
Álgebras de Lie Semi-simples

Leonardo Gomes Oliveira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 26 de janeiro de 2009

Assinatura: _____

Álgebras de Lie Semi-simples

Leonardo Gomes Oliveira

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Levcovitz*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Janeiro/2009

Resumo

A dissertação tem como tema as álgebras de Lie. Especificamente álgebras de Lie semi-simples e suas propriedades. Para encontramos essas propriedades estudamos os conceitos básicos da teoria das álgebras de Lie e suas representações. Então fizemos a classificação dessas álgebras por diagramas de Dynkin explicitando quais os possíveis diagramas que são associados a uma álgebra de Lie semi-simples. Por fim, demonstramos vários resultados concernentes a essa classificação, dentre esses, o principal resultado demonstrado foi: os diagramas de Dynkin são um invariante completo das álgebras de Lie semi-simples.

Abstract

The dissertation has the theme Lie algebras. Specifically semi-simple Lie algebras and its properties. To find these properties we studied the basic concepts of the theory of Lie algebras and their representations. Then we did the classification by Dynkin diagrams of these algebras and explaining the possible diagrams that are associated with a semi-simple Lie algebra. Finally, we demonstrate several results related to this classification, among these, the main result demonstrated was: the Dynkin diagrams are a complete invariant of semi-simple Lie algebras.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Definições	3
1.2 Representações	6
1.2.1 Decomposições de Representações	7
1.3 Séries de Composição	8
1.4 Álgebras simples e Álgebras semi-simples	10
1.5 Representações de Álgebras nilpotentes e solúveis	10
1.6 Critérios de Cartan	12
1.7 Subálgebras de Cartan	13
2 Representação Adjunta de Álgebras semi-simples	15
2.1 Representações de $\mathfrak{sl}(2)$	15
2.2 Subálgebras de Cartan	18
2.3 Fórmula de Killing	23
2.4 Sistema simples de raízes	27
2.5 Matrizes de Cartan	31
2.6 Diagramas de Dynkin	35
2.7 Exemplo de Álgebra Semi-Simples	36
3 Diagramas de Dynkin	39
3.1 Classificação dos diagramas	39
3.2 Realizações dos diagramas	48
4 Álgebras Semi-simples	51
4.1 Álgebras Isomorfas e seus Diagramas de Dynkin	51
4.2 Realizações das àlgebras clássicas	61
Bibliografia	71

Introdução

Esta dissertação tem como objetivo estudar resultados concernentes à teoria das álgebras de Lie. Mais especificamente às álgebras de Lie semi-simples e suas representações.

O único pré-requisito para o entendimento do trabalho é a álgebra linear. Vale citar que para estudar os conceitos mais avançados da teoria foi preciso o estudo de toda teoria relacionada a essas álgebras de Lie e em particular sua relação com os espaços vetoriais. Por exemplo: a decomposição de Jordan de matrizes, as formas lineares e bilineares, o espaço das transformações lineares, os autovalores das transformações e seus autovetores correspondentes, auto-espços generalizados e bases de espaços vetoriais.

O desenvolvimento da dissertação se dará de modo usual. Após enunciarmos os conceitos preliminares, desenvolveremos a teoria de modo claro e sucinto. Os detalhes dos cálculos serão feitos sempre que necessário. As conclusões serão apresentadas enfatizando sua importância para os próximos tópicos.

No primeiro capítulo, das preliminares, serão enunciados vários conceitos básicos das álgebras de Lie de dimensão finita. Definições básicas de: morfismos, ideais, subálgebras, representações, séries de composição, álgebras solúveis, álgebras nilpotentes e finalmente álgebras simples e semi-simples. Também enunciaremos resultados relacionados a Forma de Cartan-Killing, subálgebras de Cartan e decomposição da álgebra pela representação adjunta da subálgebra de Cartan.

A partir do segundo capítulo iremos nos concentrar apenas no estudo das álgebras semi-simples e suas representações. O primeiro passo é ver como se comportam as representações irredutíveis da álgebra $sl(2)$. Também demonstraremos alguns resultados das subálgebras de Cartan de uma álgebra semi-simples, sua representação adjunta e os pesos relacionados a essa representação. Então falaremos sobre pesos (raízes), Fórmula de Killing, sistemas simples de raízes e seus diagramas de Dynkin associados. Cada peso irá corresponder a uma subálgebra isomorfa a $sl(2)$, assim sempre poderemos ver a álgebra $sl(2)$ incluída na álgebra semi-simples. Por fim, vamos mostrar como classificar (representar) uma álgebra semi-simples por um diagrama de Dynkin (grafo).

No terceiro capítulo mostraremos alguns resultados da teoria de diagramas de Dynkin. Encontraremos os possíveis diagramas que representam as álgebras e suas propriedades. Na última seção, iremos expor as bases de espaços vetoriais sobre o corpo dos racionais que realizam os diagramas.

No último capítulo serão abordados os resultados mais importantes que relacionam

as álgebras de Lie semi-simples com os diagramas de Dynkin. O primeiro resultado mostra que os diagramas são invariantes em relação a subálgebras de Cartan distintas de uma mesma álgebra. Outro fato importante é que os diagramas de duas álgebras isomorfas coincidem. Finalmente, o principal resultado que será demonstrado é: os diagramas de Dynkin são um invariante completo das álgebras semi-simples, ou seja, se duas álgebras têm o mesmo diagrama então é possível construir um isomorfismo entre essas álgebras.

Em seguida a esse teorema principal faremos a realização de alguns dos possíveis diagramas encontrados no terceiro capítulo, a partir de álgebras semi-simples. Ou seja, iremos mostrar que dado um diagrama, realmente existem uma álgebra semi-simples, sua subálgebra de Cartan, seu sistema simples de raízes correspondentes que, visto como uma base de um espaço vetorial racional, têm as mesmas propriedades (números de Killing) das bases encontradas no capítulo três. Será feita a construção das álgebras clássicas, que são basicamente subálgebras da álgebra das matrizes.

Esses são os resultados apresentados em nossa dissertação. Ela foi baseada essencialmente no livro “Álgebras de Lie”, de Luiz A. B. San Martin. Vale ressaltar que o conteúdo presente na dissertação é de bastante utilidade para quem está se iniciando nesta área, pois expõe as definições, proposições e teoremas imprescindíveis a quem deseja compreender um texto simples ou um artigo mais complexo, que tenha como tema álgebras de Lie e suas representações.

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo serve para expor as definições e conceitos básicos da teoria de Álgebras de Lie. Vamos enunciar alguns resultados sem demonstração, pois se trata apenas de apresentar o material teórico e fixar a notação que vão ser necessários para os capítulos subsequentes.

1.1 Definições

Definição 1.1.1. Uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de uma operação (colchete de Lie) entre os vetores

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que tem as seguintes propriedades:

1. $[,]$ é bilinear,
2. $[,]$ é anti-simétrica, ou seja, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. (Equivale a dizermos que $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$),
3. $[,]$ satisfaz a *identidade de Jacobi*, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

A identidade de Jacobi pode ser escrita de outras maneiras, como

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]],$$

ou

$$[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]].$$

Sabemos que um álgebra em geral é espaço vetorial \mathfrak{g} munida de uma aplicação bilinear de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ em \mathfrak{g} . Uma álgebra de Lie tem a anti-simetria e a identidade de Jacobi como características específicas. Assim todos os conceitos básicos de espaço vetorial se estendem naturalmente para álgebras de Lie, como por exemplo um subespaço, que no caso de uma álgebra é chamado subálgebra.

Definição 1.1.2. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é um subespaço vetorial que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Exemplo 1.1.3. Um exemplo de álgebra de Lie que será mencionado em toda a dissertação é a álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo \mathbb{K} , que será denotado por $gl(n, \mathbb{K})$ ou simplesmente $gl(V)$. Essa álgebra é a mesma que o espaço das matrizes $n \times n$ com coeficientes em \mathbb{K} e o colchete é dado por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Aqui XY é a operação de composição entre transformações lineares que é o mesmo que a multiplicação de matrizes.

Definição 1.1.4. Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 duas álgebras de Lie. Uma transformação linear $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ é um

- homomorfismo se $\varphi[X, Y] = [\varphi X, \varphi Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_1$;
- isomorfismo se for um homomorfismo inversível;
- automorfismo se é um isomorfismo e $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$.

Definição 1.1.5. Duas álgebras \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 são ditas isomorfas se existe um isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$.

Uma forma de verificar que duas álgebras de Lie de dimensão finita são isomorfas é através dos colchetes de Lie entre seus elementos das bases. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base de \mathfrak{g} . Tome X_i e X_j dois elementos quaisquer da base. Podemos escrever o colchete entre esses dois elementos como combinação linear da base

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k.$$

Os coeficientes c_{ij}^k que aparecem na expressão acima são denominados *constantes de estrutura* da álgebra em relação a base fixada. Portanto duas álgebras de Lie são isomorfas se suas constantes de estrutura são iguais. As constantes de estrutura satisfazem as seguintes igualdades: para toda terna i, j, k temos,

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k,$$

$$\sum_{l,m} (c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m) = 0.$$

A primeira igualdade deve-se à anti-simetria do colchete e a segunda à identidade de Jacobi. Reciprocamente, dadas constantes que satisfazem essas duas igualdades, elas são constantes de estrutura de uma álgebra de Lie. De fato, tomando uma base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de um espaço vetorial, definindo $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ e estendendo por bilinearidade, obtém-se um álgebra de Lie cujas constantes estruturais são c_{ij}^k .

Definição 1.1.6. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal se para todo $Y \in \mathfrak{h}$ e todo $X \in \mathfrak{g}$ temos $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, ou seja,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} .$$

É claro que todo ideal é um subálgebra mas não vale a recíproca.

Seja $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo, então

$\ker\varphi$ é um ideal de \mathfrak{g}_1 ,

$\text{im}\varphi$ é uma subálgebra de \mathfrak{g}_2 .

Definição 1.1.7. Seja \mathfrak{g} um álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. No espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ defina

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}$$

onde \bar{X} denota a classe $X + \mathfrak{h}$. Definindo assim o colchete, o espaço $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie.

Aqui também, como em todas as teorias clássicas da álgebra, vale o teorema dos isomorfismos:

Teorema 1.1.8. 1. *Seja $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então,*

$$\mathfrak{g}/\ker\varphi \approx \text{im}\varphi.$$

2. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ ideais. Então,*

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \approx \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 .$$

A demonstração desse teorema é a mesma que para grupos, anéis ou espaços vetoriais.

Definição 1.1.9. Sejam $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie e

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$$

sua soma direta como espaços vetoriais. Com o colchete

$$[X, Y] = ([X_1, Y_1], \dots, [X_n, Y_n]) ,$$

onde $X = (X_1, \dots, X_n)$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, define-se uma estrutura de álgebra de Lie no espaço vetorial produto \mathfrak{g} .

1.2 Representações

Um dos conceitos que mais estudaremos nesse trabalho é o de representação de uma álgebra de Lie em um espaço vetorial. Essa é uma das ferramentas mais eficazes para encontrar a estrutura da álgebra, como por exemplo a existência de ideais e subálgebras.

Definição 1.2.1. Seja V um espaço vetorial e $gl(V)$ a álgebra das transformações lineares de V (que pode ter dimensão finita ou não). Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre o mesmo corpo de escalares que V . Uma representação de \mathfrak{g} em V é um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V).$$

O espaço vetorial V é denominado *espaço de representação* e sua dimensão é chamada *dimensão da representação*. Uma representação ρ é dita fiel se ela é injetora, ou seja, $\ker \rho = \{0\}$.

Quando ocorre da representação ser fiel, pelo teorema dos isomorfismos \mathfrak{g} é isomorfa a $\text{im} \rho$, que é uma subálgebra de $gl(V)$.

Outra maneira de introduzirmos o conceito de representação é vendo a álgebra das transformações lineares como um módulo sobre \mathfrak{g} .

Definição 1.2.2. Um módulo sobre um álgebra de Lie \mathfrak{g} é um espaço vetorial juntamente com uma operação de multiplicação $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$, denotada por $(X, v) \mapsto Xv$, que satisfaz:

1. $(X + Y)v = Xv + Yv$,
2. $X(u + v) = Xu + Xv$,
3. $aXv = X(av)$,
4. $[X, Y]v = XYv + YXv$,

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$.

Um módulo V sempre define uma representação

$$\begin{array}{lcl} \rho : & \mathfrak{g} & \longrightarrow gl(V) \\ & X & \longrightarrow \rho(X) : V \rightarrow V \\ & & v \mapsto \rho(X)v = Xv. \end{array}$$

Analogamente, pelo mesmo diagrama acima, uma representação define um módulo. Basta tomar $Xv = \rho(X)v$. Portanto, os conceitos de módulo e representação são equivalentes.

Dentre as representações de álgebras de Lie, há uma mais importante. Considere, para cada elemento $X \in \mathfrak{g}$, a transformação linear

$$ad(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

definida por $ad(X)Y = [X, Y]$.

Proposição 1.2.3. *A aplicação de \mathfrak{g} em $gl(\mathfrak{g})$ (\mathfrak{g} visto como espaço vetorial)*

$$ad : X \in \mathfrak{g} \longmapsto ad(X) \in gl(\mathfrak{g})$$

é uma representação de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} .

Essa representação é denominada *representação adjunta*. O núcleo da representação adjunta é denominado *centro* de \mathfrak{g} e é denotado por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : ad(X)Y = [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

A representação adjunta será a mais estudada neste trabalho e é dela que vem os principais resultados que encontraremos nos capítulos posteriores.

Definição 1.2.4. Sejam ρ_1 e ρ_2 duas representações de \mathfrak{g} em V_1 e V_2 , respectivamente. Elas são ditas equivalentes se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $P : V_1 \rightarrow V_2$ tal que

$$\rho_2(X) \circ P = P \circ \rho_1(X),$$

para qualquer $X \in \mathfrak{g}$.

Dada uma representação ρ de \mathfrak{g} em V , pode-se tomar a representação ρ^* de \mathfrak{g} em V^* . Essa representação é dada pela fórmula

$$\rho^*(\lambda)(X) = -\lambda \circ \rho(X), \quad \lambda \in V^*, X \in \mathfrak{g}.$$

Essa representação ρ^* é denominada *dual da representação ρ* . Em particular denotamos ad^* a representação dual da adjunta, que é denominada *representação co-adjunta*.

Definição 1.2.5. Seja ρ uma representação de \mathfrak{g} em V e suponha que W é um subespaço de V tal que $\rho(X)W \subset W$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Esse subespaço W é chamado *subespaço invariante*, e a restrição $\rho|_W$ define uma representação

$$\begin{aligned} \rho|_W : \mathfrak{g} &\longrightarrow gl(W) \\ X &\longrightarrow \rho(X) . \end{aligned}$$

Observação 1.2.6. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é invariante pela representação adjunta se e somente se \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} .

1.2.1 Decomposições de Representações

Nesta seção nos preocuparemos com o problema de decompor o espaço vetorial V , espaço da representação ρ da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Queremos saber quando podemos escrever o espaço V como soma direta de subespaços invariantes.

Definição 1.2.7. Uma representação ρ de \mathfrak{g} em V é dita *irredutível* se os únicos subespaços invariantes por ρ são os subespaços triviais $\{0\}$ e V . A representação é dita *completamente redutível* se V se decompõe como

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n,$$

onde cada V_i é invariante e tal que a restrição de ρ a V_i é irredutível.

A decomposição de V em componentes irredutíveis não é única. Pela definição vemos que uma representação irredutível é sempre completamente redutível. A seguir enunciaremos uma proposição que é bastante útil quando queremos saber se uma representação é completamente redutível.

Proposição 1.2.8. *Seja ρ uma representação de dimensão finita de \mathfrak{g} em V . Então ρ é completamente redutível se, e somente se, todo subespaço invariante admite um complementar invariante. Isto é, para todo W subespaço invariante, existe um subespaço invariante W_1 tal que*

$$V = W \oplus W_1.$$

Para concluirmos essa seção iremos definir um tipo especial de aplicação linear entre álgebras que será importante para o estudo da representação adjunta.

Definição 1.2.9. Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma *derivação* da álgebra de Lie \mathfrak{g} se satisfaz

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Essa é a regra de Leibniz de derivada de um produto.

Observe que a aplicação $ad(X)$ é uma derivação, pois a igualdade requerida é exatamente a identidade de Jacobi. As derivações desse tipo são denominadas *derivações internas*.

1.3 Séries de Composição

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie então denotamos por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ o conjunto

$$\{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Definição 1.3.1. Definimos, por indução, os subespaços:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

Essa série é conhecida por *série derivada* de \mathfrak{g} .

Prova-se facilmente que esses subespaços são na verdade ideais de \mathfrak{g} .

Definição 1.3.2. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita solúvel se existe um $k_0 \geq 1$, tal que,

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}.$$

Proposição 1.3.3. 1. Se \mathfrak{g} é solúvel e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é subálgebra então \mathfrak{h} é solúvel.
2. Se \mathfrak{g} é solúvel e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel.

Proposição 1.3.4. Seja $\overline{\mathbb{K}}$ é uma extensão de \mathbb{K} . \mathfrak{g} é solúvel se, e somente se, $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ é solúvel.

Definição 1.3.5. Definimos agora, outra sequência de subespaços:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Essa série é chamada *série central descendente* da álgebra \mathfrak{g} .

Proposição 1.3.6. A *série derivada* decresce mais rápido que a *série central descendente*:

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}.$$

Definição 1.3.7. Uma álgebra de Lie é nilpotente se existe um $k_0 \geq 1$ tal que,

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}.$$

Observe que toda álgebra nilpotente é em particular solúvel.

Proposição 1.3.8. 1. Se \mathfrak{g} é nilpotente e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é subálgebra então \mathfrak{h} é nilpotente.
2. Se \mathfrak{g} é nilpotente e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é nilpotente.

Proposição 1.3.9. Seja $\overline{\mathbb{K}}$ é uma extensão de \mathbb{K} . \mathfrak{g} é nilpotente se, e somente se, $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ é nilpotente.

Proposição 1.3.10. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe em \mathfrak{g} um único ideal solúvel \mathfrak{r} que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} .

Definição 1.3.11. O ideal \mathfrak{r} da proposição anterior é chamado de radical solúvel (ou simplesmente radical) de \mathfrak{g} . Para o radical de \mathfrak{g} será utilizada a notação $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Proposição 1.3.12. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe em \mathfrak{g} um único ideal \mathfrak{rn} que contém todos os ideais nilpotentes de \mathfrak{g} .

Definição 1.3.13. O ideal \mathfrak{rn} da proposição anterior é chamado de radical nilpotente (ou nil-radical) de \mathfrak{g} . Para o radical de \mathfrak{g} será utilizada a notação $\mathfrak{rn}(\mathfrak{g})$.

