-1, 1], d\omega_n(t)\right)$, onde $d\omega_n(t) := (1-t^2)^{(n-3)/2}dt$. Neste espaço, definimos a norma

$$\|K\|_{1,n} := \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} |K(t)|\, d\omega_n(t), \quad K \in L^{1,n}. \tag{3.1}$$

Fixado $K \in L^{1,n}$, definimos o núcleo $F\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}$ por

$$F(\tau, \eta) = \int_{S^{n-1}} K(\tau \cdot \omega) P_m^n(\omega \cdot \eta) d\omega, \quad \tau, \eta \in S^{n-1}. \tag{3.2}$$

Proposição 3.1.1. $F(\tau, \cdot) \in \mathcal{H}_m^n$, $\tau \in S^{n-1}$.

Demonstração: Pela Fórmula da Adição temos que

$$\begin{aligned} F(\tau,\eta) &= \int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)\left[\frac{1}{a_m^n}\sum_{j=1}^{a_m^n} h_m^j(\eta)\overline{h_m^j}(\omega)\right] d\omega \\ &= \sum_{j=1}^{a_m^n}\left[\frac{1}{a_m^n}\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)\overline{h_m^j}(\omega)\,d\omega\right] h_m^j(\eta) \\ &= \sum_{j=1}^{a_m^n} c_j(\tau)h_m^j(\eta), \quad \tau,\eta\in S^{n-1}, \end{aligned}$$

onde

$$c_j(\tau) = \frac{1}{a_m^n}\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)\overline{h_m^j}(\omega)\,d\omega.$$

Isto prova a proposição. ■

Proposição 3.1.2. *Seja $\tau\in S^{n-1}$. Na notação da proposição anterior, ainda temos $F(\tau,\eta) = F(\tau,\tau)P_m^n(\tau\cdot\eta)$, $\eta\in S^{n-1}$.*

Demonstração: Se $K = 0$ em $L^{1,n}$, então não há o que provar. Se, ao contrário, $K\neq 0$, então existe $\tau\in S^{n-1}$ tal que $F(\tau,\tau)\neq 0$. Como $F(\tau,\cdot)\in\mathcal{H}_m^n$, então existe $p\in H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $p|_{S^{n-1}} = F(\tau,\cdot)$. Definimos a função $\ell(x) = p(x)/F(\tau,\tau)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Como

$$\ell(tx) = \frac{p(tx)}{F(\tau,\tau)} = t^m\frac{p(x)}{F(\tau,\tau)} = t^m\ell(x), \quad x\neq 0, \quad t>0$$

e

$$\Delta\ell(x) = \frac{1}{F(\tau,\tau)}\Delta p(x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

então $\ell\in H^m(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda,

$$\ell(\tau) = \frac{p(\tau)}{F(\tau,\tau)} = \frac{p|_{S^{n-1}}(\tau)}{F(\tau,\tau)} = \frac{F(\tau,\tau)}{F(\tau,\tau)} = 1.$$

Também temos, pelo Teorema 1.0.10, que $F(\rho\omega,\rho\eta) = F(\omega,\eta)$, $\rho\in\mathcal{O}_n$, $\omega,\eta\in S^{n-1}$. Logo, se $\rho\in\mathcal{O}_n$ satisfaz $\rho\tau=\tau$, então

$$\ell(\rho x) = \|\rho x\|^m\frac{F(\tau,\rho x/\|\rho x\|)}{F(\tau,\tau)} = \frac{\|x\|^m F(\rho^{-1}\tau, x/\|x\|)}{F(\tau,\tau)} = \frac{p(x)}{F(\tau,\tau)} = \ell(x).$$

Assim, como ℓ satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.5.1, concluímos que $\ell(\eta) = P_m^n(\tau\cdot\eta)$, $\eta\in S^{n-1}$. Segue que

$$F(\tau,\eta) = F(\tau,\tau)P_m^n(\tau\cdot\eta), \quad \eta\in S^{n-1}. \tag{3.3}$$

Para finalizar, sejam $\omega\in S^{n-1}$ e $\rho\in\mathcal{O}_n$ tal que $\rho\tau=\omega$. Então, segue da invariância de F por transformações ortogonais e de (3.3), que

$$F(\omega,\eta) = F(\tau,\rho^{-1}\eta) = F(\tau,\tau)P_m^n(\tau\cdot\rho^{-1}\eta) = F(\omega,\omega)P_m^n(\omega\cdot\eta), \quad \eta\in S^{n-1}.$$

Como ω foi tomado arbitrariamente em S^{n-1}, o resultado segue. ■

Lema 3.1.3. *Seja $K \in L^{1,n}$. Então,*

$$\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)P_m^n(\omega\cdot\eta)\,d\omega = \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}P_m^n(\tau\cdot\eta)\int_{-1}^1 K(t)P_m^n(t)\,d\omega_n(t), \quad \tau,\eta\in S^{n-1}.$$

Demonstração: Por (1.2) temos

$$F(\tau,\tau) = \int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)P_m^n(\omega\cdot\tau)\,d\omega = \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^1 K(t)P_m^n(t)\,d\omega_n(t),$$

onde $t = \tau\cdot\omega = \omega\cdot\tau$. Portanto, segue da Proposição 3.1.2, que

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)P_m^n(\omega\cdot\eta)\,d\omega &= F(\tau,\tau)P_m^n(\tau\cdot\eta)\\ &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}P_m^n(\tau\cdot\eta)\int_{-1}^1 K(t)P_m^n(t)\,d\omega_n(t).\end{aligned}$$

Isto prova o lema. ■

Teorema 3.1.4. (Funk-Hecke) *Seja $K \in L^{1,n}$. Se $p\in\mathcal{H}_m^n$, então*

$$\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)p(\omega)\,d\omega = \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}p(\tau)\int_{-1}^1 K(t)P_m^n(t)\,d\omega_n(t).$$

Demonstração: Seja $p\in\mathcal{H}_m^n$. Usando a propriedade reprodutora de P_m^n obtemos

$$\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)p(\omega)\,d\omega = a_m^n\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)\int_{S^{n-1}} p(\eta)P_m^n(\omega\cdot\eta)\,d\eta\,d\omega. \tag{3.4}$$

Como K é mensurável, segue do Teorema de Fubini, que

$$\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)\int_{S^{n-1}} p(\eta)P_m^n(\omega\cdot\eta)\,d\eta\,d\omega = \int_{S^{n-1}} p(\eta)\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)P_m^n(\omega\cdot\eta)\,d\omega\,d\eta.$$

Aplicando o Lema 3.1.3 na igualdade anterior e substituindo em (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\omega)p(\omega)d\omega &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\,a_m^n\int_{S^{n-1}} p(\eta)P_m^n(\tau\cdot\eta)\,d\eta\int_{-1}^1 K(t)P_m^n(t)\,d\omega_n(t).\\ &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\,p(\tau)\int_{-1}^1 K(t)P_m^n(t)\,d\omega_n(t).\end{aligned}$$

Isto garante o resultado. ■

3.2 Sistemas fundamentais em S^{n-1}

Nesta seção, mostraremos que a integral na fórmula reprodutora do Lema 2.4.6 pode ser escrita como uma soma finita.

Definição 3.2.1. *Um conjunto* $\{\omega^1, \ldots, \omega^{a_m^n}\} \subset S^{n-1}$ *é chamado de sistema fundamental de ordem* m *se o determinante da matriz de ordem* a_m^n *com entradas* $P_m^n(\omega^i \cdot \omega^j)$ *é positivo.*

O próximo resultado é o passo inicial para se provar a existência de sistemas fundamentais em S^{n-1}.

Lema 3.2.2. *Sejam* $k \in \{1, \ldots, a_m^n\}$ *e* $\{p_m^k : k = 1, \ldots, N\}$ *um subconjunto linearmente independente de* $\mathcal{H}_m^n$*. Então, existem pontos* $\omega^1, \ldots, \omega^k$ *em* S^{n-1} *para os quais o determinante da matriz* $k \times k$ *com entradas* $p_m^k(\omega^j)$ *é positivo.*

Demonstração: Primeiro, escolhemos $\omega^1 \in S^{n-1}$ tal que $p_1^m(\omega^1) \neq 0$. Como $\{p_m^1, p_m^2\}$ é linearmente independente, o harmônico esférico de grau m e dimensão n

$$p(\omega) := p_m^1(\omega^1)p_m^2(\omega) - p_m^2(\omega^1)p_m^1(\omega)$$

não é identicamente nulo. Logo, existe $\omega^2 \in S^{n-1}$ tal que $p(\omega^2) \neq 0$. Portanto,

$$\det\left(p_m^k(\omega^j)\right)_{2\times 2} \neq 0.$$

O resultado segue por indução. ■

Teorema 3.2.3. *Para cada* $m \in \mathbb{Z}_+$*, existe pelo menos um sistema fundamental de ordem* m *em* S^{n-1}*.*

Demonstração: Apliquemos o lema anterior com $k = a_m^n$. Pela Fórmula da Adição temos

$$P_m^n(\omega^i \cdot \omega^j) = \frac{1}{a_m^n}\sum_{k=1}^{a_m^n} h_m^k(\omega^i)\overline{h_m^k}(\omega^j),$$

e temos a seguinte igualdade de matrizes

$$\left(P_m^n(\omega^i \cdot \omega^j)\right) = \frac{1}{a_m^n}\ \left(\overline{h_m^k}(\omega^j)\right)^T_{j\times k}\left(h_m^k(\omega^i)\right)_{k\times i}.$$

Assim,

$$\det\left(P_m^n(\omega^i \cdot \omega^j)\right) = \left(\frac{1}{a_m^n}\right)^{a_m^n}\left[\det\left(h_m^k(\omega^i)\right)\right]^2 > 0,$$

e o teorema segue. ■

Teorema 3.2.4. *Seja* $\{\omega^1, \ldots, \omega^{a_m^n}\} \subset S^{n-1}$ *um sistema fundamental de ordem* m*. Se* $p \in \mathcal{H}_m^n$*, então*

$$p(\omega) = \sum_{j=1}^{a_m^n} c_j P_m^n(\omega^j \cdot \omega), \quad c_j \in Y, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Demonstração: Os cálculos feitos na demonstração anterior mostram que o determinante da matriz $(h_m^k(\omega^j))$ é não-nulo. Agora, pela Fórmula da Adição,

$$P_m^n(\omega^j \cdot \omega) = \frac{1}{a_m^n} \sum_{k=1}^{a_m^n} h_m^k(\omega)\overline{h_m^k}(\omega^j), \quad j \in \{1, \ldots, a_m^n\}, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear acima não se anula, podemos resolvê-lo e expressar h_m^k como uma combinação linear de $P_m^n(\omega^j \cdot \star)$, $j \in \{1, \ldots, a_m^n\}$. O mesmo vale para um elemento genérico de $\mathcal{H}_m^n$. ■

Corolário 3.2.5. *Seja $p \in \mathcal{H}_m^n$. Então, existem constantes $c_j \in Y$, $j \in \{1, \ldots, a_m^n\}$, tais que*

$$\int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega \cdot \tau)p(\tau)\, d\tau = \sum_{j=1}^{a_m^n} c_j P_m^n(\omega^j \cdot \omega),$$

onde $\{\omega^1, \ldots, \omega^{a_m^n}\} \subset S^{n-1}$ é um sistema fundamental de ordem m.

Demonstração: Segue do teorema anterior e do Lema 2.4.6. ■

3.3 O operador projeção

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades básicas do operador projeção de X sobre $\mathcal{H}_m^n$, cuja definição é motivada por ambos, a propriedade reprodutora do núcleo de reprodução e a estreita relação deste com os polinômios de Legendre (veja o Teorema 2.5.4).

Definição 3.3.1. *O operador projeção é a aplicação $\mathcal{P}_m : X \to X$ dada por*

$$\mathcal{P}_m(f)(\omega) := a_m^n \int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega \cdot \tau) f(\tau)\, d\tau, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

O fato de $\mathcal{P}_m$ ser uma projeção segue dos resultados seguintes .

