

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Introdução às séries de Fourier e critérios de convergência.**

**Evandro Aloísio Guilherme**

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Evandro Aloísio Guilherme**

Introdução às séries de Fourier e critérios de convergência.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

**USP – São Carlos**  
**Janeiro de 2023**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

G953i      Guilherme, Evandro Aloísio  
            Introdução às séries de Fourier e critérios de  
convergência / Evandro Aloísio Guilherme;  
orientador Tiago Henrique Picon. -- São Carlos,  
2023.  
            135 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Séries de Fourier. 2. Teorema de Fourier. I.  
Picon, Tiago Henrique, orient. II. Título.



**Evandro Aloísio Guilherme**

Introduction to Fourier series and convergence criteria.

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

**USP – São Carlos**  
**January 2023**



*Dedico esse trabalho a todos os educadores que me influenciaram na minha formação docente, e a todos aqueles que acreditam no poder transformador da educação e da ciência, pilares para uma sociedade mais justa e equânime.*



# AGRADECIMENTOS

---

---

Finda esta etapa da minha formação docente, é chegada a hora dos meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que fizeram parte da minha trajetória, e que me auxiliaram, direta ou indiretamente, na conclusão desse processo.

Primeiramente à Deus, criador de todas as coisas, e que pela minha fé, sempre esteve presente guiando os meus passos e traçando os melhores planos para a minha vida.

Aos meus pais, Valdecir e Luzia, que com muita luta e garra, nunca mediram esforços para me oferecer toda educação e suporte necessário para meu crescimento pessoal e profissional, a quem devo toda minha gratidão.

Às minhas queridas irmãs, Evelyn e Letícia, exemplos de determinação, que agraciaram nossa família com as conquistas do diploma de fisioterapeuta e contadora, o que muito nos orgulha.

À minha esposa e companheira de vida, Izabel, presente de Deus na minha vida, que luta comigo diariamente para construirmos nosso futuro, e que está sempre ao meu lado dando todo apoio e carinho nos momentos mais difíceis.

À nossa filha Luiza, que ainda está crescendo no ventre da mamãe, mas que já nos transborda de amor e alegria por sua chegada e nos motiva a sermos pessoas melhores e a seguir lutando no dia a dia.

A todos os meus professores que me inspiraram a seguir carreira docente, e em especial ao meu pai que desde pequeno me ensinava contas em casa, o que foi decisivo para me fomentar o prazer pelo estudo e pela docência em Matemática.

À instituição UNICAMP, onde tive o prazer e o privilégio de ter me graduado em Matemática. Foram cinco anos de muita dedicação que me garantiu uma excelente formação, que trago na memória com muito orgulho e saudade dos anos aí vividos.

Às instituições IMPA e USP, e aos professores engajados na idealização, coordenação e efetiva docência do PROFMAT, que muito contribuí para uma formação de qualidade dos professores de Matemática do país.

Ao meu orientador Tiago Henrique Picon, a quem tenho muito estima e admiração, exemplo de educador, que prontamente atendeu ao meu pedido, e com toda sua competência e dedicação, me oportunizou uma exímia e prazerosa orientação.

Ao prof. Dr. Giuliano Angelo Zugliani e ao prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida,

membros da banca julgadora que contribuíram com valorosas correções e sugestões para o aprimoramento desta dissertação.

A todos o meu muito obrigado.

*“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina”  
(Cora Coralina)*





# RESUMO

GUILHERME, E. A. **Introdução às séries de Fourier e critérios de convergência.** 2023. 135 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Existem diversas lacunas na formação de licenciados de Matemática no país. Seja por um tempo escasso ou por uma extensa ementa das disciplinas que compõe o currículo dos cursos de graduação, muitos professores se graduam sem terem aprendido com o devido aprofundamento as Séries de Fourier, ou mesmo sem nunca as terem estudado. Nesse sentido, essa dissertação tem o objetivo de oferecer aos graduandos e futuros professores de Matemática um material detalhado sobre os fundamentos introdutórios das Séries de Fourier. A fim de lograr esse objetivo, esta dissertação foi iniciada com um estudo preliminar sobre periodicidade e paridade de funções. Na sequência, buscando encorajar o estudo das Séries de Fourier, foi abordado o problema físico da condução de calor em uma barra metálica, problema que motivou o surgimento dessa teoria introduzida por Fourier. Em seguida, foram definidos os coeficientes e a expressão das Séries de Fourier, cujo os cálculos foram ilustrados por uma quantidade expressiva de exemplos. Posteriormente, foi apresentada uma interessante aplicação de como obter séries numéricas que aproximem o valor de  $\pi$ . No capítulo seguinte, foi apresentada a demonstração completa do Teorema de Fourier que versa sobre a convergência pontual e uniforme da série de Fourier. Por fim, no último capítulo foi apresentada uma aplicação didática com o objetivo de construir os gráficos das somas parciais de Fourier de modo a permitir a visualização da convergência da série de Fourier para uma função, utilizando o software Geogebra.

**Palavras-chave:** Séries de Fourier, Teorema de Fourier, convergência de séries de funções, funções periódicas, paridade de funções.



# ABSTRACT

GUILHERME, E. A. **Introduction to Fourier series and convergence criteria.** 2023. 135 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

There are several gaps in the training of mathematics teachers in Brazil. Whether for a short time or for an extensive menu of subjects that make up the curriculum of undergraduate courses, many teachers graduate without having learned the Fourier Series in depth, or even without ever having studied them. In this sense, this dissertation aims to offer students and future mathematics teachers a detailed material on the introductory foundations of Fourier Series. In order to achieve this objective, this dissertation began with a preliminary study on periodicity and parity of functions; in the sequence, seeking to encourage the study of Fourier Series, the physical problem of heat conduction in a metallic object was approached, a problem that motivated the emergence of this theory due to Fourier; then, the coefficients and the expression of the Fourier Series were defined, whose calculations were illustrated by an expressive number of examples; later, the interesting application of how to obtain series of numbers that approximate the value of  $\pi$  was presented; and finally, the uniform and pointwise convergence of the Fourier Theorem was demonstrated. In the last chapter, a didactic tutorial was presented teaching how to construct the graphs of partial sums of Fourier Series using the Geogebra software.

**Keywords:** Fourier Series, Fourier's Theorem, convergence of series of functions, periodic functions, function parity.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Autorretrato de Jean Baptiste Joseph Fourier. . . . .	22
Figura 2 – Gráfico da função periódica <i>onda quadrada</i> de período $T = 2$ . . . . .	24
Figura 3 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.2 de período $T = 2\pi$ . . . . .	24
Figura 4 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.3 de período $T = 2\pi$ . . . . .	25
Figura 5 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.4 de período $T = 2$ . . . . .	25
Figura 6 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.5 de período $T = 2\pi$ . . . . .	25
Figura 7 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.6 de período $T = 2$ . . . . .	26
Figura 8 – Decomposição da função $f(x) = e^x = \cosh x + \sinh x$ . . . . .	30
Figura 9 – Distribuição de temperatura em uma barra metálica de comprimento $L$ no instante $t = 0$ . . . . .	38
Figura 10 – Gráfico da função periódica <i>onda quadrada ímpar</i> . . . . .	47
Figura 11 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com $N=1$	48
Figura 12 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com $N=3$	49
Figura 13 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com $N=10$ . . . . .	49
Figura 14 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com $N=100$ . . . . .	49
Figura 15 – Gráfico da função periódica <i>onda quadrada par</i> . . . . .	50
Figura 16 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.1 . . . . .	51
Figura 17 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com $N=1$ . . . . .	52
Figura 18 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com $N=3$ . . . . .	52
Figura 19 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com $N=10$ . . . . .	52
Figura 20 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com $N=100$ . . . . .	52
Figura 21 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.3 . . . . .	53
Figura 22 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com $N=1$ . . . . .	54
Figura 23 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com $N=3$ . . . . .	54
Figura 24 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com $N=10$ . . . . .	54
Figura 25 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com $N=100$ . . . . .	55
Figura 26 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.4 . . . . .	55

Figura 27 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com N=1 . . . . .	57
Figura 28 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com N=3 . . . . .	57
Figura 29 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com N=10 . . . . .	57
Figura 30 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com N=100 . . . . .	57
Figura 31 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.5 . . . . .	58
Figura 32 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com N=1 . . . . .	59
Figura 33 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com N=3 . . . . .	59
Figura 34 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com N=10 . . . . .	59
Figura 35 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com N=100 . . . . .	60
Figura 36 – Gráfico da função do exemplo 3.3.6 . . . . .	60
Figura 37 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com N=1 . . . . .	62
Figura 38 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com N=3 . . . . .	62
Figura 39 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com N=10 . . . . .	62
Figura 40 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com N=100 . . . . .	63
Figura 41 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.7 . . . . .	63
Figura 42 – Gráfico da função $f = \frac{1}{x}$ . . . . .	67
Figura 43 – Gráfico da função $g(x)$ . . . . .	68
Figura 44 – Gráfico da função periódica $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e sua derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ . . . . .	68
Figura 45 – Gráfico da função $f(x) = x$ definida em $[0, \pi]$ . . . . .	70
Figura 46 – Extensão ímpar da função $f(x) = x$ . . . . .	70
Figura 47 – Extensão par da função $f(x) = x$ . . . . .	70
Figura 48 – Gráfico da função $f(x) = x(\pi - x)$ definida em $[0, \pi]$ . . . . .	71
Figura 49 – Extensão par da função $f(x) = x(\pi - x)$ . . . . .	72
Figura 50 – Extensão ímpar da função $f(x) = x(\pi - x)$ . . . . .	73
Figura 51 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções $x^n$ no intervalo $[0, 1]$ . . . . .	83
Figura 52 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções $x^n(1 - x^n)$ no intervalo $[0, 1]$ . . . . .	83

Figura 53 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ . . . . .	84
Figura 54 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções $f_n(x) = nxe^{-nx}$ . . . . .	86
Figura 55 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ . . . . .	88
Figura 56 – Gráfico de $\psi$ no intervalo $[-L, L]$ . . . . .	113
Figura 57 – Gráfico de $g_j(x)$ no intervalo $[x_j - L, x_j + L]$ . . . . .	114
Figura 58 – Tela inicial do Geogebra Classic. . . . .	120
Figura 59 – Botão Controle Deslizante. . . . .	120
Figura 60 – Configurações do controle deslizante. . . . .	121
Figura 61 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier. . . . .	121
Figura 62 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier da função sinal. . . . .	122
Figura 63 – Gráfico da série de Fourier da função sinal com $p = 10$ . . . . .	122
Figura 64 – Cinco primeiras somas da série de Fourier de uma onda quadrada. . . . .	123
Figura 65 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.2. . . . .	124
Figura 66 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.2. . . . .	125
Figura 67 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.3. . . . .	125
Figura 68 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.3. . . . .	126
Figura 69 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.4. . . . .	127
Figura 70 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.4. . . . .	128
Figura 71 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.5. . . . .	128
Figura 72 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do exemplo (5.0.5). . . . .	129
Figura 73 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.6. . . . .	130
Figura 74 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.6. . . . .	131
Figura 75 – Função tipo <i>Soma</i> da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.7. . . . .	132
Figura 76 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.7. . . . .	132
Figura 77 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função $f(x) = x^4$ , para $0 < x < 2\pi$ . . . . .	134





# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	21
2	PRELIMINARES . . . . .	23
2.1	Funções periódicas . . . . .	23
2.2	Funções pares e ímpares . . . . .	28
2.3	Relações trigonométricas . . . . .	31
2.4	Relações de ortogonalidade . . . . .	32
3	SÉRIES DE FOURIER . . . . .	37
3.1	Séries de Fourier: motivação histórica . . . . .	37
3.1.1	<i>Condução do calor numa barra</i> . . . . .	37
3.1.2	<i>Método de Fourier para o problema da condução do calor</i> . . . . .	39
3.2	Série e Coeficientes de Fourier . . . . .	42
3.2.1	<i>Expressão para os coeficientes de Fourier.</i> . . . . .	43
3.2.2	<i>Séries de Fourier de funções pares e ímpares</i> . . . . .	45
3.3	Cálculo de algumas séries de Fourier . . . . .	46
3.4	Teorema de Fourier . . . . .	66
3.5	Extensões pares e ímpares de função . . . . .	69
3.6	Uma interessante aplicação: aproximações para $\pi$ . . . . .	74
3.7	Integração de séries de Fourier . . . . .	77
4	CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER . . . . .	81
4.1	Preliminares . . . . .	81
4.1.1	<i>Sequências e séries de funções</i> . . . . .	81
4.1.2	<i>Funções integráveis</i> . . . . .	92
4.2	Convergência pontual da série de Fourier . . . . .	95
4.2.1	<i>Lema de Riemann - Lebesgue</i> . . . . .	95
4.2.2	<i>Estimativas para o erro <math>e_n(x)</math></i> . . . . .	98
4.2.3	<i>Teste de Dini</i> . . . . .	102
4.3	Convergência uniforme das séries de Fourier . . . . .	106
4.3.1	<i>Desigualdade de Bessel</i> . . . . .	106
4.3.2	<i>Estimativas dos coeficientes de Fourier</i> . . . . .	108
4.3.3	<i>Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da série de Fourier</i>	111
4.3.4	<i>Segundo Teorema sobre a Convergência Uniforme da série de Fourier</i>	112

<b>5</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER UTILIZANDO O GEOGEBRA . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>5.0.1</b>	<b><i>Tutorial de construção dos gráficos da Série de Fourier.</i> . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>5.0.2</b>	<b><i>Exemplos de gráficos das somas parciais de Fourier</i> . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>. . . . .</b>	<b>135</b>

---

## INTRODUÇÃO

---

Jean Baptiste Joseph Fourier foi um brilhante físico-matemático que ficou conhecido por suas contribuições e investigações em termodinâmica e séries numéricas. Nascido na França em 1768, demonstrou seu talento e interesse pela matemática desde logo muito cedo. Em 1794, é aceito para estudar na *École Normale de Paris*, uma das mais prestigiadas universidades européias, onde teve professores como Lagrange e Laplace, dois dos mais renomados matemáticos franceses à época. Anos mais tarde, Fourier sucedeu Lagrange ao ser nomeado docente para a cátedra de Análise e Mecânica da *École Polytechnique*.

Seduzido pelos ideais revolucionários da Revolução Francesa, Fourier participava ativamente do comitê revolucionário local, o que custou sua prisão por duas ocasiões, interrompendo seu trabalho de pesquisa em Matemática. Em 1798, juntou-se ao exército de Napoleão na invasão do Egito, onde tornou-se conselheiro científico e secretário do Instituto do Egito, um centro de pesquisas fundado por Napoleão na cidade do Cairo. Em 1801, Fourier regressa à França tendo mais tarde sido nomeado por Napoleão prefeito da comuna de Grenoble, onde aí permanece e desenvolve a maior parte de seu trabalho teórico e experimental sobre a propagação do calor.

Em 1822, depois de alguns anos dedicados à pesquisas, Fourier publica sua obra intitulada *Theorie Analytique de la chaleur*, na qual apresenta duas importantes contribuições: uma na área da Física e outra puramente matemática. Na Física, ele propõe modelar a propagação de calor em um objeto metálico por meio de uma equação diferencial parcial; na Matemática, afirma que uma função contínua pode ser representada por uma série infinita de senos e cossenos. Devido ao excesso de simplicidade e falta de rigor matemático na explanação de suas idéias, seu trabalho é alvo críticas por Lagrange. Anos mais tarde, sua demonstração é melhorada pelo matemático alemão Johann Dirichlet, que apresenta em 1829 a versão final do intitulado Teorema de Fourier. Apesar das críticas, o trabalho de Fourier é considerado por muitos um marco na teoria Físico-Matemática, pois se torna o precursor da Análise Harmônica, ramo da matemática que estuda a representação de funções ou sinais por meio de ondas senoidais.



Figura 1 – Autorretrato de Jean Baptiste Joseph Fourier.

Fourier deixou um primoroso legado de sua obra para os dias atuais. Muitas aplicações em situações práticas decorrem de sua teoria. Hoje a análise de Fourier é uma das técnicas matemáticas mais empregadas nas mais diversas áreas da Física e Engenharia. Além de ser utilizada como método numérico para solucionar algumas equações diferenciais parciais, as séries de Fourier possibilitam o processamento de sinais elétricos e a geração de imagens digitais, e por isso possuem papel central nas áreas de Telecomunicações e Engenharia Elétrica. Também é empregada na Música ao solucionar a equação da onda e descrever os movimentos de vibração e sobreposição de ondas sonoras. Outras aplicações são conhecidas em áreas de Ciências Exatas, tais como a Física Quântica e a Econometria.

Inspirados pela genialidade de suas idéias pioneiras e pela relevância das mais diversas aplicações de sua teoria, essa dissertação se ocupa da tarefa de explorar em detalhes os conceitos introdutórios sobre as séries de Fourier. Esperamos que esse texto ajude o estudante de matemática e áreas afins a compreender os conceitos elementares, as definições, os cálculos que compõem a série de Fourier de uma função, e o Teorema de Fourier com seus critérios de convergência. Ainda mais, também ensinamos que esse trabalho o inspire a contemplar com prazer a fascinante beleza desta teoria.

---

## PRELIMINARES

---

Este capítulo preliminar foi organizado em seções independentes e elementares, necessários para o estudo inicial da teoria sobre séries de Fourier. A abordagem desses tópicos, neste capítulo preliminar, tem o objetivo didático de facilitar a leitura dos conteúdos apresentados nos capítulos subsequentes. Acreditamos dessa forma proporcionar uma melhor compreensão sobre séries de Fourier, tema central dessa monografia.

### 2.1 Funções periódicas

**Definição 2.1.1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *periódica* de período  $T > 0$ , se  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Decorre imediatamente desta definição que se  $T$  é período da  $f$ , então qualquer múltiplo natural de  $T$  também determina um período para  $f$ . O menor desses períodos chamamos de *período fundamental*, que por conveniência usaremos apenas a expressão *período*. Exemplos elementares de funções periódicas são as funções trigonométricas  $f(x) = \sin x$  e  $f(x) = \cos x$ , e suas combinações lineares, todas de período  $T = 2\pi$ .

Podemos construir artificialmente uma infinidade de funções periódicas a valores reais que não sejam trigonométricas. De modo geral, para se construir uma função periódica de período  $T$ , tomamos uma função qualquer  $f(x)$  definida a princípio em um intervalo limitado  $(a, b)$ , no qual  $T = b - a$ , que denominaremos de *função original*, e então a estendemos na reta de modo que seu domínio passe a incluir pontos fora do intervalo  $(a, b)$ , cuja as respectivas imagens são definidas por meio da condição de periodicidade  $f(x + T) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Os exemplos a seguir ilustram funções periódicas de período  $T$  construídas artificialmente a partir uma função original  $f$  definida em  $(a, b)$ , que serão objetos de estudos no cálculo das séries de Fourier apresentados no capítulo seguinte.

**Exemplo 2.1.1.** A função sinal é definida pela seguinte expressão no intervalo aberto  $(-1, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Estendendo seu domínio para toda a reta pela condição de periodicidade, temos a função periódica estendida na reta de período  $T = 2$  conhecida por *onda quadrada*.

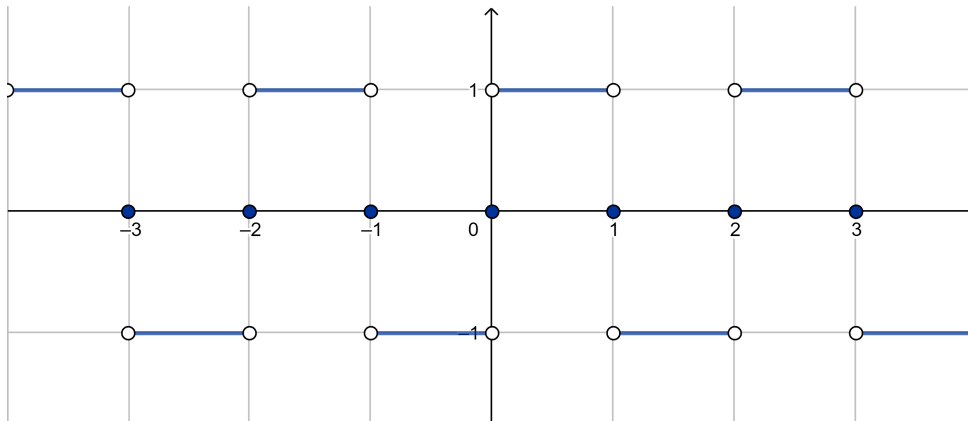


Figura 2 – Gráfico da função periódica *onda quadrada* de período  $T = 2$ .

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $f$  definida por  $f(x) = x$  no intervalo  $[-\pi, \pi)$ . A extensão do domínio de  $f$  em toda reta dá origem a uma função periódica de período  $2\pi$ .

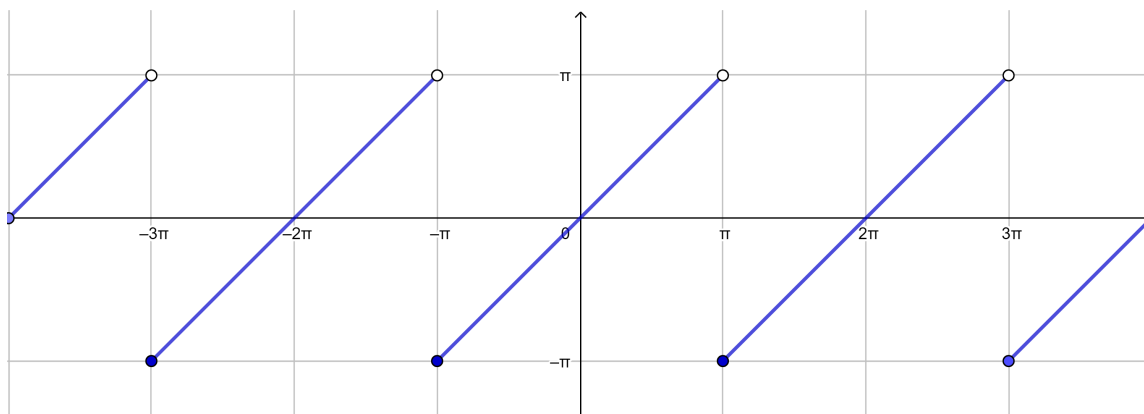


Figura 3 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.2 de período  $T = 2\pi$ .

**Exemplo 2.1.3.** Seja  $f$  definida no intervalo  $[-\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

A extensão de  $f$  na reta dá origem à função periódica de período  $2\pi$ .

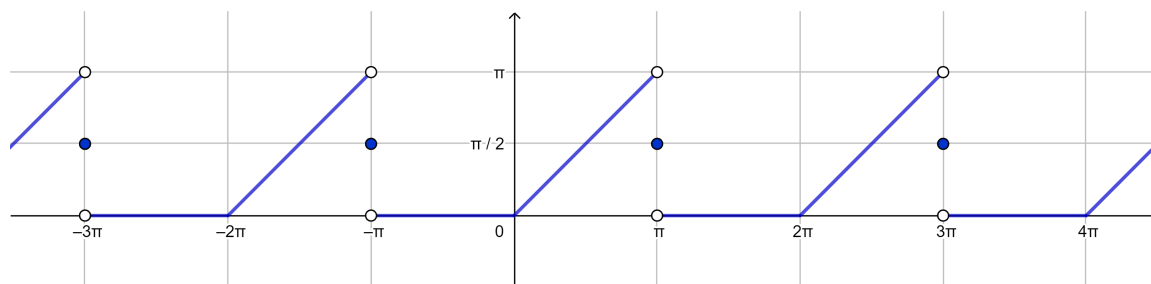


Figura 4 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.3 de período  $T = 2\pi$ .

**Exemplo 2.1.4.** Seja  $f$  definida no intervalo  $[-1, 1)$  por

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

A extensão de  $f$  na reta gera a função periódica de período 2.

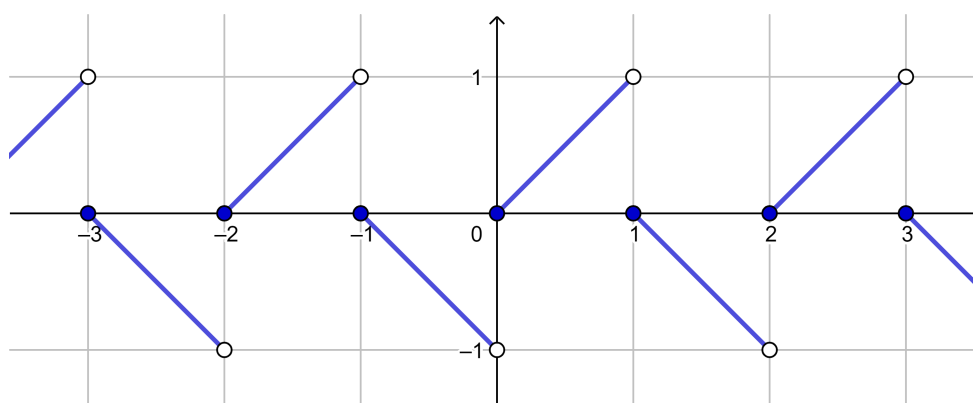


Figura 5 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.4 de período  $T = 2$ .

**Exemplo 2.1.5.** Seja  $f$  definida por  $f(x) = x^2$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . A extensão de  $f$  na reta gera a função periódica de período  $T = 2\pi$ .

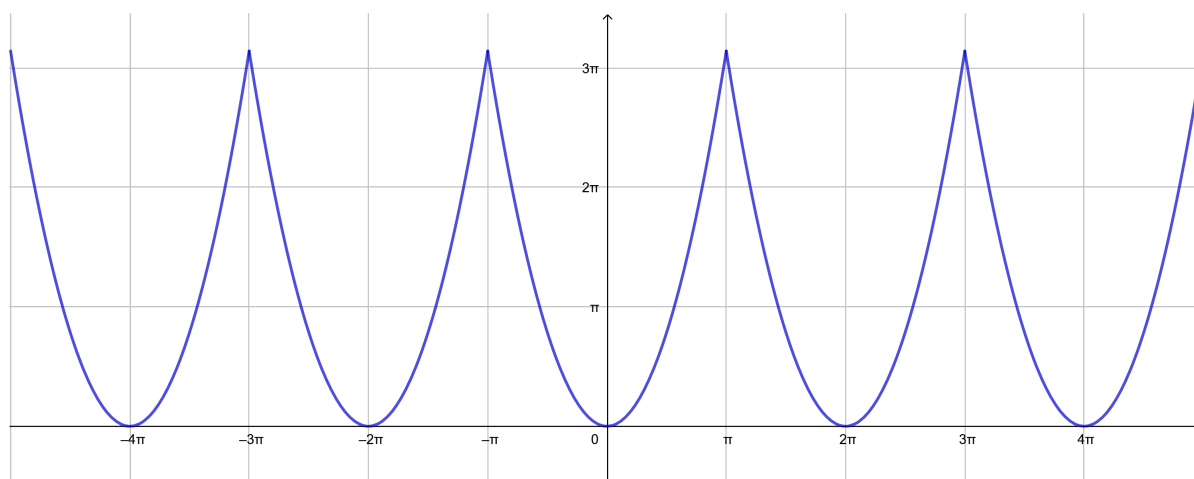


Figura 6 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.5 de período  $T = 2\pi$ .

**Exemplo 2.1.6.** Seja  $f$  definida por  $f(x) = x^2$  no intervalo  $(0, 2)$ . A extensão de  $f$  na reta dá origem a uma função periódica de período  $T = 2$ .

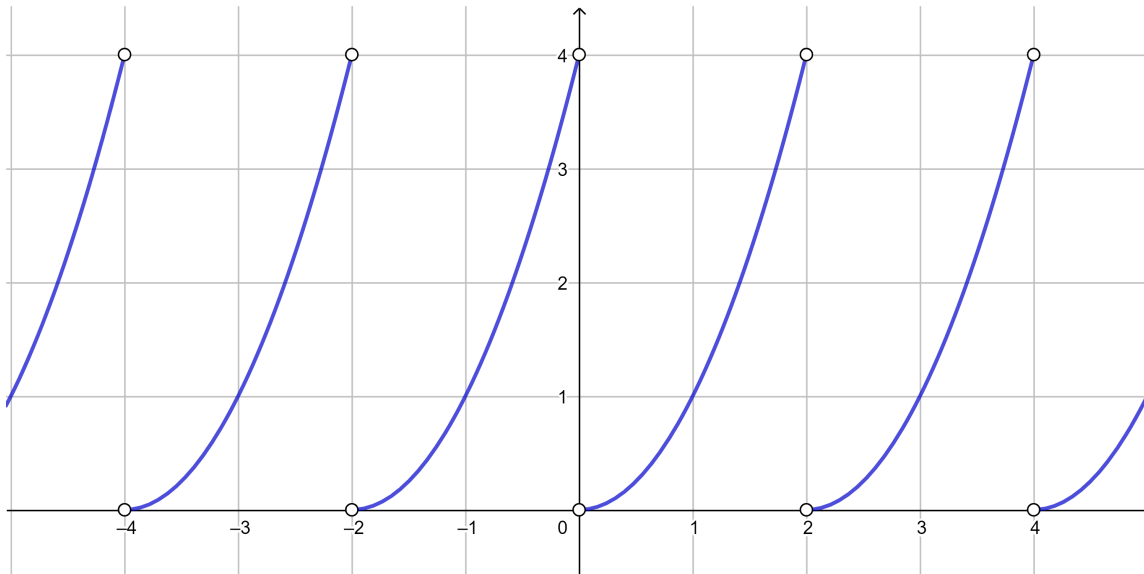


Figura 7 – Gráfico da função do Exemplo 2.1.6 de período  $T = 2$ .

**Proposição 2.1.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$ . Então

- (i)  $f(ax)$ , com  $a \neq 0$ , é periódica de período  $\frac{T}{a}$ ;
- (ii)  $f\left(\frac{x}{b}\right)$ , com  $b \neq 0$ , é periódica de período  $bT$ .