1.4 Álgebras simples e Álgebras semi-simples

A partir desta seção denotaremos por 0 o ideal $\{0\}$ quando for claro que estamos falando de conjuntos e não do elemento 0 .

Definição 1.4.1. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é semi-simples se

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$$

(isto é, \mathfrak{g} não contém ideais solúveis além de 0).

Definição 1.4.2. Uma álgebra \mathfrak{g} é simples se

1. Os únicos ideais de \mathfrak{g} são 0 e \mathfrak{g} .
2. $\dim \mathfrak{g} \neq 1$.

A propriedade 2., da álgebra simples, de que tenha dimensão diferente de um, é para que exista compatibilidade entre os conceitos de álgebras simples e semi-simples.

1.5 Representações de Álgebras nilpotentes e solúveis

Nesta seção serão enunciados resultados importantes das representações de álgebras nilpotentes e solúveis. O principal teorema desta teoria é o teorema de Engel, que nos diz que, para uma álgebra de Lie de transformações lineares cujos elementos são nilpotentes, é possível encontrar uma base em que as matrizes desses elementos são todas triangulares superiores com zeros na diagonal principal.

Definição 1.5.1. Seja \mathfrak{g} um álgebra de Lie. Uma representação ρ de \mathfrak{g} no espaço vetorial V é uma *representação nilpotente* se dado $X \in \mathfrak{g}$, existe um inteiro positivo k (dependente de X) tal que $\rho(X)^k = 0$.

Teorema 1.5.2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset gl(V)$ uma subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então existem subespaços*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

tal que $XV_i \subset V_{i-1}, i = 1, \dots, m$. Esses subespaços podem ser definidos indutivamente por

$$V_0 = 0$$

$$V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \forall X \in \mathfrak{g}\}.$$

Em particular, estendendo sucessivamente as bases dos subespaços V_i , chega-se em uma base de V tal que a matriz de X em relação a essa base é triangular superior com zeros na diagonal para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.5.3. *Seja \mathfrak{g} um álgebra de Lie de dimensão finita e suponha para todo $X \in \mathfrak{g}$, $ad(X)$ é nilpotente. Então, \mathfrak{g} é nilpotente.*

Teorema 1.5.4. *Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado e tome uma representação de \mathfrak{g} em V , com $\dim V < \infty$ e \mathfrak{g} nilpotente. Então, existem funcionais lineares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tal que se*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

então V_{λ_i} é \mathfrak{g} -invariante, $i = 1, \dots, s$. E

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Definição 1.5.5. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e ρ uma representação de \mathfrak{g} em V . Um peso de ρ é um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que o subespaço V_λ de V definido por

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\},$$

satisfaz $V_\lambda \neq 0$. O subespaço V_λ é chamado de subespaço de pesos associado a λ . A dimensão de V_λ é chamada de multiplicidade de λ .

Os pesos de uma representação são por definição os autovalores dos elementos da álgebra. O teorema 1.5.4 garante que representações de dimensão finita, de um álgebra nilpotente, sobre um corpo algebricamente fechado admitem pesos. Agora enunciaremos o teorema de Engel.

Teorema 1.5.6. *Suponha que o corpo é algebricamente fechado e seja ρ uma representação da álgebra nilpotente \mathfrak{g} sobre o espaço de dimensão finita V . Então, existe uma base de V tal que nessa base ρ se escreve como*

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho_1(X) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_s(X) \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}$$

com os blocos diagonais $\rho_i(X)$ da forma

$$\rho_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Onde λ_i é um peso da representação.

Esse resultado é o mais importante no contexto de álgebras nilpotente. Observe que essa decomposição mostra que um representação de uma álgebra nilpotente é irredutível se e somente se ela tem dimensão um.

Agora iremos enunciar um resultado semelhante só que para álgebras solúveis. É o teorema de Lie:

Teorema 1.5.7. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g} \subset gl(V)$ uma álgebra solúvel. Então, existe uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V e funcionais lineares $\lambda_1, \dots, \lambda_n : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que, em relação a β , $X \in \mathfrak{g}$ se escreve como*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}.$$

Proposição 1.5.8. *Seja \mathfrak{g} um álgebra de Lie de dimensão finita. Então, \mathfrak{g} é solúvel se e somente se a álgebra derivada \mathfrak{g}' é nilpotente.*

1.6 Critérios de Cartan

Nesta seção enunciaremos resultados que relacionam a forma de Cartan-Killing com a estrutura da álgebra, ou seja, se a álgebra é semi-simples ou solúvel. Também enunciamos resultados que serão úteis mais a frente no desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.6.1. Tome a representação adjunta de \mathfrak{g} . Definimos a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{g} como

$$\langle X, Y \rangle = tr(ad(X)ad(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Proposição 1.6.2. *Seja $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ uma derivação da álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Tome a decomposição primária*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m},$$

onde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0 \text{ para algum } n \geq 1\}$$

é o auto-espaço generalizado associado ao autovalor λ_i . Então,

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}.$$

($\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de D).

Teorema 1.6.3. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita, tem-se que \mathfrak{g} é solúvel se, e somente se,*

$$\langle X, Y \rangle = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{g}'$ e $Y \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.6.4. *A forma de Cartan-Killing é não-degenerada em \mathfrak{g} se, e somente se, \mathfrak{g} é semi-simples.*

Proposição 1.6.5. *Seja $\overline{\mathbb{K}}$ uma extensão de \mathbb{K} . Então \mathfrak{g} é semi-simples se, e somente se, $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ é semi-simples.*

Teorema 1.6.6. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semi-simples de dimensão finita. Então, \mathfrak{g} se decompõe em soma direta*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$$

com \mathfrak{g}_i , $i = 1, \dots, s$, ideais simples. Nessa decomposição $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$. Além do mais,

1. o ortogonal \mathfrak{g}_i^\perp de uma componente simples, em relação a forma de Cartan-Killing, é a soma das demais componentes,
2. os ideais de \mathfrak{g} são somas de algumas dessas componentes e
3. a decomposição é única (a menos de permutação dos índices).

Proposição 1.6.7. *Suponha que \mathfrak{g} seja semi-simples. Então, toda derivação é uma derivação interna, ou seja, se D é uma derivação então existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $D = ad(X)$.*

Corolário 1.6.8. *Suponha que \mathfrak{g} seja semi-simples e seja $X \in \mathfrak{g}$. Então, X se decompõe de maneira única em*

$$X = X_S + X_N$$

com $X_S, X_N \in \mathfrak{g}$ tais que $ad(X_S)$ é semi-simples, $ad(X_N)$ é nilpotente e

$$[X_S, X_N] = [X, X_S] = [X, X_N] = 0.$$

1.7 Subálgebras de Cartan

Nesta seção enunciaremos um conceito muito importante para o estudo das álgebras semi-simples, que é a subálgebra de Cartan.

Definição 1.7.1. O *normalizador* de uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é definido como

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : ad(X)\mathfrak{h} = [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

Definição 1.7.2. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} é uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que satisfaz:

1. \mathfrak{h} é nilpotente.
2. O normalizador de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} coincide com \mathfrak{h} .

Será importante o estudo da representação adjunta de uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} em \mathfrak{g} . Os pesos não-nulos dessa representação serão denominados *raízes* de \mathfrak{h} .

Agora precisamos definir um tipo específico de elemento de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para isso, tome a representação adjunta de \mathfrak{g} . Tome o polinômio característico de $ad(X)$

$$p_X(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \dots + p_1(X)\lambda + p_0(X)$$

onde $n = \dim \mathfrak{g}$ e cada $p_i(\cdot)$ é um polinômio de grau $n - i$ em X .

Definição 1.7.3. O posto de uma álgebra de Lie de dimensão finita é o menor índice i em que p_i não é identicamente nulo, onde p_i denota, como acima, os coeficientes dos polinômios característicos de cada $ad(X)$. Um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é dito regular se $p_i(X) \neq 0$ onde i é o posto de \mathfrak{g} .

Teorema 1.7.4. *Seja $X \in \mathfrak{g}$ e denote por $\mathfrak{g}_0(X)$ o auto-espaço generalizado associado ao autovalor nulo na decomposição primária*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

de $ad(X)$ com $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalores não-nulos. Então $\mathfrak{g}_0(X)$ é subálgebra de Cartan se X for regular.

Lema 1.7.5. *Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan. Então, existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$.*

Dizemos que duas subálgebras de Cartan \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 são conjugadas se existe um automorfismo ϕ de \mathfrak{g} tal que $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.

Teorema 1.7.6. *Em álgebras de Lie sobre corpos algebricamente fechados as subálgebras de Cartan são conjugadas entre si.*

Observação 1.7.7. Todas essas proposições e teoremas nos garantem que dada uma álgebra semi-simples \mathfrak{g} um elemento regular $X \in \mathfrak{g}$, se tomarmos $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$ uma subálgebra de Cartan, pela proposição 1.6.2 e pelo teorema 1.7.4, como $ad(X)$ é uma derivação, então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k},$$

onde λ_i são os pesos não-nulos de \mathfrak{h} , que nesse caso chamamos de raízes.

Capítulo 2

Representação Adjunta de Álgebras semi-simples

2.1 Representações de $sl(2)$

Para estudarmos as álgebras semi-simples iremos, inicialmente, analisar as representações irredutíveis da álgebra de Lie $sl(2)$ sobre um corpo \mathbb{K} algebricamente fechado de característica zero. Seja $\{X, H, Y\}$ a base de $sl(2)$, onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa base satisfaz:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Tome $\rho : sl(2) \rightarrow gl(V)$ uma representação irredutível de dimensão finita. Se $v \in V$ é um autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor λ então:

$$\rho[H, X]v = \rho(H)\rho(X)v - \rho(X)\rho(H)v \Rightarrow$$

$$\rho(H)\rho(X)v = \rho[H, X]v + \rho(X)\rho(H)v = \rho(2X)v + \rho(X)\lambda v = (2 + \lambda)\rho(X)v.$$

Logo, se $\rho(X)v \neq 0$, então esse vetor é autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\lambda + 2$. Analogamente consegue-se mostrar que se $\rho(Y)v \neq 0$ então ele será autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\lambda - 2$. Assim aplicando essa formula k vezes chegamos nas seguintes equações:

$$\rho(H)\rho(X)^k v = (\lambda + 2k)\rho(X)^k v,$$

$$\rho(H)\rho(Y)^k v = (\lambda - 2k)\rho(Y)^k v.$$

Dessas observações segue o teorema:

Teorema 2.1.1. *Seja ρ uma representação irredutível de $sl(2)$ em V com $\dim V = n+1$. Então, existe uma base $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que, para $i = 0, 1, \dots, n$,*

$$\begin{aligned}\rho(X)v_i &= i(n-i+1)v_{i-1}, \\ \rho(H)v_i &= (n-2i)v_i, \\ \rho(Y)v_i &= v_{i+1},\end{aligned}$$

onde $v_{-1} = v_{n+1} = 0$.

Demonstração: Seja v um autovetor de $\rho(H)$ associado a λ . Assim, pelo que foi dito anteriormente, se $\rho(X)^i v \neq 0$ então esse vetor é autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\lambda + 2i$. Como os autovetores estão associados a autovalores distintos eles formam um conjunto L.I.. Como V tem dimensão finita, existe $i_0 > 1$ tal que $\rho(X)^{i_0} v = 0$ e $\rho(X)^{i_0-1} v \neq 0$. Fixe $v_0 = \rho(X)^{i_0-1} v$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_0 = \lambda + 2i_0$. Tome $v_i = \rho(Y)^i v_0$. Analogamente, o conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ é L.I., pois são autovetores associados aos diferentes autovalores $\lambda_0 - 2i$, para $i = 0, 1, \dots, k$, onde k é tal que $v_{k+1} = 0$. Definidos assim temos:

$$\rho(X)v_i = i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}.$$

Essa igualdade é provada por indução em i . Para $i = 0$, por definição de v_0 , $\rho(X)v_0 = 0$. Agora suponha a fórmula válida para $i - 1$ e provemos para i . Temos:

$$\rho(X)v_i = \rho(X)\rho(Y)v_{i-1} = \rho[X, Y]v_{i-1} + \rho(Y)\rho(X)v_{i-1}.$$

Mas os termos da soma do último membro da equação anterior são:

$$\rho[X, Y]v_{i-1} = \rho(H)v_{i-1} = (\lambda - 2(i-1))v_{i-1}$$

e pela hipótese de indução

$$\rho(Y)\rho(X)v_{i-1} = \rho(Y)(i-1)(\lambda_0 - (i-1) + 1) = (i-1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\rho(X)v_i &= (\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (i-1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-1} = \\ &(\lambda_0 - 2i + 2 + i\lambda_0 - \lambda_0 - i^2 + 2i + i - 2)v_{i-1} = i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}.\end{aligned}$$

Portanto o espaço gerado por $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ é invariante por $\rho(X)$ e por construção também é invariante por $\rho(H)$ e $\rho(Y)$. Logo, como a representação é irredutível, V é igual ao espaço gerado por $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ e portanto $k = n$. Assim para acabar a demonstração do teorema basta mostrar que $\lambda_0 = n$. Por um lado temos $\rho(H)v_n = (\lambda_0 - 2n)v_n$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\rho(H)v_n &= \rho[X, Y]v_n = \rho(X)\rho(Y)v_n - \rho(Y)\rho(X)v_n \\ &= -\rho(Y)(n(\lambda_0 - n + 1)v_{n-1}) = -n(\lambda_0 - n + 1)v_n.\end{aligned}$$

Assim, $\lambda_0 - 2n = -n(\lambda_0 - n + 1)$, portanto $\lambda_0 = n$.

□

Observe que as matrizes de uma representação irredutível ρ de $sl(2)$ em V , onde $\dim V = n + 1$, têm a forma

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(n+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3(n+2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3(n-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-2(n-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-2(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$\rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

Os autovalores de $\rho(H)$ formam uma progressão aritmética de razão -2 que começa em n e termina em $-n$.

Teorema 2.1.2. *Para cada $n \geq 0$ existe uma única representação irredutível de dimensão $n + 1$ de $sl(2)$ (a menos de isomorfismo) e essas representações cobrem todas as representações de dimensão finita de $sl(2)$.*

Demonstração: Dado um espaço vetorial V de dimensão $n + 1$, seja $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Defina $\rho(X), \rho(H)$ e $\rho(Y)$ como nas expressões do teorema anterior. Assim ρ é representação de $sl(2)$ em V . De fato, basta ver que o colchete é preservado:

$$\rho[H, Y]v_i = -2\rho(Y)v_i = -2v_{i+1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\rho(H), \rho(Y)]v_i &= \rho(H)\rho(Y)v_i - \rho(Y)\rho(H)v_i \\ &= \rho(H)v_{i+1} - \rho(Y)(n-2i)v_i = (n-2(i+1))v_{i+1} - (n-2i)v_{i+1} = -2v_{i+1}. \end{aligned}$$

Logo

$$\rho[H, Y]v_i = [\rho(H), \rho(Y)]v_i, \text{ para todo } i.$$

A prova de que os demais colchetes são preservados é análoga. Logo ρ é representação e é irredutível, pois os subespaços invariantes por ρ são invariantes por $\rho(H)$. Mas os únicos subespaços invariantes por $\rho(H)$ são os gerados pelos v_i 's e esses subespaços não são invariantes por $\rho(X)$ e $\rho(Y)$. Logo não existem subespaços invariantes próprios, portanto a representação é irredutível. Isso prova a existência. A unicidade é garantida pois se tomarmos outro espaço W de dimensão $n+1$ e uma representação irredutível α . Então a transformação linear que faz corresponder as bases dos espaços V e W será o operador de intercâmbio das representações ρ e α . Portanto essas representações serão isomorfas.

□

2.2 Subálgebras de Cartan

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples sobre \mathbb{K} e \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . A álgebra se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k},$$

onde \mathfrak{g}_{α_i} são os subespaços de pesos da representação adjunta de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são os pesos não nulos. Essa decomposição é garantida pela observação 1.7.7. Esses pesos, como já foi dito, serão denominados raízes de \mathfrak{h} em relação a \mathfrak{g} e a notação utilizada para esse conjunto será Π . Os espaços \mathfrak{g}_{α_i} serão chamados espaços de raízes. Se representarmos a subálgebra \mathfrak{h} em cada um dos \mathfrak{g}_{α_i} , as matrizes serão da forma

$$ad(H) = \begin{pmatrix} \alpha_i(H) & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \alpha_i(H) \end{pmatrix}$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$. Vale também

$$[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_j}.$$

Essas duas últimas afirmações são garantidas pela proposição 1.6.2, pelo teorema 1.5.6 e por que \mathfrak{h} é nilpotente.

Lema 2.2.1. *Sejam α e β pesos de \mathfrak{h} . Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, então*

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(ad(X)ad(Y)) = 0,$$

a menos que $\alpha = -\beta$.

Demonstração: Seja $z \in \mathfrak{g}_\gamma$. Então,

$$ad(X)Z \in \mathfrak{g}_{\alpha+\gamma},$$

$$ad(Y)ad(X)Z \in \mathfrak{g}_{\beta+\alpha+\gamma}.$$

Se tomarmos uma base de \mathfrak{g} como a união das bases de \mathfrak{h} e \mathfrak{g}_{α_i} , a matriz de $ad(X)ad(Y)$ em relação a essa base não tem elementos na diagonal, ou seja, nada irá contribuir para o traço, a menos que $\alpha + \beta = 0$.

□

Corolário 2.2.2. 1. *A restrição da forma de Cartan-Killing à subálgebra \mathfrak{h} é não degenerada.*

2. *Se α é raiz então $-\alpha$ é raiz.*

3. *Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$.*

Demonstração: 1. Seja $H \in \mathfrak{h}$. Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{g} , existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle H, X \rangle \neq 0$. Tome a decomposição de X ,

$$X = H_1 + X_1 + \dots + X_k$$

onde $H_1 \in \mathfrak{h}$ e $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Pelo lema anterior

$$\langle H, X_i \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, k.$$

Portanto $\langle H, H_1 \rangle \neq 0$.

2. Seja $X \in \mathfrak{g}_\alpha$. Então existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$ mas pelo lema $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Logo $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq 0$ e $-\alpha$ é raiz.

3. Se supormos que $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $\langle X, Z \rangle = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Mas isso é um absurdo pois a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{g} .

□

Proposição 2.2.3. . *Para todo $H \in \mathfrak{h}$ e todo peso α , $ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)id$ e as transformações $ad(H)$ são simultaneamente diagonalizáveis.*

Demonstração: Já sabemos que

$$ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha(H) & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \alpha(H) \end{pmatrix}$$

Tome a decomposição $H = H_S + H_N$ (que existe pelo corolário 1.6.8) com $ad(H_S)$ semi-simples, $ad(H_N)$ nilpotente e H, H_S, H_N comutante dois a dois. Assim

$$ad(H_N)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $\alpha(H_N) = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$. Portanto H_N pertence ao auto-espaço associado ao autovalor 0, que é \mathfrak{h} . Mas $\langle H_N, H' \rangle = 0$ para todo $H' \in \mathfrak{h}$ pois $ad(H_N)ad(H')$ só tem zeros na diagonal. Isso implica que $H_N = 0$, pois a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{h} . Portanto $ad(H) = ad(H_S)$, que é diagonal.