Proposição 3.3.2. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $f \in X$. Então, $\mathcal{P}_m(f) \in \mathcal{H}_m^n$.*

Demonstração: De fato, aplicando a Fórmula da Adição na Definição 3.3.1 vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(f)(\omega) &= a_m^n \int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega \cdot \tau) f(\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{k=1}^{a_m^n} h_m^k(\omega) \int_{S^{n-1}} f(\tau)\overline{h_m^k}(\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} h_m^k(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

o que conclui a prova. ■

Proposição 3.3.3. *Sejam $m, \mu \in \mathbb{N}$. Então, $\mathcal{P}_m \circ \mathcal{P}_\mu = \delta_{m,\mu}\mathcal{P}_m$.*

Demonstração: Aplicando duas vezes a proposição anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(\mathcal{P}_\mu(f)) &= \sum_{k=1}^{a_m^n} \widehat{\mathcal{P}_\mu(f)}_{m,k} h_m^k \\
&= \sum_{k=1}^{a_m^n} \left(\int_{S^{n-1}} \mathcal{P}_\mu(f)(\omega)\overline{h_m^k}(\omega)\, d\omega \right) h_m^k \\
&= \sum_{k=1}^{a_m^n} \sum_{\kappa=1}^{a_\mu^n} \hat{f}_{\mu,\kappa} \left(\int_{S^{n-1}} h_\mu^\kappa(\omega)\overline{h_m^k}(\omega)\, d\omega \right) h_m^k \\
&= \delta_{m,\mu} \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} h_m^k \\
&= \delta_{m,\mu}\mathcal{P}_m(f), \quad f \in X.
\end{aligned}$$

Isso prova a proposição. ■

Teorema 3.3.4. *Seja $f \in X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $\mathcal{P}_m(f) = 0$ em X, $m \in \mathbb{N}$;
(ii) $f = 0$ em X.

Demonstração: Se $f = 0$ em X, está claro que $\mathcal{P}_m(f) = 0$ em X, $m \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{P}_m(f) = 0$ em X, $m \in \mathbb{N}$. Consideramos primeiramente os casos $X = C(S^{n-1})$ e $X = L^2(S^{n-1})$. Fixamos $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, a_m^n\}$ e escolhemos um sistema fundamental $\{\omega^1, \ldots, \omega^{a_m^n}\}$ de ordem m em S^{n-1}. Pelo Teorema 3.2.4, existem constantes $c_{m,j} \in Y$ tais que

$$h_m^k(\omega) = \sum_{j=1}^{a_m^n} c_{m,j} P_m^n(\omega^j \cdot \omega), \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Logo,

$$\int_{S^{n-1}} h_m^k(\omega) f(\omega)\, d\omega = \sum_{j=1}^{a_m^n} c_{m,j} \int_{S^{n-1}} f(\omega) P_m^n(\omega^j \cdot \omega)\, d\omega = \sum_{j=1}^{a_m^n} c_{m,j} \mathcal{P}_m(f)(\omega^j) = 0.$$

Como $\{h_m^k : k = 1, \ldots, a_m^n,\, m \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto ortonormal completo de $L^2(S^{n-1})$, segue que $f = 0$ em X. Se $f \in L^1(S^{n-1}) \setminus L^2(S^{n-1})$, procedendo como antes encontramos

$$\int_{S^{n-1}} h_m^k(\omega) f(\omega)\, d\omega = 0, \quad k \in \{1, \ldots, a_m^n\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Para terminar a prova é suficiente mostrar que (veja o Teorema 1.0.11)

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega) h(\omega)\, d\omega = 0, \quad h \in C(S^{n-1}).$$

Seja $p \in P(S^{n-1})$. Pelo Corolário 2.2.9 p pode ser escrito como combinação linear de harmônicos esféricos. Logo,

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega)p(\omega)\,d\omega = 0, \quad p \in P(S^{n-1}).$$

Se $h \in C(S^{n-1})$, segue do Teorema da Aproximação de Weierstrass que existe uma seqüência $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P(S^{n-1})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|h - p_n\|_\infty = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{S^{n-1}} f(\omega)h(\omega)\,d\omega\right| &\leq \left|\int_{S^{n-1}} f(\omega)(h-p_n)(\omega)\,d\omega\right| + \left|\int_{S^{n-1}} f(\omega)p_n(\omega)\,d\omega\right| \\
&\leq \int_{S^{n-1}} |f(\omega)||(h-p_n)(\omega)|\,d\omega \\
&\leq \|h-p_n\|_\infty \int_{S^{n-1}} |f(\omega)|\,d\omega.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ na última desigualdade obtemos

$$\int_{S^{n-1}} f(\omega)h(\omega)\,d\omega = 0,$$

completando a prova do teorema. ■

Proposição 3.3.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes propriedades:*
(i) $\mathcal{P}_m(h^k_\mu) = \delta_{m\mu} h^k_m$, $k \in \{1,\ldots,a^n_\mu\}$;
(ii) $|\mathcal{P}_m(f)(\omega)| \leq a^n_m \|f\|_X$, $f \in X$, $\omega \in S^{n-1}$;
(iii) $\|\mathcal{P}_m(f)\|_X \leq a^n_m \|f\|_X$, $f \in X$.

Demonstração: Se $k \in \{1,\ldots,a^n_\mu\}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(h^k_\mu)(\omega) &= a^n_m \int_{S^{n-1}} h^k_\mu(\tau) P^n_m(\omega\cdot\tau)\,d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{a^n_m} h^j_m(\omega) \int_{S^{n-1}} h^k_\mu(\tau)\overline{h^j_m}(\tau)\,d\tau \\
&= \delta_{m,\mu} h^k_m(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}.
\end{aligned}$$

Isso prova (i). Para provar (ii), consideremos primeiramente os casos em que $X = C(S^{n-1})$ e $X = L^1(S^{n-1})$. Se $f \in X$, então segue do Corolário 2.5.8 que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}_m(f)(\omega)| &\leq a^n_m \int_{S^{n-1}} |P^n_m(\omega\cdot\tau)||f(\tau)|\,d\tau \\
&\leq a^n_m \|f\|_X, \quad \omega \in S^{n-1}.
\end{aligned}$$

Para o caso em que $X = L^p(S^{n-1})$, $1 < p < \infty$, sejam $f \in X$ e q o expoente conjugado de p. Como $P_m^n(\omega \cdot \star) \in L^q(S^{n-1})$, $\omega \in S^{n-1}$, a Desigualdade de Hölder e, novamente, o Corolário 2.5.8 implicam que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}_m(f)(\omega)| &\leq a_m^n \int_{S^{n-1}} |P_m^n(\omega \cdot \tau)||f(\tau)|\, d\tau \\
&\leq a_m^n \|P_m^n(\omega \cdot \star)\|_q \|f\|_p \\
&\leq a_m^n \|f\|_p\,, \quad \omega \in S^{n-1}.
\end{aligned}$$

O item (iii) segue diretamente de (ii). Assim, a prova do teorema está completa. ■

3.4 A convolução esférica

Introduzimos agora o conceito de convolução para funções definidas em S^{n-1}. Para um estudo aprofundado do conceito sugerimos [10], [21], e [32].

Definição 3.4.1. *Sejam $f \in L^p(S^{n-1})$, $1 \leq p \leq \infty$, e $K \in L^{1,n}$. A convolução esférica de f com K é a função $K * f$, dada por*

$$(K * f)(\omega) := \int_{S^{n-1}} f(\tau) K(\omega \cdot \tau)\, d\tau.$$

O Teorema 6.18 de [9, p.193] garante que a definição é consistente.

Proposição 3.4.2. *Sejam $K \in L^{1,n}$ e $f, g \in X$. Então,*

$$\int_{S^{n-1}} (K * f)(\omega) g(\omega)\, d\omega = \int_{S^{n-1}} f(\omega)(K * g)(\omega)\, d\omega.$$

Demonstração: Usando o Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} (K * f)(\omega) g(\omega)\, d\omega &= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{S^{n-1}} K(\omega \cdot \tau) f(\tau)\, d\tau \right) g(\omega)\, d\omega \\
&= \int_{S^{n-1}} f(\tau) \left(\int_{S^{n-1}} K(\omega \cdot \tau) g(\omega)\, d\omega \right) d\tau \\
&= \int_{S^{n-1}} f(\tau)(K * g)(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

A prova está completa. ■

Vejamos como se comporta a convolução esférica sob a ação do operador projeção.

Proposição 3.4.3. *Sejam $f \in X$ e $K \in L^{1,n}$. Então, $\mathcal{P}_m(K * f) = K\hat{}(m)\mathcal{P}_m(f)$, $m \in \mathbb{N}$, onde*

$$K\hat{}(m) := \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_{-1}^{1} K(t) P_m^n(t)\, dw_n(t).$$

Demonstração: Usando a Fórmula da Adição obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(K*f)(\omega) &= a_m^n \int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega\cdot\tau)(K*f)(\tau)\,d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{a_m^n} h_m^k(\omega)\int_{S^{n-1}} \overline{h_m^k}(\tau)(K*f)(\tau)\,d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{a_m^n} h_m^k(\omega)\int_{S^{n-1}} \overline{h_m^k}(\tau)\left(\int_{S^{n-1}} f(\eta)K(\tau\cdot\eta)\,d\eta\right)d\tau, \quad \omega\in S^{n-1}.
\end{aligned}$$

Agora, segue dos Teoremas de Fubini e de Funk-Hecke que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(K*f)(\omega) &= \sum_{k=1}^{a_m^n} h_m^k(\omega)\int_{S^{n-1}} f(\eta)\left(\int_{S^{n-1}} K(\tau\cdot\eta)\overline{h_m^k}(\tau)\,d\tau\right)d\eta \\
&= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\sum_{k=1}^{a_m^n} h_m^k(\omega)\int_{S^{n-1}} f(\eta)\left(\int_{-1}^{1} K(t)P_m^n(t)\,d\omega_n(t)\right)\overline{h_m^k}(\eta)\,d\eta \\
&= K\hat{\ }(m)\sum_{k=1}^{a_m^n}\hat{f}_{mk}h_m^k(\omega), \quad \omega\in S^{n-1}.
\end{aligned}$$

Logo, usando a representação dada em (3.5) obtemos

$$\mathcal{P}_m(K*f)(\omega) = K\hat{\ }(m)\mathcal{P}_m(f)(\omega), \quad \omega\in S^{n-1}.$$

Isso completa a prova. ■

3.5 A translação esférica

Nesta seção, introduziremos a translação esférica definida em X e provaremos algumas de suas propriedades. Além disso, faremos as conexões devidas entre a translação, a projeção e a convolução esféricas.

A noção de translação esférica foi introduzida por Rudin em [26], mas apenas no caso $n=3$. Resultados mais gerais foram explorados em [5] no estudo de problemas de saturação em esferas. O conceito ressurgiu em [17] e [18] na definição de vários módulos de suavidade de funções definidas em esferas, bem como em questões de aproximação em esferas.

Definição 3.5.1. *Para $t\in(-1,1)$, a translação esférica por t de f sobre S^{n-1} é definida por*

$$\mathcal{T}_t^n(f)(\omega) = \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}}\int_{\omega\cdot\tau=t} f(\tau)\,d\tau, \quad \omega\in S^{n-1}. \tag{3.6}$$

A função $\mathcal{T}_t^n(f)$ pode ser interpretada como a média de f sobre a superfície de uma subesfera $(n-2)$-dimensional de raio $(1-t^2)^{1/2}$, definida por

$$\mathbb{S}_\omega^{n,t} := \{\tau\in S^{n-1} : \omega\cdot\tau = t\}.$$

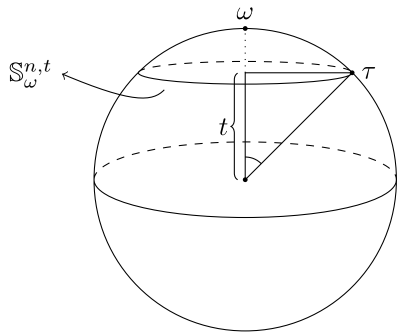

Figura 3.1: Seção esférica $\mathbb{S}_\omega^{3,t}$ em S^2

O próximo resultado ilustra esta afirmação para o caso em que f é um harmônico esférico.