*Demonstração.*

- (i) Suponha que  $T^*$  é o período de  $f(ax)$ , de modo que

$$f(ax) = f[a(x + T^*)] = f(ax + aT^*).$$

Fazendo  $y = ax$ , obtemos  $f(y) = f(y + aT^*)$ . Logo pela hipótese de  $f$  ser periódica de período  $T$ , concluímos que  $T = aT^*$ , donde  $T^* = \frac{T}{a}$ .

- (ii) Suponha que  $T^*$  é o período de  $f\left(\frac{x}{b}\right)$ , de modo que

$$f\left(\frac{x}{b}\right) = f\left[\frac{1}{b}(x + T^*)\right] = f\left(\frac{x}{b} + \frac{T^*}{b}\right).$$

Fazendo  $y = \frac{x}{b}$ , obtemos  $f(y) = f\left(y + \frac{T^*}{b}\right)$ . Logo pela hipótese de  $f$  ser periódica de período  $T$ , temos que  $T = \frac{T^*}{b}$ , donde  $T^* = bT$ .

□



**Exemplo 2.1.7.** Aplicando a Proposição 2.1.1, temos que

- (i) As funções  $\sin(nx)$  e  $\cos(nx)$  são periódicas de período  $T = \frac{2\pi}{n}$ ;
- (ii) As funções  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  são periódicas de período  $T = \frac{2L}{n}$ .

As proposições a seguir nos mostram que a combinação linear de duas ou mais funções periódicas de mesmo período também é uma função periódica, e de mesmo período das funções que foram combinadas.

**Proposição 2.1.2.** Sejam  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções periódicas de mesmo período  $T$ , e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . A função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x) = (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x)$$

também é periódica de período  $T$ .

*Demonstração.* Note que  $h(x+T) = c_1 f_1(x+T) + c_2 f_2(x+T) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . □

**Proposição 2.1.3.** Sejam  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções periódicas de mesmo período  $T$ ,  $c_j \in \mathbb{R}$ , para  $j = 1, \dots, n$ . A função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x) = (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n)(x)$$

também é periódica de período  $T$ .

A demonstração é análoga à proposição anterior, aplicando o Princípio da Indução Finita.

**Proposição 2.1.4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$  e integrável em qualquer intervalo limitado. Então o valor da integral definida dentro de um período não depende do ponto inicial do intervalo, isto é

$$\int_a^{a+T} f(t) dt$$

não depende do valor de  $a$ . Em particular, vale a identidade

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

*Demonstração.* Queremos provar que

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Seja  $F$  uma função definida por

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que  $F'(x) = f(x+T) - f(x)$ . Pela hipótese de  $f$  ser periódica, temos que  $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , logo  $F'(x) = 0$  implica  $F(x) = k$ , para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Em particular, temos  $F(0) = F(a), \forall a \in \mathbb{R}$ , donde resulta que

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = F(a) = F(0) = \int_0^T f(t) dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

□

## 2.2 Funções pares e ímpares

**Definição 2.2.1.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *par* se  $f(x) = f(-x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Isto significa que o gráfico da função  $f$  é simétrico em relação ao eixo  $y$ . Dizemos também que uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *ímpar* se  $g(x) = -g(-x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Isto significa que o gráfico da função  $g$  é simétrico em relação à reta  $y = -x$ .

**Exemplo 2.2.1.** As seguintes funções

- (i)  $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $f(x) = x^{2n}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , são funções pares,
- (ii)  $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $f(x) = x^{2n-1}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , são funções ímpares.

**Proposição 2.2.1.** São válidas as seguintes afirmações

- (i) A soma de duas funções pares é uma função par;
- (ii) A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;
- (iii) O produto de duas funções pares é uma função par;
- (iv) O produto de duas funções ímpares é uma função par;
- (v) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

*Demonstração.*

- (i) Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções pares. Então

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo  $(f+g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par.

- (ii) Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções ímpares. Então

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = [-f(-x)] + [-g(-x)] = -[f(-x) + g(-x)] = -(f+g)(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo  $(f+g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar.

(iii) Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções pares. Então

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = (fg)(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo  $(fg) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par.

(iv) Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções ímpares. Então

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = [-f(-x)][-g(-x)] = (fg)(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo  $(fg) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par.

(v) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar. Então

$$fg(x) = f(x)g(x) = f(-x)[-g(-x)] = -(fg)(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo  $(fg) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar.

□

**Exemplo 2.2.2.** Considere as funções abaixo

- (i)  $f(x) = x^{2m} \cos(nx)$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , é uma função par, pois é o produto de duas funções pares.
- (ii)  $f(x) = x^{2m} \sin(nx)$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , é uma função ímpar, pois é o produto de uma função par e uma função ímpar.
- (iii)  $f(x) = x^{2m+1} \cos(nx)$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , é uma função ímpar, pois é o produto de uma função ímpar e uma função par.
- (iv)  $f(x) = x^{2m+1} \sin(nx)$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , é uma função par, pois é o produto de duas funções ímpares.

**Proposição 2.2.2.** Toda função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser escrita como sendo a soma de uma função par com uma função ímpar, isto é,  $f(x) = f_P(x) + f_I(x)$ , no qual  $f_P(x)$  é uma função par, e  $f_I(x)$  é uma função ímpar, além disso

$$f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

*Demonstração.* Veja que

$$f(x) = \frac{f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{f_P(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{f_I(x)}.$$

Claramente  $f_P$  é uma função par e  $f_I$  é uma função ímpar

□

**Exemplo 2.2.3.** Podemos decompor a função  $f(x) = e^x$  entre a soma de uma função par  $f_P(x)$  e uma função ímpar  $f_I(x)$ . A partir da proposição anterior, temos

$$f(x) = e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

De fato, a componente par de  $e^x$  é

$$f_P(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \doteq \cosh x$$

enquanto que a componente ímpar de  $e^x$  é

$$f_I(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \doteq \sinh x.$$

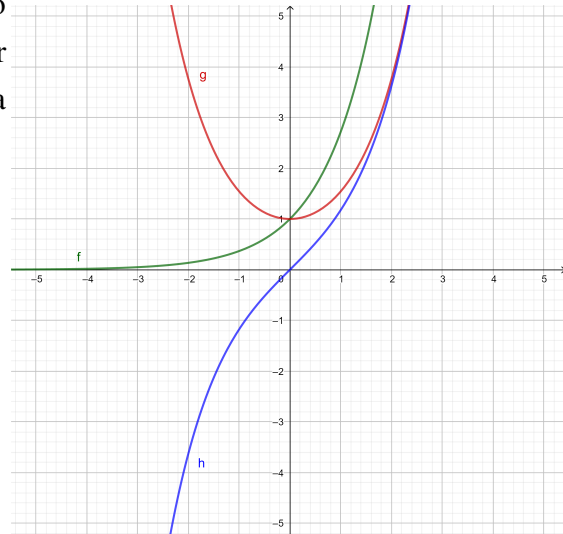


Figura 8 – Decomposição da função  $f(x) = e^x = \cosh x + \sinh x$ .

**Proposição 2.2.3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em qualquer intervalo limitado

(i) Se  $f$  for uma função *par*, então  $\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(x) dx, \quad \forall L > 0;$

(ii) Se  $f$  for uma função *ímpar*, então  $\int_{-L}^0 f(x) dx = -\int_0^L f(x) dx, \quad \forall L > 0.$

*Demonstração.* Tomando a mudança de variáveis  $x = -u$ , temos que

(i)  $\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_L^0 f(-u) (-du) = -\int_L^0 f(-u) du = \int_0^L f(-u) du \stackrel{f \text{ par}}{=} \int_0^L f(u) du.$

(ii)  $\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(-u) du \stackrel{f \text{ ímpar}}{=} -\int_0^L f(u) du.$

□

**Corolário 2.2.3.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em qualquer intervalo limitado

(i) Se  $f$  for uma função *par*, então  $\int_{-L}^L f(t) dt = 2 \int_0^L f(t) dt, \quad \forall L > 0;$

(ii) Se  $f$  for uma função *ímpar*, então  $\int_{-L}^L f(t) dt = 0, \quad \forall L > 0.$

*Demonstração.* As propriedades decorrem da proposição anterior.

(i) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função *par* e integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

(ii) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = - \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 0.$$

□

**Exemplo 2.2.4.** Para  $L > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , segue do corolário anterior que

$$(i) \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = 0;$$

$$(ii) \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

## 2.3 Relações trigonométricas

A partir das identidades de adição e subtração dos arcos das funções senos e cossenos, com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , a saber

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha, \quad (2.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad (2.3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad (2.4)$$

podemos deduzir expressões que transformam um produto em soma de senos e cossenos. De fato, somando as identidades (2.1) e (2.2), deduzimos a equação

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]. \quad (2.5)$$

Analogamente, somando as identidades (2.3) e (2.4), e tomando a diferença entre (2.4) e (2.3), temos respectivamente que

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad (2.6)$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (2.7)$$

Tomando  $\alpha = \beta$  nas identidades (2.1) e (2.3), obtemos as expressões do arco duplo

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta, \quad (2.8)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad (2.9)$$

e por fim, combinado a equação (2.9) com a relação fundamental  $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$ , temos

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (2.11)$$

## 2.4 Relações de ortogonalidade

Para o estudo inicial das séries de Fourier que abordaremos no capítulo seguinte, vamos precisar calcular algumas integrais específicas de produtos entre senos e cossenos avaliadas em intervalos simétricos. Começaremos avaliando essas integrais no intervalo  $[-\pi, \pi]$  de funções periódicas de período  $2\pi$ , e estenderemos o cálculo para um intervalo generalizado  $[-L, L]$  de funções de período  $2L$ . Tais integrais são exemplos de *relações de ortogonalidade* entre funções.

**Proposição 2.4.1.** Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ . São válidas as seguintes relações de ortogonalidade

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0, \quad (2.12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (2.14)$$

*Demonstração.*

(i) Utilizando a relação trigonométrica (2.5), com  $\alpha = mx$  e  $\beta = nx$ , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(mx + nx) + \operatorname{sen}(mx - nx)] \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)]. \end{aligned}$$

Integrando ambos os termos da equação no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}((m+n)x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}((m-n)x) dx \right]. \end{aligned}$$

Supondo o caso  $m \neq n$ , temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos((m+n)x)}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0.$$

Agora, caso  $m = n$ , temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(2nx)] dx = 0.$$

(ii) Utilizando a relação trigonométrica (2.6) com  $\alpha = mx$  e  $\beta = nx$ , temos

$$\begin{aligned} \cos(mx) \cos(nx) &= \frac{1}{2} [\cos(mx + nx) + \cos(mx - nx)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]. \end{aligned}$$

Integrando ambos os termos da equação no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) dx \right]. \end{aligned}$$

Supondo o caso  $m \neq n$ , temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0.$$

Agora, caso  $m = n$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\pi - (-\pi)) = \frac{1}{2} 2\pi = \pi. \end{aligned}$$

(iii) Utilizando a relação trigonométrica (2.7) com  $\alpha = mx$  e  $\beta = nx$ , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) &= \frac{1}{2} [\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]. \end{aligned}$$

Integrando ambos os termos da equação no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx \right]. \end{aligned}$$

Supondo o caso  $m \neq n$ , temos

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0.$$

Agora, caso  $m = n$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx) dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\pi - (-\pi)) = \frac{1}{2} 2\pi = \pi. \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.4.2.** São válidas as seguintes relações de ortogonalidade

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad m, n \geq 1 \quad (2.15)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & m = n \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (2.17)$$

*Demonstração.*

(i) Utilizando a relação trigonométrica (2.5) com  $\alpha = \frac{m\pi x}{L}$  e  $\beta = \frac{n\pi x}{L}$ , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen}\left((m+n)\frac{\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left((m-n)\frac{\pi x}{L}\right) \right]. \end{aligned}$$

Integrando a relação no intervalo  $[-L, L]$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen}\left((m+n)\frac{\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left((m-n)\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \operatorname{sen}\left((m+n)\frac{\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left((m-n)\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx. \end{aligned}$$

Supondo o caso  $m \neq n$ , temos

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos\left((m+n)\frac{\pi x}{L}\right)}{(m+n)\frac{\pi}{L}} \Big|_{-L}^L - \frac{\cos\left((m-n)\frac{\pi x}{L}\right)}{(m-n)\frac{\pi}{L}} \Big|_{-L}^L \right] = 0.$$

Agora, caso  $m = n$ , temos

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

(ii) Utilizando a relação trigonométrica (2.6) com  $\alpha = \frac{m\pi x}{L}$  e  $\beta = \frac{n\pi x}{L}$ , temos

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left((m+n)\frac{\pi x}{L}\right) + \cos\left((m-n)\frac{\pi x}{L}\right) \right]. \end{aligned}$$

Integrando ambos os termos da equação no intervalo  $[-L, L]$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \cos\left((m+n)\frac{\pi x}{L}\right) + \cos\left((m-n)\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \cos\left((m+n)\frac{\pi x}{L}\right) + \cos\left((m-n)\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx. \end{aligned}$$



Supondo o caso  $m \neq n$ , temos

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}\left(\left(m+n\right)\frac{\pi}{L}x\right)}{\left(m+n\right)\frac{\pi}{L}} \Big|_{-L}^L + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(m-n\right)\frac{\pi}{L}x\right)}{\left(m-n\right)\frac{\pi}{L}} \Big|_{-L}^L \right] = 0.$$

Agora, caso  $m = n$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + 1 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx = \frac{x}{2} \Big|_{-L}^L = L. \end{aligned}$$

(iii) Utilizando a relação trigonométrica (2.7) com  $\alpha = \frac{m\pi x}{L}$  e  $\beta = \frac{n\pi x}{L}$ , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\left(m-n\right)\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\left(m+n\right)\frac{\pi x}{L}\right) \right]. \end{aligned}$$

Integrando ambos os termos da equação no intervalo  $[-L, L]$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\left(m-n\right)\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\left(m+n\right)\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \cos\left(\left(m-n\right)\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\left(m+n\right)\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx. \end{aligned}$$

Supondo o caso  $m \neq n$ , temos

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}\left(\left(m-n\right)\frac{\pi}{L}x\right)}{\left(m-n\right)\frac{\pi}{L}} \Big|_{-L}^L - \frac{\operatorname{sen}\left(\left(m+n\right)\frac{\pi}{L}x\right)}{\left(m+n\right)\frac{\pi}{L}} \Big|_{-L}^L \right] = 0.$$

Agora, caso  $m = n$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx = \frac{x}{2} \Big|_{-L}^L = L. \end{aligned}$$

□



---

## SÉRIES DE FOURIER

---

### 3.1 Séries de Fourier: motivação histórica

O objetivo dessa seção é apresentar uma motivação para o estudo das Séries de Fourier, objeto central deste texto. Para tal, estudaremos a equação que descreve a condução do calor em uma barra metálica, que foi um problema físico de cunho histórico relevante no início do século XIX. As técnicas de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais já conhecidas à época não foram suficientes na tentativa de se resolver esse problema, de sorte que a busca por uma solução deu origem justamente às chamadas Série de Fourier. De fato, esse foi um dos problemas estudados por Joseph Fourier em sua obra de 1822 intitulada *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do calor). Em seu trabalho, Fourier afirma que toda função a valores reais pode ser reescrita por uma série trigonométrica, concluindo estudos preliminares realizados por outros matemáticos predecessores como Euler, Lagrange e d'Alambert. Seu trabalho foi aprimorado posteriormente por outros matemáticos como Cauchy, Bolzano e Dirichlet, que se encarregaram da tarefa de formalizar cuidadosamente a análise da convergência de uma função para sua série de Fourier.

#### 3.1.1 Condução do calor numa barra

Uma das aplicações mais importantes das séries de Fourier está na solução de equações diferenciais parciais por meio do método de separação de variáveis que abordaremos nessa seção. Uma *Equação Diferencial Parcial (EDP)* é uma equação que contém uma ou mais derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis independentes. Essas equações surgem naturalmente em problemas de Física, Matemática e Engenharias. Um exemplo de uma EDP é a *equação unidimensional do calor* que modela a variação de temperatura  $u$  de uma barra aquecida em função da *posição*  $x$  no *instante*  $t$ , definindo uma função  $u(x, t)$  dada por

$$\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

no qual  $\alpha$  é a constante de difusividade térmica, isto é, uma propriedade intrínseca do metal que constitui a barra. Tal equação também pode ser escrita na sua forma reduzida  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$  (vide demonstração da equação do calor na referência (EDWARDS; PENNEY, 1995) página 519).

Vamos inicialmente considerar um modelo simplificado da barra. Suponhamos que essa barra tenha um formato cilíndrico de comprimento finito que possa ser associada a um segmento de tamanho  $L$  posicionado em uma sistema de coordenadas ortogonal, estendendo-se de  $x = 0$  a  $x = L$  ao longo de um eixo  $x$ , e de seção transversal perpendicular ao eixo  $x$ , de área constante  $A$ .

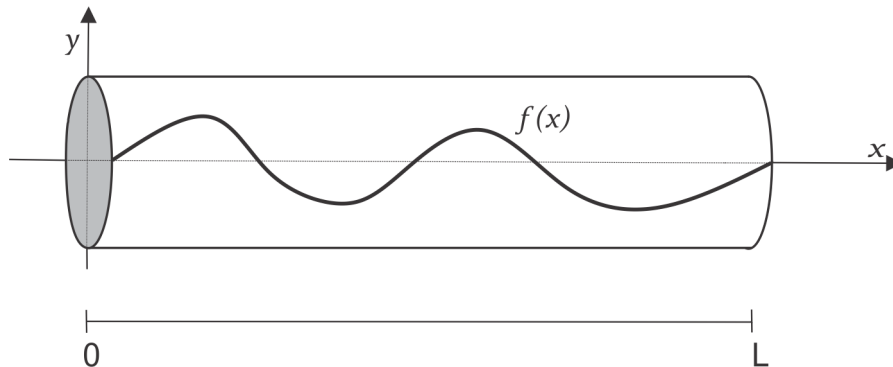


Figura 9 – Distribuição de temperatura em uma barra metálica de comprimento  $L$  no instante  $t = 0$ .

Consideremos também que essa barra seja feita de um material uniforme condutor de calor, de modo que a temperatura  $u$  possa ser considerada constante em cada seção transversal. Por fim, consideremos que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente de modo a não permitir transferência de calor através dela com o meio externo. Entretanto, transferências de calor podem ocorrer através das extremidades da barra. Nessas condições,  $u$  será de fato uma função de  $x$  e  $t$ , e o fluxo de calor ao longo da barra se dará somente na direção longitudinal, ao longo do eixo  $x$ , caracterizando um problema de condução de calor em uma dimensão apenas.

Sabemos que a temperatura  $u(x, t)$  da barra obedece a equação do calor (3.1). A pergunta que surge é qual a solução dessa equação que representa a distribuição de temperatura na barra. Note que a distribuição de temperatura  $u(x, t)$  deve depender da temperatura inicial ao longo da barra. Se  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é a função que descreve a temperatura nos vários pontos da barra no instante  $t = 0$ , então temos a *condição inicial* do problema

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3.2)$$

Além disso, é necessário especificar as respectivas temperaturas nas extremidades da barra em dado instante  $t$ , isto é,  $u(0, t)$  e  $u(L, t)$ . Como as extremidades podem não estar isoladas termicamente, pode ocorrer entrada ou saída de calor, o que naturalmente deve influir no valor de  $u(x, t)$  em algum ponto da barra. Nessa seção, vamos estudar em detalhes o caso particular em que a temperatura nas extremidades da barra deve ser sempre mantida fixa igual a zero, ou seja

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (3.3)$$

Em resumo, queremos encontrar as soluções para  $u(x, t)$  do seguinte problema de contorno

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Método de Fourier para o problema da condução do calor

Para encontrar uma solução para o problema (3.4), Fourier propôs o método de *separação das variáveis*, que consiste em supor que a solução para  $u(x, t)$  seja escrita como um produto de uma função  $X(x)$ , que depende apenas da posição  $x$ , por uma função  $T(t)$ , que depende apenas do tempo  $t$ , ou seja

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, T(t) \neq 0. \quad (3.5)$$

Supondo que  $X$  seja duas vezes derivável em relação a  $x$  e  $T$  seja uma vez derivável em relação a  $t$ , tomando a segunda derivada de  $u$  em relação a  $x$ , a saber,  $u_{xx}(x, t) = X''(x)T(t)$ , e a primeira derivada de  $u$  em relação a  $t$ ,  $u_t(x, t) = X(x)T'(t)$ , e substituindo-as na equação do calor, obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Observe que o lado esquerdo desta igualdade depende apenas de  $x$ , enquanto que o lado direito depende apenas de  $t$ . Como as variáveis  $x$  e  $t$  são independentes, a única forma dessa equação ser satisfeita é, se e somente se, os dois lados da equação forem iguais à uma constante, que chamaremos de  $\lambda$ , ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Dessa forma, com as devidas manipulações algébricas, obtemos as seguintes equações independentes

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad (3.6)$$

$$T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0. \quad (3.7)$$

A estratégia de separar as variáveis nos parece aqui bastante promissora, pois nos permitiu transformar o problema da equação do calor em duas equações diferenciais ordinárias independentes. Dessa forma, procuramos as soluções de cada uma dessas equações a fim de determinar uma solução geral  $u(x, t)$ .

Vamos inicialmente determinar uma solução não nula para a equação (3.6), que por simplicidade, denotaremos daqui em diante por apenas  $X'' - \lambda X = 0$ . Para tal, precisamos determinar as condições de contorno que satisfazem essa equação. A partir do problema (3.4) da equação do calor, temos que  $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ . Como queremos que a distribuição de temperatura na barra seja sempre diferente de zero, naturalmente impomos  $X(0) = 0$ . Analogamente, temos  $u(L, t) = X(L)T(t) = 0$  que implica  $X(L) = 0$ .

A equação (3.6) é uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem homogênea, e desse modo procuramos soluções do tipo  $\varphi(x) = e^{rx}$ . De fato, as derivadas  $\varphi'(x) = re^{rx}$  e  $\varphi''(x) = r^2e^{rx}$  nos conduzem a seguinte equação algébrica

$$r^2e^{rx} - \lambda(e^{rx}) = 0 \Leftrightarrow (r^2 - \lambda)(e^{rx}) = 0 \Leftrightarrow r^2 - \lambda = 0, \quad \forall 0 \leq x \leq L. \quad (3.8)$$

Assim,  $\varphi(x) = e^{rx}$  será solução de  $X'' - \lambda X = 0$ , se e somente se,  $r$  for raiz do polinômio característico  $r^2 - \lambda$ . Passemos então a tarefa de analisar, caso a caso, como se comporta as soluções  $\varphi(x)$  em função das raízes do polinômio característico.

(a) Caso  $\lambda > 0$ .

Digamos que  $\lambda = \mu^2$  para algum  $\mu \in \mathbb{R}$ . De (3.8), segue que  $r^2 = \mu^2$  resulta em  $r_1 = \mu$  e  $r_2 = -\mu$ . Nesse caso, as funções  $\varphi_1(x) = e^{\mu x}$  e  $\varphi_2(x) = e^{-\mu x}$  são soluções linearmente independentes para equação homogênea (3.6). De fato a combinação linear  $a e^{\mu x} + b e^{-\mu x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  implica que  $a = b = 0$ . Tomando uma combinação linear entre essas soluções linearmente independentes, obtemos uma solução geral para essa equação dada por

$$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Afim de determinar os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , precisamos aplicar as condições iniciais (3.4) nesta expressão que acabamos de encontrar. Dessa forma

$$\begin{cases} X(0) = c_1 e^{\mu 0} + c_2 e^{-\mu 0} = 0 \\ X(L) = c_1 e^{\mu L} + c_2 e^{-\mu L} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{2\mu L} + c_2 = 0 \end{cases} \iff c_1 = c_2 = 0,$$

que gera apenas a solução nula  $X(x) = 0$ , e portanto o caso  $\lambda > 0$  é descartado.

(b) Caso  $\lambda = 0$ .

Substituindo  $\lambda = 0$  na equação (3.6), temos que  $X''(x) = 0$ . Logo  $X(x) = c_1 x + c_2$  é a solução geral  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Da condição  $X(0) = 0$ , temos  $X(0) = c_1 0 + c_2 = 0$ , que resulta  $c_2 = 0$ , e portanto  $X(x) = c_1 x$ . Da condição  $X(L) = 0$ , segue que  $X(L) = c_1 L = 0$ , que implica  $c_1 = 0$ , uma vez que  $L > 0$ . Novamente geramos apenas a solução nula  $X(x) = 0$ , e portanto o caso  $\lambda = 0$  também é descartado.

(c) Caso  $\lambda < 0$ .

Digamos que  $\lambda = -\mu^2$  para algum  $\mu \in \mathbb{R}$ . Do polinômio característico (3.8), segue que  $r^2 = -\mu^2$  resulta em  $r_1 = \mu i$  e  $r_2 = -\mu i$ . Nesse caso, as funções complexas  $\varphi_1(x) = e^{\mu i x} = \cos(\mu x) + i \sin(\mu x)$  e  $\varphi_2(x) = e^{-\mu i x} = \cos(\mu x) - i \sin(\mu x)$  são as soluções linearmente independentes para a equação homogênea (3.6). Tomando uma combinação linear entre essas soluções, obtemos uma solução geral em termos de senos e cossenos, isto é,

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da condição  $X(0) = 0$ , temos  $X(0) = c_1 \cos(\mu 0) + c_2 \sin(\mu 0) = 0$  que resulta  $c_1 = 0$ . Da condição  $X(L) = 0$ , temos que  $X(L) = c_2 \sin(\mu L) = 0$  implica  $c_2 = 0$  ou  $\sin(\mu L) = 0$ . Como  $c_2 = 0$  não nos interessa, devemos ter

$$\sin(\mu L) = 0 \iff \mu L = n\pi \iff \mu = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

que gera uma família de soluções para  $X(x)$  dada por

$$X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Vamos agora determinar uma solução para a equação  $T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0$  que claramente é do tipo exponencial  $T(t) = e^{\alpha^2 \lambda t}$  para  $t > 0$ . De (3.9), fazemos a substituição  $\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ , e finalmente obtemos

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

Agora temos todas as condições para encontrar as possíveis soluções pelo método de separação das variáveis descrito em (3.5). Substituindo as expressões para  $X(x)$  e  $T(t)$  que encontramos respectivamente em (3.10) e (3.11), temos finalmente uma solução fundamental para a temperatura ao longo da barra dada por

$$u_n(x, t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t}, \quad (3.12)$$

satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Usando o fato de que uma combinação linear de soluções da forma (3.12) também é uma solução para (3.13), pelo princípio da superposição, podemos combinar um número finito de soluções de tal maneira que toda expressão finita da forma  $\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t)$  também seja solução de (3.13), no qual  $c_n \in \mathbb{R}$ . Nesse caso, a solução para  $u(x, t)$  é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t}.$$

Note que até agora não utilizamos a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , para  $0 \leq x \leq L$ . Veja que  $u(x, t)$  encontrada é solução do sistema (3.4) se

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x), \quad x \in 0 \leq x \leq L.$$

Essa equação nos diz que estamos representando uma função  $f(x)$  como uma soma finita em termos de senos. Uma pergunta natural que surge é sob quais condições  $f$  pode ser reescrita dessa forma, ou seja, quais são as condições sob  $f$  para que esse representação seja verdadeira.

Também nos interessa investigar o que acontece se tomarmos uma série infinita, e supor que a função  $f(x)$ , definida em  $0 \leq x \leq L$ , possa ser expressa na forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

com os coeficientes  $c_n$  escolhidos adequadamente.

Como a função seno é periódica, supomos  $f(x)$  também periódica para que a igualdade acima faça sentido. Logo é natural saber quando uma função periódica pode ser escrita como uma combinação linear de senos e cossenos, que são funções linearmente independentes. Portanto, vem a idéia de tentar escrever a  $f$  não apenas como uma série infinita de senos, mas como candidato uma série infinita em termos de senos e cossenos. De fato, Joseph Fourier fez a afirmação que toda função  $f(x)$  com período  $2L$  pode ser representada por uma série infinita da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.14)$$

chamada *Série de Fourier da função  $f$* .

Demonstraremos no Capítulo 4 sob quais condições tal função  $f$  converge para a sua série de Fourier. Veremos que existe uma grande variedade de funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que podem ser reescritas pela expressão (3.15). Denotaremos por  $S_f(x)$  a série de Fourier de  $f$  dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.15)$$

## 3.2 Série e Coeficientes de Fourier

Nesta seção vamos obter uma expressão para os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  que aparecem na série de Fourier dada em (3.15). Precisamos entender qual é a relação entre esses coeficientes e a função  $f$ , no qual esperamos que estejam diretamente relacionados. Sem perda de generalidade, vamos supor por ora que  $S_f(x) = f(x)$ , isto é, que seja válida a igualdade entre uma função e sua respectiva Série de Fourier (que discutiremos em detalhes a convergência da Série de Fourier no próximo capítulo). Desse modo, podemos manipular algebricamente a série  $S_f(x)$  a fim de calcular os seus coeficientes.

Algumas considerações iniciais precisam ser apresentadas em relação ao comportamento da função  $f$  e de sua série de Fourier  $S_f$ . Uma primeira idéia intuitiva é esperar que  $f$  se comporte tal qual as funções seno e cosseno que aparecem na sua série de Fourier, ou seja, que  $f$  seja contínua e periódica de período  $2L$ . Também assumiremos que  $f$  será integrável, e que uma integral pode ser comutada com uma série infinita conforme demonstraremos na Proposição 4.1.3. Com tais hipóteses, vamos encontrar a expressão que definem esses coeficientes.