□

Proposição 2.2.4. *A subálgebra \mathfrak{h} é abeliana.*

Demonstração: Pela proposição anterior

$$ad[H_1, H_2] = [ad(H_1), ad(H_2)] = 0,$$

para todo $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$. Como a representação adjunta é fiel no caso das álgebras semi-simples, $[H_1, H_2] = 0$, e portanto \mathfrak{h} é abeliana.

□

Proposição 2.2.5. *O conjunto Π das raízes gera o dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} , isto é, $H = 0$ se $\beta(H) = 0$ para toda raiz β .*

Demonstração: Pela proposição 2.2.3, $ad(H) = 0$, se $\beta(H) = 0$ para toda raiz $\beta \in \Pi$. Mas a representação adjunta é fiel, como já foi observado anteriormente, logo $H = 0$ se $\beta(H) = 0$ para toda raiz $\beta \in \Pi$. Portanto, temos um conjunto de funcionais lineares de \mathfrak{h} cujo único elemento no anulador é 0, logo esse conjunto gera o dual \mathfrak{h}^* .

□

Agora já podemos definir a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{h}^* . Pelo o fato de que ela é não degenerada em \mathfrak{h} , a aplicação $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ definida como:

$$\varphi(H) = \langle H, \cdot \rangle$$

é um isomorfismo. Denotamos $\alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle$. Assim para cada $H \in \mathfrak{h}$ existe um único $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\varphi(H) = \alpha$. E reciprocamente, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, existe único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle, \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Assim definimos a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{h}^* como

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle, \quad (2.1)$$

se α e β são dois funcionais lineares em \mathfrak{h} .

Pelo isomorfismo entre \mathfrak{h} e \mathfrak{h}^* , as raízes $\alpha \in \Pi$ definem um número finito de elementos H_α que geram \mathfrak{h} , pois Π gera \mathfrak{h}^* . O lema seguinte dará mais informações sobre a decomposição do espaço \mathfrak{g} com soma dos espaços de raízes de \mathfrak{h} .

Lema 2.2.6. 1. Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$.

2. Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_\alpha$.

3. Sejam α e β raízes. Então,

$$\langle \beta, \alpha \rangle = q_{\beta\alpha} \langle \alpha, \alpha \rangle$$

com $q_{\beta\alpha} \in \mathbb{Q}$. (Em geral $q_{\beta\alpha} \neq q_{\alpha\beta}$).

4. Para todo $\alpha \in \Pi$, $\langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}^+$.

5. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, para todo $\alpha \in \Pi$.

6. Os únicos múltiplos inteiros de uma raiz α que são raízes são α e $-\alpha$.

Demonstração: 1. Temos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{h}$. Tome $H \in \mathfrak{h}$ arbitrário. Então

$$\begin{aligned} \langle H, [X, Y] \rangle &= \langle H, \text{ad}(X)Y \rangle = \\ &= - \langle \text{ad}(X)H, Y \rangle = \langle \text{ad}(H)X, Y \rangle = \\ &= \alpha(H) \langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle \langle H, H_\alpha \rangle = \langle H, \langle X, Y \rangle H_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle H, [X, Y] - \langle X, Y \rangle H_\alpha \rangle = 0, \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{h} ,

$$[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha.$$

2. Pelo corolário 2.2.2 existe $Y' \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y' \rangle \neq 0$. Tome $Y = \frac{Y'}{\langle X, Y' \rangle}$ e temos

$$[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha = 1 \cdot H_\alpha.$$

3. Seja

$$V = \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \dots$$

onde $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = 0$ se $\beta + k\alpha$ não é raiz. Essa soma direta é finita pois há um número finito de raízes. Sejam $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_\alpha$. Pela definição de V , $ad(X)V \subset V$ e $ad(Y)V \subset V$ e vale que

$$ad(H_\alpha)|_V = ad([X, Y])|_V = [ad(X)|_V, ad(Y)|_V].$$

Logo $tr(ad(H_\alpha)|_V) = 0$. Assim, se definirmos $d_k = \dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$, temos

$$0 = tr(ad(H_\alpha)|_V) = \sum_k d_k(\beta + k\alpha)(H_\alpha) = \sum_k d_k(\langle \beta, \alpha \rangle + k \langle \alpha, \alpha \rangle) = \langle \beta, \alpha \rangle \sum_k d_k + \langle \alpha, \alpha \rangle \sum_k k d_k,$$

logo $\langle \beta, \alpha \rangle = -\frac{\sum k d_k}{\sum d_k} \langle \alpha, \alpha \rangle$. É claro que o denominador dessa fração é não nulo pois ao menos um dos $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \neq 0$, portanto

$$q_{\beta\alpha} = -\frac{\sum k d_k}{\sum d_k} \in \mathbb{Q}.$$

4. Pelo item 3., se $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$, então $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$ para toda raiz β , mas isso é falso pois a forma é não degenerada em \mathfrak{h}^* , logo $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$, para todo α pertencente a Π . Definindo $d_\beta = \dim \mathfrak{g}_\beta$, temos:

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle H_\alpha, H_\alpha \rangle = tr(ad(H_\alpha)^2) = \sum_{\beta \in \Pi} d_\beta \beta(H_\alpha)^2 = \sum_{\beta \in \Pi} d_\beta \langle \beta, \alpha \rangle^2 = \sum_{\beta \in \Pi} d_\beta q_{\beta\alpha}^2 \langle \alpha, \alpha \rangle^2,$$

$$\text{assim } \langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{\sum d_\beta q_{\beta\alpha}^2} \in \mathbb{Q}^+.$$

5. Tome X e Y como no item 3., mas agora tome V o espaço gerado por Y, \mathfrak{h} e

$$\sum_{k \geq 1} \mathfrak{g}_{k\alpha}.$$

Assim V é invariante por $ad(X)$ pois $ad(X)Y \in \mathfrak{h}$ e $ad(X)\mathfrak{g}_{k\alpha} \subset \mathfrak{g}_{(k+1)\alpha}$. Ele é invariante por $ad(Y)$, pois $ad(Y)\mathfrak{g}_{k\alpha} \subset \mathfrak{g}_{(k-1)\alpha}$ e $ad(Y)H = -ad(H)Y = -\alpha(H)Y$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Analogamente ao item 3., como $H_\alpha = [X, Y]$, $tr(ad(H_\alpha)|_V) = 0$. Mas por outro lado, como $V = \langle \{Y\} \cup \mathfrak{h} \cup \sum \mathfrak{g}_{k\alpha} \rangle$,

$$0 = tr(ad(H_\alpha)|_V) = -\alpha(H_\alpha) + \sum_{k \geq 0} d_k k \alpha(H_\alpha)$$

onde $d_k = \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}$. Logo

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{k \geq 0} k d_k \langle \alpha, \alpha \rangle .$$

Dividindo a equação por $\langle \alpha, \alpha \rangle$ temos

$$1 = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \dots$$

com $d_i \geq 0$ para todo i . Portanto a igualdade só é satisfeita se $d_1 = 1$ e $d_i = 0$ para todo $i \geq 2$.

6. Pelo que foi feito no item anterior $\dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = 0$ se $k \geq 2$. Logo $k\alpha$ só é raiz se $k = \pm 1$.

□

2.3 Fórmula de Killing

Agora, após a análise feita sobre as representações irredutíveis de $sl(2)$, encontraremos subálgebras da álgebra semi-simples \mathfrak{g} isomorfas a $sl(2)$. Dada α uma raiz e $\mathfrak{h}(\alpha)$ o subespaço de \mathfrak{h} gerado por H_α . Então temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.1. *A subálgebra*

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha$$

é isomorfa a $sl(2)$.

Demonstração: Primeiramente $\mathfrak{g}(\alpha)$ é subálgebra pois $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}(\alpha)$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}(\alpha)] \subset \mathfrak{g}_\alpha$ e $[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{h}(\alpha)] \subset \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Seja $H'_\alpha \in \mathfrak{h}(\alpha)$ definido por

$$H'_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha .$$

Pelo lema 2.2.6, existem $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que

$$\langle X_\alpha, Y_{-\alpha} \rangle = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} ,$$

pois como existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X_\alpha, Y \rangle = 1$, tome por exemplo $Y_{-\alpha} = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} Y$.

Agora temos

$$\begin{aligned} [H'_\alpha, X_\alpha] &= ad(H'_\alpha)X_\alpha = \frac{\alpha(H'_\alpha)X_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} X_\alpha \\ &= 2X_\alpha , \end{aligned}$$

$$[H'_\alpha, Y_{-\alpha}] = ad(H'_\alpha)Y_{-\alpha} = \alpha(H'_\alpha)Y_{-\alpha} = -2Y_{-\alpha},$$

$$[X_\alpha, Y_{-\alpha}] = \langle X_\alpha, Y_{-\alpha} \rangle H_\alpha = H'_\alpha.$$

Isso mostra que $\phi : sl(2) \longrightarrow \mathfrak{g}(\alpha)$, dado por $\phi(X) = X_\alpha$, $\phi(Y) = Y_{-\alpha}$ e $\phi(H) = H'_\alpha$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Aqui $\{X, H, Y\}$ é a base canônica de $sl(2)$. \square

Observação 2.3.2. O isomorfismo entre as álgebras não é único pois os X_α e $Y_{-\alpha}$ não são únicos.

Observação 2.3.3. Para cada raiz α temos uma representação de $sl(2)$ em \mathfrak{g} pela composição de ϕ com a representação adjunta de $\mathfrak{g}(\alpha)$ em \mathfrak{g} . Com essas representações analisaremos mais detalhadamente os colchetes $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$ e a forma $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Definição 2.3.4. Considere α e β duas raízes. A sequência de elementos de \mathfrak{h}^*

$$\dots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots$$

é denominada a α -sequência iniciada em β .

Queremos encontrar quais desses elementos são pesos. A resposta é dada pelo teorema:

Teorema 2.3.5. *Os elementos da α -sequência iniciada em β que são pesos formam um intervalo contendo β , isto é, existem inteiros $p, q \geq 0$ tais que*

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + q\alpha$$

são os únicos pesos da forma $\beta + k\alpha$ com $k \in \mathbb{Z}$. Além do mais, vale o seguinte fórmula (de Killing)

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}. \quad (2.2)$$

Demonstração: Suponha inicialmente que β é múltiplo inteiro de α assim $\beta = 0$ ou $\beta = \pm\alpha$. Logo a α -sequência iniciada em β fica

$$-\alpha, 0, \alpha.$$

Logo a fórmula de Killing vale nesse caso.

Agora suponha $\beta + k\alpha \neq 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Tome o subespaço de \mathfrak{g}

$$V_{\beta, \alpha} = \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta - \alpha} \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta + \alpha} \oplus \dots$$

Essa soma é finita e a representação adjunta de $\mathfrak{g}(\alpha)$ em \mathfrak{g} deixa $V_{\beta,\alpha}$ invariante, como já foi dito na parte 3. do lema 2.2.6. Logo podemos tomar a representação adjunta $ad:\mathfrak{g}(\alpha) \longrightarrow gl(V_{\beta,\alpha})$, e essa representação é irredutível. De fato, suponha que

$$V_{\beta,\alpha} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

é uma decomposição de $V_{\beta,\alpha}$, com V_i componentes irredutíveis. Seja $m_i = \dim V_i - 1$. Pela classificação das representações irredutíveis de $sl(2) \cong \mathfrak{g}(\alpha)$, os autovalores de $ad(H'_\alpha)$ são inteiros todos pares ou ímpares. Mas, por outro lado, os autovalores são

$$(\beta + k\alpha)(H'_\alpha) = \beta(H'_\alpha) + k\alpha(H'_\alpha) = 2\frac{\beta(H_\alpha)}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 2k\frac{\alpha(H_\alpha)}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 2k ,$$

logo o número $\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ é inteiro e os autovalores $(\beta + k\alpha)(H'_\alpha)$ têm a mesma paridade que ele, pois

$$2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = (\beta + k\alpha)(H'_\alpha) - 2k \in \mathbb{Z} .$$

Mas os autovalores são todos simples pois $\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = 1$, logo $s = 1$. Pois se supormos $s > 1$ então teríamos um autovalor m_i de V_i , e mais, $m_j = m_i + 2k$ para algum $k > 0$, o que implicaria que m_i não é autovalor simples pois, se $v \in V_j$ é autovetor de m_j ,

$$ad(H'_\alpha)v = m_jv = m_iv + 2kv = m_i(v + \frac{2k}{m_i}v)$$

e assim m_i seria também autovalor de um vetor em V_j , o que é falso. Portanto $s = 1$ e a representação é irredutível. Desse fato e do fato que $(\beta + k\alpha)(H'_\alpha)$ varia de dois em dois quando se varia k segue que

$$V_{\beta,\alpha} = \mathfrak{g}_{\beta-p\alpha} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta+q\alpha} .$$

De fato, se existisse j , $p < j < q$, tal que $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha} = 0$, teríamos que $(\beta + j\alpha)(H'_\alpha)$ não seria autovalor. Mas isso é absurdo pois, se $(\beta + (j-1)\alpha)(H'_\alpha)$ é autovalor, então

$$(\beta + j\alpha)(H'_\alpha) = (\beta + (j-1)\alpha)(H'_\alpha) + 2$$

que é autovalor. Assim o conjunto de pesos da forma $\beta + k\alpha$ é um intervalo.

Falta mostrar a fórmula. Por um lado, o maior autovalor de $ad(H'_\alpha)$ é

$$(\beta + q\alpha)(H'_\alpha) = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 2q$$

e por outro lado $\dim V_{\beta,\alpha} = q + p + 1$. Logo

$$p + q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 2q .$$

Portanto

$$p - q = \frac{2 \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

□

Observação 2.3.6. Na fórmula de Killing os valores de p e q são diferentes se tomarmos a β -sequência iniciada em α .

Observação 2.3.7. O inteiro

$$\frac{2 \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

é denominado número de Killing associado às raízes α e β .

Proposição 2.3.8. *Os únicos múltiplos de uma raiz α que são raízes são $\pm\alpha$ ou 0 .*

Demonstração: Suponha que $\beta = c\alpha$ é uma raiz, com $c \neq 0$. Logo

$$\frac{2 \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2c$$

$$\frac{2 \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{2}{c}.$$

Assim temos dois números inteiros que o produto é igual a 4, mas isso implica que $\frac{2 \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ e portanto $c = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$. Mas não ocorre $c = \pm \frac{1}{2}$ ou ± 2 , pois já foi provado que os únicos múltiplos inteiros de uma raiz α são $\pm\alpha$.

□

Proposição 2.3.9. *Se α e β são raízes tais que $\alpha + \beta$ é raiz, então*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}.$$

Demonstração: Tomando $X_\alpha \in \mathfrak{g}(\alpha) \cong sl(2)$, a expressão da representação irreduzível de $\mathfrak{g}(\alpha)$ em \mathfrak{g} mostra que

$$ad(X_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

De fato, $ad(X_\alpha)$ leva a base de \mathfrak{g}_β na base de $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Logo todos os elementos de $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ são imagem de $ad(X_\alpha)$. Portanto temos a igualdade requerida na proposição.

□

2.4 Sistema simples de raízes

O objetivo desta seção é encontrar um conjunto de raízes que seja base de \mathfrak{h}^* visto como espaço vetorial sobre os racionais, e ainda mais, que os elementos de Π sejam escritos como combinação dessa base com coeficientes inteiros. Esse conjunto será denominado *sistema simples de raízes*. Seja então $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ o espaço:

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \{a_1 H_{\alpha_1} + \dots + a_k H_{\alpha_k} : a_i \in \mathbb{Q} \text{ e } \alpha_i \in \Pi\}$$

que é um espaço de dimensão finita sobre \mathbb{Q} , pois o conjunto de raízes é finito.

Proposição 2.4.1. $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \dim \mathfrak{h}$.

Demonstração: Primeiramente seja $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Pi$ tal que $B = \{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_l}\}$ é base de \mathfrak{h} sobre \mathbb{K} . Como o corpo \mathbb{K} é de característica zero, ele contém os racionais e como o conjunto B é L.I. sobre \mathbb{K} é também L.I. sobre \mathbb{Q} . Assim $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} \geq \dim \mathfrak{h}$. Agora para mostrar a igualdade basta mostrar que B gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ sobre \mathbb{Q} . Seja α uma raiz qualquer, logo

$$H_{\alpha} = a_1 H_{\alpha_1} + \dots + a_l H_{\alpha_l}, a_i \in \mathbb{K}.$$

Agora, para cada $j = 1, \dots, l$, temos a equação

$$\langle H_{\alpha}, H_{\alpha_j} \rangle = \sum_{i=1}^l \langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle a_i.$$

Logo temos l equações e l incógnitas a_i . Mas assim esse sistema linear dá origem a uma matriz que é justamente a matriz da forma de Cartan-Killing em relação a base B , que é não-degenerada e portanto o sistema tem única solução. Como as entradas da matriz são todas racionais, pois os números $\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle$ são todos racionais, a solução é racional. Portanto $a_i \in \mathbb{Q}$, para $i = 1, \dots, l$. Então B gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ sobre \mathbb{Q} , e as dimensões são iguais. \square

Proposição 2.4.2. *A forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ é um produto interno.*

Demonstração: Restringindo a forma de Cartan-Killing à $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, definimos uma forma bilinear simétrica, pois o valor da forma em elementos de Π assume valores em \mathbb{Q} . Basta mostrar então que ela é positiva definida. Tome $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, assim

$$\langle H, H \rangle = \text{tr}(ad(H)^2) = \sum_{\alpha \in \Pi} \alpha(H)^2 \geq 0$$

e

$$\langle H, H \rangle = 0 \iff \alpha(H) = 0, \forall \alpha \in \Pi \iff H = 0,$$

pois Π gera \mathfrak{h}^* .

□

Esse espaço vetorial $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ sobre os racionais foi construído para estudarmos a estrutura das álgebras semi-simples através da geometria dos elementos H_{α} ou das próprias raízes em $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$.

Antes ainda, iremos introduzir uma ordem lexicográfica nos espaços vetoriais racionais. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} e $\{v_1, \dots, v_l\}$ uma base ordenada desse espaço. Escreva dois elementos $v, w \in V$ como combinação dos elementos da base

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_l v_l,$$

$$w = b_1 v_1 + \dots + b_l v_l.$$

Dizemos que $v \leq w$ se $v = w$ ou se $a_i < b_i$, para o primeiro índice i tal que $a_i \neq b_i$.