Lema 3.5.2. [23, p.30] *Se $t \in (-1,1)$ e $\omega \in S^{n-1}$, então*

$$\int_{\omega\cdot\tau=t} p(\tau)\, d\tau = |S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2} P_m^n(t) p(\omega), \quad p \in \mathcal{H}_m^n.$$

Proposição 3.5.3. *Seja $t \in (-1,1)$. Então, $\mathcal{T}_t^n$ é um operador linear definido em X. Além disso, valem as seguintes propriedades:*
(i) Se $f \in X$, então $\lim_{t\to 1^-} \|f - \mathcal{T}_t^n(f)\|_X = 0$;
(ii) $\mathcal{T}_t^n(p) = P_m^n(t)p$, $p \in \mathcal{H}_m^n$, $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $f \in X$. Para provar (i) primeiro escrevemos

$$\begin{aligned}
|f(\omega) - \mathcal{T}_t^n(f)(\omega)| &= \left| \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{\omega\cdot\tau=t} f(\omega)\, d\tau - \mathcal{T}_t^n(f)(\omega) \right| \\
&= \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \left| \int_{\omega\cdot\tau=t} [f(\omega) - f(\tau)]\, d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{\omega\cdot\tau=t} |f(\omega) - f(\tau)|\, d\tau, \quad \omega \in S^{n-1}.
\end{aligned}$$

No caso contínuo a desigualdade acima implica que

$$\|f - \mathcal{T}_t^n(f)\|_\infty \leq \sup_{\omega\in S^{n-1}} \sup_{\tau\in\mathbb{S}_\omega^{n,t}} |f(\omega) - f(\tau)|.$$

Se $t \to 1^-$, então $\|\omega - \tau\| \to 0$, o que implica que $\tau \to \omega$. Assim, a continuidade de f garante que $\lim_{t\to 1^-} \|f - \mathcal{T}_t^n(f)\|_\infty = 0$. No caso $L^p(S^{n-1})$, usamos o Teorema 1.0.12-(ii) para obter

$$\|f - \mathcal{T}_t^n(f)\|_p \leq \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{\omega\cdot\tau=t} \|f(\cdot) - f(\tau)\|_p\, d\tau.$$

Como a integral de uma função de $L^1(S^{n-1})$ é absolutamente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\cdot) - f(\tau)\|_p < \varepsilon, \quad |\mathbb{S}_\omega^{n,t}| < \delta.$$

Portanto,

$$\|f(\,\cdot\,) - f(\tau)\|_p < \varepsilon, \quad |t| > \left(1 - \left(\frac{\delta}{|S^{n-2}|}\right)^{2/(n-2)}\right)^{1/2}.$$

Logo, a condição (i) segue. Se $p \in \mathcal{H}_m^n$, então o Lema 3.5.2 implica que

$$\mathcal{T}_t^n(p)(\omega) = \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{\omega\cdot\tau=t} p(\tau)\, d\tau = P_m^n(t)p(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Isso prova o item (ii). ∎

Para provar o próximo resultado, definimos a função característica do conjunto $\mathbb{S}_\omega^{n,t}$ por

$$\mathcal{K}_t(\omega\cdot\tau) := \begin{cases} 1, & \omega\cdot\tau = t \\ 0, & \omega\cdot\tau \neq t. \end{cases} \tag{3.7}$$

Lema 3.5.4. *Sejam $t \in (-1,1)$ e $f \in X$. Então,*

$$\mathcal{T}_t^n(f) = \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}}\, \mathcal{K}_t * f.$$

Demonstração: Segue das definições de translação e convolução esféricas. ∎

Proposição 3.5.5. *Sejam $t \in (-1,1)$ e $f, g \in X$. Então,*

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{T}_t^n(f)(\omega)g(\omega)\, d\omega = \int_{S^{n-1}} f(\omega)\mathcal{T}_t^n(g)(\omega)\, d\omega.$$

Demonstração: Usando o Lema 3.5.4 e a Proposição 3.4.2 encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \mathcal{T}_t^n(f)(\omega)g(\omega)\, d\omega &= \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{S^{n-1}} (\mathcal{K}_t * f)(\omega)g(\omega)\, d\omega \\
&= \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{S^{n-1}} f(\omega)(\mathcal{K}_t * g)(\omega)\, d\omega \\
&= \int_{S^{n-1}} f(\omega)\mathcal{T}_t^n(g)(\omega)\, d\omega
\end{aligned}$$

e a prova está completa. ∎

Observando que $\mathcal{K}_t$ é uma função a valores reais, fica clara a veracidade do próximo resultado.

Corolário 3.5.6. *Sejam $t \in (-1,1)$ e $f, g \in L^2(S^{n-1})$. Então, $(\mathcal{T}_t^n(f), g)_2 = (f, \mathcal{T}_t^n(g))_2$.*

Uma relação entre a translação esférica e o operador projeção é dada pelo resultado a seguir.

Proposição 3.5.7. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $t \in (-1,1)$. Então,*

$$\mathcal{P}_m \circ \mathcal{T}_t^n = P_m^n(t)\mathcal{P}_m.$$

Demonstração: Seja $f \in X$. Da Proposição 3.5.5 obtemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_m \circ \mathcal{T}_t^n)(f)(\omega) &= a_m^n \int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega \cdot \tau)\mathcal{T}_t^n(f)(\tau)\, d\tau \\ &= a_m^n \int_{S^{n-1}} \mathcal{T}_t^n(P_m^n(\omega \cdot \star))(\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad \omega \in S^{n-1}.\end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema 3.5.3-(ii) temos

$$\mathcal{T}_t^n(P_m^n(\omega \cdot \star))(\tau) = P_m^n(t)P_m^n(\omega \cdot \tau), \quad \omega, \tau \in S^{n-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_m \circ \mathcal{T}_t^n)(f)(\omega) &= a_m^n P_m^n(t) \int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega \cdot \tau) f(\tau)\, d\tau \\ &= P_m^n(t)\mathcal{P}_m(f)(\omega), \quad \omega \in S^{n-1},\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Corolário 3.5.8. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $t \in (-1, 1)$. Então,*

$$\mathcal{P}_m \circ \mathcal{T}_t^n = \mathcal{T}_t^n \circ \mathcal{P}_m.$$

Demonstração: Segue da Proposição 3.5.7 e do Teorema 3.5.3-(ii). ■

O próximo teorema estabelece uma relação entre a convolução e a translação esféricas.

Teorema 3.5.9. *Sejam $K \in L^{1,n}$ e $f \in X$. Então,*

$$(K * f)(\omega) = \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_{-1}^{1} K(t)\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\, d\omega_n(t).$$

Demonstração: Definindo

$$K_f(\omega) := \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_{-1}^{1} K(t)\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\, d\omega_n(t), \quad \omega \in S^{n-1},$$

obtemos, via Teorema de Fubini, que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_m(K_f)(\omega) &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} a_m^n \int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega \cdot \tau) \left(\int_{-1}^{1} K(t)\mathcal{T}_t^n(f)(\tau)\, d\omega_n(t) \right) d\tau \\ &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} a_m^n \int_{-1}^{1} K(t) \left(\int_{S^{n-1}} P_m^n(\omega \cdot \tau)\mathcal{T}_t^n(f)(\tau)\, d\tau \right) d\omega_n(t) \\ &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_{-1}^{1} K(t)\mathcal{P}_m(\mathcal{T}_t^n(f))(\omega)\, d\omega_n(t), \quad \omega \in S^{n-1}, \quad m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Logo, segue da Proposição 3.5.7 que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_m(K_f)(\omega) &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_{-1}^{1} K(t)P_m^n(t)\mathcal{P}_m(f)(\omega)\, d\omega_n(t) \\ &= K^\frown(m)\mathcal{P}_m(f)(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}, \quad m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Completamos a prova aplicando a Proposição 3.4.3 e o Teorema 3.3.4. ■

Lema 3.5.10. (Desigualdade de Young) [5, *p.*207-208] *Sejam* $f \in X$ *e* $K \in L^{1,n}$. *Então,* $\|K * f\|_X \leq \|K\|_{1,n}\|f\|_X$.

Teorema 3.5.11. *Seja* $t \in (-1,1)$. *Então,*

$$\|\mathcal{T}_t^n(f)\|_X \leq \|f\|_X, \quad f \in X.$$

Demonstração: Primeiro, consideremos $f \in C(S^{n-1})$. Neste caso,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)| &\leq \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{\omega\cdot\tau=t} |f(\tau)|\, d\tau \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \int_{\omega\cdot\tau=t} d\tau \\ &= \|f\|_\infty, \quad \omega \in S^{n-1}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo com relação a $\omega \in S^{n-1}$ obtemos $\|\mathcal{T}_t^n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $f \in C(S^{n-1})$. Agora, suponhamos $f \in L^p(S^{n-1})$, $1 \leq p < \infty$. Pelo Lema 3.5.4 temos

$$\|\mathcal{T}_t^n(f)\|_p = \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}} \|\mathcal{K}_t * f\|_p\,,$$

de modo que pela Desigualdade de Young encontramos

$$\|\mathcal{T}_t^n(f)\|_p \leq \frac{\|\mathcal{K}_t\|_{1,n}\|f\|_p}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}}.$$

O resultado segue após uma aplicação do Lema 3.5.2. ■

3.6 A diferença esférica

Como no caso da translação esférica, a diferença esférica foi introduzida por Rudin em [26] apenas no caso $n = 3$. Este conceito também ressurgiu em [17] e [18], para os mesmos objetivos citados na seção anterior.

Definição 3.6.1. *Para* $t \in (-1,1)$, *definimos o operador diferença esférica por*

$$\Delta_t := I - \mathcal{T}_t^n,$$

onde $I : X \to X$ *é o operador identidade. A* r*-ésima diferença esférica é definida por*

$$\Delta_t^r := \Delta_t \circ \Delta_t^{r-1}, \quad r \in \{2, 3, \ldots\},$$

e identificamos $\Delta_t^1 = \Delta_t$.

Devido à Proposição 3.5.3-(i), o operador diferença esférica é usado para definir alguns módulos de suavidade para funções definidas na esfera.

Proposição 3.6.2. *Sejam r um inteiro positivo e $t \in (-1,1)$. Então, o operador Δ_t^r é linear e valem as seguintes propriedades:*
(i) $\|\Delta_t^r(f)\|_X \leq 2^r \|f\|_X$, $f \in X$;
(ii) $\lim_{t\to 1^-} \|\Delta_t^r(f)\|_X = 0$, $f \in X$;
(iii) $\mathcal{P}_m \circ \Delta_t^r = (1 - P_m^n(t))^r \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Da linearidade da translação esférica segue que o operador Δ_t^r é linear. Agora segue do Teorema 3.5.11 que

$$\|\Delta_t(f)\|_X = \|f - \mathcal{T}_t^n(f)\|_X \leq \|f\|_X + \|\mathcal{T}_t^n(f)\|_X \leq 2\|f\|_X, \quad f \in X,$$

de modo que

$$\|\Delta_t^r(f)\|_X = \|\Delta_t(\Delta_t^{r-1}(f))\|_X \leq 2\|\Delta_t^{r-1}(f)\|_X \leq \cdots \leq 2^r\|f\|_X, \quad f \in X.$$

Logo, (i) está provado. Segue do item (i) e da Proposição 3.5.3-(i) que

$$\lim_{t\to 1^-} \|\Delta_t^r(f)\|_X \leq 2^{r-1} \lim_{t\to 1^-} \|\Delta_t(f)\|_X = 0, \quad f \in X.$$

Assim, $\lim_{t\to 1^-} \|\Delta_t^r(f)\|_X = 0$, $f \in X$, e provamos (ii). Para provar (iii) consideremos primeiramente o caso $r = 1$. A linearidade de $\mathcal{P}_m$ e a Proposição 3.5.7 implicam que

$$\mathcal{P}_m(\Delta_t(f)) = \mathcal{P}_m(f) - \mathcal{P}_m(\mathcal{T}_t^n(f)) = (1 - P_m^n(t))\mathcal{P}_m(f), \quad f \in X, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para $r > 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(\Delta_t^r(f)) &= \mathcal{P}_m(\Delta_t(\Delta_t^{r-1})(f)) \\
&= (1 - P_m^n(t))\mathcal{P}_m(\Delta_t^{r-1}(f)) \\
&\;\vdots \\
&= (1 - P_m^n(t))^r \mathcal{P}_m(f), \quad f \in X, \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

A prova está completa. ■

3.7 A derivada forte de Laplace-Beltrami

Nesta seção, introduziremos o conceito de diferenciabilidade forte de Laplace-Beltrami e deduziremos suas propriedades básicas. Este conceito foi primeiramente utilizado em [33] e é citado em [32, *p.*164]. O termo *forte* é utilizado para diferenciar este conceito (global) do conceito pontual introduzido por Rudin em [26].

