Construção rigorosa de variedades de soluções de EDPs

Camila Leão Cardozo

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Camila Leão Cardozo

Construção rigorosa de variedades de soluções de EDPs

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
Novembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C268c Cardozo, Camila Leão
 Construção rigorosa de variedades de soluções de
EDPs / Camila Leão Cardozo; orientador Marcio
Fuzeto Gameiro. -- São Carlos, 2017.
 84 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

 1. Computação Rigorosa. 2. Polinômios Radiais. 3.
Equação de Chan-Hilliard. 4. Bifurcação Cúspide. I.
Gameiro, Marcio Fuzeto, orient. II. Título.

Camila Leão Cardozo

Rigorous construction of manifolds of solutions of PDEs

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
November 2017

Este trabalho é dedicado à minha família.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados à minha família por me apoiar em todas as minhas decisões. Ao Ricardo pelo apoio emocional e a força dada para eu iniciar o doutorado e também para não desistir. Ao Rodrigo pela ajuda, companheirismo e risadas no meio da tarde. Aos colegas de sala, que foram muitos, pela ajuda e compreensão em horas difíceis de estudos. Aos amigos de longe que não estiveram de corpo presente, mas sempre me deram apoio, em especial para a Poliane.

Agradecimentos especiais são direcionados ao ICMC - Universidade de São Paulo, aos meus orientadores que contribuíram e que ainda contribuirão para a evolução de meu conhecimento, em especial para o Marcio que sempre foi muito paciente comigo nas horas difíceis, e quem espero ter sempre contato para futuros trabalhos.

Também agradeço à CAPES e à FAPESP pelo apoio financeiro.

*“Mourning a past pain in the present,
is to create more pain and suffering again.”
(William Shakespeare)*

RESUMO

CARDOZO, C. L. **Construção rigorosa de variedades de soluções de EDPs.** 2017. 84 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

O objetivo deste trabalho é construir rigorosamente variedades de soluções definidas implicitamente por equações não-lineares em dimensão infinita. Usando um método de continuação a múltiplos parâmetros aplicado a uma projeção em dimensão finita, uma triangulação da variedade é construída e usada para construir localmente a variedade no espaço de dimensão infinita. Aplicamos este método para encontrar equilíbrio da equação de Cahn-Hilliard. Estudamos também bifurcações cúspides, com o objetivo de encontrar as condições necessárias para a existência das mesmas em qualquer dimensão finita.

Palavras-chave: Computação Rigorosa, Polinômios Radiais, Equação de Cahn-Hilliard, Bifurcação Cúspide.

ABSTRACT

CARDOZO, C. L. **Rigorous construction of manifolds of solutions of PDEs.** 2017. 84 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

The goal of this research is to rigorously compute implicitly defined manifolds of solutions of infinite dimensional nonlinear equations. Using a multi-parameter continuation method on a finite dimensional projection, a triangulation of the manifold is computed and is then used to construct local charts of the global manifold in the infinite dimensional domain of the operator. We apply this method to find the equilibria of the Cahn-Hilliard equation. We also studied cusp bifurcations, in order to find the necessary conditions for the existence of the same in any finite dimension.

Keywords: Rigorous Construction, Radau Polynomials, Cahn-Hilliard Equation, Cusp Bifurcation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	21
2.1	Definições e resultados preliminares de EDOs	21
2.2	Introdução aos polinômios radiais	22
2.2.1	<i>Solução de Equações Não Lineares</i>	23
2.2.2	<i>Cálculo dos autovalores e autovetores</i>	24
3	CÁLCULO DE VARIEDADES VIA CONTINUAÇÃO RIGOROSA	27
3.1	Cálculo de variedades via continuação rigorosa com multiparâmetros em dimensão infinita	27
3.2	Definição dos polinômios radiais	27
3.3	Construção dos limitantes necessários para os polinômios radiais	31
3.4	Algoritmo de Continuação Multiparâmetro	33
3.4.1	<i>Construção do Primeiro Patch</i>	34
3.4.1.1	<i>Algoritmos</i>	39
4	VARIEDADES DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA A EQUAÇÃO DE CAHN-HILLIARD	45
5	CÁLCULO RIGOROSO DE BIFURCAÇÃO CÚSPIDE	61
5.1	Introdução	61
5.2	Bifurcações Cúspide	62
5.2.1	<i>Caso $n = 1$</i>	62
5.2.2	<i>Cálculo Rigoroso de Bifurcação Cúspide em dimensão 1</i>	66
5.2.3	<i>Caso $n \geq 1$</i>	69
5.2.4	<i>Construção Rigorosa para Cúspide n-dimensional</i>	73
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	81
	REFERÊNCIAS	83

INTRODUÇÃO

Estamos interessados em desenvolver este trabalho com provas assistidas pelo computador para equações diferenciais. A ideia de tais provas é aproximar numericamente soluções de equações diferenciais, e então, mostrar a existência de uma real solução da equação próxima a aproximação numérica calculada. Em alguns casos também queremos provar que esta solução satisfaz algumas propriedades. Tais provas estão compreendidas em duas etapas: a primeira por uma parte teórica que inclui a porção de maior interesse e mais complicada delas, e uma parte assistida pelo computador com uma porção mais simples, mas muito longa e massante. A parte assistida pelo computador consiste da realização de vários cálculos e verificação de muitas desigualdades simples. Estes cálculos e desigualdades são executados usando aritmética de intervalos, vide (MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009). Deste modo, os resultados obtidos são provas matemáticas completamente rigorosas, realizados com auxílio do computador. Portanto, todos os resultados produzidos por esta pesquisa serão resultados rigorosamente matemáticos em equações diferenciais. No que segue, esses métodos são referidos por diversos nomes, tais como, provas assistidas pelo computador, numérico rigoroso, computação rigorosa, continuação rigorosa, etc.

O objetivo desta trabalho é combinar ideias de continuação de multi-parâmetros (HENDERSON, 2002; BRODZIK; RHEINOLDT, 1994; BRODZIK, 1998), de aproximações simplicial de variedades implicitamente definidas (BRODZIK; RHEINOLDT, 1994; BRODZIK, 1998) e do método de continuação rigorosa (DAY; LESSARD; MISCHAIKOW, 2007; GAMEIRO; LESSARD, ; GAMEIRO; LESSARD, 2010; GAMEIRO; LESSARD, 2011a; GAMEIRO; LESSARD, 2011b; GAMEIRO; LESSARD, 2013; GAMEIRO; LESSARD; MISCHAIKOW, 2008; BERG; LESSARD; MISCHAIKOW, 2010) para cálculos implícitos rigorosos definidos em variedades n -dimensionais de soluções de dimensão infinita de equações não lineares.

Apresentamos um método para o cálculo rigoroso de variedades de soluções de equações diferenciais, sendo uma extensão de (GAMEIRO; LESSARD; PUGLIESE, 2015). Em tal artigo os autores desenvolveram um método para calcular cartas locais suaves de dimensão dois definidas implicitamente pela variedade de equilíbrio de uma função $f : \mathbb{R}^2 \times B_1 \rightarrow B_2$, B_1 e B_2 espaços de Banach, e após desenvolvido o método, calcularam uma variedade de equilíbrio bidimensional para a equação de Cahn-Hilliard. Nosso objetivo é desenvolver um método para encontrar a variedade de equilíbrio de uma função suave de dimensão maior que dois e aplicar este método dos polinômios radiais para encontrar o equilíbrio para a equação de Cahn-Hilliard em dimensão três e também para encontrar bifurcações cuspidal. No caso das bifurcações, estabeleceremos as condições para que um modelo de equações deve possuir para ter uma bifurcação cúspide, isto é dado em (KUZNETSOV, 2013). Descrevemos o processo para os casos de dimensão um e n , com n maior do que dois, e colocamos tais condições para fácil manuseio, ou seja, em uma única função. Assim o problema de encontrar bifurcação cúspide passa a ser um problema de encontrar o equilíbrio de uma função e então aplicar o método dos polinômios radiais. Primeiro aplicamos o método em uma equação geral de dimensão um que tenha uma bifurcação cúspide, ou seja, que já esteja em sua forma normal, transformando todas as condições em uma única função. Em seguida, aplicamos na equação de Lotka-Volterra, conhecida pelo modelo Predador-Presa. Estudamos a equação com dados proposto por (DOEDEL *et al.*, 2007), no qual nos dá um ponto inicial para encontrar tal bifurcação numericamente.

Os principais resultados da tese são calcular, primeiramente, um método rigoroso de variedades de soluções de equilíbrio de problemas com multiparâmetros com dimensão maior ou igual a dois, estendendo o método proposto por (GAMEIRO; LESSARD; PUGLIESE, 2015). Fazer cálculos rigorosos, com o auxílio de um computador, para cálculo de variedades de soluções de equilíbrio da equação de Cahn-Hilliard, em dimensão 2, com multiparâmetros. Calcular a existência de bifurcação do tipo cúspide e encontrar as condições necessárias para tal. Feito isso, aplicar no modelo Predador-Presa proposto por (DOEDEL *et al.*, 2007).

Desta forma, esta tese está organizada como segue.

No Capítulo 2, apresentamos alguns resultados básicos e bem conhecidos de Equações Diferenciais Ordinárias e introduzimos alguns conceitos para estudarmos o método rigoroso proposto. Na última seção deste capítulo, abordamos o conceito de encontrar autovalores de uma matriz, adaptado aos polinômios radiais, no qual será necessário para a obtenção de bifurcações, tal método foi mencionado em (LESSARD, 2016).

No Capítulo 3 é detalhado as equações, definições, resultados e algoritmos necessários para a obtenção da construção da variedade procurada.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo das aplicação do Capítulo 3 na equação de Cahn-Hilliard. A equação de Cahn-Hilliard, (John W. Cahn e John E. Hilliard) descreve o processo de separação de fase de ligas binárias.

Finalmente, no Capítulo 5 estudamos bifurcações do tipo cúspide em dois exemplos: o primeiro é uma equação geral que tem uma bifurcação desse tipo, aplicando o método rigoroso para a obtenção de tal bifurcação, o segundo é a equação conhecida como Predador-Presa. Para estas aplicações, fazemos uma introdução geral de como encontrar uma bifurcação cúspide em dimensão $n \geq 1$, utilizando os polinômios radiais, definidos nos capítulos 2 e 3. Encontramos também uma bifurcação do tipo cúspide com o método proposto para as equações bem conhecidas Predador-Presa.

Ao longo desta tese foi utilizado o software Matlab para os cálculos rigorosos.

PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos de equações diferenciais ordinárias e daremos uma breve introdução dos polinômios radiais. Tais conceitos, como definições e demonstrações de teoremas, podem ser encontrados em (CARMEN, 2000; GAMEIRO *et al.*, 2015; LESSARD, 2016).

2.1 Definições e resultados preliminares de EDOs

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados básicos de EDO. O material desta seção pode ser encontrado em (CARMEN, 2000; GAMEIRO *et al.*, 2015).

Definição 2.1. Considere uma função $T : X \rightarrow X$ onde X é um espaço topológico. Um elemento $\tilde{x} \in X$ é dito um ponto fixo de T se $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Definição 2.2. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $T : X \rightarrow X$ é uma contração se existe um número $c \in [0, 1)$, chamado constante de contração, tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y),$$

para todos $x, y \in X$.

Definição 2.3. Considere os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma função lipschitziana se existe um número real $K > 0$ tal que, para todos $x_1, x_2 \in X$,

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd_X(x_1, x_2).$$

O menor K satisfazendo esta desigualdade é denotado por $Lip(f) := K$ e é chamado de constante de lipschitz de f .

Teorema 2.1. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Seja (X, d) um espaço métrico completo. Assuma que $T : X \rightarrow X$ é uma contração com constante de contração κ . Então existe um único ponto fixo $x \in X$ de T . Mais ainda, para qualquer $x \in X$, vale a desigualdade

$$d(T^n(x), x) \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} d(T(x), x).$$

Definição 2.4. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Uma solução da equação diferencial

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x(t))$$

sobre o intervalo $J \subset \mathbb{R}$ é uma função diferenciável $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(t) \in U$ e

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t))$$

para todo $t \in J$.

Definição 2.5. Seja ϕ uma solução, num intervalo I , de uma equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$, onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, é uma função contínua. Dizemos que a solução $\hat{\phi} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma continuação (extensão ou prolongamento) de ϕ se $\hat{I} \supsetneq I$ e $\hat{\phi}|_I = \phi$.

Teorema 2.2. Seja $J \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos e assuma $f : J \times U \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função Lipschitz. Se $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J \times U \times \Gamma$, então existe uma vizinhança na forma $J_0 \times U_0 \times \Gamma_0$ de (t_0, x_0, λ_0) e uma função Lipschitz contínua $\phi : J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para todo $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J_0 \times U_0 \times \Gamma_0$

$$\phi(., t_1, x_1, \lambda_1) : J_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma solução para o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda_1), \quad x(t_1) = x_1. \quad (2.1)$$

Mais ainda, se $\psi(., t_1, x_1, \lambda_1)$ for uma outra solução do problema de valor inicial (2.1), então $\psi(t) = \phi(t)$ na interseção de seus domínios de definição.

2.2 Introdução aos polinômios radiais

Nesta seção apresentamos alguns resultados básicos dos polinômios radiais que serão utilizados nos capítulos seguintes. Estes resultados podem ser encontrados em (GAMEIRO *et al.*, 2015; LESSARD, 2016).

Considere um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função Lipschitz contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. O Teorema 2.2 garante a existência e unicidade de solução do problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.2)$$

para algum $x_0 \in U$.

O método dos polinômios radiais é usado para o cálculo rigoroso de soluções de (2.2). O tipo mais simples de soluções são soluções de equilíbrio, ou seja, x satisfazendo $f(x) = 0$. Na próxima seção apresentamos o método dos polinômios radiais para calcular soluções de equilíbrio.

2.2.1 Solução de Equações Não Lineares

Nesta seção apresentamos o método dos polinômios radiais para calcular soluções de $f(x) = 0$.

Proposição 2.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Considere $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear invertível. Seja $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$T(x) := x - Af(x). \quad (2.3)$$

Se $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$ então $f(\tilde{x}) = 0$.

Demonstração: Segue do fato de A ser invertível.

A proposição anterior nos diz que encontrar um zero de uma função f é equivalente a encontrar um ponto fixo de (2.3). Assim o problema se reduz a encontrar uma aplicação linear injetiva A que torna T uma contração.

Agora introduziremos um método que nos fornece uma forma rigorosa de identificar o domínio de T e mostrar que a mesma é uma contração.

Teorema 2.3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, e seja $T = (T_1, \dots, T_n) \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, com $T_k : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considere $\bar{x} \in U$. Assumimos que $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $Z(r) = (Z_1(r), \dots, Z_n(r)) \in \mathbb{R}^n$ são tais que

$$|T_k(\bar{x}) - \bar{x}_k| \leq Y_k \quad \text{e} \quad \sup_{b, c \in \overline{B_r(0)}} |DT_k(\bar{x} + b)c| \leq Z_k(r), \quad (2.4)$$

para todo $k = 1, \dots, n$, onde $\overline{B_r(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq r\}$ e $\bar{x}_k$ denota a k -ésima coordenada de $\bar{x}$. Se $\|Y + Z(r)\| < r$, então $T : \overline{B_r(\bar{x})} \rightarrow \overline{B_r(\bar{x})}$ é uma contração com constante de contração

$$\kappa := \frac{\|Z(r)\|}{r} < 1.$$

Em particular, existe um único $\tilde{x} \in \overline{B_r(\bar{x})}$ tal que $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

A seguir definimos os polinômios radiais, que são usados para encontrar o raio r no teorema acima.

Definição 2.6. Dados $T \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e $Y, Z(r) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (2.4), os polinômios radiais associados $p_k(r)$, $k = 1, \dots, n$, são definidos por

$$p_k(r) := Y_k + Z_k(r) - r.$$

Podemos reescrever o Teorema 2.3 em termos dos polinômios radiais.

Corolário 2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ e $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear invertível. Defina $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$T(x) := x - Af(x).$$

Seja $\bar{x} \in U$, e sejam $Y, Z(r) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (2.4), e sejam $p_k(r)$, $k = 1, \dots, n$, os polinômios radiais associados. Se existe $r > 0$ tal que $p_k(r) < 0$, para todo $k = 1, \dots, n$, então existe um único $\tilde{x} \in \overline{B_r(\bar{x})}$ tal que $f(\tilde{x}) = 0$.

2.2.2 Cálculo dos autovalores e autovetores

No cálculo de bifurcações, que será apresentado no Capítulo 5, precisaremos determinar os autovalores de uma matriz M . Nesta seção, mostramos como adaptar os polinômios radiais para esta finalidade como em (LESSARD, 2016).

Considere o problema de determinar rigorosamente soluções (μ, v) da equação

$$Mv = \mu v, \tag{2.5}$$

para uma matriz qualquer $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ onde já foi calculado uma aproximação numérica $(\tilde{\mu}, \tilde{v})$ de autovalor e autovetor associados. Escolheremos uma função adequada para a utilização dos polinômios radiais, ou seja, vamos encontrar uma região de existência e unicidade do equilíbrio desta função. Neste caso, utilizaremos a seguinte função

$$\tilde{F}(\mu, v) := Mv - \mu v$$

com $\tilde{F} : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$.

Observamos que, dada uma solução $(\tilde{\mu}, \tilde{v})$ de (2.5) e para qualquer $\theta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(\tilde{\mu}, \theta \tilde{v})$ também é uma solução. Isto implica que a solução $(\tilde{\mu}, \tilde{v})$ não é isolada, ou seja, não existe uma vizinhança de $(\tilde{\mu}, \tilde{v})$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ no qual $(\tilde{\mu}, \tilde{v})$ é solução única de $\tilde{F}(\tilde{\mu}, \tilde{v}) = 0$. Para contornar isso, introduzimos a noção da condição de fase, a qual irá garantir que as soluções são isoladas. Observe que a unicidade falha ao longo de um espaço de parâmetros bidimensional $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, assim esperamos obter unicidade pela redução da dimensão por dois no espaço no qual a função $\tilde{F}$ atua. Com isso, escolhemos a condição de fase que envolve fixar uma componente de v como sendo uma constante.

Mais precisamente, suponha que um par de autovalor e autovetor, $(\bar{\mu}, \bar{v})$, de M foi calculado numericamente, isto é, $M\bar{v} \approx \bar{\mu}\bar{v}$. Escolha k de forma que

$$|\bar{v}_k| = \max_{j=1, \dots, n} \{|\bar{v}_j|\}$$

e defina $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ por

$$F(x) := M \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_k \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_k \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde $x = (\mu, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n)$. Por definição, uma solução x de $F(x) = 0$ corresponde a um par de autovalor e autovetor (μ, v) de M com o autovalor μ dado pela primeira coordenada de x e o autovetor $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, \bar{v}_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$. Seguindo as ideias dos polinômios radiais, definimos o operador $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ por

$$T(x) = x - AF(x), \quad (2.7)$$

onde A é uma inversa numérica de $DF(\bar{x})$ e $\bar{x} = (\bar{\mu}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{k-1}, \bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_n)$. Assumimos que A é invertível, o que pode ser verificado via aritmética de intervalos. Para essa construção das estimativas dos polinômios radiais necessárias, utilizamos a norma $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\}$.