Definida assim a ordem lexicográfica em V satisfaz as propriedades que necessitaremos para provar a existência de um sistema simples de raízes.

Lema 2.4.3. *Tomando a ordem lexicográfica dada pela base $\{v_1, \dots, v_l\}$ de V , seja $\{w_1, \dots, w_m\}$ um subconjunto de V satisfazendo:*

a) $w_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, m$,

b) $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$ para $i \neq j$.

Então $\{w_1, \dots, w_m\}$ é um conjunto linearmente independente.

Demonstração: Suponha por absurdo que o conjunto seja linearmente dependente. Podemos supor que existem a_1, \dots, a_{m-1} tais que

$$w_m = a_1 w_1 + \dots + a_{m-1} w_{m-1}.$$

Como $w_m > 0$, pelo menos um dos $a_i > 0$. De fato, se todos fossem negativos então $a_i w_i < 0$ para todo $i = 1, \dots, m-1$, assim $w_m < 0$. Seja então

$$w_m = w_m^+ + w_m^-,$$

onde w_m^+ é a soma dos $a_i w_i$ tais que $a_i > 0$ e w_m^- a soma dos $a_i w_i$ tais que $a_i < 0$. Logo, por um lado, temos

$$\langle w_m, w_m^+ \rangle = \sum_i a_i \langle w_m, w_i \rangle \leq 0$$

Por outro lado,

$$\langle w_m, w_m^+ \rangle = \langle w_m^+ + w_m^-, w_m^+ \rangle = |w_m^+|^2 + \langle w_m^-, w_m^+ \rangle$$

e os termos do último membro da equação são positivos, pois $|w_m^+|^2$ é positivo e tomando a_i os coeficientes positivos de w_m e a_j os coeficientes negativos, temos $a_i a_j < 0$ e como $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$ então

$$\langle w_m^-, w_m^+ \rangle = \sum a_i a_j \langle w_i, w_j \rangle > 0.$$

Portanto o conjunto é L.I.

□

Definição 2.4.4. Fixada uma ordem lexicográfica no espaço vetorial racional $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$, uma raiz $\alpha \in \Pi$ é simples se

- i) $\alpha > 0$
- ii) Não existem β e $\gamma \in \Pi$ tais que $\beta, \gamma > 0$ e $\alpha = \beta + \gamma$.

O conjunto das raízes simples será denotado Σ .

Lema 2.4.5. *O conjunto Σ é não vazio e linearmente independente.*

Demonstração: Seja α uma raiz positiva minimal. Logo não existe β raiz positiva tal que $\beta < \alpha$ (esse elemento existe pois o subconjunto das raízes positivas de Π é finito e não vazio). Suponha, por absurdo, que α não é raiz simples. Assim existem β e $\gamma \in \Pi$ tais que $\beta, \gamma > 0$ e $\alpha = \beta + \gamma$, mas assim $0 < \beta < \alpha$ o que implicaria que α não é raiz minimal. Logo $\alpha \in \Sigma$ e portanto $\Sigma \neq \emptyset$. Agora para mostrarmos que Σ é L.I. utilizaremos o lema 2.4.3 provando que se α e β estão em Σ , $\alpha \neq \beta$, então $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$. Primeiro observe que $\beta - \alpha$ não é raiz, pois se fosse, como

$$\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$$

então $\beta - \alpha \leq 0$, pois β é simples. Por outro lado, como

$$\alpha = \beta + (\alpha - \beta),$$

então $\beta - \alpha \geq 0$, pois α é simples. Logo, na α -sequência iniciada em β , $p = 0$. Assim

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = -q \leq 0$$

e portanto $\langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$ se $\alpha \neq \beta$ são raízes simples. Pelo lema 2.4.3 o conjunto Σ é linearmente independente.

□

O conjunto finito das raízes simples será escrito como

$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$$

Lema 2.4.6. *Seja $\beta \in \Pi$ com $\beta > 0$. Então β se escreve de maneira única como*

$$\beta = n_1 \alpha_1 + \dots + n_l \alpha_l,$$

com $n_i \in \mathbb{Z}$ e $n_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, l$.

Demonstração: Se $\beta \in \Sigma$ não há o que fazer. Senão existem β_1 e β_2 tais que $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Se $\beta_1, \beta_2 \in \Sigma$ acabou a demonstração. Senão, para cada β_i , existem $\beta_{i1}, \beta_{i2} > 0$, tais que

$$\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2} \quad i = 1, 2.$$

Note que $\beta_{ij} < \beta_i$, $i = 1, 2$. Se β_{ij} são simples temos o resultado, se não são simples continua-se esse processo até que todas as raízes sejam tais que não não existe nenhuma raiz positiva menor que as mesmas. Assim essas raízes serão simples e β é uma combinação linear dessas raízes com coeficientes inteiros.

□

Corolário 2.4.7. a) *Seja $\gamma > 0$ raiz que não é simples. Então, existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$ e $\gamma - \alpha$ é raiz positiva.*

b) *Toda raiz positiva pode ser escrita como*

$$\gamma = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$$

com α_{i_j} raiz simples e as somas parciais

$$\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s}$$

$s=1, \dots, k$ são raízes.

Demonstração: a) Se para toda raiz simples α tivermos $\langle \gamma, \alpha \rangle \leq 0$ então, pelo lema 2.4.3, o conjunto $\Sigma \cup \{\gamma\}$ é L.I. o que contradiz o lema 2.4.6. Logo existe α tal que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$. Assim, pela fórmula de Killing, na α -sequência iniciada em γ temos $p > 0$, pois

$$p - q = \frac{2\langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} > 0.$$

Logo $\gamma - \alpha$ é raiz. É raiz positiva, pois se supormos que é negativa, então

$$\gamma - \alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n + c\alpha,$$

com $a_i, c \leq 0$, $i = 1, \dots, n$. Logo

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_m + (c + 1)\alpha.$$

Como γ é raiz positiva, teríamos $a_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Logo γ seria um múltiplo de α , mas isso é falso pois γ não é simples.

b) Novamente, se γ é raiz simples não há nada a fazer. Se γ não é raiz simples então existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $\gamma - \alpha$ é raiz positiva. Como $\gamma = (\gamma - \alpha) + \alpha$ se $\gamma - \alpha$ é raiz simples temos o resultado. Se não for raiz simples então aplicamos o mesmo argumento para a raiz positiva $\gamma - \alpha$, e o resultado segue indutivamente.

□

Como conclusão desses últimos lemas temos que:

- 1) Σ é uma base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$;
- 2) Para todo $\beta \in \Pi$

$$\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

com todos coeficientes inteiros e de mesmo sinal.

A afirmação 1) vem do fato que já provamos que o conjunto Π gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ e pelo lema 2.4.6, Σ gera Π . Para a afirmação 2), se β é raiz positiva, então ele é combinação linear com coeficientes inteiros não negativos de elementos de Σ . Se β é raiz negativa então $-\beta$ é positiva e portanto β é combinação linear com coeficientes inteiros não positivos.

Definição 2.4.8. Um subconjunto $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ de Π , satisfazendo 1) e 2) acima é denominado sistema simples de raízes.

Observação 2.4.9. Não existe um único sistema simples de raízes. Se Σ é um sistema simples de raízes, então $\{-\alpha_1, \dots, -\alpha_l\}$ também é um sistema simples de raízes.

2.5 Matrizes de Cartan

Foi mostrado que se tivermos um sistema simples de raízes Σ então todas as possíveis raízes de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} são combinações lineares com coeficientes inteiros todos positivos ou todos negativos. Um dos tópicos dessa seção será definir quando uma soma de elementos de Σ é uma raiz. Isso será feito utilizando a fórmula de Killing, para isso primeiro precisamos de uma definição que irá diferenciar as raízes positivas pela quantidade de raízes simples que aparece em sua expressão.

Definição 2.5.1. Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ o sistema simples fixado. Se β é uma raiz positiva tal que

$$\beta = m_1\alpha_1 + \dots + m_l\alpha_l, \quad m_i \in \mathbb{Z}^+,$$

então o número inteiro positivo $m_1 + \dots + m_l$ é denominado a *altura* de β .

As raízes de altura um são as próprias raízes simples.

As raízes de altura dois são da forma $\alpha_i + \alpha_j$, com $i \neq j$. Para saber se $\alpha_i + \alpha_j$ é realmente raiz temos que analisar a α_i -sequência iniciada em α_j

$$\alpha_j - p\alpha_i, \dots, \alpha_j + q\alpha_i.$$

Como $\alpha_j - \alpha_i$ não é raiz (pois todos os coeficientes de uma raiz tem o mesmo sinal) sabemos que $p = 0$. Logo, pela fórmula de Killing

$$-q = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}.$$

Assim,

$$q > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0,$$

portanto

$$\alpha_i + \alpha_j \in \Pi \Leftrightarrow \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0.$$

Logo, para encontrarmos as raízes de altura dois, basta olhar os valores de $\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$.

As raízes β de altura três, pelo corolário 2.4.7, são da forma $\alpha + \alpha_k$ com α de altura dois e $\alpha_k \in \Sigma$, ou seja, $\beta = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$. Vamos analisar a α_k -sequência iniciada em $\alpha_i + \alpha_j$. Temos

$$p - q = \frac{2 \langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Assim há duas situações:

a) $i \neq j \neq k$. Neste caso $p = 0$ pois $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$ não é raiz. Assim $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ é raiz se, e somente se, $q > 0$. Isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2 \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0$$

pois

$$-q = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} + \frac{2 \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}$$

e os termos do lado direito da equação são sempre menores ou iguais a zero.

b) $k = i$ ou $k = j$. Se $k = j$, então a α_k -sequência iniciada em $\alpha_i + \alpha_j$ é parte, na verdade, da α_j -sequência iniciada em α_i . Analogamente, para decidir se $\alpha_i + 2\alpha_j$ é raiz temos que saber se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} < 0.$$

Esse argumento se estende ao caso geral por indução. Pois, pelo corolário 2.4.7, dada uma raiz β de altura $n + 1$, ela é da forma $\alpha + \alpha_k$ com α raiz de altura n e $\alpha_k \in \Sigma$. Novamente a fórmula de Killing nos diz quando essa soma é uma raiz. Olhando a α_k -sequência iniciada em α temos

$$p - q = \frac{2 \langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Por indução conhecemos p e q e sabemos se $\alpha - \alpha_k, \alpha - 2\alpha_k, \dots$, são raízes positivas e de altura menor que n . Se

$$\alpha = n_1 \alpha_1 + \dots + n_l \alpha_l,$$

então

$$\frac{2 \langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = n_1 \frac{2 \langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} + \dots + n_l \frac{2 \langle \alpha, \alpha_l \rangle}{\langle \alpha_l, \alpha_l \rangle}.$$

Assim, sabemos se $q > 0$, ou seja, se $\alpha + \alpha_k$ é raiz, se sabemos os números de Killing associados a α e $\alpha_i \in \Sigma$.

Portanto, pela discussão feita acima, os números de Killing associados aos elementos do sistema simples de raízes determinam todas as raízes de uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Consequentemente toda estrutura da álgebra semi-simples \mathfrak{g} . Esses números são colocados em forma de matriz:

$$C = \left(\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)_{i,j}.$$

Esta matriz é uma matriz $l \times l$ e recebe o nome de *Matriz de Cartan* do sistema simples de raízes. Os elementos da diagonal são todos iguais a 2 e os elementos restantes são inteiros não positivos.

Observação 2.5.2. Como a forma de Cartan-Killing restrita a \mathfrak{h} é um produto interno, podemos falar entre ângulos de elementos de Π , pois $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = |H_\alpha| |H_\beta| \cos \theta$.

Proposição 2.5.3. *Sejam α e β raízes simples.*

a) *Se θ denota o ângulo entre α e β então,*

$$\cos \theta = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2},$$

isto é, $\theta = \frac{k\pi}{6}$ ou $\frac{k\pi}{4}$.

b) *Os possíveis valores para os números de Killing são*

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

Demonstração: a) Temos $\langle \alpha, \beta \rangle^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle \cos^2 \theta$. Logo,

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 4 \cos^2 \theta.$$

Como $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ e os termos do lado esquerdo da equação são inteiros, então

$$4 \cos^2 \theta = 0, 1, 2, 3, 4$$

e portanto

$$\cos \theta = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}.$$

b) Pelo item anterior

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 0, 1, 2, 3, 4$$

e isso implica que

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4.$$

Se supormos que

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \pm 4,$$

então $\cos \theta = \pm 1$. Logo $\theta = 0$ ou π e α seria múltiplo de β , ou seja, $\alpha = \pm \beta$ e assim

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \pm 2,$$

uma contradição. Portanto temos o resultado. □

Observação 2.5.4. Se θ é o ângulo entre α_i e α_j raízes simples, então

- $\theta = 0$ se $\alpha_i = \alpha_j$,
- $\theta = 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ se $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Proposição 2.5.5. *Seja $C = (c_{ij})$ a matriz de Cartan de um sistema simples de raízes. Então,*

1. $c_{ii} = 2$ para todo i ,
2. $c_{ij} = 0, -1, -2$ ou -3 , para $i \neq j$,
3. $c_{ji} = -1$ se $c_{ij} = -2$ ou -3 e
4. $c_{ij} = 0$ se e somente se $c_{ji} = 0$.

Demonstração: 1. Óbvio

2. Como os números de Killing são menores ou iguais a zero, pois $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ para todo α e $\beta \in \Sigma$, segue da proposição anterior.

3. Foi visto na proposição anterior que

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \leq 3.$$

Logo, se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = -2 \text{ ou } -3,$$

então

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -1.$$

4. Temos $c_{ij} = 0 = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$ se, e somente se, $c_{ji} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = 0$. □

2.6 Diagramas de Dynkin

Nesta seção introduziremos o diagrama de Dynkin, que é um grafo que contém todas as informações de uma matriz de Cartan, mas tem uma notação mais sucinta. Esse diagrama é definido, como uma matriz de Cartan, a partir de um sistema simples de raízes fixado $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$.

O diagrama contém l pontos (vértices) representando cada uma das raízes simples. Os vértices são ligados ou não por um, dois ou três segmentos (arestas) de acordo com as seguintes regras:

1. Se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = 0$$

não existe ligação:

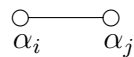


Nesse caso o ângulo θ entre as raízes é 90° , pois $4 \cos^2 \theta = 0$ implica $\cos \theta = 0$.

2. Se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -1,$$

α_i e α_j são ligadas por um segmento:

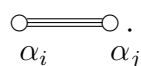
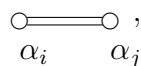


Nesse caso o ângulo θ entre as raízes é 120° , pois $4 \cos^2 \theta = -1$ implica $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

3. Se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \text{ ou } \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

é igual a -2 (respectivamente -3), os vértices α_i e α_j são ligados por dois (respectivamente 3) segmentos:



Nesse caso o ângulo θ entre as raízes é 135° (respectivamente 150°), pois $4 \cos^2 \theta = 2$ implica $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (respectivamente $4 \cos^2 \theta = 3$ implica $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Essas instruções dão as informações para que utilizemos a matriz de Cartan para encontrarmos o diagrama de Dynkin, no caso de um diagrama não orientado.

No entanto, quando a ligação é feita por dois ou três segmentos, não fica claro qual das entradas

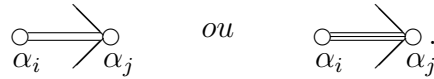
$$c_{ij} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$$

ou

$$c_{ji} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

da matriz de Cartan é -2 ou -3. Para distinguir isso, orienta-se a ligação na direção da raiz α_j se

$$c_{ji} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -2 \text{ ou } -3.$$



Orienta-se a ligação na direção da raiz α_i se

$$c_{ij} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = -2 \text{ ou } -3.$$

Assim temos as informações necessárias para que, do diagrama de Dynkin, encontremos a matriz de Cartan, concluindo assim a correspondência.

2.7 Exemplo de Álgebra Semi-Simples

Analisaremos nessa seção os conceitos apresentados durante todo o capítulo aplicado em uma álgebra de Lie concreta. O exemplo que iremos analisar é a álgebra clássica das matrizes $n \times n$ de traço nulo, denotada $sl(n)$. É fácil verificar que as matrizes diagonais de traço nulo é uma subálgebra de Cartan de $sl(n)$, que denotaremos aqui como \mathfrak{h} . Seja $E_{ij} = (a_{rs})$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$, a matriz $n \times n$ cuja única entrada não nula é $a_{ij} = 1$. O conjunto das matrizes E_{ij} e $E_{ii} - E_{jj}$, $i \neq j$, é uma base de $sl(n)$. Dado um elemento $H \in \mathfrak{h}$, escrevemos

$$H = \text{diag} \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

com $a_1 + \dots + a_n = 0$. Assim, tomando a aplicação adjunta de H , temos

$$ad(H)(E_{ij}) = [H, E_{ij}] = HE_{ij} - E_{ij}H = (a_i - a_j)E_{ij}.$$

Esta igualdade nos diz que os E_{ij} são auto-vetores de $ad(H)$ associados aos autovalores $(a_i - a_j)$. Isso mostra que as raízes de \mathfrak{h} são os funcionais $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, onde

$$\begin{aligned} \lambda_i : \quad \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \text{diag} \{a_1, \dots, a_n\} &\longrightarrow a_i. \end{aligned}$$

Os espaços de raízes são os espaços gerados por E_{ij} , $i \neq j$. Agora analisando a forma de Cartan-Killing temos,

$$\begin{aligned} \langle H, H \rangle &= \text{tr}(\text{ad}(H)\text{ad}(H)) = \text{tr}(\text{ad}(H)^2) = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 = \\ &= 2 \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 = 2 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) - 4 \sum_{i < j} a_i a_j = 2(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 4 \sum_{i < j} a_i a_j. \end{aligned}$$

Mas

$$-4 \sum_{i < j} a_i a_j = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

pois $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Portanto,

$$\langle H, H \rangle = 2(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 4 \sum_{i < j} a_i a_j = 2(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = 2n \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (2.3)$$

Esta última igualdade e a forma de polarização que relaciona uma forma quadrática com a forma bilinear associada, mostram que

$$\langle H, H' \rangle = 2n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n), \quad (2.4)$$

onde $H' = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Voltando a notação que associa a cada raiz $\alpha \in \Pi$ seu elemento $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, se $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ é uma raiz de \mathfrak{h} então, devido a expressão 2.4, temos

$$H_{\alpha_{ij}} = \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj}).$$

Com isso, dadas duas raízes quaisquer de \mathfrak{h} , temos os seus valores da forma de Cartan-Killing

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj}), \frac{1}{2n}(E_{rr} - E_{ss}) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4n}(\langle E_{ii}, E_{rr} \rangle - \langle E_{ii}, E_{ss} \rangle - \langle E_{jj}, E_{rr} \rangle + \langle E_{jj}, E_{ss} \rangle) = \frac{1}{2n}(\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}). \end{aligned}$$

Onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário. Logo, o número de Killing de duas raízes é

$$\frac{2 \langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle}{\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle} = \delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}.$$

Para a α_{ij} -seqüência iniciada em α_{rs} , existem três possibilidades:

1. $\{i, j\} \cap \{r, s\} = \emptyset$. Nesse caso a seqüência consiste apenas de α_{rs} , pois $\alpha_{rs} + \alpha_{ij}$ e $\alpha_{rs} - \alpha_{ij}$ não são raízes, já que esses funcionais não são da forma $\lambda_i - \lambda_j$.