Definição 3.7.1. *Dizemos que uma função $f \in X$ é fortemente diferenciável no sentido de Laplace-Beltrami quando existir uma função $\mathcal{D}(f) \in X$ tal que*

$$\lim_{t\to 1^-} \left\| \frac{\Delta_t(f)}{1-t} - \mathcal{D}(f) \right\|_X = 0.$$

A função $\mathcal{D}(f)$ é chamada de primeira derivada forte de Laplace-Beltrami de f. Derivadas de ordem superior são definidas indutivamente por

$$\mathcal{D}^r := \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^{r-1}, \quad r \in \{2, 3, \ldots\},$$

e identificamos $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$

Notação: Denotamos o conjunto das funções diferenciáveis nesse sentido por W_X^r, isto é,

$$W_X^r = \{f \in X : \mathcal{D}^r(f) \in X\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Observamos que $0 \in W_X^r$ e que $\mathcal{D}^r(0) = 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

Lema 3.7.2. [12, *p*.87] *Se $m \in \mathbb{Z}_+$, então*

$$\frac{d}{dt} P_m^n = \frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\, P_{m-1}^{n+2}.$$

Proposição 3.7.3. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Z}_+$. Valem as seguintes propriedades:*
(i) $\mathcal{H}_m^n \subset W_X^r$;
(ii) $\mathcal{D}^r(p) = (n-1)^{-r}\lambda_{m,n}^r p$, $p \in \mathcal{H}_m^n$.

Demonstração: Consideremos o caso $r = 1$. Se $p \in \mathcal{H}_m^n$, usando a Proposição 3.5.3-(ii) obtemos

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\Delta_t(p)}{1-t} - \frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\, p \right\|_X &= \left\| \frac{(1-P_m^n(t))p}{1-t} - \frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\, p \right\|_X \\ &= \left| \frac{1-P_m^n(t)}{1-t} - \frac{\lambda_{m,n}}{n-1} \right| \|p\|_X, \quad t \in (-1,1).\end{aligned}$$

Aplicando a Regra de L'Hospital e usando o Lema 3.7.2 encontramos

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{1-P_m^n(t)}{1-t} = \frac{\lambda_{m,n}}{n-1} \lim_{t\to 1^-} P_{m-1}^{n+2}(t) = \frac{\lambda_{m,n}}{n-1}. \tag{3.8}$$

Logo,

$$\lim_{t\to 1^-} \left\| \frac{\Delta_t(p)}{1-t} - \frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\, p \right\|_X = 0$$

Portanto, $p \in W_X^1$ e

$$\mathcal{D}(p) = \frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\, p.$$

Suponhamos agora que o resultado vale para $r \in \{1, \ldots, s-1\}$. Usando a hipótese de indução para $r = s-1$, segue que

$$\lim_{t\to 1^-} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{s-1}(p))}{1-t} - \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^s p \right\|_X = \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^{s-1} \lim_{t\to 1^-} \left\| \frac{\Delta_t(p)}{1-t} - \mathcal{D}(p) \right\|_X.$$

Assim, usando a hipótese de indução para $r = 1$, temos que

$$\lim_{t\to 1^-} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{s-1}(p))}{1-t} - \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^s p \right\|_X = 0.$$

Portanto, $\mathcal{D}^{s-1}(p) \in W_X^1$, o que implica que $\mathcal{D}^s(p) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{s-1}(p)) \in X$, ou seja, $p \in W_X^s$. Além disso,

$$\mathcal{D}^s(p) = \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^s p.$$

A proposição está provada. ■

Teorema 3.7.4. *Seja $r \in \mathbb{Z}_+$. Então, o conjunto W_X^r é denso em X.*

Demonstração: Isto segue das inclusões $\cup_{m=0}^{\infty}\mathcal{H}_m^n \subset W_X^r \subset X$ e do fato do conjunto $\cup_{m=0}^{\infty}\mathcal{H}_m^n$ ser fundamental em X. ■

Proposição 3.7.5. *Seja $r \in \mathbb{Z}_+$. Então, o conjunto W_X^r é um subespaço vetorial de X.*

Demonstração: Já sabemos que $0 \in W_X^r$. Para provar a outra condição de subespaço vetorial consideremos primeiramente o caso $r = 1$. Sejam $f, g \in W_X^1$ e $\alpha \in Y$. Usando a linearidade de Δ_t e a desigualdade triangular segue que

$$\left\| \frac{\Delta_t(\alpha f + g)}{1-t} - (\alpha\mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g)) \right\|_X \leq |\alpha| \left\| \frac{\Delta_t(f)}{1-t} - \mathcal{D}(f) \right\|_X + \left\| \frac{\Delta_t(g)}{1-t} - \mathcal{D}(g) \right\|_X .$$

Tomando o limite quando $t \to 1^-$, concluímos que $\mathcal{D}(\alpha f + g) = \alpha\mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g)$ e que, obviamente, $\alpha f + g \in W_X^1$. Agora, suponhamos que o resultado vale para $r \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ e sejam $f, g \in W_X^s$ e $\alpha \in Y$. Então, procedendo como acima temos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{s-1}(\alpha f + g))}{1-t} - (\alpha\mathcal{D}^s(f) + \mathcal{D}^s(g)) \right\|_X &\leq |\alpha| \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{s-1}(f))}{1-t} - \mathcal{D}^s(f) \right\|_X \\ &\quad + \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{s-1}(g))}{1-t} - \mathcal{D}^s(g) \right\|_X . \end{aligned}$$

Tomando o limite na desigualdade acima quando $t \to 1^-$, obtemos

$$\lim_{t\to 1^-} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{s-1}(\alpha f + g))}{1-t} - (\alpha\mathcal{D}^s(f) + \mathcal{D}^s(g)) \right\|_X = 0.$$

Portanto, $\mathcal{D}^s(\alpha f + g) = \alpha\mathcal{D}^s(f) + \mathcal{D}^s(g)$ e $\alpha f + g \in W_X^s$. ■

Corolário 3.7.6. *Seja $r \in \mathbb{Z}_+$. Então, o operador $\mathcal{D}^r : W_X^r \to X$ é linear.*

Uma maneira natural de gerar uma topologia para s espaço W_X^r é considerar a norma $\|\cdot\|_{W_X^r}$ dada por

$$\|f\|_{W_X^r} := \|f\|_X + \|\mathcal{D}^r f\|_X, \quad f \in W_X^r.$$

A ação do operador projeção sobre a derivada forte de Laplace-Beltrami é explicada a seguir.

Teorema 3.7.7. *Sejam $r \in \mathbb{Z}_+$ e $f \in W_X^r$. Então,*

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{D}^r(f)) = \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^r \mathcal{P}_m(f), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Fixemos $m \in \mathbb{N}$. No caso $r = 1$, usamos (3.8) para deduzir que, para $\omega \in S^{n-1}$ e $f \in W_X^1$,

$$\left|\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\mathcal{P}_m(f)(\omega) - \mathcal{P}_m(\mathcal{D}(f))(\omega)\right| = \lim_{t\to 1^-}\left|\left(\frac{1-P_m^n(t)}{1-t}\right)\mathcal{P}_m(f)(\omega) - \mathcal{P}_m(\mathcal{D}(f))(\omega)\right|.$$

Agora, segue da Proposição 3.5.7 e da linearidade do operador projeção que

$$\left|\left(\frac{1-P_m^n(t)}{1-t}\right)\mathcal{P}_m(f)(\omega) - \mathcal{P}_m(\mathcal{D}(f))(\omega)\right| = \left|\mathcal{P}_m\left(\frac{f-\mathcal{T}_t^n(f)}{1-t} - \mathcal{D}(f)\right)(\omega)\right|.$$

Por outro lado, a Proposição 3.3.5-(ii) implica que

$$\lim_{t\to 1^-}\left|\mathcal{P}_m\left(\frac{f-\mathcal{T}_t^n(f)}{1-t} - \mathcal{D}(f)\right)(\omega)\right| \le a_m^n \lim_{t\to 1^-}\left\|\frac{f-\mathcal{T}_t^n(f)}{1-t} - \mathcal{D}(f)\right\|_X = 0.$$

Combinando as três informações anteriores, concluímos que

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{D}(f)) = \frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\,\mathcal{P}_m(f).$$

Agora, suponhamos que o resultado vale para $r \in \{1, \ldots, s-1\}$. Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_m(\mathcal{D}^s(f)) &= \mathcal{P}_m(\mathcal{D}(\mathcal{D}^{s-1}(f)))\\ &= \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)\mathcal{P}_m(\mathcal{D}^{s-1}(f))\\ &= \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^s\mathcal{P}_m(f), \quad f \in W_X^s.\end{aligned}$$

Portanto, a proposição segue. ■

Teorema 3.7.8. *Sejam $r \in \mathbb{Z}_+$ e $f \in X$. São equivalentes:*
(i) $f \in W_X^r$;
(ii) Existe $g \in X$ tal que

$$\mathcal{P}_m(g) = \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^r\mathcal{P}_m(f), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Se $f \in W_X^r$, então $\mathcal{D}^r f \in X$ e segue do Teorema 3.7.7 que

$$\mathcal{P}_m(g) = \mathcal{P}_m(\mathcal{D}^r f) = \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^r\mathcal{P}_m(f), \quad m \in \mathbb{N}.$$

A prova da recíproca exige o uso de ferramentas das quais não dispomos neste texto. Sua demonstração no caso $n = 3$ pode ser encontrada em [26]. ■

Teorema 3.7.9. *Seja $r \in \mathbb{Z}_+$. Então, o operador $\mathcal{D}^r : W_X^r \to X$ é fechado.*

Demonstração: Sejam $f, g \in X$ e $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W_X^r$ uma seqüência tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_X = \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{D}^r(f_k) - g\|_X = 0.$$

Usando a Proposição 3.3.5-(ii) encontramos

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^r \mathcal{P}_m(f_k) - \mathcal{P}_m(g)\right\|_X &= \|\mathcal{P}_m(\mathcal{D}^r(f_k)) - \mathcal{P}_m(g)\|_X \\ &= \|\mathcal{P}_m(\mathcal{D}^r(f_k) - g)\|_X \\ &\leq a_m^n \|\mathcal{D}^r(f_k) - g\|_X, \quad m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como $\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{D}^r(f_k) - g\|_X = 0$, então

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^r \mathcal{P}_m(f_k) = \mathcal{P}_m(g), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como

$$\|\mathcal{P}_m(f_k) - \mathcal{P}_m(f)\|_X = \|\mathcal{P}_m(f_k - f)\|_X \leq a_m^n \|f_k - f\|_X, \quad m \in \mathbb{N},$$

e $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_X = 0$, vemos que $\lim_{k\to\infty} \mathcal{P}_m(f_k) = \mathcal{P}_m(f)$, $m \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\left(\frac{\lambda_{m,n}}{n-1}\right)^r \mathcal{P}_m(f) = \mathcal{P}_m(g), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, segue do Teorema 3.7.8 que $f \in W_X^r$ e, pelos Teoremas 3.7.7 e 3.3.4, obtemos $\mathcal{D}^r(f) = g$. Isto justifica o fechamento de $\mathcal{D}^r$. ■

3.8 Relação entre os conceitos de diferenciabilidade

Nesta seção, introduziremos espaços do tipo Sobolev sobre S^{n-1}. Utilizando estes espaços, obteremos algumas conexões entre as noções de diferenciabilidade introduzidas até agora no trabalho.

