UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM

CERINO EWERTON DE AVELLAR
ORIENTADOR:
Prof. Dr. NELSON ONUCHIC

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS
1973

PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM

CERINO EWERTON DE AVELLAR
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ORIENTADOR: PROF. DR. NELSON ONUCHIC

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Composto e Impresso no Setor Gráfi-
co da Universidade Federal de São
Carlos - Via Washington Luiz,km235
13560-São Carlos - SP

STABILITY PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Cerino Ewerton de Avellar *Adviser: Prof. Dr. Nelson Onuchic*

The main purpose of this work is to study sufficient conditions under which we can guarantee that every solution of a second order ordinary differential system, and its derivative, tends to an equilibrium point $(\xi, 0)$ of an original autonomous system, as $t \to \infty$. This is done by using Lyapunoff techniques and invariance properties of ordinary differential systems.

The applications obtained here are more general than certain results obtained by T. Yoshizawa and N. Onuchic.

We obtain also an application by using a result of J. La Salle. Such application extends one due to N. Onuchic.

As a consequence we can obtain, from these applications, the global stability properties of the systems under considerations.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, pela dedicação e segurança com que orientou este trabalho e, sobretudo, pelo constante incentivo dado à nossa iniciação na pesquisa científica, nosso mais sincero agradecimento.

Desejamos agradecer também:

Ao Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues, com quem realizamos vários seminários de estudos e discutimos tópicos relacionados com este trabalho.

À Universidade Federal de São Carlos pelas facilidades a nós concedidas, proporcionando-nos condições favoráveis para a realização deste trabalho.

Aos professôres e colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da USP e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pelo apoio e incentivo dado aos nossos estudos.

A todos aqueles que direta ou indiretamente conosco colaboraram.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios concedidos pelas seguintes entidades: CAPES e CNPq.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 - FATOS BÁSICOS 3

CAPÍTULO 2 - APLICAÇÕES 19

BIBLIOGRAFIA 33

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é estudar condições sob as quais toda solução de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem tende para um ponto fixo ξ, com sua derivada tendendo a zero, quando $t \to \infty$. Isto será feito utilizando os Teoremas 1, 2 e 3, dados abaixo, e técnicas obtidas por meio das funções de Lyapunoff. Nossos resultados estendem os obtidos por Onuchic em [8], para equações escalares.

O Teorema 1 é uma versão modificada e generalizada do Teorema 5 de Yoshizawa, em [12]. O Teorema 2 é, essencialmente, um caso particular do Teorema 1 de Miller em [6]. O Teorema 3 é um caso particular do Teorema 1 de La Salle em [3].

O Teorema 4 é um resultado relativo ao problema acima, obtido como aplicação dos Teoremas 1 e 2. Este resultado estende o obtido por Onuchic em [8], para equações escalares. Mesmo para o caso especial de equações diferenciais escalares, o Teorema 4 nos dá melhores informações que o correspondente Teorema 4 em [8]. O Teorema 5 também dá uma contribuição ao nosso problema, e sua prova depende fundamentalmente do Teorema 3.

CAPÍTULO 1

FATOS BÁSICOS

Consideremos um sistema de equações diferenciais ordinárias, definido num aberto $Q \subset R^n$:

(1) $$\dot{x} = H(x)$$

onde H é contínua em Q.

Se M é um subconjunto de Q, M é dito quase-invariante com respeito a (1) se, e somente se, para cada $x_0 \in M$, existe uma solução $x(t)$ de (1), com $x(0) = x_0$, tal que $x(t)$ existe e permanece em M, para todo $t \in R$.

Seja $x(t)$ uma função contínua e definida no futuro, isto é, $x(t)$ existe e é contínua para todo $t \geq$ algum $t_0 \in R$. Um ponto $p \in R^n$ é dito ponto ω-limite de $x(t)$, se existe uma seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $x(t_m) \to p$, quando $m \to \infty$. O conjunto de todos os pontos ω-limite de $x(t)$ é denotado por Ω, e é chamado "conjunto ω-limite de $x(t)$".

LEMA-1

Suponhamos $x(t)$ contínua e limitada no futuro, isto é, $x(t)$ existe, é contínua e limitada em algum intervalo da forma $[a,\infty)$, $a > -\infty$.

Então, o conjunto ω-limite, Ω, de $x(t)$ é não vazio, conexo e compacto e, $x(t) \to \Omega$ quando $t \to \infty$, isto é, $\text{dist}(x(t),\Omega) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Prova:

(a) Ω *é não vazio.*

Como $x(t)$ e limitada, isto é, $x(t)$ $K \subset R^n$, para algum compacto K e $t \geq a$, então, existe uma seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $P_m = x(t_m) \in K$ para todo m. Logo, a seqüência $\{P_m\}$ admite uma subseqüência convergente, que converge para um ponto de K, pois K é compacto. Portanto, Ω é não vazio e $\Omega \subset K$.

(b) Ω *é compacto.*

Seja $\{Q_m\}$, $Q_m \in \Omega$, uma seqüência convergente para um ponto Q. Então, $dist(Q_m,Q) \to 0$ quando $m \to \infty$. Para cada Q_m, existe um $t_m > m$ tal que $dist(x(t_m),Q_m) < {}^1/m$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $N = N(\varepsilon)$, tal que $m \geq N$ implique $dist(x(t_m),Q_m) < {}^{\varepsilon}/2$ e $dist(Q_m,Q) < {}^{\varepsilon}/2$. Disto segue que,

$m \geq N \Rightarrow dist(x(t_m),Q) \leq dist(x(t_m),Q_m) + dist(Q_m,Q) < {}^{\varepsilon}/2 + {}^{\varepsilon}/2 = \varepsilon$.

Ou seja, $x(t_m) \to Q$ quando $m \to \infty$. Mas, isto é equivalente a dizer que $Q \in \Omega$. Portanto Ω é fechado e, como $\Omega \subset K$, K compacto, segue que Ω é compacto.

(c) Ω *é conexo.*

Suponhamos Ω não conexo. Então, existem dois compactos A e B, não vazios e disjuntos, tais que $\Omega = A \cup B$. Como A e B são compactos, existe $\alpha > 0$ tal que $dist(A,B) = \alpha$.

Desde que os pontos de A e B são pontos ω-limite de $x(t)$, existem sequências $\{t_m\}$ e $\{t'_m\}$, $t_m, t'_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tais que $dist(x(t_m),A) < {}^{\alpha}/2$ e $dist(x(t'_m),A) > {}^{\alpha}/2$. Podemos escolher $\{t_m\}$ e $\{t'_m\}$, tais que $t_m < t'_m$, $\forall m$. Como a distância de um ponto P a um conjunto A, $dist(P,A)$, é função contínua de t, segue que existe uma sequência $\{\tau_m\}$, $t_m < \tau_m < t'_m$, $\tau_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $dist(x(\tau_m),A) = \alpha/2$.

A sequência de pontos $\{x(\tau_m)\}$ sendo limitada, admite uma subsequência convergente, que converge para um ponto Q, pertencente a Ω, e $dist(Q,A) = \alpha/2$. Mas, isto implica que Q não pertence nem a A, nem a B, pois $dist(Q,B) \geq dist(A,B) - dist(Q,A) = \alpha/2$. O que é uma contradição. Portanto, Ω é conexo.

(d) *$x(t) \to \Omega$ quando $t \to \infty$.*

Suponhamos que $x(t) \not\to \Omega$. Então, existem $\alpha > 0$ e seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $dist(x(t_m),\Omega) \geq \alpha$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $P \in \Omega$, tal que $x(t_m) \to P$ quando $m \to \infty$. Logo, $dist(x(t_m),\Omega) \to dist(P,\Omega) = 0$, quando $m \to \infty$. O que é uma contradição. Portanto, $x(t) \to \Omega$ quando $t \to \infty$.