2. $\{i, j\} \cap \{r, s\}$ tem apenas um elemento. Assim

$$\frac{2\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle}{\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle} = \pm 1$$

e a sequência é formada por α_{rs} e $\alpha_{rs} + \alpha_{ij}$ ou $\alpha_{rs} - \alpha_{ij}$.

3. $\{i, j\} = \{r, s\}$. Então $\alpha_{ij} = \pm \alpha_{rs}$, e assim a sequência é formada por $\pm \alpha_{ij}$ e 0.

Das raízes α_{ij} podemos escolher o conjunto

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1,n}\}$$

como o sistema simples de raízes, já que para $i < j$,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{i,i+1} + \dots + \alpha_{j-1,j}. \quad (2.5)$$

Portanto, como $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, todas as raízes podem ser escritas como combinação linear com coeficientes inteiros todos positivos ou todos negativos. O número de elementos de Σ coincide com a dimensão de \mathfrak{h} e Σ gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$. A equação 2.5 nos mostra também que as raízes de altura h são $\alpha_{i,i+h}$ com i variando entre 1 e $n - h$.

Tomando os números de Killing associados a esse sistema simples de raízes temos a matriz de Cartan associada, que é da forma

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De fato, $\langle \alpha_{i,i+1}, \alpha_{i+1,i+2} \rangle = -1$ e os outros números de Killing se anulam.

Finalmente, o diagrama de Dynkin definido pela matriz de Cartan de $sl(n)$ é

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ \alpha_{12} & & \alpha_{23} & & & & \alpha_{n-2,n-1} & & \alpha_{n-1,n} \end{array} \quad (n - 1 \text{ vértices, } n \geq 1),$$

Capítulo 3

Diagramas de Dynkin

No capítulo anterior mostramos a correspondência entre as álgebras se Lie semi-simples e os diagramas de Dynkin. Neste capítulo o objetivo será encontrar todos os diagramas de Dynkin possíveis, e assim classificar as álgebras semi-simples de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados por esses diagramas.

Vimos, no capítulo anterior, que os diagramas são construídos a partir de um sistema simples de raízes, que é uma base de um espaço vetorial racional com produto interno. Agora iremos esquecer por um momento a sua relação com as álgebras de Lie e iremos analisar apenas a geometria dos elementos de uma base desse tipo, como os ângulos entre os elementos e seus comprimentos relativos.

Observe que para encontrar e classificar os diagramas é suficiente encontrar suas partes conexas, ou seja, as partes onde duas raízes são conectadas por um segmento ou mais. Um diagrama qualquer é sempre uma união disjunta de diagramas conexos. Assim, iremos nos ater ao estudo de quando duas raízes são conectadas, ou seja, quando seu produto interno não se anula (e portanto seu número de Killing não se anula).

3.1 Classificação dos diagramas

Primeiramente analisaremos apenas os ângulos entre os elementos da base (sistema simples de raízes), sem nos preocuparmos com os comprimentos desses elementos. Portanto, os diagramas associados a essas bases não terão orientação. Para isso vamos tomar uma base de \mathbb{Q}^l normalizada, e desse modo encontrarmos os possíveis diagramas não orientados, verificando apenas o número de arestas que há entre os elementos. Assim, seja

$$\{u_1, \dots, u_l\}$$

base tal que $|u_i| = 1$ para $i = 1, \dots, l$ e onde os únicos possíveis ângulos entre os elementos são 90° , 120° , 135° ou 150° . Os possíveis valores de $\langle u_i, u_j \rangle$ são 0 , $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Fixaremos essa base em todos os lemas dessa seção, exceto quando mencionado o contrário. Serão alguns lemas que nos indicarão os possíveis diagramas associados a essa base.

Lema 3.1.1. *Dado um diagrama, ao retirar alguns vértices juntamente com as arestas incidentes a esses vértices, o que se obtém ainda é um diagrama.*

Demonstração: De fato, ao retirar vértices de um diagrama estamos na verdade retirando elementos da base. Sejam $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}$ os elementos que foram retirados. Os elementos que restarem da base, digamos $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_m}\}$, formam um conjunto L.I. que está associado a um diagrama. Este diagrama é justamente o diagrama original, a menos dos vértices $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}$ e suas arestas incidentes.

□

Lema 3.1.2. *Num diagrama de l vértices, a quantidade de pares conectados é menor que l .*

Demonstração: Um par de elementos (u_i, u_j) é conectado se $\langle u_i, u_j \rangle < 0$. Tome $u = u_1 + \dots + u_l$. Assim $u \neq 0$ e

$$\begin{aligned} 0 < |u|^2 &= \left\langle \sum_i u_i, \sum_j u_j \right\rangle \\ &= \sum_i |u_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle u_i, u_j \rangle \\ &= l + 2 \sum_{i < j} \langle u_i, u_j \rangle . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i < j} -2 \langle u_i, u_j \rangle < l.$$

Os possíveis valores de $-2 \langle u_i, u_j \rangle$ são 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3} \geq 1$, se não for zero. Logo, se supormos por absurdo que existem mais do que l pares (u_i, u_j) tais que $\langle u_i, u_j \rangle \neq 0$, então

$$l \leq \sum_{i < j} -2 \langle u_i, u_j \rangle < l.$$

Portanto a quantidade de pares não ortogonais é menor do que l .

□

Definição 3.1.3. Um ciclo em um diagrama é um grafo da forma



Lema 3.1.4. *Um diagrama não contém ciclos.*

Demonstração: Um ciclo em um diagrama é um diagrama pelo lema 3.1.1, pois se retirarmos todos os vértices que não estão no ciclo, este ainda será um diagrama. Mas esse diagrama terá l vértices e l arestas, o que não pode ocorrer pelo lema 3.1.2.

□

Lema 3.1.5. *A quantidade de arestas incidentes em um vértice é menor ou igual a 3.*

Demonstração: Sejam u um vértice e v_1, \dots, v_k os vértices ligados a u . O número de arestas entre v_i e u é

$$\frac{2 \langle v_i, u \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \frac{2 \langle v_i, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = 4 \langle v_i, u \rangle^2,$$

pois a base é normalizada. Assim, a quantidade total de arestas incidindo em u é

$$\sum_{i=1}^k 4 \langle v_i, u \rangle^2.$$

Sejam U e V os subespaços gerados por $\{u, v_1, \dots, v_k\}$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$, respectivamente. O complementar ortogonal a V em U é um subespaço de dimensão 1. Seja w o vetor de norma 1, que gera esse espaço. Assim o conjunto $\{w, v_1, \dots, v_k\}$ é uma base ortonormal de U . De fato, $\langle v_i, w \rangle = 0$, para todo v_i por construção. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pois caso contrário algum v_i seria ligado a v_j , e haveria um ciclo no diagrama ligado a u . Todos esses vetores têm norma um. Portanto,

$$u = \langle u, w \rangle w + \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_k \rangle v_k \Rightarrow$$

$$|u|^2 = \langle u, w \rangle^2 + \langle u, v_1 \rangle^2 + \dots + \langle u, v_k \rangle^2 = 1$$

concluindo que

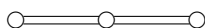
$$\langle u, v_1 \rangle^2 + \dots + \langle u, v_k \rangle^2 < 1,$$

pois $\langle u, w \rangle \neq 0$, pelo fato que $u \notin V$. Portanto

$$\sum_{i=1}^k 4 \langle v_i, u \rangle^2 < 4.$$

□

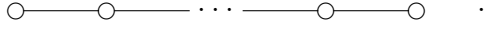
Esse último lema mostra que não podemos ter diagramas do tipo



já que há quatro arestas incidindo em um mesmo vértice. O lema nos dá a primeira classificação de diagramas, pois o único diagrama possível com três arestas é

$$G_2 : \circ \equiv \equiv \equiv \circ .$$

Para o próximo lema será utilizado o termo *cadeia simples* para designar um diagrama ou um pedaço do diagrama da forma



Lema 3.1.6. *Suponha que um diagrama contém uma cadeia simples. Então, contraindo a cadeia simples a um vértice e mantendo a esse vértice as ligações com o diagrama restante, o que se obtém ainda é um diagrama.*

Um exemplo dessa contração é



Demonstração: Sejam $\{v_1, \dots, v_k\}$ os vértices da cadeia simples do diagrama, e $\{u_1, \dots, u_r\}$ os vértices restantes. Tome $v = v_1 + \dots + v_k$. Mostraremos que o diagrama da base $\{v, u_1, \dots, u_r\}$ é o diagrama obtido por contração da cadeia simples. De fato,

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^k |v_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle v_i, v_j \rangle = k + 2 \sum_{i < j} \langle v_i, v_j \rangle .$$

Como a cadeia dos $\{v_1, \dots, v_k\}$ é simples, $2 \langle v_i, v_j \rangle = -1$, se $j = i + 1$ e vale zero nos restantes. Logo

$$|v|^2 = k + \sum_{i=1}^{k-1} 2 \langle v_i, v_{i+1} \rangle = k - (k - 1) = 1 .$$

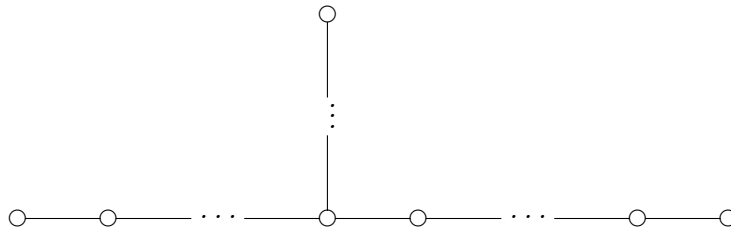
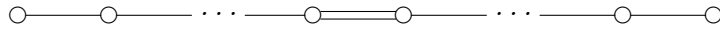
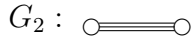
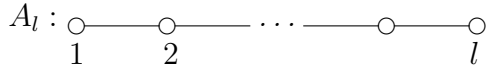
Isso mostra que v tem norma um. Agora tomando um u_i arbitrário, temos

$$\langle u_i, v \rangle = \langle u_i, v_j \rangle$$

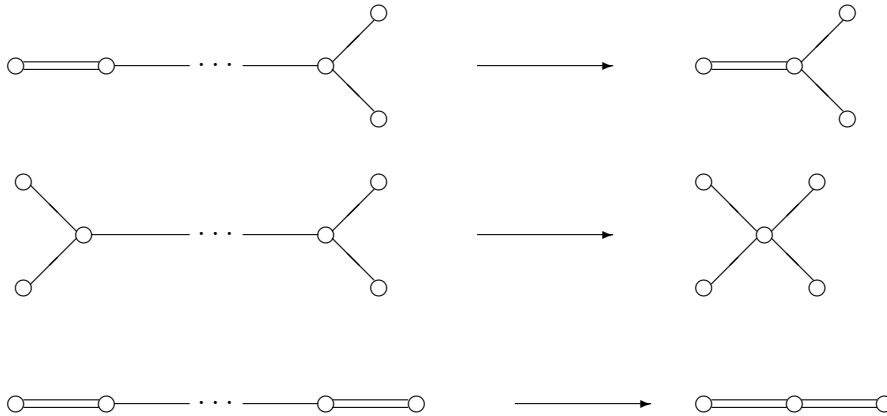
para algum j . De fato, u_i só pode ter conexão com um v_j , pois se tivesse conexão com mais de um v_j , haveriam ciclos no diagrama. Portanto $\{v, u_1, \dots, u_r\}$ é um conjunto L.I. formado por vetores normalizados e os ângulos entre seus elementos definem um diagrama dado justamente por $\langle u_i, v \rangle = \langle u_i, v_j \rangle$.

□

Proposição 3.1.7. *Os únicos diagramas conexos (não-orientados) são:*



Demonstração: O diagrama A_l é o único que não apresenta bifurcações ou ligações múltiplas entre os vértices. O segundo diagrama G_2 é o único diagrama que apresenta ligações triplas pelo lema 3.1.5. Agora se um diagrama apresenta bifurcações ou ligações duplas, então a partir das extremidades dessas bifurcações ou ligações duplas há uma cadeia simples. Essa cadeia simples não pode ter, em sua outra extremidade, mais bifurcações ou ligações duplas, pois assim, pelo lema 3.1.6, faríamos contrações do tipo



Esses diagramas dariam origem a diagramas que tem vértices com quatro arestas, o que não pode ocorrer.

□

Agora faremos a análise dos possíveis diagramas que tem ligações duplas ou bifurcações.

Proposição 3.1.8. *Os possíveis diagramas que contém ligações duplas são*

$$BC_i : \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{=} \circ ,$$

$$F_4 : \circ \text{---} \circ \text{=} \circ \text{---} \circ .$$

Demonstração: Existem inteiros $p, q \geq 1$ tais que o diagrama é da forma

$$\circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \text{=} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ .$$

$u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{p-1} \quad u_p \quad v_q \quad v_{q-1} \quad \dots \quad v_2 \quad v_1$

Será mostrado quais são as restrições aos possíveis valores de p e q . Tome

$$u = \sum_{i=1}^p i u_i \quad e \quad v = \sum_{i=1}^q i v_i .$$

Aplicaremos a desigualdade de Cauchy-Schwartz a esses dois vetores. Temos:

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p i u_i, \sum_{j=1}^p j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^p i^2 |u_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle i u_i, j u_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{p-1} i^2 + p^2 - \left(\sum_{i=1}^{p-1} i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} i \right) \\ &= p^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i = \frac{p(p+1)}{2}, \end{aligned}$$

pois $|u_i|^2 = 1$ e $2 \langle u_i, u_{i+1} \rangle = -1$. Analogamente,

$$|v|^2 = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Temos também

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p i u_i, \sum_{j=1}^q j v_j \right\rangle = \langle p u_p, q v_q \rangle = pq \langle u_p, v_q \rangle$$

pois u_i é ortogonal a v_j se $i < p$ ou $j < q$. Como a ligação entre u_p e v_q é dupla, $\langle u_p, v_q \rangle^2 = \frac{1}{2}$, e portanto

$$\langle u, v \rangle^2 = p^2 q^2 \langle u_p, v_q \rangle^2 = \frac{p^2 q^2}{2}.$$

Agora aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\langle u, v \rangle^2 < |u|^2 |v|^2 .$$

Portanto

$$\frac{p^2 q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \frac{q(q+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{pq}{2} < \frac{pq + p + q + 1}{4} \Rightarrow$$

$$pq - p - q + 1 < 2.$$

Logo

$$(p-1)(q-1) < 2.$$

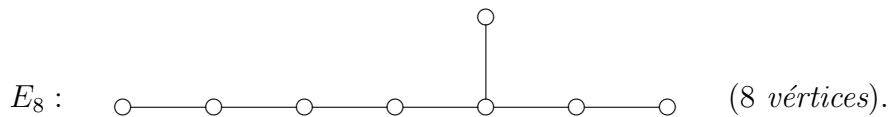
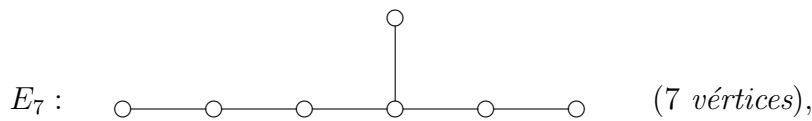
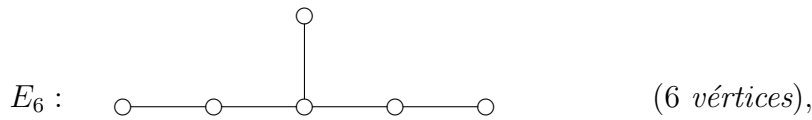
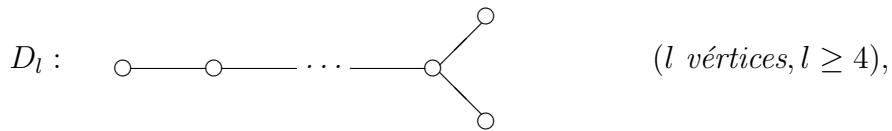
Temos dois casos a analisar:

- a) $q = 1$. Então, não existe restrição a p . Origina-se o diagrama BC_l .
- b) $q = 2$ Então $p - 1 < 2$ e $p = 1$ ou $p = 2$. O caso $p = 2$ origina o diagrama F_4 , e o caso $p = 1$ é o diagrama BC_3 .

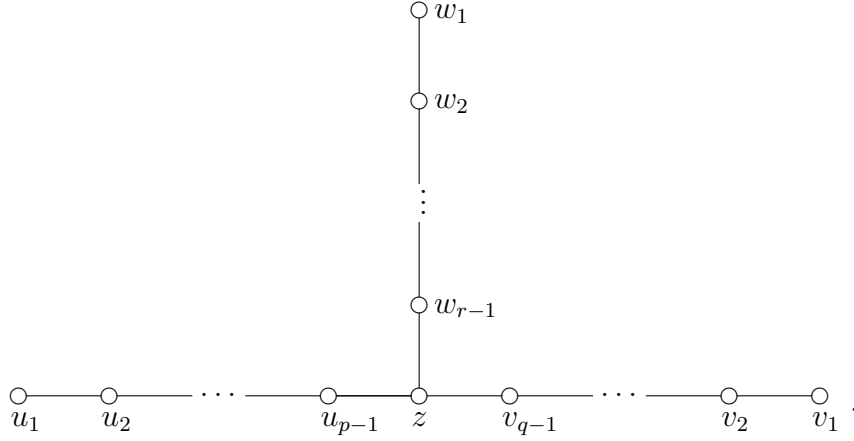
Se $q \geq 3$ então $p = 1$, o que é o mesmo que o caso a) invertendo os papéis de p e q . Portanto todos os casos onde há ligação dupla foram determinados, demonstrando a proposição.