Para simplificar a expressão de $DF(\bar{x})$, introduzimos a seguinte notação. Dado uma matriz $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, denotamos $(B)_{\hat{k}}$ pela matriz $n \times (m-1)$ obtida pela retirada da k -ésima coluna de B . Em $\bar{x}$ temos

$$DF(\bar{x}) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -\bar{v}_1 \\ \vdots \\ -\bar{v}_k \\ \vdots \\ -\bar{v}_n \end{matrix} & (M - \bar{\mu}I_n)_{\hat{k}} \end{array} \right]. \quad (2.8)$$

Para aplicar o resultado dos polinômios radiais, precisamos encontrar os limitantes Y e $Z(r)$ satisfazendo (2.4). Como $T(\bar{x}) - \bar{x} = -AF(\bar{x})$, definimos

$$Y := |AF(\bar{x})| \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

onde o valor absoluto é tomado componente a componente. Para obter o limitante $Z(r)$ satisfazendo (2.4), observamos que

$$\begin{aligned} DT(\bar{x} + b)c &= (I - ADF(\bar{x} + b))c \\ &= (I - ADF(\bar{x}))c + A[(DF(\bar{x}) - DF(\bar{x} + b))c] \end{aligned}$$

o que implica que

$$|DT(\bar{x}+b)c| \leq |(I-ADF(\bar{x}))c| + |A[(DF(\bar{x})-DF(\bar{x}+b))c]| \quad (2.10)$$

componente a componente. Observe que

$$DF(\bar{x}+b) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -\bar{v}_1 - b_2 \\ \vdots \\ -\bar{v}_{k-1} - b_k \\ -\bar{v}_k \\ -\bar{v}_{k+1} - b_{k+1} \\ \vdots \\ -\bar{v}_n - b_n \end{matrix} & (M - (\bar{\mu} + b_1)I_n)_{\hat{k}} \end{array} \right].$$

Logo

$$DF(\bar{x}) - DF(\bar{x}+b) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ 0 \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} & b_1(I_n)_{\hat{k}} \end{array} \right].$$

Defina

$$Z(r) = rZ_0 + r^2Z_1, \quad (2.11)$$

onde

$$Z_0 := |I - ADF(\bar{x})| 1_n, \quad Z_1 := 2|A|(1_n - e_k),$$

onde $1_n \in \mathbb{R}^n$ é o vetor cujas entradas são todas iguais a 1, e onde e_k é o k -ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^n$. De (2.10) vemos que

- i) $\sup_{c \in B(r)} |(I - ADF(\bar{x}))c| \leq rZ_0$
- ii) $\sup_{b, c \in B(r)} |A[(DF(\bar{x}) - DF(\bar{x}+b))c]| \leq r^2Z_1.$

Isto combinado com (2.9) garante que as condições (2.4) estão satisfeitas. Logo, pelo Corolário 2.1, se existir um raio $r > 0$ tal que

$$p_k(r) := Y_k + Z_k(r) - r < 0,$$

então estará provada a existência de um par de autovalor e autovetor $(\tilde{\mu}, \tilde{v})$ de M em uma bola com centro na aproximação numérica $(\bar{\mu}, \bar{v})$ e raio r .

CÁLCULO DE VARIEDADES VIA CONTINUAÇÃO RIGOROSA

Neste capítulo apresentamos um método para o cálculo rigoroso de variedades de soluções de equações diferenciais. Em (GAMEIRO; LESSARD; PUGLIESE, 2015) é apresentado um método, baseado nos polinômios radiais, para a construção rigorosa de variedades bidimensionais de soluções de equações diferenciais. Neste capítulo estendemos estes resultados para o cálculo de variedades de quaisquer dimensões.

3.1 Cálculo de variedades via continuação rigorosa com multiparâmetros em dimensão infinita

Definimos um operador não linear $f : \mathbb{R}^n \times B_1 \rightarrow B_2$ tal que uma solução $x = (p, a) \in \mathbb{R}^n \times B_1$ de

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

corresponde a uma solução limitada de interesse. O domínio de f contém o parâmetro espacial $\mathbb{R}^n$ e B_1, B_2 são espaços de Banach de dimensão infinita com rápido decaimento dos coeficientes de Fourier. Nosso objetivo será fazer uma aproximação sistemática assistida por computador da construção de cartas locais e um atlas para a variedade $\mathcal{M} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \times B_1 : f(x) = 0\}$.

3.2 Definição dos polinômios radiais

A fim de definir os polinômios radiais, precisamos definir explicitamente os espaços de Banach B_1 e B_2 sob os quais as provas de existência das cartas serão obtidas. Relembrando

que uma solução $x = (p, a)$ de $f(x) = 0$ é composta por um parâmetro $p \in \mathbb{R}^n$ e um vetor de dimensão infinita $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ dos coeficientes (de Fourier ou Chebyshev) da expansão de uma solução de interesse desconhecida a priori.

Considere os pesos ω_k^q com decaimento algébrico q no caso unidimensional definido por

$$\omega_k^q = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ k^q, & \text{se } k > 0, \end{cases}$$

e consideremos o peso d -dimensional com taxa de crescimento $q = (q_1, \dots, q_d)$ dado por

$$\omega_k^q := \prod_{j=1}^d \omega_{k_j}^{q_j},$$

o qual introduz a norma

$$\|x\|_q := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \{\omega_k^q |x_k|\}$$

e o espaço de Banach

$$\Omega^q := \{a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} : \|a\|_q < \infty\} \quad (3.2)$$

que consiste das sequências com decaimento algébrico de sua calda de acordo com a taxa q . Defina os espaços de Banach $B_1 = \Omega^q$ e $B_2 = \Omega^{q'}$ para algumas taxas de decaimento $q, q' \in \mathbb{R}^d$, e seja

$$X := \mathbb{R}^n \times \Omega^q.$$

Dado $x \in X$, denote $x = (p, a)$ onde $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$. Para $x = (p, a) = (p_1, \dots, p_n, a) \in X$, defina a norma sobre X por

$$\|x\|_X := \max\{|p_1|, \dots, |p_n|, \|a\|_q\}.$$

Usando esta construção, $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach. Assuma que $f : X \rightarrow \Omega^{q'}$ é uma função C^ℓ para construir as cartas locais da variedade n -dimensional $\mathcal{M} \subset \{x \in X : f(x) = 0\}$. Consideremos primeiro uma redução finita de f que denotaremos por $f^{(m)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d}$. Essencialmente, $f^{(m)}$ consiste em levar as $n + m_1 \dots m_d$ coordenadas de x nas primeiras $m_1 \dots m_d$ componentes de f . Assuma que, usando um método iterativo de Newton, calculamos n pontos $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d}$ aproximadamente em $\mathcal{M}$, isto é, $f^{(m)}(\bar{x}_i) \approx 0$, $i = 0, \dots, n$ e que $Df^{(m)}(\bar{x}_i) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m_1 \dots m_d}, \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d})$ tenha núcleo de dimensão n , isto é, que tenha posto completo. Para cada $i = 1, \dots, n$, assuma a existência de vetores linearmente independentes $\phi_1^i, \dots, \phi_n^i \in \mathbb{R}^{n+m_1 \dots m_d}$ tais que $Df^{(m)}(\bar{x}_i)\phi_j^i \approx 0$, para $j = 1, \dots, n$ e defina $\bar{\Phi}_i = [\phi_1^i \dots \phi_n^i] \in \mathbb{R}^{n+m_1 \dots m_d} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+m_1 \dots m_d}$, n vezes. Note que, na prática, para $i = 1, \dots, n$, os ϕ_j^i serão vetores

ortonormais (entre si). Como consequência, o plano gerado por $\phi_1^i, \dots, \phi_n^i$ é um plano tangente aproximado $\mathcal{T}_{\bar{x}_i} \mathcal{M}$ da superfície $\mathcal{M}$ no ponto $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, e

$$\begin{pmatrix} Df(\bar{x}_i) \\ \bar{\Phi}_i^T \end{pmatrix} \bar{\Phi}_i \approx \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Defina

$$D := \{s = (s_1, \dots, s_n) : s_1, \dots, s_n \geq 0 \text{ e } s_1 + \dots + s_n \leq 1\}.$$

Assumindo $\bar{x}_1 - \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n - \bar{x}_0$ linearmente independentes, a seguinte parametrização é uma parametrização injetora de um simplexo n -dimensional σ com vértices $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n$:

$$\bar{x}_s := \bar{x}_0 + s_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) + \dots + s_n(\bar{x}_n - \bar{x}_0), s = (s_1, \dots, s_n) \in D.$$

Formalmente, o simplexo é definido como $\sigma := \bigcup_{s \in D} \{\bar{x}_s\}$. Para $\bar{x}_s \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d}$, identificamos $(\bar{x}_s, 0_\infty) \in X$ como $\bar{x}_s$, onde 0_∞ é o vetor de dimensão infinita com todas coordenadas iguais a zero. Considere a interpolação dos núcleos n -dimensionais $\bar{\Phi}_0, \dots, \bar{\Phi}_n$ definida por

$$\bar{\Phi}_s := \bar{\Phi}_0 + s_1(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_0) + \dots + s_n(\bar{\Phi}_n - \bar{\Phi}_0), s = (s_1, \dots, s_n) \in D.$$

Como acima, $\bar{\Phi}_s \in \mathbb{R}^{n+m_1+\dots+m_d} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+m_1+\dots+m_d}$ ou $\bar{\Phi}_s \in X \times X$. Considere $\bar{\Phi}_s^T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$ uma transformação linear entre X e $\mathbb{R}^n$. Defina o espaço de Banach $W = \mathbb{R}^2 \times \Omega^{d'}$ e $\mathcal{F}_s : X \rightarrow W$ por

$$\mathcal{F}_s(x) = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_s^T(x - \bar{x}_s) \\ f(x) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Para um dado $s \in D$, uma solução x de (3.3), se esta existe, é uma projeção de $\bar{x}_s \in \sigma$ sobre $\mathcal{M}$ ortogonalmente a σ .

Lembrando que denotamos os multiíndices por $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ e seu valor absoluto definido por $|k| := (|k_1|, \dots, |k_d|)$. Dados $k, \ell \in \mathbb{Z}^d$, podemos também usar desigualdades componente a componente, por exemplo: $k < \ell$ significa que $k_j < \ell_j$, para cada $j = 1, \dots, d$. Usaremos notações similares para $k \leq \ell$, $k > \ell$, $k \geq \ell$. Também, $m = (m_1, \dots, m_d)$ e $M = (M_1, \dots, M_d)$ são parâmetros computacionais tais que $M \geq m$ e $M_j \geq 6$ para todo $j = 1, \dots, d$. Também denotaremos os conjuntos finitos de índices de tamanhos m e M , respectivamente, por $F_m := \{k \in \mathbb{Z}^d : |k| < m\}$ e $F_M := \{k \in \mathbb{Z}^d : |k| < M\}$. Note que $F_m = F_{m_1} \times \dots \times F_{m_d}$, onde $F_{m_j} := \{k_j \in \mathbb{Z} : |k_j| < m_j\}$. Também temos uma decomposição similar para F_M . Dado $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, denotamos sua parte finita de tamanho m e sua correspondente parte infinita por:

$$x_{F_m} := \{x_k\}_{k \in F_m} \text{ e } x_{I_m} := \{x_k\}_{k \notin F_m}.$$

Assuma que já calculamos, com ajuda de um computador, $A_m \approx (D\mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0))^{-1}$, uma inversa numérica de $D\mathcal{F}_0(\bar{x}_0)$. Mais ainda, assuma que verificamos que A_m é invertível (esta hipótese

pode ser verificada rigorosamente usando aritmética de intervalos). Dado $x \in X$, denote por $x_{F_m} = (p, a_{F_m})$, com $a_{F_m} = \{a_k\}_{k \in F_m}$. Finalmente, definimos o operador linear $A : W \rightarrow X$ por

$$(Ax)_k := \begin{cases} (A_m x_{F_m}), & \text{se } k \in F_m \\ \mu_k^{-1} a_k, & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\mu_k^{-1} \in \mathbb{R}$ a ser determinado posteriormente. Agora assumimos $T_s : X \rightarrow X$ definido por

$$T_s(x) = x - A\mathcal{F}_s(x). \quad (3.5)$$

Denotamos a bola fechada de raio r centrada no ponto $\bar{x}_s$ em X por $B_{\bar{x}_s}(r) = \bar{x}_s + B(r)$, onde

$$B(r) = \{x \in X : \|x\|_X \leq r\} := \prod_{k \in \mathbb{Z}^d} \left[-\frac{r}{\omega_k^s}, \frac{r}{\omega_k^s} \right],$$

é a bola fechada de raio r centrada na origem em X .

A ideia é introduzir os polinômios radiais para encontrar (se possível) um raio positivo (uniforme) r tal que para todo $s \in D$, $T_s : B_{\bar{x}_s} \rightarrow B_{\bar{x}_s}$ seja uma contração. Se tal raio positivo existe, então o operador $\tilde{T} : D \times B(r) \rightarrow B(r)$ definido por $\tilde{T}(s, y) = T_s(y + \bar{x}_s - \bar{x}_s)$ é uma contração uniforme. O princípio de contração uniforme garante então a existência de uma carta local com fronteira precisa dado em termos do raio r .

Defina as estimativas uniformes $Y = \{Y_k\}_{k \geq 0}$ e $Z = Z(r) = \{Z_k\}_{k \geq 0}$ satisfazendo

$$|[T_s(\bar{x}_s) - \bar{x}_s]_k| \leq Y_k, \forall s \in D \quad (3.6)$$

e

$$\sup_{b_1, b_2 \in B(r)} |[DT_s(\bar{x}_s + b_1)b_2]_k| \leq Z_k(r), \forall s \in D. \quad (3.7)$$

Lema 3.1. Considere $s \in D$. Se existe um $r > 0$ tal que $\|Y + Z\|_X < r$, com Y e Z satisfazendo (3.6) e (3.7), respectivamente, então T_s é uma contração sobre $B_{\bar{x}_s}(r)$ com constante de contração no máximo $\|Z\|_X / r < 1$. Mais ainda, existe uma única função C^ℓ , $s \in D \mapsto \tilde{x}(s) \in B_{\bar{x}_s}(r)$, tal que $\mathcal{F}_s(\tilde{x}(s)) = 0$ e $\tilde{x}(s)$ pertence ao interior da bola $B_{\bar{x}_s}(r)$ para todo $s \in D$.

A verificação, na prática, das hipóteses do Lema 3.1 deve ser feita com precisão. Por isto que introduziremos os polinômios radiais, os quais produzem uma maneira eficiente de determinar, quando possível, a existência de um raio positivo tal que as hipóteses do Lema 3.1 sejam satisfeitas. Antes de introduzirmos os polinômios, faremos algumas hipóteses. Assuma que existe um número $M \geq m$, onde m indica a dimensão da projeção finita $f^{(m)}$, tal que as estimativas Y e Z satisfazem (3.6) e (3.7), respectivamente, e são tais que

A1. $Y_k = 0$ para todo $k \notin F_M$.

A2. Existe um polinômio de limitação uniforme $\tilde{Z}_M(r)$ tal que, para todo $k \notin F_M$,

$$Z_k \leq \frac{\tilde{Z}_M(r)}{\omega_k^q}. \quad (3.8)$$

Antes de introduzir os polinômios radiais, vamos fazer alguns comentários sobre as hipóteses **A1.** e **A2.**. Se a equação (3.1) vier de um problema envolvendo não linearidades polinomiais, então os termos não lineares de (3.1) serão somas de convoluções da forma $\left[\bar{a}^{(j_1)} * \dots * \bar{a}^{(j_l)}\right]_k$ as quais serão, eventualmente, iguais a zero para k grande o bastante desde que $\bar{a}_k$ para $k \geq m$. Assim, pela construção de A definida em (3.4) e pela limitação de Y como em (3.6), existe M tal que Y_k pode ser definido como sendo 0 para todo $k \geq M$. Agora, existem algumas estimativas para as convoluções analíticas que permitem o cálculo de $\tilde{Z}_k$ satisfazendo (3.8). Estas estimativas explícitas essencialmente seguem do fato de que o espaço de Banach Ω^q , dado em (3.2), é uma álgebra sob convoluções discretas. O cálculo dos polinômios de estimativa uniforme $\tilde{Z}_k(r)$ será apresentado posteriormente. Introduziremos agora os polinômios radiais.

Definição 3.1. Assuma (3.6), (3.7) e (3.8). Definimos os *polinômios radiais finitos* $\{p_k(r)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ por

$$p_k(r) = Y_k + Z_k(r) - \frac{r}{\omega_k^q}, k \in \mathbb{Z}^d, \quad (3.9)$$

e o *polinômio radial da calda* por

$$p_M = \tilde{Z}_M(r) - r. \quad (3.10)$$

O seguinte resultado justifica a construção dos polinômios radiais na Definição 3.1.

Lema 3.2. Se existe $r > 0$ tal que $p_k(r) < 0$ para todo $0 \leq k \leq M$, então existe uma única função C^ℓ , $s \in D \mapsto \tilde{x}(s) \in B_{\tilde{x}_s}(r)$ tal que $\mathcal{F}_s(\tilde{x}(s)) = 0$ e $\tilde{x}(s)$ pertence ao interior da bola $B_{\tilde{x}_s}(r)$ para todo $s \in D$.