### 3.2.1 Expressão para os coeficientes de Fourier.

Iniciemos com o cálculo do coeficiente  $a_0$ . Para isso, vamos integrar termo a termo a série (3.15) no intervalo  $[-L, L]$ . Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Como  $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$  pelo Exemplo 2.2.4, segue que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0 x}{2} \Big|_{x=-L}^{x=L} = a_0 L,$$

e portanto

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (3.16)$$

Para o cálculo dos demais coeficientes, usamos a mesma estratégia de integração termo a termo da série e aplicamos as relações de ortogonalidade definidas na Seção 2.4. Vamos iniciar a título de ilustração o cálculo do coeficiente  $a_1$ . Para tal, multiplicamos os termos da série (3.15) por  $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ , integramos a expressão no intervalo  $[-L, L]$ , e comutamos a integral com a série infinita. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Pelas relações (2.15) e (2.16), temos que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

e

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall n.$$

Dessa forma, segue que

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = a_1 L,$$

e portanto

$$a_1 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx.$$

Analogamente, para se calcular os coeficientes  $a_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , multiplicamos todos os termos da série (3.15) por  $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ , e integramos e comutamos a expressão no intervalo  $[-L, L]$ .

Dessa maneira

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Pelas relações (2.15) e (2.16), temos que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

e

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall n.$$

Dessa forma, segue que

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_m L,$$

e portanto,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Por fim, para calcular todos os coeficientes  $b_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , multiplicamos todos os termos da série (3.15) por  $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ , e integramos e no intervalo  $[-L, L]$ . Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Pelas relações (2.15) e (2.17), temos que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall n$$

e

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Sendo assim, segue que

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = b_m L,$$

e portanto,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Com os resultados das expressões dos coeficientes de Fourier, podemos enunciar a seguinte definição

**Definição 3.2.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$ . Então a **Série de Fourier** de  $f$  é a série

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.17)$$

no qual os **coeficientes de Fourier**  $a_n$  e  $b_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  são definidos por

$$a_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (3.18)$$

$$b_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.19)$$

Um exemplo em particular é uma função periódica de período  $2\pi$ . Nesse caso, basta substituir  $L = \pi$ , e os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (3.20)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx. \quad (3.21)$$

### 3.2.2 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Recordando o que vimos na Seção 2.2, uma função  $f(x)$  é *par* se  $f(-x) = f(x)$ , e é *ímpar* se  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Certas propriedades de funções pares e ímpares simplificam notavelmente as suas respectivas séries de Fourier. A idéia é que como  $f$  pode ser expressa em termos de uma soma infinita de senos e cossenos, esperamos que se  $f$  for par, então a sua representação na sua série de Fourier contenha apenas funções pares, ou seja,  $b_n = 0$ ; enquanto que se  $f$  for ímpar, então a sua série contenha apenas funções ímpares, isto é,  $a_n = 0$ . Vejamos que de fato essas simplificações ocorrem.

Se  $f$  é uma função periódica *par* de período  $2L$ , então pela Propriedade 2.2.1,  $f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  é par, enquanto  $f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  é ímpar, uma vez que a função cosseno é par e a função seno é ímpar. Nessas condições, ao calcular os coeficientes de Fourier de  $f$  usando a Propriedade 2.2.3.1, encontramos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (3.22)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0.$$

Desse modo, a série de Fourier de uma função *par*  $f$  de período  $2L$  é reduzida para

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

com  $a_n$  dado por (3.22).

Por outro lado, se  $f(x)$  é ímpar, então usando as mesmas propriedades citadas,  $f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  é ímpar, enquanto  $f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  é par, de modo que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0,$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.23)$$

Assim, a série de Fourier da função *ímpar*  $f$  de período  $2L$  é reduzida para

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

com os coeficientes  $b_n$  dados em (3.23).

### 3.3 Cálculo de algumas séries de Fourier

Essa seção tem o objetivo de apresentar alguns exemplos de cálculo dos coeficientes de Fourier a fim de se obter a série de Fourier  $S_f(x)$  de uma dada função  $f(x)$ . Aplicaremos nesses cálculos os resultados obtidos no capítulo preliminar e nas seções anteriores. Ao final de cada exemplo, apresentaremos diversos gráficos construídos no *software Geogebra* que ilustram a convergência da série  $S_f$  para função  $f$  por meio da soma parcial de  $N$  termos definida por

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n=1}^p b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.24)$$

Ressaltamos que a convergência e as restrições de  $f$  serão discutidas rigorosamente apenas no próximo capítulo, quando faremos a demonstração do Teorema de Fourier.

**Exemplo 3.3.1.** Vamos iniciar pelo estudo da série de Fourier da *função sinal*, que atribui os valores  $f(x) = 1$  para  $x > 0$  e  $f(x) = -1$  para  $x < 0$ . Para tornar a função sinal em uma função periódica, restringimos seus valores de saída a um intervalo simétrico finito, e em seguida estendemos esse padrão para toda a reta, conforme pode ser visto no gráfico a seguir. Esta função

periódica é conhecida por função *onda quadrada* por conta de seu formato. Para nosso exemplo, supondo um período igual a 2, essa função é dada pela seguinte expressão

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

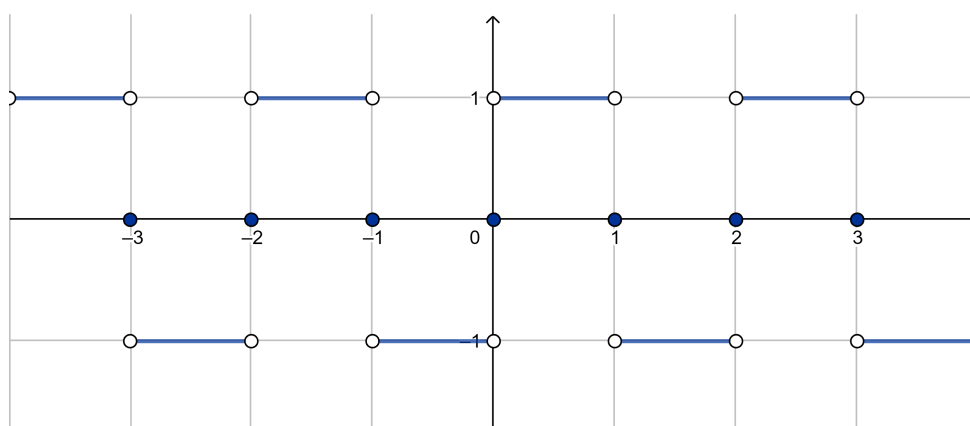


Figura 10 – Gráfico da função periódica *onda quadrada ímpar*.

Da maneira como foi definida, a função onda quadrada é uma função periódica *ímpar*, de modo que podemos aplicar diretamente os resultados da Subseção 3.2.2 para concluir que  $a_0 = 0$  e  $a_n = 0$ . No entanto, com o intuito de nos familiarizarmos com os cálculos, iremos neste momento usar a expressão (3.18) para calcular esses coeficientes. Como  $L = 1$ , temos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^0 (-1) dx + \frac{1}{1} \int_0^1 (1) dx = \int_0^1 dx - \int_{-1}^0 dx = 0,$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^0 (-1) \cos(n\pi x) dx + \frac{1}{1} \int_0^1 (1) \cos(n\pi x) dx \\ &= \int_0^1 \cos(n\pi x) dx - \int_{-1}^0 \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{\text{sen}(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - \frac{\text{sen}(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^0 = 0, \end{aligned}$$

como era de se esperar. Seguimos com o cálculo de  $b_n$  pela fórmula (3.19).

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx - \int_{-1}^0 \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\
 &= \left[ -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^0 \right] \\
 &= -\left( \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos 0}{n\pi} \right) + \left( \frac{\cos 0}{n\pi} - \frac{\cos(-n\pi)}{n\pi} \right) \\
 &= -\left( \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right) + \left( \frac{1}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \right) \\
 &= \frac{2}{n\pi} - \frac{2 \cos(n\pi)}{n\pi} \\
 &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & , \text{ se } n \text{ for ímpar} \\ 0 & , \text{ se } n \text{ for par.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo os valores encontrados de  $a_n$  e  $b_n$  na expressão (3.17), a série de Fourier da função onda quadrada *ímpar* é dada por

$$\begin{aligned}
 S_f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi x) \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x) \\
 &= \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3\pi x) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5\pi x) + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Veja a seguir gráficos de diversas somas parciais  $S_N(x)$  definidas em (3.24), que ilustra a convergência da série de Fourier para a função onda quadrada ímpar.

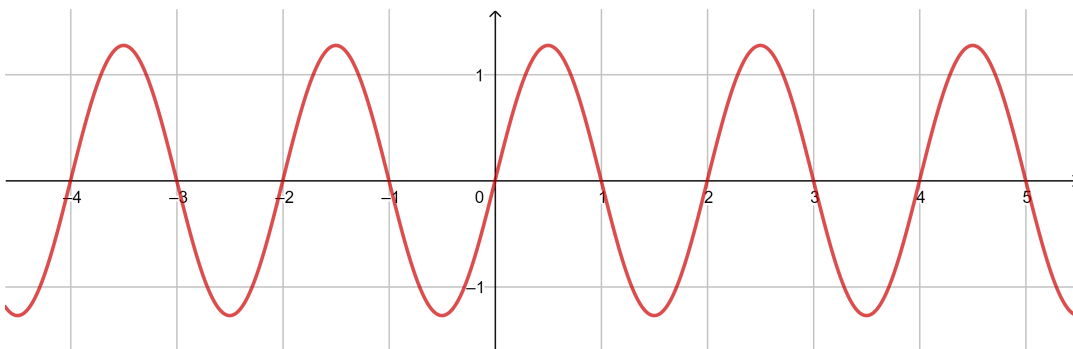


Figura 11 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com  $N=1$

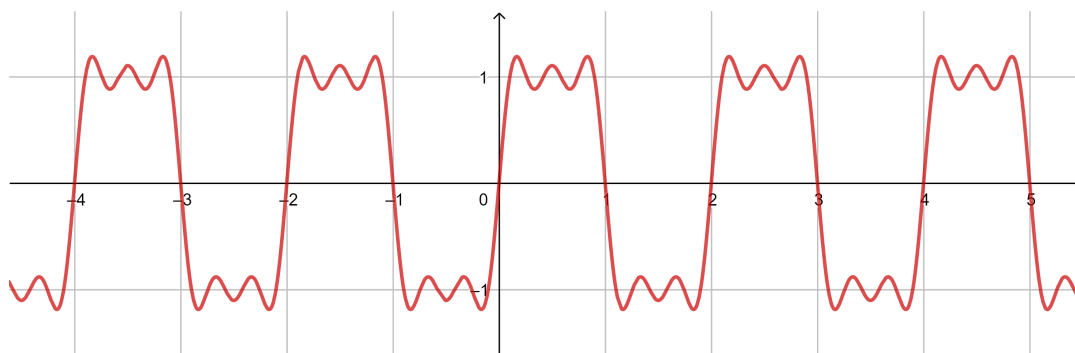


Figura 12 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com  $N=3$

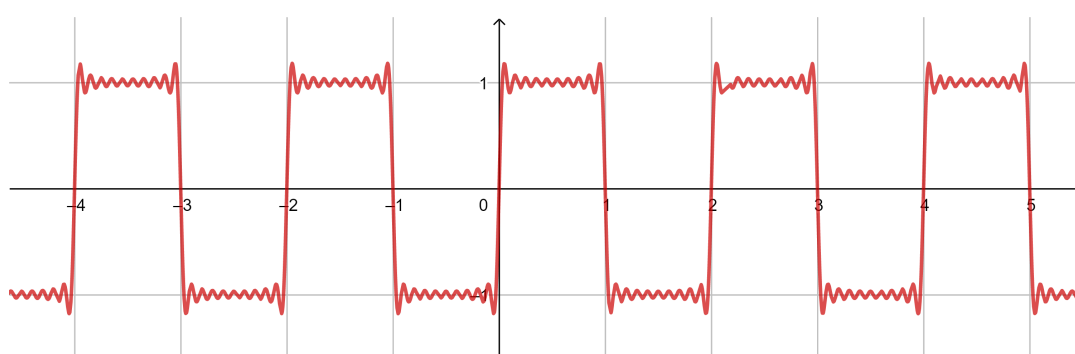


Figura 13 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com  $N=10$

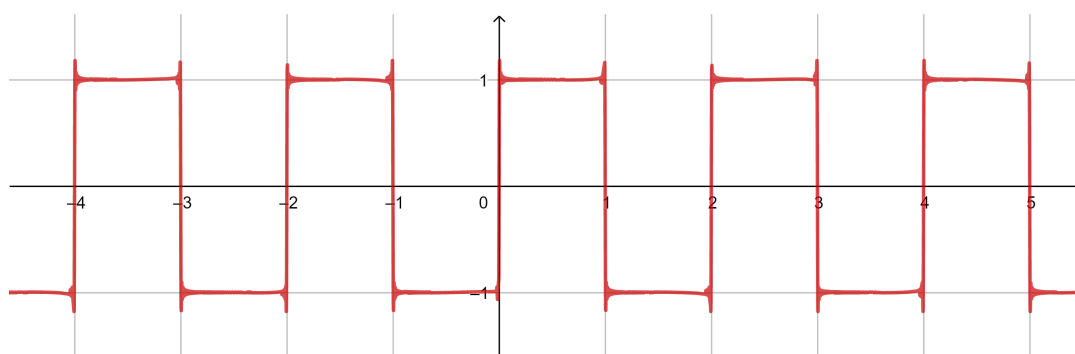


Figura 14 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função onda quadrada com  $N=100$

É interessante notar que a função periódica onda quadrada se torna uma função *par* com um deslocamento horizontal de  $\frac{1}{2}$  conforme expressão e gráfico abaixo

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

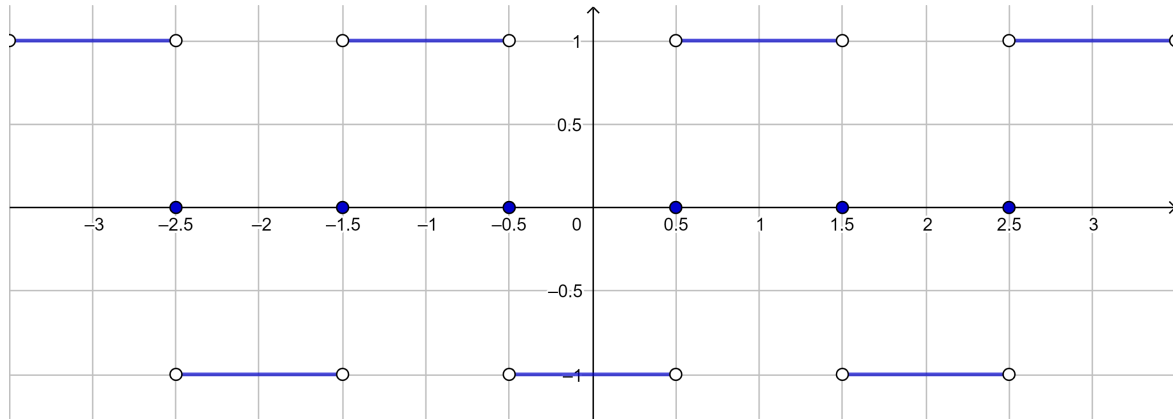


Figura 15 – Gráfico da função periódica onda quadrada par.

Nesse caso, por  $f$  ser par, temos  $b_n = 0$ . Os coeficientes  $a_0$  e  $a_n$  são calculados por

$$a_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (1) dx = x \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \cos(n\pi x) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{\text{sen}(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=\frac{3}{2}} - \frac{\text{sen}(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\text{sen}(\frac{3n\pi}{2})}{n\pi} - \frac{\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} - \left( \frac{\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} - \frac{\text{sen}(-\frac{n\pi}{2})}{n\pi} \right) \\ &= \frac{\text{sen}(\frac{3n\pi}{2})}{n\pi} - \frac{3 \text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}. \end{aligned}$$

Da relação do arco triplo  $\text{sen}(3x) = 3 \text{sen}x \cos^2 x - \text{sen}^3 x$ , segue que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3 \text{sen}(\frac{n\pi}{2}) \cos^2(\frac{n\pi}{2}) - \text{sen}^3(\frac{n\pi}{2}) - 3 \text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} \\ &= \frac{-\text{sen}^3(\frac{n\pi}{2}) - 3 \text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}. \end{aligned}$$

Logo, para  $k \in \mathbb{N}$ , temos que

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}, & n = 4k - 3 \\ 0, & n = 4k - 2 \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 4k - 1 \\ 0, & n = 4k. \end{cases}$$

Portanto a série de Fourier da função onda quadrada par é dada por.

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1} \cos((4n-1)\pi x) - \frac{1}{4n-3} \cos((4n-3)\pi x) \right].$$



**Exemplo 3.3.2.** Seja a função periódica de período  $2\pi$  dada por

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x < \pi.$$

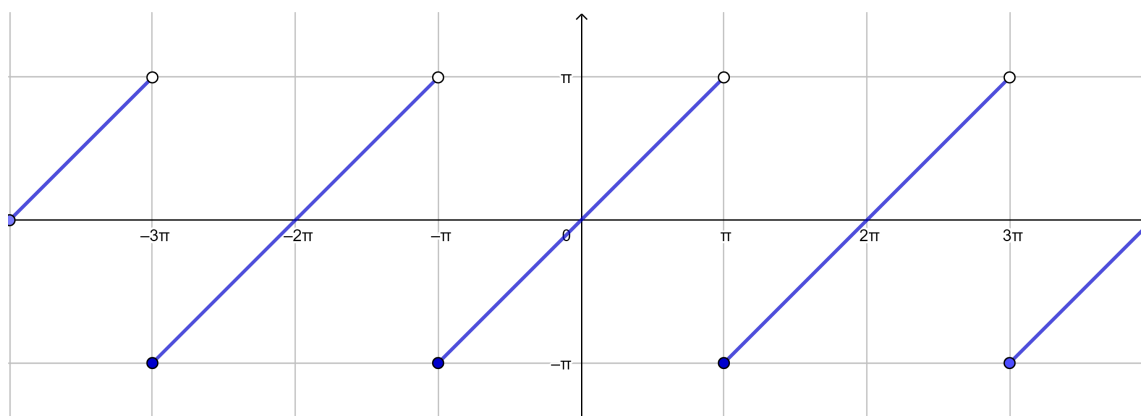


Figura 16 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.1

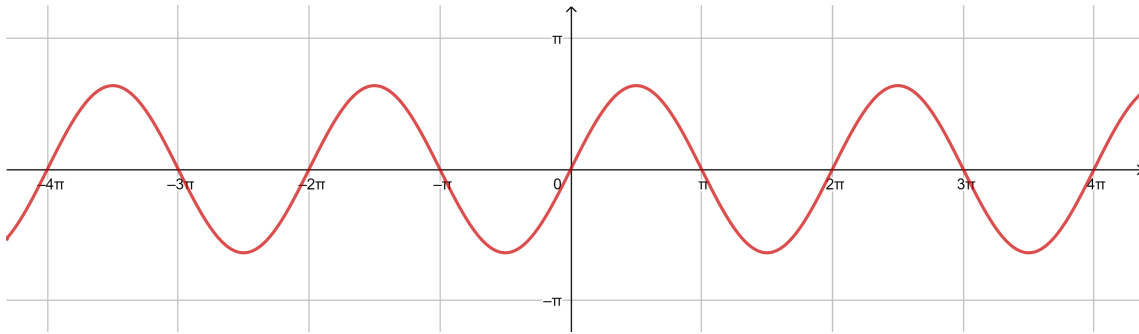
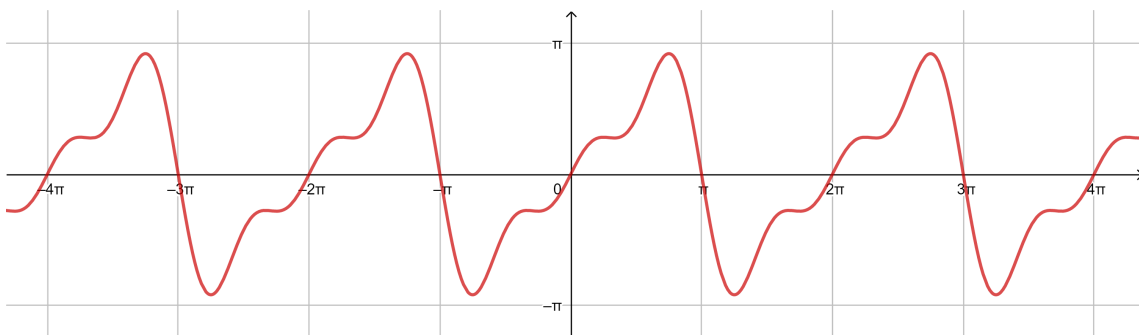
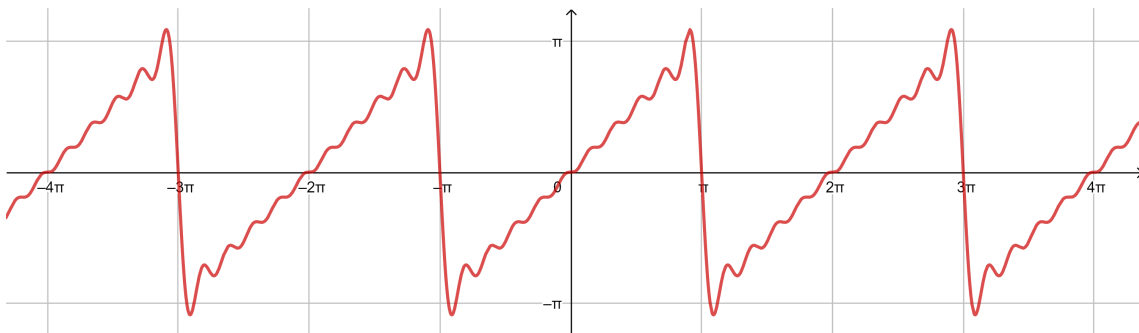
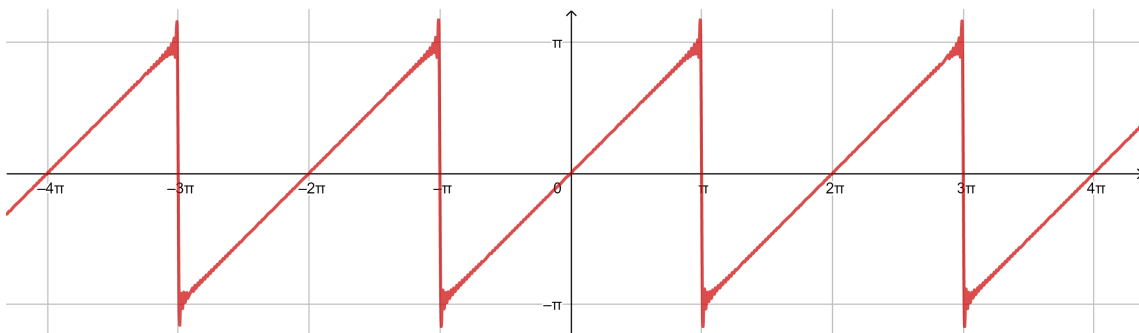
Vamos calcular a sua série de Fourier. Observe que esta função é ímpar, e portanto podemos concluir diretamente que  $a_0 = 0$  e  $a_n = 0$ . Tomando  $L = \pi$ , segue o cálculo de  $b_n$  usando (3.23)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n} dx \right] \quad (v = x, \quad du = \operatorname{sen}(nx) dx) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2} + \frac{\operatorname{sen}0}{n^2} \right] \\ &= -\frac{2 \cos(n\pi)}{n} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, a Série de Fourier da função é dada por

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \\ &= 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{4} \operatorname{sen}(4x) + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(5x) \dots \end{aligned}$$

cujos gráficos de algumas de suas somas parciais são apresentados a seguir.

Figura 17 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com  $N=1$ Figura 18 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com  $N=3$ Figura 19 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com  $N=10$ Figura 20 – Gráfico da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.2 com  $N=100$

**Exemplo 3.3.3.** Seja a função de período  $2\pi$  que está definida em um período por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

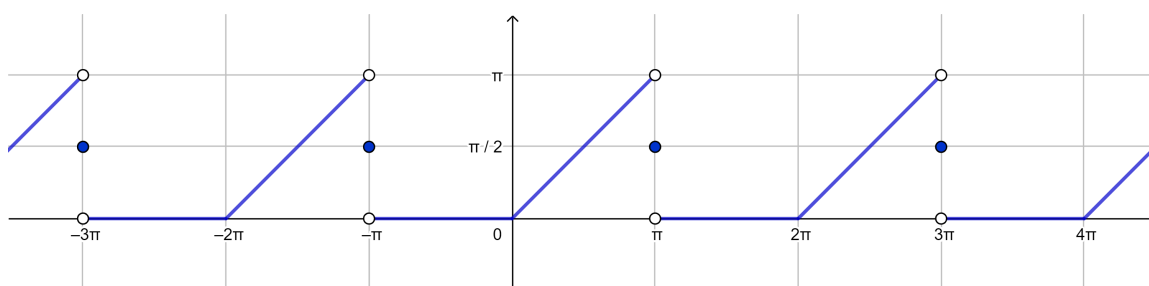


Figura 21 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.3

Esta função não é nem par nem ímpar, de modo que usaremos as fórmulas (3.20) e (3.21) para calcular os coeficientes da sua série de Fourier tomando  $L = \pi$ . Note que os valores de  $f(\pm\pi)$  são irrelevantes pois não tem efeito sobre os valores das integrais que fornecem os coeficientes de Fourier. Como  $f(x) \equiv 0$  no intervalo  $(-\pi, 0)$ , cada integral de de  $x = -\pi$  a  $x = \pi$  pode ser substituída por uma integral de  $x = 0$  a  $x = \pi$ . Portanto, segue que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{\pi}{2},$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{n\pi} u \cos u du \quad \left( u = nx, x = \frac{u}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} \left[ \cos u + u \operatorname{sen} u \right]_0^{n\pi} \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ &= -\frac{2}{n^2 \pi}, \quad \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\
 &= \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{n\pi} u \operatorname{sen} u du \\
 &= \frac{1}{n^2 \pi} \left[ \operatorname{sen} u - u \cos u \right]_0^{n\pi} \\
 &= -\frac{1}{n} \cos(n\pi) \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \forall n \geq 1.
 \end{aligned}$$