O Lema está provado.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$(2) \qquad \dot{x} = f(t,x)$$

onde $f(t,x) = (f_1(t,x),\dots, f_n(t,x)) \in R^n$ é suposta contínua em $[0,\infty) \times Q$, $Q \subset R^n$ aberto.

Seja $V(t,x)$ uma função real de classe C^1, definida para $t \geq 0$, $x \in Q$. Definimos:

$$\dot{V}_{(2)}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j} f_j(t,x) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$$

LEMA-2

Seja $V: [0,\infty) \times R^n \to R$, de classe C^1, tal que:

(i) $\dot{V}(t,x) \leq 0$ para todo $t \geq 0$, $x \in R^n$, onde

$$\dot{V}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j} f_j(t,x) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$$

(ii) $V(t,x) \geq \alpha(x)$, onde $\alpha: R^n \to R$ é contínua e $\alpha(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Então, toda solução de (2) é limitada no futuro.

Prova:

Suponhamos que exista alguma solução $x(t)$ de (2), não limitada no futuro. Então, fixado $t_0 > 0$, temos $V(t_0,x(t_0)) \geq \alpha(x(t_0))$. Como $\alpha(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, resulta, com a hipótese de que $x(t)$ não seja limitada no futuro, que existe $t_1 > t_0$ tal que $\alpha(x(t_1)) > V(t_0,x(t_0))$. Mas, $V(t_1,x(t_1)) \geq \alpha(x(t_1))$ e, portanto, $V(t_0,x(t_0)) < V(t_1,x(t_1))$, para $0 < t_0 < t_1$. Sendo V diferenciável, segue que existe pelo menos um ponto $\bar{t}$, $\bar{t} \in [0,t_1]$, tal que $\dot{V}(\bar{t},x(\bar{t})) > 0$, o que é uma contradição.

Portanto, toda solução de (2) é limitada no futuro.

Consideremos agora o sistema definido em $[0,\infty) \times Q$, $Q \subset R^n$ aberto:

$$\dot{x} = F(t,x) + G(t,x) \tag{3}$$

onde F e G são contínuas para $t \geq 0$, $x \in Q$.

TEOREMA-1

Suponhamos que as seguintes hipóteses sejam verificadas, com relação ao sistema (3):

(i) $F(t,x)$ é limitada para todo $t \geq 0$, quando x pertence a um subconjunto compacto arbitrário de Q.

(ii) Para cada compacto $B \subset Q$ e cada função contínua $z(t) \in B$, definida em $[0,\infty)$, segue que:

$$(4) \quad \int_s^{s+t} G(\tau,z(\tau))d\tau \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to \infty, \text{ uniformemente em } t \in [0,1].$$

Seja $\bar{x}(t)$ uma solução de (3), definida no futuro, com $\bar{x}(t) \in K$ para $t \geq$ algum $t_0 \geq 0$, onde K é um subconjunto compacto de Q.

(iii) Existe uma função real não negativa $V(t,x)$, de classe C^1, e uma função real não negativa e contínua $W(x)$, tal que

$$\dot{V}(t,\bar{x}(t)) \leq -W(\bar{x}(t)), \quad t \geq t_0$$

Então, $\Omega \subset E = \{x \in K \mid W(x) = 0\}$, onde Ω é o conjunto ω-limite de $\bar{x}(t)$.

Prova:

E é compacto, pois, $E = \{x \in K \mid W(x) = 0\} = W^{-1}\{0\}$. W é contínua, então, E é fechado. Mas $E \subset K$, K compacto.

Suponhamos $\Omega \not\subset E$. Então, existe uma seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, e um número positivo ε, tal que $\text{dist}(\bar{x}(t_m),E) \geq \varepsilon$, $\forall m$.

De (i) segue que $|F(t,x)| \leq M = M(K)$, para $t \geq 0$, $x \in K$.

Do sistema (3) segue que

$$\bar{x}(t) - \bar{x}(t_m) = \int_{t_m}^{t} F(s,\bar{x}(s)ds + \int_{t_m}^{t} G(s,\bar{x}(s))ds \; ; \quad t_m \leq t \leq t_m + \frac{\varepsilon}{4M}.$$

De (ii), podemos escolher $\{t_m\}$ tal que

$$\left| \int_{t_m}^{t} G(s,\bar{x}(s))ds \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad \text{para} \quad t_m \leq t \leq t_m + \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Temos ainda,

$$\left|\int_{t_m}^{t} F(s,\bar{x}(s))ds\right| \leq \int_{t_m}^{t} |F(s,\bar{x}(s))|ds \leq \int_{t_m}^{t_m+\varepsilon/4M} Mds = \frac{\varepsilon}{4}$$

Logo,

$$|\bar{x}(t) - \bar{x}(t_m)| \leq \left|\int_{t_m}^{t} F(s,\bar{x}(s))ds\right| + \left|\int_{t_m}^{t} G(s,\bar{x}(s))ds\right| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

para $t_m \leq t \leq t_m + \frac{\varepsilon}{4M}$, isto é,

$\text{dist}(\bar{x}(t),\bar{x}(t_m)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para $t_m \leq t \leq t_m + \frac{\varepsilon}{4M}$

Consequentemente,

(a) $\text{dist}(\bar{x}(t),E) \geq \text{dist}(\bar{x}(t_m),E) - \text{dist}(\bar{x}(t),\bar{x}(t_m)) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$,

para $t_m \leq t \leq t_m + \frac{\varepsilon}{4M}$.

Seja $B = \{x \in K \mid \text{dist}(x,E) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$. B é compacto, $W(x)$ é contínua e estritamente positiva em B. Então, existe $\delta > 0$ tal que $W(x) > \delta$, para todo $x \in B$.

De (iii) e (a) segue que

$\dot{V}(t,\bar{x}(t)) \leq -W(\bar{x}(t)) \leq -\delta$, $t_m \leq t \leq t_m + \frac{\varepsilon}{4M}$

Podemos escolher $\{t_m\}$, tal que $t_m + \frac{\varepsilon}{4M} < t_{m+1}$.

Então,

$$\int_{t_m}^{t_m+\varepsilon/4M} \dot{V}(t,\bar{x}(t))dt = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{t_i}^{t_i+\varepsilon/4M} \dot{V}(t,\bar{x}(t))dt + \int_{t_i+\varepsilon/4M}^{t_{i+1}} \dot{V}(t,\bar{x}(t))dt\right).$$

Mas,

$\int_{t_i+\varepsilon/4M}^{t_{i+1}} \dot{V}(t,\bar{x}(t)dt \leq 0$, pois $\dot{V}(t,\bar{x}(t)) \leq 0$ e $t_i+\varepsilon/4M < t_{i+1}$.

Portanto,

$$\int_{t_1}^{t_m+\varepsilon/4M} \dot{V}(t,\bar{x}(t))dt = V(t_m+\varepsilon/4M,\bar{x}(t_m+\varepsilon/4M)) - V(t_1,\bar{x}(t_1)) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_i+\varepsilon/4M} \dot{V}(t,\bar{x}(t))dt \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_i+\varepsilon/4M} -\delta dt = -\frac{m\delta\varepsilon}{4M}.$$

Como $-\frac{m\sigma\varepsilon}{4M} \to -\infty$ quando $m \to \infty$, segue que $V(t_m, \bar{x}(t_m)) \to -\infty$ quando $m \to \infty$, o que é uma contradição, pois, $V(t,\bar{x}(t)) \geq 0$. Portanto, $\Omega \subset E$ e o Teorema está provado.

Observações:

01 - Conforme foi dito na Introdução, este Teorema é uma versão generalizada do Teorema 5 de Yoshizawa em [12]. Mais precisamente, este Teorema é uma forma um pouco mais geral do que o apresentado por Onuchic em [8], no sentido de que a condição (iii) é menos exigente que a correspondente no Teorema 1 de Onuchic.