3.3 Construção dos limitantes necessários para os polinômios radiais

Enquanto a construção explícita dos polinômios radiais é um problema dependente da função, apresentamos uma maneira geral para tal construção. Para calcular $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ satisfazendo (3.6), expandimos

$$T_s(\bar{x}_s) - \bar{x}_s = -A \begin{pmatrix} 0 \\ f(\bar{x}_s) \end{pmatrix}$$

como um polinômio nas variáveis $s_1, \dots, s_n$ usando a expansão de Taylor de ordem $n_Y \geq 2$. Para cada $i_1, \dots, i_n \geq 0$, tais que, $2 \leq i_1 + \dots + i_n \leq n_Y$ e para cada $k \in \mathbb{Z}^d$, considere $y_k^{(i_1, \dots, i_n)} = y_k^{(i_1, \dots, i_n)}(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n)$ tais que

$$\begin{aligned} f_k(\bar{x}_s) &= f_k(\bar{x}_0) + s_1 [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)]_k + \dots + s_n [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_n - \bar{x}_0)]_k \\ &\quad + \sum_{\substack{2 \leq i_1 + \dots + i_n \leq n_Y \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} y_k^{(i_1, \dots, i_n)} s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Disto e usando o fato que $|s_1|, \dots, |s_n| \leq 1$, assumamos que obtemos rigorosamente estimativas superiores $Y_k^{(i_1, \dots, i_n)}$ para os termos $|y_k^{(i_1, \dots, i_n)}|$. Portanto, colocando $Y_{F_m} = \{Y_k\}_{k \in F_m}$ como

$$\begin{aligned} Y_{F_m} &= |A_m| (|f(\bar{x}_0)|_{F_m} + |f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)|_{F_m} + \dots + |f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_n - \bar{x}_0)|_{F_m}) \\ &\quad + |A_m| \left(\sum_{\substack{2 \leq i_1 + \dots + i_n \leq n_Y \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} Y_{F_m}^{(i_1, \dots, i_n)} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Da hipótese **A1**, $Y_k = 0$ para todo $k \notin F_m$, para algum $M \geq m$. Para $k \in F_m \setminus F_M$, definimos

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{|\mu_k|} (f_k(\bar{x}_0) + |f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)|_k + \dots + |f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_n - \bar{x}_0)|_k) \\ &\quad + \frac{1}{|\mu_k|} \left(\sum_{\substack{2 \leq i_1 + \dots + i_n \leq n_Y \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} Y_k^{(i_1, \dots, i_n)} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Agora nos voltamos para o cálculo de $Z(r) = \{Z_k(r)\}_{k \geq 0}$ satisfazendo (3.7). Para simplificar as contas, defina o operador linear $A^\dagger : X \rightarrow W$ por

$$(A^\dagger x)_k := \begin{cases} [D\mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0)x_{F_m}]_k, & \text{se } k \in F_m \\ \mu_k a_k, & \text{se } k \notin F_m. \end{cases}$$

Considere $b_1, b_2 \in B(r)$ e expanda

$$\begin{aligned} DT_s(\bar{x}_s + b_1)b_2 &= [I - AD\mathcal{F}_s(\bar{x}_s + b_1)]b_2 \\ &= [I - AA^\dagger]b_2 - A[D\mathcal{F}_s(\bar{x}_s + b_1)b_2 - A^\dagger b_2], \end{aligned}$$

onde o primeiro termo é esperado ser pequeno, pois A_m é uma boa aproximação da inversa de $D\mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0)$. A ideia é calcular a expansão de Taylor do outro termo $D\mathcal{F}_s(\bar{x}_s + b_1)b_2 - A^\dagger b_2$ nas variáveis $s_1, \dots, s_n$ e r . Escolha uma expansão de Taylor de ordem n_Z . Seja $b_1 = (p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)}, a^{(1)})$ e $b_2 = (p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)}, a^{(2)})$, considere $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in B(1)$ tais que $b_1 = \tilde{b}_1 r$ e $b_2 = \tilde{b}_2 r$, e denote $\tilde{b}_1 = (\tilde{p}_1^{(1)}, \dots, \tilde{p}_n^{(1)}, \tilde{a}^{(1)})$ e $\tilde{b}_2 = (\tilde{p}_1^{(2)}, \dots, \tilde{p}_n^{(2)}, \tilde{a}^{(2)})$. Assim, considere $z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)} = z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n, \bar{\Phi}_0, \dots, \bar{\Phi}_n)$ tal que

$$\begin{aligned} [D\mathcal{F}(\bar{x}_s + b_1)b_2 - A^\dagger b_2]_k &= [D\mathcal{F}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r)\tilde{b}_2 r - A^\dagger \tilde{b}_2 r]_k \\ &= \sum_{\ell=1}^{n_Z} \left(\sum_{0 \leq i_1 + \dots + i_n \leq n_Z + 1 - \ell} z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)} s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} \right) r^\ell. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assuma que existam limitantes $Z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)} = Z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n, \bar{\Phi}_0, \dots, \bar{\Phi}_n)$ tais que, $Z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)} \geq |z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)}|$ e também que podemos calcular estimativas

$$Z_k^\ell = Z_k^{(\ell)}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n, \bar{\Phi}_0, \dots, \bar{\Phi}_n)$$

de forma que

$$\left| \sum_{0 \leq i_1 + \dots + i_n \leq n_Z + 1 - \ell} Z_k^{(\ell, i_1, \dots, i_n)} \right| \leq Z_k^\ell.$$

Assim, usando o fato de que $|s_1|, \dots, |s_n| \leq 1$ e $|(\tilde{b}_1)_k|, |(\tilde{b}_2)_k| \leq \omega_k^{-q}$ definimos então $Z_{F_m}(r) = \{Z_k\}_{k \in F_m}$ como

$$Z_{F_m}(r) = \left(\left| I - A_m D \mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0) \right| \omega_{F_m}^{-q} \right) r + \sum_{\ell=1}^{n_Z} |A_m Z_{F_m}^\ell| r^\ell, \quad (3.15)$$

onde $\omega_{F_m}^{-q} := \left\{ \frac{1}{\omega_k^q} \right\}_{k \in F_m}$.

Da hipótese **A2.**, existe um polinômio de limitação uniforme $\tilde{Z}_M(r)$ tal que, para todo $k \in F_M$, (3.8) é satisfeita. Para $k \in F_M \setminus F_m$, defina

$$Z_k(r) = \sum_{\ell=1}^{n_Z} \frac{1}{|\mu_k|} Z_k^{(\ell)} r^\ell. \quad (3.16)$$

Combinando (3.12), (3.16), (3.15) e (3.8) temos todos os ingredientes para a construção do polinômio radial (3.9) da Definição 3.1.

3.4 Algoritmo de Continuação Multiparâmetro

Nosso objetivo é calcular uma aproximação simplicial (triangulação) de uma porção de uma variedade de dimensão maior ou igual a dois, implicitamente definida por uma equação não linear de dimensão infinita sobre X . Para executar tais cálculos, uma projeção de dimensão finita deve ser considerada. Ou seja, precisamos calcular a triangulação da variedade imersa no $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M} \subset \{x \in X : F(x) = 0, \text{ com } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n = m + p, p \geq 2\}$$

onde vemos F como a função $f^{(m)}$ definida na seção anterior, para algum $m \in \mathbb{N}$. Para simplificar a apresentação, usaremos a mesma notação $\mathcal{M}$ para denotar a variedade imersa no $\mathbb{R}^n$ e a variedade imersa no espaço de Banach de dimensão infinita.

Existem vários métodos para a construção numérica de variedades multidimensionais implicitamente definidas por equações não lineares, como métodos simpliciais e métodos preditor-corretor. O método preditor-corretor é mais favorável no caso de variedades de pequenas dimensões imersas em um espaço de dimensão alta, que é o caso de nosso interesse. O método

de continuação rigorosa para parâmetro unidimensional do preditor-corretor é apresentado nos artigos (BERG; LESSARD; MISCHAIKOW, 2010; GAMEIRO; LESSARD, 2011b), para o caso de parâmetros bidimensionais no artigo (GAMEIRO; LESSARD; PUGLIESE, 2015). Nesta seção vamos apresentar o caso geral do preditor-corretor de parâmetros d -dimensionais baseado na proposta de Brodzik (BRODZIK, 1998), fazendo algumas mudanças para nosso objetivo final. A seguir descreveremos os passos do método computacional.

3.4.1 Construção do Primeiro Patch

A construção do primeiro patch se inicia com um ponto inicial dado pelo usuário $x_0 \in X$, o qual não precisa necessariamente estar em $\mathcal{M}$. Consideramos um simplexo inicial centrado em x_0 no plano tangente $\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M}$, um tetraedro no caso tridimensional, onde cada vértice v_i , $i = 1, \dots, p$ do simplexo está a uma distância h_0 de x_0 , onde h_0 também é dado pelo usuário. Cada simplexo é projetado em $\mathcal{M}$ ortogonalmente a $\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M}$. Tal projeção é feita via um método de Gauss-Newton.

Em (BRODZIK, 1998), o autor propõe iniciar a triangulação com o p -simplexo $\sigma[z_0, \dots, z_{p-1}]$ com vértices

$$z_0 = 0, \quad z_k = \frac{h}{\sqrt{p}}(z_{k-1} + e^k), \quad k = 1, \dots, p$$

onde h é o tamanho do passo e $\{e^1, \dots, e^p\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^p$.

Com hipóteses apropriadas sobre DF , o conjunto solução $\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$ é uma variedade suave (ou coleção de variedades suaves). Estamos interessados no cálculo da triangulação de uma porção do conjunto solução que está dentro de uma região limitada B de $\mathbb{R}^n$.

Cada vértice v_i é projetado de forma sobrejetora em $\mathcal{M}$ ortogonalmente a $\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M}$. Esta projeção é feita via método de Gauss-Newton. Para $x^{(0)} = v_1, \dots, v_p$, iteramos

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - DF(x_0)^\dagger DF(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.17)$$

até convergir, onde $DF(x_0)^\dagger = DF(x_0)^T (DF(x_0)DF(x_0)^T)^{-1}$ é a pseudoinversa Moore-Penrose de $DF(x_0)$. Declaramos sucesso na convergência quando

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < tol (1 + \|x^0\|)$$

em um número máximo de iterações, e tol é uma tolerância pré-definida.

A implementação segue utilizando as ideias de (BRODZIK, 1998) e (BRODZIK; RHEIN-BOLDT, 1994). Seja

$$DF(x_0)^T = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

sendo a fatoração QR de $DF(x_0)^T$, com $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, tendo mutuamente colunas ortogonais, e com $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sendo triangular superior. Como já mencionado, sempre assumimos $DF(\cdot)$ tendo posto completo em cada vértice calculado de $\mathcal{M}$. Em particular, $DF(x_0)$ ter posto completo, implica que R é invertível. Assim, as iterações (3.17) são implementadas como segue.

$$\text{resolva } R z^{(k)} = F(x^{(k)}) \quad \text{com } x^{(k+1)} = x^{(k)} - Q_1 z^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.19)$$

Note que as colunas de Q_2 formam uma base ortogonal para $\ker(DF(x_0))$, o qual gera $\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M}$. E assim também temos que as iteradas em (3.19) seguem em direção perpendicular a $\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M}$. O cálculo da decomposição em (3.18) será nossa única fonte de partida para a base ortogonal dos espaços tangentes. Se a projeção falhar para algum vértice v_i , então a distância de x_0 será reduzida por um fator fixo $\tau > 1$, ou seja, h será trocado por $h = h/\tau$, e a projeção será refeita até que a convergência tenha sucesso ou uma distância mínima $h_{\min}$ seja encontrada. Assumimos sucesso na convergência para todos os vértices, simplexos, e os novos nós serão calculados. Antes de adicionar ao banco de dados, cada simplexo precisa passar por uma verificação específica. Se tal verificação falhar, as novas arestas do simplexo que são conectadas a x_0 são reduzidas novamente por τ e a verificação é feita novamente até que se obtenha um resultado positivo ou quando $h_{\min}$ é encontrado. Assumindo êxito na verificação de cada simplexo, os mesmos serão adicionados ao banco de dados e declarados com esta propriedade. Uma vez adicionado no banco de dados, cada nó é marcado como sendo interior se está em B e exterior caso contrário. Dentre os nós interiores, temos os que estão no interior da fronteira da porção de $\mathcal{M}$ que ainda precisa ser explorada e caracterizá-las como frontal. Simplexos que estejam ligados a um nó frontal também será caracterizado como frontal.

Até aqui o banco de dados contém os nós e os simplexos iniciais, no caso tridimensional tetraedros, e também, todos os nós, exceto x_0 são frontais. Estes dez simplexos constituem o primeiro patch da triangulação (ver Figura (1)). Após o cálculo do primeiro patch, procuramos o

Figura 1 – Primeiro patch em dimensão três.

próximo nó frontal, x_c , utilizamos uma função chamada 'NextFrontalNode', e seus simplexos incidentes. Feito isso, precisamos calcular o chamado 'ângulo gap'. Para isso, encontramos a 'vizinhança menor' relativo a x_c , dizendo quais simplexos possuem face aberta ou não. Normalizamos os vértices incidentes a x_c , projetamos a vizinhança menor que possui face aberta na

variedade e encontramos o conjunto dos simplexos 'gap' a partir da função 'encontrar-gap', baseado no artigo (BRODZIK, 1998). Como x_c já estava no banco de dados, conhecemos a sua vizinhança, que é uma triangulação parcial $\tilde{\mathcal{T}}_c$. A parte da triangulação que ainda não foi calculada é chamada de 'gap'. Para encontrar o 'gap', iniciamos com um subconjunto T da triangulação $\mathcal{T}$ do conjunto V dos pontos de faces abertas incidentes à x_c , em coordenadas locais, e estes vértices de $\mathcal{T}_{ref}$ que estão no 'gap'.

Assim, T será um subconjunto de $\mathcal{T}$ se a origem $0 \in \mathbb{R}^p$ estiver no interior do conjunto convexo de V , neste caso a interseção de $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_c$, em coordenadas locais, terá interior não vazio.

A construção de T segue definindo o conjunto

$$S_c = \{\sigma_p^{j_i} \in Simp | x_c \in \sigma_p^{j_i}, i = 1, \dots, n_{S_c}\}$$

dos n_{S_c} p-simplexos que são incidentes à x_c , logo define a triangulação parcial $\tilde{\mathcal{T}}_c$. O conjunto

$$V_c = \{x_{k_i} \in Nos | x_{k_i} \in \tilde{\mathcal{T}}_c, x_{k_i} \neq x_c, i = 1, \dots, n_{V_c}\}$$

dos vértices em $\tilde{\mathcal{T}}_c$ diferentes de x_c , e o conjunto

$$F_c = \{\sigma_{p-1}^{l_i} \in Faces | \sigma_{p-1}^{l_i} \in \tilde{\mathcal{T}}_c, s_2 = 0, x_c \in \sigma_{p-1}^{l_i}, i = 1, \dots, n_{F_c}\}$$

das n_{F_c} faces abertas incidentes a x_c . Tomamos $\hat{V}_c \subset V_c$ como o conjunto dos vértices das faces abertas em F_c , diferentes de x_c . Definimos os conjuntos

$$Z := \{\tilde{z}^i / (\|\tilde{z}^i\|) : \tilde{z}^i \text{ é um vértice não nulo de } \mathcal{T}^{ref}\}$$

como o conjunto $\mathcal{T}^{ref}$ normalizado,

$$Y := \{y^i = U^T(x^{k_i} - x^c) / \|U^T(x^{k_i} - x^c)\| : i = 1, \dots, n_{V_c}\}$$

os n_{V_c} vetores em coordenadas locais normalizados dos vértices de $\tilde{\mathcal{T}}_c$ que são incidentes com x_c e o conjunto

$$\hat{Y} = \{y = U^T(x - x^c) / \|U^T(x - x^c)\| \in Y : x \in \hat{V}_c\}$$

são os vértices de face aberta normalizados em coordenadas locais. Continuando o processo de encontrar o gap, procuramos $u \in Z$ e $v \in \hat{Y}$ que satisfazem a condição

$$u^T v = \max_{\tilde{u} \in Z, \tilde{v} \in \hat{Y}} \tilde{u}^T \tilde{v}$$

do menor ângulo α entre todos os pares $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$, com $\tilde{u} \in Z$ e $\tilde{v} \in \hat{Y}$. O algoritmo RotMat encontra a matriz $p \times p$ de rotação A que rotaciona u à v com relação ao ângulo α , isto é, $Au = v$. Aplicando A em Z , obtemos

$$Z_\alpha := \{z = A\tilde{z}, \forall \tilde{z} \in Z\}$$

obtemos Z rotacionado. Seja $\mathcal{T}_\alpha^{ref}$ a triangulação referência rotacionada e normalizada. O conjunto $\mathcal{T}_\alpha^{ref}$ é a triangulação dos vértices $\{0 \in \mathbb{R}^p \cup Z_\alpha\}$ o qual herda o padrão de conectividade de $\mathcal{T}^{ref}$. Denotamos $\tilde{T}_0$ como a triangulação parcial, em coordenadas locais do espaço, cujos vértices $\{0 \in \mathbb{R}^p\} \cup Y$ herdam o padrão de conectividade de $\tilde{T}_c$. Definimos também o conjunto F_0 das faces abertas de $\tilde{T}_0$ que são incidentes com $0 \in \mathbb{R}^p$.

Agora selecionamos um subconjunto $Z_{gap} \subset Z_\alpha$ o qual está contido no 'gap' por eliminação em duas etapas, o complemento de Z_{gap} relativo a Z_α , como segue. A primeira etapa chama o algoritmo DelPts1 que constroi o conjunto $Z_1 \subset Z_\alpha$ dos vértices de Z_α que não está na circunferência de nenhum p -simplexo em $\tilde{\mathcal{T}}_0$. Para isto, DelPts1 chama CSpher o qual calcula o centro c e o raio r da circunferência dada pelo conjunto de pontos $\{w^0, \dots, w^p\} \in \mathbb{R}^p$

$$(c - w^0)^T(c - w^0) - (c - w^i)^T(c - w^i) = 0, i = 1, \dots, p.$$

Na segunda etapa de eliminação, o algoritmo DelPts2 chama o algoritmo Condit que calcula o número de condição $\kappa = \kappa(z, w^1, \dots, w^p)$ sobre as $p + 1$ possíveis matrizes $p \times p$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} w^1 - z & \dots & w^p - z \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} z - w^j & w^1 - w^j & \dots & w^{j-1} - w^j & w^{j+1} - w^j & \dots & w^p - w^j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, p-1, \\ & \begin{pmatrix} z - w^p & w^1 - w^p & \dots & w^{p-1} - w^p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este κ é considerado o máximo valor κ_{max} aceitável, o qual é um valor múltiplo de $\kappa(v^0, \dots, v^p)$, como descrito acima, de todos os p -simplexos $\sigma[v^0, \dots, v^p]$ em $\mathcal{T}^{ref}$. Para cada face aberta $\sigma_{p-1}[w^1, \dots, w^p] \in F_0$, DelPts2 encontra um vértice $w^0 \in Z_1$ tal que a circunferência do simplexo $\sigma = \text{conv}(\sigma_{p-1} \cup \{w^0\})$ contenha nenhum outro vértice de Z_1 . Se $\kappa(w^0, w^1, \dots, w^p) > \kappa_{max}$, então Z_1 é reduzido à $Z_1 := Z_1 \setminus \{w^0\}$. Este processo é repetido para a mesma face aberta até que se tenha $\kappa < \kappa_{max}$, quando isso acontecer, teremos $Z_{gap} := Z_1$.

Aplicamos o *AlgoritmoW* que constrói uma triangulação Delaunay p -dimensional $\mathcal{T}_{gap}$ dos pontos do conjunto $V_{gap} := \{0 \in \mathbb{R}^p\} \cup \hat{Y} \cup Z_{gap}$. Para o simplexo $\mathcal{T}_{gap}$ ser compatível com o $\tilde{\mathcal{T}}_0$, é necessário que todos conttenham 0 como vértice. Por construção, os pontos de $V_{gap} \setminus \{0\}$ estão em uma $(p-1)$ -esfera $S^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$ centrada em 0.

Se a interseção de dois simplexos distintos for diferente de vazio, deletamos do $\mathcal{T}_{gap}$ cada p -simplexo $\sigma \in \mathcal{T}_{gap}$ cujo baricentro está contido em algum poliedro associado com um $\tilde{\sigma}_p \in \tilde{\mathcal{T}}_0$ como segue. Para cada p -simplexo $\tilde{\sigma}_p \in \tilde{\mathcal{T}}_0$ e cada face $\tilde{\sigma}_{p-1} \in \tilde{\sigma}_p$, defina o hiperplano $H_{\tilde{\sigma}_{p-1}} = \text{aff}(\tilde{\sigma}_{p-1})$, e seja $S_{\tilde{\sigma}_{p-1}}$ denotando o espaço cuja borda é $H_{\tilde{\sigma}_{p-1}}$ e cada $\tilde{\sigma}_p \subset S_{\tilde{\sigma}_{p-1}}$. Para cada $\tilde{\sigma}_p \in \tilde{\mathcal{T}}_0$, defina o conjunto

$$P_{\tilde{\sigma}_p} = \bigcap \{S_{\tilde{\sigma}_{p-1}} | \tilde{\sigma}_{p-1} \text{ é uma face de } \tilde{\sigma}_p \text{ e } 0 \in \tilde{\sigma}_{p-1}\}$$

Assim, $P_{\tilde{\sigma}_p}$ é um cone com vértice 0. O algoritmo DelSim1 deleta de $\mathcal{T}_{gap}$ cada p -simplexo σ cujo caricentro $b \in P_{\tilde{\sigma}_p}$, para algum $\tilde{\sigma}_p \in \tilde{\mathcal{T}}_0$.