Segundo [16, p.37] e [31, p.24], dado um número real $r \geq 0$, pode-se definir o espaço de Sobolev de ordem $2r$ sobre S^{n-1} como sendo o domínio do operador $(-\Delta_n)^r$. Para nossos propósitos, definiremos o espaço de Sobolev de ordem $2r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, por

$$H_n^{2r} := \{f \in L^2(S^{n-1}) : \text{ existe } g \in C^{2r}(S^{n-1}) \text{ tal que } f = g \text{ q.s.}\}.$$

Sejam $f \in H_n^{2r}$ e $g \in C^{2r}(S^{n-1})$ satisfazendo $f = g$ q.s., então f e $p = (-\Delta_n)^r g$ são elementos de $L^2(S^{n-1})$ (note que p é contínua). Logo, possuem expansões em séries de Fourier,

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{f}_{m,k} h_m^k \qquad \text{e} \qquad p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{p}_{m,k} h_m^k.$$

Agora, segue dos Teoremas 2.1.9 e 2.2.4 que

$$\hat{p}_{m,k} = \left((-\Delta_n)^r g, h_m^k\right)_2 = \left(g, (-\Delta_n)^r h_m^k\right)_2 = \lambda_{m,n}^r \left(g, h_m^k\right)_2 = \lambda_{m,n}^r \hat{g}_{m,k}.$$

Obtemos, então,

$$(-\Delta_n)^r g = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{a_m^n} \lambda_{m,n}^r \hat{g}_{m,k} h_m^k = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}^r \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{g}_{m,k} h_m^k = \sum_{m=0}^{\infty} (-\Delta_n)^r \sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{g}_{m,k} h_m^k.$$

Entretanto, pela caracterização obtida em (3.5),

$$\sum_{k=1}^{a_m^n} \hat{g}_{m,k} h_m^k = \mathcal{P}_m(g), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Assim, definindo as seqüências

$$g_k = \sum_{m=0}^{k} \mathcal{P}_m(g) \quad \text{e} \quad (-\Delta_n)^r g_k = \sum_{m=0}^{k} (-\Delta_n)^r \mathcal{P}_m(g), \tag{3.9}$$

obtemos que $g_k \to g$ e $(-\Delta_n)^r g_k \to (-\Delta_n)^r g$ na topologia de $L^2(S^{n-1})$.

Teorema 3.8.1. *Seja $r \in \mathbb{Z}_+$. Valem as seguintes propriedades:*
(i) $H_n^{2r} \subset W_X^r$.
(ii) $\mathcal{D}^r f = (n-1)^{-r}(-\Delta_n)^r g$, $f \in H_n^{2r}$, $g \in C^{2r}(S^{n-1})$, $f = g$ *q.s.*.

Demonstração: Suponha que $f \in H_n^{2r}$ e seja $g \in C^{2r}(S^{n-1})$ tal que $f = g$ q.s.. Basta provarmos que $\mathcal{D}^r g = (n-1)^{-r}(-\Delta_n)^r g$. Consideremos as seqüências definidas em (3.9) e notemos que

$$\left\| (-\Delta_n)^r g - \sum_{m=0}^{k} (-\Delta_n)^r \mathcal{P}_m(g) \right\|_2 = \|(-\Delta_n)^r g - (-\Delta_n)^r g_k\|_2 \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.10}$$

Como $\mathcal{P}_m(g) \in \mathcal{H}_m^n$, segue do Teorema 2.2.4 e da Proposição 3.7.3-(*ii*) que

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k} (-\Delta_n)^r \mathcal{P}_m(g) &= (n-1)^r \sum_{m=0}^{k} \mathcal{D}^r \mathcal{P}_m(g) \\ &= (n-1)^r \mathcal{D}^r \sum_{m=0}^{k} \mathcal{P}_m(g) \\ &= (n-1)^r \mathcal{D}^r g_k. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Combinando (3.10) e (3.11), obtemos

$$\left\| \mathcal{D}^r g_k - (n-1)^{-r}(-\Delta_n)^r g \right\|_2 \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalmente, levando em conta que a derivada forte de Laplace-Beltrami é um operador fechado sobre seu domínio, podemos usar o Teorema 1.0.18 para concluir que $g \in W_X^r$ e $\mathcal{D}^r g = (n-1)^{-r}(-\Delta_n)^r g$. ■

Capítulo 4

Diferenciabilidade fraca

Neste capítulo, introduzimos uma outra noção de diferenciabilidade para funções definidas em S^{n-1}: a *diferenciabilidade fraca*. Veremos que a diferenciabilidade fraca estende a noção de diferenciabilidade usual e apresentaremos condições suficientes para que funções fracamente diferenciáveis sejam continuamente diferenciáveis.

Todas as funções, daqui pra frente, serão tomadas a valores reais.

4.1 A derivada fraca

A definição abaixo usa os operadores $A_k : X \to X$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, dados pela fórmula

$$A_k f(x) = x_k f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 4.1.1. *Sejam $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $f \in L^1(S^{n-1})$. Diremos que $g_k \in L^1(S^{n-1})$ é a k-ésima derivada fraca de primeira ordem de f se*

$$(f, D^k\varphi)_2 = (n-1)(A_k f, \varphi)_2 - (g_k, \varphi)_2, \quad \varphi \in C^\infty(S^{n-1}).$$

Neste caso, escrevemos $g_k = \mathbb{D}_k f$.

Quando uma função integrável possuir todas as derivadas fracas de primeira ordem, diremos que ela é *fracamente diferenciável ou diferenciável no sentido fraco*. É fácil ver que se existir uma derivada fraca de primeira ordem de uma função, então ela é única e linear.

O próximo resultado dá-nos uma justificativa do porque interpretarmos g_k como uma derivada fraca.

Teorema 4.1.2. *Seja $f \in C^1(S^{n-1})$. Então,*

$$(f, D^k\varphi)_2 = (n-1)(A_k f, \varphi)_2 - (D^k f, \varphi)_2, \quad \varphi \in C^\infty(S^{n-1}), \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demonstração: Primeiro, fixamos $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$. Como o produto $\tilde{f}(\partial\tilde{\varphi}/\partial x_k)$ é uma função homogênea de grau -1, segue do Lema 2.6.3 que

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} f(\omega) D^k \varphi(\omega)\, d\omega &= \frac{(n-1)}{|S^{n-1}|} \int_{\|x\|<1} \tilde{f}(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_k}(x)\, dx \\
&= \frac{(n-1)}{|S^{n-1}|} \left[\int_{\|x\|<1} \frac{\partial(\widetilde{f\varphi})}{\partial x_k}(x)\, dx - \int_{\|x\|<1} \tilde{\varphi}(x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(x)\, dx \right].
\end{aligned}$$

Agora, usando novamente o Lema 2.6.3 obtemos

$$\frac{(n-1)}{|S^{n-1}|} \int_{\|x\|<1} \tilde{\varphi}(x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(x)\, dx = \int_{S^{n-1}} \varphi(\omega) D^k f(\omega)\, d\omega = (D^k f, \varphi)_2,$$

enquanto que, pelo Teorema da Divergência de Gauss, encontramos

$$\frac{(n-1)}{|S^{n-1}|} \int_{\|x\|<1} \frac{\partial(\widetilde{f\varphi})}{\partial x_k}(x)\, dx = (n-1) \int_{S^{n-1}} \omega_k f(\omega) \varphi(\omega)\, d\omega = (n-1)(A_k f, \varphi)_2.$$

O resultado segue. ■

Proposição 4.1.3. *Sejam $f \in L^1(S^{n-1})$ fracamente diferenciável e $k \in \{1, \ldots, n\}$. Então, $A_k f$ é fracamente diferenciável e*

$$\mathbb{D}_j A_k f = \begin{cases} (A_k \mathbb{D}_k - A_k^2 + I) f, & j = k \\ (A_k \mathbb{D}_j - A_k A_j) f, & j \neq k \end{cases},$$

onde $I : L^1(S^{n-1}) \to L^1(S^{n-1})$ é o operador identidade.

Demonstração: Seja $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$. Como $A_k \varphi \in C^\infty(S^{n-1})$, temos

$$(f, D^k A_k \varphi)_2 = (n-1)(A_k f, A_k \varphi)_2 - (\mathbb{D}_k f, A_k \varphi)_2. \tag{4.1}$$

Por outro lado, como

$$D^k A_k \varphi(\omega) = \varphi(\omega) - \omega_k^2 \varphi(\omega) + \omega_k D^k \varphi(\omega), \quad \omega \in S^{n-1},$$

então

$$\begin{aligned}
(f, D^k A_k \varphi)_2 &= (f, \varphi)_2 - (f, A_k^2 \varphi)_2 + (f, A_k D^k \varphi)_2 \\
&= (f, \varphi)_2 - (A_k^2 f, \varphi)_2 + (A_k f, D^k \varphi)_2. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Finalmente, segue de (4.1) e (4.2) que

$$(A_k f, D^k \varphi)_2 = (n-1)(A_k f, A_k \varphi)_2 - ((A_k \mathbb{D}_k - A_k^2 + I) f, \varphi)_2.$$

Agora, se $j \neq k$, então

$$D^j A_k \varphi(\omega) = -\omega_k \omega_j \varphi(\omega) + \omega_k D^j \varphi(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}, \tag{4.3}$$

de modo que

$$\begin{aligned}(f, D^j A_k\varphi)_2 &= -(f, A_kA_j\varphi)_2 + (f, A_kD^j\varphi)_2 \\ &= -(A_kA_jf, \varphi)_2 + (A_kf, D^j\varphi)_2. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Portanto, segue de (4.1) e (4.4) que

$$(A_kf, D^j\varphi)_2 = (n-1)(A_kf, A_j\varphi)_2 - ((A_k\mathbb{D}_j - A_kA_j)f, \varphi)_2.$$

O resultado segue. ■

Proposição 4.1.4. *Se $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ é fracamente diferenciável, então $\sum_{k=1}^n A_k\mathbb{D}_kf = 0$.*

Demonstração: Sejam $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ fracamente diferenciável, $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$. Como $A_k\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$, então

$$\begin{aligned}(f, D^k A_k\varphi)_2 &= (n-1)(A_kf, A_k\varphi)_2 + (\mathbb{D}_kf, A_k\varphi)_2 \\ &= (n-1)(A_k^2f, \varphi)_2 + (A_k\mathbb{D}_kf, \varphi)_2. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 2.6.3 temos

$$\begin{aligned}(f, D^kA_k\varphi)_2 &= (n-1)\int_{\|x\|<1} \tilde{f}(x)\frac{\partial(\widetilde{x_k\varphi})}{\partial x_k}(x)\,dx \\ &= (n-1)\int_{\|x\|<1} \tilde{f}(x)\frac{1}{\|x\|}\left[\tilde{\varphi}(x) - x_k'^2\tilde{\varphi}(x) + x_k'\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}(x)\right]dx.\end{aligned}$$

Somando em k, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (f, D^kA_k\varphi)_2 = n(n-1)&\int_{\|x\|<1} \frac{\tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(x)}{\|x\|}\,dx - (n-1)\int_{\|x\|<1}\frac{\tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(x)}{\|x\|}\left[\sum_{k=1}^n x_k'^2\right]dx \\ &+ (n-1)\int_{\|x\|<1}\tilde{f}(x)\left[\sum_{k=1}^n x_k'\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}(x)\right]dx \\ &= n(n-1)\int_{\|x\|<1}\frac{\tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(x)}{\|x\|}\,dx - (n-1)\int_{\|x\|<1}\frac{\tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(x)}{\|x\|}\,dx \\ &+ (n-1)\int_{\|x\|<1}\tilde{f}(x)\frac{x\cdot\nabla\tilde{\varphi}(x)}{\|x\|}\,dx \qquad (4.6)\end{aligned}$$

O último termo em (4.6) anula-se devido à Fórmula de Euler para funções homogêneas. Logo, somando os termos restantes de (4.6) e usando novamente o Lema 2.6.3, encontramos

$$\sum_{k=1}^n (f, D^kA_k\varphi)_2 = (n-1)^2\int_{\|x\|<1}\frac{\tilde{f}(x')\tilde{\varphi}(x')}{\|x\|}\,dx = (n-1)(f,\varphi)_2.$$

Somando (4.5) em k e substituindo a última igualdade obtemos o desejado. ■

Corolário 4.1.5. *Sejam $f \in C(S^{n-1})$ fracamente diferenciável e $\mathbb{D}_1 f, \ldots, \mathbb{D}_n f \in C(S^{n-1})$. Então, $\lim_{t\to 1^-} \sum_{k=1}^n A_k \mathcal{T}_t^n(\mathbb{D}_k f) = 0$.*

Demonstração: Segue da Proposição 3.5.3-(i) que

$$\lim_{t\to 1^-} \sum_{k=1}^n \omega_k \mathcal{T}_t^n(\mathbb{D}_k f)(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k \lim_{t\to 1^-} \mathcal{T}_t^n(\mathbb{D}_k f)(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k \mathbb{D}_k f(\omega), \quad \omega \in S^{n-1},$$

e o resultado segue da proposição anterior. ∎

4.2 Aproximação da identidade e o núcleo de Jackson

Nesta seção, listamos algumas propriedades básicas do núcleo de Jackson ([14, p.03], [19, cap.04]), mais especificamente aquelas relacionadas com o conceito de aproximação da identidade.