□

Proposição 3.1.9. *Os possíveis diagramas que admitem bifurcação são*



Demonstração: Como na proposição anterior, sejam inteiros $p, q, r > 1$, tais que o diagrama é da forma



Definimos

$$u = \sum_{i=1}^{p-1} iu_i, \quad v = \sum_{i=1}^{q-1} iv_i, \quad w = \sum_{i=1}^{r-1} iw_i.$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{p-1} iu_i, \sum_{j=1}^{p-1} ju_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{p-1} i^2 |u_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle iu_i, ju_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i-1) = \sum_{i=1}^{p-1} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} i \\ &= \frac{p(p-1)}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$|v|^2 = \frac{q(q-1)}{2} \quad e \quad |w|^2 = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Seja V o subespaço vetorial gerado por $\{u, v, w\}$ e defina $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ os ângulos formados entre z e u, v e w , respectivamente. Seja $pr_V(z)$ a projeção do vetor z no espaço V . A norma de $pr_V(z)$ é menor que a norma de z ($|z| = 1$) pois z não pertence a V . Por outro lado, sabemos que

$$|pr_V(z)| = \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3}.$$

Logo

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 < 1. \quad (3.1)$$

Agora vamos encontrar os valores de $\cos^2 \theta_1, \cos^2 \theta_2$ e $\cos^2 \theta_3$ em função de p, q e r . Temos

$$\langle u, z \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p-1} iu_i, z \right\rangle = \langle (p-1)u_{p-1}, z \rangle = (p-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-p}{2}.$$

Logo

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{\langle u, z \rangle^2}{|u|^2 |z|^2} = \frac{\frac{(1-p)^2}{4}}{\frac{p(p-1)}{2}} = \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Analogamente

$$\cos^2 \theta_2 == \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \quad e \quad \cos^2 \theta_3 == \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Por 3.1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right) < 1 &\Rightarrow \\ 3 - \left(\frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{q}\right) - \left(\frac{1}{r}\right) < 2 &\Rightarrow \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \end{aligned}$$

Vamos analisar os casos. Sem perda de generalidade podemos supor $p \geq q \geq r > 1$.

1. $r = 2$

a) $q = 2$. Então $\frac{1}{p} > 0$, portanto p pode ser qualquer inteiro maior que 2, o que origina o diagrama D_l .

b) $q = 3$. Então $\frac{1}{p} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} > 1$, logo $p < 6$. Portanto $p = 3, 4$ ou 5 . Esses casos originam os diagramas E_6, E_7 e E_8 , respectivamente.

c) $q \geq 4$. Então $\frac{1}{p} + \frac{3}{4} \geq \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} > 1$, logo $p < 4$. Isso é uma contradição pois supomos que $p \geq q$.

2. $r \geq 3$. Como $q \geq r$, temos

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{2}{3}$$

e portanto $p < 3$. Mas isso é uma contradição pois supomos que $p \geq q$. Concluimos que não há diagramas com $r \geq 3$.

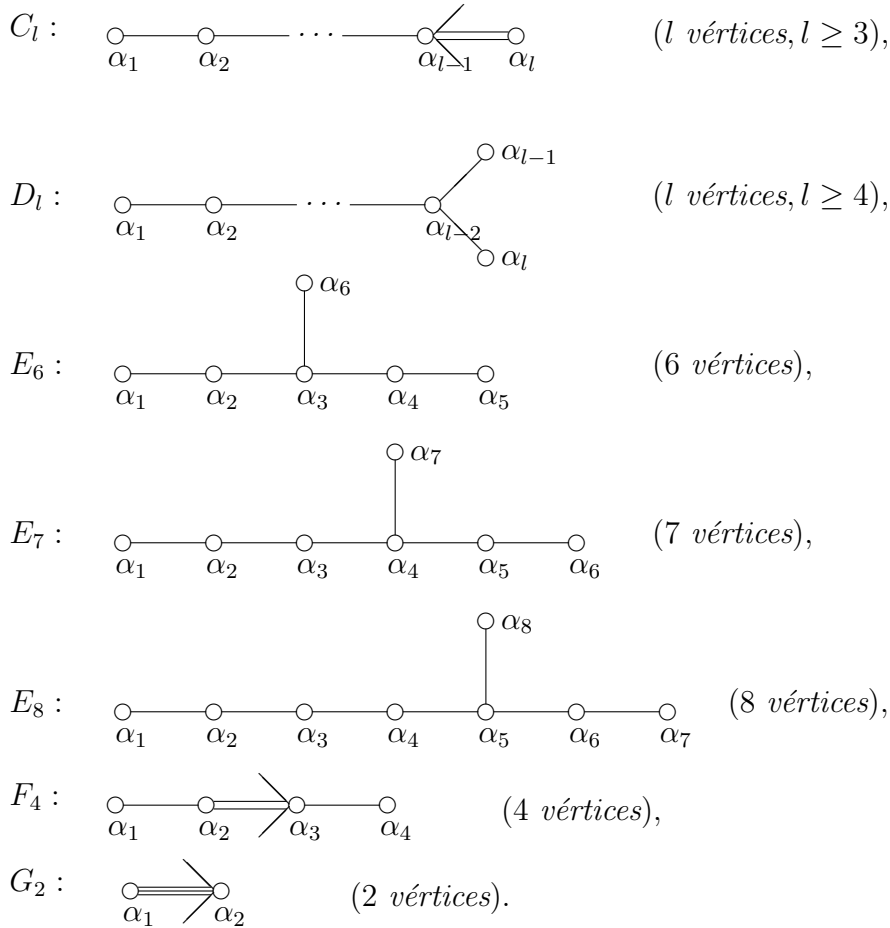
Esses casos cobrem todos os casos possíveis.

□

Com esta proposição esgotamos todos os casos de diagramas que provém de bases normalizadas, ou seja, não dirigidas. Agora, para estudarmos o caso onde há direção, basta checarmos os casos onde há ligações duplas e triplas, que são os diagramas G_2, F_4 e BC_l . Como G_2 e F_4 são simétricos em relação a ligação dupla, não há diferença em qual direção fixar. Agora, para o diagrama BC_l , há duas direções possíveis. Por isso o dividimos em dois diagramas. Vamos concluir com o teorema que deixará tudo explícito.

Teorema 3.1.10. *Os diagramas de Dynkin conexos possíveis são:*

$$\begin{aligned} A_l : & \quad \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{l-1} \text{---} \alpha_l & (l \text{ vértices}, l \geq 1), \\ B_l : & \quad \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{l-1} \text{---} \alpha_l & (l \text{ vértices}, l \geq 2), \end{aligned}$$



A demonstração desse teorema segue de todas as proposições feitas durante este capítulo. Mas ainda está incompleta, visto que o teorema diz que esses dão exatamente, os diagramas possíveis. Portanto precisamos mostrar que realmente esses diagramas são diagramas dados por bases de \mathbb{Q}^l . No próximo capítulo (para o caso das álgebras clássicas) será mostrado que cada uma dessas bases corresponde a um sistema simples de raízes associado a uma subálgebra de Cartan de uma álgebra semi-simples de dimensão finita.

3.2 Realizações dos diagramas

Em todos os 7 casos, sejam $\{e_1, e_2, \dots, e_l\}$ a base canônica de \mathbb{Q}^l . Consideramos \mathbb{Q}^l com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico.

1) A_l : Em \mathbb{Q}^{l+1} , seja E_l o subespaço

$$E_l = \{(x_1, \dots, x_{l+1}) : x_1 + \dots + x_{l+1} = 0\}.$$

Assim o conjunto

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_l - e_{l+1}\}$$

é uma base de E_l . Todos os elementos tem o mesmo comprimento e o número de Killing de um par de elementos $(e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2})$ é -1 para todo $i = 1, \dots, l - 1$.

2) B_l : Em \mathbb{Q}^l , seja

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{l-1} - e_l, e_l\}.$$

Então Σ_l é uma base que nos $l - 1$ primeiros elementos seguem o mesmo padrão da base do diagrama A_{l-1} . Mas o número de Killing entre $e_{l-1} - e_l$ e e_l , é

$$\frac{2 \langle e_{l-1} - e_l, e_l \rangle}{\langle e_l, e_l \rangle} = -2.$$

Logo essa base realiza o diagrama B_l , para $l \geq 2$.

3) C_l : Da mesma forma que no anterior, verifica-se que a base de \mathbb{Q}^l

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{l-1} - e_l, 2e_l\}.$$

É uma base que realiza o diagrama C_l , para $l \geq 3$.

4) D_l : A base de \mathbb{Q}^l

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{l-2} - e_{l-1}, e_{l-1} - e_l, e_{l-1} + e_l\}$$

é a que realiza o diagrama D_l , para $l \geq 4$. O vértice em que ocorre a bifurcação é $e_{l-2} - e_{l-1}$.

5) E_6, E_7 e E_8 : Primeiro faremos a realização do diagrama E_8 . Tome em \mathbb{Q}^9 o subespaço

$$\mathbb{E}_8 = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{Q}^9 : x_1 + \dots + x_9 = 0\}$$

e nesse subespaço tome a base

$$\Sigma_8 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4, \dots, e_7 - e_8, e_8 - e_9, v\},$$

onde v é a projeção ortogonal do vetor $-(e_2 + e_3 + e_4)$ sobre \mathbb{E}_8 , que explicitamente é

$$v = -\frac{2}{3}(e_2 + e_3 + e_4) + \frac{1}{3}(e_1 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8 + e_9).$$

O diagrama começando da esquerda para a direita tem o primeiro vértice $(e_8 - e_9)$. A bifurcação ocorre no vértice $(e_4 - e_5)$ que se liga a v , $(e_3 - e_4)$ e $(e_5 - e_6)$.

Os diagramas E_6 e E_7 são subdiagramas de E_8 , logo são realizados retirando os primeiros vértices de E_8 , que são $(e_8 - e_9)$ e $(e_7 - e_8)$.

6) F_4 : Tome a base de \mathbb{Q}^4

$$\Sigma_4 = \left\{ e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_2, \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4) \right\}.$$

Aqui o comprimento dos maiores elementos é $\sqrt{2}$ e dos menores 1, e a ligação dupla ocorre entre $e_2 - e_3$ e e_3 .

7) G_2 : Tome em \mathbb{Q}^3 o subespaço de dimensão 2 gerado pelo par de vetores

$$\left(0, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{2}{18}\right).$$

Assim essa base de vetores gera o diagrama G_2 , pois formam um ângulo de 150° .

Capítulo 4

Álgebras Semi-simples

No capítulo anterior foi estabelecida a relação entre as álgebras semi-simples, os diagramas de Dynkin e os possíveis diagramas que podem existir. Esse capítulo terá como objetivo mostrar que os diagramas de Dynkin estão biunivocamente relacionados com as álgebras semi-simples (a menos de isomorfismo).

4.1 Álgebras Isomorfas e seus Diagramas de Dynkin

A primeira pergunta que iremos fazer é se dois sistemas simples de raízes de duas subálgebras de Cartan, da álgebra semi-simples \mathfrak{g} , têm o mesmo diagrama de Dynkin.

Proposição 4.1.1. *Sejam \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 subálgebras de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples \mathfrak{g} . Sejam Σ_1 e Σ_2 dois sistemas simples de raízes associados às subálgebras \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 respectivamente. Então os diagramas associados a Σ_1 e Σ_2 coincidem.*

Demonstração: Pelos resultados apresentados no capítulo 1, como o corpo é algebricamente fechado, existe um automorfismo de \mathfrak{g} , ϕ , tal que $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. Sejam Π_1 e Π_2 o conjunto de raízes de \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 respectivamente. Tome $\alpha \in \Pi_1$, então existe $X \neq 0$ tal que

$$ad(H)X = \alpha(H)X, \quad \forall H \in \mathfrak{h}_1.$$

Logo

$$ad(\phi(H))\phi(X) = \phi(ad(H)(X)) = \phi(\alpha(H)X) = \alpha(H)\phi(X), \quad \forall H \in \mathfrak{h}_1.$$

Como ϕ é automorfismo, para cada $H \in \mathfrak{h}_1$ existe um $G \in \mathfrak{h}_2$ tal que $\phi^{-1}(G) = H$. Logo

$$ad(G)\phi(X) = ad(\phi(\phi^{-1}(G)))\phi(X) = \phi([\phi^{-1}(G), X]) = \alpha(\phi^{-1}(G))\phi(X),$$

para todo $G \in \mathfrak{h}_2$. Logo $\alpha \circ \phi^{-1}$ é uma raiz de \mathfrak{h}_2 . Considere a aplicação ϕ^* definida por

$$\begin{aligned}\phi^* : \Pi_1 &\longrightarrow \Pi_2 \\ \alpha &\longrightarrow \phi^*(\alpha) = \alpha \circ \phi^{-1}.\end{aligned}$$

Então $\phi^*(\Pi_1) \subset \Pi_2$. Como ϕ é automorfismo e Π_1, Π_2 finitos, então $\phi^*(\Pi_1) = \Pi_2$. Se tomarmos $\Sigma_1 \subset \Pi_1$ um sistema simples de raízes, $\phi^*(\Sigma_1)$ será um sistema simples de raízes de Π_2 . Como ϕ é invariante pela forma de Cartan-Killing, a aplicação ϕ^* é uma isometria entre as formas de Cartan-Killing em \mathfrak{h}_1^* e \mathfrak{h}_2^* , pois os inteiros p e q da α -sequência iniciada em β e da $\phi^*(\alpha)$ -sequência iniciada em $\phi^*(\beta)$ são iguais. Logo os números de Killing entre as raízes e suas imagens por ϕ^* serão os mesmos. Portanto, os diagramas de Σ_1 e $\phi^*(\Sigma_1)$ serão o mesmo.

□

Proposição 4.1.2. *Se \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 são duas álgebras isomorfas, então seus diagramas coincidem.*

Demonstração: O procedimento é o mesmo que na proposição 4.1.1 pois, se \mathfrak{h}_1 é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_1 e ϕ é o isomorfismo entre as álgebras, então $\phi(\mathfrak{h}_1)$ é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_2 . Além disso, ϕ^* é uma isometria entre as formas de Cartan-Killing em \mathfrak{h}_1^* e $\phi(\mathfrak{h}_1)^*$. Portanto os seus sistemas simples de raízes correspondentes terão o mesmo diagrama.

□

Proposição 4.1.3. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semi-simples e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$$

sua decomposição em componentes simples. Então, o diagrama de \mathfrak{g} se decompõe na união disjunta dos diagramas de $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_s$, que não estão ligados entre si.

Demonstração: Tome \mathfrak{h}_i as subálgebras de Cartan de \mathfrak{g}_i , $i = 1, \dots, s$. Sabemos que $\mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_s$ é subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Seja Π_i o conjunto de raízes de \mathfrak{h}_i , então $\alpha \in \Pi_i$ pode ser estendido a um funcional linear de \mathfrak{h} , tomando $\alpha(\mathfrak{h}_j) = 0$ se $i \neq j$. Por essas extensões, $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \dots \cup \Pi_s$ é o conjunto de raízes de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} . Temos, por outro lado, que as componentes \mathfrak{g}_i são ortogonais em relação a forma de Cartan-Killing. Assim, se $\alpha \in \Pi_i$ e $\beta \in \Pi_j$, então

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = 0$$

se $i \neq j$. Isso nos diz que as partes correspondentes de Π_i e Π_j no diagrama não são ligadas, demonstrando o que queríamos.

□

Agora, apenas para o próximo teorema, fixe uma base de \mathfrak{g} que seja união das bases dos $\mathfrak{g}(\alpha_i) \simeq sl(2)$. Assim a base é formada por $X_{\alpha_i}, Y_{-\alpha_i}$ e H_{α_i} , tal que satisfazem as relações:

$$[H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}] = 0 \quad (4.1)$$

$$[X_{\alpha_i}, Y_{-\alpha_j}] = \delta_{ij} H_{\alpha_i} \quad (4.2)$$

$$[X_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}] = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} X_{\alpha_i} \quad (4.3)$$

$$[Y_{-\alpha_i}, H_{\alpha_j}] = -\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} Y_{-\alpha_i}. \quad (4.4)$$

A primeira equação vale pois \mathfrak{h} é abeliana. Essa base foi construída na proposição 2.3.1. A notação foi alterada para facilitar a demonstração do teorema: $X_\alpha := X_{\alpha_i}$; $Y_{-\alpha} := Y_{-\alpha_i}$; $H'_\alpha := H_{\alpha_i}$. Os detalhes da construção dessa base estão no livro [3].

Teorema 4.1.4. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é simples se, e somente se, seu diagrama é conexo.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan, Π as raízes e Σ um sistema simples de raízes. Suponha por absurdo que o diagrama não seja conexo, assim Σ satisfaz: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ com $\Sigma_1 \neq \emptyset$ e $\Sigma_2 \neq \emptyset$. Tal que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ se $\alpha \in \Sigma_1$ e $\beta \in \Sigma_2$. Para facilitar a demonstração vamos ordenar Σ tal que $\Sigma_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ e $\Sigma_2 = \{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_l\}$. Seja

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1 + \sum_{\alpha \in \Pi_1} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{h}_1 = \{H_\alpha \in \mathfrak{g}; \alpha \in \Pi_1\}$ e Π_1 é o conjunto gerado por Σ_1 em \mathfrak{h}^* . Agora se $j \leq k < r$, temos

$$\langle \alpha_j, \alpha_r \rangle = 0.$$

Como $\alpha_j - \alpha_r$ não é raiz, se analisarmos os inteiros p e q da α_r -sequência iniciada em α_j , teremos $p = 0$, logo

$$0 = \frac{2 \langle \alpha_j, \alpha_r \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = p - q = -q.$$

Portanto $q = 0$ e assim $\alpha_j + \alpha_r$ também não é raiz. Logo

$$[X_{\alpha_j}, X_{\alpha_r}] \in \mathfrak{g}_{\alpha_j + \alpha_r} = \{0\}, \quad j \leq k < r,$$

$$[Y_{-\alpha_j}, X_{\alpha_r}] \in \mathfrak{g}_{\alpha_j - \alpha_r} = \{0\}, \quad j \leq k < r,$$

$$[H_{\alpha_j}, X_{\alpha_r}] = \frac{2 \langle \alpha_j, \alpha_r \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} X_{\alpha_r} = 0, \quad j \leq k < r.$$

Logo X_{α_r} está no normalizador de \mathfrak{g}_1 , se $r > k$. Analogamente vemos que Y_{α_r} também está no normalizador de \mathfrak{g}_1 , se $r > k$. Finalmente

$$[H_{\alpha_r}, \mathfrak{g}_1] = [H_{\alpha_r}, \mathfrak{h}_1] + [H_{\alpha_r}, \sum_{\alpha \in \Pi_1} \mathfrak{g}_\alpha] = 0,$$

pelas relações definidas entre os elementos $X_{\alpha_i}, Y_{-\alpha_i}$ e H_{α_i} . Portanto \mathfrak{g}_1 é um ideal de \mathfrak{g} . Absurdo, pois \mathfrak{g} é simples.