Portanto a Série de Fourier de  $f(x)$  é dada por

$$S_f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

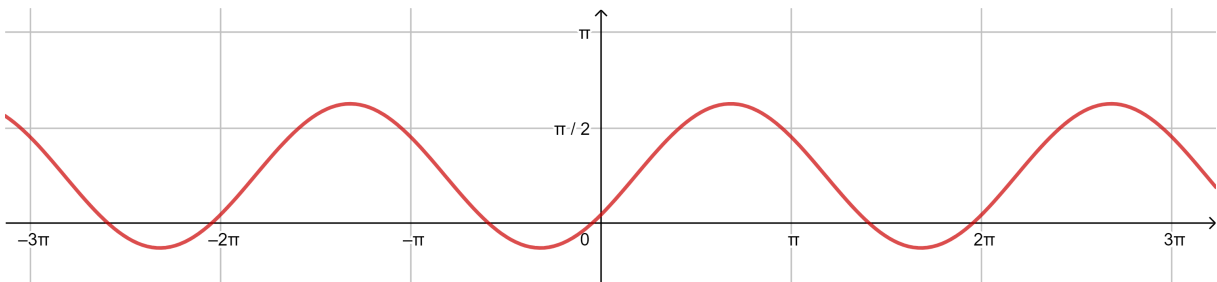


Figura 22 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com  $N=1$

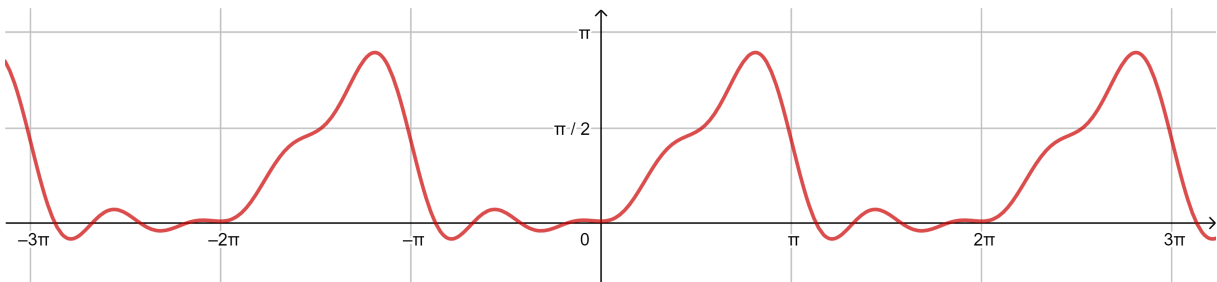


Figura 23 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com  $N=3$

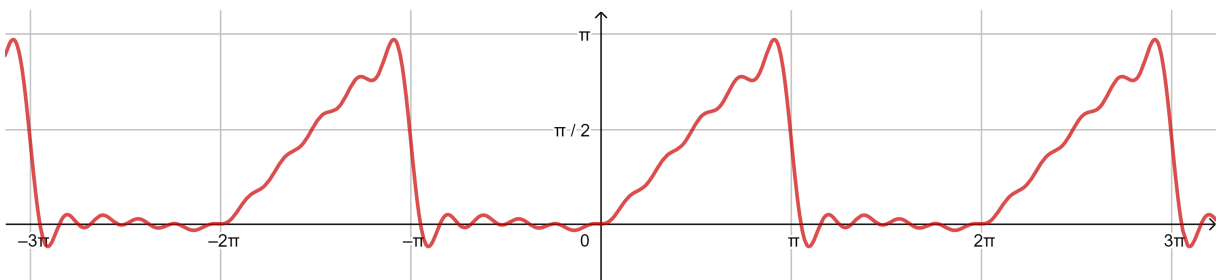


Figura 24 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com  $N=10$

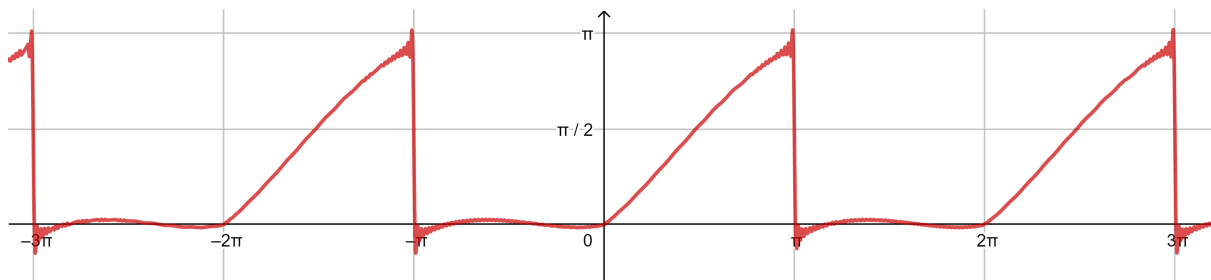


Figura 25 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.3 com  $N=100$

**Exemplo 3.3.4.** Seja a função de período 2 que está definida em um período por

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

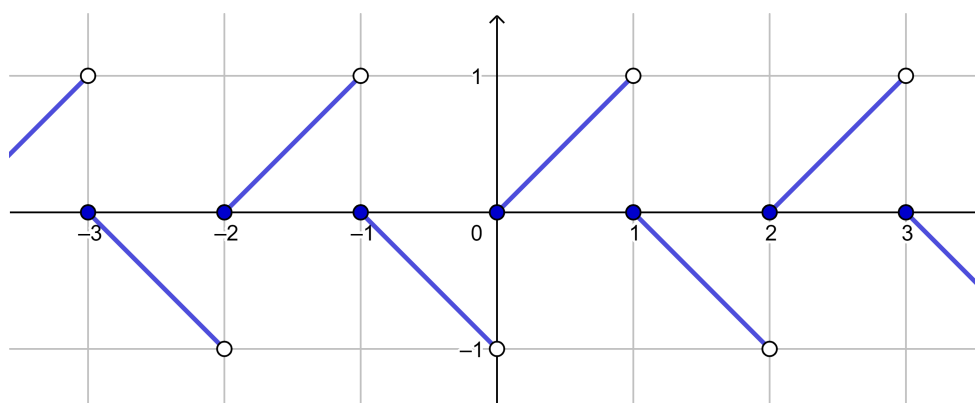


Figura 26 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.4

Com  $L = 1$ , usando as expressões dos coeficientes, temos

$$a_0 = \int_{-1}^0 (-x - 1) dx + \int_0^1 x dx = \int_0^1 x dx - \int_{-1}^0 x dx - \int_{-1}^0 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 - x \Big|_{-1}^0 = 0,$$

e

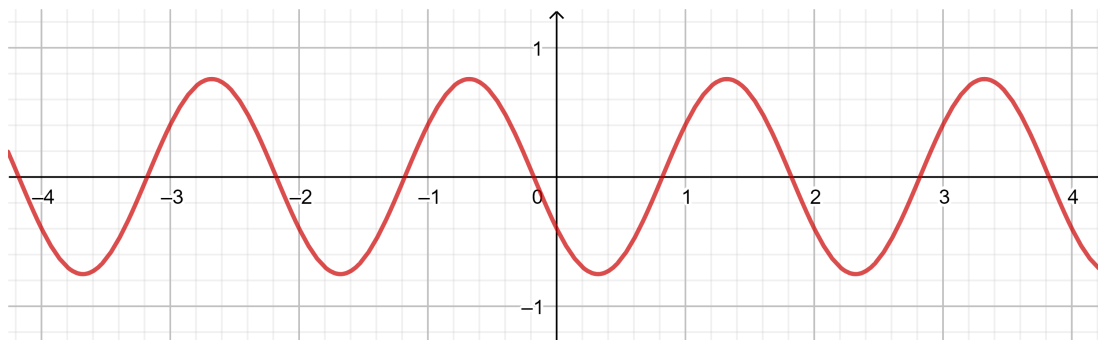
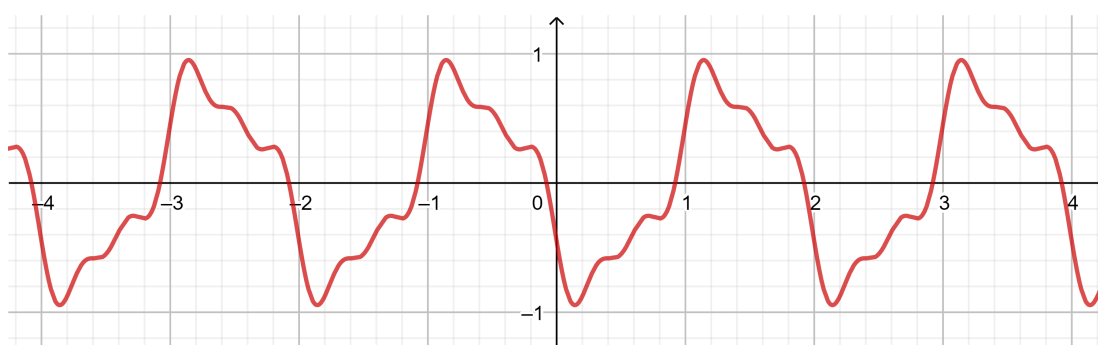
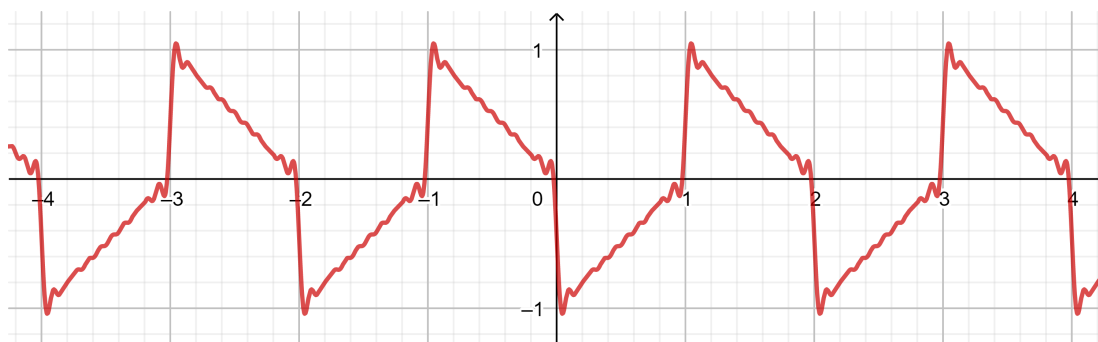
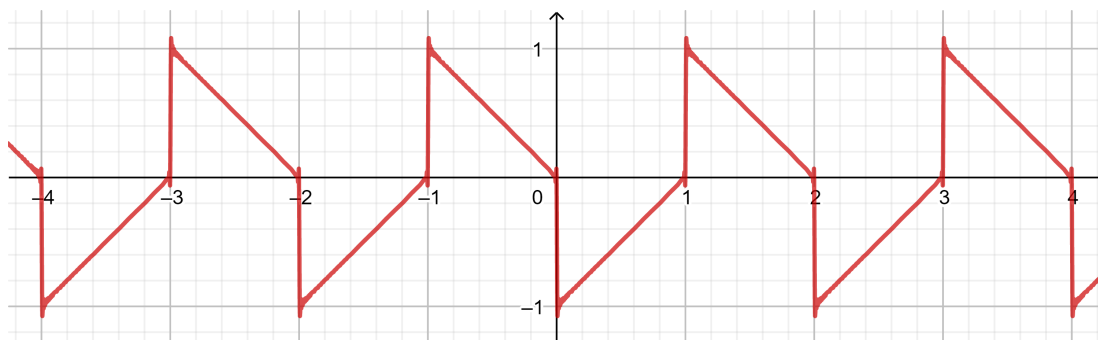
$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^0 (-x-1) \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\
&= \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx - \int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx - \int_{-1}^0 \cos(n\pi x) dx \quad (u = n\pi x) \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \cos u du - \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-n\pi}^0 u \cos u du - \frac{1}{n\pi} \int_{-n\pi}^0 \cos u du \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ u \operatorname{sen} u - \int \operatorname{sen} u du \right]_0^{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ u \operatorname{sen} u - \int \operatorname{sen} u du \right]_{-n\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \int_{-n\pi}^0 \cos u du \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ u \operatorname{sen} u + \cos u \right]_0^{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ u \operatorname{sen} u + \cos u \right]_{-n\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} u \Big|_{-n\pi}^0 \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] - \frac{1}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] \\
&= \frac{2(-1)^n - 2}{n^2\pi^2} \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^0 (-x-1) \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\
&= \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx - \int_{-1}^0 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx - \int_{-1}^0 \operatorname{sen}(n\pi x) dx \quad (u = n\pi x) \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \operatorname{sen} u du - \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-n\pi}^0 u \operatorname{sen} u du - \frac{1}{n\pi} \int_{-n\pi}^0 \operatorname{sen} u du \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ -u \cos u + \int \cos u du \right]_0^{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ -u \cos u + \int \cos u du \right]_{-n\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \int_{-n\pi}^0 \operatorname{sen} u du \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ \operatorname{sen} u - u \cos u \right]_0^{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ \operatorname{sen} u - u \cos u \right]_{-n\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} \cos u \Big|_{-n\pi}^0 \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi \cos(n\pi)] - \frac{1}{n^2\pi^2} [(-n\pi) \cos(-n\pi)] + \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(-n\pi)] \\
&= -\frac{(-1)^n}{n\pi} - \left( -\frac{(-1)^n}{n\pi} \right) - \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \\
&= \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \\
&= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier da função é expressa por

$$S_f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\pi x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x).$$

Figura 27 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com  $N=1$ Figura 28 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com  $N=3$ Figura 29 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com  $N=10$ Figura 30 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.4 com  $N=100$

**Exemplo 3.3.5.** Seja a função quadrática de período 2 dada por

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

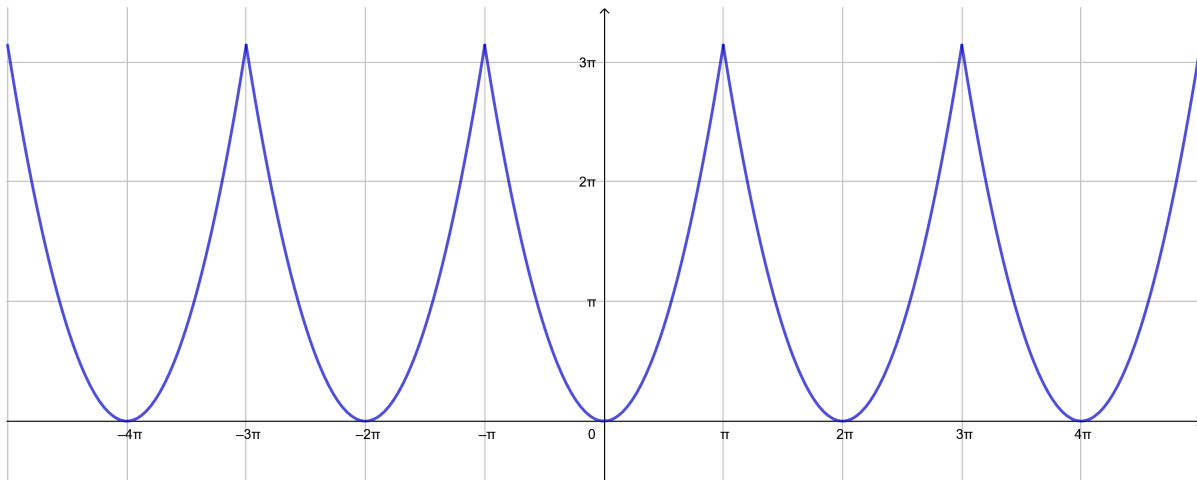


Figura 31 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.5

Observe que a função quadrática é par no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , e portanto  $b_n = 0$ . Vamos usar as expressões para calcular os coeficientes  $a_0$  e  $a_n$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

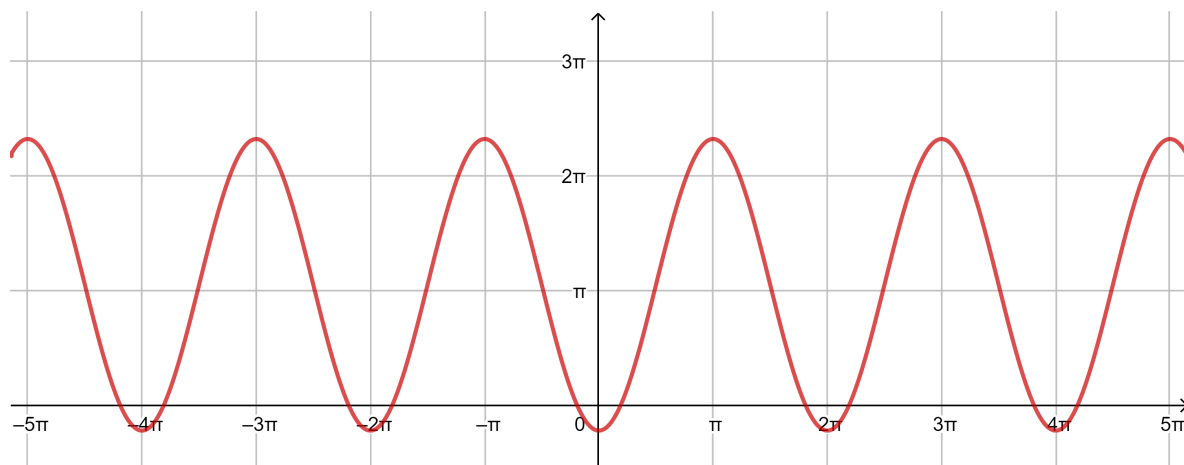
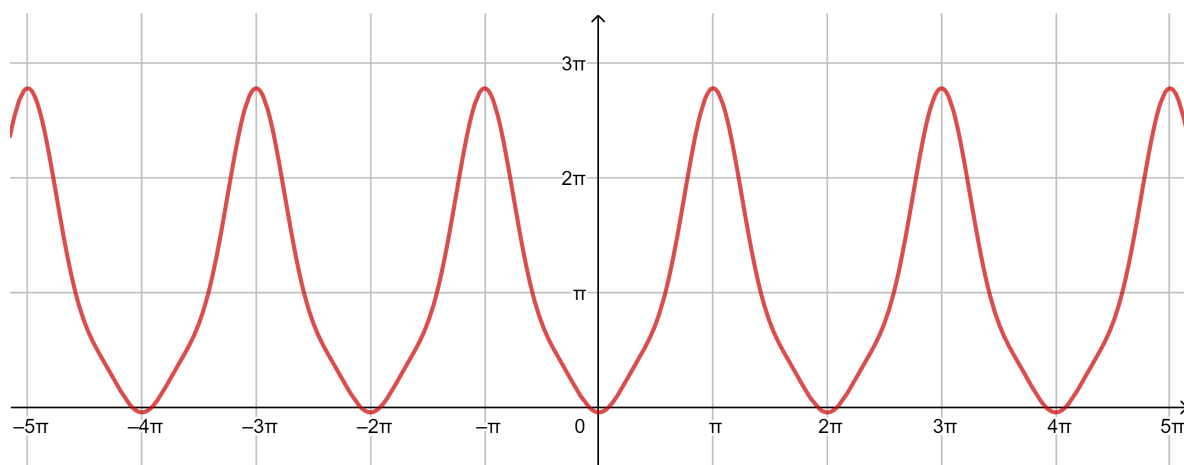
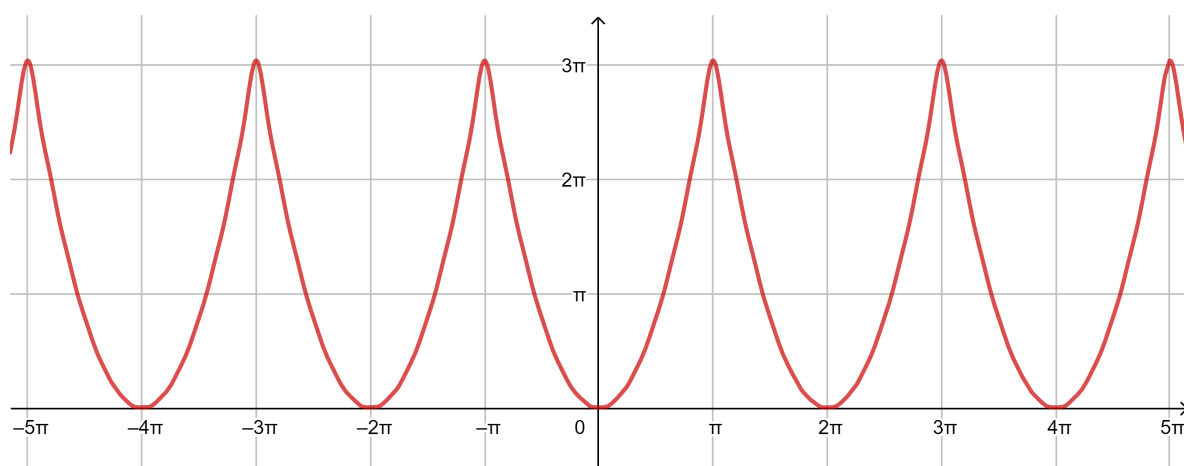
e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx && (u = x^2, dv = \cos(nx) dx) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \operatorname{sen}(nx)}{n} dx \right] \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[ \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \right] && (u = x, dv = \operatorname{sen}(nx) dx) \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[ -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n} dx \right] \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[ -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[ -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ for par} \\ \frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases} \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier da função  $x^2$  definida no intervalo  $[-\pi, \pi]$  é dada por

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$



Figura 32 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com  $N=1$ Figura 33 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com  $N=3$ Figura 34 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com  $N=10$

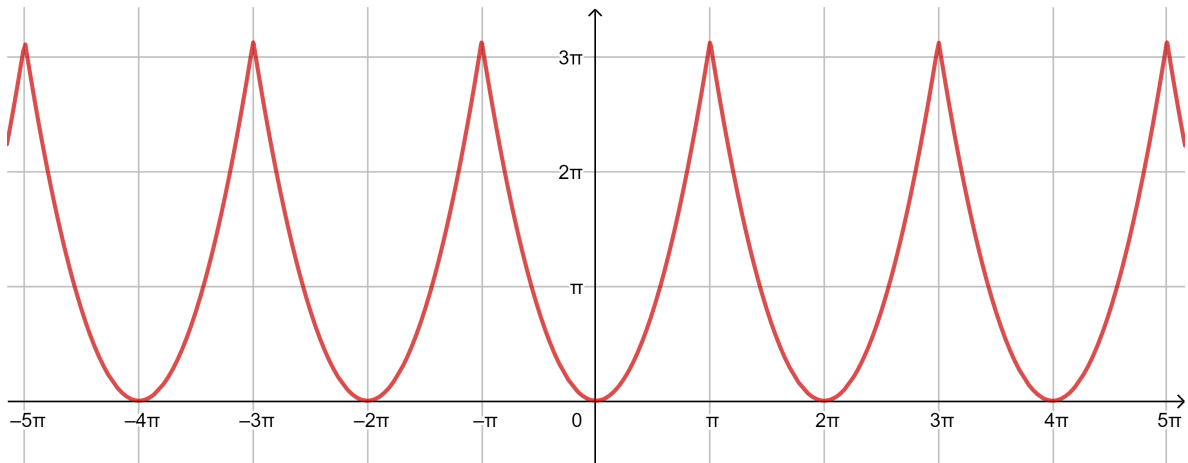


Figura 35 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.5 com  $N=100$

**Exemplo 3.3.6.** Seja a função de período 2 dada por

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2.$$

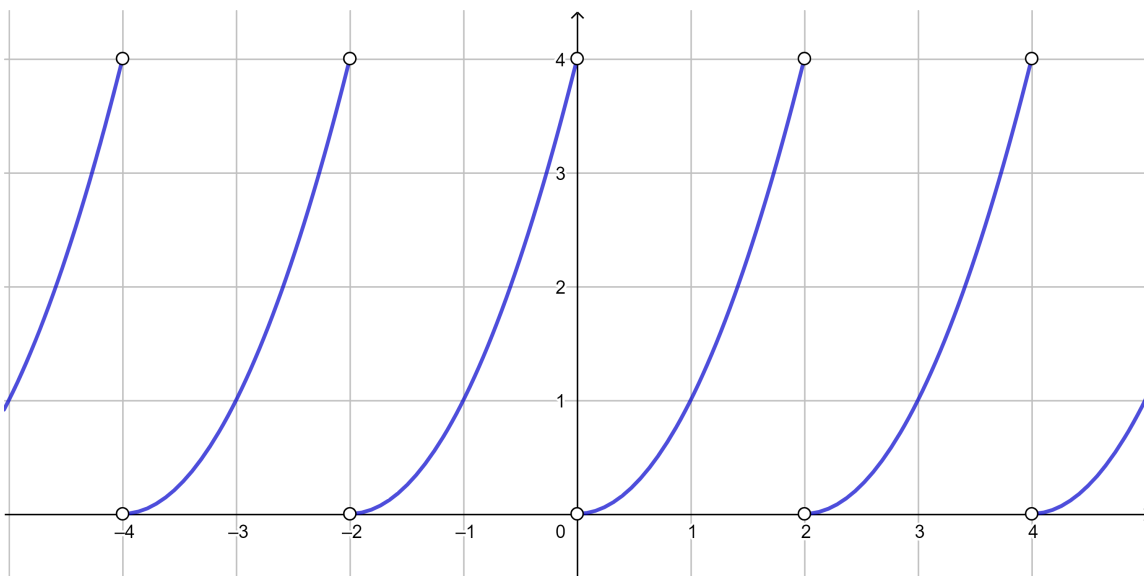


Figura 36 – Gráfico da função do exemplo 3.3.6

Note que nesse caso  $f$  não é uma função nem par nem ímpar. Aqui,  $L = 1$ , e pela Proposição 2.1.4, é mais conveniente integrar de  $x = 0$  à  $x = 2$ . Temos então que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) dx = \frac{1}{1} \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3},$$

e

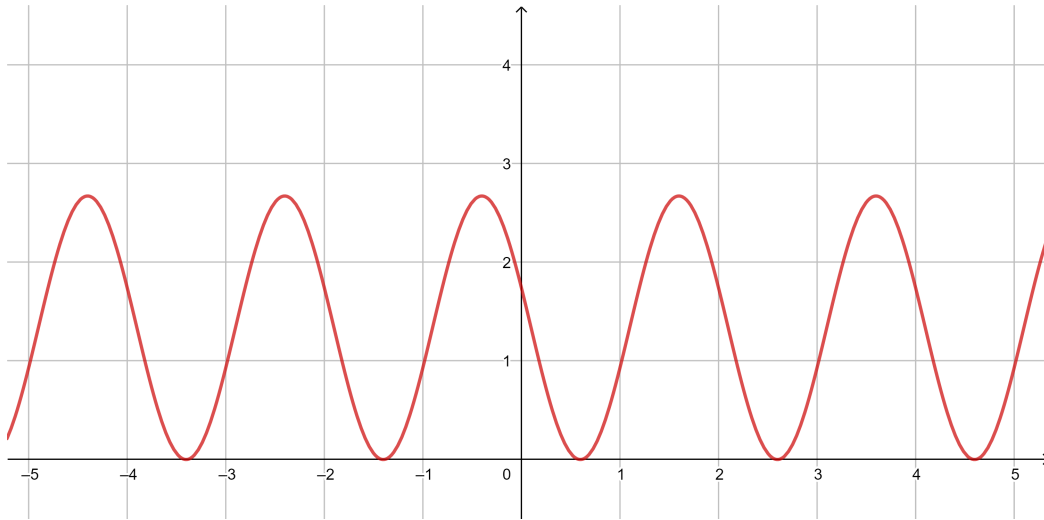
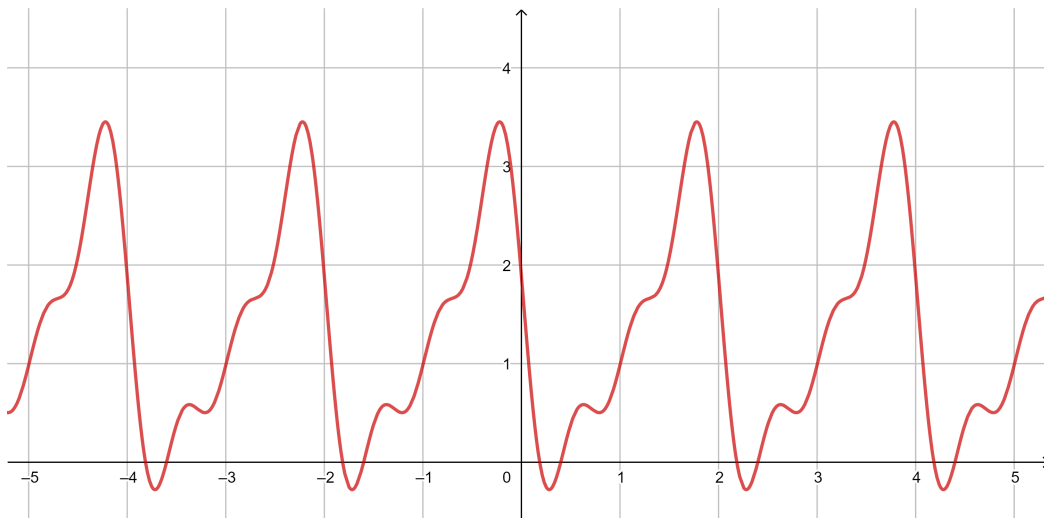
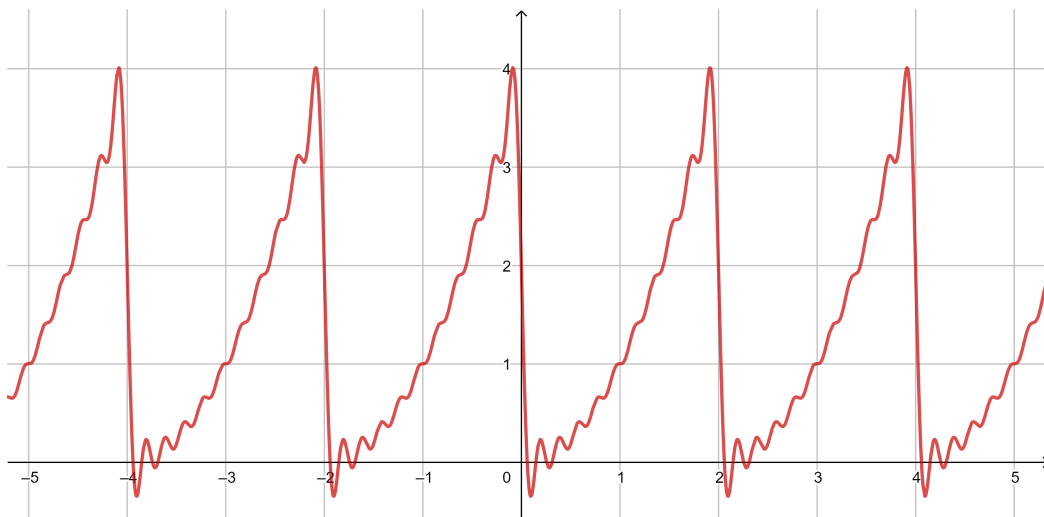
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^2 x^2 \cos(n\pi x) dx \\
&= \frac{x^2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\
&= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left[ -\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right] \\
&= \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{n^2 \pi^2} \int_0^2 \cos(n\pi x) dx \\
&= \frac{4}{n^2 \pi^2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^2 x^2 \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\
&= -\frac{x^2}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^2 - \int_0^2 -\frac{2x}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \\
&= -\frac{4}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \cos(n\pi x) dx \\
&= -\frac{4}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) dx \right] \\
&= -\frac{4}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_0^2 - \frac{1}{n\pi} \left( \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right) \Big|_0^2 \right] \\
&= -\frac{4}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier desta função é dada por

$$S_f(x) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n}.$$

Figura 37 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com  $N=1$ Figura 38 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com  $N=3$ Figura 39 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com  $N=10$

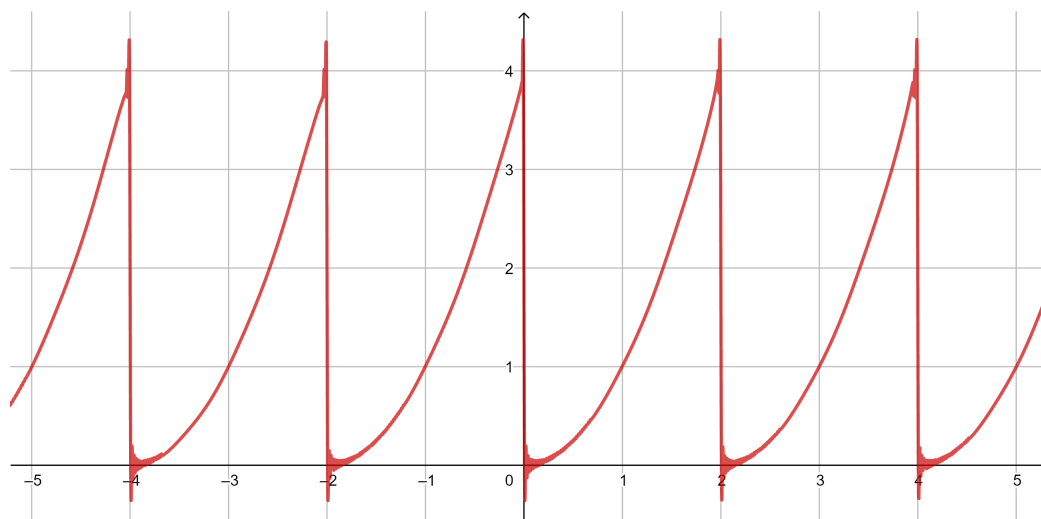


Figura 40 – Gráfico da soma parcial da Série de Fourier da função do Exemplo 3.3.6 com  $N=100$

**Exemplo 3.3.7.** Seja a função de período  $2\pi$  que está definida em um período por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen } x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

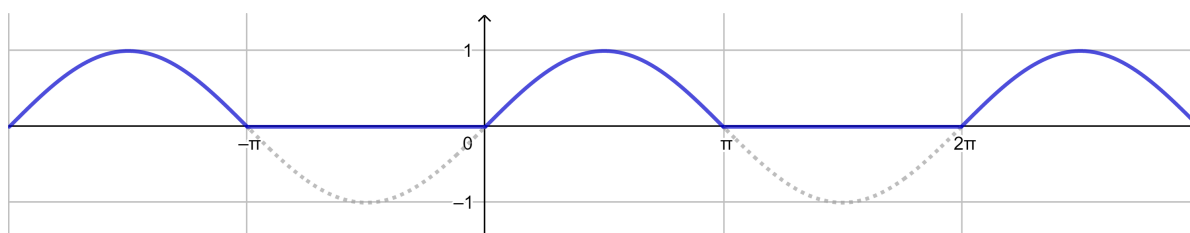


Figura 41 – Gráfico da função do Exemplo 3.3.7

Iniciemos com o cálculo do coeficiente  $a_0$ . Temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Para o cálculo dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , este exemplo requer que consideremos separadamente o caso em que  $n = 1$ , devido das relações de ortogonalidade descritas na Seção 2.4. Usando as fórmulas (3.20) e (3.21), temos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } x \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(2x)}{2} \quad (\text{vide Eq.2.8}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen } u \frac{du}{2} \quad (u = 2x) \\ &= \frac{1}{4\pi} [-\cos(u)] \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \quad (\text{vide Eq. 2.11}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos(2x) \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ x \Big|_0^{\pi} - \operatorname{sen} x \Big|_0^{2\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Considerando agora o caso em que  $n \neq 1$ , segue que

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos(nx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+nx) + \operatorname{sen}(x-nx)] \, dx \quad \text{vide Eq. (2.5)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+nx) \, dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x-nx) \, dx \right] \quad (u = x+nx; v = x-nx) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi+n\pi} \frac{1}{1+n} \operatorname{sen} u \, du + \int_0^{\pi-n\pi} \frac{1}{1-n} \operatorname{sen} v \, dv \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1+n} [-\cos u] \Big|_0^{\pi+n\pi} + \frac{1}{1-n} [-\cos v] \Big|_0^{\pi-n\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1+n} (-\cos(\pi+n\pi) + \cos 0) + \frac{1}{1-n} (-\cos(\pi-n\pi) + \cos 0) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1+n} (1 + (-1)^n) + \frac{1}{1-n} (1 + (-1)^n) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ (1 + (-1)^n) \left( \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right) \right] \\
 &= \frac{1 + (-1)^n}{\pi(1-n^2)},
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos(x-nx) - \cos(x+nx)] dx \quad \text{vide Eq.(2.7)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi \cos(x-nx) dx - \int_0^\pi \cos(x+nx) dx \right] \quad (u = x-nx; v = x+nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-n} \int_0^{\pi-n\pi} \cos u du - \frac{1}{1+n} \int_0^{\pi+n\pi} \cos v dv \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-n} \operatorname{sen} u \Big|_0^{\pi-n\pi} - \frac{1}{1+n} \operatorname{sen} v \Big|_0^{\pi+n\pi} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, os coeficientes de Fourier de  $f$  são dados por

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{e} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n \neq 1, \end{cases}$$

o que nos permite escrever sua série de Fourier

$$S_f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}.$$

**Exemplo 3.3.8.** Seja a função  $2\pi$ -periódica dada por

$$f(x) = \cos^2(2x), \quad -\pi \leq x < \pi.$$

Com base na relação (2.10), com  $\alpha = 2x$ , sabemos que

$$\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2},$$

cujos resultados buscaremos demonstrar utilizando das técnicas de solução dos coeficientes de Fourier da função  $\cos^2(2x)$ . Iniciemos pelo cálculo de  $a_0$ , e em seguida pelo cálculo de  $a_n$ .