Como a versão dada por Onuchic é bastante conveniente para as aplicações que faremos a seguir, daremos abaixo seu enunciado.

TEOREMA-1'

Suponhamos, com relação ao sistema (3), verificadas as hipótese (i) e (ii) do Teorema 1, e mais,

(iii) Existe uma função real não negativa, de classe C^1, $V(t,x)$, e uma função real, não negativa e contínua $W(x)$, tais que

$$\dot{V}_{(3)}(t,x) \leq -W(x) \quad ; \quad t \geq 0 \quad , \quad x \in Q$$

Seja $x(t)$ uma solução de (3), definida no futuro, com $x(t) \in K$ para $t \geq$ algum $t_0 \geq 0$, onde K é um subconjunto compacto de Q.

Então, $\Omega \subset E = \{x \in Q \mid W(x) = 0\}$, onde Ω é o conjunto ω-limite de $x(t)$.

02 - Se a condição (4) é verificada para $t \in [0,1]$, então, (4) estará verificada para $t \in [-\ell,\ell]$, $\ell > 0$.

De fato:

Vamos mostrar que (4) está verificada para $t \in [0,\ell]$, $\ell > 0$.

Seja $m \geq \ell$, m inteiro. Se $t \in [0,\ell]$, então, $\frac{t}{m} \in [0,1]$. Temos que

$$\int_s^{s+t} G(\tau,z(\tau))d\tau = \int_s^{s+t/m} G(\tau,z(\tau))d\tau + \int_{s+t/m}^{(s+t/m)+t/m} G(\tau,z(\tau))d\tau + \ldots +$$

$$+ \int_{s+(m-1)t/m}^{(s+(m-1)t/m)+t/m} G(\tau,z(\tau))d\tau.$$

Cada parcela do segundo membro,

$$\int_{s+kt/m}^{(s+kt/m)+t/m} G(\tau,z(\tau))d\tau\ , \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \text{é tal que}$$

$\int_{s+kt/m}^{(s+kt/m)+t/m} G(\tau,z(\tau))d\tau \to 0$ quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,\ell]$, pois, $s \to \infty$ implica $s + \frac{kt}{m} \to \infty$; $t \in [0,\ell]$ implica $\frac{t}{m} \in [0,1]$, e vale a condição (4). Logo,

$\int_s^{s+t} G(\tau,z(\tau))d\tau \to 0$ quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,\ell]$, $\ell > 0$.

Resta-nos mostrar que

$\int_s^{s+t} G(\tau,z(\tau))d\tau \to 0$ quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [-\ell,0]$, $\ell > 0$.

De fato, se $t \in [-\ell,0]$, então, $-t \in [0,\ell]$ e,

$\int_s^{s+t} G(\tau,z(\tau))d\tau = -\int_{s+t}^{s} G(\tau,z(\tau))d\tau = -\int_{s+t}^{(s+t)-t} G(\tau,z(\tau))d\tau$, que recai no caso acima.

03 - Uma condição suficiente para (4) é dada por:

(5) Para cada compacto $B \subset Q$, corresponde uma função escalar $\sigma_B(t)$, definida para todo $t \geq 0$, tal que

$\int_t^{t+1} \sigma_B(s)ds \to 0$ quando $t \to \infty$ e, $|G(t,x)| \leq \sigma_B(t)$, para $t \geq 0$, $x \in B$.

04 - Um exemplo discutido em [11], mostra que a condição (5), não é implicada por (4).

Consideremos o sistema

(6) $$\dot{x} = H(x) + S(t,x) + G(t,x)$$

onde H é contínua em Q, S e G são contínuas em $[0,\infty) \times Q$.

Seja A um subconjunto fixo de Q e, consideremos a seguinte hipótese com relação a $S(t,x)$ e A:

(7) Para cada $\varepsilon > 0$ e cada compacto $K \subset Q$, corresponde um $\delta = \delta(\varepsilon,K)$ e $T_0 = T_0(\varepsilon,K)$, tais que $t \geq T_0$, $x \in K$ e $\mathrm{dist}(x,A) < \delta$, impliquem $|S(t,x)| < \varepsilon$.

TEOREMA-2

Suponhamos que as hipóteses (4) e (7) sejam verificadas. Seja $x(t)$ uma solução de (6), tal que $x(t) \in K$, $T \leq t < \infty$, onde $T \geq 0$, $K \subset Q$ é compacto e $x(t) \to A$ quando $t \to \infty$.

Então, o conjunto ω-limite, Ω, de $x(t)$ é não vazio, conexo, compacto e quase-invariante com relação ao sistema (1).

Prova:

Que Ω é não vazio, conexo e compacto, segue do Lema 1.

Vamos mostrar que Ω é quase-invariante com relação ao sistema (1).

Sem perda de generalidade, vamos supor que $x(t) \in K$ para $t \geq 0$.

Dado $z \in \Omega$, existe $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $x(t_m) \to z$ quando $m \to \infty$.

Seja $\ell > 0$ e, seja $\{\varepsilon_m\}$, ε_m decrescente, $\varepsilon_m \to 0$ quando $m \to \infty$.

Dado ε_k, de (7), segue que existem $\delta_k = \delta(\varepsilon_k, K)$ e $T_k = T(\varepsilon_k, K)$, tais que

$$t \geq T_k \,, \quad x \in K \ \text{ e } \ \mathrm{dist}(x,A) < \delta_k \Rightarrow |S(t,x)| < \varepsilon_k.$$

Como $x(t) \to A$ quando $t \to \infty$, existe $T_0^k \geq T_k$, tal que $t \geq T_0^k \Rightarrow \mathrm{dist}(x(t),A) < \delta_k$.

Seja t_{mk} tal que $t_{mk} - \ell \geq T_0^k$. Então,

$$t \geq t_{mk} - \ell \geq T_0^k \Rightarrow \mathrm{dist}(x(t),A) < \delta_k \Rightarrow |S(t,x(t))| < \varepsilon_k.$$

Podemos supor $\{t_{mk}\}$ crescente e, chamemos $\{t_{mk}\}$ ainda de $\{t_m\}$. Podemos supor $t_1 > \ell$. Logo,

$$(*) \qquad t \geq t_m - \ell \Rightarrow |S(t,x(t))| < \varepsilon_m$$

Temos

$$\dot{x}(s) = H(x(s)) + S(s,x(s)) + G(s,x(s))$$

onde as funções do segundo membro estão bem definidas para s entre t_m e $t + t_m$, $t \in [-\ell,\ell]$. Pois,

$$t + t_m \geq -\ell + t_m \geq -\ell + t_1 > -\ell + \ell = 0.$$

Integrando, temos:

$$x(t+t_m) = x(t_m) + \int_{t_m}^{t+t_m} [H(x(s)) + S(s,x(s)) + G(s,x(s))]ds =$$

$$= x(t_m) + \int_0^t H(x(\tau+t_m))d\tau + \int_{t_m}^{t+t_m} S(s,x(s))ds +$$

$$+ \int_{t_m}^{t+t_m} G(s,x(s))ds$$

Seja $x_m : [-\ell,\ell] \to Q$, definida por $x_m(t) = x(t+t_m)$.

Em vista de (4), podemos supor que

$$(**) \qquad \left| \int_{t_m}^{t_m+\tau} G(s,x(s))ds \right| < \varepsilon_m \,, \quad \forall \tau \in [-\ell,\ell]$$

Consideremos o conjunto $U = C([-\ell,\ell],R^n)$ com a norma do sup e $F = \{x_m \in U,\ m \in N\}$.

Afirmamos que F é relativamente compacto em U, pois,

(1) F é uniformemente limitado, porque $x_m(t) = x(t+t_m) \in K$ e então, existe $M > 0$ tal que $|x_m(t)| \leq M$, $t \in [-\ell,\ell]$, $\forall m$.