Reciprocamente, suponha por absurdo que \mathfrak{g} não é simples. Seja então $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, tal que os subespaços \mathfrak{g}_i são ideais não nulos de \mathfrak{g} . Sejam α uma raiz não nula e o respectivo $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Assim $X_\alpha = X_\alpha^1 + X_\alpha^2$, onde $X_\alpha^i \in \mathfrak{g}_i$. Temos $[X_\alpha, H] = \alpha(H)X_\alpha$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Logo $[X_\alpha^i, H] = \alpha(H)X_\alpha^i$. Mas como \mathfrak{g}_α é de dimensão um, $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_1$ ou $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_2$. Como $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$ e $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$, temos $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{g}_1$ ou $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{g}_2$.

Logo podemos ordenar os elementos da base tal que $X_{\alpha_1}, Y_{-\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}, Y_{-\alpha_k} \in \mathfrak{g}_1$ e $X_{\alpha_{k+1}}, Y_{-\alpha_{k+1}}, \dots, X_{\alpha_l}, Y_{-\alpha_l} \in \mathfrak{g}_2$. Novamente, como \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 são ideais não nulos, temos

$$0 = [X_{\alpha_j}, [X_{\alpha_r}, Y_{-\alpha_r}]] = [X_{\alpha_j}, H_{\alpha_r}] = \frac{2 \langle \alpha_r, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_r, \alpha_r \rangle} X_{\alpha_j},$$

se $j \leq k$ e $r > k$. Logo

$$\frac{2 \langle \alpha_r, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_r, \alpha_r \rangle} = 0,$$

se $j \leq k$ e $r > k$. Portanto o diagrama não é conexo. □

Agora iremos nos direcionar para o principal resultado dessa teoria de classificação das álgebras de Lie semi-simples por diagramas de Dynkin: Duas álgebras que têm o mesmo diagrama de Dynkin são isomorfas.

Primeiramente definiremos uma notação, em seguida faremos uma proposição e alguns lemas que nos darão ferramentas para a demonstração desse teorema.

Fixe uma base de \mathfrak{g} formada por uma base de \mathfrak{h} e por $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, de tal forma que

$$\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1. \quad (4.5)$$

Tal base existe pelo parte 2. do lema 2.2.6. Esse mesmo lema diz que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, e portanto $\mathfrak{g}_\alpha = \langle X_\alpha \rangle$. Sejam agora $m_{\alpha, \beta}$ números definidos por

$$[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}.$$

Assim $m_{\alpha, \beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não for raiz. Fica claro, pela anticomutatividade do colchete de Lie que, $m_{\alpha, \beta} = -m_{\beta, \alpha}$.

Proposição 4.1.5. *Sejam α e β raízes e*

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha$$

a α -seqüência iniciada em β . Então

$$[X_{-\alpha}, [X_{\alpha}, X_{\beta}]] = q(p+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} X_{\beta}.$$

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}(\alpha)$ a álgebra isomorfa a $sl(2)$, ou seja,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \langle H_{\alpha} \rangle \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Como na construção feita na proposição 2.3.1, existem $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ e $Y_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que,

$$\langle X_{\alpha}, Y_{-\alpha} \rangle = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Pela equação 4.5 temos $Y_{-\alpha} = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} X_{-\alpha}$. Tome a representação adjunta restrita a $\mathfrak{g}(\alpha)$,

$$ad : \mathfrak{g}(\alpha) \rightarrow gl(V)$$

onde $V = \mathfrak{g}_{\beta-p\alpha} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta+q\alpha}$. Essa representação é irredutível pelo que foi feito na demonstração do teorema 2.3.5. Logo existem $\{v_0, v_1, \dots, v_{p+q}\}$ tais que

$$ad(X_{\alpha})v_i = [X_{\alpha}, v_i] = i((p+q) - i + 1)v_{i-1},$$

$$ad(Y_{-\alpha})v_i = [Y_{-\alpha}, v_i] = v_{i+1}$$

onde $v_i \in \mathfrak{g}_{\beta+(q-i)\alpha}$. Logo $v_q \in \mathfrak{g}_{\beta}$, e assim

$$[Y_{-\alpha}, [X_{\alpha}, v_q]] = [Y_{-\alpha}, q(p+q-q+1)v_{q-1}] = q(p+1)[Y_{-\alpha}, v_{q-1}] = q(p+1)v_q.$$

Como $X_{\beta} = kv_q$ para algum $k \in \mathbb{K}$, a mesma igualdade vale para X_{β} , logo

$$[Y_{-\alpha}, [X_{\alpha}, X_{\beta}]] = q(p+1)X_{\beta}.$$

Portanto

$$[X_{-\alpha}, [X_{\alpha}, X_{\beta}]] = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} q(p+1)X_{\beta}.$$

□

Lema 4.1.6. *Se α e β são raízes e*

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta + q\alpha$$

é a α -sequência iniciada em β . Então

$$m_{\alpha, \beta} m_{-\alpha, -\beta} = -q(p+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2}.$$

Demonstração: Por um lado, temos

$$\langle [X_\alpha, X_\beta], [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] \rangle = \langle m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, m_{-\alpha,-\beta} X_{-(\alpha+\beta)} \rangle = m_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,-\beta}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle [X_\alpha, X_\beta], [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] \rangle &= - \langle [X_{-\alpha}, [X_\alpha, X_\beta]], X_{-\beta} \rangle \\ &= - \left\langle \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} q(p+1) X_\beta, X_{-\beta} \right\rangle = - \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} q(p+1) . \end{aligned}$$

A primeira igualdade vale pela propriedade da forma de Cartan-Killing e derivações. A segunda igualdade pela proposição anterior. \square

Lema 4.1.7. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ e suponha que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Então*

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha} .$$

Demonstração: Primeiro observemos que α, β e γ são duas a duas linearmente independentes, pois as únicas raízes que são múltiplos de raízes são ela mesma e sua oposta, o que não ocorre aqui. Logo os seus correspondetes H_α, H_β e $H_\gamma \in \mathfrak{h}$ também são linearmente independentes. Agora, aplicando a identidade de Jacobi para X_α, X_β e X_γ , temos

$$\begin{aligned} [X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] &= [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [X_\beta, [X_\alpha, X_\gamma]] \Rightarrow \\ m_{\beta,\gamma} [X_\alpha, X_{\beta+\gamma}] &= m_{\alpha,\beta} [X_{\alpha+\beta}, X_\gamma] + m_{\alpha,\gamma} [X_\beta, X_{\alpha+\gamma}] . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por hipótese temos que $\beta + \gamma = -\alpha$, logo $X_{\beta+\gamma} = X_{-\alpha}$ e portanto

$$[X_\alpha, X_{\beta+\gamma}] = [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha .$$

Utilizando a mesma notação e aplicando o mesmo raciocínio para os outros membros da equação 4.6 temos

$$\begin{aligned} m_{\beta,\gamma} H_\alpha &= m_{\alpha,\beta} H_{-\gamma} + m_{\alpha,\gamma} H_\beta \Rightarrow \\ m_{\beta,\gamma} H_\alpha &= m_{\alpha,\beta} H_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,\gamma} H_\beta = m_{\alpha,\beta} (H_\alpha + H_\beta) + m_{\alpha,\gamma} H_\beta \Rightarrow \\ (m_{\alpha,\beta} - m_{\beta,\gamma}) H_\alpha &+ (m_{\alpha,\beta} + m_{\alpha,\gamma}) H_\beta = 0 . \end{aligned}$$

Como H_α e H_β são linearmente independentes,

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma}$$

e

$$m_{\alpha,\beta} = -m_{\alpha,\gamma} = m_{\gamma,\alpha} .$$

\square

Lema 4.1.8. *Sejam α, β, γ e δ raízes e suponha que nenhuma é oposta da outra. Suponha também que*

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Então

$$m_{\alpha, \beta} m_{\gamma, \delta} + m_{\beta, \gamma} m_{\alpha, \delta} + m_{\gamma, \alpha} m_{\beta, \delta} = 0.$$

Demonstração: Observe inicialmente que faz sentido a igualdade

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] = [X_\alpha, m_{\beta, \gamma} X_{\beta+\gamma}] = m_{\beta, \gamma} m_{\alpha, \beta+\gamma} X_{\alpha+\beta+\gamma} = m_{\beta, \gamma} m_{\alpha, \beta+\gamma} X_{-\delta},$$

mesmo que $\beta + \gamma$ não fosse raiz. De fato, nesse caso $[X_\beta, X_\gamma] = 0$ e $m_{\beta, \gamma} = 0$. Se aplicarmos o lema 4.1.7 às raízes $\alpha, \beta + \gamma$ e δ , teríamos

$$m_{\alpha, \beta+\gamma} = m_{\delta, \alpha}.$$

Utilizando as duas equações obtemos

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] = m_{\alpha, \beta+\gamma} m_{\beta, \gamma} X_{-\delta} = m_{\delta, \alpha} m_{\beta, \gamma} X_{-\delta} = -m_{\alpha, \delta} m_{\beta, \gamma} X_{-\delta}.$$

Agora, tome a identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} [X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] &= [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [X_\beta, [X_\alpha, X_\gamma]] \Rightarrow \\ -m_{\alpha, \delta} m_{\beta, \gamma} X_{-\delta} &= m_{\alpha, \beta} [X_{\alpha+\beta}, X_\gamma] + m_{\alpha, \gamma} [X_\beta, X_{\alpha+\gamma}] \Rightarrow \\ -m_{\alpha, \delta} m_{\beta, \gamma} X_{-\delta} &= m_{\alpha, \beta} m_{\gamma, \delta} X_{-\delta} + m_{\alpha, \gamma} m_{\delta, \beta} X_{-\delta}. \end{aligned}$$

Portanto

$$(m_{\alpha, \beta} m_{\gamma, \delta} + m_{\beta, \gamma} m_{\alpha, \delta} + m_{\gamma, \alpha} m_{\beta, \delta}) X_{-\delta} = 0,$$

concluindo o lema. □

Lema 4.1.9. *Sejam \mathfrak{g}^1 e \mathfrak{g}^2 álgebras simples e tome subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}^1$ e $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}^2$. Denote por Π_1 e Π_2 os conjuntos de raízes correspondentes. Suponha que exista um isomorfismo $\phi : \mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}^* \rightarrow \mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}^*$ tal que $\phi(\Pi_1) = \Pi_2$. Então*

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Demonstração: A imagem por ϕ da α -sequência iniciada em β coincide com a $\phi(\alpha)$ -sequência iniciada em $\phi(\beta)$. Logo a fórmula de Killing nos garante que

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle}{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle}.$$

Portanto

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle} \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle.$$

Por outro lado,

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle}{\langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle},$$

logo

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle} \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle.$$

Portanto

$$\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle} = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle},$$

se $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$. Logo a constante

$$c = \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle} = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle}$$

independe de α ou β , se $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$. Portanto a igualdade

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle,$$

vale se $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$. A igualdade continua valendo se $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, pois nesse caso,

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \frac{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \langle \alpha, \beta \rangle = 0.$$

□

Utilizando essas informações sobre as constantes de estrutura de álgebras de Lie e o lema 4.1.9, podemos mostrar o teorema mais importante dessa seção.

Teorema 4.1.10. *Suponha que \mathfrak{g}^1 e \mathfrak{g}^2 sejam álgebras simples e tome subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}^1$ e $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}^2$. Denote por Π_1 e Π_2 os conjuntos de raízes correspondentes e sejam $\mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}^*$ e $\mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}^*$ os subespaços racionais gerados pelas raízes. Suponha que exista uma transformação linear invertível sobre os racionais $\phi : \mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}^* \rightarrow \mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}^*$ tal que $\phi(\Pi_1) = \Pi_2$ (ou seja, seus diagramas de Dynkin coincidem).*

Então, ϕ se estende a um isomorfismo $\tilde{\phi} : \mathfrak{g}^1 \rightarrow \mathfrak{g}^2$.

Demonstração: A primeira afirmação que fazemos é: ϕ é uma isometria entre as formas de Cartan-Killing de $\mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}^*$ e $\mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}^*$. De fato, pelo lema 4.1.9 $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$, para algum escalar $c \neq 0$. Como

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \beta \rangle &= \sum_{\gamma \in \Pi_1} \gamma(H_\alpha) \gamma(H_\beta) \\
&= \sum_{\gamma \in \Pi_1} \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \gamma, \beta \rangle \\
&= \sum_{\gamma \in \Pi_1} c \langle \phi(\gamma), \phi(\alpha) \rangle c \langle \phi(\gamma), \phi(\beta) \rangle \\
&= c^2 \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle
\end{aligned}$$

temos $c = c^2$ e portanto $c = 1$, concluindo que ϕ é uma isometria realmente. Agora, para cada $\alpha \in \Pi_1$ tome $X_\alpha \in \mathfrak{g}^1$, tal que

$$\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1.$$

Manteremos a notação $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}$. O objetivo será encontrar uma base de \mathfrak{g}^2 , formada por $Y_{\phi(\alpha)}$ tal que $\langle Y_{\phi(\alpha)}, Y_{-\phi(\alpha)} \rangle = 1$ e $[Y_{\phi(\alpha)}, Y_{\phi(\beta)}] = m_{\alpha, \beta} Y_{\phi(\alpha)+\phi(\beta)}$. Assim $\tilde{\phi}(X_\alpha) := Y_{\phi(\alpha)}$ será um isomorfismo, devido a igualdade entre as constantes de estrutura das bases $\{X_\alpha\}$ e $\{Y_{\phi(\alpha)}\}$.

Seja $\Sigma \subset \Pi$ um sistema simples de raízes, e defina a ordem lexicográfica de $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ por essa base. Faremos a construção do conjunto $\{Y_{\phi(\alpha)}\}$ por indução em relação a ordem em Π . Para simplificar a notação, $\phi(\alpha)$ será denotado α' ($\phi(\alpha) := \alpha'$). Para as raízes α de altura um, como α' é simples também, tome $Y_{\alpha'} \in \mathfrak{g}_{\alpha'}^2$. Tome também $Y_{-\alpha'} \in \mathfrak{g}_{-\alpha'}^2$ tal que

$$\langle Y_{\alpha'}, Y_{-\alpha'} \rangle = 1.$$

Seja

$$\Pi_n = \{\alpha \in \Pi; \alpha \text{ é de altura } n \text{ ou } -\alpha \text{ é de altura } n\}.$$

A hipótese de indução é que se $\alpha \in \Pi_{n-1}$, então $Y_{\alpha'}$ está definido e se β, γ e $\beta + \gamma \in \Pi_{n-1}$, então

$$[Y_{\beta'}, Y_{\gamma'}] = m_{\beta, \gamma} Y_{\beta'+\gamma'}.$$

Provaremos essa afirmação para as raízes que pertencem ao conjunto Π_n . Seja δ uma raiz positiva de altura n . Podemos escrever $\delta = \alpha + \beta$, tal que α é simples e β raiz positiva. Por hipótese de indução $Y_{\alpha'}$ e $Y_{\beta'}$ estão definidos. Defino $Y_{\gamma'}$ pela equação

$$[Y_{\alpha'}, Y_{\beta'}] = m_{\alpha, \beta} Y_{\alpha'+\beta'} = m_{\alpha, \beta} Y_{\gamma'}.$$

Para completar seja $Y_{-\delta'}$ tal que

$$\langle Y_{\delta'}, Y_{-\delta'} \rangle = 1.$$

Uma vez definidos os elementos $Y_{\delta'}$ para todo $\delta \in \Pi$, se tomarmos γ, δ e $\gamma + \delta \in \Pi_n$, pode-se escrever

$$[Y_{\gamma'}, Y_{\delta'}] = n_{\gamma, \delta} Y_{\gamma' + \delta'}.$$

Falta provar que $n_{\gamma, \delta} = m_{\gamma, \delta}$.

Vamos analisar os vários casos que podem ocorrer com γ , δ e $\gamma + \delta$.

1. Se γ, δ e $\gamma + \delta \in \Pi_{n-1}$. Então, por hipótese de indução, $n_{\gamma, \delta} = m_{\gamma, \delta}$.

2. Se $\gamma + \delta$ é uma raiz positiva de altura n . Nesse caso γ e $\delta \in \Pi_{n-1}$. Agora escrevemos $\gamma + \delta = \alpha + \beta$, tal que α é raiz simples e β raiz positiva de altura $n - 1$, assim

$$[Y_{\alpha'}, Y_{\beta'}] = m_{\alpha, \beta} Y_{\alpha' + \beta'} = m_{\alpha, \beta} Y_{\gamma' + \delta'}.$$

Se $\{\gamma, \delta\} = \{\alpha, \beta\}$, então pela definição das raízes de altura n , já temos $n_{\gamma, \delta} = m_{\alpha, \beta} = m_{\gamma, \delta}$. Logo podemos supor que γ e δ são diferentes de α e β . Como $(-\gamma - \delta + \alpha + \beta) = 0$, podemos aplicar o lema 4.1.8 às raízes $-\gamma, -\delta, \alpha$ e β , concluindo que

$$m_{\alpha, \beta} m_{-\gamma, -\delta} = -m_{\beta, -\gamma} m_{\alpha, -\delta} - m_{-\gamma, \alpha} m_{\beta, -\delta}. \quad (4.7)$$

Analogamente, aplica-se o lema 4.1.8 às raízes $-\gamma', -\delta', \alpha'$ e β' , que nos dá

$$n_{\alpha, \beta} n_{-\gamma, -\delta} = -n_{\beta, -\gamma} n_{\alpha, -\delta} - n_{-\gamma, \alpha} n_{\beta, -\delta}. \quad (4.8)$$

Como α, β, γ e δ são raízes positivas em Π_{n-1} , temos $\beta + (-\gamma), \alpha + (-\delta), (-\gamma) + \alpha$ e $\beta + (-\delta) \in \Pi_{n-1}$. Portanto os segundos membros das equações 4.7 e 4.8 são iguais e portanto $m_{\alpha, \beta} m_{-\gamma, -\delta} = n_{\alpha, \beta} n_{-\gamma, -\delta}$. Mas pelo que foi feito na definição de $Y_{\gamma', \delta'}$, já sabemos que $n_{\alpha, \beta} = m_{\alpha, \beta} \neq 0$, portanto

$$n_{-\gamma, -\delta} = m_{-\gamma, -\delta}.$$

Agora, mostraremos que $n_{-\alpha, -\beta} = m_{-\alpha, -\beta}$. Pelo lema 4.1.6 aplicado a α e β temos

$$m_{\alpha, \beta} m_{-\alpha, -\beta} = -q(p+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2},$$

aplicando agora a α' e β' temos

$$n_{\alpha, \beta} n_{-\alpha, -\beta} = -q(p+1) \frac{\langle \alpha', \alpha' \rangle}{2},$$

mas $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha', \alpha' \rangle$, portanto $m_{-\alpha, -\beta} = n_{-\alpha, -\beta}$. Para concluirmos iremos aplicar novamente o lema 4.1.8 às raízes $-\alpha, -\beta, \gamma$ e δ . Fazendo a mesma análise temos

$$m_{-\alpha, -\beta} m_{\gamma, \delta} = n_{-\alpha, -\beta} n_{\gamma, \delta}.$$

Finalmente concluímos que $m_{\gamma, \delta} = n_{\gamma, \delta}$.