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(4x)) dx \quad (\text{vide Eq.2.10}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x) dx \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} (2\pi) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x) \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x) \cos(nx) dx \right].
 \end{aligned}$$

Do Exemplo 2.2.4, temos que  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$ , e pela relação de ortogonalidade (2.13), temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi, & n = 4 \\ 0, & n \neq 4. \end{cases}$$

Logo, temos  $a_4 = \frac{1}{2}$  e  $a_n = 0$ , para  $n \neq 4$ . Como a função cosseno é ímpar, temos também que  $b_n = 0$  para todo  $n$ . Portanto, concluímos que a série de Fourier da função  $\cos^2(2x)$  é dada por

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + a_4 \cos(4x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}.$$

### 3.4 Teorema de Fourier

Nas seções anteriores definimos os coeficientes da série de Fourier  $S_f(x)$  de uma dada função periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , da qual consideramos algumas propriedades a fim de que as expressões que definem os coeficientes de Fourier estejam bem definidos. Os gráficos das somas parciais da série de Fourier apresentados ao final de cada exemplo na seção anterior nos sugere que de fato a série de Fourier  $S_f(x)$ , converge para a função  $f$ , isto é,

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Nesse sentido, uma pergunta natural que surge é saber sob quais condições podemos garantir de fato a relação de igualdade entre  $f$  e sua série de Fourier, ou seja, estamos interessados no estudo das hipóteses de convergência da série de Fourier para uma certa função  $f$ , que será demonstrada no próximo capítulo.

**Definição 3.4.1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *seccionalmente contínua* se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades de primeira espécie em qualquer intervalo fechado e limitado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Em outras palavras, dados  $a < b$ , existem um número finito de pontos

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b,$$

tais que  $f$  é contínua em cada subintervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ , para  $j = 1, \dots, n-1$ , e além disso, existem e são finitos os limites laterais nas extremidades de cada subintervalo

$$f(a_j^+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j^-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$



Todas as funções periódicas estudadas na Seção 3.3 são exemplos de funções seccionalmente contínuas, da qual pudemos calcular suas respectivas séries de Fourier. De fato, como toda função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínua é limitada e integrável em  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , os seus coeficientes de Fourier estão bem definidos. Por outro lado, é importante mencionar exemplos de funções que não são seccionalmente contínuas. Note que a definição de funções seccionalmente contínuas não permite:

(i) descontinuidades de segunda espécie, isto é, limites laterais que tendem ao infinito nas extremidades de um subintervalo  $(a_j, a_{j+1})$ . Por exemplo, a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , para  $x \neq 0$ , não é seccionalmente contínua, pois sua descontinuidade em  $x = 0$  é de segunda espécie.

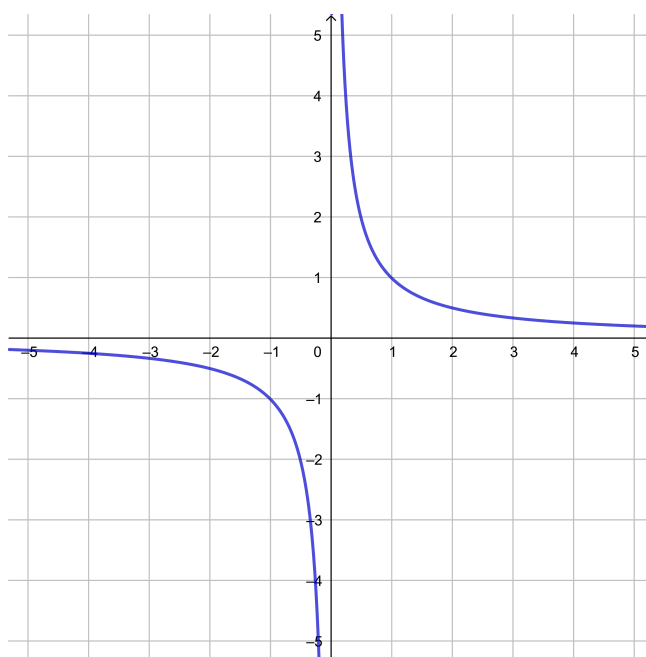


Figura 42 – Gráfico da função  $f = \frac{1}{x}$ .

(ii) infinitas descontinuidades em um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Por exemplo, a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, pois existem infinitas descontinuidades no intervalo  $[0, 1]$ , embora todas elas sejam de primeira espécie.

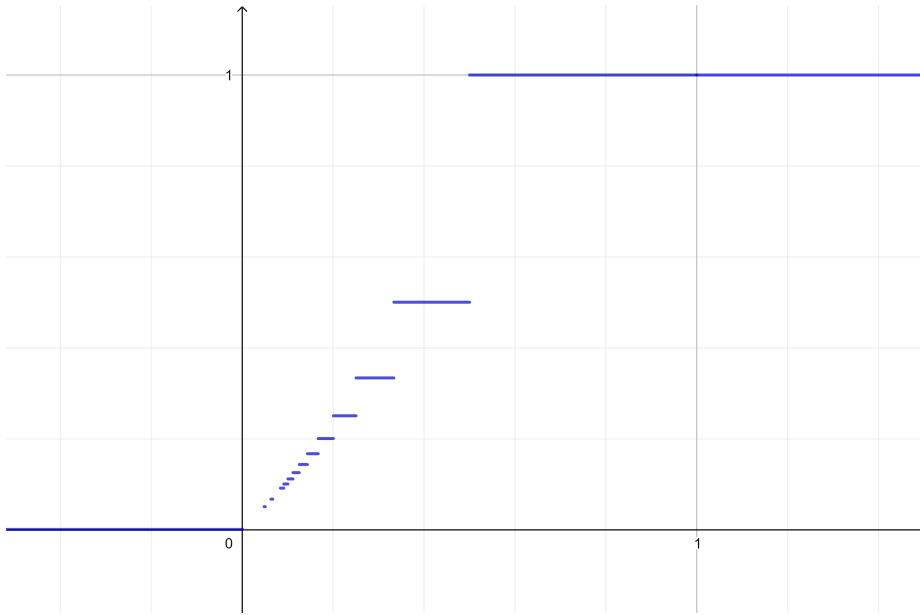


Figura 43 – Gráfico da função  $g(x)$ .

**Definição 3.4.2.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *seccionalmente diferenciável* se a função  $f$  e a sua função derivada  $f'$  forem seccionalmente contínuas.

Note que uma função seccionalmente diferenciável é por definição seccionalmente contínua, no entanto, uma função seccionalmente contínua pode não ser seccionalmente diferenciável. Por exemplo, a função  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , para  $|x| \leq 1$ , e periódica de período 2, apesar de ser uma função contínua, e portanto seccionalmente contínua, não é seccionalmente diferenciável, pois existe uma descontinuidade de segunda espécie nos pontos onde  $f'$  é descontínua, conforme mostra o gráfico a seguir.

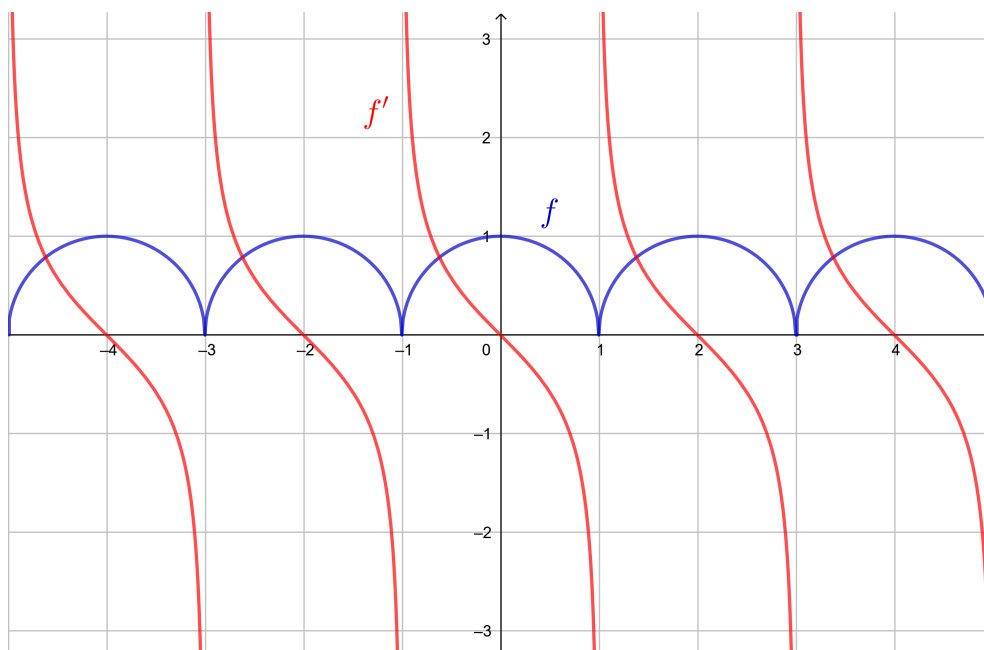


Figura 44 – Gráfico da função periódica  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  e sua derivada  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ .

As funções apresentadas na Seção 3.3 para as quais calculamos suas respectivas séries de Fourier também são exemplos de funções seccionalmente diferenciáveis. Com as respectivas definições apresentadas, temos agora as condições necessárias que nos permite enunciar o seguinte resultado que garante a convergência da série de Fourier para uma função  $f$ .

**Teorema 3.4.1** (Teorema de Fourier). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  dada em (3.17), converge em cada ponto  $x$  da forma

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.25)$$

Em outras palavras, esse teorema nos diz que a série de Fourier converge para o valor  $f(x)$ , em cada ponto onde  $f$  é contínua, e converge para a média aritmética dos limites laterais, isto é,  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ , em cada ponto em que  $f$  tem uma descontinuidade de primeira espécie.

### 3.5 Extensões pares e ímpares de função

Em todos os exemplos discutidos na Seção 3.3, calculamos a Série de Fourier de funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente diferenciáveis e periódicas de períodos  $2L$  definidos em intervalos da forma  $[-L, L]$  ou  $[0, 2L]$ . No entanto, caso tenhamos uma função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  que seja seccionalmente diferenciável, é possível calcular a representação pela Série de Fourier da função  $f$  para  $x \in [0, L]$ . Para tal, devemos inicialmente estender  $f$  ao intervalo  $[-L, 0]$ , e posteriormente à toda reta tornando-a periódica de período  $2L$  pela condição de periodicidade  $f(x + 2L) = f(x)$ .

Como a definição de  $f$  no intervalo  $[-L, 0]$  é uma escolha arbitrária, a representação por série de Fourier de  $f$  no intervalo  $[0, L]$  dependerá dessa escolha, ou seja, escolhas distintas da extensão de  $f$  no intervalo  $[-L, 0]$  fornecerão séries de Fourier diferentes que convergem para  $f$  no intervalo original  $[0, L]$ . Na prática, dada  $f(x)$  definida em  $[0, L]$ , uma escolha bastante natural que podemos tomar entre as inúmeras possibilidades de extensão de  $f$ , é estendê-la ao intervalo  $[-L, 0]$  a fim de se obter uma função que seja par ou ímpar.

A *extensão par de período  $2L$*  de  $f$  é a função  $f_P$  definida por

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

e  $f_P(x + 2L) = f_P(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . A *extensão ímpar de período  $2L$*  de  $f$  é a função  $f_I$  definida por

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

e  $f_I(x + 2L) = f_I(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

A vantagem de estender  $f$  para uma função par ou ímpar é que, como já vimos, a série de Fourier da extensão par  $f_E$  contém apenas termos em cosseno o que implica em  $b_n = 0$ , enquanto

que a série de Fourier da extensão ímpar  $f_I$  contém apenas termos em seno o que implica em  $a_n = 0$ . O Teorema de Fourier garante que cada uma dessas duas séries, que chamaremos  $S_{fE}$  e  $S_{fI}$ , convergem para  $f(x)$  no intervalo  $0 < x < L$ . Os dois próximos exemplos ilustram essa escolha de extensão de uma dada função  $f$ .

**Exemplo 3.5.1.** Seja a função  $f(x) = x$  definida no intervalo  $[0, \pi]$ . Vamos escrever  $f$  como uma série de senos e também como uma série cossenos.

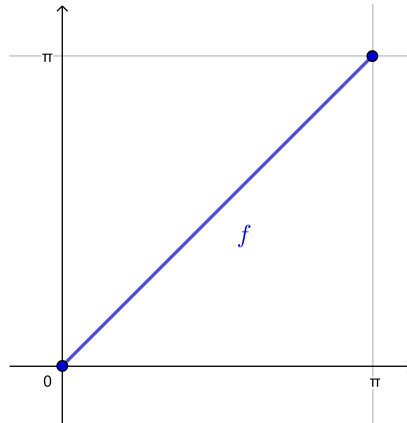


Figura 45 – Gráfico da função  $f(x) = x$  definida em  $[0, \pi]$ .

Para obter a série em senos, consideremos a extensão ímpar de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , isto é,  $f_I(x) = x$  definida em  $[-\pi, \pi]$ . A Série de Fourier de  $f_I$  foi calculada no Exemplo 3.3.2 e é dada por

$$S_{fI}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \text{sen}(nx).$$

Para obter a série em cossenos, consideremos a extensão par de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  isto é,  $f_P(x) = |x|$  definida em  $[-\pi, \pi]$ . Como  $f_P$  é par, temos que  $b_n = 0$ . Os cálculos de  $a_0$  e  $a_n$  seguem por:

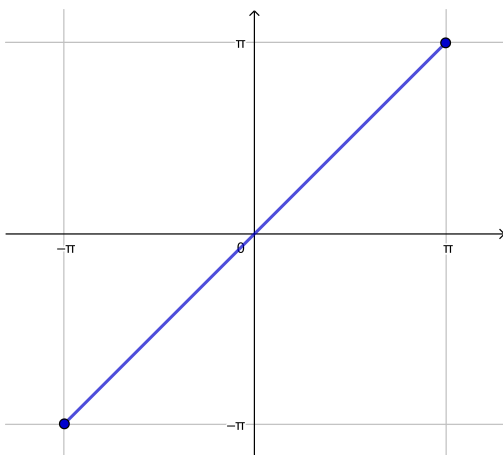


Figura 46 – Extensão ímpar da função  $f(x) = x$ .

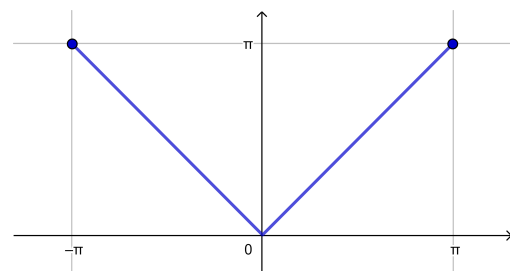


Figura 47 – Extensão par da função  $f(x) = x$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x \operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier de  $f_P$  é dado por

$$S_{fP}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Dessa forma, no intervalo  $[0, \pi]$ , vale a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

**Exemplo 3.5.2.** Seja a função  $f(x) = x(\pi - x)$  definida no intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ . Vamos escrever  $f$  como uma série de senos e também como uma série cossenos.

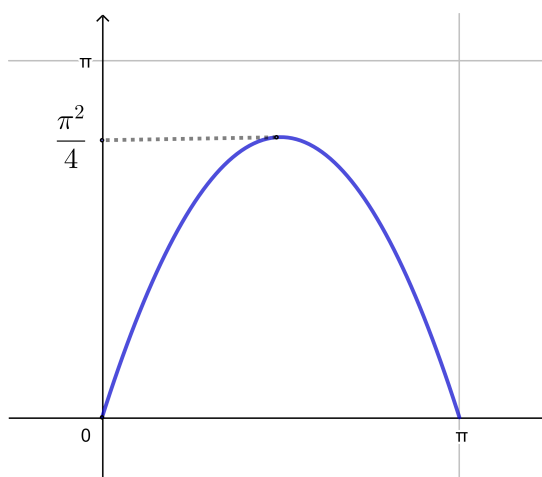


Figura 48 – Gráfico da função  $f(x) = x(\pi - x)$  definida em  $[0, \pi]$ .

Para escrever a função  $f(x) = x(\pi - x)$  em termos de cossenos, consideremos a extensão de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  que seja par, isto é,

$$f_P(x) = \begin{cases} -x^2 + \pi x, & 0 \leq x \leq \pi \\ -x^2 - \pi x, & -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

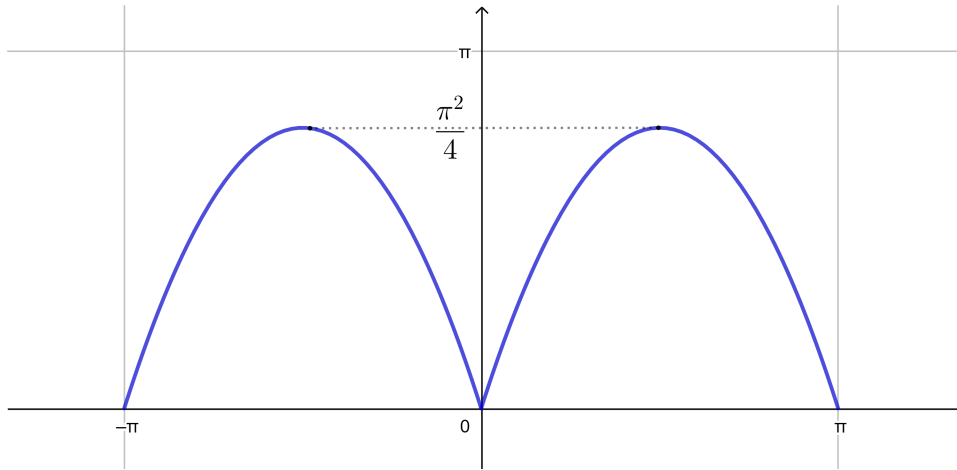


Figura 49 – Extensão par da função  $f(x) = x(\pi - x)$ .

Iniciemos pelo cálculo do coeficiente  $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_P(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x) dx = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} \right] = \frac{\pi^2}{3}.$$

Por  $f$  ser par, temos que  $b_n = 0$ . Segue o cálculo de  $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_P(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} -x^2 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \pi x \cos(nx) dx \right] \\ &= 2 \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

De posse dos resultados dos cálculo de  $a_n$  apresentados nos Exemplos 3.3.3 e 3.3.5, temos respectivamente que

$$2 \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4}{n^2} (-1)^n = \begin{cases} \frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

de maneira que obtemos

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto podemos escrever a série de Fourier da extensão par desta função por

$$S_{fP}(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \text{ par}} \frac{4}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi^2}{6} - \left( \cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2^2} + \frac{\cos(6x)}{3^2} + \dots \right).$$

Para escrever a função  $f(x) = x(\pi - x)$  em termos de senos, consideremos a extensão de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  que seja ímpar, isto é,

$$f_I(x) = \begin{cases} -x^2 + \pi x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x^2 + \pi x, & -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

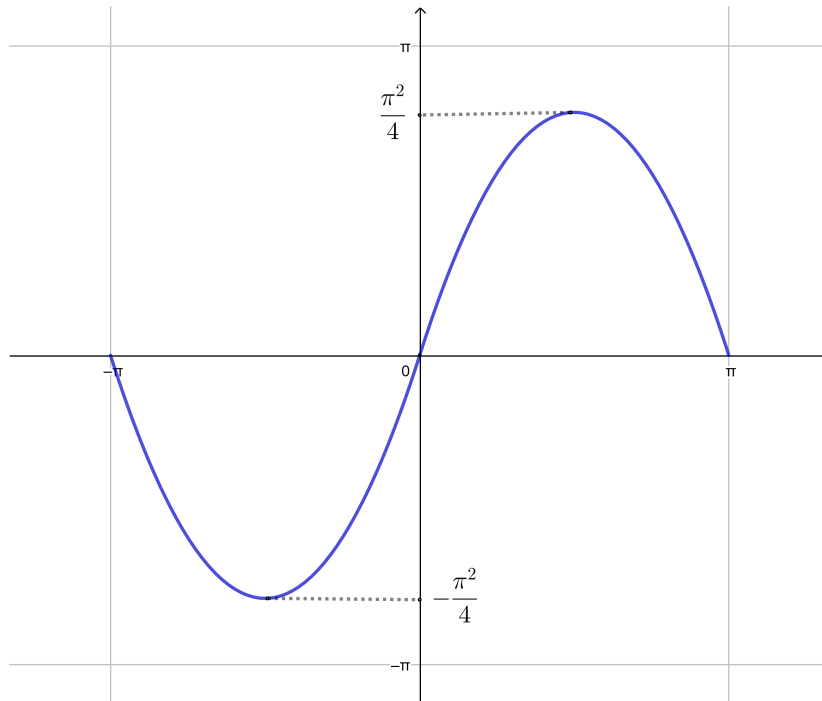


Figura 50 – Extensão ímpar da função  $f(x) = x(\pi - x)$ .

Como  $f_I(x)$  é ímpar, temos que  $a_0 = 0$  e  $a_n = 0$ . Segue o cálculo de  $b_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_I(x) \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x) \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx) dx. \end{aligned}$$

Calculando essas integrais separadamente, temos que

$$2 \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = 2 \left[ -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right] = -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi),$$

e

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx) dx &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x^2 \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{2x \cos(nx)}{n} dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[ -\pi^2 \cos(n\pi) + 2 \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right] \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{4}{\pi n} \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$b_n = -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) - \left[ -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right] = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Portanto a série de Fourier da extensão ímpar desta função é dada por

$$S_{fI}(x) = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{8}{\pi n^3} \operatorname{sen}(nx) = \frac{8}{\pi} \left( \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5^3} + \dots \right).$$

Desse modo, no intervalo  $[0, \pi]$  vale a igualdade

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \text{ par}} \frac{4}{n^2} \cos(nx) = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{8}{\pi n^3} \operatorname{sen}(nx).$$

### 3.6 Uma interessante aplicação: aproximações para $\pi$ .

Quando representamos certas funções através de sua série de Fourier, a aproximação do valor de  $\pi$  por uma série numérica é uma aplicação bastante interessante e imediata que decorre do teorema de Fourier. Vejamos nos exemplos a seguir como obter algumas séries numéricas que aproximam o valor de  $\pi$ .

**Exemplo 3.6.1.** A função onda quadrada tem a seguinte representação de sua série de Fourier (vide Exemplo 3.3.1)

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x).$$

Vamos utilizá-la para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

De fato, no ponto  $x = \frac{1}{2}$ , a imagem da função onda quadrada vale 1. Em virtude do Teorema de Fourier, podemos escrever  $S_f(\frac{1}{2}) = 1$ . Logo

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$



que resulta

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1,$$

ou equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Exemplo 3.6.2.** A função  $f(x) = x^2$ , no intervalo  $[0, 2]$ , é representada pela seguinte série de Fourier (vide Exemplo 3.3.6)

$$x^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi x)}{n}. \quad (3.26)$$

Vamos usar tal representação para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

De fato, veja que a função periódica estendida na reta como no Exemplo 3.3.6 é descontínua no ponto  $x = 0$  e também em todos os demais pontos da forma  $x = 2k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Em tais pontos, lembre que a série de Fourier converge para a média aritmética dos limites laterais, que nesse caso vale 2. Em particular, vamos considerar o ponto  $x = 0$ , e substituir  $S_f(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 2$  na série de Fourier de  $f$ . Dessa maneira, temos que

$$S_f(0) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(0)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(0)}{n} = 2,$$

que resulta em

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{4}{3},$$

do qual, com as devidas manipulações algébricas, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Da mesma relação 3.26, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

De fato, nesse caso basta tomar  $S_f(1) = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = 1$  a fim de se obter

$$S_f(1) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi)}{n} = 1,$$

que resulta em

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{4}{3},$$

do qual obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Finalmente podemos obter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

De fato, basta somar as séries obtidas anteriormente, e o resultado é o esperado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Exemplo 3.6.3.** A série de Fourier da função  $f(x) = x^4$ , para  $0 < x < 2\pi$  é dada por

$$x^4 = \frac{16\pi^4}{5} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4} \right) \cos(nx) + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \operatorname{sen}(nx).$$

De posse desta série de Fourier, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

De fato, análogo ao exemplo anterior, tomamos  $S_f(0) = 8\pi^4$ , e substituímos esse valor na série de Fourier da função. Desse modo, temos que

$$\frac{16\pi^4}{5} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4} \right) \cos(0) + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \operatorname{sen}(0) = 8\pi^4,$$

que resulta em

$$16 \left[ \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4} \right) \right] = 8\pi^4,$$

de onde segue que

$$2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{2} - \frac{\pi^4}{5}.$$

Utilizando o resultado  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  que obtivemos do exemplo anterior, com as devidas manipulações algébricas, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Analogamente, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{7\pi^4}{720}.$$

De fato, substituímos  $S_f(\pi) = \pi^4$  para escrever

$$\frac{16\pi^4}{5} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4} \right) \cos(\pi) + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \operatorname{sen}(\pi) = \pi^4,$$

que resulta

$$2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{\pi^4}{16} - \frac{\pi^4}{5}.$$

Utilizando o resultado  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$  que obtivemos do exemplo anterior, com as devidas manipulações algébricas, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.$$

Finalmente podemos obter

$$\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}.$$

De fato, análogo ao exemplo anterior, obtemos o resultado esperado

$$\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

### 3.7 Integração de séries de Fourier

Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  for igual à sua série de Fourier, isto é,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

a qual supõe convergir uniformemente num intervalo  $[a, b]$ , podemos usar a Proposição 4.1.3 para concluir que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_a^b b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right). \quad (3.27)$$

Mostraremos nessa seção que de fato a identidade (3.27) é válida mesmo se a série de Fourier não convergir uniformemente para  $f$ , ou mesmo se a série de Fourier não convergir para  $f$ . Para tal, comecemos considerando a existência de uma função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua, definida a partir de  $f$  pela expressão

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt, \quad (3.28)$$

a qual é contínua. De fato, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que  $F'(x)$  existe em todos os pontos  $x$  onde  $f$  é contínua, e além disso,  $F'(x) = f(x)$  nesses pontos. Mais geral, se uma função  $F(x)$  é definida por

$$F(x) = \int_{q(x)}^{p(x)} f(t) dt,$$

no qual  $p(x)$  e  $q(x)$  são deriváveis, então sua derivada  $F'(x)$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, e aplicando a regra da Cadeia, é dada por

$$F'(x) = f(p(x))p'(x) - f(q(x))q'(x).$$

No nosso caso, em que  $p(x) = x$  e  $q(x) = 0$ , temos  $p'(x) = 1$  e  $q'(x) = 0$ , e conseqüentemente, concluímos que  $F'(x) = f(x)$ . Dessa forma  $F'(x)$  é seccionalmente contínua, desde que  $f$  seja seccionalmente contínua, e portanto  $F(x)$  é seccionalmente diferenciável. Além disso, note  $F$  também é uma função periódica de período  $2L$ . De fato,

$$\begin{aligned} F(x+2L) - F(x) &= \int_0^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt - \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_x^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_{-L}^L \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \quad \text{vide Proposição 2.1.4} \\ &= \int_{-L}^L f(t) dt - \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt \end{aligned}$$

Por um lado, da definição (3.16), temos  $\int_{-L}^L f(t) dt = a_0 L$ . De outro lado, calculando a integral, temos  $\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt = \frac{a_0 t}{2} \Big|_{-L}^L = a_0 L$ , e daí, concluímos que  $F(x+2L) - F(x) = 0$ , provando  $F$  ser uma função periódica de período  $2L$ .