(2) F é equicontínuo.

Sejam s_1 e s_2, $s_1,s_2 \in [-\ell,\ell]$, $s_1 < s_2$

$$|x_m(s_2)-x_m(s_1)| = \left| \int_0^{s_2} H(x(s+t_m))ds + \int_{t_m}^{s_2+t_m} S(s,x(s))ds + \right.$$

$$+\int_{t_m}^{s_2+t_m} G(s,x(s))ds - \int_0^{s_1} H(x(s+t_m))ds - \int_{t_m}^{s_1+t_m} S(s,x(s))ds -$$

$$-\int_{t_m}^{s_1+t_m} G(s,x(s))ds \leq \left| \int_{s_1}^{s_2} H(x(s+t_m))ds \right| + \left| \int_{t_m}^{s_1+t_m} S(s,x(s))ds \right| +$$

$$+ \left| \int_{t_m}^{s_2+t_m} S(s,x(s))ds \right| + \left| \int_{t_m}^{s_1+t_m} G(s,x(s))ds \right| + \left| \int_{t_m}^{s_2+t_m} G(s,x(s))ds \right|$$

Como H é limitada em K, resulta que existe $L > 0$ tal que

$$|H(x)| \leq L\ ,\ \forall x \in K \Rightarrow \left| \int_{s_1}^{s_2} H(x(s+t_m))ds \right| \leq L|s_2-s_1|.$$

De (*) segue que $\left| \int_{t_m}^{s_1+t_m} S(s,x(s))ds \right| \leq \varepsilon_m |s_1|$ e $\left| \int_{t_m}^{s_2+t_m} S(s,x(s))ds \right| \leq \varepsilon_m |s_2|$.

De (**) segue que $\left| \int_{t_m}^{s_1+t_m} G(s,x(s))ds \right| \leq \varepsilon_m$ e $\left| \int_{t_m}^{s_2+t_m} G(s,x(s))ds \right| < \varepsilon_m$.

Portanto,

$$|x_m(s_2) - x_m(s_1)| \leq L|s_2-s_1| + 2(\ell+1)\varepsilon_m.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja N_0 tal que $m > N_0$, implique $2(\ell+1)\varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}$ são uniformemente contínuas em $[-\ell,\ell]$, existe $\overline{\delta}$ tal que $|s_2-s_1| < \overline{\delta}$, implica $|x_i(s_2)-x_i(s_1)| < \varepsilon$, $i = 1,2, \ldots, N_0$.

Seja $\delta = \min\{\overline{\delta}, \varepsilon/2L\}$.

Se $m \leq N_0$, da continuidade uniforme, temos que $|s_2-s_1|<\delta$ implica $|x_m(s_2)-x_m(s_1)| < \varepsilon$.

Se $m > N_0$, temos que $|s_2-s_1| < \delta$, implica

$$|x_m(s_2)-x_m(s_1)| < L|s_2-s_1| + 2(\ell+1)\varepsilon_m < L\,\varepsilon/2L + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Logo, provamos a equicontinuidade.

Do Teorema de Ascoli, $F = \{x_m\} \subset U$ é relativamente compacto. Assim, existe uma subseqüência $\{x_{m_j}\}$ de $\{x_m\}$, que continuaremos a chamar de $\{x_m\}$, tal que $x_m \to y$ em $\overline{F} \subset U$.

Temos

$$x_m(t) = x(t_m) + \int_0^t H(x(s+t_m))ds + \int_{t_m}^{t+t_m} S(s,x(s))ds + \int_{t_m}^{t+t_m} G(s,x(s))ds.$$

Seja $t \; [-\ell,\ell]$. Vimos que

$$\left| \int_{t_m}^{t+t_m} S(s,x(s))ds \right| \leq \ell\,\varepsilon_m \quad , \quad \forall t \in [-\ell,\ell]$$

$$\left| \int_{t_m}^{t+t_m} G(s,x(s))ds \right| \leq \varepsilon_m \quad , \quad \forall t \in [-\ell,\ell]$$

Temos que $x_m \to y$ em $\overline{F} \subset U$. Como $x_m(s) \in K \quad \forall s \in [-\ell,\ell]$, resulta que $y(s) \in K \quad \forall s \in [-\ell,\ell]$.

H é uniformemente contínua em K. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|x-y| < \delta$, $x,y \in K \Rightarrow |H(x)-H(y)| < \varepsilon$.

Como $x_m(s) \to y(s)$, uniformemente em $[-\ell,\ell]$, resulta que, existe $N = N(\delta)$, tal que $m \geq N \Rightarrow |x_m(s)-y(s)| < \varepsilon$.

Portanto,

$$m \geq N \Rightarrow |H(x_m(s)) - H(y(s))| < \varepsilon.$$

Logo,

$$m \geq N \Rightarrow \left|\int_0^t H(x_m(s))ds - \int_0^t H(y(s))ds\right| \leq \left|\int_0^t \varepsilon ds\right| \leq \varepsilon\ell$$

Assim,

$$\int_0^t H(x_m(s))ds \to \int_0^t H(y(s))ds \ , \text{ uniformemente em } \ t \in [-\ell,\ell].$$

Além disso,

$$\int_{t_m}^{t+t_m} S(s,x(s))ds \to 0, \text{ uniformemente em } \ t \in [-\ell,\ell].$$

$$\int_{t_m}^{t+t_m} G(s,x(s))ds \to 0, \text{ uniformemente em } \ t \in [-\ell,\ell].$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = \lim_{m\to\infty} \left[x(t_m) + \int_0^t H(x_m(s))ds + \int_{t_m}^{t+t_m} S(s,x(s))ds + \int_{t_m}^{t+t_m} G(s,x(s))ds\right]$$

implica

$$y(t) = z + \int_0^t H(y(s))ds \ , \quad \text{para} \quad t \in [-\ell,\ell].$$

Considerando $\ell = 1,2, \ldots$, construimos, pelo conhecido processo de diagonalização, uma seqüência $\{t_{m,m}\}$, que continuaremos a chamar de $\{t_m\}$, e uma função $y(t)$, $t \in R$, tal que

$$x_m(t) \to y(t) \quad , \quad \text{para} \quad t \in (-\infty,\infty) \ ,$$

a convergência sendo uniforme em todo compacto de R.

Logo, $y(0) = z$, $\dot{y}(t) = H(y(t))$, $t \in R$ e $y(t) \in \Omega$ para todo $t \in R$. Ou seja, Ω é quase-invariante relativamente ao sistema (1).

Nota:

Este Teorema é, essencialmente, um caso particular do Teorema 1 de Miller em [6]. Miller trabalha com equações com retardamento, onde o sistema não perturbado é uniformemente quase-periódico. Entretanto, a condição (4), considerada no Teorema 2, é mais fraca que a correspondente no Teorema de Miller.

Consideremos o sistema

(8) $$\dot{x} = F(t,x)$$

onde F é contínua para $t \geq 0$, $x \in Q$, Q um aberto do R^n, e satisfaz uma das condições de unicidade em relação ao problema de valor inicial.

TEOREMA-3

Sejam $V(t,x)$ e $W(x)$ funções reais não negativas, de classe C^1 em $[0,\infty) \times Q$, tais que $\dot{V}_{(8)}(t,x) \leq -W(x)$, para todo $t \geq 0$, $x \in G$, onde G é um subconjunto compacto de Q.

Seja $x(t)$ uma solução de (8), tal que $x(t) \in G$, para todo $t \geq$ algum $t_0 > 0$ e, seja $\dot{W}$ limitada superior ou inferiormente, ao longo da solução $x(t)$.