Agora restauramos os tamanhos originais de todos os conjuntos restantes em $\tilde{\mathcal{T}}_0 \cup \tilde{\mathcal{T}}_{gap}$. Mais especificamente, para cada $z^i \in Z_{gap}$ fazemos $z^i := z^i / \|z^i\|$, $i = 1, \dots, n_{ref}$, para cada $y^i \in Y$, fazemos $y^i := y^i / \|(U^c)^T(x^{k_1} - x^c)\|$, $i = 1, \dots, n_{V_c}$ e também para $\hat{Y} \subset Y$.

Até este ponto, ainda é possível que algum novo p -simplexo $\sigma_p \in \mathcal{T}_{gap}$ tem alguma relação com o número de condição κ , o qual se for inaceitavelmente grande, indica que σ_p está mal formado. Isto acontecerá somente quando nenhum de seus vértices estão em Z_{gap} , pois DelPts2 previne a criação dos simplexos com má formação para os simplexos em potencial conterem um vértice de Z_{gap} . Todos os simplexos mal formados contendo nenhum vértice de Z_{gap} , tipicamente ocorrem quando uma porção do 'gap' é muito limitado.

O algoritmo DelSimp2 funciona como segue. Para todo simplexo $\sigma_p \in \mathcal{T}_{gap}$ que não contém um vértice em Z_{gap} , DelSim2 usa Condit para decidir quando ou não σ_p é mal formado. Se o for, ele seleciona dois vértices não nulos $y^i \in \sigma_p$ e $y^j \in \sigma_p$ para comparar e chama o algoritmo TESTS para checar quando ou não a comparação desdes dois vértices poderá destruir ou piorar o complexo simplicial. Se o complexo simplicial puder ser estragado ou se algum outro simplexo puder ser mal formado, outro par de vértices não nulos de σ_p é escolhido e o teste se repete. Por outro lado, o algoritmo performa todas as possibilidades, no banco de dados e nos dados estocados temporariamente, os quais juntos arruinam σ_p ao longo da aresta $y^i y^j$. Especificamente, as variedades $x^i = x^c + U^c y^i$ e $x^j = x^c + U^c y^j$ são trocadas no banco de dados pela projeção de x de $\frac{x^i + x^j}{2}$ em M , e o nó do novo ponto x é tomado como sendo o mínimo de x^i e x^j . Cada simplexo e face que contém a aresta $x^i x^j$ é deletada do banco de dados. Na estocação temporária, y^i é trocado por $(U^c)^T(x - x^c)$ pontod de $\hat{Y}$, y^j é deletado de $\hat{Y}$ e $\tilde{\mathcal{T}}_0$ e $\mathcal{T}_{gap}$ são atualizados com a eliminação de σ_p . A construção do $\mathcal{T}_{gap}$, no espaço de coordenadas locais, está completa.

Para determinar se há ou não sobreposição de simplexos ou incompatibilidade e completar a triangulação, utilizamos o algoritmo como em (BRODZIK, 1998).

A seguir, os algoritmos utilizados na implementação da construção da triangulação.

3.4.1.1 Algoritmos

Os algoritmos de construção da triangulação computacional seguem como descritos a seguir.

O primeiro é o algoritmo principal, ou seja, este algoritmo chama todos os demais para formar a triangulação completa.

Algorithm 1: Principal

Result: Banco de dados contendo vértices, faces e simplexes da triangulação de $\mathcal{M}$.

Com cada vértice pertencente à uma base do espaço tangente e também armazenado.

Inicialização;

PrimeiroPatch;

Configuração da triangulação;

Tipos de triangulação;

Vizinhanças Compatíveis;

Completamento da Vizinhança

O segundo algoritmo inicializa todo o processo, ou seja, ele chama o ponto inicial x_0 , dimensão de x_0 igual à n , dimensão da variedade igual à p , tamanho do passo igual à h , h_{min} é o tamanho do passo mínimo aceitável, n_h é o número total de hiperplanos vizinhos, j_{max} , C_k , tol e nos dá a vizinhança de x_0 , e a triangulação inicial $\mathcal{T}_0$.

Algorithm 2: Inicialização

Data: Ponto inicial x_0 , dimensão de x_0 igual à n , dimensão da variedade igual à p , tamanho do passo igual à h , h_{min} é o tamanho do passo mínimo aceitável, n_h é o número total de hiperplanos vizinhos, j_{max} , C_k , tol .

Result: Vizinhança do ponto inicial, Triangulação inicial.

```
// Criação da vizinhança do ponto inicial
DF[x0] ; // Calcula a Jacobiana DF(x0) de F em x0
DF(x0)TP = (Q1, Q2)  $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$  ; // Encontra a decomposição QR
xm := ProjM[x0, z, R, I, P, jmax, tol, l, F] ; // Projeta x0 em  $\mathcal{M}$ 
dmin := Chklim[xm, nh] ; // Checa se xm ∈  $\mathcal{M}_0$ , i.é, se dmin > 0
if dmin < 0 then
  | error return;
end
Adiciona xm ao banco de dados;
DF(xm)TP = (Q1, U)  $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$  ; // Encontra a decomposição QR
 $\tilde{z}^0 := 0 \in \mathbb{R}^p$ ;  $\tilde{z}^k = (h/\sqrt{p})(\tilde{z}^{k-1} + e^k)$ , k = 1, ..., p ; // Primeiro simplexo em  $\mathbb{R}^p$ 
 $\kappa_{max} := Cond[\tilde{z}^0, \dots, \tilde{z}^p]$ ;
 $\mathcal{T}^{ref} := Ref[p, \sigma[\tilde{z}^0, \dots, \tilde{z}^p]]$  ; // Encontra a triangulação refinada de  $\mathcal{T}^{ref}$ 
```

O algoritmo a seguir calcula o número de condição máximo aceitável κ_{max} com relação ao simplexo $\sigma_p[v^0, \dots, v^p]$, onde $v^0, \dots, v^p \in \mathcal{T}_0$. ProjMh encontra a projeção x^1 de $x^m + U\tilde{z}^1$ sobre $\mathcal{M}$ e ajusta h . Projeta $x^m + Uv^i$ em $\mathcal{M}$, armazena a vizinhança de $(p+1)!$ simplexos de x^m no banco de dados, removendo x^m da face aberta. Reatualiza os tipos de nós finalizando o

primeiro 'patch'.

Algorithm 3: PrimeiroPatch

```

Data:  $\mathcal{T}_0$ 
for  $\sigma_p[v^0, \dots, v^p] \in \mathcal{T}^{ref}$  do
  |  $\kappa_{max} := \max(\kappa_{max}, CONDIT[v^0, \dots, v^p])$ 
end
 $\kappa_{max} := C_k \times \kappa_{max}$ ;
ProjMh[ $\tilde{z}^1, x^m, h, h_{min}, R, Q_1, U, P, j_{max}, \text{tol}, F, DF, n_h, x^1, \text{nodtype}^1, k^1$ ];
for vértice não nulo  $v^i \in \mathcal{T}^{ref}$ ,  $v^i \neq v^1 := \tilde{z}^1$  do
  | ProjMh[ $v^i, x^m, h, h_{min}, R, Q_1, U, P, j_{max}, \text{tol}, F, DF, n_h, x^i, \text{nodtype}^i, k^i$ ]
end
done := falso;
while done = falso do
  | Open(Centers); // Abre temporariamente a relação dos pontos frontais
  | if Centers é vazio then
  | | done = verdadeiro
  | else
  | | Chama Tipos de Nós e Processo de Finalização
  | end
end

```

A partir do primeiro patch, encontrado no algoritmo anterior, o próximo algoritmo encontra o próximo nó frontal com o algoritmo ProxNo, e calcula os vértices do gap. Para esse novo nó, calcula a matriz Jacobiana, a decomposição QR da mesma, os simplexos incidentes, os vértices incidentes e faces abertas incidentes. Z é $\mathcal{T}_{ref}$ normalizado, Y é V_c em coordenadas

locais, $\hat{Y}$ é $\hat{V}_c$ em coordenadas locais e rotaciona todos os $\bar{z} \in Z$ em relação ao conjunto $\hat{Y}$.

Algorithm 4: Configuração da triangulação

```

while Centers é não vazio do
  | Cálculo do gap
end
ProxNo[ $n_c, x^c$ ] ;
DFCT[ $x^c, DF(x^c)$ ] ;
 $DF(x^c)^T P = (Q^1, U) \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$  ; // Decomposição QR de  $DF(x^c)$ 
 $S_c = \{\sigma_p^{j_i} : i = 1, \dots, n_{S_c}\} \subset \tilde{\mathcal{T}}_c$  ; // Simplexos incidentes à  $x^c$ 
 $V_c = \{x^{k_i} \neq x^c : i = 1, \dots, n_{V_c}\}$  ; // Vértices incidentes à  $x^c$ 
 $F_c = \{\sigma_{p-1}^i : i = 1, \dots, n_{F_c}\} \subset \tilde{\mathcal{T}}_c$  ; // Faces Abertas Incidentes à  $x^c$ 
 $\hat{V}_c := \{v \in V_c : v \in \sigma_{p-1}, \text{ para algum } \sigma_{p-1} \in F_c\}$  ; // Separa os vértices das
// faces abertas
 $Z := \{\tilde{z}^i / (\|\tilde{z}^i\|) : \tilde{z}^i \text{ é um vértice não nulo de } \mathcal{T}^{ref}\}$  ;
 $Y := \{y^i = U^T(x^{k_i} - x^c) / \|U^T(x^{k_i} - x^c)\| : i = 1, \dots, n_{V_c}\}$  ;
 $\hat{Y} = \{y = U^T(x - x^c) / \|U^T(x - x^c)\| \in Y : x \in \hat{V}_c\}$  ;
 $u^T v = \max_{\tilde{u} \in Z, \tilde{v} \in \hat{Y}} \tilde{u}^T \tilde{v}$  ;
A := RotMat[ $u, v, \max \cos$ ] ; // Matriz de rotação
 $Z_\alpha := \{z = A\bar{z}, \forall \bar{z} \in Z\}$  ;

```

Agora classificamos a triangulação como $\mathcal{T}_\alpha^{ref}$ que é o $\mathcal{T}^{ref}$ rotacionado e normalizado, $\tilde{\mathcal{T}}_0$ como $\tilde{\mathcal{T}}_c$ normalizado em coordenadas locais e F_0 é o conjunto das faces abertas de $\tilde{\mathcal{T}}_0$ que são incidentes com 0. Feito isso, aplicamos DelPts1 em $\tilde{\mathcal{T}}_0$ e Z_α para encontra o subconjunto $Z_1 \subset Z_\alpha$ que são os pontos que não estão em nenhuma circunferência de $\tilde{\mathcal{T}}_0$. DelPts2 encontra os pontos gap aceitáveis. Assim, aplicamos o ALGORITHMW para obtenção da triangulação delaunay $\mathcal{T}_{gap}$ de V_{gap} .

Com isso, estamos aptos à aplicar o VerifySimplex em cada vértice de $\mathcal{T}_{gap}$.

Algorithm 5: Tipos de Triangulação

```

 $\mathcal{T}_\alpha^{ref}$  que é o  $\mathcal{T}^{ref}$  rotacionado e normalizado;
 $\tilde{\mathcal{T}}_0$  que é o  $\tilde{\mathcal{T}}_c$  normalizado em coordenadas locais;
 $F_0$  o conjunto das faces abertas de  $\tilde{\mathcal{T}}_0$  que são incidentes com 0 ;
 $Z_1 := \text{DelPts1}[\tilde{\mathcal{T}}_0, Z_\alpha, \text{tolerância}]$  ; // Encontra o subconjunto  $Z_1 \subset Z_\alpha$ 
 $Z_{gap} := \text{DelPts2}[F_0, Z_1, \text{tol}, \kappa_{max}]$  ; // Encontra pontos gap aceitáveis
 $\mathcal{T}_{gap} := \text{ALGORITHM W}[V_{gap} := \{0\} \cup \hat{Y} \cup Z_{gap}]$  ; // Encontra a triangulação
// delaunay  $\mathcal{T}_{gap}$  de  $V_{gap}$ 
VerifySimplex( $\mathcal{T}_{gap}$ );

```

O seguinte algoritmo calcula os limitantes definidos nas equações (3.6) e (3.7), define

os polinômios radiais e verifica se existe um raio r positivo tal que as hipóteses do Lema 3.1 são satisfeitas.

Algorithm 6: VerifySimplex

Data: (3.6),(3.7),(3.10), $m, r, \mathcal{T}$
for $k=1:m$ **do**
 | $p_k(r) = Y_k + Z_k(r) - \frac{r}{\omega_k^q}$
end
 $p_M(r) = \tilde{Z}_M(r) - r$;
 $p(r) = (p_1(r), \dots, p_m(r), p_M(r))$;
 $\text{sol} = \text{falso}$;
if $p(r) < 0$ **then**
 | $\text{sol} = \text{true}$;
 | retorna r ;
end

O próximo algoritmo deleta de $\mathcal{T}_{gap}$ todos os σ_p que são sobrepostos à algum $\tilde{\sigma}_p \in \tilde{\mathcal{T}}_0$, restaura os tamanhos originais de Y e de $z^i \in Z_{gap}$. Com o uso de DelSim2, deleta os p-simplexos mal formados de $\mathcal{T}_{gap}$. O TestOver é utilizado para detecção de sobreposições e incompatibilidades. Se forem compatíveis, ele completa a vizinhança do nó.

Algorithm 7: Vizinhanças Compatíveis

DelSimp1[$\mathcal{T}_{gap}, \tilde{\mathcal{T}}_0$];
 $y^i := y^i \|U^T(x^{k_i} - x^c)\|, \forall y^i \in Y$;
 $z^i := z^i \|\tilde{z}^i\|, \forall y^i \in Y$;
 $\mathcal{T}_{gap} := \text{DelSimp2}[x^c, R, Q_1, U, P, j_{max}, \text{tolerâncias}, \mathcal{T}_{gap}, p, Z_{gap}, \kappa_{max}]$;
 $\text{over} := \text{TestOver}[x^c, U, \tilde{\mathcal{T}}_c, \text{det}^{ref}, \mathcal{T}_{gap}, n_g, r, \epsilon_0, \epsilon_g, \epsilon_s]$;
if $\text{over} \geq 0$ e $\tilde{\mathbb{T}}_0$ e $\mathbb{T}_{gap}$ são compatíveis **then**
 | Completamento da Vizinhança do Nó Frontal
end

O seguinte algoritmo utiliza o ProjM para encontrar a projeção x^i de $x^c + Uz^i$ em M para

cada i . E repete o processo com outro nó na fronteira até que todos os nós se tornarem internos.

Algorithm 8: Completamento da Vizinhança

for $z^i \in Z_{gap}$ **do**
 | ProjM[$z^i, x^c, h, h_{min}, R, Q_1, U, P, j_{max}, tol, F, DF, n_h, x^i, nodtyp^i, k^i$]
end
Armazena os pontos projetados $\{x^i\}$ e as novas faces no banco de dados;
Calcula os simplexes característicos dos novos vértices;
Armazena os novos simplexes e a nova base U de $T_{x^c}M$ no banco de dados;
Remove x^c da fronteira;
Atualiza os tipos de vértices como menor que -1;

VARIEDADES DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA A EQUAÇÃO DE CAHN-HILLIARD

Neste capítulo, estamos interessados na aplicação dos polinômios radiais introduzidos no Capítulo 3, a aplicação será feita na Equação de Cahn-Hilliard como segue.

Considere a equação de Cahn-Hilliard

$$\begin{cases} u_t = -\Delta(\varepsilon^2 \Delta u + u - u^3), & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

definido em um domínio retangular $\Omega = \prod_{j=1}^d [0, l_j] \subset \mathbb{R}^d$, com $u = u(y, t) = u(y_1, \dots, y_d, t)$. Aqui, $\varepsilon > 0$ modela o tamanho da iteração e ν denota o vetor normal exterior unitário à $\partial\Omega$, isto é, existem condições de contorno de ausência de fluxo para ambos u e Δu . A equação (4.1) foi introduzida como modelo para separação de fase em ligas binárias. Fazendo uma mudança de coordenadas $\lambda := 1/\varepsilon^2 > 0$, os equilíbrios de (4.1) são dados pelas soluções do problema de valor de fronteira elíptico

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} \Delta u + u - u^3 = c, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

o qual introduz o parâmetro

$$c := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u - u^3) dy. \quad (4.3)$$

Lembrando que temos condições de Newmann na fronteira, podemos expandir as soluções de (4.2) em termos da base de Fourier $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, dada por

$$\psi_k(y) := \prod_{j=1}^d \cos(k_j L_j y_j),$$

onde $L_j = \pi/l_j$, $j = 1, \dots, d$ e $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

Assim, usamos a expansão

$$u(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \psi_k(y),$$

onde $a_k \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}^d$. Note que $\psi_{-k} = \psi_k$, assim

$$\begin{aligned} u(y) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \psi_k = a_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} a_k \psi_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}_-^d} a_k \psi_k \\ &= a_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} (a_k + a_{-k}) \psi_k, \end{aligned}$$

como queremos soluções não triviais, devemos ter $a_{|k|} = a_k$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Logo a expansão de (4.2) se torna

$$f_k(x) := \mu_k(\lambda) a_k - (a^3)_k - \delta_{k,0} c = 0, \quad (4.4)$$

onde $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, $x = (\lambda, c, a)$, $\mu_k = 1 - \frac{1}{\lambda} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)$, $k \in \mathbb{Z}^d$ (note que $f_{|k|} = f_k$, apenas precisamos resolver para $k > 0$), $\delta_{k,0}$ é o símbolo de Kronecker e onde usamos a notação

$$(a * b * c)_k = \sum_{\substack{k^1 + k^2 + k^3 = k \\ k^j \in \mathbb{Z}^d}} a_{k^1} b_{k^2} c_{k^3}, \quad a^3 = a * a * a.$$

Definimos então $f : \mathbb{R}^2 \times \Omega^q \rightarrow \Omega^{q'}$, com $q' = (q_1 - 2, \dots, q_d - 2)$ e $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$.

Procurar por soluções de (4.2) é equivalente a procurar soluções de $f(x) = 0$ no espaço de Banach $X = \mathbb{R}^2 \times \Omega^q$, $q = (q_1, \dots, q_d)$ com $q_j > 1$ para todo $j = 1, \dots, d$.

Considere a redução em dimensão finita $f^{(m)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d}$ de f , dada componente a componente em (4.4) e definida por

$$f^{(m)}(x_{F_m}) = (f_k(x_k, 0_\infty))_{k \in F_m} \in \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d},$$

onde $x_{F_m} = (\lambda, c, \{a_k\}_{k \in F_m}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m_1 \dots m_d}$ e $m = (m_1, \dots, m_d)$.

Assuma agora que calculamos $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{2+m_1 \dots m_d}$ tais que $f^{(m)}(\bar{x}_i) \approx 0$, para todo $i = 0, 1, 2$, defina $\bar{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_1^i & \phi_2^i \end{bmatrix}$ a matriz $(2 + m_1 \dots m_d) \times 2$, cujas colunas são dadas por dois vetores linearmente independentes, ortogonais e que geram $\ker(Df^{(m)}(\bar{x}_i))$.

