UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Os benefícios no processo de ensino-aprendizagem do aluno em resolver o mesmo problema de Matemática de diferentes formas usando o método de Polya

Davi Felipe Bassi

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Davi Felipe Bassi

Os benefícios no processo de ensino-aprendizagem do aluno em resolver o mesmo problema de Matemática de diferentes formas usando o método de Polya

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

USP – São Carlos
Julho de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

B321b

Bassi, Davi Felipe
Os benefícios no processo de ensino-aprendizagem do aluno em resolver o mesmo problema de Matemática de diferentes formas usando o método de Polya / Davi Felipe Bassi; orientadora Rosana Retsos Signorelli Vargas. -- São Carlos, 2024.
65 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Método de Polya. 2. Resolução de Problemas. 3. Heurística. 4. Estratégias. 5. Diferentes Resoluções. I. Vargas, Rosana Retsos Signorelli, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Davi Felipe Bassi

The benefits in the student's teaching-learning process of solving the same mathematical problem in different ways using the Polya method

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

USP – São Carlos
July 2024

Dedico à todos que se interessam pela Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família que tem me apoiado nos momentos mais difícieis, assim como aos meus amigos do PROFMAT que também foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Do mesmo modo, agradeço aos meus professores do curso, com um agradecimento especial a minha orientadora, Drª Rosana, que me acolheu e que muito me auxiliou no desenvolvimento desta dissertação.

Por fim, sou grato à USP por ter me dado a oportunidade de realizar um curso com professores e alunos de excelência.

“Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção.”
(Paulo Freire)

RESUMO

BASSI, D. F. **Os benefícios no processo de ensino-aprendizagem do aluno em resolver o mesmo problema de Matemática de diferentes formas usando o método de Polya** . 2024. 65 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Tendo em vista que muitos alunos sofrem da falta de criatividade na hora de resolver problemas, pesquisa-se sobre diferentes formas de resolvê-lo, a fim de buscar os benefícios de tal ação pelo método de Polya. Para tanto, é necessário entender um pouco da história de Polya e seu método, dissertar sobre a resolução de problemas e os seus benefícios, apresentar a teoria necessária para o entendimento dos problemas que serão apresentados e aplicar o método de Polya em problemas que contenham mais de uma solução. Diante disso, verifica-se que ao resolver o mesmo problema de diferentes formas desenvolve-se a criatividade do aluno, aumenta a compreensão com relação a matemática como um todo, além de criar correlações entre a disciplina o que amplia muito a chance de resolver futuros problemas, o que impõe a constatação de que resolver problemas de diferentes formas traz diversos benefícios. Por isso, é fundamental que mais professores adotem a resolução de problemas como método de ensino e que tenham uma boa preparação para ouvir e discutir diferentes resoluções e pontos de vista. Também é preciso que o professor faça uma boa avaliação, realizando provas que não contenham, entre outras características, pegadinhas ou enunciados longos demais sem propósito.

Palavras-chave: Método de Polya, Resolução de Problemas, Heurística, Estratégias, Diferentes Resoluções.

ABSTRACT

BASSI, D. F. **The benefits in the student's teaching-learning process of solving the same mathematical problem in different ways using the Polya method**. 2024. 65 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Considering that many students suffer from a lack of creativity when solving problems, research is being conducted on different ways to address this issue in order to seek the benefits of such actions through the Polya method. To do so, it is necessary to understand a bit of Polya's history and his method, discuss the problem-solving process and its benefits, present the necessary theory for the understanding of the problems that will be presented, and apply Polya's method to problems with more than one solution. In light of this, it is observed that solving the same problem in different ways enhances the student's creativity, increases understanding of mathematics as a whole, and establishes correlations between disciplines, greatly expanding the chances of solving future problems. This leads to the realization that solving problems in different ways brings various benefits. Therefore, it is crucial for more teachers to adopt problem-solving as a teaching method and to be well-prepared to listen to and discuss different resolutions and perspectives. It is also necessary for the teacher to conduct a thorough assessment, administering tests that do not include, among other characteristics, tricky questions or excessively long statements without purpose..

Keywords: Polya Method, Problem Solving, Heuristic, Strategies, Different Resolutions .

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Resolver problemas não é só importante para o desenvolvimento abstrato do aluno, como, também, para o desenvolvimento do pensamento crítico. Isto também vale para professores, uma vez que sempre há algum ganho em se resolver um problema.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na solução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. (POLYA, 1975, p. V)

Isto quer dizer que a resolução de problemas não é só uma forma de exercitar a mente assim como uma forma de retribuição a mesma. Quem resolve problemas sente uma sensação de dever cumprido, além de ter a oportunidade de aprender mais sobre o tópico do problema.

Para que o aluno usufrua da melhor forma possível o ato de resolver problemas, deve-se deixá-lo descobrir o que for capaz e dar apenas pequenas dicas que não entreguem boa parte da resolução. A par disso, se o mesmo encontrar diferentes formas de resolver o problema, ele terá feito um grande avanço para tirar o máximo proveito do problema apresentado.

Assim, propusemos como problema de pesquisa a seguinte questão: Quais são os benefícios que os alunos do ensino médio podem obter ao resolver, pelo método de Polya, problemas de diferentes maneiras?

Para que o problema de pesquisa seja resolvido, temos, como objetivo geral do trabalho, encontrar quais são os beneficios que os alunos do ensino médio podem obter ao resolver, pelo método de Polya, problemas de diferentes maneiras.

Como consequência do objetivo geral acima mencionado, temos, como objetivos específicos: Descrever o método de Polya, resolução de problemas e os benefícios de resolvê-los de diferentes formas, demonstrar uma base teórica de Matemática e apresentar algumas aplicações do método de Polya.

Temos como hipótese o fato de que resolver problemas de diferentes formas geram muitos benefícios para quem assim o fizer. Acredita-se de que os benefícios são ainda maiores se os problemas forem resolvidos pelo método de Polya.

No capítulo 2, vamos falar sobre Polya e seu método para a resolução de problemas. Tal método permite que quem se propuser a resolver problemas pode alcançar a conclusão em 4 fases: compreender o problema, elaborar um plano, executá-lo e fazer um retrospecto.

Já no capítulo 3, iremos falar mais sobre a resolução de problemas indicando a diferença entre problemas propriamente dito e exercícios, assim como a importância de resolvê-los além de algumas orientações para professores.

No quarto capítulo indicaremos uma base de matemática necessária para a resolução de problemas que serão apresentados no trabalho.

No capítulo de número 5 iremos realizar algumas aplicações do método de Polya, resolvendo problemas de diversas formas.

Acreditamos que na conclusão do trabalho os objetivos terão sido compridos, e, consequentemente, o alcance da pesquisa de tal forma que sejam mostrados os benefícios não só de resolver problemas como, também, de demonstrar diferentes formas de resolver o mesmo problema.

CAPÍTULO

2

POLYA

Iremos escrever neste capítulo sobre a história de Polya e seu método que é base para muitos com relação à resolução de problemas.

2.1 História de Polya

George Polya (1887 - 1985) nasceu na Hungria, na cidade de Budapeste, sendo autor de livros como "Mathematics and Plausible Reasoning"e "Mathematical Discovery". Foi professor no ETH Zürich (Instituto Federal de Tecnologia de Zurique), na Suíça, e na Universidade de Stanford nos Estados Unidos, no qual se aposentou em 1953, embora tenha dado continuidade em seus livros e artigos.

Através de seus livros, foi reconhecido como um dos pioneiros da teoria de Resolução de Problemas influenciando pessoas e trabalhos em todo o mundo. Polya criou diversos livros voltados para o professor na área de ensino de resolução de problemas, o que vai contra a maioria dos demais que criava materiais visando melhorar, diretamente, o desempenho do aluno.

Embora Polya tenha criado muitas obras essenciais para a Resolução de Problemas, servirá de base para a presente pesquisa o livro "A arte de Resolver Problemas", Polya (1975).

2.2 Método de Polya

O Método de Polya, apresentado no livro A Arte de Resolver Problemas, apesar da idade, é usado até hoje como forma de ajudar alunos e professores com os problemas matemáticos.

Para que a resolução de problemas ocorra, é fundamental termos na bagagem vários outros problemas resolvidos. De acordo com Polya (1975), podemos utilizar parte de um problema similar para a resolução que ora nos deparamos. Isto significa que um problema mais simples pode ser usado para a resolução de um problema mais complexo.

Altere a condicionante, varie a incógnita, realize perguntas, depois veja como os dados podem ajudar ao mudarmos os demais elementos do problema. Que informações podemos ganhar com estas alterações?

Por fim, chegamos às 4 fases de Polya (1975):

1) Compreensão do problema

É preciso evitar a todo custo de que a resolução de um problema seja iniciada sem ao menos entendê-la completamente. Da mesma forma, é preciso ter real interesse na resolução do problema. Por isso, Polya (1975, p. 4) diz que "o problema deve se bem escolhido, nem muito difícil, nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação". A incógnita, os dados e a condicionante devem estar bem compreendidas por aqueles que desejam resolver o problema.

Assim, existe sempre um caminho que pode ser seguido. Muitas vezes, com perguntas simples, pode-se avançar bem num problema em que estejamos bloqueados. Polya (1975, p. 41) diz que “em quase todos os casos, é aconselhável começar o exame detalhado do problema pelas indagações: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?”. Assim, fica muito mais fácil e interessante a resolução de problemas mais complexos.

Identificar problemas similares ao que está sendo resolvido, pode ajudar muito na resolução do problema apresentado. Ou seja, deve-se perguntar se existe um problema similar ao que está sendo apresentado. Isto facilita a compreensão do enunciado assim como a capacidade de resolvê-lo.

2) Estabelecendo um plano

É possível ter em mãos um plano depois que compreendemos realmente o problema. Entretanto, Polya (1975, p. 5) alerta para o fato de que “o caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso”. Assim, o professor pode lançar pequenas indagações e sugestões para despertar uma ideia de como resolver o problema.

É difícil resolver um problema se não há nenhum conhecimento anterior que possa ajudar a resolvê-lo. As ideias em geral são baseadas em algum conhecimento prévio. Por isso, é preciso perguntar se há algum problema correlato, isto é, que se assemelhe de alguma forma ao problema proposto para ser resolvido, como a sua incógnita, por exemplo.

Existem algumas formas de como abordar o problema no que diz respeito aos dados, a incógnita e a condicionante. Uma hora os dados podem ser mudados e os demais mantidos, outra hora a condicionante deve ser alterada ou por fim, manter a incógnita e os dados. Essas alterações muitas vezes nos dão dicas a respeito de um plano para a resolução do problema.

Por este motivo, caso não seja possível resolver o problema a primeira vista, deve-se procurar por outros problemas semelhantes ao ora apresentado.

3) Execução do plano

Executar um plano é muito mais fácil do que planejar um.

O aluno pode, muitas vezes, esquecer do plano que foi traçado, principalmente quando ele vem de fora, ou seja, não tenha sido sua ideia. Caso ele tenha concebido o plano por si só, mesmo com um pouco de ajuda, dificilmente ele se perderá na execução do plano.