A definição abaixo contempla a formulação mais básica para o conceito de aproximação da identidade sobre S^{n-1}. A notação K_ε refere-se a uma família $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon\in J}$ de funções de $L^{1,n}$, onde $J \subset (0,\infty)$. Mais informações sobre este assunto, incluindo uma definição mais abrangente, podem ser encontradas em [10, p.196] e [21].

Definição 4.2.1. *Seja $f \in C(S^{n-1})$. Dizemos que $f_\varepsilon := K_\varepsilon * f$ é uma aproximação da identidade em $C(S^{n-1})$ se $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon - f\|_\infty = 0$.*

No teorema abaixo, apresentamos um conjunto de condições sobre uma família $\{K_\varepsilon\}$, que juntas são suficientes para garantir que f_ε seja uma aproximação da identidade.

Teorema 4.2.2. *Sejam $f \in C(S^{n-1})$ e $K_\varepsilon \in L^{1,n}$. Assuma que:*
(i) $\int_{-1}^1 K_\varepsilon(t) d\omega_n(t) = |S^{n-1}||S^{n-2}|^{-1}$;
(ii) Existe $M > 0$ tal que $\|K_\varepsilon\|_{1,n} \le M$;
(iii) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{1-\delta} |K_\varepsilon(t)|\, d\omega_n(t) = 0$, $0 < \delta < 1$.
Então, f_ε é uma aproximação da identidade em $C(S^{n-1})$.

Demonstração: Começamos fixando $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta \in (0,1)$ e $\omega \in S^{n-1}$. Agora, consideramos a ω-calota $S^{n-1}_{\delta,\omega} := \{\tau \in S^{n-1} : \omega\cdot\tau \ge 1-\delta\}$. Por (1.2) e por ($i$), temos

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(\omega) - f(\omega)| &\le \int_{S^{n-1}} |K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)||f(\tau) - f(\omega)|\, d\tau \\ &= \int_{S^{n-1}\setminus S^{n-1}_{\delta,\omega}} |K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)||f(\tau) - f(\omega)|\, d\tau \\ &\quad + \int_{S^{n-1}_{\delta,\omega}} |K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)||f(\tau) - f(\omega)|\, d\tau. \end{aligned}$$

Usando novamente (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}\setminus S^{n-1}_{\delta,\omega}} |K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)||f(\tau) - f(\omega)|\, d\tau &\le 2\|f\|_\infty \int_{S^{n-1}\setminus S^{n-1}_{\delta,\omega}} |K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)|\, d\tau \\ &= \frac{2\|f\|_\infty |S^{n-1}|}{|S^{n-2}|} \int_{-1}^{1-\delta} |K_\varepsilon(t)|\, d\omega_n(t). \end{aligned}$$

Para δ suficientemente próximo de 1 concluímos, via (ii), que

$$\int_{S^{n-1}_{\delta,\omega}} |K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)||f(\tau)-f(\omega)|\,d\tau \le M \sup_{\tau\in S^{n-1}_{\delta,\omega}} |f(\tau)-f(\omega)| < \varepsilon.$$

Logo,

$$|f_\varepsilon(\omega)-f(\omega)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty |S^{n-1}|}{|S^{n-2}|}\int_{-1}^{1-\delta} |K_\varepsilon(t)|\,d\omega_n(t).$$

Segue de (iii) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |f_\varepsilon(\omega)-f(\omega)| = 0.$$

Como $\omega\in S^{n-1}$ foi tomado de forma arbitrária, o resultado está provado. ■

Corolário 4.2.3. *Nas condições do Teorema 4.2.2, temos*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\,d\omega_n(t) = f(\omega), \quad \omega\in S^{n-1}, \quad t\in(-1,1).$$

Demonstração: Segue dos Teoremas 3.5.9 e 4.2.2. ■

Corolário 4.2.4. *Nas condições do Teorema 4.2.2, temos*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)\varphi(t)\,d\omega_n(t) = \varphi(1), \quad \varphi\in C([-1,1]).$$

Demonstração: Seja $\varphi\in C([-1,1])$. Segue do Teorema 3.5.9 e de (1.2) que

$$\begin{aligned}\frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)\varphi(t)\,d\omega_n(t) &= \int_{S^{n-1}} K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)\varphi(\omega\cdot\tau)\,d\tau \\ &= \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)\mathcal{T}_t^n(\varphi)(\omega\cdot\star)\,d\omega_n(t), \quad \tau\in S^{n-1}.\end{aligned}$$

Logo, pelo corolário anterior, encontramos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)\varphi(t)\,d\omega_n(t) = \varphi(\omega\cdot\star), \quad \tau\in S^{n-1},$$

e o resultado segue tomando-se $\star=\omega$. ■

Agora, introduzimos um núcleo muito utilizado em Teoria da Aproximação, o núcleo de Jackson generalizado:

$$\mathcal{J}_\nu^s(u) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\ell/2)u}{\operatorname{sen}(u/2)}\right)^{2s}, \quad 0\le u\le\pi, \quad s\in\mathbb{Z}_+, \quad \ell\in\{2,3,\dots\}, \quad \nu=s(\ell-1).$$

Provaremos algumas de suas propriedades, enquanto que outras, por serem de certa forma óbvias ou por estarem provadas em alguma referência, serão somente citadas. Segundo [19, p.57], o núcleo de Jackson satisfaz a seguinte desigualdade fina:

$$\int_0^\pi u^r \mathcal{J}_\nu^s(u)\operatorname{sen}^{n-2}u\,du \le \frac{c\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}}{\nu^{\min\{r,2s-n+1\}}}, \quad 0\le r\ne 2s-n+1, \tag{4.7}$$

onde $c>0$ não depende de ν. Sua prova, que pode ser encontrada em [17], será omitida aqui. Mais ainda, tomando ℓ par (o que podemos fazer quando quisermos que $\nu \to \infty$) temos que existe uma constante $c>0$ tal que

$$\int_0^\pi \mathcal{J}_\nu^s(u)(1-\cos u)^2 \operatorname{sen}^{n-4} u\, du \leq c\int_0^\pi u^2 \mathcal{J}_\nu^s(u) \operatorname{sen}^{n-2} u\, du. \tag{4.8}$$

Por conveniência, introduzimos o seguinte núcleo normalizado de forma a satisfazer o Teorema 4.2.2-(i):

$$K_\varepsilon(t) := \|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}^{-1}\, \mathcal{J}_\nu^s(\arccos t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \varepsilon = \frac{1}{\nu}, \quad \ell \text{ par}.$$

Desta forma, a positividade de $\mathcal{J}_\nu^s$ garante que K_ε também satisfaz o item (ii). Resta provar que K_ε satisfaz o item (iii). Para isto, consideramos o seguinte lema.

Lema 4.2.5. [11, *p.*3] *Sejam $\nu \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1,\ldots,2(s-1)\}$. Então, existe uma constante $k_s > 0$ satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{J}_\nu^s(u)\,[2\operatorname{sen}(u/2)]^j\, du \leq \left(\frac{k_s}{\nu}\right)^j.$$

Agora, levando em consideração as seguintes desigualdades básicas: $2t \leq \pi \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi/2$ e $\operatorname{sen} t \leq t$, $t \geq 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|S^{n-1}|}{|S^{n-2}|}\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n} &\geq \int_0^{\pi/2} \mathcal{J}_\nu^s(u) \operatorname{sen}^{n-2} u\, du \\
&= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell\pi/4} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}(t/\ell)}\right)^{2s} \operatorname{sen}^{n-2}(2t/\ell)\, dt \\
&\geq \frac{2^{2n-3}\ell^{2s-n+1}}{\pi^{n-2}}\int_0^{\ell\pi/4} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^{2s} t^{n-2}\, dt \\
&\geq \frac{\ell^{2s-n+1}}{\pi^n}\int_0^{\ell\pi/4} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^{2s} t^{n-2}\, dt.
\end{aligned}$$

Mas, segundo [17], a integral na última desigualdade converge quando $2s > n-1$. Logo, fixando $s > n-1$ (tomamos tal s para, mais adiante, usar o último lema) obtemos uma constante $c(n) > 0$ tal que $\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n} \geq c(n)\,\ell$. Agora, dado $0<\delta<1$, é fácil ver que existe uma constante $C_\delta > 0$ satisfazendo $\operatorname{sen} t \leq C_\delta(1-\cos t)$ quando $0 < \arccos(1-\delta) \leq t \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}\int_{-1}^{1-\delta} |K_\varepsilon(t)|\, d\omega_n(t) &= \int_{\arccos(1-\delta)}^{\pi} \mathcal{J}_\nu^s(u) \operatorname{sen}^{n-2} u\, du \\
&\leq C_\delta \int_{\arccos(1-\delta)}^{\pi} \mathcal{J}_\nu^s(u)\,(1-\cos u)^{n-2}\, du \\
&\leq C_\delta \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{J}_\nu^s(u)\,(1-\cos u)^{n-2}\, du \\
&= \frac{C_\delta}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{J}_\nu^s(u)\,[2\operatorname{sen}(u/2)]^{2(n-2)}\, du
\end{aligned}$$

Assim, segue do Lema 4.2.5 que

$$\int_{-1}^{1-\delta} |K_\varepsilon(t)|\, d\omega_n(t) \quad \leq \quad \left(\frac{\pi\, C_\delta}{c(n)\,\ell}\right)\left(\frac{k_s}{\nu}\right)^{2(n-2)}.$$

Portanto, segue do Teorema 4.2.2 que K_ε gera uma aproximação da identidade em $C(S^{n-1})$, a qual denotaremos, daqui em diante, por f_ε.

Finalmente, como $\mathcal{J}_\nu^s$, com ℓ par, é limitada em $[0,\pi]$, existe uma constante $c(\varepsilon) > 0$ satisfazendo

$$K_\varepsilon(t) \leq c(\varepsilon)(1+t), \quad 0 < \varepsilon < \infty. \tag{4.9}$$

Observação 4.2.6. É bom que fique claro o comportamento dos índices s, ℓ e ν, quando $\varepsilon \to 0$. Da forma que definimos ε, isto acontece quando $\nu \to \infty$. Queremos, pois, esclarecer como fazemos ν tender ao infinito. Note que em nossos cálculos, sempre consideramos uma dimensão n fixa, mas arbitrária. Para encontrarmos algumas de nossas estimativas, fomos obrigados a tomar s suficientemente grande e fixo, de modo a obter convergência de integrais impróprias para valores positivos. Portanto, quando escrevemos $\nu \to \infty$, estamos dizendo que s é fixo e suficientemente grande para satisfazer nossas estimativas e que ℓ tende ao infinito por valores pares.