Sejam $\bar{x}_s = \bar{x}_0 + s_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) + s_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)$ e $\bar{\Phi}_s = \bar{\Phi}_0 + s_1(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_0) + s_2(\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_0)$, com $s = (s_1, s_2) \in D$. Denote $\bar{x}_s = (\lambda_s, c_s, a_s)$ e $\bar{x}_i = (\bar{\lambda}_i, \bar{c}_i, \bar{a}_i)$. Defina o espaço de Banach $W = \mathbb{R}^2 \times \Omega^{q'}$ e $\mathcal{F}_s : X \rightarrow W$ por

$$\mathcal{F}_s(x) = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_s^T(x - \bar{x}_s) \\ f(x) \end{pmatrix}$$

e considere a sua redução à dimensão finita $\mathcal{F}_s^{(m)} : \mathbb{R}^{2+m_1 \dots m_d} \rightarrow \mathbb{R}^{2+m_1 \dots m_d}$ dada por

$$\mathcal{F}_s^{(m)}(x) = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_s^T(x_{F_m} - \bar{x}_s) \\ f^{(m)}(x_{F_m}) \end{pmatrix}.$$

Considere o operador linear $A : W \rightarrow X$ como segue. Assuma que calculamos uma matriz invertível A_m tal que $A_m \approx D\mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0)^{-1}$ e definimos A por

$$(Ax)_k = \begin{cases} (A_m x_{F_m})_k, & k \in F_m \\ \mu_k^{-1} a_k, & k \notin F_m. \end{cases} \quad (4.5)$$

Assim, A leva W em X e podemos, então, definir o operador Newton-like

$$T_s(x) = x - A\mathcal{F}_s(x),$$

onde $T_s : X \rightarrow X$.

Como mencionado antes, a ideia da construção de cartas locais é para definir os polinômios radiais já introduzidos na Definição 3.1. Assim, precisamos considerar as estimativas Y e Z satisfazendo (3.6) e (3.7), respectivamente.

Para calcular $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, satisfazendo (3.6), expandimos $f(\bar{x}_s)$ como um polinômio nas variáveis s_1 e s_2 . Para cada $k \in \mathbb{Z}^d$ e $i, j \geq 0$, tais que $2 \leq i + j \leq 3$, considere $y_k^{(i,j)} = y_k^{(i,j)}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial^{i+j} f_k}{\partial^i \bar{x}_1 \partial^j \bar{x}_2}(\bar{x}_s)$ tal que

$$\begin{aligned} f_k(\bar{x}_s) &= \mu_k(\lambda_s)(a_s)_k - (a_s^3)_k - \delta_{k,0} c_s \\ &= \left(1 - \frac{1}{\lambda_s}(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)\right) (a_s)_k - (a_s^3)_k - \delta_{k,0} c_s \\ &= f_k(\bar{x}_0) + s_1 [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)]_k + s_2 [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)]_k + \sum_{\substack{2 \leq i+j \leq 3 \\ i,j \geq 0}} y_k^{(i,j)} s_1 s_2. \end{aligned}$$

Para $x_{F_m} = (\lambda, c, a)$ e $k, l \in \mathbb{Z}^d$, temos

$$\begin{aligned} [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)]_k &= \frac{1}{\bar{\lambda}_0^2} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) - \delta_{k,0_{F_m}} (\bar{c}_1 - \bar{c}_0) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_0} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) - 3 \sum_{k^1 + k^2 = 0} a_{k^1} a_{k^2}\right) (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}_0^2} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) - \delta_{k,0_{F_m}} (\bar{c}_1 - \bar{c}_0) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_0} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)\right) (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k - 3(\bar{a}_0^2 * (\bar{a}_1 - \bar{a}_0))_k. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)]_k &= \frac{1}{\bar{\lambda}_0^2} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) - \delta_{k,0_{F_m}} (\bar{c}_2 - \bar{c}_0) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_0} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)\right) (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)_k - 3(\bar{a}_0^2 * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0))_k. \end{aligned}$$

Também temos,

$$\begin{aligned} y_k^{(2,0)} &= \frac{-1}{\bar{\lambda}_0^3} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\lambda}_0^2} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \\ &\quad - 3(\bar{a}_0 * (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)^2)_k, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_k^{(0,2)} &= \frac{-1}{\bar{\lambda}_0^3} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\lambda}_0^2} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \\ &\quad - 3(\bar{a}_0 * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)^2)_k. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} y_k^{(1,1)} &= -\frac{2}{\bar{\lambda}_0} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\lambda}_0^2} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) ((\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)) \\ &\quad - 6(\bar{a}_0 * (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0))_k. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas de terceira ordem

$$\begin{aligned} y_k^{(3,0)} &= \frac{1}{\bar{\lambda}_0^4} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3 \\ &\quad - \frac{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)}{\bar{\lambda}_0^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 - (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k^3. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} y_k^{(0,3)} &= \frac{1}{\bar{\lambda}_0^4} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3 \\ &\quad - \frac{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)}{\bar{\lambda}_0^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 - (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)_k^3. \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned} y_k^{(2,1)} &= \frac{3}{\bar{\lambda}_0^4} (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \\ &\quad - \frac{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)}{\bar{\lambda}_0^3} ((\bar{a}_2 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ &\quad + 2(\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)) \\ &\quad - 3((\bar{a}_1 - \bar{a}_0)^2 * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0))_k, \end{aligned}$$

da mesma forma,

$$\begin{aligned}
y_k^{(1,2)} &= 3 \frac{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)}{\bar{\lambda}_0^4} (\bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \\
&\quad - \frac{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)}{\bar{\lambda}_0^3} ((\bar{a}_1 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \\
&\quad + 2(\bar{a}_2 - \bar{a}_0)_k (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)) \\
&\quad - 3((\bar{a}_2 - \bar{a}_0)^2 * (\bar{a}_1 - \bar{a}_0))_k.
\end{aligned}$$

Vamos agora encontrar o M da hipótese **A1**, que assume que Y_k pode ser tomado como zero para $k \notin F_M$.

Como $(\bar{a}_0)_k = (\bar{a}_1)_k = (\bar{a}_2)_k = 0$ para $k \notin F_M$, então para cada $k \geq (3m_1 - 2, \dots, 3m_d - 2)$, $f_k(\bar{x}_0) = [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)]_k = [f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)]_k = 0$ e $y_k^{(i,j)} = 0$ para todo i, j . De fato, para vetores a, b, c satisfazendo $a_k = b_k = c_k = 0$ para $k \notin F_M$, tem-se $(a * b * c)_k = 0$ para $k \geq (3m_1 - 2, \dots, 3m_d - 2)$. Assim, tomando $M = (3m_1 - 2, \dots, 3m_d - 2)$, temos $Y_k = 0$, para $k \in F_M$.

Para definir Y_k com $k \notin F_M \setminus F_m$, usamos (3.13) que é dado por:

$$\begin{aligned}
Y_k &= \frac{1}{|\mu_k|} (f_k(\bar{x}_0) + |f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)|_k + |f_x(\bar{x}_0)(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)|_k) \\
&\quad + \frac{1}{|\mu_k|} \left(\sum_{\substack{2 \leq i+j \leq n_Y \\ i, j \geq 0}} Y_k^{(i,j)} \right).
\end{aligned}$$

Calculemos agora as limitações $Z = \{Z_k\}_k$ satisfazendo (3.7). De $A_m \approx \left(D\mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0) \right)^{-1}$ definimos o operador linear $A^\dagger : X \rightarrow W$ por

$$(A^\dagger \bar{x}_s)_k := \begin{cases} \left(D\mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0) \bar{x}_s \right)_k, & \text{se } k \in F_m, \\ \mu_k a_s, & \text{se } k \notin F_m. \end{cases}$$

Considere $z_k^{(\ell, i, j)} = z_k^{(\ell, i, j)}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2)$, onde $\tilde{b}_1 = (\tilde{\lambda}^{(1)}, \tilde{c}^{(1)}, \tilde{a}^{(1)})$ e $\tilde{b}_2 = (\tilde{\lambda}^{(2)}, \tilde{c}^{(2)}, \tilde{a}^{(2)})$, tal que

$$\begin{aligned}
[D\mathcal{F}(\bar{x}_s + b_1)b_2 - A^\dagger b_2]_k &= [D\mathcal{F}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r)\tilde{b}_2 r - A^\dagger \tilde{b}_2 r]_k \\
&= \sum_{\ell=1}^{n_Z} \left(\sum_{0 \leq i+j \leq n_Z+1-\ell} z_k^{(\ell, i, j)} s_1^i s_2^j \right) r^\ell.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\mathcal{F}_s^{(m)}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r) = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_0^T(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_s) \\ f^{(m)}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_s^T(\tilde{b}_1 r) \\ f^{(m)}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r) \end{pmatrix},$$

assim

$$D\mathcal{F}_s^{(m)}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r) = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_s^T \\ Df^{(m)}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r) \end{pmatrix}.$$

Temos que $D\mathcal{F}_0^{(m)}(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_s^T \\ Df(\bar{x}_0) \end{pmatrix}$.

Primeiro vamos ver quem é $Df^{(m)}(\bar{x}_s)$. Lembrando que

$$Df(\bar{x}_s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial \lambda}(\bar{x}_s) & \frac{\partial f_k}{\partial c}(\bar{x}_s) & \frac{\partial f_k}{\partial a}(\bar{x}_s) \end{pmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} [D\mathcal{F}^{(m)}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r) \tilde{b}_2 r - A^\dagger \tilde{b}_2 r] &= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_s^T - \bar{\Phi}_0^T \\ Df(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \end{bmatrix} \tilde{b}_2 r \\ &= \begin{bmatrix} (\bar{\Phi}_s^T - \bar{\Phi}_0^T) \tilde{b}_2 r \\ \frac{\partial f_k}{\partial \lambda}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} r + \frac{\partial f_k}{\partial c}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{c}^{(2)} r + \frac{\partial f_k}{\partial a}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{a}^{(2)} r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_1(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_0) \tilde{b}_2 r + s_2(\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_0) \tilde{b}_2 r \\ \frac{\partial f_k}{\partial \lambda}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} r + \frac{\partial f_k}{\partial c}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{c}^{(2)} r + \frac{\partial f_k}{\partial a}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{a}^{(2)} r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\frac{\partial f_k}{\partial \lambda}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) = \frac{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)}{(\bar{\lambda}_s + \tilde{\lambda}^{(1)} r - \bar{\lambda}_0)^2} (a_s + \tilde{a}^{(1)} r - \bar{a}_0)_k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial a_k}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) &= 1 - \frac{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)}{(\bar{\lambda}_s + \tilde{\lambda}^{(1)} r - \bar{\lambda}_0)} \\ &\quad - 3 \sum_{\substack{k^1 + k^2 = k \\ k^j \in \mathbb{Z}^d}} (a_s + \tilde{a}^{(1)} r - \bar{a}_0)_{k^1} (a_s + \tilde{a}^{(1)} r - \bar{a}_0)_{k^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial a_\ell}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) = -3 \sum_{\substack{k^1 + k^2 = k + \ell \\ k^j \in \mathbb{Z}^d}} (a_s + \tilde{a}^{(1)} r - \bar{a}_0)_{k^1} (a_s + \tilde{a}^{(1)} r - \bar{a}_0)_{k^2}, \quad k \neq \ell$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial c}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) = -\delta_{k,0_{F_m}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} z_{\kappa}^{(1,1,0)} &= (\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_0)^T (\tilde{b}_2)_{F_m} \\ z_{\kappa}^{(1,0,1)} &= (\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_0)^T (\tilde{b}_2)_{F_m}, \end{aligned}$$

para algum κ .

Consideramos $\xi \in [\bar{\lambda}_0, \lambda_s]$, onde $\lambda_s = \bar{\lambda}_0 + s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)$, o qual vem da expansão de Taylor da função $s = (s_1, s_2) \mapsto \mu_k(\lambda_s)$ em torno de $s = (0, 0)$ (na prática, ξ é trocado pelo intervalo $\bar{\lambda}_0 + [0, 1](\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + [0, 1](\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)$). Vejamos,

$$s = (s_1, s_2) \mapsto \mu_k(\lambda_s) = \frac{k_1 L_1^2 + \dots + k_d L_d^2}{s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_0}$$

em torno de $s = (0, 0)$. Temos que

$$\begin{aligned}\mu_k(\lambda_s) &= \frac{k_1 L_1^2 + \cdots + k_d L_d^2}{s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_0} \\ \mu_k(\lambda_{(0,0)}) &= \frac{k_1 L_1^2 + \cdots + k_d L_d^2}{\bar{\lambda}_0} \\ \frac{\partial \mu_k}{\partial s_1}(\lambda_s) &= -\frac{(k_1 L_1^2 + \cdots + k_d L_d^2)}{(s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_0)^2}(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \\ \frac{\partial \mu_k}{\partial s_2}(\lambda_s) &= -\frac{(k_1 L_1^2 + \cdots + k_d L_d^2)}{(s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_0)^2}(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \\ \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1^2}(\lambda_s) &= 2\frac{(k_1 L_1^2 + \cdots + k_d L_d^2)}{(s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_0)^3}(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_2^2}(\lambda_s) &= 2\frac{(k_1 L_1^2 + \cdots + k_d L_d^2)}{(s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_0)^3}(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1 \partial s_2}(\lambda_s) &= 2\frac{(k_1 L_1^2 + \cdots + k_d L_d^2)}{(s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_0)^3}(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)\end{aligned}$$

Usando o polinômio de Taylor, existe $\xi \in [\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_s]$, tal que

$$\begin{aligned}\mu_k(\lambda_s) &= (k_1^2 L_1^2 + \cdots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_0} - \frac{s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} - \frac{s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1^2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + \frac{s_2^2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + 2\frac{s_1 s_2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right]\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_k}{\partial s_1}(\lambda_s) &= (k_1^2 L_1^2 + \cdots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + 2\frac{s_2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_k}{\partial s_2}(\lambda_s) &= (k_1^2 L_1^2 + \cdots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + 2\frac{s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1^2}(\lambda_s) = (k_1^2 L_1^2 + \cdots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_2^2}(\lambda_s) = (k_1^2 L_1^2 + \cdots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1 \partial s_2}(\lambda_s) = (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right]$$

$$\frac{\partial^3 \mu_k}{\partial s_1^3}(\lambda_s) = \frac{\partial^3 \mu_k}{\partial s_1 \partial s_2^2}(\lambda_s) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_k}{\partial \lambda}(\lambda_s) &= \frac{\partial \mu_k}{\partial \lambda}(\bar{\lambda}_0 + s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)) \\ &= \frac{\partial \mu_k}{\partial s_1}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + \frac{\partial \mu_k}{\partial s_2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \\ &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + 2 \frac{s_2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \\ &\quad + (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2s_2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + 2 \frac{s_1(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial \lambda^2}(\lambda_s) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial \lambda}(\lambda_s) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial s_1}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) + \frac{\partial \mu_k}{\partial s_2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \right) \\ &= \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1^2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 + \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_2^2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1 \partial s_2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \\ &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right] (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ &\quad + (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right] (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \\ &\quad + 2(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mu_k}{\partial \lambda^3}(\lambda_s) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial \lambda^2}(\lambda_s) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1^2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 + \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_2^2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial s_1 \partial s_2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \right) \\
&= \frac{\partial^3 \mu_k}{\partial s_1^3}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3 + \frac{\partial^3 \mu_k}{\partial s_2^3}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3 \\
&\quad + 3 \frac{\partial^3 \mu_k}{\partial s_1^2 \partial s_2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) + 3 \frac{\partial^3 \mu_k}{\partial s_1 \partial s_2^2}(\lambda_s)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
\lambda_v &= \lambda_s + \tilde{\lambda}^{(1)} r - \bar{\lambda}_0 \\
&= r \lambda_{\left(\frac{s_1}{r} + \tilde{s}_1^{(1)}, \frac{s_2}{r} + \tilde{s}_2^{(1)}\right)}
\end{aligned}$$

para $k \in F_m$, vamos assumir que $\mu_k(\bar{\lambda}_s + \tilde{\lambda}^{(1)} r - \bar{\lambda}_0) = \mu_k(\lambda_v)$, temos