Em resumo, a função  $F$  definida em (3.28) é contínua, seccionalmente diferenciável e periódica de período  $2L$ , satisfazendo dessa forma, todas as hipóteses do Teorema de Fourier para  $F$ . Logo, temos

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.29)$$

no qual

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0,$$

e

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1.$$

Para relacionar os coeficientes de Fourier da função  $F$  com os coeficientes da função  $f$  dados em (3.18) e (3.19), aplicamos a integração por partes na identidade de  $A_n$ , e assim temos que

$$A_n = \frac{1}{L} F(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{x=-L}^{x=L} - \frac{1}{L} \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Segue que

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Como  $F'(x) = f(x)$  e  $b_n L = \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ , concluímos que

$$A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n, \quad n \geq 1. \quad (3.30)$$

De modo semelhante, temos que

$$B_n = -\frac{1}{L} F(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{x=-L}^{x=L} + \frac{1}{L} \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

do qual concluímos que

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n. \quad (3.31)$$

Para a dedução de  $A_0$ , fazemos  $x = 0$  em (3.29) e usamos o fato de que  $F(0) = 0$  para obter

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ou seja,

$$A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (3.32)$$

Agora, substituindo as expressões para os coeficientes de Fourier de  $F$ , dados em (3.30), (3.31) e (3.32), na expressão (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \\ &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b_n}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \end{aligned}$$

Agora observando que

$$\frac{L}{n\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

e

$$\frac{L}{n\pi} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] = \int_0^x \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

temos

$$\int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt + a_n \int_0^x \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right],$$

ou equivalentemente à

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^x a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \int_0^x b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right], \quad (3.33)$$

isto é, sob as hipóteses de  $f$  ser periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua, e

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

a sua série de Fourier, concluímos que essa série pode ser integrada termo a termo, ou seja, é válida a identidade 3.27, como queríamos demonstrar.



---

# CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

---

No capítulo anterior, fizemos um estudo preparatório para definir os coeficientes e a série de Fourier de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ . Para tal, a fim de que a série e os coeficientes estivessem bem definidos, exigimos condições sobre uma função  $f$  ser periódica, integrável e absolutamente integrável em um intervalo  $[-L, L]$ .

No presente capítulo, faremos a demonstração do Teorema de Fourier, isto é, que a série de Fourier converge pontualmente para uma função  $f$ , da qual exigimos ser seccionalmente contínua e diferenciável. Em outras palavras, mostraremos que a série de Fourier é que melhor aproxima uma função que satisfaz as hipóteses do Teorema de Fourier. Por fim, também demonstraremos a convergência uniforme da série de Fourier.

## 4.1 Preliminares

Para melhor compreender a convergência da série de Fourier que demonstraremos neste capítulo, vamos primeiro estudar as definições e propriedades sobre a convergência pontual e uniforme de uma série de funções.

### 4.1.1 Sequências e séries de funções

Definimos uma sequência de números reais como uma regra que a cada número natural  $n$  associa um número real denotado por  $x_n$  gerando a sucessão de números  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . A sequência numérica  $\{x_n\}$  tem limite  $L$  se para qualquer  $\varepsilon > 0$  existir um número  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que se  $n \geq n_0$ , então  $|x_n - L| < \varepsilon$ , e escrevemos  $L \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

De modo semelhante, uma *sequência de funções* associa cada natural  $n$  a uma função a valores reais  $f_n(x)$  definida num intervalo  $[a, b]$ , gerando uma sucessão de funções  $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ , para  $x \in [a, b]$ . No entanto, para sequências de funções, para cada  $x$  fixado, temos uma sequência numérica definida da qual estudaremos seu limite ou convergência nesta subseção.

**Definição 4.1.1.** Seja  $\{f_n\}$  uma sequência de funções definida em um intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Se em cada ponto  $x_0 \in [a, b]$ , e para qualquer  $\varepsilon > 0$  existir um  $n_0(x_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ sempre que } n > n_0(x_0, \varepsilon),$$

dizemos que a sequência de funções *converge pontualmente* para  $f(x)$ .

**Definição 4.1.2.** Seja  $\{f_n\}$  uma sequência de funções definida em um intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ sempre que } n > n_0(\varepsilon) \forall x \in [a, b],$$

dizemos que a sequência de funções *converge uniformemente* para  $f(x)$ .

Dizer que uma sequência de funções  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  converge significa dizer que, para todo ponto  $x_0 \in [a, b]$  fixado, definimos uma sequência de números reais  $\{f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0)\}$  no qual esta sequência converge para algum número real, isto é, se existir uma função  $f$  definida em  $[a, b]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

a função  $f(x)$  é chamada de *função limite* da sequência de funções.

Na definição de convergência pontual escrevemos explicitamente  $n_0(x_0, \varepsilon)$  para deixar evidente que o natural  $n_0$  pode assumir valores distintos para cada  $x \in [a, b]$ , mesmo mantendo fixo o valor de  $\varepsilon$ . Em outras palavras, cada sequência  $f_n(x)$  é independente da sequência  $f_n(\tilde{x})$ , ainda que os pontos  $x, \tilde{x} \in [a, b]$  estejam arbitrariamente próximos.

Por outro lado, o conceito de convergência uniforme de uma sequência de funções é mais forte. Nesse caso, a função  $n_0(x_0, \varepsilon)$  não depende de  $x_0 \in [a, b]$ . Assim, sempre que um número natural  $n$  for maior que  $n_0$ , temos que

$$n \geq n_0(x_0, \varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para qualquer  $x \in [a, b]$ . Geometricamente temos a seguinte interpretação. A desigualdade  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  equivale a

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

em todo intervalo  $[a, b]$  sempre que  $n > n_0(\varepsilon)$ . Dessa forma, o gráfico da função  $f_n(x)$  estará contido entre as curvas  $f(x) - \varepsilon$  e  $f(x) + \varepsilon$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que, a partir desse índice, os gráficos de todas as sequências  $f_n(x)$  estarão mais próximas do gráfico da função limite  $f(x)$  a menos de  $\varepsilon$ . Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 4.1.1.** Seja  $f_n(x) = x^n$  definida no intervalo  $[0, 1]$ .



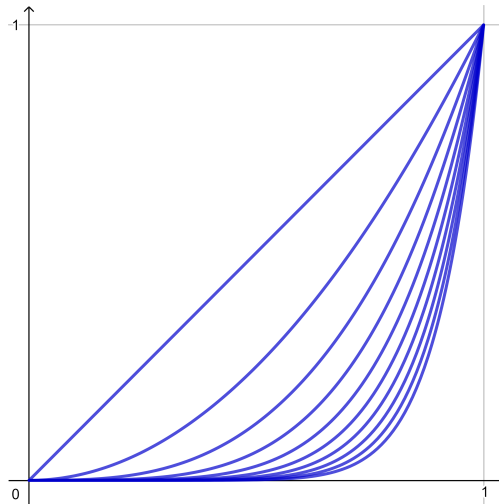


Figura 51 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções  $x^n$  no intervalo  $[0, 1]$ .

Se  $0 \leq x_0 < 1$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0)^n = 0$ , enquanto que se  $x_0 = 1$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1)^n = 1$ . Portanto essa sequência de funções converge pontualmente no intervalo fechado  $[0, 1]$  para a função limite

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

que é descontínua em  $[0, 1]$ . Observe que a convergência é uniforme no intervalo fechado da forma  $[0, 1 - \delta]$ , com  $0 < \delta < 1$ , mas não é uniforme em  $[0, 1]$ , que podem ser provadas por meio da definição. De fato, escrevendo  $a = 1 - \delta$ , temos  $0 < a < 1$ , logo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$ . Então  $n > n_0 \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq a^n < \varepsilon$  para todo  $x \in [0, a]$ . Portanto  $f_n$  converge uniformemente para a função  $f \equiv 0$  no intervalo  $[0, 1 - \delta]$ . Por outro lado, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , seja qual for  $n_0 \in \mathbb{N}$  existem pontos  $x \in [0, 1)$  tais que  $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$ , ou seja,  $x^{n_0} \geq \frac{1}{2}$ . Basta observar que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{n_0} = 1$ . Logo existe  $\delta > 0$  tal que  $1 - \delta < x < 1 \implies x^{n_0} > \frac{1}{2}$ . Isto mostra que  $f_n$  não converge uniformemente para  $f$  no intervalo  $[0, 1]$ .

**Exemplo 4.1.2.** Seja  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ .

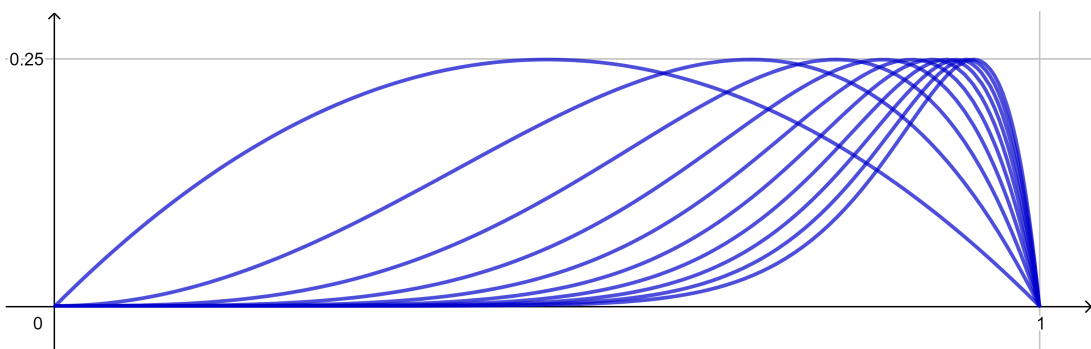


Figura 52 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções  $x^n(1 - x^n)$  no intervalo  $[0, 1]$ .

Essa sequência de funções converge pontualmente no intervalo  $[0, 1]$  para a função identicamente nula  $f \equiv 0$ , pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(1 - x^n) = 0.$$

Usando a Definição 4.1.1, dado  $\varepsilon > 0$ , vamos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies |f_n(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Temos que

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = x^n(1 - x^n) \leq x^n,$$

pois  $0 \leq x \leq 1$ . Assim, devemos escolher um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies x^n < \varepsilon$ . Logo

$$x^n < \varepsilon \iff n \log x < \log \varepsilon \iff n > \frac{\log \varepsilon}{\log x} = \log_x \varepsilon \geq \lceil \log_x \varepsilon \rceil \doteq n_0(x, \varepsilon).$$

Dessa forma, para todo  $n > n_0$ , segue que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |x^n| < |x^{n_0}| = |x^{\log_x \varepsilon}| = \varepsilon.$$

No entanto esta convergência não é uniforme em  $[0, 1]$ , pois para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos  $f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$  de modo que  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{4}, \forall n$ . Portanto, para  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ , nenhuma função  $f_n$  tem seu gráfico contido na faixa de raio  $\varepsilon$  em torno da função limite  $f(x) = 0$ . De fato, cada  $f_n$  compartilha dos mesmos valores de máximo e mínimo em cada um dos seus respectivos pontos críticos. Calculando-os tomando  $f'_n = 0$ , temos que

$$f'_n(x) = 0 \iff nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

Para  $x = 0$ , temos que  $f_n = 0$  é ponto de mínimo, pois  $f_n \geq 0, \forall n$ . Para  $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ , temos que  $f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}, \forall n$  é ponto de máximo. Logo, temos  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{4}, \forall n$ .

Por outro lado, temos  $f_n$  uniformemente convergente em  $[0, 1 - \delta]$ , pois pelo Exemplo 4.1.1,  $x^n$  converge uniformemente nesse intervalo e  $0 \leq x^n(1 - x^n) < x^n$ .

**Exemplo 4.1.3.** Seja a sequência de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ .

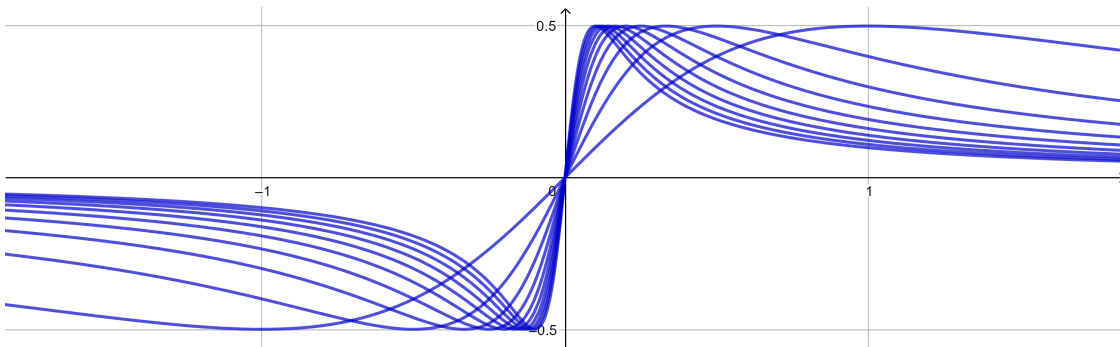


Figura 53 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ .

Esta sequência de funções converge pontualmente para a função limite identicamente nula  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . De fato, para cada  $x \in \mathbb{R}$  fixado, temos que

$$\frac{n|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{n|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n|x|},$$

e temos que  $\frac{1}{n|x|} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $x \neq 0$ . Se  $x = 0$ , temos  $f_n(0) = 0, \forall n$ .

No entanto, esta sequência de funções não converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ , pois  $\forall n \in \mathbb{N}$ , temos  $f_n(\pm\frac{1}{n}) = \pm\frac{1}{2}$  de modo que  $-\frac{1}{2} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}, \forall n$ . Portanto, tomando  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , nenhuma função  $f_n$  terá seu gráfico contido dentro da faixa de raio  $\varepsilon$  ao redor da função limite  $f(x) = 0$ . De fato, tomando  $f'_n(x) = 0$ , para calcular seus pontos críticos, temos que

$$f'_n(x) = \frac{(1+n^2x^2)n - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-nx)(1+nx)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Logo, os pontos críticos ocorrem nos pontos  $x = \pm\frac{1}{n}$ , que resulta  $f_n(\pm\frac{1}{n}) = \pm\frac{1}{2}$ , e portanto  $-\frac{1}{2} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}, \forall n$ .

**Proposição 4.1.1.** Sejam  $f_n$  e  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ , se e somente se,

$$e_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Suponha que  $f_n$  convirja uniformemente para  $f$ . Vamos mostrar que  $e_n \rightarrow 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos pela convergência uniforme de  $f_n$  que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in X.$$

Fixando  $n \geq n_0$ , temos

$$e_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

o que mostra que  $e_n \rightarrow 0$ .

Reciprocamente suponha  $e_n \rightarrow 0$ . Então dado  $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $e_n < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Logo pela definição de supremo segue que para todo  $x \in X$  e para todo  $n \geq n_0$ , temos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq e_n < \varepsilon,$$

o que prova que  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ . □

**Exemplo 4.1.4.** Seja a sequência de funções  $f_n : [0, 1]$  dada por  $f_n(x) = nxe^{-nx}$ .

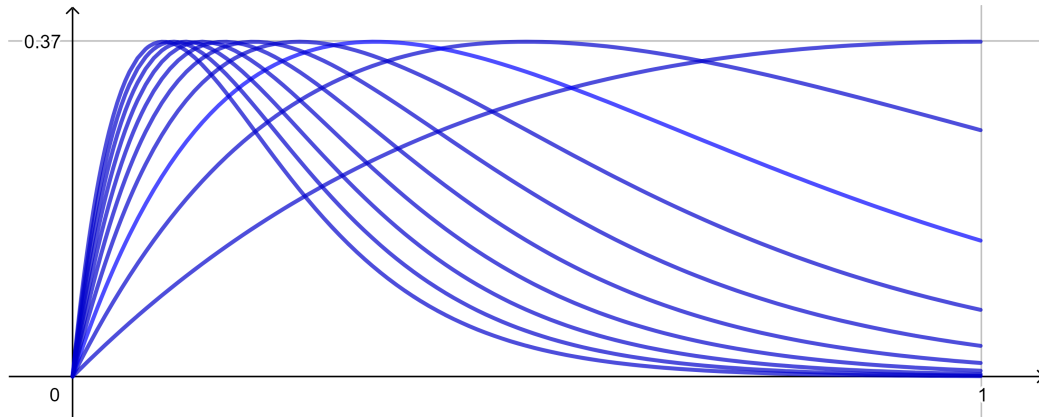


Figura 54 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções  $f_n(x) = nxe^{-nx}$ .

Temos que  $f_n$  converge pontualmente para a função nula  $f(x) = 0$ . De fato, usando a regra de L'Hopital, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{e^{nx}} = 0.$$

Usando a Proposição 4.1.1, temos que  $e_n = \sup_{x \in [0, 1]} \left[ \frac{nx}{e^{nx}} - 0 \right] = \sup_{x \in [0, 1]} \left[ \frac{nx}{e^{nx}} \right]$ . Procuramos os pontos críticos calculando-os por

$$f'(x) = \frac{n(1 - nx)}{e^{nx}} = 0,$$

de onde resulta  $x = \frac{1}{n}$ . Segue que

$$e_n = \frac{nx}{e^{nx}} \Big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0,$$

e portanto a sequência  $f_n$  não converge uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ .

**Teorema 4.1.1.** Se uma sequência de funções  $f_n$  contínuas no intervalo  $[a, b]$  convergem uniformemente para  $f$ , então a função limite é contínua em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Queremos mostrar a continuidade da função limite  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , isto é, para todo ponto  $x_0 \in [a, b]$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  sempre que  $|x - x_0| < \delta$ . Como a sequência  $f_n(x)$  converge uniformemente para  $f(x)$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ sempre que } n > n_0, \forall x \in [a, b].$$

Pela hipótese de que cada sequência  $f_n(x)$  é contínua, temos que para todo  $x_0 \in [a, b]$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ sempre que } |x - x_0| < \delta.$$

Logo se  $n > N$  e  $|x - x_0| < \delta$ , temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

**Teorema 4.1.2.** Seja  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções integráveis e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Se  $f_n$  converge uniformemente para  $F$ , então  $F$  é integrável e  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b F(x) dx$ . Em outras palavras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

*Demonstração.* Pela convergência uniforme, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

sempre que  $n > N$  para todo  $x \in [a, b]$ . Sejam

$$g_n(t) = \int_a^t f_n(x) dx \quad \text{e} \quad G(t) = \int_a^t F(x) dx.$$

Temos que

$$|g_n(t) - G(t)| = \left| \int_a^t [f_n(x) - F(x)] dx \right| \leq \int_a^t |f_n(x) - F(x)| dx.$$

Se  $n > N$ , então

$$|g_n(t) - G(t)| < \int_a^t \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \frac{(t-a)}{b-a} < \varepsilon$$

se  $t \in [a, b]$ . Portanto a sequência de termo geral  $g_n(t)$  converge uniformemente para  $G(t)$ , ou seja,  $G(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)$ , que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

□

**Exemplo 4.1.5.** Seja a sequência de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ . A sequência  $f_n$  converge uniformemente para a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x$ .

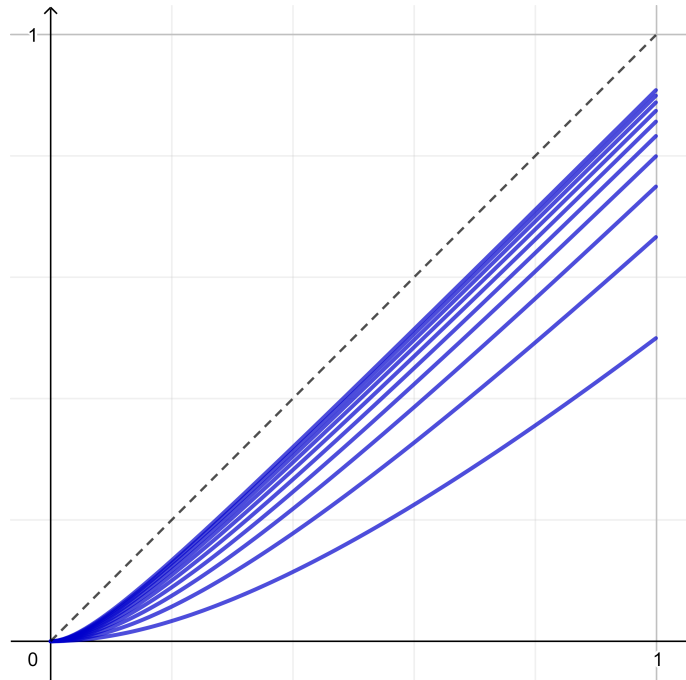


Figura 55 – Gráfico dos 10 primeiros termos da sequência de funções  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ .

De fato, como

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \frac{x}{1+nx}.$$

Usando a Proposição 4.1.1, temos

$$e_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{1+nx}.$$

Vamos analisar como se comporta a sequência  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ . Como

$$g_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

segue que  $g_n$  é crescente em seu domínio. Além disso,  $g_n$  é contínua em  $[0, 1]$ , e portanto

$$e_n = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{1+nx} = \sup_{x \in [0,1]} g_n(x) = g_n(1) = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0,$$

e portanto  $f_n$  converge uniformemente para  $f$  em  $[0, 1]$ . Deste modo, pelo Teorema 4.1.2, podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^2}{1+nx} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{1+nx} dx = \frac{1}{2}.$$

**Definição 4.1.3.** Uma sequência de funções  $f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *sequência de Cauchy* se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m, n \geq n_0$  implicar que  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in X$ .

A idéia geométrica desta definição é bastante simples: uma sequência  $f_n$  é dita de Cauchy, se dado um raio  $\varepsilon > 0$ , existir um índice  $n_0$  tal que a distância entre dois termos quaisquer da sequência, a partir do índice  $n_0$ , estarão próximos um do outro a menos de  $\varepsilon$  uniforme em  $X$ . Até o presente momento, para provar a convergência de uma sequência, precisávamos conhecer a priori o candidato a limite. O próximo teorema é um importante critério que permite decidir sobre a convergência de uma sequência sem a necessidade do conhecimento prévio do seu limite.

**Teorema 4.1.3** (Critério de Cauchy para sequência de funções). Uma sequência de funções  $f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f$ , se e somente se,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  for uma sequência de Cauchy.

*Demonstração.* Vamos supor que  $f_n$  converge uniformemente para a função limite  $f$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , pela Definição 4.1.2, temos que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $n > n_0$  e para todo  $x \in X$ . Logo, para  $m, n \geq n_0$ , temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo  $x \in X$ , ou seja,  $f_n$  é de Cauchy.

Por outro lado, vamos supor que  $f_n$  é uma sequência de Cauchy. Pela Definição 4.1.3, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ,  $\forall x \in X$  e  $\forall m, n \geq n_0$ . Como  $f_n(x_0)$  é uma sequência de Cauchy para cada  $x_0 \in X$  fixado, que é convergente em  $\mathbb{R}$ , existe um limite  $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ . Definindo  $f(x_0) = y_0$  para cada  $x_0$  fixado, definimos  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Queremos mostrar que  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ . Como  $f_n$  é uma sequência de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m, n \geq n_0, \quad \forall x \in X.$$

Fixando  $n \geq n_0$  e com  $x \in X$ , a desigualdade acima vale para todo  $m \geq n_0$ . Fazendo  $m$  tender ao infinito, obtemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in X,$$

o que prova que  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ . □

**Definição 4.1.4.** Seja  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções. A partir dessa sequência definimos uma nova sequência  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  chamada *soma parcial* de  $f_n$  dada por

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad \forall x \in X.$$

Se a sequência de somas parciais converge para  $S : X \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $x \in X$ , isto é,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

dizemos que a série converge pontualmente para  $S(x)$ . Dizemos também que a série converge uniformemente se  $s_n \rightarrow S$  uniformemente em  $X$ .

**Definição 4.1.5.** Dizemos que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  satisfaz o critério de Cauchy se e somente se as suas somas parciais  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  formarem uma sequência de Cauchy, ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de tal forma que se  $n > m \geq n_0$ , então

$$|S_n - S_m| \doteq \left| \sum_{k=m+1}^n f_k \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Como consequência, a série  $\sum f_k$  converge uniformemente se e somente se satisfizer o critério de Cauchy. O próximo teorema que enunciamos a seguir, chamado de *Teste M de Weirstrass*, é um critério de convergência alternativo para série de funções.

**Teorema 4.1.4** (Teste M de Weirstrass). Dada a sequência de funções  $f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $\sum M_n$  uma série convergente de números reais  $M_n > 0$  tais que  $|f_n(x)| < M_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in X$ . Nestas condições, as séries  $\sum |f_n|$  e  $\sum f_n$  convergem uniformemente.

*Demonstração.* Basta provar que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  é uma sequência de Cauchy, e portanto uniformemente convergente. De fato, temos

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m M_k \leq \varepsilon, \quad m \geq n \geq n_0, \forall x \in X$$

uma vez que  $\sum M_n$  é convergente, e portanto as somas parciais é uma sequência de Cauchy, o que demonstra o Teorema de Weirstrass. □

**Exemplo 4.1.6.** A série de funções  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  converge uniformemente para  $S(x) = \frac{1}{1-x}$  em qualquer intervalo da forma  $[-L, L]$ , com  $L < 1$ . De fato, definindo uma sequência  $f_n : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = x^n$ , temos que

(i)  $|f_n(x)| = |x^n| = |x|^n \leq L^n, \quad \forall x \in [-L, L].$

(ii) A série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} L^n = \frac{1}{1-L}$ , pois é uma série geométrica de razão entre 0 e 1.

Portanto, pelo Teste M de Weirstrass, a série de funções  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  converge uniformemente.

**Exemplo 4.1.7.** A série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$  converge uniformemente. De fato, definindo uma sequência  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ , temos que

(i)  $|f_n(x)| = \left| \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$



(ii) A série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.

Portanto, pelo Teste M de Weirstrass, a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$  converge uniformemente.

**Proposição 4.1.2.** Suponhamos que as funções  $f_n$  sejam contínuas e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  convirja uniformemente. Então a série  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  é também uma função contínua.

*Demonstração.* Como  $\{f_n\}$  é uma sequência de funções contínuas, então

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

também é uma sequência de funções contínuas. Mas

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x),$$

logo  $S(x)$  é o limite uniforme da sequência  $s_n(x)$ , e portanto, pelo Teorema 4.1.1,  $S(x)$  também é uma função contínua.  $\square$

**Proposição 4.1.3.** Seja  $\sum f_n$  uma série uniformemente convergente de funções integráveis  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  é integrável e

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

*Demonstração.* Seja  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$  e  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ . Como  $\sum f_n$  converge uniformemente, a sequência  $S_n$  converge uniformemente. Como  $S_n$  é integrável para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pois é uma soma finita de funções integráveis, então pelo Teorema 4.1.2, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx,$$

no qual

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_1(x) dx + \cdots + \int_a^b f_n(x) dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx. \end{aligned}$$

$\square$

### 4.1.2 Funções integráveis

Ao definir os coeficientes de Fourier e explicitar a série de Fourier de uma função  $f$ , exigimos que  $f$  seja periódica, integrável e absolutamente integrável no intervalo  $[a, b]$ . Explicaremos com mais detalhes essas noções.

**Definição 4.1.6.** Uma função  $f$  a valores reais é *limitada* em  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  se existe  $M > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

**Exemplo 4.1.8.** As funções  $\sin x$  e  $\cos x$  são limitadas em toda a reta, pois para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $|\sin x| \leq 1$  e  $|\cos x| \leq 1$ . Por outro lado, a função  $f(x) = x$  não é limitada na reta, mas é limitada em todo intervalo da forma  $[a, b]$ , pois para todo  $x \in [a, b]$ , temos  $|f(x)| \leq |b|$ .

**Definição 4.1.7.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é *integrável* no conjunto  $[a, b]$  se dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$  dada por

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_n = b,$$

tal que

$$S[f, P] - s[f, P] < \varepsilon,$$

no qual

$$S[f, P] := \sum_{j=1}^n M_j (x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup [f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j],$$

e

$$s[f, P] := \sum_{j=1}^n m_j (x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf [f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j].$$

Note que se  $f$  é limitada em  $[a, b]$ , então  $f$  será integrável nesse intervalo se o supremo das somas inferiores for igual ao ínfimo das somas superiores. Nesse sentido, se uma função é contínua na reta, ou mais geralmente, seccionalmente contínua em  $[a, b]$ , então ela é limitada nesse conjunto, e portanto integrável.

**Definição 4.1.8.** Dizemos que uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pertence ao conjunto  $\mathcal{L}^1([a, b])$  se  $f$  e  $|f|$  forem integráveis no conjunto  $[a, b]$ .