Então, $\Omega \subset E = \{x \in G \mid W(x) = 0\}$, onde Ω é o conjunto ω-limite de $x(t)$.

Prova:

Seja $P \in \Omega$. Seja $\{t_m\}$ uma seqüência, com $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $x(t_m) \to P$, quando $m \to \infty$.

Por hipótese, $V(t,x(t)) \geq 0$ e $V(t,x(t))$ é não crescente, pois, $\dot{V}(t,x(t)) \leq -W(x(t)) \leq 0$. Então $V(t_m,x(t_m))$ é não crescente e limitada inferiormente. Portanto, existe uma constante $c \geq 0$, tal que $V(t_m,x(t_m)) \to c$ quando $m \to \infty$ e, desde que $V(t,x(t))$ é não crescente, $V(t,x(t)) \to c$ quando $t \to \infty$.

Temos ainda,

$$V(t,x(t)) \leq V(t_0,x(t_0)) - \int_{t_0}^{t} W(x(s))ds$$

Portanto, $\int_{t_0}^{\infty} W(x(t))dt < \infty$ e, como $\dot{W}(x(t))$ é limitada superior ou inferiormente, segue que $W(x(t)) \to 0$ quando $t \to \infty$. Como W é contínua, implica que $W(P) = 0$, para todo $P \in \Omega$.

Assim, mostramos que E contém todos os pontos ω-limite de $x(t)$, ou seja, $\Omega \subset E$, o que prova o Teorema.

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES

O objetivo deste capítulo é encontrar condições sob as quais, podemos garantir que, para todas as soluções do sistema

$$(9) \qquad \ddot{x} + h(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(x) + g(t,x,\dot{x}) + p(t,x,\dot{x}) = 0,$$

tenhamos que $(x(t),\dot{x}(t)) \to (\xi,0)$ quando $t \to \infty$, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ pertence a R^n.

Para isso, consideremos o sistema equivalente

$$(9') \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &+ h(t,x,y)y + f(x) + g(t,x,y) + p(t,x,y) = 0 \end{aligned}$$

e o seguinte conjunto de hipóteses relativamente às funções em (9'):

(H_1) $h(t,x,y) = \mathrm{diag}(h_1(t,x,y),\dots, h_n(t,x,y))$ é uma matriz diagonal contínua, para $t \geq 0$, $x,y \in R^n$, e, $h(t,x,y)$ limitada para $t \geq 0$, $x,y \in K$, para todo compacto $K \subset R^n$. E mais, $h_j(t,x,y) \geq k_j(x_j,y_j) \geq 0$, onde $k_j(\xi,\eta)$, $j=1,\dots,n$, são funções reais contínuas, definidas no R^2. $x = \mathrm{col}(x_1,\dots,x_n)$, $y = \mathrm{col}(y_1,\dots,y_n)$.

(H_2) Para cada j, $j=1,\dots,n$, os conjuntos $R_j^+ = \{(x_j,0) \in R^2 \mid x_j > 0\}$ e $R_j^- = \{(x_j,0) \in R^2 \mid x_j < 0\}$, são componentes conexas com respeito ao espaço topológico $\Gamma_j - \{(0,0)\}$, onde $\Gamma_j = \{(\xi,\eta) \in R^2 \mid \eta k_j(\xi,\eta) = 0\}$.

(H_3) $f(x) = \mathrm{col}(f_1(x_1),\dots, f_n(x_n))$ é uma aplicação contínua de R^n em R^n, tal que:

(i) Existe $\rho > 0$, tal que

$$\int_0^{\xi} f_j(s)ds > 0 \quad \text{para} \quad 0 < |\xi| < \rho \,, \quad j=1,\dots,n.$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\xi} f_j(s)ds \to \infty$ com $|\xi| \to \infty$, $j=1,\dots,n.$

(iii) Para todo j, $j=1,\dots,n$, não existe $[a_j,b_j]$, $b_j > a_j$, tal que $f_j(\xi) = 0$ $\forall \xi \in [a_j,b_j]$.

Uma condição suficiente para (H_3), é dada por:

(H_3') $f(x) = \mathrm{col}(f_1(x_1),\dots, f_n(x_n))$ é uma aplicação contínua de R^n em R^n, tal que $x_j f_j(x_j) > 0$, para todo $x_j \neq 0$, e, $\displaystyle\int_0^{x_j} f_j(s)ds \to \infty$ quando $|x_j| \to \infty$, $j=1,\dots,n.$

(H_4) $p(t,x,y) \in R^n$ é contínua e $|p(t,x,y)| \leq \beta(t)$, para todo $t \geq 0$, $x,y \in R^n$, onde $\beta(t)$ é contínua, com $\displaystyle\int_0^{\infty} \beta(t)dt < \infty$.

(H_5) $g(t,x,y) \in R^n$ é contínua e $y.g(t,x,y) \geq 0$, para todo $t \geq 0$, $x,y \in R^n$.

Uma condição suficiente para (H_5) é dada por:

(H_5') $g(t,x,y) = \mathrm{col}(g_1(t,x,y),\dots,g_n(t,x,y)) \in R^n$ é contínua e $y_j g_j(t,x,y) \geq 0$, para todo $t \geq 0$, $x,y \in R^n$, $j=1,\dots,n.$

(H_6) Para cada compacto $K \subset R^n$ e todo par de funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$, definidas em $[0,\infty)$, com valores em K, segue que:

$$\int_s^{s+t} g(\tau,x(\tau),y(\tau))d\tau \to 0 \,, \quad \text{quando} \quad s \to \infty \,, \text{ uniformemente em}$$

$t \in [0,1]$.

Uma condição suficiente para (H_6) é dada por:

(H_6') Para cada subconjunto compacto $K \subset R^n$, corresponde uma função real $\sigma_k(t)$, $t \geq 0$, tal que:

$\int_t^{t+1} \sigma_k(s)ds \to 0$ quando $t \to \infty$, e, $|g(t,x,y)| \leq \sigma_k(t)$, para todo $t \geq 0$, $x,y \in K$.

LEMA-3

Suponhamos que as hipóteses (H_3-i), (H_4) e (H_5) sejam verificadas.

Seja $h_j(t,x,y)$, $j=1,\dots,n$, uma função não negativa e contínua, para $t \geq 0$, $x,y \in R^n$.

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existem números positivos $T(\varepsilon)$ e $\delta(\varepsilon)$, tais que $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $x_0,y_0 \in R^n$, com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$, implique $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$, para toda solução $(x(t),y(t))$ de (9'), satisfazendo $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Prova:

Consideremos a função

$$V(t,x,y) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(y_j^2 + 2 \int_0^{x_j} f_j(s)ds\right) \right]^{1/2} + \int_t^{\infty} \beta(s)ds$$

definida para $t \geq 0$, $x,y \in R^n$ tais que $|x| + |y| < \rho$.

Dado ε, $0 < \varepsilon < \rho$, definimos

$$2m = \min_{|x|+|y|=\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(y_j^2 + 2 \int_0^{x_j} f_j(s)ds\right)\right]^{1/2}$$

A condição (H_3-i) implica $2m > 0$ e então,

$$\inf_{\substack{t \geq 0 \\ |x|+|y|=\varepsilon}} V(t,x,y) \geq 2m > 0$$

Sejam $T(\varepsilon) > 0$ e $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$, escolhidos tais que $\int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(t)dt < m$ e $[\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds)]^{1/2} < m$, para $|x|+|y| \leq \delta(\varepsilon)$.

Então, $\max\limits_{\substack{t \geq T(\varepsilon) \\ |x|+|y|=\delta(\varepsilon)}} V(t,x,y) < 2m$.