$$\begin{aligned}
[D\mathcal{F}^{(m)}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r) \tilde{b}_2 r - A^\dagger \tilde{b}_2 r]_k &= \frac{\partial f_k}{\partial \lambda}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} r + \frac{\partial f_k}{\partial c}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{c}^{(2)} r \\
&\quad + \frac{\partial f_k}{\partial a}(\bar{x}_s + \tilde{b}_1 r - \bar{x}_0) \tilde{a}^{(2)} r \\
&= \frac{\partial \mu_k}{\partial \lambda}(\lambda_v)(a_s + \tilde{a}^{(1)} r - \bar{a}_0)_k \tilde{\lambda}^{(2)} r - \delta_{k,0} \tilde{c}^{(2)} r + \mu_k(\lambda_v) \tilde{a}^{(2)} r \\
&\quad - 3((a_s + \tilde{a}^{(1)} r - \bar{a}_0)^2 * \tilde{a}^{(2)})_k r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left((k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2(s_1 + \tilde{s}_1^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + 2 \frac{(s_2 + \tilde{s}_2^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \right. \\
&\quad \left. + (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2(s_2 + \tilde{s}_2^{(1)} r)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + 2 \frac{(s_1 + \tilde{s}_1^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \right) (s_1(\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \\
&\quad + s_2(\bar{a}_2 - \bar{a}_0) + \tilde{a}^{(1)} r)_k \tilde{\lambda}^{(2)} r - \delta_{k,0_{F_m}} \tilde{c}^{(2)} r \\
&\quad + \left((k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_0} - \frac{(s_1 + \tilde{s}_1^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} - \frac{(s_2 + \tilde{s}_2^{(1)} r)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(s_1^2 + 2s_1 \tilde{s}_1^{(1)} r + (\tilde{s}_1^{(1)})^2 r^2)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} + \frac{(s_2^2 + 2s_2 \tilde{s}_2^{(1)} r + (\tilde{s}_2^{(1)})^2 r^2)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \frac{(s_1 s_2 + s_1 \tilde{s}_2^{(1)} r + s_2 \tilde{s}_1^{(1)} r + \tilde{s}_1^{(1)} \tilde{s}_2^{(1)} r^2)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] \right) \tilde{a}^{(2)} \\
&\quad - 3 \left((s_1(\bar{a}_1 - \bar{a}_0) + s_2(\bar{a}_2 - \bar{a}_0) + \tilde{a}^{(1)} r)_k^2 * \tilde{a}^{(2)} \right) r \\
&= \left((k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} - \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2(s_1 + \tilde{s}_1^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} + \frac{2(s_2 + \tilde{s}_2^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2(s_2 + \tilde{s}_2^{(1)} r)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} + \frac{2(s_1 + \tilde{s}_1^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right] \right) (s_1(\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \\
&\quad + s_2(\bar{a}_2 - \bar{a}_0) + \tilde{a}^{(1)} r)_k \tilde{\lambda}^{(2)} r - \delta_{k,0_{F_m}} \tilde{c}^{(2)} r \\
&\quad + (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{\tilde{a}^{(2)}}{\bar{\lambda}_0} - \frac{(s_1 + \tilde{s}_1^{(1)} r)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)}}{(\bar{\lambda}_0)^2} - \frac{(s_2 + \tilde{s}_2^{(1)} r)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)}}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(s_1^2 + 2s_1 \tilde{s}_1^{(1)} r + (\tilde{s}_1^{(1)})^2 r^2)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)}}{\xi^3} + \frac{(s_2^2 + 2s_2 \tilde{s}_2^{(1)} r + (\tilde{s}_2^{(1)})^2 r^2)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)}}{\xi^3} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{(s_1 s_2 + s_1 \tilde{s}_2^{(1)} r + s_2 \tilde{s}_1^{(1)} r + \tilde{s}_1^{(1)} \tilde{s}_2^{(1)} r^2)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)}}{\xi^3} \right] \\
&\quad - 3s_1^2 r(\bar{a}_1 - \bar{a}_0)^2 * \tilde{a}^{(2)} - 3s_2^2(\bar{a}_2 - \bar{a}_0)^2 * \tilde{a}^{(2)} - 3r^3(\tilde{a}^{(1)})^2 * \tilde{a}^{(2)} \\
&\quad - 6s_1 s_2 r(\bar{a}_1 - \bar{a}_0) * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) * \tilde{a}^{(2)} - 6s_1 r^2(\bar{a}_1 - \bar{a}_0) * \tilde{a}^{(2)} - 6s_2 r^2(\bar{a}_2 - \bar{a}_0) * \tilde{a}^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \frac{\tilde{a}^{(2)}}{\bar{\lambda}_0} + (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left\{ r \left[-\delta_{k,0_{Fm}} \tilde{c}^{(2)} - \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{\bar{\lambda}_0^2} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\bar{\lambda}_0^2} (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right] + s_1 \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)}}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right] + s_2 \left[-\frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)}}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right] \right. \\
& + s_1 r \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} - \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
& \left. + 2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)} + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right] \\
& + s_2 r \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} - \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
& \left. + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{(\bar{\lambda}_0)^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)} + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right] \\
& + r^2 \left[-\tilde{a}^{(1)} \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} - \tilde{a}^{(1)} \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} + \frac{(\tilde{s}_1^{(2)})^2}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 + \frac{(\tilde{s}_2^{(2)})^2}{\xi^3} (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \right. \\
& \left. + 2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)} \tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \right] \\
& + s_1^2 \left[\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right] + s_2^2 \left[\frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right] + s_1 s_2 \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] \\
& + r^3 \left[2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3 \tilde{a}^{(1)} + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(1)} \right. \\
& + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3 \tilde{a}^{(1)} + 2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{(\bar{\lambda}_0)^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(1)} \\
& \left. - 3 \frac{((\tilde{a}^{(1)})^2 * \tilde{a}^{(2)})}{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)} \right] \\
& + s_1 s_2 r \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
& + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
& \left. - 6 \frac{((\bar{a}_1 - \bar{a}_0) * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) * \tilde{a}^{(2)})}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +s_1^2 r \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
& \quad \left. - 3 \frac{(\bar{a}_1 - \bar{a}_0)^2 * \tilde{a}^{(2)}}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \\
& +s_2^2 r \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
& \quad \left. - 3 \frac{(\bar{a}_2 - \bar{a}_0)^2 * \tilde{a}^{(2)}}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \\
& +s_1 r^2 \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{s}_1^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
& \quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{s}_2^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
& \quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi} \tilde{s}_2^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + \frac{2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} \\
& \quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{s}_1^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
& \quad \left. - 3 \frac{\tilde{a}^{(1)} * \tilde{a}^{(2)} * (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \\
& +s_2 r^2 \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{s}_1^{(1)} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
& \quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{s}_2^{(1)} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} \\
& \quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi} \tilde{s}_2^{(1)} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} + \frac{2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
& \quad \left. - 3 \frac{\tilde{a}^{(1)} * \tilde{a}^{(2)} * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
z^{(0,0,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \frac{\tilde{a}^{(2)}}{\bar{\lambda}_0} \\
z^{(1,0,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\delta_{k,0_{Fm}} \tilde{c}^{(2)} - \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{\bar{\lambda}_0^2} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\bar{\lambda}_0^2} (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right] \\
z^{(0,1,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)}}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right] \\
z^{(0,0,1)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)}}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right] \\
z^{(1,1,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} - \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)} + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right] \\
z^{(1,0,1)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} - \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{(\bar{\lambda}_0)^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(2)} + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(2)} \right] \\
z^{(2,0,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[-\tilde{a}^{(1)} \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} \right. \\
&\quad \left. - \tilde{a}^{(1)} \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\lambda}_0)^2} + \frac{(\tilde{s}_1^{(2)})^2}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 + \frac{(\tilde{s}_2^{(2)})^2}{\xi^3} (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)} \tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \right] \\
z^{(0,2,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right] \\
z^{(0,0,2)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[\frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \right] \\
z^{(0,1,1)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \right] \\
z^{(3,0,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3 \tilde{a}^{(1)} + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0) \tilde{a}^{(1)} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\tilde{s}_2^{(1)}}{\xi^3} (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3 \tilde{a}^{(1)} + 2 \frac{\tilde{s}_1^{(1)}}{(\bar{\lambda}_0)^3} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2 \tilde{a}^{(1)} \right. \\
&\quad \left. - 3 \frac{((\tilde{a}^{(1)})^2 * \tilde{a}^{(2)})}{(k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^{(1,1,1)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad \left. - 6 \frac{((\bar{a}_1 - \bar{a}_0) * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) * \tilde{a}^{(2)})}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \\
z^{(1,2,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad \left. - 3 \frac{(\bar{a}_1 - \bar{a}_0)^2 * \tilde{a}^{(2)}}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \\
z^{(1,0,2)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad \left. - 3 \frac{(\bar{a}_2 - \bar{a}_0)^2 * \tilde{a}^{(2)}}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \\
z^{(2,1,0)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{s}_1^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{s}_2^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi} \tilde{s}_2^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} + \frac{2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{s}_1^{(1)} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad \left. - 3 \frac{\tilde{a}^{(1)} * \tilde{a}^{(2)} * (\bar{a}_1 - \bar{a}_0)}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right] \\
z^{(2,0,1)} &= (k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2) \left[2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{s}_1^{(1)} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \right. \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0)^2 (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)}{\xi^3} \tilde{s}_2^{(1)} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi^3} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad + 2 \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^3}{\xi} \tilde{s}_2^{(1)} \tilde{a}^{(1)} \tilde{\lambda}^{(2)} + \frac{2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0) (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_0)^2}{\xi^3} (\bar{a}_2 - \bar{a}_0) \tilde{\lambda}^{(2)} \\
&\quad \left. - 3 \frac{\tilde{a}^{(1)} * \tilde{a}^{(2)} * (\bar{a}_2 - \bar{a}_0)}{k_1^2 L_1^2 + \dots + k_d^2 L_d^2} \right]
\end{aligned}$$

Desta forma, para cada $k \in \mathbb{Z}^d$, obtemos Y_k e $Z_k(r)$ e via os Algoritmos concluimos que

$$p_k(r) = Y_k + Z_k(r) - \frac{r}{\omega_{k^q}} < 0$$

e aplicando o Lema 3.2 obtemos uma prova rigorosa da existência de uma variedades de soluções de equilíbrios para a equação de Cahn-Hilliard.

Para ilustrar o método desenvolvido, apresentamos na Figura 2 a solução de equilíbrio da equação de Cahn-Hilliard em dimensão dois.

Figura 2 – Variedade de soluções de equilíbrio para equação de Cahn-Hilliard em dimensão dois.

CÁLCULO RIGOROSO DE BIFURCAÇÃO CÚSPIDE

Neste capítulo apresentamos um método computacional rigoroso para provar a existência de bifurcação cúspide.

5.1 Introdução

Consideremos um sistema dinâmico dependente de parâmetros do tipo

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (5.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}^m$ representam o espaço de fase e parâmetros, respectivamente. Considere o retrato de fase do sistema. Como o parâmetro varia, o retrato de fase também varia. Há duas possibilidades, ou o sistema se mantém topologicamente equivalente ao original, ou existem mudanças topológicas. Intuitivamente, a aparência de um retrato de fase não equivalente sob variações dos parâmetros é chamado de uma bifurcação. Ou seja, uma bifurcação é um tipo de mudança topológica do sistema quando seus parâmetros passam por um valor crítico onde essas mudanças ocorrem.

A solução do problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, é denotada por $\varphi(t, x_0)$ e é chamada de *fluxo* associado a $\dot{x} = f(x)$.

Definição 5.1. Dois fluxos $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ são *topologicamente equivalentes* se existir um homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que as órbitas de φ são levadas em órbitas de ψ preservando a direção de tempo, ou seja, existe uma *aplicação de reescala do tempo* $\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua, estritamente crescente e tal que

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(\tau(t, x), h(x))$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definição 5.2. O sistema (5.1) apresenta uma *bifurcação* no parâmetro $\alpha = \alpha_0$ se existem valores de parâmetros α_1 arbitrariamente próximos de α_0 com dinâmica que não seja topologicamente equivalente aquela em α_0 , ou seja, o fluxo associado a $\dot{x} = f(x, \alpha_1)$ não é topologicamente equivalente ao fluxo associado a $\dot{x} = f(x, \alpha_0)$.

5.2 Bifurcações Cúspide

5.2.1 Caso $n = 1$

Nesta seção definimos bifurcação cúspide e apresentamos a derivação da forma normal da bifurcação cúspide de dimensão um. O conteúdo desta seção foi retirado de (KUZNETSOV, 2013, p. 301).

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \quad (5.2)$$

onde f é uma função suave.

Definição 5.3. Um ponto cúspide para (5.2) é um ponto $(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tal que

- $f(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$;
- $f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$;
- $f_{xx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$.

Por simplicidade, assuma que $(0, 0)$ é um ponto cúspide de (5.2), ou seja, o sistema (5.2) tem em $\alpha = 0$ o equilíbrio $x = 0$, $f_x(0, 0) = 0$ e $f_{xx}(0, 0) = 0$. Expandindo $f(x, \alpha)$ em uma série de Taylor com respeito à x em $x = 0$ temos

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4),$$

onde $f_i(x) = \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0, \alpha)$.

Como $(0, 0)$ é um ponto cúspide, temos que $f_0(0) = f(0, 0) = 0$, $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ e $f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) = 0$.

Tomando uma mudança das coordenadas dependente do parâmetro α

$$\xi = x + \delta(\alpha), \quad (5.3)$$

e substituindo em (5.2), temos

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= \dot{x} = f(x, \alpha) \\
 &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + f_3(\alpha)(\xi - \delta)^3 + O((\xi - \delta)^4) \\
 &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi^2 - 2\xi\delta + \delta^2) + f_3(\alpha)(\xi^3 - \delta^3 - 3\xi^2\delta + 3\xi\delta^2) \\
 &\quad + O((\xi - \delta)^4) \\
 &= f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 - f_3(\alpha)\delta^3 + (f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + 3f_3(\alpha)\delta^2)\xi \\
 &\quad + (f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta)\xi^2 + f_3(\alpha)\xi^3 + O((\xi - \delta)^4).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + \delta^2\varphi(\alpha, \delta)] + [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\phi(\alpha, \delta)]\xi \\
 &\quad + [f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta)]\xi^2 + [f_3(\alpha) + \delta^2\theta(\alpha, \delta)]\xi^3 + O(\xi^4)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

para algumas funções suaves φ, ϕ, ψ e θ .

Mostraremos que existe um *shift* suave $\delta(\alpha)$ que satisfaz $\delta(0) = 0$ e anula o termo quadrático na equação acima para todo $\|\alpha\|$ suficientemente pequeno, desde que

$$f_3(0) = \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0) \neq 0. \tag{5.5}$$

Para isto, denote o coeficiente de ξ^2 por

$$F(\alpha, \delta) = f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta).$$

Temos que

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \delta}(0, 0) = -3f_3(0) \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, para $\|\alpha\|$ suficientemente pequeno existe uma única função suave $\delta = \delta(\alpha)$ satisfazendo $\delta(0) = 0$ e $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$. Para tal $\delta(\alpha)$ temos então que a equação (5.4) para ξ não contém termos quadráticos.

Introduzimos agora novos parâmetros $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ como

$$\begin{cases} \mu_1(\alpha) &= f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta(\alpha) + \delta^2(\alpha)\varphi(\alpha, \delta(\alpha)), \\ \mu_2(\alpha) &= f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta(\alpha) + \delta^2(\alpha)\phi(\alpha, \delta(\alpha)). \end{cases} \tag{5.6}$$

Vemos que μ_1 é o termo independente de ξ e μ_2 é o coeficiente de ξ em (5.4). Além disso, $\mu(0) = 0$. Os parâmetros (5.6) serão bem definidos se a matriz Jacobiana de μ for invertível em $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, isto é

$$\det \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right) (0) = \det \begin{pmatrix} f_{\alpha_1} & f_{\alpha_2} \\ f_{x\alpha_1} & f_{x\alpha_2} \end{pmatrix} (0) \neq 0. \tag{5.7}$$

Aplicando o Teorema da Função Inversa obtemos a existência e unicidade locais de uma função inversa suave $\alpha = \alpha(\mu)$ satisfazendo $\mu(0) = 0$. Assim, podemos reescrever (5.4) como

$$\dot{\xi} = \mu_1 + \mu_2 \xi + c(\mu) \xi^3 + O(\xi^4),$$

onde $c(\mu) = f_3(\alpha(\mu)) + \delta^2(\alpha(\mu))\theta(\alpha(\mu), \delta(\alpha(\mu)))$ é uma função suave. Segue de (5.5) que $c(0) \neq 0$.

Definindo

$$\eta = \frac{\xi}{|c(\mu)|},$$

e introduzindo os parâmetros

$$\beta_1 = \frac{\mu_1}{|c(\mu)|} \text{ e } \beta_2 = \mu_2,$$

temos

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2 \eta + s \eta^3 + O(\eta^4),$$

onde $s = \sigma(c(0)) = \pm 1$ e os termos de $O(\eta^4)$ dependem suavemente de β .

Com isso, o seguinte teorema está provado.

Teorema 5.1. Suponha que um sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

com f suave, tenha em $\alpha = 0$ o equilíbrio $x = 0$, e suponha que as condições de um ponto de bifurcação do tipo cúspide valem, isto é,

$$\lambda = f_x(0, 0) = 0, \quad a = \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0) = 0.$$

Assuma que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$(5.5) \quad f_{xxx}(0, 0) \neq 0;$$

$$(5.7) \quad (f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(0, 0) \neq 0.$$

Então existem mudanças suaves e invertíveis de coordenadas e parâmetros que transformam o sistema em

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2 \eta \pm \eta^3 + O(\eta^4) \tag{5.8}$$

O seguinte Lema indica que em (5.8) os termos de ordem mais alta são irrelevantes.

Lema 5.1. O sistema

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2 \eta \pm \eta^3 + O(\eta^4)$$

é localmente topologicamente equivalente próximo à origem, ao sistema

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2 \eta \pm \eta^3.$$

Definição 5.4. Uma *bifurcação cúspide* para (5.2) é um ponto $(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ que é um ponto cúspide e que satisfaz

- $f_{xxx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0$;
- $(f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0$.

Formulamos agora um Teorema geral para bifurcação do tipo cúspide.

Teorema 5.2. (Forma normal topológica para a bifurcação cúspide) Qualquer sistema escalar genérico de dois parâmetros

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

tendo em $\alpha = 0$ um equilíbrio $x = 0$ com uma bifurcação cúspide é localmente topologicamente equivalente, próximo à origem, à uma forma normal

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2 \eta \pm \eta^3. \quad (5.9)$$

A bifurcação cúspide é ilustrada na Figura 3. A prova do seguinte resultado é análoga a do Teorema 5.1, o qual é feito sem perda de generalidade.

Figura 3 – Ilustração de bifurcação cúspide.

Teorema 5.3. Suponha um sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

com f suave, tenha em $\alpha = \tilde{\alpha}$ um equilíbrio $x = \tilde{x}$, e suponha que as condições de ponto cúspide e de bifurcação cúspide valem, isto é,

$$\lambda = f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0, \quad a = \frac{1}{2} f_{xx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0,$$

e

- $f_{xxx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0$;
- $(f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0$.

Assim, existem mudanças suaves e invertíveis de coordenadas e parâmetros que transformam o sistema na forma normal (5.9).

Este teorema fornece as condições necessárias para a existência de uma bifurcação cúspide. Para termos uma bifurcação cúspide precisamos ter um ponto cúspide, ou seja, um ponto $(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ satisfazendo $f(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$, $f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$ e $\frac{1}{2}f_{xx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$, e este ponto precisa satisfazer as condições de não-degeneracidade, isto é, $f_{xxx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0$ e $(f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0$.

5.2.2 Cálculo Rigoroso de Bifurcação Cúspide em dimensão 1

Nesta seção apresentamos um método computacional rigoroso, baseado nos polinômios radiais apresentados no Capítulo 2, para provar a existência de bifurcações cúspide para equações em dimensão um.

Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e considere o sistema que depende do parâmetro

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2. \quad (5.10)$$

Para verificar as condições do Teorema 5.3, vamos calcular $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, via polinômios radiais, utilizando o Teorema 2.3 com $n = 1$ e $m = 2$.

Observação 5.1. O próximo exemplo é o exemplo clássico de bifurcação cúspide (a forma normal da bifurcação cúspide). Neste exemplo a bifurcação ocorre em $x = 0$ para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e pode-se facilmente verificar algebricamente que existe uma bifurcação cúspide neste ponto, não havendo portanto a necessidade da utilização do método computacional neste exemplo. Entretanto utilizaremos este exemplo trivial para ilustrar o método computacional rigoroso.

Exemplo 5.1. Um exemplo geral para uma bifurcação cúspide em dimensão um segue do sistema

$$\dot{x} = x^3 - \alpha_1 x + \alpha_2, \quad (5.11)$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1 > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, vide (POSTON; STEWART, 2014).