Por isso, é preciso analisar o que está sendo feito. Da mesma forma, temos que, por Polya (1975, p. 4) "muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante verificar cada passo". É um hábito que o aluno deve desenvolver com o tempo.

4) Retrospecto

Temos que retornar à solução do problema e verificar cada passo dado para que se desenvolva a arte de resolver problemas. Ou seja, o trabalho não está pronto ao resolvê-lo. Isto só não ajuda a resolução de problemas, mas, também, a criar um pensamento crítico do aluno.

Dessa forma, além de resolver o problema, é interessante procurar resolvê-lo de outra forma. É fundamental procurar mais de uma resolução com vistas a encontrar outros caminhos mais curtos e objetivos. Além da possibilidade de achar uma solução mais interessante, desenvolve-se a capacidade de resolvê-los.

Pode-se aproveitar de uma solução longa e complicada e torná-la numa solução mais curta, e, além disso, muitas vezes é possível encontrar no resultado uma abreviação da resolução. Por isso, deve-se sempre olhar para a solução com um olhar mais atento ao final desta.

Resumindo as 4 fases de Polya, tirados do livro de Dante (1991), temos:

Compreender o problema

a) O que se pede no problema?

b) Quais são os dados e as condições do problema?

c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?

d) É possível estimar a resposta?

Elaborar um plano

a) Qual é o seu plano para resolver o problema?

b) Que estratégia você tentará desenvolver?

c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?

d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.

e) Tente resolver o problema por partes.

Executar o plano

a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.

b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.

c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Fazer o retrospecto ou verificação

a) Examine se a solução obtida está correta.

b) Existe outra maneira de resolver o problema?

c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

Para exemplificar, o seguinte problema foi retirado do livro de Dante (1991, p. 72).

Uma banca vende 150 jornais por dia. No domingo, ela vende 100 jornais a mais do que nos outros dias. Quantos jornais são vendidos numa semana?

a) **Compreendendo o problema**

Dados:

Vendas de jornais por dia: 150. Vendas de jornais no domingo: 100 a mais.

Objetivo: Determinar o número de jornais vendidos numa semana.

b) **Estabelecendo um plano**

1ª estratégia

Multiplicar 150 por 7 e, ao resultado, somar 100.

2ª estratégia

Multiplicar 150 por 6 e, ao resultado, somar 250.

c) **Executando o plano**

1ª estratégia

$$\begin{array}{lr} & 150 \\ \text{x} & 7 \\ \hline & 1050 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 1050 \\ + & 100 \\ \hline & 1150 \end{array}$$

2ª estratégia

$$\begin{array}{lr} & 150 \\ \text{x} & 6 \\ \hline & 900 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 900 \\ + & 250 \\ \hline & 1150 \end{array}$$

d) **Fazendo o retrospecto ou verificação**

Nossos cálculos estão corretos, porque 1050 + 100 = 1150 e 900 + 250 = 1150.

Resposta: São vendidos 1150 jornais numa semana.

Como podemos ver o método de Polya quando bem utilizado, ajuda na organização e elaboração do problema. Vamos ver agora a causa da resolução de problemas ser tão importante no currículo dos alunos.

CAPÍTULO

3

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

3.1 A importância de resolver problemas

É essencial que o professor saiba lidar com a resolução de problemas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) Brasil (1998) resolver problemas tem como objetivo principal possibilitar o aprendizado de diferentes elementos matemáticos. Assim, é necessário saber usufruir da resolução de problemas o máximo possível.

Portanto, é preciso entender uma das principais características de quem costuma resolver problemas. De acordo com Brolezzi (2013), resolver problemas pode capacitar o aluno a ter uma relação melhor com a matemática, sentindo-se estimulado e divertindo-se com a matéria. Por isso, o professor não pode abrir mão de incentivar a resolução de problemas por parte dos alunos.

Dada a importância do tema, é preciso alertar que a resolução de problemas não deve ser um costume apenas para quem estuda matemática, ou seja, da área de exatas. A resolução de problemas de matemática pode ser valiosa até para aqueles que não se interessam ou não utilizam a matemática no seu dia-a-dia.

Além disso, como menciona Gontijo (2006) ter a percepção de olhar para o mesmo problema por diferentes ângulos é importante para o desenvolvimento na criação de problemas.

Para Medeiros (2020) a resolução de problemas pode fazer com que haja um aumento na autonomia e capacidade crítica do aluno. Isto só deve ser possível se houver uma associação com o cotidiano do aluno além da vontade deste em achar resoluções para os problemas encontrados.

Além do relatado acima, temos alguns outros objetivos de resolução de problemas destacados por Dante (1991). São eles:

- **Fazer o aluno pensar produtivamente**: Ao encarar problemas, o aluno é levado a pensar produtivamente, isto é, levar menos tempo para produzir, sejam estes soluções de problemas ou tarefas mais simples. Esta característica é reconhecida no mundo todo como uma das metas para alunos do 1º grau.

- **Desenvolver o raciocínio do aluno**: A resolução de problemas promove um desenvolvimento no raciocínio lógico do aluno de tal maneira que o ajuda a resolver problemas do dia-a-dia.

- **Ensinar o aluno a enfrentar situações novas**: Algumas ferramentas que possam ser úteis hoje podem não ser mais amanhã. Saber usar e replicar algoritmos parece não ser o melhor caminho. Como as tecnologias e as mudanças sociais se aprimoram a cada dia, é de interesse do aluno que esteja preparado para enfrentar novas situações sejam elas quais forem.

- **Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática**: No 1º Grau o que mais se encaixa para apresentar aplicações de Matemática é através da resolução de problemas. O que ocorre com frequência é os alunos detestarem logo de início a disciplina. Isto, em geral, deve-se pelo exagero do uso de algoritmos e a falta de vínculo com o que se vê no cotidiano, além da pouca aplicação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

- **Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras**: Exercícios que possam ser simplesmente imitados por algoritmos para a resolução destes, possuem uma probabilidade menor de fazer com que o aluno se torne ativo no processo de ensino-aprendizagem do que um ambiente que promova a resolução de problemas. Quanto maior for a dificuldade do problema, maior será a satisfação em resolvê-lo. O aluno, assim, é levado a ser menos passivo.

- **Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas**: Como os problemas necessitam de um bom leque de estratégias para serem resolvidos, ao adquirir o hábito de resolver problemas o aluno estará, também, levando na bagagem estratégias para a resolução de situações onde a incógnita é procurada.

- **Dar uma boa base matemática às pessoas**: Como a matemática está presente em praticamente tudo que existe, ao resolver problemas o aluno leva consigo a capacidade de resolver problemas de outras áreas correlatas como medicina, física e engenharia, além do aumento do conhecimento da própria matemática.

Diante de tantas vantagens, fica difícil ignorar que a resolução de problemas é fundamental para os alunos, mesmo que estes não sejam da área de exatas. Estas vantagens são ampliadas quando o professor usa de forma adequada os problemas na sala de aula, entendendo os seus alunos e o seu processo em suas resoluções.

Agora veremos o que é heurística e como ela pode nos ajudar na resolução de problemas.

3.2 Heurística

Para Schoenfeld (2016) não podemos falar sobre heurística sem citar Polya. O livro de Polya (1975) iniciou um movimento que foi ganhar força nos anos 80. Apesar de ser bem conhecido e citado, geralmente não há um aprofundamento em suas ideias.

Polya é reconhecido por aqueles que possuem boas habilidades matemáticas. Apesar disso, nos anos 70 aqueles que resolviam problemas, mal se apoiaram em suas ideias.

De acordo com Polya (1975) para haver uma compreensão sobre como resolver um problema, é preciso entender as operações mentais envolvidas no seu processo. Para isso, deve-se usar a heurística, evitando que informações importantes passem despercebidas.

Para Polya (1975, p. 87) o significado de Heurística se resume a "que serve para descobrir". Por Brolezzi (2013) podemos dizer que heurística é aprender a inventar, que pode ser até inventar uma forma de resolver problemas. Ainda temos que os problemas podem nos levar a vários caminhos diferentes e estão ligados à criatividade e as heurísticas.

Ou seja, saber resolver problemas, identificando as dificuldades e testando hipóteses, pode ser um sinal de criatividade. É importante entender a heurística para a resolução de problemas haja vista que é com ela que se aprende como resolvê-los. Para Polya (1975, p. 86) “O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e de invenção”. Embora a importância da heurística seja clara, muitas vezes ela é deixada de lado.

Percebemos então que a resolução de problemas sem uso das heurísticas, pode acarretar em um ensino pouco enriquecedor e trazer uma sensação ao aluno de que a Matemática não lhe serve, seja por achar muito difícil ou por ser pouco interessante.

A experiência e a observação desta atividade pelos outros deve se adequar à heurística. Assim, devemos procurar entender os aspectos comuns na resolução dos problemas. A heurística possui aspectos práticos para entender processos que são comuns aos problemas, melhorando o ensino da Matemática.

Por sua vez, para Brolezzi (2013) podemos dizer que heurística é aprender a inventar, que no caso é inventar a forma de resolver problemas. Deste modo, é importante que o professor tenha um bom conhecimento sobre as heurísticas para poder ajudar o aluno a aprender, aos poucos, a se virar sozinho.

Ainda segundo o mesmo autor, um exemplo de heurística é quando transformamos um problema em um exercício mais simples, ajudando a resolver o problema inicial. Assim, as heurísticas aparecem como forma de pensar em como resolver um problema, isto é, estratégias são montadas a fim de resolver o problema apresentado.

Podemos verificar em Vale, Pimentel e Barbosa (2015) que existe uma estratégia chamada de *procurar ver* que pode ser usada como combinação de outras estratégias. Ela tem como base, por exemplo, a realização de um desenho, tornar um problema complexo em um mais comum e entender se há algum padrão a ser identificado. [complementar melhor a frase]

Tal estratégia estimula a criatividade nos alunos além de simplificar os problemas. Um fator importante para atingir seu máximo potencial é procurar por problemas que possuam diversas resoluções, que sejam menos comuns, promovendo o pensamento divergente.

As estratégias ensinadas no trabalho indicado favorecem que: o aluno consiga abordar e visualizar um caminho, possam servir como substitutas de meios em aos quais o aluno ainda não teve acesso e possam ajudar a interpretação do problema apresentado. Além disso, também ajudam o aluno a perceber que os problemas podem apresentar mais de uma solução despertando sua criatividade ao resolver o mesmo problema de formas diferentes.

Em sua obra Brolezzi (2013, p. 105), cita as principais heurísticas para a resolução de problemas:

1. Procurar um exemplo
2. Desenhar uma figura
3. Formular um problema equivalente
4. Modificar o problema
5. Escolher a notação adequada
6. Explorar simetrias
7. Dividir em casos
8. Trabalhar de trás para frente
9. Raciocinar por contradição
10. Explorar paridades
11. Considerar casos extremos
12. Generalizar

Para Cai e Lester (2012) existem pesquisas suficientes que mostram que a resolução de problemas deve ser utilizado em conjunto ao longo de sua formação. Ensinar estratégias gerais não surte muito efeito, isto é, não coopera muito nas habilidades como resolvedor de problemas. Por isso, a resolução de problemas deve vir acompanhada em cada parte da disciplina.