Note que  $\mathcal{L}^1([a, b])$  é um subespaço vetorial das funções  $f$  integráveis em  $[a, b]$ , pois estamos requisitando que  $|f|$  também seja integrável para que  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ . Uma função  $f$  a valores reais *limitada* em  $[a, b]$  é um exemplo elementar de uma função que pertence ao conjunto  $\mathcal{L}^1([a, b])$ . De fato, se essa função for limitada, então ela também será módulo integrável, pois

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq M \int_a^b 1 dx = M(b-a) < \infty.$$

Entretanto, não é verdade que uma função limitada e absolutamente integrável será também integrável em  $[a, b]$ . Por exemplo, considere a função definida como  $f(x) = 1$ , se  $x$  for racional,

e  $f(x) = -1$ , se  $x$  for irracional. Como em qualquer partição de um intervalo  $[a, b]$  existem infinitos números racionais e irracionais, essa função que é limitada, não será integrável em  $[a, b]$ , pois pela Definição 4.1.7,  $S[f, P]$  e  $s[f, P]$  possuem valores distintos 1 e  $-1$ . Porém em valores absolutos, a função resulta identicamente 1 que é obviamente absolutamente integrável em  $[a, b]$ .

Note também que não é verdade que toda função em  $\mathcal{L}^1([a, b])$  é limitada. Por exemplo, considere a função  $f(x) = x^{-\alpha}$ , com  $x \in ]0, 1]$  e  $f(0) = k$ , para algum  $k > 0$ . Esta função é integrável e absolutamente integrável no intervalo  $[0, 1]$  desde que  $0 < \alpha < 1$ . De fato, veja que:

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} < \infty \iff \alpha < 1.$$

Como  $f$  é positiva, temos  $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ . Por outro lado, essa função não é limitada, pois para  $\alpha > 0$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = \infty.$$

Note também que, se  $f$  não for limitada, a integrabilidade de  $f$  não implica em sua integrabilidade absoluta. Por exemplo, considere a função não-limitada  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = (-1)^n n, \quad \text{para } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Temos que

$$\int_{]0,1]} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (-1)^n n dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Esta série é dita *harmônica alternada*, da qual sabemos ser convergente pelo Teste da série Alternada. Desse modo, temos que  $\int_{]0,1]} f(x) dx < \infty$ . No entanto, ao calcular a integral de  $|f(x)|$ , temos que

$$\int_{]0,1]} |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

que é divergente, e portanto, não temos a integrabilidade absoluta de  $f$ .

Resumindo, há funções integráveis  $f$  tais que  $|f|$  não é integrável, bem como existem funções não-integráveis  $f$  tais que  $|f|$  é integrável.

**Definição 4.1.9.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pertence ao conjunto  $\mathcal{L}^2([a, b])$  se  $f$  e  $|f|^2$  forem integráveis em  $[a, b]$ . Nesse caso, dizemos que  $f$  é *quadrado integrável*.

Se  $f$  for limitada e integrável em  $[a, b]$ , então  $f$  também será quadrado integrável em  $[a, b]$ . De fato, se  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \int_a^b M^2 dx = M^2(b-a) < \infty.$$

No caso de  $f$  não ser limitada, pode acontecer que  $f$  pertença à  $\mathcal{L}^1([a, b])$ , mas não à  $\mathcal{L}^2([a, b])$ . Por exemplo, já vimos que a função  $f(x) = x^{-\alpha}$ , com  $x \in ]0, 1]$  e  $f(0) = k$ , para algum  $k > 0$  pertence à  $\mathcal{L}^1([0, 1])$  desde que  $0 < \alpha < 1$ . Investigaremos em quais condições  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$ . Temos que

$$\int_0^1 |x^{-\alpha}|^2 dx = \int_0^1 x^{-2\alpha} dx = \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \Big|_{x=0}^{x=1} < \infty \iff 1-2\alpha > 0.$$

Novamente como  $\alpha > 0$ , temos a restrição  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ . Desse modo temos que  $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$ . Portanto, concluímos que  $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ , mas  $f \notin \mathcal{L}^2([0, 1])$  para  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

No entanto, se  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$ , então necessariamente  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ . A demonstração desse fato é consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais.

**Teorema 4.1.5** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam  $f$  e  $g$  pertencentes à  $\mathcal{L}^2([a, b])$ . Então  $fg$  é absolutamente integrável e

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1)$$

Para demonstrar a assertiva anterior, usamos desigualdade (4.1) com  $g \equiv 1$ , e então obtemos

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}}.$$

Como por hipótese  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$ , então  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ . Da expressão anterior, concluímos que  $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ , e portanto,  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ .

Dizemos também que uma sucessão de funções  $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^2([a, b])$  converge em *média quadrática* para uma função  $f$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Como consequência, temos que a função limite  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$ . De fato

$$\int |f(x)|^2 dx \leq \underbrace{\int |(f_{n_0} - f)(x)|^2 dx}_{< \varepsilon} + \underbrace{\int |f_{n_0}(x)|^2 dx}_{< \infty}.$$

Denominamos a expressão  $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$  de *erro médio quadrático* na aproximação de  $f$  por  $f_n$ . Na Seção 4.3 que versa sobre a convergência uniforme da série de Fourier, mostraremos que as reduzidas da série de Fourier de uma função  $f$  quadrado integrável são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam  $f$  em média quadrática.

## 4.2 Convergência pontual da série de Fourier

O objetivo desta seção é demonstrar em detalhes a *convergência pontual* do Teorema de Fourier, isto é, mostraremos que se a soma parcial até o  $n$ -ésimo termo da série de Fourier é dada por

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left[ a_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + b_j \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right],$$

no qual  $a_0$ ,  $a_j$  e  $b_j$  são os coeficientes de Fourier, e definimos

$$e_n(x) := S_n(x) - \left[ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right], \quad (4.2)$$

então para cada  $x \in [-L, L]$  fixo, temos que

$$e_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

ou seja, para cada  $x \in [-L, L]$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$  tal que  $|e_n(x)| \leq \varepsilon$  para  $n \geq n_0$ .

### 4.2.1 Lema de Riemann - Lebesgue

Enunciaremos a seguir um importante resultado que nos auxiliará na demonstração da convergência pontual da série de Fourier.

**Lema 4.2.1** (Lema de Riemann Lebesgue). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{L}^1([a, b])$ . Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0, \quad (4.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0. \quad (4.4)$$

*Demonstração.* Vamos supor inicialmente que  $f$  seja limitada e integrável em  $[a, b]$  de acordo com a Definição 4.1.7. Tomemos em particular uma partição do intervalo  $[a, b]$  formado por subintervalos de tamanhos iguais  $[x_j, x_{j+1}]$  determinada pelos pontos  $x_j = a + j \frac{b-a}{n}$ , para  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , de forma que possamos escrever a integral em questão como uma soma de Riemann. Veja que

$$\int_a^b f(x) \sin(tx) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \sin(tx) dx.$$

Somando e subtraindo o termo  $f(x_j)$ , podemos reescrevê-la por

$$\int_a^b f(x) \sin(tx) dx = \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \sin(tx) dx. \quad (4.5)$$

Passemos então a tarefa de estimar o valor dessa expressão quando tomamos um  $n$  suficientemente grande. Observe que de um lado, podemos estimar o valor da integral  $\int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(tx) dx$  por

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(tx) dx \right| = \left| \frac{-\cos(tx)}{t} \right|_{x_{j-1}}^{x_j} = \frac{1}{t} \left| \cos(tx_j) - \cos(tx_{j-1}) \right|,$$

e pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
 |\cos(tx_j) - \cos(tx_{j-1})| &= |\cos(tx_j) + (-\cos(tx_{j-1}))| \\
 &\leq |\cos(tx_j)| + |-\cos(tx_{j-1})| \\
 &\leq |\cos(tx_j)| + |\cos(tx_{j-1})| \\
 &\leq 2, \forall t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dessa forma, obtemos um majorante superior para a integral, isto é,

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2}{t}. \tag{4.7}$$

Por outro lado, para estimar o valor de  $\int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx$ , observe que

$$m_j \leq f(x) \leq M_j, \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Em particular, para  $x = x_j$ , temos  $m_j \leq f(x_j)$ , ou equivalente  $-m_j \geq -f(x_j)$ . Sendo assim, usando a desigualdade triangular, podemos estimar

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j.$$

Veja que o termo  $|f(x) - f(x_j)|$  é majorado por um valor que não depende de  $x$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx \right| &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(x_j)| |\operatorname{sen}(tx)| dx \\
 &\leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} (M_j - m_j) dx \\
 &= (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando as estimativas (4.7) e (4.8) em (4.5), obtemos

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx$$

e assim,

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2Mn}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}). \tag{4.9}$$

Observe que o somatório dessa última expressão equivale à  $S[f, P] - s[f, P]$ . Agora, chamando  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ , e tomando o tamanho da partição  $P$  dada por  $\|P\| = \max\{\Delta x_j\}$ , no qual  $\Delta x_j = \frac{b-a}{n}$ , temos que

$$n \rightarrow \infty \iff \|P\| \rightarrow 0,$$

o que resulta

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j.$$

Como os limites acima são iguais, conclui-se que a diferença  $S[f, P] - s[f, P]$ , torna-se tão pequena quanto se deseja à medida que  $n$  tende ao infinito. Isto significa dizer que, como  $f$  é integrável, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Agora para algum  $\tilde{n}_0 \geq n_0$  fixado em (4.9), temos  $\frac{2M\tilde{n}_0}{t} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  de forma que

$$t_0 := \frac{4M\tilde{n}_0}{\varepsilon} \leq t.$$

Portanto, analisando a expressão (4.9), segue que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{para } t \geq t_0,$$

ou seja, considerando a hipótese de  $f$  ser limitada, acabamos de demonstrar que o limite desta integral é zero.

Analogamente, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0.$$

Agora usando um argumento de aproximação, ou seja, que toda função em  $\mathcal{L}^1([a, b])$  pode ser aproximada por uma função limitada, podemos estender a demonstração para toda função no conjunto  $\mathcal{L}^1([a, b])$ . Para tal, suponhamos que  $f$  seja uma função  $\mathcal{L}^1([a, b])$  qualquer, isto é, uma função não necessariamente limitada no intervalo  $[a, b]$ . Então dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \Psi(x)| dx < \varepsilon,$$

o que significa dizer que podemos aproximar uma função integrável  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$  por uma função contínua  $\Psi$  em  $\mathcal{L}^1([a, b])$ . Em particular, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos estimar

$$\int_a^b |f(x) - \Psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.10)$$

Agora, como toda função contínua  $\Psi$  num compacto  $[a, b]$  é limitada e integrável, podemos aplicar a primeira parte da nossa demonstração e concluir que existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\left| \int_a^b \Psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.11)$$

Portanto, como

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \int_a^b [f(x) - \Psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b \Psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx,$$

segue que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \Psi(x)| dx + \left| \int_a^b \Psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right|,$$

e usando os resultados (4.10) e (4.11), concluímos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

o que completa a demonstração do Lema de Riemann-Lebesgue.  $\square$

### 4.2.2 Estimativas para o erro $e_n(x)$

Vamos estimar o erro  $e_n(x)$  definido em (4.2). Para tal, vamos inicialmente encontrar uma outra expressão mais conveniente para  $S_n(x)$ . Substituindo as expressões dos coeficientes de Fourier em  $S_n(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{j\pi y}{L}\right) dy \\ &\quad + \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi y}{L}\right) dy \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi y}{L}\right) \right] f(y) dy. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade da diferença de cossenos (veja a identidade 2.4), segue que

$$S_n(x) = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{j\pi}{L}(x-y)\right) \right] f(y) dy.$$

Logo,

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy, \quad (4.12)$$

no qual

$$D_n(x-y) := \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{j\pi}{L}(x-y)\right) \right].$$

A expressão

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right] \quad (4.13)$$

é conhecido como *núcleo de Dirichlet*, e possui as seguintes propriedades:

- (i)  $D_n(x)$  é uma função par, pois o somatório de funções cosseno, que são pares, com a função constante  $f(x) = \frac{1}{2}$ , também é par.



(ii)  $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$ . De fato

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2L} dx + \sum_{j=1}^n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx.$$

Como  $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = 0$ , segue o resultado.

(iii)  $D_n(x)$  é uma função contínua, pois é obtida através de uma soma e composição finita de funções contínuas.

(iv)  $D_n(x) = D_n(x + 2L)$ , ou seja,  $D_n(x)$  é uma função periódica de período  $2L$ , pois é obtida através de uma composição de funções periódicas de período  $2L$ .

(v)  $D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}$ , para  $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

Vamos à prova desta última propriedade. Para tal, vamos mostrar que vale a seguinte afirmação

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (4.14)$$

De fato, usando a parte real do somatório  $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$  para reescrever o termo à esquerda, temos

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right) = \text{Re}(1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta}),$$

que é a soma de uma progressão geométrica de razão  $e^{i\theta}$ , com  $\theta \neq 0$ . Portanto, pela fórmula da soma finita de uma progressão geométrica dada por

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1.$$

Disto, segue que

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}(1 - e^{i\theta(n+1)})}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}.$$

Pela fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen} \theta$ , temos que

$$e^{i\frac{\theta}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$e^{-i\frac{\theta}{2}} = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i \text{sen}\left(-\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

que resulta

$$e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} = -2i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} &= \frac{[\cos(\frac{\theta}{2}) - i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})] - [\cos(\theta(n + \frac{1}{2})) - i \operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2}))]}{-2i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{i [\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos(\theta(n + \frac{1}{2})) - i (\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) + \operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2})))]}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) + \operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2}))}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} + i \frac{\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos(\theta(n + \frac{1}{2}))}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}. \end{aligned}$$

Logo, igualando a parte real da identidade anterior, temos que

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) + \operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2}))}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}.$$

A fim de que essa expressão se ajuste à fórmula do núcleo de Dirichlet dado em (4.2.2), basta subtrair  $\frac{1}{2}$  de ambos os lados da identidade acima, e assim temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) &= \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) + \operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2}))}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) + \operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2})) - \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2}))}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ , concluímos que

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] = \frac{1}{L} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\theta(n + \frac{1}{2}))}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} \right] = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{L})}{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2L})},$$

como queríamos demonstrar.

Voltando agora para a identidade (4.12), e fazendo a mudança de variável  $y = x - t$ , temos  $dy = -dt$ . Observando os limites de integração, quando  $y = L$ , temos  $t = -L + x$ , e quando  $y = -L$ , temos  $t = L + x$ , o que nos permite escrever

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy = \int_{L+x}^{-L+x} D_n(t) f(x-t) (-dt) = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt.$$

Como  $D_n(x)$  e  $f$  são periódicas de período  $2L$ , pela Propriedade (2.1.4), a soma parcial  $S_n(x)$  pode ser escrita por

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x-t) dt.$$

Dividindo o intervalo de integração e usando uma mudança de variável apropriada  $t = -\tilde{t}$  para o primeiro termo, obtemos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{-L}^0 D_n(t) f(x-t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt \\ &= \int_L^0 D_n(-\tilde{t}) f(x+\tilde{t}) (-d\tilde{t}) + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt \\ &= \int_0^L D_n(-\tilde{t}) f(x+\tilde{t}) d\tilde{t} + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato que  $D_n(x)$  é uma função par, isto é,  $D_n(-\tilde{t}) = D_n(\tilde{t})$ , segue que

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^L D_n(\tilde{t}) f(x+\tilde{t}) d\tilde{t} + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt \\ &= \int_0^L D_n(t) f(x+t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt. \end{aligned}$$

Dessa forma,  $S_n(x)$  pode finalmente ser escrita como

$$S_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \quad (4.15)$$

Voltemos para a tarefa de estimar erro  $e_n(x)$  dado em (4.2). Para tal, atente-se que, usando as Propriedades (i) e (ii) de  $D_n(t)$ , temos

$$1 = \int_{-L}^L D_n(t) dt = 2 \int_0^L D_n(t) dt \implies \int_0^L D_n(t) dt = \frac{1}{2}$$

e, substituindo o valor desta última integral e a expressão (4.15) na expressão do erro  $e_n(x)$  obtemos

$$\begin{aligned} e_n(x) &= S_n(x) - \left[ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right] \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \int_0^L D_n(t) [f(x^+) + f(x^-)] dt \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)] dt. \end{aligned}$$

Definindo

$$g(x, t) := [f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)] \quad (4.16)$$

uma função de duas variáveis, finalmente temos uma expressão para o erro  $e_n(x)$  dada por

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) g(x, t) dt. \quad (4.17)$$

De posse da expressão da função erro  $e_n(x)$ , vamos utilizar o Teorema 4.2.2 para concluir a demonstração do Teorema de Fourier.

### 4.2.3 Teste de Dini

**Teorema 4.2.2** (Teste de Dini). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e  $f \in \mathcal{L}^1([-L, L])$ . Fixado  $x \in [-L, L]$ , suponha que  $f(x^+)$  e  $f(x^-)$  existam, e que exista algum  $\eta > 0$  tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (4.18)$$

no qual  $g(x, t)$  é definido por (4.16). Então  $e_n(x) \rightarrow 0$  quando  $\eta \rightarrow \infty$ . Em outras palavras,

$$\left[ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ a_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + b_j \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right].$$

Vamos aplicar o teste de Dini para concluir a convergência pontual da série de Fourier. No entanto, precisamos primeiramente justificar a existência da integral  $\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty$  para algum  $\eta > 0$ , no qual  $g(x, t)$  é dado por (4.16), ou seja, precisamos impor condições sobre a função  $f$  de tal maneira que a função  $g(x, t)$  satisfaça as condições da integral dada em (4.18). Iremos exhibir alguns casos em que essa condição é satisfeita.

(a) Suponha que  $f$  seja Hölder contínua numa vizinhança do ponto  $x$ , isto é, que existam constantes  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$  e  $M > 0$  tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|^\alpha, \quad \forall t, s \in (x - \delta, x + \delta).$$

Como uma função Hölder contínua é por definição, uma função contínua, temos que os limites laterais da  $f$  coincidem com o valor da função no ponto, ou seja,  $f(x^+) = f(x)$  e  $f(x^-) = f(x)$ , o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} |g(x, t)| &= |f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)| \\ &= |f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)| \\ &\leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \\ &\leq M|x+t-x|^\alpha + M|x-t-x|^\alpha \\ &\leq 2Mt^\alpha, \quad |t| \leq \delta. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \int_0^\delta \left| \frac{2Mt^\alpha}{t} \right| dt \leq 2M \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = 2M\delta^\alpha < \infty.$$

Portanto, como  $\alpha > 0$ , mostramos que essa integral é finita, valendo a propriedade do teste de Dini para  $\eta = \delta$ .

(b) Suponha que  $f$  possua derivada limitada numa vizinhança de um ponto  $x$ , digamos  $[x - \delta, x + \delta]$ . Portanto, pela Desigualdade do Valor Médio

$$|f(x+t) - f(x)| \leq |t| |f'(c)| \leq |t| M, \quad \text{para algum } c \in [x-t, x+t] \text{ e } |t| \leq \delta.$$

Assim, temos que

$$\frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} \leq M, \quad \forall |t| < \delta.$$

Analogamente,

$$\frac{|f(x-t) - f(x)|}{|t|} \leq M, \quad \forall |t| < \delta.$$

Portanto,

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt \leq \int_0^\delta \left| \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} \right| dt + \int_0^\delta \left| \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t} \right| dt \leq 2M\delta < \infty,$$

e também satisfaz a propriedade do teste de Dini para  $\eta = \delta$ .

(c) Por fim, suponha  $f$  seccionalmente diferenciável, o que significa dizer que tanto a função  $f$  quanto a sua derivada são seccionalmente contínuas. Isto quer dizer que em uma quantidade finita de pontos a função pode deixar de ser derivável em um intervalo fixado, mas existem os seguintes limites laterais

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad \text{e} \quad f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x-t) - f(x)}{t}.$$

Vamos relembrar uma propriedade do Cálculo Diferencial e Integral na reta. Se uma função  $h(x)$  possui limites laterais, então essa função é limitada em uma vizinhança do ponto, isto é, toda função cujo limite existe em um ponto, é limitada localmente nesse ponto. De fato, se  $h$  possui limite em um ponto  $x_0$ , ou seja, pela definição

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \equiv \text{dado } \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon.$$

então

$$|h(x)| = |h(x) - L + L| \leq |h(x) - L| + |L| \leq \varepsilon + |L| = M.$$

Logo  $|h(x)| \leq M, \forall x$  tal que  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

Portanto, se  $f$  é uma função seccionalmente diferenciável, os limites laterais acima existem, e as funções  $\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$  e  $\frac{f(x-t) - f(x)}{t}$  são limitadas, logo estamos nas condições do item (b), e as condições do teste de Dini também estão satisfeitas.

Veremos adiante que além de todas as condições já impostas sobre a  $f$  para a validade do Teorema de Fourier, precisaremos de mais uma condição adicional, a saber, que  $f$  seja seccionalmente diferenciável. Recorde que até agora exigimos apenas que  $f$  fosse seccionalmente contínua. Vamos agora de fato à demonstração do teste de Dini.

*Demonstração.* Vamos reescrever da seguinte maneira o erro  $e_n(x)$  dado em (4.17), tomando para tal  $\delta \in (0, L)$  convenientemente pequeno, que será fixado mais adiante.

$$e_n(x) = \underbrace{\int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt}_{(I)} + \underbrace{\int_\delta^L D_n(t) g(x,t) dt}_{(II)}. \quad (4.19)$$

Inicialmente, vamos estimar (I). Utilizando a identidade (v) das propriedades de  $D_n(x)$ , para  $t \in (0, L]$ , temos que

$$|tD_n(t)| = \left| \frac{1}{2L} \frac{t \operatorname{sen} \left( (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{L} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} \right| \leq \frac{t}{2L \left| \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right) \right|}$$

Note que como  $0 < t \leq L$ , então  $0 < \left( \frac{\pi t}{2L} \right) \leq \frac{\pi}{2}$ , que resulta

$$0 = \operatorname{sen} 0 < \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right) \leq \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Logo, como  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right) > 0$ , podemos escrever

$$|tD_n(t)| \leq \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}.$$

Precisamos fazer algumas considerações a respeito da função do segundo membro da desigualdade acima. Observe que a função

$$f(t) = \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}$$

é contínua e estritamente crescente no intervalo fechado  $[0, L]$ . De fato, é contínua pois é a divisão entre funções contínuas, desde que o denominador não se anule, e é estritamente crescente, isto é, se  $t_1 < t_2$ , então  $f(t_1) < f(t_2)$ , pois  $f'(t) > 0$ ,  $\forall t \in [0, L]$ . Basta provarmos que a derivada dessa função é estritamente positiva nesse intervalo. Veja que

$$f'(t) = \frac{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right) - \pi t \cos \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}{4L^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} > 0$$

é equivalente à

$$2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right) > \pi t \cos \left( \frac{\pi t}{2L} \right) \iff \operatorname{tg} \left( \frac{\pi t}{2L} \right) > \frac{\pi t}{2L}, \quad \forall t \in (0, L].$$

Portanto, como  $f(t)$  é contínua e estritamente crescente para  $t \in [0, L]$ , obtemos para  $t = L$  um limitante superior para  $f(t)$  dado por  $f(L) = \frac{1}{2}$ , o que nos permite obter a estimativa

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para } t \in [0, L]. \quad (4.20)$$

De outro modo, tomando o limite fundamental  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ , com  $x = \frac{\pi t}{2L}$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}{\frac{\pi t}{2L}} = 1 \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} = 1.$$

Logo, para  $t \in [0, L]$ , dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \tilde{\delta} > 0$  tal que

$$0 < \left| \pi \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} - 1 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} \right| < \frac{\varepsilon + 1}{\pi}, \text{ sempre que } |t| < \tilde{\delta}.$$

Dessa forma, com a escolha conveniente  $\varepsilon = \frac{\pi-2}{2}$  temos para  $0 < t < \tilde{\delta}$ , que

$$|t D_n(t)| \leq \frac{t}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} < \frac{1}{2},$$

que corrobora a estimativa dada em (4.20). É necessário lembrar que por hipótese, temos  $\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , fixamos  $\delta < \min(\tilde{\delta}, \eta)$  tal que

$$\left| \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vamos agora estimar (II) em (4.19) com  $\delta > 0$  fixado em (I). Temos que

$$\int_\delta^L D_n(t) g(x,t) dt = \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x,t)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} dt.$$

Definindo a função

$$h_x(t) = \left[ 2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right) \right]^{-1} g(x,t),$$

vamos utilizar o Lema de Riemann Lesbegue para analisar a convergência de

$$\int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] h_x(t) dt$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que  $n \rightarrow +\infty \iff \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \rightarrow +\infty$ . Dessa forma, a fim de que o lema possa ser aplicado, basta verificar que  $h_x(t)$  satisfaz as hipóteses deste lema, isto é, que  $h_x(t) \in \mathcal{L}^1([\delta, L])$ . Para isso, note que

(a) A função  $\left[ 2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right) \right]^{-1}$  é contínua e não se anula em  $[\delta, L]$ . Portanto existe um  $M > 0$  tal que  $\left| 2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right) \right|^{-1} \leq M$  para todo  $t \in [\delta, L]$ , uma vez que toda função contínua num conjunto compacto é limitada, e dessa forma, a função é integrável no compacto  $[\delta, L]$ .

(b)  $g(x,t) \in \mathcal{L}^1([\delta, L])$ . De fato, observe inicialmente que, para  $t \in [0, \eta]$ ,

$$\int_0^\eta |g(x,t)| dt = \int_0^\eta |t| \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt \leq \eta \int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty.$$

Portanto, como  $h$  satisfaz as hipóteses do lema de Riemann Lesbegue, dado um  $n_0$  suficientemente grande, segue que

$$\left| \int_\delta^L \operatorname{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right) h_x(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Finalmente, substituindo as estimativas de (I) e (II) em (4.19), obtemos

$$|e_n(x)| \leq \left| \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt \right| + \left| \int_\delta^L D_n(t) g(x,t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Desta maneira, fica provado o Teste de Dini. □

### 4.3 Convergência uniforme das séries de Fourier

Na seção anterior, fizemos a demonstração da convergência pontual da série de Fourier de uma dada função  $f$ . Nesta seção, determinaremos as condições necessárias e suficientes para que a convergência da série de Fourier seja uniforme em um intervalo  $[a, b]$ .

#### 4.3.1 Desigualdade de Bessel

Denotaremos nesse momento por  $s_n(x)$  a soma parcial da série de Fourier dada por

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left[ a_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + b_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right],$$

no qual  $a_0$ ,  $a_j$  e  $b_j$  são os coeficientes de Fourier. Queremos mostrar que essa soma é a melhor que aproxima  $f$  em norma  $\mathcal{L}^2[-L, L]$ , ou seja, se existe uma função que melhor aproxima  $f$  em média quadrática, então o polinômio trigonométrico  $s_n(x)$  é o candidato. Em outras palavras, se  $t_n(x)$  é outra soma qualquer dada por

$$t_n(x) := \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left[ c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right],$$

no qual  $c_0$ ,  $c_j$  e  $d_j$  são coeficientes quaisquer, então temos

$$\int_{-L}^L |f(x) - t_n(x)|^2 dx \geq \int_{-L}^L |f(x) - s_n(x)|^2 dx. \quad (4.21)$$

De fato, note que o termo à esquerda dessa desigualdade pode ser reescrito por

$$\int_{-L}^L |f(x) - t_n(x)|^2 dx = \int_{-L}^L [ |f(x)|^2 + |t_n(x)|^2 - 2f(x)t_n(x) ] dx. \quad (4.22)$$

Agora precisamos explicitar cada um desses termos. Por um lado, temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L 2f(x)t_n(x) dx &= \int_{-L}^L 2f(x) \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left[ c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right] \right\} dx \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \left[ c_j \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx + d_j \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &\quad + c_0 \int_{-L}^L f(x) dx \\ &= 2 \sum_{j=1}^n [c_j(La_j) + d_j(Lb_j)] + c_0(La_0) \\ &= 2L \sum_{j=1}^n (a_j c_j + b_j d_j) + La_0 c_0 \end{aligned} \quad (4.23)$$



Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L |t_n(x)|^2 dx &= \int_{-L}^L \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left[ c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right] \right\}^2 dx \\
 &= \int_{-L}^L \left\{ \left(\frac{c_0}{2}\right)^2 dx + 2 \frac{c_0}{2} \sum_{j=1}^n \left[ c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \sum_{j=1}^n c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right]^2 \right\} dx \\
 &= L \frac{c_0^2}{2} + c_0 \sum_{j=1}^n c_j \int_{-L}^L \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx + c_0 \sum_{j=1}^n d_j \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{-L}^L \left[ c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right]^2 dx.
 \end{aligned}$$

Como  $\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = 0$  (veja Exemplo 2.2.4), segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L |t_n(x)|^2 dx &= L \frac{c_0^2}{2} + \sum_{j=1}^n \int_{-L}^L \left[ c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right]^2 dx \\
 &= L \frac{c_0^2}{2} + \sum_{j=1}^n \int_{-L}^L \left[ c_j^2 \cos^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + 2c_j \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) d_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + d_j^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right] dx \\
 &= L \frac{c_0^2}{2} + \sum_{j=1}^n c_j^2 \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx + \sum_{j=1}^n d_j^2 \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
 &\quad + 2 \sum_{j=1}^n c_j \int_{-L}^L \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \sum_{j=1}^n d_j \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx.
 \end{aligned}$$

Como  $\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = L$  (veja as relações de ortogonalidade 2.16 e 2.17), e usando novamente o Exemplo 2.2.4, obtemos que

$$\int_{-L}^L |t_n(x)|^2 dx = L \frac{c_0^2}{2} + L \left[ \sum_{j=1}^n (c_j^2 + d_j^2) \right]. \quad (4.24)$$

Analogamente, também podemos mostrar que

$$\int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx = L \frac{a_0^2}{2} + L \left[ \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) \right], \quad (4.25)$$

que será útil mais adiante. Finalmente, substituindo as expressões (4.23) e (4.24) em (4.22), obtemos

$$\int_{-L}^L |f(x) - t_n(x)|^2 dx = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx + L \frac{c_0^2}{2} + L \sum_{j=1}^n (c_j^2 + d_j^2) - 2L \sum_{j=1}^n (a_j c_j + b_j d_j) - L a_0 c_0.$$

Usando o completamento de um quadrado perfeito, podemos reescrever essa última expressão por

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L |f(x) - t_n(x)|^2 dx &= \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx + \left( L \frac{c_0^2}{2} - L a_0 c_0 + \frac{L}{2} a_0^2 \right) - \frac{L}{2} a_0^2 \\ &+ \left( L \sum_{j=1}^n (c_j^2 + d_j^2) - 2L \sum_{j=1}^n (a_j c_j + b_j d_j) + L \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) \right) \\ &- L \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) \\ &= \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx + L \sum_{j=1}^n [(c_j - a_j)^2 + (d_j - b_j)^2] + \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 \\ &- L \sum_{j=1}^n [a_j^2 + b_j^2] - \frac{L}{2} a_0^2. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão (4.25) finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L |f(x) - t_n(x)|^2 dx &= \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx + L \sum_{j=1}^n [(c_j - a_j)^2 + (d_j - b_j)^2] + \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 \\ &- \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Como o lado direito da expressão acima é um valor positivo, pois representa o valor da integral à esquerda, e assume um valor mínimo para  $c_j = a_j$  e  $d_j = b_j$ , concluímos que

$$\int_{-L}^L |f(x) - t_n(x)|^2 dx \geq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx = \int_{-L}^L |f(x) - s_n(x)|^2 dx$$

como queríamos demonstrar em (4.21).