Encontraremos a solução analítica via construção rigorosa, como segue. Denotemos $f(x, \alpha) = x^3 - \alpha_1 x + \alpha_2$. Queremos encontrar $(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ que satisfaça

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = \frac{1}{2}f_{xx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0, \\ \frac{1}{6}f_{xxx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0 \quad \text{e} \quad (f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0. \end{aligned}$$

Para isto utilizaremos o Teorema 2.3. Assim, consideremos um ponto $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ que satisfaz

$$f(\bar{x}, \bar{\alpha}) \approx f_x(\bar{x}, \bar{\alpha}) \approx \frac{1}{2}f_{xx}(\bar{x}, \bar{\alpha}) \approx 0.$$

Denotemos $X = (x, \alpha)$ e

$$F(X) = \begin{bmatrix} f(x, \alpha) \\ f_x(x, \alpha) \\ f_{xx}(x, \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - \alpha_1 x + \alpha_2 \\ 3x^2 - \alpha_1 \\ 6x \end{bmatrix}.$$

Assumimos que $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{\alpha})$ é uma solução aproximada de $F(X) = 0$ e $A \approx DF^{-1}(\bar{X})$, onde

$$DF(X) = \begin{bmatrix} 3x^2 - \alpha_1 & -x & 1 \\ 6x & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, como $DF^{-1}(X)$ é facilmente calculada, simplesmente tomamos $A = DF^{-1}(\bar{X})$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & -1 & \bar{x} \\ 1 & -\bar{x} & \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{\alpha}_1}{6} \end{bmatrix}.$$

Definimos $T(X) = X - AF(X)$ e a seguir vamos encontrar Y e $Z(r)$ satisfazendo (2.4). Para definir $Y \in \mathbb{R}^3$, fazemos

$$\begin{aligned} |T(\bar{X}) - \bar{X}| &= |-AF(\bar{X})| = \left| - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & -1 & \bar{x} \\ 1 & -\bar{x} & \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{\alpha}_1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^3 - \bar{\alpha}_1 \bar{x} + \bar{\alpha}_2 \\ 3\bar{x}^2 - \bar{\alpha}_1 \\ 6\bar{x} \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 3\bar{x}^2 + \bar{\alpha}_1 \\ \bar{x}^3 + \bar{\alpha}_1 \bar{x} + \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} |\bar{x}| \\ |3\bar{x}^2 + \bar{\alpha}_1| \\ |\bar{x}^3 + \bar{\alpha}_1 \bar{x} + \bar{\alpha}_2| \end{bmatrix} =: Y, \end{aligned}$$

lembrando que $|\cdot|$ indica valor absoluto componente a componente. Agora para procurar $Z(r)$, considere $b, c \in \overline{B_r(0)}$. Temos

$$\begin{aligned} DT(\bar{X} + b)c &= (I - ADF(\bar{X} + b))c \\ &= (I - ADF(\bar{X}))c - A(DF(\bar{X} + b)c - DF(\bar{X})c). \end{aligned}$$

Como $A = DF^{-1}(\bar{X})$, temos que o primeiro termo do lado direito da última equação é nulo. Além disso, como $b, c \in \overline{B_r(0)}$, podemos escrever $b = ru$ e $c = rv$, com $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \overline{B_1(0)}$. Assim temos

$$\begin{aligned}
|DT(\bar{X} + b)c| &= |A(DF(\bar{X} + b) - DF(\bar{X}))c| \\
&= \left| A \left(\begin{bmatrix} 3(\bar{x} + ru_1)^2 - (\bar{\alpha}_1 + ru_2) & -(\bar{x} + ru_1) & 1 \\ 6(\bar{x} + ru_1) & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3\bar{x}^2 - \bar{\alpha}_1 & -\bar{x} & 1 \\ 6\bar{x} & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) c \right| \\
&= \left| A \begin{bmatrix} 6r\bar{x}u_1 + 3(ru_1)^2 - ru_2 & -ru_1 & 0 \\ 6ru_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} c \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & -1 & \bar{x} \\ 1 & -\bar{x} & \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{\alpha}_1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6r\bar{x}u_1 + 3(ru_1)^2 - ru_2 & -ru_1 & 0 \\ 6ru_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} c \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6ru_1 & 0 & 0 \\ -3(ru_1)^2 - ru_2 & -ru_1 & 0 \end{bmatrix} rv \right| = \left| \begin{bmatrix} 0 \\ -6r^2u_1v_1 \\ -(3r^3u_1^2v_1 + r^2u_2v_1 + r^2u_1v_2) \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ |6r^2u_1v_1| \\ |(3r^3u_1^2v_1 + r^2(u_2v_1 + u_1v_2))| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como $u, v \in B_1(0)$, temos que $|u_i|, |v_i| \leq 1$, para $i = 1, 2, 3$, logo $|6r^2u_1v_1| \leq 6r^2$ e

$$|(3r^3u_1^2v_1 + r^2(u_2v_1 + u_1v_2))| \leq 3r^3u_1^2|v_1| + r^2(|u_2||v_1| + |u_1||v_2|) \leq 3r^3 + 2r^2.$$

Portanto, utilizando $\leq$ como sendo a desigualdade componente a componente, temos

$$|DT(\bar{X} + b)c| = \begin{bmatrix} 0 \\ |6r^2u_1v_1| \\ |(3r^3u_1^2v_1 + r^2(u_2v_1 + u_1v_2))| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 6r^2 \\ 3r^3 + 2r^2 \end{bmatrix} =: Z(r).$$

Com os limitantes Y e $Z(r)$ encontrados acima, podemos definir os polinômios radiais $p(r) = Y + Z(r) - r$. O último passo é agora encontrar $r_0 > 0$, tal que $p(r_0) < 0$, onde novamente a desigualdade $<$ é componente a componente. Temos

$$p(r) = \begin{bmatrix} -r + |\bar{x}| \\ 6r^2 - r + |3\bar{x}^2 + \bar{\alpha}_1| \\ 3r^3 + 2r^2 - r + |\bar{x}^3 + \bar{\alpha}_1\bar{x} + \bar{\alpha}_2| \end{bmatrix}.$$

Como já foi dito na Observação 5.1 a solução deste sistema é $x = 0$ em $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e todos os cálculos podem ser feitos algebricamente. Entretanto tomamos valores próximos de zero para ilustrar o método. Tomando

$$\bar{x} = \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 10^{-10}$$

obtemos o intervalo (r_-, r_+) , onde $r_- = 10^{-10}$ e $r_+ = 0.166666$, de raios através dos polinômios radiais, ou seja, para todo $r_0 \in (r_-, r_+)$, temos que $p(r_0) < 0$.

Portanto, dado $r_0 \in (r_-, r_+)$, segue do Teorema 2.3 que existe um único ponto $(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ na bola $B_{r_0}(\bar{X})$, tal que

$$f(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = \frac{1}{2}f_{xx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0.$$

Verificamos no computador, utilizando aritmética intervalar, que

$$\frac{1}{6}f_{xxx}(x, \alpha) \neq 0 \quad \text{e} \quad (f_{\alpha_1}f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2}f_{x\alpha_1})(x, \alpha) \neq 0$$

para todo $(x, \alpha) \in B_{r_0}(\bar{X})$. Logo

$$\frac{1}{6}f_{xxx}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0 \quad \text{e} \quad (f_{\alpha_1}f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2}f_{x\alpha_1})(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) \neq 0,$$

e assim mostramos que existe $(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ onde ocorre uma bifurcação cúspide. As Figuras 4 e 5 mostram a variedade das soluções de equilíbrio de (5.11) e ponto onde ocorre a bifurcação cúspide.

Figura 4 – Variedade das soluções de equilíbrio da equação (5.11) e ponto onde ocorre a bifurcação cúspide.

5.2.3 Caso $n \geq 1$

Veremos agora a técnica de derivação da forma normal da bifurcação cúspide para o caso de dimensão n . Os resultados desta seção podem ser encontrados em (KUZNETSOV, 1999, p. 1109 – 1112).

Suponha que o sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2 \quad (5.12)$$

Figura 5 – A Figura 4 vista de cima.

tenha, em $\alpha = 0$, o equilíbrio $x = 0$, tal que a matriz Jacobiana $J = f_x(0, 0)$ tenha um autovalor nulo com multiplicidade 1 e nenhum outro com parte real nula. Escreva o sistema em $\alpha = 0$ como

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.13)$$

onde $F(x) = f(x, 0)$ é escrita como

$$F(x) = Jx + \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \quad (5.14)$$

onde

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k \quad (5.15)$$

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,\ell=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_\ell} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_\ell \quad (5.16)$$

com $i = 1, \dots, n$. A restrição de (5.14) na variedade central invariante de dimensão 1 parametrizada por $w \in \mathbb{R}$ é dada por

$$x = H(w), \quad H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5.17)$$

A equação restrita pode ser escrita como

$$\dot{w} = G(w), \quad G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

Substituindo (5.17) e (5.18) em (5.13) temos a equação homológica

$$H_w(w)G(w) = F(H(w)). \quad (5.19)$$

Expandimos as funções G e H em série de Taylor,

$$G(w) = \sum_{|v| \geq 1} \frac{1}{v!} g_v w^v, \quad H(w) = \sum_{|v| \geq 1} \frac{1}{v!} h_v w^v,$$

e assumimos que a equação restrita é colocada na forma normal até certa ordem. A seguir vamos encontrar os coeficientes g_v e h_v . Temos que $\sum_{|v|=1} h_v w^v$ está no autoespaço crítico de J . Sejam $p, q \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$Jq = 0, \quad J^T p = 0, \quad \langle p, q \rangle = 1. \quad (5.20)$$

Qualquer ponto do autoespaço crítico de J pode ser representado como $y = wq$, $w \in \mathbb{R}$, onde $w = \langle p, y \rangle$. A equação homológica (5.19) tem a forma

$$H_w \dot{w} = F(H(w)),$$

onde

$$\begin{aligned} F(H) &= JH + \frac{1}{2}B(H, H) + \frac{1}{6}C(H, H, H) + O(\|H\|^4) \\ H(w) &= wq + \frac{1}{2}h_2 w^2 + \frac{1}{6}h_3 w^3 + O(w^4), \end{aligned}$$

com $h_i \in \mathbb{R}^n$ e

$$\dot{w} = bw^2 + cw^3 + O(w^4),$$

com coeficientes b e c desconhecidos. Substituindo estas expressões na equação homológica, temos

$$\begin{aligned} bw^2q + (cq + bh_2)w^3 &= \frac{1}{2}w^2[Jh_2 + B(q, q)] \\ &+ \frac{1}{6}w^3[Jh_3 + 3B(q, h_2) + C(q, q, q)] + O(w^4). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Os coeficientes dos termos de w^2 nos fornecem a equação para h_2

$$Jh_2 = -B(q, q) + 2bq, \quad (5.22)$$

onde a matriz J é singular. Tomando o produto interno com p temos

$$0 = \langle p, Jh_2 \rangle = \langle p, -B(q, q) + 2bq \rangle = -\langle p, B(q, q) \rangle + 2b\langle p, q \rangle$$

e encontramos b

$$b = \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle.$$

Com este valor de b , o sistema linear (5.22) se torna

$$Jh_2 = -B(q, q) + \langle p, B(q, q) \rangle q,$$

e sua única solução $h_2 = -J^{\text{INV}}[B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q]$ satisfazendo $\langle p, h_2 \rangle = 0$ pode ser calculada resolvendo

$$\begin{pmatrix} J & q \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q, q) + \langle p, B(q, q) \rangle q \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agrupando os coeficientes de w^3 na equação (5.21), temos

$$cq + bh_2 = \frac{1}{6}Jh_3 + \frac{1}{2}B(q, h_2) + \frac{1}{6}C(q, q, q),$$

o qual é equivalente a outro sistema singular

$$Jh_3 = cq + bh_2 - \frac{1}{6}[C(q, q, q) + 3B(q, h_2)].$$

Tomando o produto interno com p temos

$$0 = \langle p, Jh_3 \rangle = c\langle p, q \rangle + b\langle p, h_2 \rangle - \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q) + 3B(q, h_2) \rangle.$$

Como $\langle p, h_2 \rangle = 0$, obtemos a seguinte expressão para o coeficiente c

$$c = \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q) + 3B(q, h_2) \rangle.$$

Agora, lembrando que $b = 0$ na bifurcação cúspide, temos

$$c = \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q) - 3B(q, J^{\text{INV}}B(q, q)) \rangle \neq 0.$$

De acordo com o Teorema da Variedade Central, existe uma família de variedades suaves unidimensionais próxima da origem. O Teorema de Shoshitaishvili (veja (KUZNETSOV, 2013, p.327)) nos dá a seguinte fórmula normal para este caso

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3 \\ \dot{\zeta}_- = -\zeta_- \\ \dot{\zeta}_+ = +\zeta_+ \end{cases}$$

onde $\zeta_{\pm} \in \mathbb{R}^{n_{\pm}}$, e n_- e n_+ são os números de autovalores dos equilíbrios críticos com $Re(\lambda) > 0$ e $Re(\lambda) < 0$.

Com isso, demonstramos o seguinte teorema que nos diz quando um sistema dinâmico possui a forma normal de uma bifurcação cúspide em certo ponto.

Teorema 5.4. Para que o sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

possua forma normal de uma bifurcação cúspide no ponto $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+2}$, devemos ter que

- $f(x, \alpha) = 0$
- $J = f_x(x, \alpha)$ possui autovalor $\lambda_1 = 0$ com multiplicidade 1, e nenhum outro com parte real nula
- $c = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) + 3B(q, J^{\text{INV}} B(q, q)) \rangle \neq 0$

onde B e C são dados por (5.15) e (5.16), e p e q são obtidos pela solução de (5.20).

5.2.4 Construção Rigorosa para Cúspide n -dimensional

Apresentamos agora o método computacional rigoroso, baseado nos polinômios radiais apresentados no Capítulo 2, para provar a existência de bifurcações cúspide para equações em dimensão n .

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

Usaremos o resultado da seção anterior, aplicando o método da continuação rigorosa, via polinômios radiais, para a obtenção de pontos de bifurcação cúspide em sistemas com dimensão $n \geq 1$.

Para verificar a existência de bifurcação cúspide precisamos garantir a existência de um ponto $(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ que satisfaça

- i) $f(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$;
- ii) $J = f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ possui somente um autovalor nulo e nenhum outro com parte real nula;
- iii) $p, q \in \mathbb{R}^n$, tal que $Jq = 0$, $J^T p = 0$, $\langle p, q \rangle = 1$;
- iv) $b(p, q) = \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle = 0$;
- v) $c(p, q) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) + 3B(q, J^{\text{INV}} B(q, q)) \rangle \neq 0$.

Denotamos $X = (x, \alpha, p, q) \in \mathbb{R}^{3n+2}$ e $F : \mathbb{R}^{3n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{3n+2}$ é dada por

$$F(X) = \begin{bmatrix} f(x, \alpha) \\ D_x f(x, \alpha) q \\ D_x f(x, \alpha)^T p \\ \langle p, q \rangle - 1 \\ b(p, q) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Seja $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}, \bar{q})$ uma aproximação numérica de uma solução de $F(X) = 0$, ou seja, $F(\bar{X}) \approx 0$. Seguindo as ideias de polinômios radiais, definimos o operador $T : \mathbb{R}^{3n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{3n+2}$ por

$$T(X) = X - AF(X), \quad (5.24)$$

onde A é uma inversa numérica de $DF(\bar{X})$ e

$$DF(X) = \begin{bmatrix} f_x(x, \alpha) & f_\alpha(x, \alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ D_{xx}f(x, \alpha)q & D_{x\alpha}f(x, \alpha)q & 0_{n \times n} & D_xf(x, \alpha) \\ D_{xx}f(x, \alpha)^T p & D_{x\alpha}f(x, \alpha)^T p & D_{x\alpha}f(x, \alpha)^T & 0_{n \times n} \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times 2} & q^T & p^T \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times 2} & b_p(p, q) & b_q(p, q) \end{bmatrix}.$$

Utilizamos os polinômios radiais para encontrar as estimativas necessárias e calcular rigorosamente o zero de F , como no Teorema 2.3, isto é, calcular Y_k e $Z_k(r)$, $k = 1, \dots, n$, que satisfaçam

$$|[T_k(\bar{x}) - \bar{x}_k]| \leq Y_k \quad \text{e} \quad \sup_{z, w \in B_r(0)} |DT_k(\bar{x} + z)w| \leq Z_k(r).$$

Feito isso, verificamos rigorosamente que $c(p, q) \neq 0$. Para verificar que nenhum outro autovalor de J possui parte real não nula, utilizamos o método da Seção 2.5.

Organizamos todo o processo em um algoritmo, como segue.

Algoritmo:

- (a) Calcular $(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ tal que $f(\tilde{x}, \tilde{\alpha}) = 0$, $\ker(J) = \{q\}$ e encontrar um vetor não nulo p tal que $\ker(J^T) = \{p\}$, $\langle p, q \rangle = 1$ e $b(p, q) = 0$. Isto pode ser feito encontrando uma bola em $\mathbb{R}^{3n+2}$ que contém uma única solução de (5.23), via polinômios radiais.
- (b) Mostrar que J possui somente um autovalor com parte real não nula. Podemos verificar isto utilizando os polinômios radiais, como na Seção 2.5, para mostrar que o conjunto dos autovalores de $f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$, denotado por $\sigma(f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha}))$, satisfaz
 - $\sigma(f_x(\tilde{x}, \tilde{\alpha})) \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$, para algumas bolas suficientemente pequenas $B_j \subset \mathbb{C}$;
 - $0 \in B_k$ para um único $k \in \{1, \dots, n\}$;
 - $B_j \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $j \neq k$.
- (c) Verificar que $c(p, q) \neq 0$.

Exemplo 5.2 (Predador-Presa). As equações de Lotka-Volterra foram propostas de forma independente pelo matemático Vito Volterra (1860-1940) e pelo biofísico Alfred James Lotka (1880-1949). Em 1925 Volterra utilizou as equações para descrever o trabalho do zoologista

Umberto d’Ancona, que analisou o crescimento da população de tubarões e o decréscimo da população dos demais peixes em um mar da Itália. No mesmo ano Lotka estudou a interação predador-presa e publicou um livro chamado “Elements of Physical Biology” apresentando a mesma modelagem. Tal modelo então passou a ser chamado de Lotka-Volterra.

Este sistema, dado pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} &= y(\delta x - \gamma),\end{aligned}\tag{5.25}$$

descreve a relação entre duas espécies (presa e predador), onde y é o número de predadores, x é o número de presas, t representa o tempo e os parâmetros α, β, γ e δ representam, respectivamente, a taxa de crescimento da população de presas, a taxa de decaimento da população de presas, a taxa de decaimento da população de predadores, e a taxa de crescimento da população de predadores.

Consideramos a seguinte equação apresentada por Scheffer (ver (DOEDEL *et al.*, 2007, p. 220) e (SCHEFFER *et al.*, 1997))

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= sx_1 \left(1 - \frac{x_1}{\alpha_1}\right) - g \frac{x_1 x_2}{x_1 + h_1} + d\alpha_1 \\ \dot{x}_2 &= eg \frac{x_1 x_2}{x_1 + h_1} - mx_2 - \alpha_2 \frac{x_2^2}{x_2^2 + h_2^2}, \end{cases}$$

onde α_1 e α_2 são parâmetros e $s = 0.5$, $g = 0.4$, $h_1 = 0.6$, $d = 0.01$, $e = 0.6$, $h_2 = 0.5$, $m = 0.15$.

Definimos $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, por

$$f(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} sx_1 \left(1 - \frac{x_1}{\alpha_1}\right) - g \frac{x_1 x_2}{x_1 + h_1} + d\alpha_1 \\ \frac{egx_1 x_2}{x_1 + h_1} - mx_2 - \frac{\alpha_2 x_2^2}{x_2^2 + h_2^2} \end{bmatrix}.$$

Denotamos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $x = (x_1, x_2)$, e $X = (x, \alpha, p, q) \in \mathbb{R}^8$. Seja $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}, \bar{q})$ uma solução numérica de $F(X) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ é definida como em (5.23), ou seja,

$$F(X) = \begin{bmatrix} f(x, \alpha) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)q \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)^T p \\ \langle p, q \rangle - 1 \\ b(x, \alpha, p, q) \end{bmatrix},$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{s(\alpha_1 - 2x_1)}{\alpha_1} - \frac{gh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^2} & -\frac{gx_1}{x_1 + h_1} \\ \frac{egh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^2} & \frac{egx_1}{x_1 + h_1} - m - \frac{2\alpha_2 h_2^2 x_2}{(x_2^2 + h_2^2)^2} \end{bmatrix}, \tag{5.26}$$

e $b(p, q) = \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle$.