4.3 A derivada da translação esférica com relação ao parâmetro

Esta seção contém resultados sobre a diferenciabilidade de $\mathcal{T}_t^n(f)$ em relação ao parâmetro $t \in (-1,1)$.

Começamos enunciando um lema que para nós é puramente técnico.

Lema 4.3.1. [27, *p*.92] *Se $f \in C^1(S^{n-1})$, então*

$$\frac{\partial \mathcal{T}_t^n(f)}{\partial t} = \frac{1}{1-t^2}\sum_{k=1}^{n} A_k \mathcal{T}_t^n(D^k f), \quad t \in (-1,1).$$

Observação 4.3.2. Se $f \in L^1(S^{n-1})$ e $t \in (-1,1)$, então

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \mathcal{T}_t^n(A_k f)(\omega) = t\, \mathcal{T}_t^n(f)(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Com efeito, fixado $\omega \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} A_k \mathcal{T}_t^n(A_k f)(\omega) &= \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}}\int_{\omega\cdot\tau=t}\left[\sum_{k=1}^{n}\omega_k\tau_k\right] f(\tau)\, d\tau\\
&= \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}}\int_{\omega\cdot\tau=t}(\omega\cdot\tau) f(\tau)\, d\tau\\
&= \frac{t}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{(n-2)/2}}\int_{\omega\cdot\tau=t} f(\tau)\, d\tau\\
&= t\,\mathcal{T}_t^n(f)(\omega).
\end{aligned}$$

A proposição abaixo refina o lema anterior.

Proposição 4.3.3. *Seja $f \in C^1(S^{n-1})$. Então,*

$$\frac{\partial \mathcal{T}_t^n(f)}{\partial t} = \frac{1}{1-t^2}\left[(n-1)t\mathcal{T}_t^n(f) - \sum_{k=1}^{n} D^k \mathcal{T}_t^n(A_k f)\right], \quad t \in (-1,1).$$

Demonstração: Sejam $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ e $t \in (-1,1)$. Segue do Teorema 1.0.17-(ii), que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{T}_t^n(f)}{\partial t}, \varphi\right)_2 = \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}_t^n(f), \varphi)_2. \tag{4.10}$$

Por outro lado, pelo Corolário 3.5.6 e, novamente, pelo Teorema 1.0.17-(ii), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}_t^n(f), \varphi)_2 = \frac{\partial}{\partial t}(f, \mathcal{T}_t^n(\varphi))_2 = \left(f, \frac{\partial \mathcal{T}_t^n(\varphi)}{\partial t}\right)_2.$$

Aplicando o Lema 4.3.1 e o Teorema 4.1.2 na última igualdade, encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}_t^n(f), \varphi)_2 &= \frac{1}{1-t^2}\sum_{k=1}^{n}(f, A_k \mathcal{T}_t^n(D^k\varphi))_2 \\
&= \frac{1}{1-t^2}\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{T}_t^n(A_k f), D^k\varphi)_2 \\
&= \frac{1}{1-t^2}\sum_{k=1}^{n}\left[(n-1)(A_k \mathcal{T}_t^n(A_k f), \varphi)_2 - (D^k \mathcal{T}_t^n(A_k f), \varphi)_2\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, segue da Observação 4.3.2 que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}_t^n(f), \varphi)_2 = \frac{1}{1-t^2}\left[(n-1)(t\mathcal{T}_t^n(f), \varphi)_2 - \sum_{k=1}^{n}(D^k \mathcal{T}_t^n(A_k f), \varphi)_2\right].$$

A fórmula do enunciado é obtida comparando-se a última igualdade com (4.10). ■

Lema 4.3.4. *Seja $f \in C((-1,1) \times S^{n-1})$. Assuma que exista $g \in C((-1,1) \times S^{n-1})$ satisfazendo*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, \varphi)_2 = (g, \varphi)_2, \quad \varphi \in C^\infty(S^{n-1}).$$

Então, f é diferenciável em t e $\partial f/\partial t = g$.

Demonstração: Primeiro, vamos provar que f é diferenciável em t. Seja

$$h(t,x) = \int_0^t g(s,\omega)\, ds, \quad (t,\omega) \in (-1,1) \times S^{n-1}. \tag{4.11}$$

Como h é diferenciável em t, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{S^{n-1}} h(t,\omega)\varphi(\omega)\, d\omega = \int_{S^{n-1}} g(t,\omega)\varphi(\omega)\, d\omega, \quad \varphi \in C^\infty(S^{n-1}).$$

Segue da hipótese que,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S^{n-1}} f(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega - \int_{S^{n-1}} g(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{S^{n-1}} f(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega - \int_{S^{n-1}} h(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S^{n-1}} [f(t,\omega)-h(t,\omega)]\varphi(\omega)\,d\omega, \quad t\in(-1,1), \quad \varphi\in C^\infty(S^{n-1}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Concluímos a prova analisando dois casos. Se $f(0,\omega)=0$, $\omega\in S^{n-1}$, obtemos de (4.12) e da definição de h que

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} [f(t,\omega)-h(t,\omega)]\varphi(\omega)\,d\omega &= \int_{S^{n-1}} [f(0,\omega)-h(0,\omega)]\varphi(\omega)\,d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} f(0,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega \\ &= 0, \quad \varphi\in C^\infty(S^{n-1}), \end{aligned}$$

de modo que $f(t,\omega)=h(t,\omega)$, $(t,\omega)\in(-1,1)\times S^{n-1}$, devido à continuidade das funções. Em particular, f é diferenciável em t. No caso geral, trocamos f por $F(t,\omega) = f(t,\omega)-f(0,\omega)$. Obviamente, $F(0,\omega)=0$, F satisfaz as mesmas hipóteses de f, e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int_{S^{n-1}} F(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S^{n-1}} [f(t,\omega)-f(0,\omega)]\varphi(\omega)\,d\omega \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{S^{n-1}} f(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega - \int_{S^{n-1}} f(0,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S^{n-1}} f(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} g(t,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega, \quad \varphi\in C^\infty(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Segue de (4.11) que $\partial f/\partial t = g$, o que finaliza a prova. ■

Proposição 4.3.5. *Sejam $f\in C(S^{n-1})$ fracamente diferenciável e $\mathbb{D}_1 f,\ldots,\mathbb{D}_n f \in C(S^{n-1})$. Então,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}_t^n(f) = \frac{1}{1-t^2}\sum_{k=1}^n A_k \mathcal{T}_t^n(\mathbb{D}_k f), \quad t\in(-1,1).$$

Demonstração: Sejam $\varphi\in C^\infty(S^{n-1})$ e $t\in(-1,1)$. Segue do Corolário 3.5.6 e da Proposição 4.3.3 que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}_t^n(f),\varphi)_2 = \frac{1}{1-t^2}\left[t(n-1)(f,\mathcal{T}_t^n(\varphi))_2 - \sum_{k=1}^n (f, D^k\mathcal{T}_t^n(A_k\varphi))_2\right]. \tag{4.13}$$

Mas, $\mathcal{T}_t^n(A_k\varphi) \in C^\infty(S^{n-1})$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, de modo que pela Definição 4.1.1 e novamente pelo Corolário 3.5.6, obtemos

$$\begin{aligned}(f, D^k\mathcal{T}_t^n(A_k\varphi))_2 &= (n-1)(A_kf, \mathcal{T}_t^n(A_k\varphi))_2 - (\mathbb{D}_kf, \mathcal{T}_t^n(A_k\varphi))_2 \\ &= (n-1)(A_k\mathcal{T}_t^n(A_kf), \varphi)_2 - (\mathbb{D}_kf, \mathcal{T}_t^n(A_k\varphi))_2.\end{aligned}$$

Agora, somando em k, aplicando a Observação 4.3.2 e substituindo em (4.13), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}_t^n(f), \varphi)_2 = \frac{1}{1-t^2}\sum_{k=1}^n(\mathbb{D}_kf, \mathcal{T}_t^n(A_k\varphi))_2 = \frac{1}{1-t^2}\sum_{k=1}^n(A_k\mathcal{T}_t^n(\mathbb{D}_kf), \varphi)_2.$$

O resultado segue do Lema 4.3.4. ■

4.4 Diferencibilidade fraca e diferenciabilidade

O objetivo principal desta seção é estabelecer condições de modo que diferenciabilidade fraca implique em diferenciabilidade. Várias propriedades adicionais do núcleo de Jackson são necessárias. Elas são enumeradas e provadas a seguir.

Lema 4.4.1. *Seja $f \in C(S^{n-1})$. Então,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^1 K_\varepsilon(t)(1-t)^2(1-t^2)^{(n-5)/2}\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\,dt = 0, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Demonstração: Basta usar desigualdade

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-1}^1 K_\varepsilon(t)(1-t)^2(1-t^2)^{(n-5)/2}\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\,dt\right| \\ &\qquad\leq \frac{\|f\|_\infty}{\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}}\int_{-1}^1 \mathcal{J}_\nu^s(\arccos t)(1-t)^2(1-t^2)^{(n-5)/2}\,dt \\ &\qquad= \frac{\|f\|_\infty}{\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}}\int_0^\pi \mathcal{J}_\nu^s(u)(1-\cos u)^2\mathrm{sen}^{n-4}u\,du,\end{aligned}$$

a qual é uma conseqüência do Teorema 3.5.11. O resultado propriamente dito segue das desigualdades (4.8) e (4.7). ■

Lema 4.4.2. *Sejam $f \in C(S^{n-1})$ fracamente diferenciável e $\mathbb{D}_1f, \ldots, \mathbb{D}_nf \in C(S^{n-1})$. Então,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^1 K_\varepsilon(t)(1-t)(1-t^2)^{(n-5)/2}\left[\sum_{k=1}^n \omega_k\mathcal{T}_t^n(\mathbb{D}_kf)(\omega)\right]dt = 0, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Demonstração: Consideremos a coleção de funcionais lineares reais $\{V_\varepsilon\}$ dados por

$$V_\varepsilon(\varphi) = \int_{-1}^1 K_\varepsilon(t)(1-t)(1-t^2)^{(n-5)/2}\varphi(t)\,dt.$$

A demonstração consistirá em mostrar que $\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon(\varphi) = 0$, quando $\varphi \in C_0([-1,1]) := \{\varphi \in C([-1,1]) : \varphi(1) = 0\}$. Para tanto, vamos buscar um limitante uniforme para $|V_\varepsilon(\varphi)|$. Como $1 - \cos u \leq \mathrm{sen}^2 u$, $0 \leq u \leq \pi/2$ e $1 - \cos u \leq (1-\cos u)^2$, $\pi/2 \leq u \leq \pi$, então

$$\begin{aligned}
|V_\varepsilon(\varphi)| &\leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}} \int_{-1}^{1} \mathcal{J}_\nu^s(\arccos t)(1-t)(1-t^2)^{(n-5)/2}\, dt \\
&= \frac{\|\varphi\|_\infty}{\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}} \int_{0}^{\pi} \mathcal{J}_\nu^s(u)(1-\cos u)\mathrm{sen}^{n-4} u\, du \\
&\leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{\|\mathcal{J}_\nu^s\|_{1,n}} \left[\int_0^{\pi/2} \mathcal{J}_\nu^s(u)\mathrm{sen}^{n-2} u\, du + \int_{\pi/2}^{\pi} \mathcal{J}_\nu^s(u)(1-\cos u)^2 \mathrm{sen}^{n-4} u\, du\right].
\end{aligned}$$