Temos que:

$$\dot{V}_{(9')}(t,x,y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V(t,x,y)}{\partial x_j} y_1 + \frac{\partial V(t,x,y)}{\partial y_j} \dot{y}_j\right) + \frac{\partial V(t,x,y)}{\partial t} =$$

$$= \frac{-\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 h_j(t,x,y)) - \sum_{j=1}^{n}(y_j g_j(t,x,y)) - \sum_{j=1}^{n} (y_j p_j(t,x,y))}{[\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds)]^{1/2}} - \beta(t) =$$

$$= \frac{-\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 h_j(t,x,y)) - y.g(t,x,y) - y.p(t,x,y)}{[\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds)]^{1/2}} - \beta(t) \leq$$

$$\leq \frac{-\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 h_j(t,x,y)) - y.g(t,x,y)}{[\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds]^{1/2}} + |p(t,x,y)| - \beta(t) \leq 0,$$

para todo $t \geq 0$, $x,y \in R^n$ tais que $0 < |x| + |y| < \rho$. Sendo $|p(t,x,y)|$, a norma euclidiana.

Suponhamos que exista $t_0 \geq T(\varepsilon)$ e (x_0,y_0), $x_0,y_0 \in R^n$, com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$, tal que para alguma solução $(x(t),y(t))$ de (9'), satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$, e algum $\bar{t} \geq t_0$, tenhamos $|x(\bar{t})| + |y(\bar{t})| \geq \varepsilon$.

Então, existem números t_1 e t_2, $t_1,t_2 > T(\varepsilon)$, tais que

$$|x(t_1)| + |y(t_1)| = \delta(\varepsilon) , \quad |x(t_2)| + |y(t_2)| = \varepsilon ,$$

e $\delta(\varepsilon) \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \varepsilon$, para $t_1 \leq t \leq t_2$. Mas, isto implica, desde que $\max\limits_{\substack{t \geq T(\varepsilon) \\ |x|+|y|=\delta(\varepsilon)}} V(t,x,y) < \inf\limits_{\substack{t \geq 0 \\ |x|+|y|=\varepsilon}} V(t,x,y)$,

$V(t_1,x(t_1),y(t_1)) < V(t_2,x(t_2),y(t_2))$ e, como $(x(t),y(t)) \neq (0,0)$ em $[t_1,t_2]$, resulta $V(t,x(t),y(t))$ diferenciável em $[t_1,t_2]$. Portanto, existe $s \in [t_1,t_2]$, tal que $\dot{V}(s,x(s),y(s)) > 0$, o que é uma contradição.

Logo, para toda solução $(x(t),y(t))$ de (9'), satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$, com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$, temos que $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$, para $t \geq t_0$.

O Lema está provado.

COROLÁRIO-1

Suponhamos que alguma condição de unicidade, com relação ao problema de valor inicial para (9'), esteja verificada.

Suponhamos que todas as hipóteses do Lema 3 sejam verificadas, com $p(t,0,0) = 0$ para $t \geq 0$.

Então, a solução nula de (9') é uniformemente estável.

Prova:

Temos $p(t,0,0) = 0$. $f(0) = 0$, pois de (H_3-i) segue que $f_j(x_j) > 0$ para $0 < x_j < \rho$ e $f_j(x_j) < 0$ para $-\rho < x_j < 0$, para todo j, $j=1,\dots,n$. Como f é contínua, resulta $f_j(0) = 0$ para todo j, ou seja $f(0) = 0$.

$g(t,0,0) = 0$, pois, de (H_5) segue, em particular, que para $\tilde{y}_j = (0,\dots,0,y_j,0,\dots,0)$, $\tilde{y}_j \cdot g(t,x,\tilde{y}_j) = y_j \cdot g_j(t,x,\tilde{y}_j) \geq 0$ para todo j, $j=1,\dots,n$. Como g é contínua resulta que $g_j(t,x,0)=0$ para todo j. Logo, $g(t,x,0) = 0$ e, portanto, $g(t,0,0) = 0$.

Conseqüentemente, a origem é ponto de equilíbrio para (9').

O Corolário segue então do Lema 3, utilizando o Teorema de continuidade em relação às condições iniciais.

Lema-4

Suponhamos que as hipóteses (H_3-i-ii), (H_4) e (H_5) sejam verificadas. Seja $h_j(t,x,y)$ uma função real, contínua e não negativa, para $t \geq 0$, $x,y \in R^n$.

Então, toda solução de (9') é limitada no futuro.

Prova:

Da hipótese (H_3-ii), temos que existe M_j, tal que

$$2 \int_0^{x_j} f_j(s) + M_j > 0, \qquad \forall x_j \in R, \quad j=1,\dots,n.$$

Consideremos

$$V(t,x,y) = \Big[\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 + 2 \int_0^{x_j} f_j(s)ds + M\Big]^{1/2} + \int_t^{\infty} \beta(s)ds$$

definida para todo $t \geq 0$, $x,y \in R^n$, onde $M = \sum_{j=1}^{n} M_j$.

$V(t,x,y)$ é diferenciável e, de maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 3, podemos obter:

$$\dot{V}_{(9')}(t,x,y) \leq 0 \,, \quad \text{para} \quad t \geq 0 \,, \quad x,y \in R^n.$$

Seja $W(x,y) = \Big[\sum_{j=1}^{n} (y_j^2 + 2 \int_0^{x_j} f_j(s)ds) + M\Big]^{1/2}$.

Da hipótese (H_4), segue que $\int_t^{\infty} \beta(s)ds > 0$, então,

$$W(x,y) \leq V(t,x,y), \quad t \geq 0 \,, \quad x,y \in R^n$$

Temos ainda, $W(x,y) \to \infty$ quando $|x| + |y| \to \infty$.

Do Lema 2, segue que toda solução de (9') é limitada no futuro.

TEOREMA-4

Suponhamos verificadas as hipóteses (H_1), (H_2), (H_3), (H_4), (H_5') e (H_6).

Então, para toda solução $x(t)$ de (9), temos que $\dot{x}(t) \to 0$ e $x(t) \to$ algum $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$, onde $f(\xi) = (f_1(\xi_1), \ldots, f_n(\xi_n)) = 0$, quando $t \to \infty$.

Prova:

Seja $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$, uma solução de (9'), com $\overline{x}(t) = (\overline{x}_1(t), \ldots, \overline{x}_n(t))$, $\overline{y}(t) = (\overline{y}_1(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$.

Do Lema 4, segue que essa solução é limitada no futuro. Portanto, cada componente $(\overline{x}_j(t), \overline{y}_j(t))$ de $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$ é limitada no futuro.

Para cada j fixado, $j=1,\ldots,n$, consideremos o sistema:

$$(9_j') \quad \begin{aligned} &\dot{x}_j = y_j \\ &y_j + h_j(t, \hat{x}_j, \hat{y}_j) y_j + f_j(x_j) + g_j(t, \hat{x}_j, \hat{y}_j) + p_j(t, \hat{x}_j, \hat{y}_j) = 0 \end{aligned}$$

onde,

$$\hat{x}_j = (\overline{x}_1(t), \ldots, \overline{x}_{j-1}(t), x_j, \overline{x}_{j+1}(t), \ldots, \overline{x}_n(t))$$

$$\hat{y}_j = (\overline{y}\ (t), \ldots, \overline{y}_{j-1}(t), y_j, \overline{y}_{j+1}(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$$

É claro que $(\overline{x}_j(t), \overline{y}_j(t))$ é solução de $(9_j')$ e, como vimos acima, $(\overline{x}_j(t), \overline{y}_j(t))$ é limitada no futuro. Portanto, do Lema 1 segue que o conjunto ω-limite, Ω_j, de $(\overline{x}_j(t), \overline{y}_j(t))$ é não vazio, conexo e compacto, com $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t)) \to \Omega_j$ quando $t \to \infty$.

Seja $R_j^x = \{(x_j,0) \mid x_j \in R\}$. Afirmamos que $\Omega_j \cap R_j^x \neq \emptyset$.