Isso também serve para as autoras Vale, Pimentel e Barbosa (2015) que dizem que a resolução de problemas deve vir acompanhada do currículo e as práticas na sala de aula levando o aluno a obter várias estratégias que possam ser usadas.

Veremos a seguir que ter um bom conhecimento sobre heurísticas não é o suficiente para que problemas sejam solucionados.

3.3 O interesse em resolver problemas

Para que o problema seja resolvido, o aluno precisa se esforçar para resolvê-lo. Consoante Polya (1975) é fundamental deixar o aluno fazer o máximo possível de trabalho. Ajudar muito ou pouco é um problema que deve ser evitado. É preciso dosar a quantidade de informação que é dada a cada dica fornecida evitando dar a resposta no meio do processo da resolução.

Assim, se o aluno não tiver o incentivo suficiente para resolver o problema, é capaz dele desistir de resolvê-lo antes da hora. Temos então que uma vez que o problema é apresentado ao aluno, deve-se nele inculcar a vontade de resolvê-lo. Sem esta vontade, dificilmente o problema será resolvido.

> O solucionador de problemas inteligente procura, antes de tudo, compreender o problema tanto quanto possível completa e claramente. Isto não é, no entanto, suficiente: é preciso que ele almeje sinceramente chegar à conclusão. Se não tiver um real anseio de resolver o problema, será melhor deixá-lo de lado. O verdadeiro segredo do sucesso consiste em consagrar toda a sua personalidade ao problema. (POLYA, 1975, p. 103)

Sendo assim, é necessário que o aluno tenha total interesse em resolver o problema, devendo haver a motivação suficiente para que o problema não se torne mais difícil do que é na verdade. Por isto, na resolução de problemas é importante vibrar com pequenas vitórias.

Para Brolezzi (2013) mesmo com muito conhecimento em matemática, é comum nos sentirmos incapazes de resolver problemas, achando que não estamos prontos o suficiente mas, o que acontece, é que entender os enunciados já é, muitas vezes, um verdadeiro problema, uma vez que estes não costumam envolver apenas matemática.

Não é apenas isso o que costuma atrapalhar o aluno na resolução de problemas. Embora não pareça, a inteligência emocional é fundamental para a resolução de problemas, uma vez que o medo de errar ou a baixa autoestima podem interferir na procura pela resposta. Braga e Hanke (2014) mencionam que é difícil iniciantes à resolução de problemas tomarem gosto pela mesma. A dificuldade da resolução de problemas é grande, isto é, os erros ocorrem com muita facilidade.

De acordo com Brolezzi (2013) para entendermos a inteligência emocional é necessário separá-la em cinco habilidades básicas. Essas habilidades são a autoconsciência, automotivação, autocontrole, empatia e sociabilidade.

Já para Gontijo (2006), para que haja um problema, deve-se fazer com que o aluno pense sozinho e elabore formas de experimentar diferentes caminhos para se chegar ao fim de sua resolução, isto é, ela deve ser desafiadora e ter o interesse real do aluno querer resolvê-la.

Para Onuchic e Allevato (2011) o problema pode ser visto como o início da aprendizagem, onde tanto alunos quanto professores devem colaborar para o desenvolvimento do trabalho. Sendo assim é fundamental que o professor busque nos alunos conhecimentos e técnicas adquiridas anteriormente incentivando-os a procurar por caminhos distintos na resolução de problemas.

Assim somos levados a entender o que é um problema e a sua diferença com exercícios para que possamos aplicá-los quando bem entendermos.

3.4 Problemas vs Exercícios

Aqui iremos usar como definição que o Problema é toda barreira que impede o resolvedor de obter a sua solução de forma rápida ou apenas através algoritmos já aprendidos anteriormente. Assim, é preciso que o aluno faça pesquisas e aplique diversas estratégias para que a solução do problema seja encontrada.

De acordo com os PCNs, Brasil (1998) e Freire e Silva (2013) podemos dizer que para se resolver um problema é necessário se debruçar por mais tempo neste, porém para a resolução de exercícios, existe uma aplicação quase que de imediata através de uma fórmula ou algum algoritmo já conhecido com antecedência.

Temos, ainda, que para Freire e Silva (2013), a resolução de problemas pode ser iniciada através da resolução de exercícios. Quando o aluno consegue resolver um mesmo problema, ou similar a este, várias vezes, este problema deixa de ser problema e se torna um exercício.

Segundo os PCNs Brasil (1998) temos que o problema deve ser visto como algo difícil de se solucionar a princípio já que o resolvedor deve realizar uma série de operações para solucioná-lo.

Com relação ao que seria um problema, podemos ainda dizer que, de acordo com Brolezzi (2013), no qual relata que é possível fazer uma analogia entre o mar e a terra, onde o mar é um conjunto de problemas a serem resolvidos e, a medida que problemas são resolvidos, pontes são construídas onde problemas cada vez mais difíceis podem ser alcançados através das pontes criadas.

Para Pinheiro e Medeiros (2020) uma solução de um problema não é dada de imediato. É necessário, para isso, procurar por ideias ou estratégias que sejam correlatas ao problema. Sendo assim, a resolução de problemas agrega habilidades ao pensamento matemático de quem os resolve.

Além disso, não é suficiente saber matemática para resolver grande parte dos problemas. É útil que o resolvedor tenha um certo conhecimento sobre heurísticas e também uma pitada de criatividade para fazer associações entre os conteúdos necessários para a resolução do problema.

3.5 Como buscar por soluções de um mesmo problema

Para Polya (1975), na resolução de problemas é essencial que todas as informações sejam entendidas e colhidas. Após isso, facilitá-las para serem percebidos com maior facilidade. É interessante também modificar as partes maiores de difícil entendimento e enquadrá-las a conhecimentos prévios, além de examinar o que foi feito para que ajude na resolução de problemas futuros.

Ao revisar a resolução de um problema, pode-se aproveitar de uma solução longa e complicada e torná-la numa solução mais curta. Além disso, muitas vezes é possível encontrar no resultado uma abreviação da resolução. Brolezzi (2013) concorda que após resolver o problema, é provável de que achemos uma outra solução para o mesmo.

Este também afirma que é essencial que os alunos aproveitem ao máximo a resolução de problemas, não parando ao conseguirem resolvê-los. Ainda destaca que existem alunos que não param ao resolver um problema. Ficam pensando sobre o mesmo e como eles conseguiram resolvê-lo, estimulando a criatividade.

Ainda é relatado que apesar da concentração ser de extrema importância para a resolução de problemas, é com a distração que podemos perceber detalhes que, em muitos casos, são necessários para a resolução de problemas.

Partindo disso, ainda é apontado que existe uma técnica que serve para tirar um melhor proveito da distração que pode ajudar na resolução de problemas. A técnica se chama sinética que coleciona elementos que, aparentemente, não são úteis. Esta técnica é um dos métodos de criatividade mais complexos para caminhar por caminhos menos tradicionais.

Para exemplificar o que é sinética e seu papel da resolução de problemas, será apresentado um problema e sua solução, que tem como objetivo desenvolver a criatividade que é fundamental para achar soluções alternativas para qualquer problema que apareça. Este problema se chama "Os dois fios"e está presente no livro do Brolezzi (2013).

"**Há dois fios pendurados no teto da sala a certa distância um do outro. Segurando um deles com a mão não se consegue alcançar o outro com a outra mão. A sua tarefa é amarrar os dois fios. Você dispõe de um dicionário, um grampeador, um copo, uma rã viva e um alfinete. Como você juntaria os dois fios?**"

Na resolução deste problema é importante ressaltar que não é preciso usar todos os dados do enunciado para se resolver o problema. Estes objetos que não precisam ser usados constituem a "distração". Entretanto, eles podem virar uma possível resolução criativa, como, por exemplo, usar a pele da rã para se fazer uma corda.

A sinética seria melhor posta em prática por alguém ao sugerir tirar as páginas do dicionário e grampear uma nas outras com o intuito de garantir uma extensão para os fios.

3.6 Benefícios de apresentar diferentes soluções para o mesmo problema

De acordo com Polya (1975) para a resolução de problemas de diferentes formas é interessante que o resolvedor tenha um bom pensamento divergente. Tal pensamento pode ser definido por Pimentel, Rios e Silva (2007, p. 806), "como aquele que produz muitas ideias ou alternativas e que desenvolve muitas possibilidades a partir de um único ponto de partida". Para Alencar (1974), alguns aspectos dele são a fluência, flexibilidade, elaboração e a originalidade.

Portanto, o pensamento divergente é de extrema importância na resolução de problemas. Infelizmente, de acordo com Guilford (1967) por motivos diversos, na história, a produção de habilidades divergentes tem tido pouca importância em testes de inteligência.

Com relação à Barbosa e Vale (2022) as tarefas que possuem várias resoluções oferecem uma liberdade maior aos alunos para realizar estratégias próprias que contribuem para a ampliação de seu repertório. Além disso temos que a criatividade pode ser desenvolvida através da resolução de tarefas com múltiplas resoluções além da compreensão da própria matemática.

Portanto, é muito importante os alunos discutirem entre si sobre suas resoluções. Assim é possível, comparar diferentes resoluções, identificar suas diferenças, semelhanças e representações, além de adquirir diferentes formas de interpretação. Apesar disso ser possível, é interessante de que cada um procure por mais de uma solução para o problema apresentado.

Logo uma tarefa de múltiplas resoluções que são executadas por diferentes representações ampliam a compreensão de um problema. De outro modo, ao resolver os problemas de diferentes formas, o pensamento divergente se desenvolve e lhe aprimora as chances de adquirir outras estratégias mais interessantes. Assim, tarefas que dão a abertura para a resolução de problemas de diferentes formas, nutrem a realização de múltiplas representações.

3.7 Resolução de problemas como uma metodologia de Ensino

Para Onuchic e Allevato (2011) embora muitas vezes o ensino, avaliação e aprendizagem sejam vistos como coisas separadas, no século XX começaram a entender a ideia de que o ensino e aprendizagem devem andar juntos. Além disso, apenas recentemente foi dada a importância para a avaliação que deve ser feita de forma contínua e formativa.

O GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas - percebeu a importância do ensino, aprendizagem e avaliação andarem juntas na resolução de problemas, empregando, assim, o termo ensino-aprendizagem-avaliação. Tanto o aluno quanto o professor devem participar deste processo. O próprio aluno deve entender as suas soluções e estratégicas usadas.

Neste processo de ensino-aprendizagem-avaliação, é interessante de que o problema seja o ponto inicial e a associação entre os diferentes ramos da matemática na resolução de problemas deve transformar no aluno uma melhor compreensão da Matemática.