Como visto anteriormente, definimos o operador $T : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ por

$$T(X) = X - AF(X),$$

onde A é uma inversa numérica de $DF(\bar{X})$, com

$$DF(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha) & \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha) q \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) q \right) & 0_{2 \times 2} & \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)^T p \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)^T p \right) & \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)^T & 0_{2 \times 2} \\ 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 2} & q^T & p^T \\ \frac{\partial b}{\partial x}(x, \alpha, p, q) & \frac{\partial b}{\partial \alpha}(x, \alpha, p, q) & \frac{\partial b}{\partial p}(x, \alpha, p, q) & \frac{\partial b}{\partial q}(x, \alpha, p, q) \end{bmatrix},$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ é dada por (5.26),

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{sx_1^2}{\alpha_1^2} + d & 0 \\ 0 & -\frac{x_2^2}{x_2^2 + h_2^2} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha) q \right) &= \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{bmatrix} \frac{s(\alpha_1 - 2x_1)}{\alpha_1} - \frac{gh_1x_2}{(x_1 + h_1)^2} & -\frac{gx_1}{x_1 + h_1} \\ \frac{egh_1x_2}{(x_1 + h_1)^2} & \frac{egx_1}{x_1 + h_1} - m - \frac{2\alpha_2h_2^2x_2}{(x_2^2 + h_2^2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right) &= \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{pmatrix} \frac{s(\alpha_1 - 2x_1)}{\alpha_1} - \frac{gh_1x_2}{(x_1 + h_1)^2} \end{pmatrix} q_1 - \frac{gx_1q_2}{x_1 + h_1} \right. &= \\ \left. \frac{egh_1x_2q_1}{(x_1 + h_1)^2} + \left(\frac{egx_1}{x_1 + h_1} - m - \frac{2\alpha_2h_2^2x_2}{(x_2^2 + h_2^2)^2} \right) q_2 \right] &= \\ \left[\begin{pmatrix} \frac{-2s}{\alpha_1} + \frac{2gh_1x_2}{(x_1 + h_1)^3} \end{pmatrix} q_1 - \frac{gh_1q_2}{(x_1 + h_1)^2} & \frac{-gh_1q_1}{(x_1 + h_1)^2} \\ \frac{-2egh_1x_2q_1}{(x_1 + h_1)^3} + \frac{egh_1q_2}{(x_1 + h_1)^2} & \frac{egh_1q_1}{(x_1 + h_1)^2} + \frac{2\alpha_2h_2^2(3x_2^2 - h_2^2)q_2}{(x_2^2 + h_2^2)^3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Abusando um pouco da notação, podemos denotar esta derivada por

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \left(\frac{-2s}{\alpha_1} + \frac{2gh_1x_2}{(x_1+h_1)^3} \right) q_1 - \frac{gh_1q_2}{(x_1+h_1)^2} & \frac{-gh_1q_1}{(x_1+h_1)^2} \\ \frac{-2egh_1x_2q_1}{(x_1+h_1)^3} + \frac{egh_1q_2}{(x_1+h_1)^2} & \frac{egh_1q_1}{(x_1+h_1)^2} + \frac{2\alpha_2h_2^2(3x_2^2-h_2^2)q_2}{(x_2^2+h_2^2)^3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} & \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) q
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} (x, \alpha) q \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{bmatrix} \frac{sx_1^2}{\alpha_1^2} + d & 0 \\ 0 & -\frac{x_2^2}{x_2^2 + h_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2sx_1}{\alpha_1^2} q_1 & 0 \\ 0 & \frac{-2x_2h_2^2}{(x_2^2 + h_2^2)^2} q_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (x, \alpha)^T p \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{bmatrix} \frac{s(\alpha_1 - 2x_1)}{\alpha_1} - \frac{gh_1x_2}{(x_1+h_1)^2} & \frac{egh_1x_2}{(x_1+h_1)^2} \\ -\frac{gx_1}{x_1+h_1} & \frac{egx_1}{x_1+h_1} - m - \frac{2\alpha_2h_2^2x_2}{(x_2^2+h_2^2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{bmatrix} \left(\frac{s(\alpha_1 - 2x_1)}{\alpha_1} - \frac{gh_1x_2}{(x_1+h_1)^2} \right) p_1 + \frac{egh_1x_2}{(x_1+h_1)^2} p_2 \\ -\frac{gx_1}{x_1+h_1} p_1 + \left(\frac{egx_1}{x_1+h_1} - m - \frac{2\alpha_2h_2^2x_2}{(x_2^2+h_2^2)^2} \right) p_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \left(\frac{-2s}{\alpha_1} + \frac{2gh_1x_2}{(x_1+h_1)^3} \right) p_1 - \frac{2egh_1x_2}{(x_1+h_1)^3} p_2 & -\frac{gh_1}{(x_1+h_1)^2} p_1 + \frac{egh_1}{(x_1+h_1)^2} p_2 \\ \frac{-gh_1}{(x_1+h_1)^2} p_1 + \frac{egh_1}{(x_1+h_1)^2} p_2 & \frac{2\alpha_2h_2^2(3x_2^2-h_2^2)}{(x_2^2+h_2^2)^3} p_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} (x, \alpha)^T p \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{bmatrix} \frac{sx_1^2}{\alpha_1^2} + d & 0 \\ 0 & -\frac{x_2^2}{x_2^2 + h_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2sx_1}{\alpha_1^2} p_1 & 0 \\ 0 & \frac{-2x_2h_2^2}{(x_2^2 + h_2^2)^2} p_2 \end{bmatrix}$$

Para calcularmos as derivadas parciais de $b(x, \alpha, p, q)$, vamos primeiro escrever $b(x, \alpha, p, q)$ explicitamente. Temos que

$$b(x, \alpha, p, q) = \frac{1}{2} \langle p, B(x, \alpha, q, q) \rangle,$$

onde $B(x, \alpha, u, v) = (B_1(x, \alpha, u, v), B_2(x, \alpha, u, v))$ é dado, como em (5.15), por

$$B_i(x, \alpha, u, v) = \sum_{j,k=1}^2 \left(\frac{\partial^2 f_i(x, \alpha)}{\partial x_j \partial x_k} \right) u_j v_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} B_1(x, \alpha, q, q) &= \frac{\partial^2 f_1(x, \alpha)}{\partial x_1^2} q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_1(x, \alpha)}{\partial x_1 \partial x_2} q_1 q_2 + \frac{\partial^2 f_1(x, \alpha)}{\partial x_2^2} q_2^2 \\ &= \left(-\frac{2s}{\alpha_1} + \frac{2gh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^3} \right) q_1^2 - \frac{2gh_1}{(x_1 + h_1)^2} q_1 q_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_2(x, \alpha, q, q) &= \frac{\partial^2 f_2(x, \alpha)}{\partial x_1^2} q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_2(x, \alpha)}{\partial x_1 \partial x_2} q_1 q_2 + \frac{\partial^2 f_2(x, \alpha)}{\partial x_2^2} q_2^2 \\ &= -\frac{2egh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^3} q_1^2 + \frac{2egh_1}{(x_1 + h_1)^2} q_1 q_2 + \frac{2\alpha_2 h_2^2 (3x_2^2 - h_2^2)}{(x_2^2 + h_2^2)^3} q_2^2 \end{aligned}$$

já que $\frac{\partial^2 f_1(x, \alpha)}{\partial x_2^2} = 0$. Assim, $\frac{\partial b}{\partial x}(x, \alpha, p, q)$ é dado por

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x, \alpha, p, q) = \begin{bmatrix} \frac{3gh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^4} (ep_2 - p_1) q_1^2 + \frac{2gh_1}{(x_1 + h_1)^3} (p_1 - ep_2) q_1 q_2 \\ \frac{gh_1}{(x_1 + h_1)^3} (p_1 - ep_2) q_1^2 + \frac{12\alpha_2 h_2^2 x_2 (h_2^2 - x_2^2)}{(x_2^2 + h_2^2)^4} p_2 q_2^2 \end{bmatrix}$$

Além disto,

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha}(x, \alpha, p, q) = \begin{bmatrix} \frac{sp_1 q_1^2}{\alpha_1^2} & \frac{p_2 h_2^2 (3x_2^2 - h_2^2) q_2^2}{(x_2^2 + h_2^2)^3} \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial b}{\partial p}(x, \alpha, p, q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} B_1(x, \alpha, q, q) & \frac{1}{2} B_2(x, \alpha, q, q) \end{bmatrix}$$

Temos ainda que $\frac{\partial b}{\partial q}(x, \alpha, p, q)$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial q}(x, \alpha, p, q) &= \\ &= \begin{bmatrix} \left(\left(-\frac{s}{\alpha_1} + \frac{gh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^3} \right) p_1 - \frac{egh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^3} p_2 \right) 2q_1 + \left(-\frac{gh_1}{(x_1 + h_1)^2} p_1 + \frac{egh_1}{(x_1 + h_1)^2} p_2 \right) q_2 \\ \left(-\frac{gh_1}{(x_1 + h_1)^2} p_1 + \frac{egh_1}{(x_1 + h_1)^2} p_2 \right) q_1 + \frac{2\alpha_2 h_2^2 (3x_2^2 - h_2^2)}{(x_2^2 + h_2^2)^3} p_2 q_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora vamos procurar Y e $Z(r)$ satisfazendo (2.4). Para Y tomamos

$$|T(\bar{X}) - \bar{X}| = |-AF(\bar{X})| = |AF(\bar{X})| =: Y$$

Para encontrar $Z(r)$, considere $b, c \in \overline{B_r(0)}$. Temos

$$\begin{aligned} DT(\bar{X} + b)c &= (I - ADF(\bar{X} + b))c \\ &= (I - ADF(\bar{X}))c - A(DF(\bar{X} + b)c - DF(\bar{X})c). \end{aligned}$$

Tomando $b = ru$ e $c = rv$, com $u, v \in \overline{B_1(0)}$, segue que

$$|DT(\bar{X} + b)c| \leq |I - ADF(\bar{X})v|r + |A(DF(\bar{X} + b) - DF(\bar{X}))v|r.$$

Calculando as estimativas

$$Z_0 := |I - ADF(\bar{X})v|, \quad \text{e} \quad Z_1 := |A(DF(\bar{X} + b) - DF(\bar{X}))v|,$$

obtemos a estimativa

$$Z := (Z_0 + Z_1)r.$$

Com os limitantes Y e $Z(r)$ encontrados acima, podemos definir os polinômios radiais $p(r) = Y + Z(r) - r$. A partir dos polinômios radiais encontramos o raio

$$r_0 = 3.1104 \times 10^{-10}$$

tal que $p(r_0) < 0$. Com isto segue do Teorema 2.3 que existe um único ponto $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{p}, \tilde{q})$ na bola $B_{r_0}(\bar{X})$, tal que

$$F(\tilde{X}) = 0.$$

A seguir, utilizando o método da Seção 2.5, verificamos a condição (b) da bifurcação cúspide, ou seja, que 0 é um autovalor simples e todos os outros autovalores tem parte real diferente de 0.

Finalmente precisamos verificar que

$$c(\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{1}{6} \langle \tilde{p}, C(\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{q}, \tilde{q}, \tilde{q}) + 3B(\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{q}, J^{INV}B(\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{q}, \tilde{q})) \rangle \neq 0,$$

onde $C(x, \alpha, u, v, w) = (C_1(x, \alpha, u, v, w), C_2(x, \alpha, u, v, w))$ é dado, como em (5.16), por

$$C_i(x, \alpha, u, v, w) = \sum_{j,k,\ell=1}^2 \left(\frac{\partial^3 f_i(x, \alpha)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_\ell} \right) u_j v_k w_\ell,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C_1(x, \alpha, q, q, q) &= \frac{\partial^3 f_1(x, \alpha)}{\partial x_1^3} q_1^3 + 3 \frac{\partial^3 f_1(x, \alpha)}{\partial x_1^2 \partial x_2} q_1^2 q_2 + 3 \frac{\partial^3 f_1(x, \alpha)}{\partial x_1 \partial x_2^2} q_1 q_2^2 + \frac{\partial^3 f_1(x, \alpha)}{\partial x_2^3} q_2^3 \\ &= -\frac{6gh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^4} q_1^3 + 3 \frac{2gh_1}{(x_1 + h_1)^3} q_1^2 q_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_2(x, \alpha, q, q, q) &= \frac{\partial^3 f_2(x, \alpha)}{\partial x_1^3} q_1^3 + 3 \frac{\partial^3 f_2(x, \alpha)}{\partial x_1^2 \partial x_2} q_1^2 q_2 + 3 \frac{\partial^3 f_2(x, \alpha)}{\partial x_1 \partial x_2^2} q_1 q_2^2 + \frac{\partial^3 f_2(x, \alpha)}{\partial x_2^3} q_2^3 \\ &= -\frac{6egh_1 x_2}{(x_1 + h_1)^4} q_1^3 + 3 \frac{2egh_1}{(x_1 + h_1)^3} q_1^2 q_2 + \frac{24\alpha_2 h_2^2 x_2 (h_2^2 - x_2^2)}{(x_2^2 + h_2^2)^4} q_2^3 \end{aligned}$$

Utilizando aritmética intervalar (ver (GAMEIRO; MANOLIOS, 2004)), verificamos que $c(\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{p}, \tilde{q}) \neq 0$.

Portanto provamos que existe um ponto $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{p}, \tilde{q})$ onde ocorre uma bifurcação cúspide. A Figura 6 mostra a variedade das soluções de equilíbrio e o ponto onde ocorre a bifurcação cúspide.

Figura 6 – Variedade das soluções de equilíbrio e o ponto onde ocorre a bifurcação cúspide.

CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho apresentamos uma extensão do método introduzido em ([GAMEIRO; LESSARD; PUGLIESE, 2015](#)) para multiparâmetros. Aprimoramos tal artigo para calcular cartas locais suaves em dimensão n maior ou igual a dois, definidas implicitamente pela variedade de equilíbrio de uma função $f : \mathbb{R}^n \times B_1 \rightarrow B_2$, B_1 e B_2 espaços de Banach. Após desenvolvido o método, calculamos variedades de equilíbrio n -dimensional para a equação de Cahn-Hilliard com o auxílio de um computador para ter provas rigorosas. Também aplicamos o método dos polinômios radiais para calcular bifurcações do tipo cúspides, obtivemos as condições necessárias para um modelo de equações possuir uma bifurcação cúspide, onde as condições de existir bifurcações são encontradas em ([KUZNETSOV, 2013](#)), descrevemos o processo para os casos de dimensão um e n , com n maior ou igual a dois, e colocamos tais condições para fácil manuseio, ou seja, em uma única função. E o problema de encontrar bifurcação cúspide passa a ser um problema de encontrar o equilíbrio de uma função e então aplicar o método dos polinômios radiais se tornou mais simples. Utilizamos o computador para a obtenção de provas assistidas pelo computador para encontrar uma bifurcação cúspide nas equações de Lotka-Volterra, conhecida pelo modelo Predador-Presa. Estudamos a equação com dados proposto por ([DOEDEL *et al.*, 2007](#)), no qual nos dá um ponto inicial para encontrar tal bifurcação numericamente, tal ponto se torna o nosso centro da bola e o raio é dado pelos polinômios radiais. Com isso obtemos uma bola, com centro e raio, com uma solução real do problema de equilíbrio, ou seja, onde realmente há uma bifurcação cúspide do problema dado em ([DOEDEL *et al.*, 2007](#)). Tal solução é chamada real por ser definida pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach e pelo auxílio do computador, isto é, numericamente.

Assim obtemos provas assistidas por computador, ou numérico rigoroso, ou computação rigorosa, ou continuação rigorosa, etc, para ambos os problemas de encontrar equilíbrio para a equação de Cahn-Hilliard e encontrar uma bifurcação cúspide para a equação de Lotka-Volterra.

Para trabalhos futuros, utilizaremos as ideias do Capítulo 5 para encontrar bifurcações

do tipo Bogodanov-Takens para a equação de Lokta-Volterra. Também pode-se utilizar as ideias do Capítulo 3 para calcular variedades de soluções de outras equações, por exemplo, variedades de soluções periódicas do sistema Lorenz dependendo de 3 parâmetros.

REFERÊNCIAS

BERG, J. van den; LESSARD, J.-P.; MISCHAIKOW, K. Global smooth solution curves using rigorous branch following. **Mathematics of Computation**, v. 79, n. 271, p. 1565–1584, 2010. Citado nas páginas 17 e 34.

BRODZIK, M. The computation of simplicial approximations of implicitly defined p-dimensional manifolds. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 93–113, 1998. Citado nas páginas 17, 34, 36 e 38.

BRODZIK, M. L.; RHEINBOLDT, W. C. The computation of simplicial approximations of implicitly defined two-dimensional manifolds. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 28, n. 9, p. 9–21, 1994. Citado nas páginas 17 e 34.

CARMEN, C. Ordinary differential equations with applications. **Texts in Applied Mathematics**, v. 34, 2000. Citado na página 21.

DAY, S.; LESSARD, J.-P.; MISCHAIKOW, K. Validated continuation for equilibria of pdes. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 45, n. 4, p. 1398–1424, 2007. Citado na página 17.

DOEDEL, E. J.; FAIRGRIEVE, T. F.; SANDSTEDE, B.; CHAMPNEYS, A. R.; KUZNETSOV, Y. A.; WANG, X. Auto-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Citeseer, 2007. Citado nas páginas 18, 75 e 81.

GAMEIRO, M.; LESSARD, J.; JAMES, J. M.; MISCHAIKOW, K. Ordinary differential equations: A constructive approach. **À être publié**, 2015. Citado nas páginas 21 e 22.

GAMEIRO, M.; LESSARD, J.-P. **Computational fixed point theory for time periodic solutions of PDEs**. [S.l.]: preparation. Citado na página 17.

_____. Analytic estimates and rigorous continuation for equilibria of higher-dimensional pdes. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 249, n. 9, p. 2237–2268, 2010. Citado na página 17.

_____. Existence of secondary bifurcations or isolas for pdes. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 74, n. 12, p. 4131–4137, 2011. Citado na página 17.

_____. Rigorous computation of smooth branches of equilibria for the three dimensional cahn–hilliard equation. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 117, n. 4, p. 753–778, 2011. Citado nas páginas 17 e 34.

_____. Efficient rigorous numerics for higher-dimensional pdes via one-dimensional estimates. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 51, n. 4, p. 2063–2087, 2013. Citado na página 17.

GAMEIRO, M.; LESSARD, J.-P.; MISCHAIKOW, K. Validated continuation over large parameter ranges for equilibria of pdes. **Mathematics and computers in simulation**, Elsevier, v. 79, n. 4, p. 1368–1382, 2008. Citado na página 17.

- GAMEIRO, M.; LESSARD, J.-P.; PUGLIESE, A. Computation of smooth manifolds via rigorous multi-parameter continuation in infinite dimensions. Springer, 2015. Citado nas páginas 18, 27, 34 e 81.
- GAMEIRO, M.; MANOLIOS, P. Formally verifying an algorithm based on interval arithmetic for checking transversality. In: **Fifth International Workshop on the ACL2 Theorem Prover and Its Applications (ACL2-2004)**. [S.l.: s.n.], 2004. Citado na página 79.
- HENDERSON, M. E. Multiple parameter continuation: Computing implicitly defined k-manifolds. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 12, n. 03, p. 451–476, 2002. Citado na página 17.
- KUZNETSOV, Y. A. Numerical normalization techniques for all codim 2 bifurcations of equilibria in ode's. **SIAM journal on numerical analysis**, SIAM, v. 36, n. 4, p. 1104–1124, 1999. Citado na página 69.
- _____. **Elements of applied bifurcation theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 112. Citado nas páginas 18, 62, 72 e 81.
- LESSARD, J.-P. Rigorous verification of saddle-node bifurcations in odes. **Indagationes Mathematicae**, Elsevier, v. 27, n. 4, p. 1013–1026, 2016. Citado nas páginas 18, 21, 22 e 24.
- MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to interval analysis**. [S.l.]: SIAM, 2009. Citado na página 17.
- POSTON, T.; STEWART, I. **Catastrophe theory and its applications**. [S.l.]: Courier Corporation, 2014. Citado na página 66.
- SCHEFFER, M.; RINALDI, S.; KUZNETSOV, Y. A.; NES, E. H. van. Seasonal dynamics of daphnia and algae explained as a periodically forced predator-prey system. **Oikos**, JSTOR, p. 519–532, 1997. Citado na página 75.