De fato:

Se $\Omega_j \cap R_j^x = \emptyset$, como Ω_j é compacto e R_j^x é fechado, implica $\mathrm{dist}(R_j^x,\Omega_j) = \alpha > 0$.

Mas, $\mathrm{dist}((\bar{x}_j(t), \bar{y}_j(t)), \Omega_j) \to 0$ quando $t \to \infty$. Então, $|\bar{y}_j(t)| = \mathrm{dist}((\bar{x}_j(t), \bar{y}_j(t)), R_j^x) = \alpha/2 > 0$, para $t \geq$ algum $t_0 > 0$ e, como $\bar{y}_j(t) = \dot{\bar{x}}_j(t)$, resulta que $|\bar{x}_j(t)| \to \infty$, o que é uma contradição.

Portanto, $\Omega_j \cap R_j^x \neq \emptyset$.

Da hipótese (H_3-ii), temos que existe M_j tal que $2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j > 0$, para todo $x_j \in R$.

Consideremos:

$$V_j(t,x_j,y_j) = \left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2} + \int_t^{\infty} \beta(s)ds$$

$$W_j(x_j,y_j) = \frac{y_j^2 k_j(x_j,y_j)}{\left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2}}$$

Temos que

$$\dot{V}_{j(9_j')}(t,x_j,y_j) = \frac{\partial V_j(t,x_j,y_j)}{\partial x_j} y_j + \frac{\partial V_j(t,x_j,y_j)}{\partial y_j}\dot{y}_j + \frac{\partial V(t,x_j,y_j)}{\partial t} =$$

$$= \frac{-y_j^2 h_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j) - y_j g_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j) - y_j p_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j)}{\left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M\right]^{1/2}} - \beta(t) \leq$$

$$\leq \frac{-y_j^2 h_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j) - y_j g_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j)}{\left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2}} + |p_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j)| - \beta(t) \leq$$

$$\leq \frac{-y_j^2 h_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j)}{\left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2}} \leq \frac{-y_j^2 k_j(x_j,y_j)}{\left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2}},$$

ou seja,

$$\dot{V}_{j(9_j')}(t,x_j,y_j) \leq - W_j(x_j,y_j)$$

Então, pelo Teorema 1', com $F_j = \mathrm{col}(y_j,-h_j y_j - f_j)$ e $G_j = \mathrm{col}(0,-g_j-p_j)$, segue que $\Omega_j \subset E_j = \{(x_j,y_j) \in R^2 \mid W_j(x_j,y_j)=0\}$. $E_j = \Gamma_j$. Portanto, $\Omega_j \subset \Gamma_j$.

Vamos analisar as duas possibilidades:

(a) $(0,0) \in \Omega_j$

(b) $(0,0) \notin \Omega_j$.

O caso (a), implica que existe uma seqüência $\{t_m\}, t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $(\overline{x}_j(t_m),\overline{y}_j(t_m)) \to (0,0)$ quando $m \to \infty$. Então, pelo Lema 3, temos que $(\overline{x}_j(t), \overline{y}_j(t)) \to (0,0)$ quando $t \to \infty$.

O caso (b), implica $\Omega_j \subset \Gamma_j - \{(0,0)\}$. Como $\Omega_j \cap R_j^x \neq \emptyset$, temos $\Omega_j \subset (R_j^+ \cup R_j^-) \neq \emptyset$. Mas, Ω_j é conexo e vale (H_2) então, $\Omega_j \subset R_j^+ \cup R_j^-$.

Logo, pelo Teorema 2, com $A_j = R_j^x$, $H_j = \mathrm{col}(y_j,-f_j)$, $S_j = \mathrm{col}(0,-h_j y_j)$, $G_j = \mathrm{col}(0,-g_j-p_j)$ e $Q = R^2$, segue que Ω_j é quase-invariante com respeito ao sistema

$$(10_j) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_j &= y_j \\ \dot{y}_j + f_j(x_j) &= 0 \end{aligned}$$

Mas, da condiçao (H_3), segue que o conjunto quase-invariante para (10_j), contido em R_j^x é o conjunto dos pontos $(\xi_j,0)$, tais que $f_j(\xi_j) = 0$.

Ainda da condição (H_3), o conjunto dos pontos ξ_j tais que

$f_j(\xi_j) = 0$, é um conjunto de pontos discretos e, como Ω_j é conexo, resulta que Ω_j, se reduz a um único ponto $(\xi_j,0)$.

Portanto, toda solução $(\bar{x}_j(t),\bar{y}(t)) \to (\xi_j,0)$ quando $t \to \infty$.

Da análise feita acima, concluimos que toda solução $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ de (9'), tende para um ponto $(\xi,0)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in R^n$, tal que $f(\xi) = 0$.

O Teorema está provado.

Como observado na Introdução, este Teorema estende o Teorema 4 de Onuchic em [8] para equações escalares. Na verdade, como também já observado, o nosso Teorema 4 é mais geral que o mencionado Teorema de Onuchic em consideração.

Vamos a seguir obter um resultado sobre o sistema (9), usando agora, como instrumento básico, o Teorema 3 de La Salle.

TEOREMA-5

Seja $h(t,x,y) = \mathrm{diag}(h_1(t,x,y),\ldots,h_n(t,x,y))$ uma matriz diagonal contínua para $t \geq 0$, $x,y \in R^n$. E mais, $h_j(t,x,y) \geq$ $\geq k_j(x_j,y_j) \geq 0$, onde $k_j(\xi,\eta)$ é uma função de classe C^1, com $\eta\frac{\partial}{\partial\eta}(\xi,\eta) \geq 0$ para todo $\xi,\eta \in R$.

Suponhamos verificadas as hipóteses (H_2), (H_3) e (H_5'). Suponhamos verificada a hipótese (H_4), com $\beta(t)$ limitada em $[0,\infty)$.

Suponhamos, ainda, que alguma condição de unicidade com relação ao problema de valor inicial, esteja satisfeita para (9').

Então, toda solução de (9) é limitada no futuro e, $\dot{x}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Além disso, se $x(t)$ é uma solução de (9) tal que

$\lim\limits_{t\to\infty}|x(t)| = 0$, então também $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Prova:

Seja $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$, uma solução de $(9')$, com $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_n(t))$, $\bar{y}(t) = (\bar{y}_1(t),\dots,\bar{y}_n(t))$.

Do Lema 4, segue que $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ é limitada no futuro. Portanto, cada componente $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))$ é limitada no futuro.

Como no Teorema 4, para cada j fixado, $j=1,\dots,n$, consideremos o sistema:

$$(9'_j)\quad \begin{cases} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j + h_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j)y_j + f_j(x_j) + g_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j) + p_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j) = 0 \end{cases}$$

onde,

$$\hat{x}_j = (\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_{j-1}(t),x_j,\bar{x}_{j+1}(t),\dots,\bar{x}_n(t))$$

$$\hat{y}_j = (\bar{y}_1(t),\dots,\bar{y}_{j-1}(t),y_j,\bar{y}_{j+1}(t),\dots,\bar{y}_n(t)).$$

Vemos que $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))$ é uma solução de $(9'_j)$, limitada no futuro. Portanto, existe $t_0 \geq 0$ e um conjunto compacto G_j de R^2, tal que $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t)) \in G_j$ para todo $t \geq t_0$.

Ainda como no Teorema 4, definimos

$$V_j(t,x_j,y_j) = \left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2} + \int_t^{\infty}\beta(s)ds,$$

com $2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j > 0$.