Para que haja um melhor uso deste tipo de metodologia, tanto o professor quanto o aluno devem se preparar melhor para que seja bem sucedida. Os professores devem saber escolher bons problemas para a sala de aula e o aluno deve ter um maior espaço e tempo para que possa pensar no problema, deixando, assim, que o professor saia do centro das atenções e transfira uma maior responsabilidade ao aluno.

Ainda com relação às mesmas autoras, elas dizem que agindo assim, é de se esperar que a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação realize uma maior interação dos alunos de tal forma que os conceitos sejam vistos como forma mais efetivas por eles. Ainda temos que pesquisas têm mostrado que os alunos avançaram na sua forma de compreensão da matemática ao usar esta metodologia.

De acordo com Polya (1975), o professor deve ser capaz de ajudar o aluno a resolver o problema em questão e, além disto, apoiar de tal forma a capacitá-lo a resolver outros problemas. Para isso é necessário dar sugestões bem genéricas apenas com a intenção de dar um rumo para o aluno. Por seguinte, a ideia é que ele mesmo se guie através delas.

Por sua vez, Brolezzi (2013) menciona que é preciso indagar se a matemática aplicada por nós está sendo de utilidade para os alunos na resolução de problemas. Isso porque não é interessante haver um exagero entre dois pontos. De acordo com o BNCC Brasil (2018), na resolução de problemas deve-se haver uma boa condução entre teoria e prática.

Além disso, ainda pelo BNCC Brasil (2018) temos que é de interesse que os alunos adquiram no Ensino Médio a capacidade de criticar e analisar através das linguagens. Tal competência induz na construção da autonomia dos estudantes o que acarreta numa melhor compreensão na produção de seu trabalho.

Consoante o BNCC Brasil (2018), investigar, construir modelos e resolver problemas são essenciais para atingir os propósitos educacionais. Para que isso ocorra, é imprescindível que o aluno tenha a sua hora de pensar por conta própria, desenvolvendo, assim, formas cada vez mais sofisticadas de se expressar.

Ainda, é preciso utilizar diversas estratégias, assim como conceitos e procedimentos em Matemática com o intuito de resolver problemas tendo, desta forma, uma capacidade maior de se expressar e argumentar corretamente. Ou seja, é fundamental a comunicação por meio de diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais) para que haja um processo crítico não só em aula, como também em vida.

Para que o aluno obtenha ferramentas na resolução de problemas, além de entender como expressar o seu raciocínio, ele deve compreender a matemática e suas representações. Além disso, a boa utilização de tecnologias digitais de informação é essencial para a resolução de problemas.

De acordo com Romanatto (2012), um dos objetivos da resolução de problemas é que o aluno obtenha maior compreensão da Matemática como um todo. O expressar-se a partir de figuras e desenhos, por exemplo, resulta numa maior expressão dos alunos para a resolução de problemas.

Um dos papéis do professor usando a resolução de problemas como metodologia de ensino é escolher bons problemas, que de preferência possuam mais de um caminho além de fomentar os conceitos matemáticos nos alunos. Assim, o professor deve trabalhar de forma individual, grupal e coletiva as soluções concretizando diversos aspectos matemáticos.

Romanatto (2012, p. 303) diz que "A metodologia de ensino através da resolução de problemas traz simultaneamente as principais dimensões do trabalho docente: o ensino, a aprendizagem e a avaliação".

O professor deve estar preparado para enfrentar soluções que não foram por ele realizadas além de apontamentos por parte dos alunos que devem ser verificados como corretos ou incorretos.

3.8 Um guia para os professores

Para que haja uma percepção de como ter uma boa apresentação em sala de aula, é fundamental que o professor siga algumas regras. Essas regras ajudam não só o professor ser melhor com relação ao ensino-aprendizagem como, também, facilitam este processo, tornando mais viável ao professor ter um prazer maior ao ensinar, facilitando assim a sua vida dentro da sala de aula.

A seguir temos os 10 mandamentos de Polya (1987) para professores:

1. **Tenha interesse por sua matéria**: Se você não tem interesse naquilo que ensina então não irá ensinar em alto nível aquilo que deseja passar aos alunos.

2. **Conheça sua matéria**: Não adianta desejar transferir um determinado conhecimento se não há um real entendimento sobre a matéria.

3. **Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles**: A falta de empatia dos professores com os seus alunos, pode fazer de um professor, mesmo que tenha interesse e conhecimento sobre sua matéria, ruim ou medíocre. É preciso saber se colocar no lugar deles para entender quais são suas dificuldades.

4. **Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo**: Quanto mais ativo é o processo de ensino-aprendizagem, melhor.

5. **Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico**: É preciso não apenas ter informações, mas, principalmente, saber usá-las. O know-how é necessário para que se desenvolva a habilidade de resolver problemas.

6. **Faça-os aprender a dar palpites**: "Primeiro conjecture, depois prove — assim procede a descoberta na maioria dos casos".

   Alunos que não possuem uma bagagem muita avançada de conhecimento matemático irão dar palpites rudimentares. "Palpites razoáveis baseiam-se no uso judicioso de evidência indutiva da analogia, e englobam em última análise todos os procedimentos do raciocínio plausível que desempenham um papel no método científico".

7. **Faça-os aprender a demonstrar**: A afirmação de que a Matemática é excelente para desenvolver no aluno a sua capacidade de demonstrar é antiga. Pode-se dizer que a demonstração é uma das bases da disciplina. Por isso, desde cedo o professor deve fazer com que os seus alunos tenham contato com demonstrações

8. **Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta**: Os alunos aprendem muitas vezes por imitação, isto é, o que é apresentado a eles pode ser replicado em um problema futuro. De fato, quanto mais um aluno puder usar um certo conhecimento em outros problemas, mais instrutivo é. Assim, deve-se dar ênfase nos aspectos trabalhados na apresentação de uma solução que poderão ser usados em outros problemas.

9. **Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível**: Uma dica fácil de seguir e que promete bons resultados é deixar que os seus alunos palpitem sobre uma possível solução para o problema. Assim, aqueles que palpitaram irão observar a resolução do problema para verificar se estavam corretos ou não, deixando-os menos desatentos.

10. **Sugira; não os faça engolir à força**: Ao perceber que o aluno errou no decorrer de sua solução, evite indicar de imediato ao mesmo que ele está errado. Ao invés disso, pergunte a ele se esta parte da solução está correta. Faça o possível para que ele mesmo perceba que errou.

Agora seguimos com algumas características de como fazer uma boa prova e aplicação de problemas em sala de aula. Essas características são essenciais para o desenvolvimento da resolução de problemas por parte dos alunos.

Retirado do livro de Brolezzi (2013), as sete características a se procurar na aplicação de uma prova ou de problemas na sala de aula para alunos de matemática:

1. Elabore uma prova matematicamente rica, explorando de forma balanceada vários temas de matemática relacionados ao programa da prova.

2. Explore os conceitos matemáticos envolvidos de formas variadas, incluindo as inversões de pensamento.

3. Explore, em cada questão, um problema único e completo, ainda que envolva diversos conceitos matemáticos.

4. Elabore questões que sejam independentes umas das outras.

5. Redija enunciados de forma clara, que sejam interessantes e atrativos.

6. Leve em conta a duração do tempo para a realização da prova ao definir a extensão da questão, estimando tempo para reflexão.

7. Pense no enunciado de modo a oferecer ao aluno oportunidades de reflexão.

Já aqui, são apontadas características muito costumeiras por parte dos professores que, apesar de algumas parecerem corretas, prejudicam e muito o processo de avaliação e aprendizagem.

Assim, apresentamos sete características a se evitar, sempre que possível, na sala de aula com relação a resolução de problemas:

1. Duplicidade de interpretação inadvertida.

2. Questões maldosas, com a intenção de induzir ao erro, ou seja, as famosas "pegadinhas".

3. Textos muito longos e cansativos, com preâmbulos desnecessários ou irrelevantes na construção da questão.

4. Repetição de comandos sempre iguais (o clássico “arme e efetue”).

5. Séries de exercícios repetidos, cobrando a mesma coisa várias vezes.

6. Sensação de interrogatório.

7. Sensação de preenchimento de cadastro.

CAPÍTULO 4

TEORIA MATEMÁTICA

Aqui iremos identificar em que séries a teoria necessária para entender o conteúdo da teoria matemática, aplicada nos problemas do capítulo 5, são ensinadas.

4.1 Séries em que são ensinadas de acordo com a BNCC

Com relação a semelhança de triângulos temos que ela é vista no 9º ano, reconhecendo as condições necessárias para que dois triângulos sejam semelhantes.

Consta no currículo que se aprenda a equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.

Temos que na 7ª série é aprendido sobre a equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros. Ainda no 7º ano, é visto sobre a equivalência de área de figuras planas, estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. Além de resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Com relação a grandezas e medidas, o aluno deve ser capaz de resolver problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento e área sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Já a razão entre áreas de figuras semelhantes é aprendido no decorrer dos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.

Temos que no 9º ano deve-se desenvolver a habilidade de demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Com relação à geometria analítica, no 8o ano, deve-se desenvolver a habilidade de associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Já no 8º ano é visto sobre sistema de equações polinomiais de 1º grau e a representação no plano cartesiano sendo que as habilidades desenvolvidas seriam resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

No 9º ano. tendo que satisfazer a habilidade de demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Assim, observa-se que os problemas apresentados no capítulo 5 podem ser resolvidos de diferentes formas já no final do ensino fundamental.

Agora iremos apresentar aqui a parte da teoria matemática necessária para resolver os problemas do capítulo Algumas Aplicações do Método de Polya

4.2 Geometria Plana

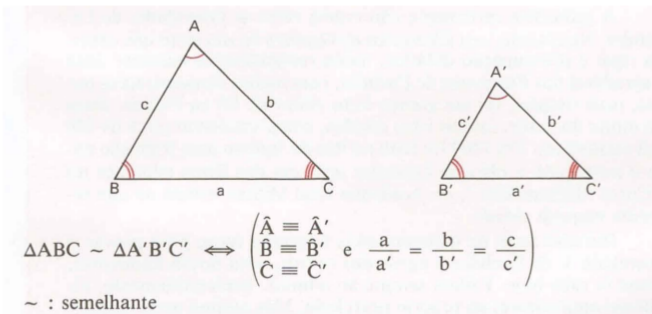
A área de um triângulo se dá pela fórmula $\frac{base \cdot altura}{2}$ embora haja outros modos de se calcular a área de um triângulo, como veremos a seguir.

Veremos primeiro sobre a semelhança de triângulos usada em todas as 6 soluções do próximo capítulo para o problema do cálculo da área.

1) Semelhança de Triângulos

De acordo com Dolce e Pompeo (1997, p. 198), a semelhança de triângulos se dá se, e somente se, possuem os três triângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais. Isto é:

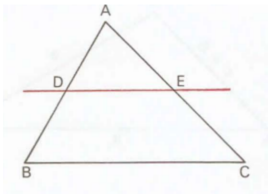
Figura 1 – Semelhança entre triângulos



Fonte: Dolce e Pompeo (1997)

E também temos o teorema fundamental que diz que se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro como é ilustrada a seguir.