Logo, para s suficientemente grande, as desigualdades (4.7) e (4.8) implicam que

$$|V_\varepsilon(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \left(c_1 + \frac{c_2}{\nu^2}\right) \leq c\|\varphi\|_\infty,$$

onde c não depende de ε. Agora, tomando $\varphi \in C_0^\infty([-1,1])$, encontramos

$$\begin{aligned}
|V_\varepsilon(\varphi)| &\leq \int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t)(1-t^2)^{(n-5)/2} \left|\varphi(t) - \frac{(1-t)}{2}\varphi(-1) + \frac{(1-t)}{2}\varphi(-1)\right| dt \\
&\leq \int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t)(1-t^2)^{(n-5)/2} \left|\varphi(t) - \frac{(1-t)}{2}\varphi(-1)\right| dt \\
&\quad + \frac{|\varphi(-1)|}{2} \int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t^2)^{(n-5)/2}(1-t)^2\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} \left|\frac{\varphi(t) - \varphi(-1)(1-t)/2}{1+t}\right| dt \\
&\quad + \frac{|\varphi(-1)|}{2} \int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t^2)^{(n-5)/2}(1-t)^2\, dt.
\end{aligned}$$

O primeiro somando acima aproxima-se de 0 quando $\varepsilon \to 0$ devido ao Corolário 4.2.4. O segundo aproxima-se de zero pelo lema anterior. Logo, pela Proposição 1.0.15 temos que $\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon(\varphi) = 0$, $\varphi \in C_0([-1,1])$. O resultado segue do Corolário 4.1.5. ∎

Lema 4.4.3. *Sejam $f \in C(S^{n-1})$ fracamente diferenciável e $\mathbb{D}_1 f, \ldots, \mathbb{D}_n f \in C(S^{n-1})$. Então,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S^{n-1}} f(\tau) K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(1-\omega\cdot\tau)\, d\tau = \left(\frac{n-1}{2}\right) f(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.5.9 obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{n-1}} f(\tau) K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(1-\omega\cdot\tau)\, d\tau \\
&\qquad = \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|} \int_{-1}^{1} K_\varepsilon'(t)(1-t)^{(n-1)/2}(1+t)^{(n-3)/2} \mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\, dt
\end{aligned}$$

Integrando por partes, aplicando a Proposição 4.3.5 e usando (4.9) (este último para mostrar que o termo não-integral resultante da integração por partes é igual a zero nos casos $n = 2, 3$), encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon'(t)(1-t)^{(n-1)/2}(1+t)^{(n-3)/2}\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\,dt \\
&\qquad = \left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\,dt \\
&\qquad - \left(\frac{n-3}{2}\right)\frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t)^2(1-t^2)^{(n-5)/2}\mathcal{T}_t^n(f)(\omega)\,dt \\
&\qquad - \frac{|S^{n-2}|}{|S^{n-1}|}\int_{-1}^{1} K_\varepsilon(t)(1-t)(1-t^2)^{(n-5)/2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathcal{T}_t^n(\mathbb{D}_k f)(\omega)\right] dt.
\end{aligned}$$

Agora, os Lemas 4.4.1 e 4.4.2 garantem que os dois últimos termos da igualdade acima tendem a zero quando $\varepsilon \to 0$ e, portanto, o resultado segue do Teorema 4.2.2-(i). ■

A seguir, precisaremos de uma notação adicional. Se $f : S^{n-1} \times S^{n-1} \to Y$ é diferenciável, escreveremos $D_1^k f$ para indicar a derivada de $f(\omega,\tau)$ em relação à k-ésima componente de ω. Similarmente, $D_2^k f$ indicará a derivada de $f(\omega,\tau)$ em relação à k-ésima componente de τ.

Lema 4.4.4. *Sejam $f \in C(S^{n-1})$ fracamente diferenciável e $\mathbb{D}_1 f, \ldots, \mathbb{D}_n f \in C(S^{n-1})$. Então,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|D^k f_\varepsilon - \mathbb{D}_k f\right\|_\infty = 0, \quad k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Demonstração: Sejam $\omega, \tau \in S^{n-1}$. Fixado $k \in \{1,\ldots,n\}$, temos

$$D_1^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau) = K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(\tau_k - \omega_k\,(\omega\cdot\tau))$$

e

$$D_2^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau) = K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(\omega_k - \tau_k\,(\omega\cdot\tau)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D_1^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau) &= K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(\tau_k - \omega_k\,(\omega\cdot\tau)) + D_2^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau) - D_2^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau) \\
&= K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(1-\omega\cdot\tau)(\omega_k+\tau_k) - D_2^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau).
\end{aligned}$$

Segue do Teorema 1.0.17-(ii) e da última igualdade que

$$\begin{aligned}
D^k f_\varepsilon(\omega) &= \int_{S^{n-1}} f(\tau) D_1^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)\,d\tau \\
&= \omega_k \int_{S^{n-1}} f(\tau) K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(1-\omega\cdot\tau)\,d\tau + \int_{S^{n-1}} \tau_k f(\tau) K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(1-\omega\cdot\tau)\,d\tau \\
&\quad - \int_{S^{n-1}} f(\tau) D_2^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)\,d\tau \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 4.4.3 temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_k\int_{S^{n-1}} f(\tau)K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(1-\omega\cdot\tau)\,d\tau = \left(\frac{n-1}{2}\right)\omega_k f(\omega), \tag{4.15}$$

enquanto que, através da Proposição 4.1.3 e do Lema 4.4.3, encontramos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S^{n-1}} \tau_k f(\tau)K_\varepsilon'(\omega\cdot\tau)(1-\omega\cdot\tau)\,d\tau = \left(\frac{n-1}{2}\right)\omega_k f(\omega). \tag{4.16}$$

Finalmente, pelas definições de derivada fraca e aproximação da identidade temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S^{n-1}} f(\tau)D_2^k K_\varepsilon(\omega\cdot\tau)\,d\tau = (n-1)\omega_k f(\omega) - \mathbb{D}_k f(\omega). \tag{4.17}$$

Portanto, o resultado segue de (4.14)-(4.17). ■

Lema 4.4.5. *Seja $k \in \{1,\dots,n\}$. O operador D^k é fechado sobre $C^1(S^{n-1})$.*

Demonstração: É uma simples adaptação da prova do Teorema 1 de [7, p.47]. ■

O próximo resultado é a recíproca do Teorema 4.1.2. Com ele encerramos o trabalho mostrando que as noções de diferenciabilidade fraca e usual coincidem em $C^1(S^{n-1})$.

Teorema 4.4.6. *Seja $f \in C(S^{n-1})$ fracamente diferenciável com $\mathbb{D}_1 f,\dots,\mathbb{D}_n f \in C(S^{n-1})$. Então, $f \in C^1(S^{n-1})$ e $\mathbb{D}_k f = D^k f$, $k \in \{1,\dots,n\}$.*

Demonstração: Seja f_ε a aproximação da identidade de f gerada pelo núcleo K_ε. Então, $\|f_\varepsilon - f\|_\infty \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Agora, fixando $k \in \{1,\dots,n\}$, segue do Lema 4.4.4 que $\|D^k f_\varepsilon - \mathbb{D}_k f\|_\infty \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Finalmente, como $\{f_\varepsilon\} \subset C^1(S^{n-1})$, o resultado segue do Lema 4.4.5 e do Teorema 1.0.18 . ■

Referências Bibliográficas

[1] Aronszajn, N., Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.* 68, (1950). 337–404.

[2] Axler, S.; Bourdon, P.; Ramey, W., Harmonic function theory. Graduate Texts in Mathematics, 137. *Springer-Verlag, New York,* 1992.

[3] Bachman, G.; Narici, L., Functional analysis. *Academic Press, New York-London,* 1966.

[4] Brezis, H., Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. *Masson, Paris,* 1983.

[5] Berens, H.; Butzer, P. L.; Pawelke, S., Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A* 4 1968/1969 201–268.

[6] Hönig, C. S., Aplicações da topologia à análise. Textos de Matemática, No. *8 Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, Recife* 1961.

[7] Cheney, W., Analysis for applied mathematics. Graduate Texts in Mathematics, 208. *Springer-Verlag, New York,* 2001.

[8] Flanigan, F. J.; Kazdan, J. L., Calculus two. Linear and nonlinear functions. Undergraduate texts in mathematics. *Springer-Verlag. New York,* 1990.

[9] Folland, G. B., Real analysis. Modern techniques and their applications. Second edition. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. *John Wiley & Sons, Inc., New York,* 1999.

[10] Freeden, W.; Gervens, T.; Schreiner, M., Constructive approximation on the sphere. With applications to geomathematics. Numerical Mathematics and Scientific Computation. *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York,* 1998.

[11] Greiner, R., On a theorem of Andrievskii and Ruscheweyh. Proceedings of the Ashkelon Workshop on Complex Function Theory, 83–90, Israel Math. Conf. Proc., 11, *Bar-Ilan Univ., Ramat Gan,* 1997.

[12] Groemer, H., Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 61. *Cambridge University Press, Cambridge,* 1996.

[13] Lima, E. L., Curso de análise. Vol. 2. Projeto Euclides, 13. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro,* 2000.

[14] Jackson, D., The theory of approximation. American Mathematical Society Colloquium Publications, 11. *American Mathematical Society, Providence, RI,* 1994.

[15] Larsen, R., Functional analysis: an introduction. Pure and Applied Mathematics, No. 15. *Marcel Dekker, Inc., New York,* 1973.

[16] Lions, J.-L.; Magenes, E., Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg,* 1972.

[17] Lizorkin, P. I.; Nikolskiĭ, S. M., A theorem concerning approximation on the sphere. *Anal. Math. 9* (1983), no. 3, 207–221.

[18] Lizorkin, P. I.; Nikolskiĭ, S. M., Approximation on a sphere in L_2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 271* (1983), no. 5, 1059–1063.

[19] Lorentz, G. G., Approximation of functions. *Holt, Rinehart and Winston, New York-Chicago, Ill.-Toronto, Ont.* 1966.

[20] Menegatto, V. A.; Piantella, A.C., Old and new on the Laplace-Beltrami derivative: weighted approximation on the sphere. Preprint, 2006.

[21] Menegatto, V. A. Approximation by spherical convolution. *Numer. Funct. Anal. Optim. 18* (1997), no. 9-10, 995–1012.

[22] Morimoto, M., Analytic functionals on the sphere. Translations of Mathematical Monographs, 178. *American Mathematical Society, Providence, RI,* 1998.

[23] Müller, C., Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces. Applied Mathematical Sciences, 129. *Springer-Verlag, New York,* 1998.

[24] Neri, U., Singular integrals. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 200. *Springer-Verlag, Berlin-New York,* 1971.

[25] Rudin, W., Principles of mathematical analysis. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. *McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf,* 1976.

[26] Rudin, W., Uniqueness theory for Laplace series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 68, (1950). 287–303.

[27] Samko, S. G., Hypersingular integrals and their applications. Analytical Methods and Special Functions, 5. *Taylor & Francis, Ltd., London,* 2002.

[28] Samko, S. G.; Vakulov, B.G., On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 3 (2000), no. 4, 401–433.

[29] Seeley, R. T., Spherical harmonics. *Amer. Math. Monthly* 73 (1966) no. 4, part II, 115–121.

[30] Taylor, A. E. Introduction to functional analysis. *John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London* 1958.

[31] Taylor, M. E., Pseudodifferential operators. Princeton Mathematical Series, 34. *Princeton University Press, Princeton, N.J.,* 1981.

[32] Wang, K., Li, L., Harmonic analysis and approximation on the unit sphere. *Science Press, Beijing,* 2000.

[33] Wehrens, M., Best approximation on the unit sphere in R^k. *Functional analysis and approximation (Oberwolfach, 1980),* pp. 233–245, Internat. Ser. Numer. Math., 60, *Birkhäuser, Basel-Boston, Mass.,* 1981.

Índice de notações

- Símbolos definidos no texto:

- Símbolos que não estão definidos no texto:

L^+	Espaço das funções mensuráveis com valores em $[0,\infty]$;
$\circ$	Composição de funções;
$q.s.$	Quase sempre;
$\overline{f}$	Função conjugada;
$\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$	Espaço das transformações lineares de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$;
$\rvert_{S^{n-1}}$	restrição à S^{n-1};
$\lfloor \cdot \rfloor$	Maior inteiro menor ou igual;
$\star$	Variável arbitrária.

Índice Remissivo