Facilmente se mostra que

$$\dot{V}_{j(9'_j)}(t,x_j,y_j) \leq \frac{-y_j^2 k_j(x_j,y_j)}{\left[y_j^2+2\int_0^{x_j} f_j(s)ds+M_j\right]^{1/2}}$$

Tomando,

$$\gamma_j = \inf_{(x_j,y_j)\in G_j} \frac{1}{\left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2}},$$

segue que:

$$\frac{y_j^2 k_j(x_j,y_j)}{\left[y_j^2 + 2\int_0^{x_j} f_j(s)ds + M_j\right]^{1/2}} \geq \gamma_j y_j^2 k_j(x_j,y_j), \text{ para todo } (x_j,y_j)\in G_j.$$

Então, definindo $W_j(x_j,y_j) = \gamma_j y_j^2 k_j(x_j,y_j)$, temos:

$$\dot V_{j(9_j')}(t,x_j,y_j) \leq - W_j(x_j,y_j)$$

Para aplicar o Teorema 3, vamos mostrar que $\dot W_j$ é limitada superiormente, ao longo da solução $(\bar x_j(t),\bar y_j(t))$.

$$\dot W_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t)) = \gamma_j \frac{d}{dt}\{[\bar y_j(t)]^2 k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))\} =$$

$$= 2\gamma_j \bar y_j(t) k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))[-h_j(t,\bar x(t),\bar y(t))\bar y_j(t) - f_j(\bar x_j(t)) -$$

$$- g_j(t,\bar x(t),\bar y(t)) - p_j(t,\bar x(t)),\bar y(t)] +$$

$$+ \gamma_j [\bar y_j(t)]^2 \frac{\partial k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))}{\partial y_j} [-h_j(t,\bar x(t),\bar y(t))\bar y_j(t) -$$

$$- f_j(\bar x_j(t)) - g_j(t,\bar x(t),\bar y(t)) - p_j(t,\bar x(t),\bar y(t))] +$$

$$+ \gamma_j [\bar y_j(t)]^3 \frac{\partial k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))}{\partial x_j} \leq$$

$$\leq \gamma_j [\bar y_j(t)]^3 \frac{\partial k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))}{\partial x_j} - 2\gamma_j \bar y_j(t) k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t)) \times$$

$$\times f_j(\bar x_j(t)) + 2\gamma_j |\bar y_j(t)| k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))\beta_0 - \gamma_j [\bar y_j(t)]^2 \times$$

$$\times \frac{\partial k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))}{\partial y_j} f_j(\bar x_j(t)) +$$

$$+ \gamma_j [\bar y_j(t)]^2 \left|\frac{\partial k_j(\bar x_j(t),\bar y_j(t))}{\partial y_j}\right| \beta_0 .$$

pois,

$$2\gamma_j[\bar{y}_j(t)]^2 k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))h_j(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)) \geq 0$$
$$2\gamma_j\bar{y}_j(t)k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))g_j(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)) \geq 0$$
$$\gamma_j[\bar{y}_j(t)]^3 \frac{\partial k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))}{\partial y_j} h_j(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)) \geq 0$$
$$\gamma_j[\bar{y}_j(t)]^2 \frac{\partial k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))}{\partial y_j} g_j(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)) \geq 0$$
$$-2\gamma_j\bar{y}(t)k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))p_j(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)) \leq$$
$$\leq |2\gamma_j\bar{y}_j(t)k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))p_j(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t))| \leq$$
$$\leq 2\gamma_j|\bar{y}_j(t)|k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))\beta(t) \leq$$
$$< 2\gamma_j|\bar{y}_j(t)|k_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))\beta_0 .$$

onde,

$$\beta_0 = \sup_{0\leq t<\infty} \beta(t).$$

Então, como G_j é compacto e $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t)) \in G_j$, existe um número positivo $C_j = C_j(G_j)$, tal que $\dot{W}_j(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t)) \leq C_j$ para $t \geq t_0$.

Do Teorema 3, segue então, que $\Omega_j \subset \Gamma_j = \{(\xi,\eta)\in R^2 \mid \eta k_j(\xi,\eta)=0\}$, onde Ω_j é o conjunto ω-limite de $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))$.

Como $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))$ é limitada no futuro, segue que Ω_j é não vazio, conexo e compacto, com $(x_j(t),y_j(t)) \to \Omega$ quando $t \to \infty$.

Temos ainda, $\Omega_j \cap R_j^x \neq \phi$, onde, $R_j^x = \{(x_j,0) \mid x_j \in R\}$.

Consideremos as duas possibilidades:

(a) $(0,0) \in \Omega_j$

(b) $(0,0) \notin \Omega_j$

O caso (a) implica que existe uma seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$

quando $m \to \infty$, tal que $(\overline{x}_j(t_m),\overline{y}_j(t_m)) \to (0,0)$ quando $m \to \infty$. Do Lema 3, segue que $(\overline{x}_j(t),\overline{y}_j(t)) \to (0,0)$ quando $t \to \infty$.

O caso (b) implica $\Omega_j \subset \Gamma_j - \{(0,0)\}$. Mas, $\Omega_j \cap R_j^x \neq \emptyset$ e vale (H_2), então, $\Omega_j \subset R_j^+ \cup R_j^-$ e, conseqüentemente, $\overline{y}_j(t)=\dot{\overline{x}}_j(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Em ambos os casos, mostramos que $\dot{\overline{x}}_j(t) = \overline{y}_j(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, para todo j fixado, $j=1,\ldots,n$. Logo, $\dot{\overline{x}}(t) = \overline{y}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Se, $\lim\limits_{t\to\infty}|\overline{x}(t)| = 0$, temos, $\lim\limits_{t\to\infty}|\overline{x}_j(t)| = 0$, para todo j, $j = 1,\ldots,n$. Portanto, $(0,0)\in\Omega_j$, para todo j e, conseqüentemente, $(\overline{x}(t),\overline{y}(t)) \to (0,0)$, quando $t \to \infty$.

O Teorema está provado.

BIBLIOGRAFIA

[1] - CODINGTON, E.A. & LEVINSON, N. - Theory of ordinary differential equations - New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1965.

[2] - HALE, J.K. - Ordinary differential equations - New York, Wiley-Interscience, /c1969/.

[3] - LA SALLE, J.P. - An invariance principle in the theory of stability-differential equations and dynamical systems.- -New York, Academic Press, 1967, pgs. 277 - 286.

[4] - LA SALLE, J.P. & LEFSCHETZ, S. - Stability by Lyapunov's direct method with applications.- New York, Academic Press, 1961.

[5] - LEVIN, J.J. - On the global asymptotic behaviour of nonlinear systems of differential equations. - Arch. Rational Mech. Anal., 6: 65 - 74, 1965.

[6] - MILLER, R.K. - Asymptotic behaviour of nonlinear delay - -differential equations. - J. of Differential Equations, 1: 293 - 305, july, 1965.

[7] - ________. - Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear differential equations. - Trans. of the American Math. Society, 115: 400-416, march, 1965.

[8] - Onuchic, N. - Invariance properties in the theory of differential equations with applications to stability problems. - SIAM J. Control, 9: 97 - 104, febrvary,1971.

[9] - ________. - Stability of a second order differential equation. - Acta Mexicana de Ciencia y Tecnologia,3:6-11, enero/abril, 1969.

[10] - ONUCHIC, N; ONUCHIC, L. de La Rosa; TABOAS, P. Zoēga & RODRIGUES, H. Munhoz. - Invariance, stability and applications. - Seminario de Ecuaciones Diferenciales, Centro de Investigaciōn y Estudios Avanzados y Organizaciōn de Los Estados Americanos. - Mexico, Verano, 1972.

[11] - STRAUSS, A & YORKE, J.A. - On the asymptotically autonomous differential equations. - Math. Systems Theory, 1: 175--182, 1967.

[12] - YOSHIZAWA, T. - Asymptotic behaviour of solutions of a system of differential equations. - Contributions to Differential Equations, 1: 371 - 387, 1963.

[13] - __________. - Stability Theory by Lyapunov's second method. - Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1966.