Figura 2 – Teorema Fundamental



Fonte: Dolce e Pompeo (1997)

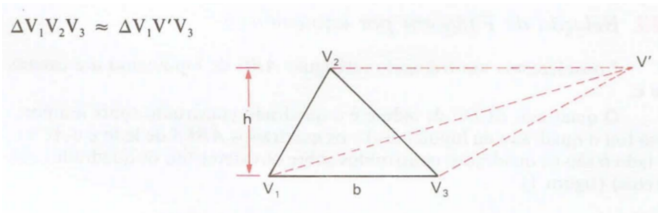
Neste caso, os triângulos ADE e ABC são semelhantes uma vez que DE é paralelo a BC.

2) Triângulos equivalentes

Dois polígonos são chamados equivalentes ou equicompostos se, e somente se, forem somas de igual número de polígonos dois a dois congruentes entre si. E com relação aos triângulos temos que dois triângulos de bases e alturas ordenadamente congruentes são equivalentes.

Exemplo:

Figura 3 – Triângulos Equivalentes



Fonte: Dolce e Pompeo (1997)

Já com relação à razão de semelhança temos que sendo k a razão entre os lados homólogos, isto é:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Também temos, ainda com relação à semelhança de triângulos, que se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

3) Razão entre áreas de figuras semelhantes

Com relação à razão entre áreas de regiões poligonais semelhantes, por Dante (2009, p. 150), que se duas regiões são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre seus elementos correspondentes lineares (lados, perímetros, digonais, etc.).

Por exemplo, se a razão de semelhança entre os lados de dois triângulos é igual a $\frac{2}{5}$, a área do triângulo menor mede T e área de outro triângulo maior é 5, segue que

$$\frac{T}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Longrightarrow T = \frac{4}{5}$$

4) Razão entre alturas homólogas

Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então:

- a razão entre os perímetros é k;
- **a razão entre as alturas homólogas é k**;
- a razão entre as medianas homólogas é k;
- a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k;
- a razão entre os raios dos círculos inscritos é k;
- a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k;

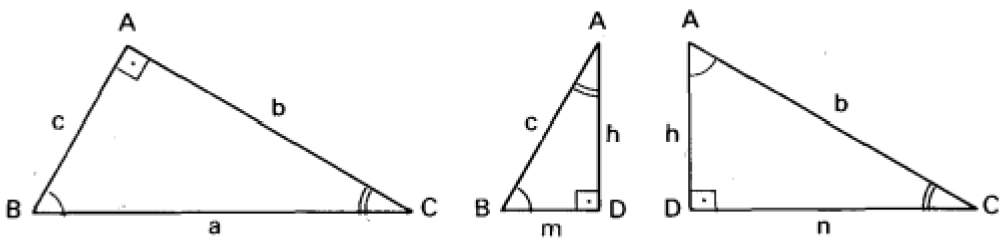
  . . .

- a razão entre dois elementos lineares homólogos é k;
- e os ângulos homólogos são congruentes.

5) Relações Métricas no Triângulo Retângulo

De acordo com Dolce e Pompeo (1997, p. 220) temos as relações métricas no triângulo retângulo.

Figura 4 – Triângulo Retângulo



Fonte: Dolce e Pompeo (1997)

Figura 5 – Algumas relações métricas

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \Longrightarrow bc = ah & \textbf{(4)} \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Longrightarrow c^2 = am & \textbf{(2)} \\ \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{m} \Longrightarrow ch = bm & \textbf{(6)} \end{cases}$$

Fonte: Dolce e Pompeo (1997)

6) Geometria Analítica

Para o entendimento da geometria analítica usada nas aplicações, temos o seguinte:

Para encontrar a reta dados dois pontos no plano,(x_0, y_0) e (x,y), temos que para encontrar a reta que passa por ambos, podemos fazer:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

Onde m é o coeficiente angular da reta.

Após substituirmos os valores de y, y_0, x e x_0, encontramos o valor de m.

Encontrando o valor de m, temos que a reta pode ser achada se em $y - y_0 = m(x - x_0)$, substituirmos os valores de x_0, y_0 e m, deixando-a em função apenas de x e y. Ao isolar y ficamos com y = mx + n, onde a e b são números reais, com $m \neq 0$.

Já a intersecção entre duas retas pode ser feita via um sistema de equações lineares.

Seja uma reta r dada por $y = m_r x + n_r$ e outra reta s por $y = m_s x + n_s$.

Então o seu ponto de intersecção se dá ao resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} r_s : y = m_s x + n_s \\ r_r : y = m_r x + n_r \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -1 e somando ambas as equações, temos:

$0 = m_r x + n_s x - m_s x - n_r$

Isolando x, ficamos com:

$$x = \frac{n_s - n_r}{m_r - n_s}$$

Por fim, para encontrar y, basta substituir o resultado em uma das duas equações. O valor das coordenadas encontradas, (x,y), indica o ponto de intersecção de ambas retas.

Para o cálculo da área de um triângulo no plano com vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) é dado pela metade do módulo da determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo que o determinante desta matriz é dada por:

$x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 - y_1 x_2$

Então a área do triângulo buscado é igual a $\frac{1}{2} \cdot |x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 - y_1 x_2|$

4.3 Álgebra

Para o bom entendimento do problema do cachorro-quente do capítulo seguinte, deve-se lembrar do básico de sistema lineares do 1º grau.

Retirado do livro de Murray (1971).

1) Sistema de equações polinomiais de 1º grau.

Teoria: seja um sistema de equações lineares de 1ª ordem com duas variáveis, temos que:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

E sua solução se dá por:

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \quad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_1 - b_1a_2} \quad (a_2b_2 - b_1a_2 \neq 0)$$

CAPÍTULO

5

ALGUMAS APLICAÇÕES DO MÉTODO DE POLYA

Aqui usaremos apenas as 3 primeiras fases do método de Polya. A quarta fase já foi realizada de forma implícita, isto é, realizando uma retrospectiva, mas sem a mostrar.

5.1 Área de um triângulo

O seguinte problema e suas resoluções foram tirados da Revista do Professor de Matemática, 83ª edição, Oliveira (2014).

(FUVEST 2007) A figura representa um retângulo ABCD, com AB = 5 e AD = 3. O ponto E está no segmento CD de maneira que CE = 1, e F é o ponto de intersecção da diagonal AC com o segmento BE. Então, a área do triângulo BCF vale:

a) 6/5

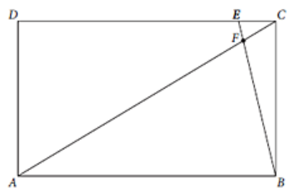
b) 5/4

c) 7

d) 6

e) 5

Figura 6 – Imagem do enunciado



Fonte: Oliveira (2014)

a) **Compreendendo o problema**

Em um retângulo de vértices A, B, C e D de comprimento igual a 5 e altura igual a 3 existe o segmento que representa a diagonal do mesmo, ligando os vértices A e C. Além disso, temos outro segmento, BE, que intersecta a diagonal no ponto F e atinge o lado CD no ponto E, onde CE é igual a 1.

O problema pergunta qual é a área do triângulo BCF.

b) **Estabelecendo um plano**

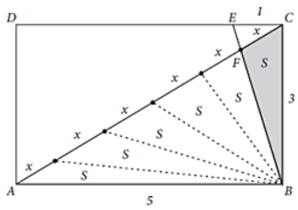
- 1ª Estratégia

  Utilizando triângulos equivalentes:

  É fácil perceber que os triângulos AFB e CFE são semelhantes. Podemos também verificar a razão de semelhança entre ambos para encontrar quantos triângulos de área igual a S "cabem" no triângulo AFB. Assim, fazer um comparativo com a área do retângulo para descobrirmos a área S.

  c) **Execução do plano**

Figura 7 – Utilizando triângulos equivalentes



Fonte: Oliveira (2014)

Temos que o ângulo do ponto F do triângulo ABF é congruente ao ângulo F do triângulo CEF pois são opostos pelo vértice.

Já o ângulo A do triângulo ABF é congruente ao ângulo C do triângulo ECF pois são alternos internos.

Logo, temos que ambos os triângulos possuem 2 ângulos congruentes e, pelo caso ângulo-ângulo os triângulos ABC e CEF são semelhantes.

Como a base do triângulo CEF é igual a 1 e a base do triângulo ABF é 5, então, por serem semelhantes, a razão de semelhança é de 5:1. Logo, AF = 5CF. Assim, podemos dividir o triângulo ABF em 5 triângulos de área igual à área do triângulo BCF.

Assim, temos que metade do retângulo ABCD está dividido em 6 triângulos de área igual a S.

A área do retângulo é $5 \cdot 3$ então sua metade é $\dfrac{5 \cdot 3}{2}$

Como a área de S é um sexto da área da metade do retângulo, então

$S = \frac{1}{6} \cdot \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{5}{4}$

b) **Estabelecendo um plano**

- 2ª Estratégia

  Utilizando razão entre áreas de figuras semelhantes:

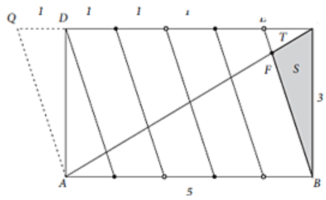
  Usando o dado da 1ª estratégia de que AF = 5CF, podemos traçar segmentos paralelos a BE.

  Logo após encontrar a área do triângulo ACQ e chamar a área do triângulo ECF de T.

  Calculando assim a área do triângulo ACQ. Logo após realizar uma razão entre áreas de figuras semelhantes encontrando assim o valor de T. Como é possível calcular a área da área S+T, ao acharmos a área T, também achamos a área S.

  c) **Execução do plano**

Figura 8 – Utilizando razão entre áreas de fig. semelhantes



Fonte: Oliveira (2014)

Usaremos o resultado da solução 1 de que a razão de semelhança entre os triângulos ABC e CEF é de 5:1. Assim, AF = 5CF. Traçando 5 segmentos paralelos ao segmento BE construindo, assim, o triângulo ACQ que possui base igual a $6 \cdot 1$ e altura igual a 3. Logo, a área de ACQ é igual a $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

Temos que o triângulo CEF é semelhante ao triângulo ACQ. Chamando de T a área do triângulo CEF temos, então, que

$\frac{T}{9} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$ logo $T = \frac{1}{4}$

mas $S + T = \frac{1 \cdot 3}{2}$

Assim, $S = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$

$S = \frac{5}{4}$

b) **Estabelecendo um plano**

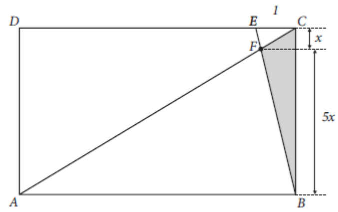
- 3ª Estratégia

  Utilizaremos a razão entre alturas homólogas:

Usando a razão de semelhança da 1ª estratégia, encontramos que a altura do triângulo ABF é igual a 5 vezes a altura do triângulo CEF e, além disso podemos encontrar o valor numérico das alturas já que BC é igual a 3. Também sabemos a área do triângulo BCF. Fazendo uma subtração entre a área do triângulo CEF e BCE, descobrimos a área S.

c) **Execução do plano**

Figura 9 – Utilizando razão entre alturas homólogas



Fonte: Oliveira (2014)

Como já indicado na solução 1, os triângulos ABF e CEF são semelhantes e com razão igual a 1:5.