3. Se $\gamma + \delta$ é raiz negativa. Então, a raiz $-(\gamma + \delta)$ é positiva. Assim aplicando o caso anterior às raízes $-\gamma$ e $-\delta$ utilizando a mesma construção concluímos que $m_{\gamma,\delta} = n_{\gamma,\delta}$.

4. Se γ ou δ é de altura $\pm n$. Suponha, por exemplo, que $-\gamma$ é de altura n . Logo δ é raiz positiva pois $\gamma + \delta \in \Pi_n$. Dessa forma as raízes δ e $-(\gamma + \delta)$, são duas raízes cuja soma é uma raiz de altura n . O que nos permite aplicar a elas a resolução do segundo caso. Portanto $n_{\delta, -(\gamma+\delta)} = m_{\delta, -(\gamma+\delta)}$. Pelo lema 4.1.7 aplicado a γ , δ e $-(\gamma + \delta)$. Temos

$$m_{\delta, -(\gamma+\delta)} = m_{\gamma,\delta}.$$

Analogamente, aplicando o lema 4.1.7 a γ' , δ' e $-(\gamma' + \delta')$, temos

$$n_{\delta, -(\gamma+\delta)} = n_{\gamma,\delta}.$$

Portanto

$$n_{\gamma,\delta} = m_{\gamma,\delta}.$$

Esses casos cobrem todas as possibilidades, provando a hipótese de indução para as raízes de Π_n . Portanto, as constantes de estrutura das bases $\{X_\alpha\}$ e $\{Y_{\phi(\alpha)}\}$ são iguais e as álgebras \mathfrak{g}^1 e \mathfrak{g}^2 são isomorfas.

□

Esse teorema junto com a proposição 4.1.2 nos fornece o resultado mais forte dessa teoria: Os diagramas de Dynkin são um invariante completo. Dito de outra maneira: Duas álgebras de Lie semi-simples são isomorfas se e somente se os seus diagramas de Dynkin coincidem.

Para completar a discussão feita nesse capítulo, nos falta mostrar que cada um dos diagramas A_l , B_l , C_l , D_l , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 e G_2 são realmente diagramas associados a espaços de raízes de subálgebras de Cartan de álgebras semi-simples. Faremos essa realização para as álgebras clássicas.

4.2 Realizações das álgebras clássicas

Iremos realizar os diagramas que são associados às chamadas álgebras clássicas, que são as associadas aos diagramas A_l , B_l , C_l e D_l . Pelo teorema 4.1.4, ao mostrarmos que o diagrama dessas álgebras é conexo concluiremos que essas álgebras são simples.

Teorema 4.2.1. *Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie das matrizes $(l+1) \times (l+1)$ que têm traço zero, $sl(l+1)$. Então o diagrama associado a \mathfrak{g} é A_l .*

Demonstração: Pelo que foi feito na seção 1.7, sabemos que tomando \mathfrak{h} a subálgebra de Cartan das matrizes diagonais em $sl(l+1)$, então o sistema simples de raízes será $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_l - \lambda_{l+1}\}$, onde λ_i são os funcionais $\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_{l+1}\} \mapsto a_i$. As raízes positivas são

$$\Pi_+ = \{\lambda_i - \lambda_j, i < j\}.$$

Se utilizarmos a notação $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, o número de Killing é

$$\frac{2 \langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle}{\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle} = \delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js} ,$$

portanto o diagrama desse sistema simples de raízes é A_l .

□

Teorema 4.2.2. *Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie das matrizes $(2l + 1) \times (2l + 1)$ em dimensão ímpar que são anti-simétricas em relação a identidade, $so(2l + 1) = \{A \in sl(2l + 1), A^t + A = 0\}$. Então o diagrama associado a \mathfrak{g} é B_l .*

Demonstração: Observe primeiramente que \mathfrak{g} é a álgebra das matrizes de $sl(2l + 1)$ que são anti-simétricas em relação a forma quadrática não-degenerada, definida pela matriz identidade. Como o corpo de escalares é algebricamente fechado, duas formas quadráticas não-degeneradas são equivalentes. Logo as álgebras de matrizes anti-simétricas em relação a formas quadráticas não-degeneradas distintas são isomorfas. De fato, sejam J_1 e J_2 matrizes simétricas que definem formas quadráticas equivalentes, ou seja, existe uma matriz inversível g tal que $J_1 = g^t J_2 g$. Sejam

$$\mathfrak{g}_i = \{A \in sl(2l + 1) : A^t J_i + J_i A = 0\} ,$$

para $i = 1, 2$. Afirmação: $A \in \mathfrak{g}_2$ se e somente se $g^{-1} A g \in \mathfrak{g}_1$.

Prova da afirmação:

$$(g^{-1} A g)^t J_1 + J_1 (g^{-1} A g) = g^t A^t (g^{-1})^t J_1 + (J_1 g^{-1}) A g = g^t A^t (J_2 g) + (g^t J_2) A g = g^t (A^t J_2 + J_2 A) g .$$

Portanto como g é invertível, temos $(g^{-1} A g)^t J_1 + J_1 (g^{-1} A g) = 0$ se e somente se $A^t J_2 + J_2 A = 0$. Concluindo que $g \mathfrak{g}_2 g^{-1} = \mathfrak{g}_1$, isto é, as álgebras são isomorfas. Logo, $so(2l + 1)$ é uma álgebra que pode ser realizada de várias maneiras, dependendo da escolha da forma quadrática.

A forma escolhida para a nossa realização é dada pela matriz J ,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{pmatrix}$$

onde 1_l é a matriz identidade $l \times l$. Essa matriz é simétrica e equivalente a matriz identidade $(2l + 1) \times (2l + 1)$, pois se

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i1_l & 1_l \\ 0 & 1_l & 1_l \end{pmatrix} ,$$

então $g^t J g = g^t g = J$. Portanto $so(2l + 1)$ é uma álgebra isomorfa a álgebra das matrizes anti-simétricas em relação a J .

Escrevendo a matriz A , $(2l + 1) \times (2l + 1)$, com blocos do mesmo tamanho que os blocos de J e usando a condição $A^t J + J A = 0$. Calculamos que a matriz A tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

com β e γ duas matrizes $1 \times l$ e as demais matrizes $l \times l$, b e c anti-simétricas e a matriz qualquer. Uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} é a das matrizes diagonais. As matrizes são da forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

com Λ uma matriz diagonal $l \times l$ qualquer. Como no caso de A_l , defina em \mathfrak{h} os funcionais $\lambda_j : \Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\} \mapsto a_j$, para $i = 1, \dots, l$.

Então os autovalores de $H \in \mathfrak{h}$ são 0 e $\pm\lambda_j(H)$. Os possíveis valores que uma raiz assume em H são: $\pm\lambda_j(H)$ e $\pm\lambda_j(H) \pm \lambda_k(H)$, para $j, k = 1, \dots, l$, $j \neq k$. Pois, se supormos que $\pm 2(\lambda_j)(H)$ é auto-valor de $\text{ad}(H)$, então as matrizes que estão no auto-espaço

$$\mathfrak{g}_{2\lambda_j} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H, \exists n \geq 0, (\text{ad}(H) - 2\lambda_j(H))(X) = 0\}$$

tem as entradas das diagonais de c ou de b não nulas. Mas c e b (definidas em 4.9) são anti-simétricas (de diagonal nula). Logo as raízes dessa subálgebra de Cartan e seus espaços de raízes correspondentes são:

- $\lambda_j, j = 1, \dots, l$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ -\gamma^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\gamma = (0, \dots, x_j, \dots, 0)$, $a = b = c = 0$ e $\beta = 0$.

- $-\lambda_j, j = 1, \dots, l$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta^t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\beta = (0, \dots, x_j, \dots, 0)$, $a = b = c = 0$ e $\gamma = 0$.

- $\lambda_i - \lambda_j, i \neq j$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a^t \end{pmatrix}$$

onde a é uma matriz $l \times l$ cuja única entrada não nula é a_{ij} , $b = c = 0$ e $\gamma = \beta = 0$.

- $\lambda_i + \lambda_j, i \neq j$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde b é uma matriz $l \times l$ em que as únicas entradas não nulas são b_{ij} e b_{ji} , $a = c = 0$ e $\gamma = \beta = 0$.

- $-(\lambda_i + \lambda_j), i \neq j$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

onde c é uma matriz $l \times l$ em que as únicas entradas não nulas são c_{ij} e c_{ji} , $a = c = 0$ e $\gamma = \beta = 0$.

Cada um desses espaços de raízes é de dimensão um e se para todo $\alpha \in \Pi$, $\alpha(H) = 0$ então $H = 0$. O conjunto gerador das raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}.$$

Esse conjunto Σ é um sistema simples de raízes, pois tem o mesmo número de elementos que a dimensão de \mathfrak{h} e toda raiz pode ser escrita como combinação de elementos de Σ com coeficientes inteiros do mesmo sinal. De fato,

$$\lambda_j = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + \lambda_l.$$

Se $i < j$, temos

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + 2(\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + \dots + 2\lambda_l,$$

e

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j),,$$

que são as raízes positivas em Π .

Finalmente vamos mostrar a expressão da forma de Cartan-Killing restrita a \mathfrak{h} . Utilizaremos a mesma técnica, da fórmula de polarização, que relaciona uma forma quadrática com a forma bilinear associada. Seja $H \in \mathfrak{g}$ definido em 4.10, então:

$$\begin{aligned} \text{tr}(ad(H)^2) = \langle H, H \rangle &= 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 = \\ 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + 4 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) &= 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i^2 = \\ (2 + 4(l-1)) \sum_{i=1}^l a_i^2 &= 2(2l-1) \sum_{i=1}^l a_i^2. \end{aligned}$$

Portanto, pela fórmula de polarização, para todo $H' \in \mathfrak{h}$

$$\langle H, H' \rangle = 2(2l - 1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i,$$

onde $\Lambda' = \text{diag}\{a'_1, a'_2, \dots, a'_l\}$ é a matriz diagonal que define H' .

Vamos denotar agora, por Λ_α , a matriz diagonal que define $H_\alpha \in \mathfrak{h}$. Então,

$$\Lambda_{\lambda_i} = \frac{1}{2(2l - 1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 0\},$$

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{2(2l - 1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\},$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{2(2l - 1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 1_j, \dots, 0\}.$$

Com essas expressões, encontramos os números de Killing associados a raízes. Note que

$$\langle \lambda_i - \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j \rangle = \frac{2(2l - 1)}{2(2l - 1)2(2l - 1)} 2 = \frac{1}{2l - 1}$$

e

$$\langle \lambda_l, \lambda_l \rangle = \frac{2(2l - 1)}{2(2l - 1)2(2l - 1)} 1 = \frac{1}{2(2l - 1)}.$$

Portanto os números de Killing são

$$2 \frac{\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \rangle}{\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \rangle} = 2 \left(\frac{\frac{-1}{2(2l-1)}}{\frac{1}{2l-1}} \right) = -1, \text{ para } i = 1, \dots, l - 1,$$

$$2 \frac{\langle \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l \rangle}{\langle \lambda_l, \lambda_l \rangle} = 2 \left(\frac{\frac{-1}{2(2l-1)}}{\frac{1}{2(2l-1)}} \right) = -2.$$

Portanto esse sistema de raízes tem o diagrama B_l .

□

Teorema 4.2.3. *Seja \mathfrak{g} a algebra de Lie das matrizes $2l \times 2l$ que são anti-simétricas em relação a J , $\text{sp}(l) = \{A \in \text{sl}(2l), AJ + JA^t = 0\}$, onde J é uma matriz escrita em blocos $l \times l$ como*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então o diagrama associado a \mathfrak{g} é C_l .

Demonstração: Essa álgebra é chamada álgebra simplética. Escrevendo uma matriz A em blocos $l \times l$, $A \in sp(l)$ se e somente se A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

com β e γ matrizes simétricas. Novamente é fácil notar que a subálgebra \mathfrak{h} das matrizes diagonais em $sp(l)$ é de Cartan. Os elementos são da forma

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

com $\Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\}$ uma matriz diagonal $l \times l$. Da mesma forma que na demonstração anterior, se λ_i é o funcional linear que toma a entrada a_i , então como um autovalor de $ad(H)$ é a diferença de autovalores de H , as raízes são diferenças $\pm\lambda_i \pm \lambda_j$. Nesse caso $\pm 2\lambda_i$ é uma raiz pois β e γ são matrizes simétricas, podendo então ter entradas não nulas nas diagonais. Dessa forma as raízes e seus espaços correspondentes são:

- $\lambda_i - \lambda_j, i \neq j$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^t \end{pmatrix}$$

onde α é uma matriz $l \times l$ cuja única entrada não nula é i, j e $\beta = \gamma = 0$.

- $\lambda_i + \lambda_j, i, j = 1, \dots, l$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde β é uma matriz $l \times l$ com entradas não nula apenas em i, j e j, i . $\alpha = \gamma = 0$.

- $-(\lambda_i + \lambda_j), i, j = 1, \dots, l$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

onde γ é uma matriz $l \times l$ com entradas não nula apenas em i, j e j, i . $\alpha = \beta = 0$.

Um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}.$$

As raízes positivas são escritas como combinações lineares de elementos de Σ como

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j),$$

se $i < j$ e

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + 2(\lambda_{l-1} - \lambda_l) + 2\lambda_l,$$

se $i \leq j$, $i, j = 1, \dots, l$.

Iremos encontrar agora a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{h} . Seja H a matriz definida em 4.12 então,

$$\begin{aligned} \text{tr}(ad(H)^2) &= \langle H, H \rangle = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2 = \\ 4 \sum_{i < j} a_i^2 + a_j^2 + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2 &= 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i^2 + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2 = 4(l+1) \sum_{i=1}^l a_i^2. \end{aligned}$$

Novamente por polarização,

$$\langle H, H' \rangle = 4(l+1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i$$

se $\Lambda' = \text{diag}\{a'_1, \dots, a'_l\}$ é a matriz que define H' . Assim as matrizes H_α , dadas por Λ_α , tem a forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} &= \frac{1}{4(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}, \\ \Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} &= \frac{1}{4(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 1_j, \dots, 0\}, \quad i \neq j, \\ \Lambda_{2\lambda_i} &= \frac{1}{2(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 0\}. \end{aligned}$$

Com essas expressões encontramos os números de Killing associados a raízes. Note que

$$\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \rangle = 4(l+1) \frac{2}{4(l+1)4(l+1)} = \frac{1}{2(l+1)}$$

e

$$\langle 2\lambda_l, 2\lambda_l \rangle = 4(l+1) \frac{4}{4(l+1)^2} = \frac{1}{(l+1)}.$$

Portanto os números de Killing são

$$2 \frac{\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \rangle}{\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \rangle} = 2 \left(\frac{\frac{-1}{4(l+1)}}{\frac{1}{2(l+1)}} \right) = -1, \quad \text{para } i = 1, \dots, l-1,$$

$$2 \frac{\langle \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l \rangle}{\langle \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} - \lambda_l \rangle} = -2.$$

Portanto o diagrama de \mathfrak{g} é C_l .

□

Teorema 4.2.4. *Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie das matrizes de dimensão par que são anti-simétricas em relação a identidade, $so(2l) = \{A \in sl(2l), A + A^t = 0\}$. Então o diagrama associado a \mathfrak{g} é D_l .*

Demonstração: Como no caso do diagrama B_l em que tínhamos essas matrizes, só que em dimensão ímpar, a álgebra \mathfrak{g} é isomorfa à álgebra das matrizes anti-simétricas em relação a uma matriz identidade ou de uma matriz que seja equivalente a identidade. Tome J a matriz escrita em blocos $l \times l$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim a álgebra $so(2l)$ é isomorfa a álgebra

$$\{A \in sl(2l) : AJ + JA^t = 0\}.$$

Para facilitar denotaremos também por $so(2l)$. Assim $A \in so(2l)$ se e somente se

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

com β e γ matrizes $l \times l$ anti-simétricas. Novamente a subálgebra \mathfrak{h} das matrizes diagonais é de Cartan. Seus elementos se escrevem como

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

onde Λ é uma matriz diagonal. As raízes de H são diferenças de autovalores de H . Aqui também $2\lambda_i$ não é raiz pois β e γ são matrizes anti-simétricas. Logo as raízes e seus espaços correspondetes são dados por:

- $\lambda_i - \lambda_j, i \neq j$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes (definidas em 4.13)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^t \end{pmatrix}$$

onde α é uma matriz $l \times l$ cuja única entrada não nula é i, j e $\beta = \gamma = 0$.

- $\lambda_i + \lambda_j, i \neq j$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde β é uma matriz $l \times l$ com entradas não nula apenas em i, j e j, i . $\alpha = \gamma = 0$.

- $-(\lambda_i + \lambda_j), i, j = 1, \dots, l$, com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

onde γ é uma matriz $l \times l$ com entradas não nula apenas em i, j e j, i . $\alpha = \beta = 0$. Um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}.$$

As raízes positivas são escritas como combinações lineares de elementos de Σ como

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$$

se $i < j$ e

$$\begin{aligned} \lambda_i + \lambda_j &= (\lambda_i - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{l-1}) + 2(\lambda_{l-1}) = \\ &[(\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)] + 2[(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1})] + [(\lambda_{l-1} - \lambda_l) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l)] , \end{aligned}$$

se $i \neq j$.

A forma de Cartan-Killing para H definido em 4.14 é dada por

$$\langle H, H \rangle = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2,$$

ou ainda

$$\langle H, H \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i^2.$$

Concluimos que

$$\langle H, H' \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i.$$

Dada uma raiz α o seu dual correspondente H_α , dado por Λ_α , é

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{4(l-1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}, i \neq j,$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{4(l-1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 1_j, \dots, 0\}, i \neq j.$$

O vértice em que ocorre a bifurcação é dado pela raiz $\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}$, pois ele é ligado a três outros vértices, visto que

$$\langle \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-3} - \lambda_{l-2} \rangle = \frac{1}{2(l-1)},$$

$$\langle \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-1} - \lambda_l \rangle = \frac{1}{2(l-1)},$$

$$\langle \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-1} + \lambda_l \rangle = \frac{1}{(l-1)}.$$

É fácil verificar que os números de Killing das raízes são todos iguais a um. Portanto o diagrama associado a \mathfrak{g} é D_l .

□

Bibliografia

- [1] San Martin, L. A. B. [1999] *Álgebras de Lie*. Campinas, SP: Editora da Unicamp.
- [2] Humphreys, J.E. [1971] *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. New York: Springer-Verlag.
- [3] Jacobson, N. [1979] *Lie algebras*. Republication of the 1962 original. New York: Dover Publications, Inc.