Então podemos indicar a razão entre as suas alturas. Se a altura do triângulo CEF é igual a x então a altura do triângulo ABF é igual a 5 vezes a altura do triângulo CEF, isto é, igual a 5x. Também temos que o comprimento do segmento BC é igual a 6. Logo x + 5x = 3, isto é, x = $\frac{1}{2}$

Observemos então que a área do triângulo CEF é igual a sua altura que é x vezes sua base que é 1, dividido por 2.

Chamemos a área do triângulo CEF de T. Então $T = \dfrac{1 \cdot x}{2} = \dfrac{x}{2}$

Já a área do triângulo BCF, que chamaremos de S, pode ser obtida calculando a área de S + T e depois subtraindo T.

Vemos que $S + T = \dfrac{1 \cdot 3}{2}$, isto é, a área de S+T é igual à base do triângulo CEF vezes a base do triângulo BCE, que é 3, tudo isso dividido por 2.

Logo, $S = \dfrac{1 \cdot 3}{2} - T = \dfrac{1 \cdot 3}{2} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$

b) **Estabelecendo um plano**

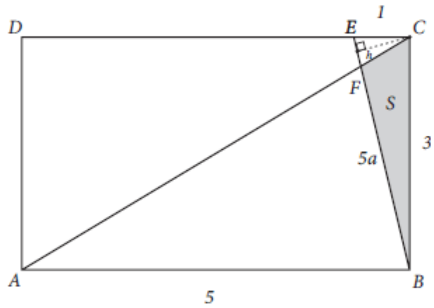
- 4ª Estratégia

  Usando relações métricas no triângulo retângulo:

  Além do fato já mostrado sobre ABF e CEF serem semelhantes e sua razão de semelhança, pode-se usar relações métricas no triângulo retângulo BCE chamando sua altura de h. Assim teremos a sua altura em função de a, onde a é a base do triângulo CEF. Logo, podemos reparar que a altura do triângulo CEF é igual a do triângulo BCE e que a base deste último está escrita em função de a assim como a sua altura. Devemos então chegar numa resposta que não seja em função de a.

c) **Execução do plano**

Figura 10 – Usando relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Oliveira (2014)

Assim, como em outras soluções, vamos usar que ABF é semelhante ao triângulo CEF e que a razão de semelhança é de 5:1, assim podemos utilizar as relações métricas do triângulo retângulo BCE.

$(a+5a)\cdot h = 3\cdot 1$

$h = \dfrac{1}{2a}$

Observe que a altura do triângulo BCE é igual à altura do triângulo CEF e que sua base aqui é igual à 5a.

Portanto, a área S é dada por

$S = \dfrac{5a\cdot h}{2}$

$S = \dfrac{5a\cdot \frac{1}{2a}}{2}$

$S = \dfrac{5}{4}$

b) **Estabelecendo um plano**

- 5ª Estratégia

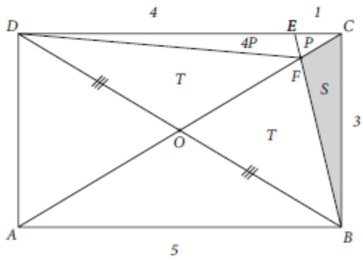
Usando figuras equivalentes:

Podemos dividir o retângulo onde um quarto do retângulo tem área igual a 5P + T e outra área é igual a T + S de tal modo que a área do triângulo BDE é conhecida assim como a área do triângulo CDO. Também temos que 5P é igual a S. Podemos assim montarmos um sistema achando o valor de T, e por seguinte o valor de P. Como S é igual a 5P então achamos a área S.

c) **Execução do plano**

Podemos criar dois triângulos que possuam a mesma área T usando o fato de que se um triângulo tem a base de mesma medida e mesma altura, então a área de ambos são iguais. Esses triângulos são os triângulos DOF e BOF.

Figura 11 – Usando figuras equivalentes



Fonte: Oliveira (2014)

Agora observe que a altura do triângulo CEF é igual a altura do triângulo CDF. Entretanto, a base do triângulo CDF é 4 vezes a base do triângulo CEF, pois a base do primeiro é igual a 4 e a base do segundo triângulo é igual a 1.

Assim, a área do triângulo DEF é igual a 4 vezes a área do triângulo CEF. Vamos denotar a área de cada um de 4P e P.

Agora podemos ver que a área condizente a T + 5P é igual à quarta parte do retângulo e que o mesmo ocorre com T + S.

Logo, $S+T=5P+T$

$S=5P$

Portanto, $5P+T=\frac{1}{4}(5\cdot 3)=\frac{15}{4}$

Por outro lado, podemos calcular a área do triângulo BDE, já que ele possui base igual a 4 e altura igual à altura do retângulo que é igual a 3.

Assim, 4P + 2T = $\frac{4\cdot 3}{2}=6$

Logo , temos em mãos um sistema com duas equações:

$$\begin{cases} 5P+T=\frac{15}{4} \\ 4P+2T=6 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira linha por -2, temos:

$$\begin{cases} -10P-2T=-\frac{30}{4} \\ 4P+2T=6 \end{cases}$$

Somando as duas linhas ficamos com:

$-6P=-\frac{30}{4}+6$

$P=-\frac{-30+24}{24}$

$P=\frac{1}{4}$

Mas S = 5P, assim $S=5\cdot\frac{1}{4}$

Logo,

$S = \frac{5}{4}$

b) **Estabelecendo um plano**

- 6ª Estratégia

  Usando Geometria Analítica:

  Podemos usar o ponto A como a origem do plano cartesiano para, depois, indicar as coordenadas dos pontos A, B, E e C.

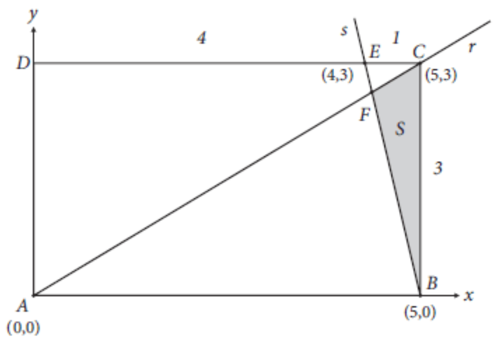
  Assim encontrar uma reta que passa pelos pontos A e C e outra reta que passa pelos pontos E e B.

  Montando, assim, um sistema que nos dará as coordenadas do ponto F. Agora temos as coordenadas dos vértices do triângulo de área igual a S.

  Após isso, basta inserir as coordenadas numa matriz 3 por 3, achar o módulo de seu determinante e dividir o seu resultado por 2, nos dando assim, a área do triângulo, isto, é, o valor da área S.

  c) **Execução do plano**

Figura 12 – Usando Geometria Analítica



Fonte: Oliveira (2014)

Para usarmos a Geometria Analítica, vamos achar as coordenadas dos vértices do triângulo BCF ao usarmos o sistema cartesiano. Podemos usar vários pontos como origem, mas, para facilitar o trabalho, iremos usar o ponto A (0,0).

Como o comprimento do retângulo é igual a 5 a abscissa do ponto B será igual a 5, porém sua ordenada será a mesma do ponto A, isto temos que B se encontra na coordenada (5,0).

Agora temos que o ponto C fica 3 unidades acima de B, por isso, sua abscissa é igual ao ponto B. Entretanto, sua ordenada é igual a 3, ou seja, C (5,3). De forma análogo, temos E (4,3).

Para encontrarmos o ponto F, podemos usar o fato que ele se encontra no intercepto de duas retas.

Uma reta, que chamaremos de reta r, teria os pontos A, C e F pertencentes a mesma e a outra reta s conteria os pontos B, E e F.

As equações das retas podem ser obtidas facilmente ao usarmos a fórmula

$y - y_0 = m(x - x_0)$

onde y e x são as ordenadas e abscissas de um ponto, y_0 e x_0 são as ordenadas e abscissas de um outro ponto da reta e m o coeficiente angular que ainda não sabemos.

Dados os pontos A (0,0) e C (5,3), podemos usar a fórmula.

$3 - 0 = m_r(5 - 0)$

$m_r = \frac{3}{5}$

Logo, a reta r é dada por $y = \frac{3}{5}x$

A reta s que contém os pontos B (5,0) e E (4,3), pode ser obtida da mesma maneira.

$y - y_0 = m_s(x - x_0)$

$0 - 3 = m_s(5 - 4)$

$m_s = -3$

Voltando à fórmula, agora com o valor de m e usando um dos pontos da reta s, temos

$y - 3 = -3(x - 4)$

$y = -3x + 12 + 3$

$y = -3x + 15$

Vejamos então que podemos montar um sistema para encontrar o ponto F.

$$\begin{cases} r : y = \frac{3}{5}x \\ s : y = -3x + 15 \end{cases}$$

Temos então que

$0 = \frac{3}{5}x + 3x - 15$

$x = 25/6$

Substituindo o valor de x na primeira equação, temos que

$y = \frac{5}{2}$

Logo, temos que $F = \left(\frac{25}{6}, \frac{5}{2}\right)$.

Agora, iremos calcular o determinante da matriz que contém as coordenadas dos pontos B, C e F para que, posteriormente, calculemos, por fim, a área do triângulo indicado.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 25/6 & 5/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante do matriz temos que det(M) = $\frac{5}{2}$

Logo, a área S é igual ao módulo do determinante de M dividido por 2, isto é

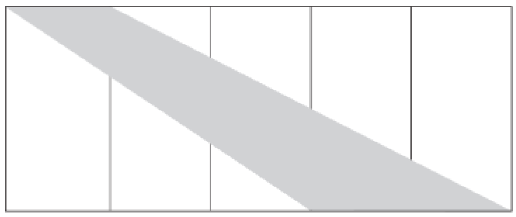
$$S = \frac{1}{2}|Det(M)| = \frac{1}{2}\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{4}$$

5.2 Área de um trapézio

O próximo problema e suas resoluções foram retirados de Vale, Pimentel e Barbosa (2015).

A figura mostra cinco retângulos, todos congruentes. Os vértices do trapézio são vértices de um ou de dois retângulos. Que percentagem de área da figura está sombreada?

Figura 13 – Figura do enunciado



Fonte: Vale, Pimentel e Barbosa (2015)

a) **Compreendendo o problema**

Observação: Iremos chamar de retângulo aquele que possui maior área, ou seja, aquele que contempla os 5 retângulos congruentes.

Basta acharmos a área destacada na figura e achar sua porcentagem com relação a área total do retângulo dividindo a primeira pela segunda.

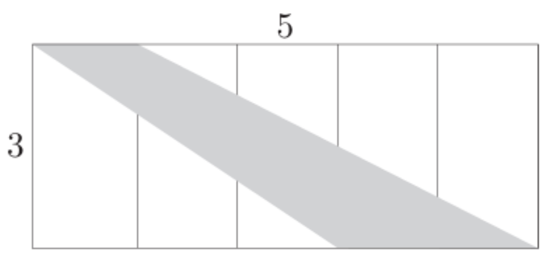
b) **Estabelecendo um plano**

- 1ª Estratégia

  Podemos calcular a área pintada calculando a área total do retângulo e depois retirarmos a área em branco. Depois, basta dividirmos a área da figura pintada pela área do retângulo.

  c) **Execução do plano**

Figura 14 – Resolução 1



Fonte: Vale, Pimentel e Barbosa (2015)

A área do retângulo é igual a $3 \cdot 5 = 15$. Já a área em branco é igual a soma de dois triângulos. Um triângulo de área igual a $\frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5$ e outro de área igual a $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

Assim, a área pintada é igual a $15 - (4,5 + 6) = 4,5$

Assim, a porcentagem da área do retângulo é igual a $\frac{4,5}{15} = 30\%$

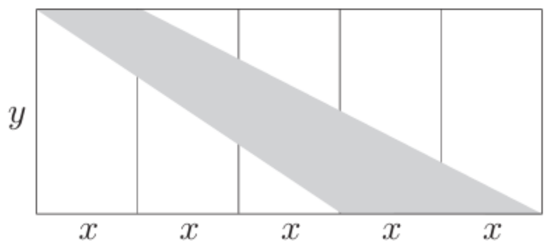
b) **Estabelecendo um plano**

- 2ª Estratégia

  Aqui iremos usar basicamente a mesma estratégia da 1ª resolução, mas iremos chamar a altura de y e dividir o seu comprimento em 5 partes com cada uma valendo x.

  c) **Execução do plano**

  Figura 15 – Resolução 2

  Fonte: Vale, Pimentel e Barbosa (2015)

  A área de um dos triângulos brancos é igual a $\frac{3xy}{2}$ e a outra $\frac{4xy}{2}$.

  A área do retângulo é igual a $5xy$.

  Como na resolução anterior, façamos $5xy - \left(\frac{3xy}{2} + \frac{4xy}{2}\right) = \frac{3xy}{2}$.

  A área da parte pintada dividida pela área do retângulo é igual a $\frac{\left(\frac{3xy}{2}\right)}{5xy} = \frac{3}{10} = 30\%$

  b) **Estabelecendo um plano**

- 3ª Estratégia

  Vamos fazer algo parecido com a resolução anterior, só que iremos calcular a área da figura pintada pela fórmula do trapézio.

  c) **Execução do plano**

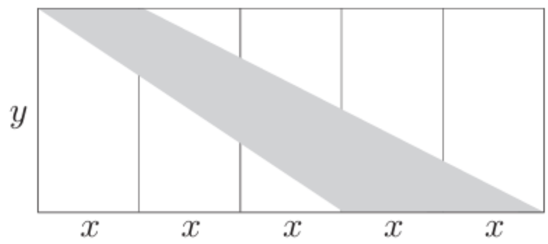
  A base menor do trapézio é igual a x e a base maior igual a 2x. Já sua altura é igual a y.

  Assim, a área pintada é igual a $\frac{(x + 2x) \cdot y}{2} = \frac{3xy}{2}$

  Como a área do retângulo é igual a $5xy$, temos que a porcentagem do trapézio corresponde a 30% da área do retângulo.

  b) **Estabelecendo um plano**

Figura 16 – Resolução 3



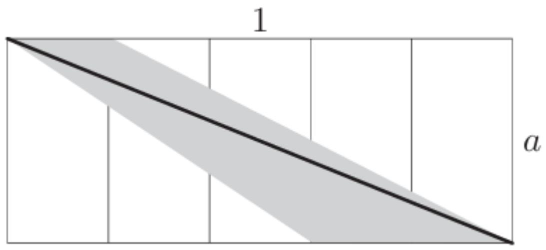
Fonte: Vale, Pimentel e Barbosa (2015)

- 4ª Estratégia

  Similarmente à resolução anterior, mas dividindo o trapézio em dois triângulos.

  c) **Execução do plano**

Figura 17 – Resolução 4



Fonte: Vale, Pimentel e Barbosa (2015)

Podemos dividir o trapézio em dois triângulos além de fazer o comprimento do retângulo igual a 1 e com altura igual a a

Assim, um dos triângulos que compõem o trapézio tem área igual a $\dfrac{\frac{2}{5}\cdot a}{2}+\dfrac{\frac{1}{5}\cdot a}{2}=\dfrac{3a}{10}$

A área do retângulo será igual a $a\cdot 1 = a$

Logo, $\dfrac{\left(\frac{3a}{10}\right)}{a}=\dfrac{3}{10}=30\%$.

b) **Estabelecendo um plano**

- 5ª Estratégia

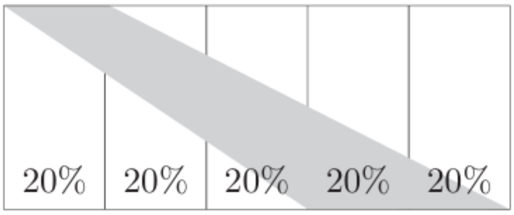
  Podemos dividir o retângulo em porcentagens e calcular a porcentagem da figura pintada.

  c) **Execução do plano**

  Observe que pela divisão do retângulo, um dos triângulos representa $\dfrac{60\%}{2}=30\%$ do total e a área do outro triângulo branco representa $\dfrac{80\%}{2}=40\%$ do total.

  A área do retângulo representa 100%. Logo, a área pintada é igual a $100\%-(30\%+40\%)=30\%$

Figura 18 – Resolução 5



Fonte: Vale, Pimentel e Barbosa (2015)

5.3 Sistema linear: Problema do Cachorro-Quente

Esse problema foi retirado de Carvalho (2013).

Uma barraca vende cachorro-quente com uma salsicha a R$ 15,00 e cachorro-quente com duas salsichas, a R$ 18,00. Ao final de um determinado dia, o vendedor conseguiu receber R$ 810,00 com a venda de cachorros-quentes e contou que foram vendidos 46 pães. Determine o número de salsichas que foram consumidas.

a) **Compreendendo o problema**

Numa barraca são vendidos cachorros-quentes que podem ser feitos com uma ou duas salsichas. Com uma salsicha o preço é de R$ 15,00, já com duas o preço sobe para R$ 18,00. No final do dia o vendedor conta quantos reais recebeu vendendo cachorros-quentes e quantos pães foram vendidos. A pergunta é, se ele conseguiu R$ 810,00 em um dia de trabalho, sendo 46 pães vendidos, qual foi o número de salsichas consumidas?

b) **Estabelecendo um plano**

- 1ª Estratégia

  O dinheiro recebido é igual a 15 reais vezes o número de cachorros-quentes com uma salsicha mais 18 vezes o número de cachorros-quentes com duas salsichas igual ao valor recebido no dia, que foi igual a $810,00

  Já o número de pães vendidos é igual a soma do número de pães vendidos com uma salsicha mais o número de pães vendidos com duas salsichas.

  c) **Execução do plano**

  Pelo que entendemos do enunciado, se chamarmos de x o número de pães vendidos com uma salsicha e por y o número de pães vendidos com duas salsichas, temos:

$$\begin{cases} 15x+18y=810 \\ x+y=46 \end{cases}$$

  Resolvendo o sistema temos que x = 6 e y = 40.

  Como x e y representam, respectivamente, o número de pães com uma e duas salsichas, então, basta multiplicar x por 1 e y por 2 e somarmos o resultado, isto é, Nº de salsichas = $6 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 86$.

b) **Estabelecendo um plano**

- 2ª Estratégia

Aqui iremos levar em conta o preço do pão, pois, o valor dele com uma ou duas salsichas não se altera, o que faz o valor mudar é a quantidade de salsichas que são vendidas junto ao mesmo.

O cachorro-quente de R$ 15,00 contém um pão e uma salsicha.

Já o cachorro-quente de R$ 18,00, vem com um pão e duas salsichas.

c) **Executando o plano**

Aqui vamos nos focar um pouco mais no número de pães.

Se indicarmos por x o valor do pão e y o valor de cada salsicha gasta no pão, então podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x + 2y = 18 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que x = 12 e y = 3. Isto significa que cada pão custa R$12,00 e que cada salsicha custa R$3,00.

Mas sabemos que foram vendidos 46 pães. Como cada pão custou R$12,00, então foram recebidos $12 \cdot 46$ reais apenas contando com os pães, isto é, R$ 552,00.

Só que ele recebeu ao todo R$$810,00$. Então ele gastou R$$810,00 - R\$552,00 = R\$258$ com as salsichas. Vimos que ele ganhou $R\$3,00$ com cada salsicha. Logo, para sabermos o número de salsichas, façamos $258 \div 3 = 86$.

b) **Estabelecendo um plano**

- 3ª Estratégia

Buscar ver quantos pães com duas salsichas foram vendidos ao verificar o mínimo de dinheiro que o vendedor receberia ao vender apenas cachorros-quentes pelo preço de R$ 15,00 cada um. Depois fazer a diferença deste valor com o que ele recebeu de fato.

c) **Executando o plano**

Se ele tivesse vendido apenas cachorros-quentes com uma salsicha, ele teria ganho um total de R$$15 \cdot 46 =$R$$690,00$. Só que ele ganhou R$ 810,00 no total. Isto se deve ao fato dele também ter vendido cachorros-quentes com duas as salsichas.

Então ele ganhou 810 - 690 = 120 apenas com pães com duas salsichas. Como a diferença de preço entre o cachorro-quente de uma para duas salsichas é igual a R$ 3,00, então ele vendeu $120 \div 3 = 40$ pães com duas salsichas. Logo, apenas com o pão com duas salsichas, foram vendidos $40 \cdot 2 = 80$ salsichas. Mas sabemos que 46 pães foram vendidos. Como 40 foram vendidos com duas salsichas então os outros 6 foram vendidos com apenas uma salsicha.

b) **Estabelecendo um plano**

- 4ª Estratégia

  Ao invés de buscar saber quantos cachorros-quentes com duas salsichas foram vendidos, buscar quantos com uma salsicha foram vendidos.

  c) **Executando o plano**

  Suponha que todos os cachorros-quentes foram vendidos ao preço de R$ 18,00 totalizando $46 \cdot 18 = 828$. Isto é 828-810 = 18 a mais do que ele realmente recebeu. Como a diferença entre os preços de cachorros-quentes com uma e com duas salsichas é igual a R$ 3,00, então $18 \div 3 = 6$ que é o número de pães que foram vendidos com um cachorro quente.

  Logo, $46 - 6 = 40$ é o número de pães que foram vendidos com duas salsichas cada.

  Assim, o número total de salsichas vendidas é igual a $6 + 40 \cdot 2 = 6 + 80 = 86$.

5.4 Algoritmo: Problema das jarras de barro

O problema a seguir foi retirado do livro de Brolezzi (2013).

A camponesa e os potes.

"**Uma camponesa necessitava de 5 litros de água para fazer uma receita de pães. Utilizando apenas suas duas jarras de barro sem marcas, uma para 7 litros e outra para 3 litros, como conseguiu trazer da fonte apenas a quantidade de água que desejava?**"

Para resolver este problema é interessante transformá-lo em problemas mais fáceis de serem resolvidos para que, juntos, ajudem na visualização de uma solução para o problema.

Por exemplo: Se deixássemos o problema ser com as mesmas jarras de barro, mas ao invés de levarmos exatamente 5 litros para casa, fosse levado 4 litros, como resolveríamos o problema?

Bem, basta encher o jarro de 7 litros e despejar 3 litros no de 3. Logo após despejar fora toda a água do jarro 3, teríamos apenas 4 litros no jarro de 7 e pronto! Problema resolvido.

E se por acaso, tivéssemos interesse em obter apenas 1 litro?

Basta pegar a situação anterior em que tínhamos 4 litros no jarro de barro de 7 litros e passar para o jarro de 3 litros.

E se agora quisermos que sobre 2 litros? Basta encher o jarro de 3 litros, despejar no de 7, realizar o mesmo processo, ficando com 6 litros no de 7 e 3 no de 3 litros. Agora basta despejar um litro do jarro de 3 litros no de 7 litros ficando com 2 litros no jarro de 3 litros. Com

Tabela 1 – Estratégia A

Etapa	Pote de 7 litros	Pote de 3 litros
1	Encha o pote de 7 litros	O pote de 3 litros está vazio
2	Derrame o que couber no pote de 3 litros (ficam 4 litros aqui)	3 litros
3	4 litros	Esvazie o pote de 3 litros
4	Derrame novamente 3 litros no outro pote (fica 1 litro)	3 litros
5	1 litro	Esvazie de novo o pote de 3 litros
6	Derrame esse 1 litro do pote vazio	1 litro
7	Encha novamente o pote de 7 litros	1 litro
8	Derrube o que couber no pote de 3 litros (agora ficam 5 litros aqui)	3 litros
9	Pronto! Você já tem um pote com os 5 litros d'água desejados	Esvazie de novo o pote de 3 litros. Essa estratégia "desperdiça"9 litros (na verdade, devolve para a natureza). Essa estratégia tem 9 etapas.

este tipo de abordagem fica mais fácil se chegar na resolução do problema, já que o desafio é seccionado em partes menores.

Tabela 2 – Estratégia B

Etapa	Pote de 7 litros	Pote de 3 litros
1		Encha o pote de 3 litros
2	3 litros	Derrame o conteúdo no pote de 3 litros
3	3 litros	Encha novamente o pote de 3 litros
4	6 litros	Derrame de novo o conteúdo no pote de 7 litros
5	6 litros	Encha novamente o pote de 3 litros
6	7 litros	Derrame o que couber no pote de 7 litros - você irápreenche-lo e ficarão 2 litros aqui
7	Esvazie completamente o pote de 7 litros	2 litros
8	2 litros	Coloque esses 2 litros no pote de 7 litros vazio
9	2 litros	Encha o pote de 3 litros. Você poderia parar por aqui se quiser levar os dois potes com alguma água
10	Eis os desejados 5 litros d'água	Para ser mais preciso, derrame o conteúdo no pote que já tinha 2 litros e obtenha 5 litros. Essa estratégia desperdiça apenas 7 litros e tem 10 etapas.

CAPÍTULO

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final do trabalho percebeu-se que é urgente que não só a Resolução de Problemas se torne uma metodologia de ensino como, também, incutir nos alunos e nos professores a capacidade de resolver os problemas de diferentes formas. Isso se deve pelo motivo dos benefícios que não são ganhos ao deixar que o problema seja resolvido de mais de uma forma.

Devemos entender, então, que a criatividade é fundamental nos dias de hoje e ela pode ser desenvolvida ao realizar uma retrospectiva dos problemas resolvidos não só para perceber se está certa ou não, como, também, de aproveitar a possibilidade de uma nova ideia que pode ser usada em outra solução do mesmo problema.

Assim, o professor deve incentivar a resolução de problemas por mais de um caminho e a apresentação de soluções múltiplas entre os alunos, o que, além de desenvolver a criatividade, também potencializa os conceitos envolvidos em suas resoluções.

Desta forma foi alcançado o objetivo de mostrar alguns dos benefícios em resolver os problemas por mais de uma forma. Assim, apontando para a importância que esta habilidade impacta naqueles que realizam (ou ao menos procuram) meios diferentes de se resolver os problemas.

A hipótese inicial era de que resolver o mesmo problema usando diferentes estratégias aumentaria a criatividade, criando no aluno uma maior capacidade de resolver problemas futuros. Isso não só foi apontado pelas pesquisas como também indicam que a associação entre diferentes conceitos usados nas resoluções desenvolvem maior compreensão da Matemática na totalidade.

Além disso, acreditávamos que usando o método de Polya tais benefícios seriam potencializados, uma vez que ele organiza melhor o raciocínio até chegar na sua solução. Ainda mais, temos que o aluno, por sua vez, ao resolver problemas desta forma, deve facilitar a vida do professor em sua correção, já que colabora com o acompanhamento do passo-a-passo realizado pelo aluno, identificando qual estratégia foi usada e verificar a existência de algum erro em sua solução.

Pensando desta forma, seria interessante o professor apresentar a ideia principal presente neste trabalho ainda no ensino fundamental para que o aluno se acostume com o método para, quando chegar no ensino médio, já apresentar uma certa familiaridade com o mesmo e com o costume de apresentar diferentes soluções para o mesmo problema, ou, ao menos, ter um leque de estratégias para ter uma maior chance de chegar na resposta além de contribuir para um melhor pensamento divergente.

Entretanto, se não houver um cuidado com as escolas de levar este conhecimento desde o ensino fundamental até o ensino médio, dificilmente esta ideia será aproveitada pelo aluno no decorrer da sua vida escolar/acadêmica. Isto é, é preciso que os professores da escola se mobilizem e apresentem o método de Polya ao longo dos anos escolares, não só o de matemática como, também, de outras disciplinas, já que existem problemas das mais diferentes formas e conteúdos.

Outro ponto a ser destacado neste trabalho é que existe um livro de Dante (1991) voltado para as primeiras séries do ensino fundamental, isto é, o aluno não precisa ter contato, a princípio, com algum livro do Polya. Porém, é importante que o professor tenha esta familiaridade com o conteúdo de Polya (1975) uma vez que é fundamental o professor ter domínio daquilo que vai passar para os seus alunos.

Não podemos esquecer, por fim, que sempre existem alunos que se destacam e possuem um desempenho muito além da média, podendo até participarem de olimpíadas de matemática. Este trabalho pode servir de apoio para professores que desejam servir como transmissores do conhecimento para tal finalidade.

Por sua vez o trabalho teria tido melhores resultados se fosse aplicado numa sala de aula ou num workshop para professores, pois diferentes respostas dos alunos (mesmo que fossem de alunos diversos) poderiam ser bem discutidas, fomentando a ideia de que os problemas muitas vezes podem ter diferentes soluções e desfazer aquela ideia de que ao resolver um problema já deve ir para outro.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, E. M. S. de. Um estudo de criatividade. **Arquivos Brasileiros de Psicologia Aplicada**, v. 26, n. 2, p. 59–68, 1974. Citado na página 34.

BARBOSA, A.; VALE, I. As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas. **Educação e Matemática**, n. 166, p. 19–24, 2022. Citado na página 34.

BRAGA, G. I. L.; HANKE, T. A. F. Curiosidades matemáticas: uma alternativa em recurso didático. **SYNTHESIS| Revistal Digital FAPAM**, v. 5, n. 1, p. 245–264, 2014. Citado na página 31.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília, 2018. Citado na página 35.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Citado nas páginas 27 e 32.

BROLEZZI, A. C. **Criatividade e resolução de problemas**. [S.l.]: Livraria da Física, 2013. Citado nas páginas 27, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37 e 58.

CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? **Boletim Gepem**, n. 60, p. 147–162, 2012. Citado na página 30.

CARVALHO, R. A. de. **Revista do Professor de Matemática**. 2013. <https://rpm.org.br/cdrpm/81/2.html>. Accessed: 2023-12-20. Citado na página 56.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática: 1ª a 5ª séries**. [S.l.]: Ática S. A., 1991. Citado nas páginas 23, 24, 27 e 62.

____. **Tudo é Matemática**. [S.l.]: Ática, 2009. Citado na página 41.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana**. [S.l.]: Atual Editora, 1997. Citado nas páginas 40, 41 e 42.

FREIRE, M. da S.; SILVA, M. G. L. da. Como formular problemas a partir de exercícios? argumentos dos licenciandos em química. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, v. 12, n. 1, p. 191–208, 2013. Citado na página 32.

GONTIJO, C. H. Estratégias para o desenvolvimento da criatividade em matemática. **Linhas Críticas**, p. 229–244, 2006. Citado nas páginas 27 e 31.

GUILFORD, J. P. **The nature of human intelligence**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1967. Citado na página 34.

MEDEIROS, D. M. A resolução de problemas como ferramenta metodológica no ensino de matemática e física. **Revista Educação Pública**, v. 20, n. 30, p. 11, 2020. Citado na página 27.

MURRAY, R. S. **Álgebra Superior**. [S.l.]: McGRAW-HILL DO BRASIL, LTDA, 1971. Citado na página 43.

OLIVEIRA, N. C. de. **Revista do Professor de Matemática**. 2014. <https://rpm.org.br/cdrpm/83/4.html>. Accessed: 2023-12-20. Citado nas páginas 45, 46, 47, 48, 49, 50 e 51.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Álgebra e pensamento algébrico através da resolução de problemas (ta). In: **XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. [S.l.: s.n.], 2011. Citado nas páginas 32 e 34.

PIMENTEL, R.; RIOS, J.; SILVA, B. D. d. Second life como alternativa lúdica ao desenvolvimento do pensamento divergente. Universidad de A Coruña, 2007. Citado na página 34.

PINHEIRO, J. M. d. Q.; MEDEIROS, K. M. de. As perguntas para desenvolver estratégias: Álgebra e resolução de problemas no ensino médio. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 1, p. 1–25, 2020. Citado na página 32.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas: Um novo aspecto do método matemático**. [S.l.]: interciência, 1975. Citado nas páginas 19, 21, 22, 23, 29, 31, 33, 34, 35 e 62.

____. Dez mandamentos para professores. **Revista do professor de matemática**, v. 10, p. 2–10, 1987. Citado na página 36.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012. Citado na página 36.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (reprint). **Journal of education**, Sage Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 196, n. 2, p. 1–38, 2016. Citado na página 29.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. APM-Associação de Professores de Matemática, 2015. Citado nas páginas 29, 30, 53, 54, 55 e 56.

GLOSSÁRIO

BNCC Banco Nacional Comum Curricular.

PCNs Parâmetros Curriculares Nacionais.

ICMC USP
SÃO CARLOS