Além disso, temos que

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx \geq 0,$$

ou

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \geq \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx.$$

Substituindo a expressão (4.25), finalmente obtemos a expressão

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) \quad (4.26)$$

chamada de *desigualdade de Bessel*.

### 4.3.2 Estimativas dos coeficientes de Fourier

Mostraremos nessa seção como obter algumas estimativas para os coeficientes de Fourier de uma certa função, a partir de hipóteses de diferenciabilidade da mesma. Consideremos três seguintes casos:

(i) Suponha  $f$  uma função periódica de período  $2L$  e  $f \in \mathcal{L}^1$ , isto é,  $f$  e  $|f|$  são integráveis em  $[-L, L]$ . Podemos obter de imediato as seguintes estimativas

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx. \quad (4.27)$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx. \quad (4.28)$$

onde usamos o fato de que as funções seno e cosseno são limitadas absolutamente por 1. Portanto, pela hipótese de integrabilidade de  $f$  e  $|f|$ , existe uma constante  $M$ , a saber,

$$M = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

tal que

$$|a_n| \leq M, \quad |b_n| \leq M, \quad \text{para todo } n.$$

(ii) Suponhamos agora que  $f$  seja uma função periódica de período  $2L$ , contínua, derivável, e que  $f' \in \mathcal{L}^1$ , isto é,  $f'$  e  $|f'|$  são integráveis em  $[-L, L]$ . Então integrando por partes, tomando  $u = f(x)$  e  $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  temos, para  $n \geq 1$

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Usando (2.2.4) da página 31, segue que

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (4.29)$$

e, tomando os valores absolutos, obtemos

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

De modo análogo, temos

$$Lb_n = \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

que resulta

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (4.30)$$

e, tomando os valores absolutos, obtemos

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Portanto, pela hipótese de integrabilidade de  $f'$  e  $|f'|$ , concluímos que existe uma constante  $M$ , a saber

$$M = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx,$$

tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

(iii) Se supusermos por fim que  $f$  seja periódica de período  $2L$  com primeira derivada contínua, e que  $f'' \in \mathcal{L}^1$ , isto é,  $f''$  e  $|f''|$  são integráveis em  $[-L, L]$ , podemos melhorar as estimativas (4.34) realizando mais uma integração por partes em (4.29) e (4.30). De fato, em (4.29), tomando  $u = f'(x)$  e  $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ , obtemos

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left\{ -f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\},$$

que resulta

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (4.32)$$

e daí,

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

De modo análogo, integrando por partes (4.30) tomando  $u = f'(x)$  e  $dv = dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ , obtemos

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left\{ f'(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\},$$

que resulta

$$b_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (4.33)$$

e daí,

$$|b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Portanto, pela hipótese de integrabilidade de  $f''$  e  $|f''|$ , concluímos que existe uma constante  $M$ , a saber

$$M = \frac{L}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx,$$

tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

Feitas as estimativas, podemos relacionar os coeficientes de Fourier das funções  $f$ ,  $f'$  e  $f''$ . De fato, chamando de  $a'_n$  e  $b'_n$  os coeficientes de  $f'$ , isto é

$$a'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{e} \quad b'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

podemos substituí-los nas expressões (4.29) e (4.30) para obtermos

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b'_n, \quad b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n. \quad (4.35)$$

Da mesma forma, chamando de  $a_n''$  e  $b_n''$  os coeficientes de  $f''$ , isto é

$$a_n'' = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{e} \quad b_n'' = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

podemos substituí-los nas expressões (4.32) e (4.33) para obtermos

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} a_n'', \quad b_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} b_n'', \quad n \geq 1. \quad (4.36)$$

### 4.3.3 Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da série de Fourier

Nessa seção estudaremos as condições suficientes sobre uma função  $f$  de período  $2L$  que garantam a convergência uniforme de sua série de Fourier.

Enunciaremos e demonstraremos o seguinte teorema.

**Teorema 4.3.1** (Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da série de Fourier). Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua e com primeira derivada integrável e absolutamente integrável. Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ .

*Demonstração.* Seja

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

a série de Fourier de  $f$ . Como

$$\left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq |a_n|, \quad \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq |b_n|,$$

devemos ver em quais condições a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad (4.37)$$

converge. Observamos as estimativas dos coeficientes em (iii) da seção 4.3.2 que, caso a função  $f$  tenha derivada primeira contínua e a derivada segunda seja uma função  $\mathcal{L}^1[-L, L]$ , então a série (4.37) é majorada pela série  $M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , a qual sabemos convergir. No entanto, podemos provar a convergência de (4.37) sob condições menos restritivas sobre  $f$ . De fato, supondo que  $f$  seja apenas contínua e que a derivada primeira seja uma função  $\mathcal{L}^1$ , usando as estimativas (4.35)

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b_n', \quad b_n = \frac{L}{n\pi} a_n',$$

no qual  $a_n'$  e  $b_n'$  são os coeficientes de Fourier de  $f'$ , temos que a soma reduzida de ordem  $n$  da série (4.37) é dada por

$$\sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) = \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a_j'| + |b_j'|),$$

e pela *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* é majorada por

$$\frac{L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Como

$$(|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

e também pela *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*, obtemos

$$\frac{L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n 2(|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, a série (4.37) é majorada por

$$\frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

no qual ambas as séries convergem, a segunda convergindo em decorrência da *Desigualdade de Bessel*. Logo, pelo *Teste M de Weierstrass*, temos que

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

é uniforme e absolutamente convergente em toda reta, o que completa a demonstração do teorema.  $\square$

#### 4.3.4 Segundo Teorema sobre a Convergência Uniforme da série de Fourier

Observe que o teorema que acabamos de demonstrar requer que a função  $f$  seja contínua em toda reta. Caso a função seja descontínua num ponto  $x_0$ , a série de Fourier não pode convergir uniformemente para  $f$  em nenhum intervalo que contenha  $x_0$ , isso porque sabemos da *Proposição 4.1.2* que o limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas (no caso, as reduzidas  $s_n(x)$  da série de Fourier de  $f$ ) é uma função contínua (no caso, a própria  $f$ .) Logo para termos a convergência uniforme da série de Fourier em toda a reta, a função  $f$  deve ser necessariamente contínua. Mas aí surge uma pergunta: e se  $f$  for contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , será verdade que a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  nesse intervalo  $[a, b]$ ? A resposta para essa pergunta é que sim, ou seja, que vale o seguinte teorema.

**Teorema 4.3.2** (Segundo Teorema sobre a Convergência Uniforme da série de Fourier). Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e tal que a primeira derivada seja integrável e absolutamente integrável. Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade da  $f$ .

A demonstração deste teorema utiliza o lema a seguir, que será provado posteriormente.

**Lema 1.** Seja  $\psi$  a função periódica de período  $2L$  definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right), & -L \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), & 0 < x \leq L \end{cases} \quad (4.38)$$

Então a série de Fourier de  $\psi$  converge uniformemente para  $\psi$  em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma  $2Ln$ , para  $n$  inteiro.

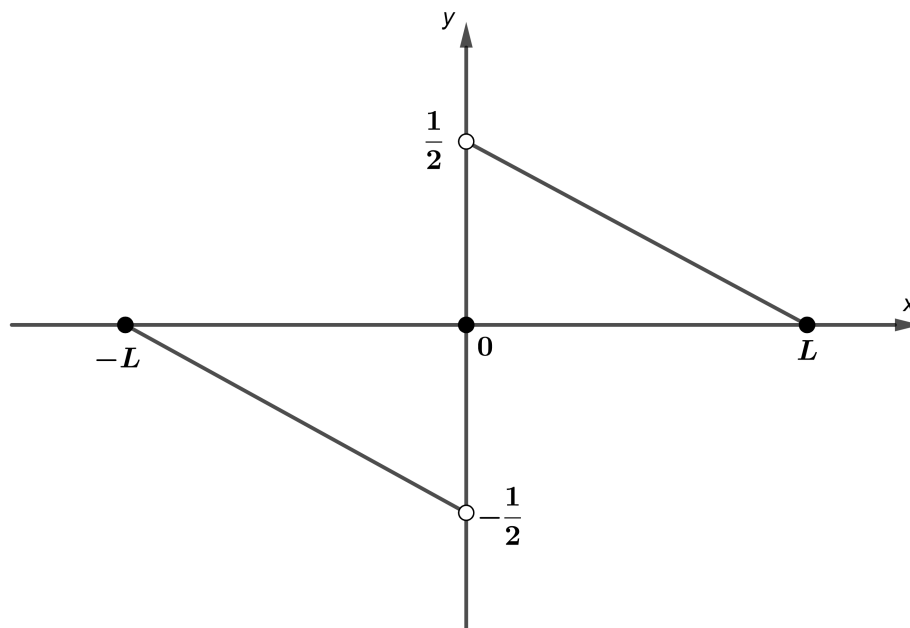


Figura 56 – Gráfico de  $\psi$  no intervalo  $[-L, L]$ .

*Demonstração do Teorema.* Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k$  os pontos de descontinuidade da função  $f$  no intervalo  $[-L, L]$ . Como  $f$  é seccionalmente contínua, existem e são finitos os limites laterais  $f(x_j^+)$  e  $f(x_j^-)$  em cada ponto  $x_j$ . Sejam

$$w_j = f(x_j^+) - f(x_j^-) \quad (4.39)$$

a diferença entres esses limites laterais, ou seja, o tamanho do salto da função em cada ponto  $x_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Definamos uma função  $g_j(x)$  construída por meio de uma translação horizontal da função  $\psi(x)$  (definida em 4.38) por uma distância  $x_j$ , que desloca  $\psi$  sobre cada ponto de descontinuidade  $x_j$ , seguida de uma amplificação pelo salto  $w_j$ , isto é,

$$g_j(x) = w_j \psi(x - x_j) \quad (4.40)$$

que pode ser escrita explicitamente por

$$g_j(x) = \begin{cases} -\frac{w_j}{2} \left(1 + \frac{x-x_j}{L}\right), & -L \leq x-x_j < 0 \\ 0, & x = x_j \\ \frac{w_j}{2} \left(1 - \frac{x-x_j}{L}\right), & 0 < x-x_j \leq L \end{cases}$$

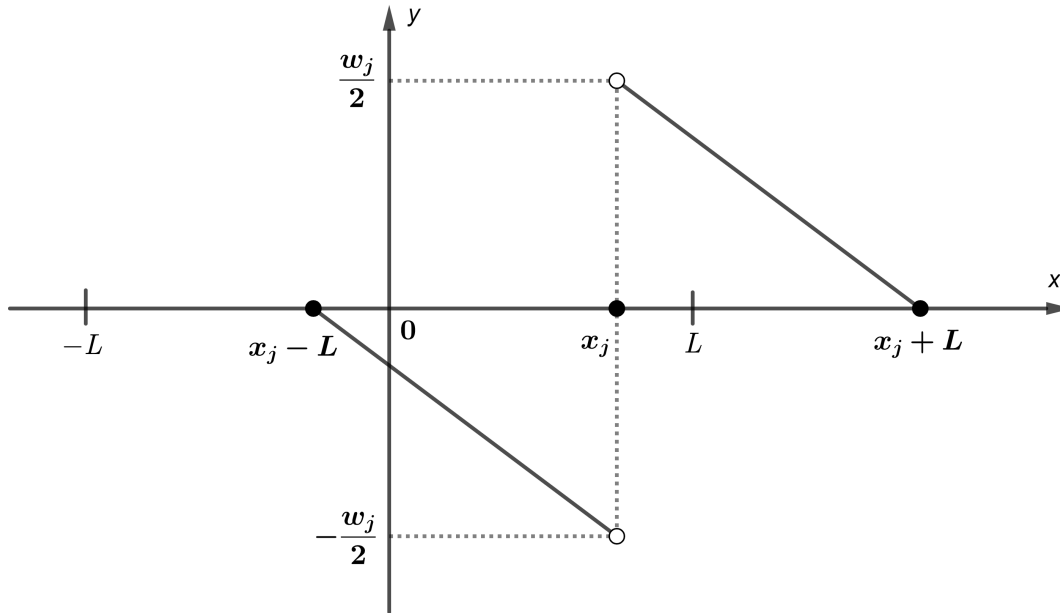


Figura 57 – Gráfico de  $g_j(x)$  no intervalo  $[x_j - L, x_j + L]$ .

A função  $g_j(x)$  é periódica de período  $2L$  e é descontínua nos pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Além disso, o tamanho do salto nesses pontos é  $w_j$ . De fato, veja que

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} g_j(x) = \lim_{x \rightarrow x_j^+} \frac{w_j}{2} \left(1 - \frac{x-x_j}{L}\right) = \frac{w_j}{2},$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_j^-} g_j(x) = \lim_{x \rightarrow x_j^-} -\frac{w_j}{2} \left(1 + \frac{x-x_j}{L}\right) = -\frac{w_j}{2}.$$

A família de funções  $g_j(x)$  foi definida de tal modo que cada função  $f(x) - g_j(x)$  seja contínua no ponto  $x_j$  para  $j = 1, 2, \dots, k$ , além de todos os demais pontos em que  $f$  já é contínua. De fato, observe a igualdade entre os seguintes limites laterais do ponto  $x_j$ , isto é

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} [f(x) - g_j(x)] = f(x_j^+) - \left[ \frac{f(x_j^+) - f(x_j^-)}{2} \right] = \frac{f(x_j^+) + f(x_j^-)}{2},$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_j^-} [f(x) - g_j(x)] = f(x_j^-) + \left[ \frac{f(x_j^+) - f(x_j^-)}{2} \right] = \frac{f(x_j^+) + f(x_j^-)}{2}$$



Dessa maneira, a função  $f(x) - g_j(x)$  possui menos descontinuidades que a função original  $f$  para cada ponto  $x_j$ . De modo a eliminar todas as descontinuidades, repetimos esse processo para todos os  $k$  pontos de descontinuidade da  $f$ , e então teremos a função

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k w_j \psi(x - x_j),$$

que é contínua para todo  $x$ . Dessa forma, estamos nas hipóteses do *Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme das séries de Fourier*, e portanto podemos aplicá-lo para afirmar que a série de Fourier da função  $g$  converge uniformemente para  $g$  em toda a reta. Pelo lema que provaremos a seguir, a série de Fourier da função  $w_j \psi(x - x_j)$  converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ .

Para demonstrar a convergência uniforme da  $f$ , note que a série de Fourier da função  $f$  é a soma das séries de Fourier das funções  $g$  e  $w_j \psi(x - x_j)$ , para  $j = 1, \dots, k$ , uma vez que  $f$  pode ser escrita por

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^k w_j \psi(x - x_j).$$

Portanto a série de Fourier da função  $f$  converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ , para  $j = 1, \dots, k$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ , que são justamente os pontos de descontinuidade da  $f$ . A prova do lema a seguir completa a demonstração desse teorema.

*Demonstração do lema.* Vamos calcular a série de Fourier da função  $\psi$ . Como se trata de uma função ímpar, temos uma série apenas de senos dada por

$$S(\psi(x)) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

no qual

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Vamos calcular essa integral pela técnica de integração por partes tomando  $u = 1 - \frac{x}{L}$  e  $dv = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ . Teremos  $du = -\frac{1}{L} dx$  e  $v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ . Segue que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \left[ -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \Big|_0^L - \frac{1}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = \frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Logo a série de Fourier da função  $\psi$  é

$$S(\psi(x)) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.41)$$

e o lema estará demonstrado se provarmos que, para qualquer  $\delta > 0$ , esta série converge uniformemente para  $0 < \delta \leq |x| \leq L$ .

A série da equação (4.41) pode ser obtida tomando a parte imaginária de

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} \quad (4.42)$$

e fazendo a substituição  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ . Por isso basta provar que a série (4.42) converge uniformemente para  $\theta \in [\varepsilon, \pi]$ , para  $\varepsilon > 0$  qualquer. Seja

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

a soma parcial de (4.42) calculada até o  $n$ -ésimo termo. Temos que

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)]. \quad (4.43)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)] &= E_m(\theta) - E_{m-1}(\theta) + E_{m+1}(\theta) - E_m(\theta) + E_{m+2}(\theta) - E_{m+1}(\theta) + \\ &+ \dots + E_{n-1}(\theta) - E_{n-2}(\theta) + E_n(\theta) - E_{n-1}(\theta) \\ &= E_n(\theta) - E_{m-1}(\theta) \\ &= \sum_{k=m}^n e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta),$$

substituindo esta expressão em (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_k(\theta) - \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_k(\theta) - \sum_{k=m-1}^{n-1} \frac{1}{k+1} E_k(\theta) \\ &= \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) + \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Agora, de modo muito similar ao que fizemos para estimar o valor da expressão (4.14), escrevemos  $E_n(\theta)$  como uma soma de progressão geométrica

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

e a reescrevemos por

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta(n+1)}}{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} = \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} (e^{i\theta} - e^{i\theta(n+1)})}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}.$$

Queremos estimar o valor de  $|E_n(\theta)|$ . Para isso, recorde que  $|e^{i\eta}| \leq 1$ , para todo  $\eta$ , e também que  $e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} = -2i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Logo

$$|E_n(\theta)| = \left| \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right| \leq \frac{2}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Logo, segue de (4.44) que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| &\leq \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \left( \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] \\ &\leq \frac{2}{m \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

e portanto, para  $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi$ , temos que

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \operatorname{sen}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

o que implica pelo Critério de Cauchy a convergência uniforme de 4.42, o que completa a demonstração do lema e também, do Segundo Teorema da Convergência Uniforme da série de Fourier.



---

## SÉRIES DE FOURIER UTILIZANDO O GEOGEBRA

---

No capítulo anterior, estudamos a convergência pontual e uniforme da série de Fourier. Vimos que o somatório das funções trigonométricas que definem os coeficientes da série de Fourier são as funções que melhor se aproximam de uma função periódica que atenda as hipóteses de ser seccionalmente contínua e diferenciável. Para demonstrar esse teorema, utilizamos tópicos de Análise, cujo assunto é ensinado em cursos de graduação em Matemática e áreas afins, e que requer uma certa familiaridade em demonstrações matemáticas pelo estudante.

No presente capítulo, temos a pretensão de utilizar os gráficos das somas parciais das séries de Fourier que apresentamos nos cálculos da Seção 3.3, como recurso de aprendizagem voltados para alunos do Ensino Médio. Pretendemos adequar o contexto das séries de Fourier a alguns tópicos presentes no currículo escolar do Ensino Médio, como paridade e periodicidade de funções. É claro que não se pretende apresentar a esses estudantes definições precisas, teoremas e demonstrações rigorosas, mas acreditamos ser possível que esses alunos se convençam da validade do Teorema de Fourier visualizando nesses gráficos como e quão rápido convergem as somas parciais da séries para suas respectivas funções periódicas. Nesse sentido, o presente capítulo tem dois objetivos: o prático, de ser tutorial didático ensinando como construir os gráficos de séries de Fourier utilizando o software Geogebra; e o pretencioso, de estimular esses alunos a prosseguir seus estudos em nível superior apresentando-lhes um relevante tema da matemática acadêmica.

### ***5.0.1 Tutorial de construção dos gráficos da Série de Fourier.***

O Geogebra é um software gratuito que combina elementos de Geometria e Álgebra em um mesmo ambiente visual. O programa permite realizar construções geométricas e inserir funções, equações e coordenadas no plano. O Geogebra pode ser baixado no computador ou

acessado online pelo link <<https://www.geogebra.org/classic>>. É possível salvar e baixar arquivos livremente da nuvem, que possuem a extensão *.ggb*.

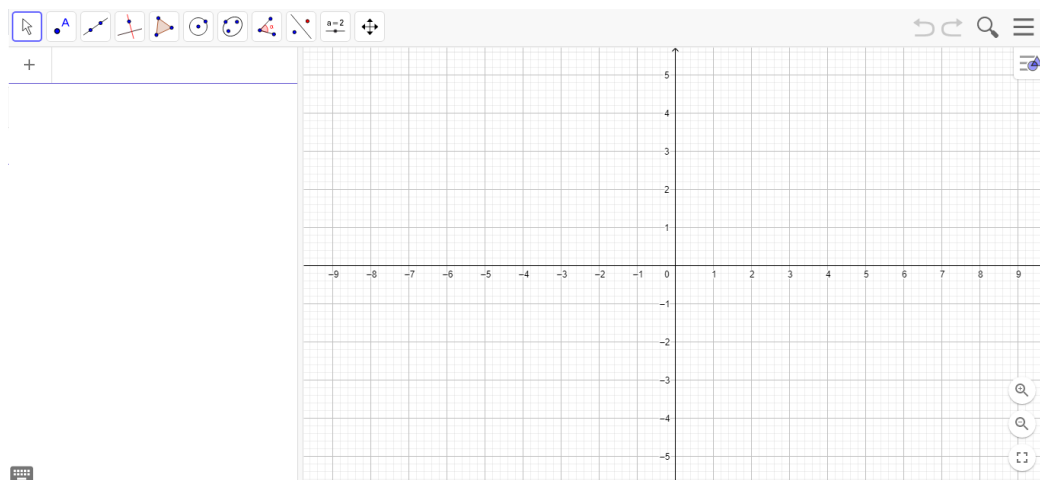


Figura 58 – Tela inicial do Geogebra Classic.

A fim de construir e manipular os gráficos das somas parciais da série de Fourier de uma dada função, um dos objetivos deste capítulo, listamos os seguintes passos

**1º passo.** Inserção da ferramenta **Controle Deslizante**. Esta é a ferramenta que possibilita a criação de animações gráficas, garantindo o dinamismo das apresentações no Geogebra. É através desta ferramenta que poderemos visualizar a convergência da série de Fourier à medida que adicionamos mais termos à soma parcial da série. Para inserir um controle deslizante, basta ativar a ferramenta e clicar no local desejado na janela de visualização sob a malha quadriculada.

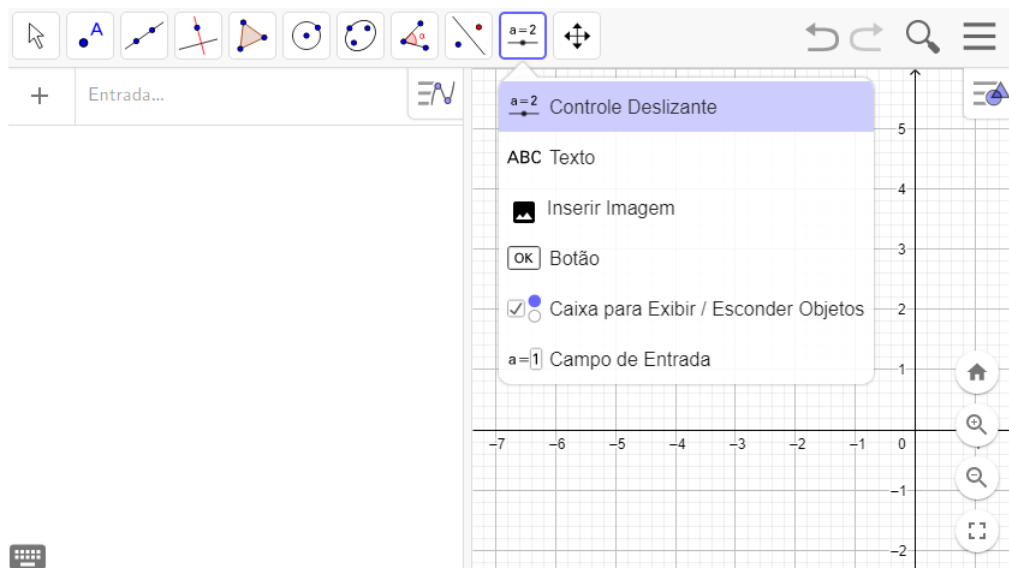


Figura 59 – Botão Controle Deslizante.

Feito isso, será aberta a janela de configurações dessa ferramenta. Nela, a nomeamos por  $p$ , e marcamos a opção *inteiro* com incremento de uma unidade do 1 até o 100. Isto significa que

será possível gerar o gráfico da soma parcial da série com até cem termos no somatório.

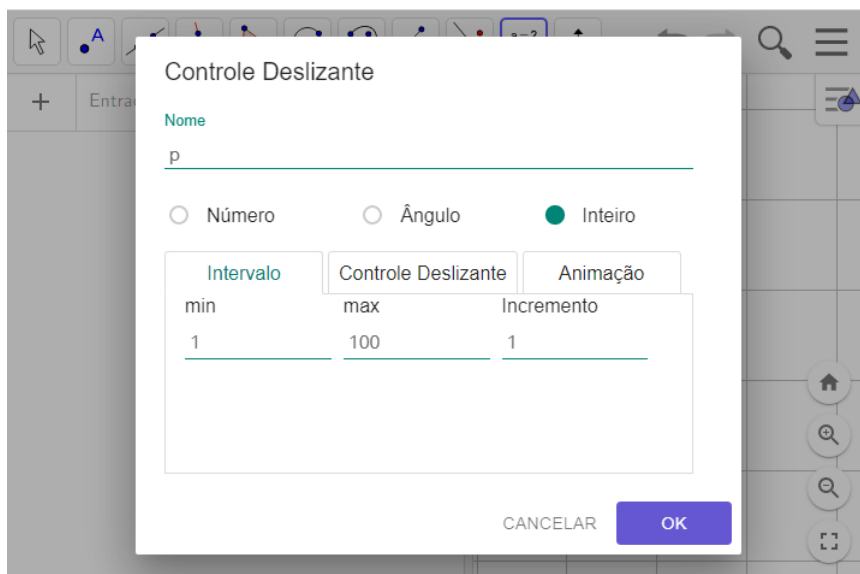


Figura 60 – Configurações do controle deslizante.

**2º passo.** Inserção da **função**. Na janela de Álgebras, no campo *Entrada*, vamos inserir a função da série de Fourier cujo gráfico queremos construir. Essa função será do tipo

*Soma* (<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

na qual inserimos a expressão do somatório da série de Fourier, com variável do somatório  $n$  com valor inicial 1 e valor final  $p$ , que foi vinculado à ferramenta de controle deslizante.

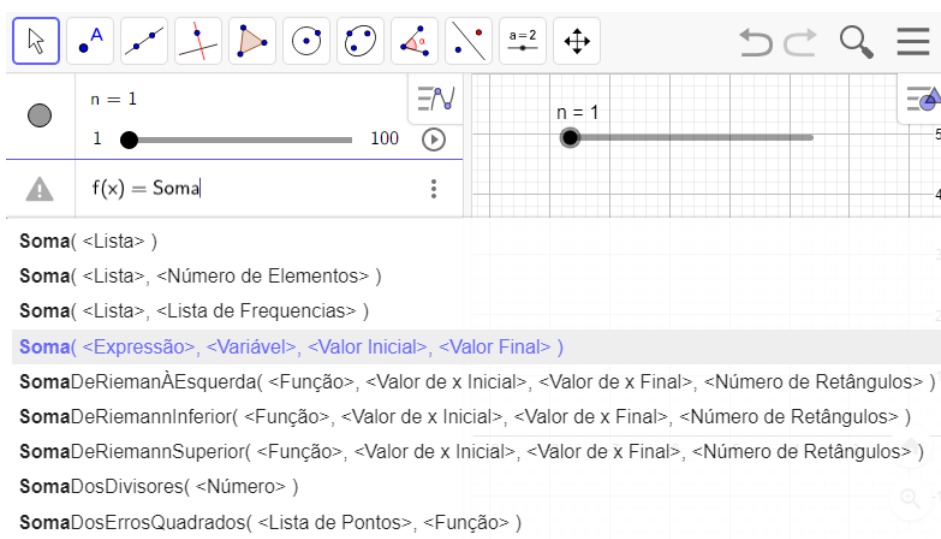


Figura 61 – Função tipo *Soma* da série de Fourier.

### 5.0.2 Exemplos de gráficos das somas parciais de Fourier

**Exemplo 5.0.1.** Vamos construir o gráfico da função sinal estudada no Exemplo 3.3.1

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

cuja série de Fourier é dada por

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{sen}((2n-1)\pi x).$$

Inserimos a função *Soma* da série cujo gráfico queremos construir. Observe que é mostrado o somatório da soma parcial de 1 até o valor de  $p$ , que está indicado no controle deslizante. O gráfico da série de Fourier da função é gerado na janela de visualização. Clicando no *play* da ferramenta controle deslizante, é criada uma animação gráfica na qual podemos perceber a convergência da série para sua respectiva função. Neste e nos próximos exemplos, apresentamos as cinco primeiras somas parciais da Série de Fourier, bem como o caminho do qual esperamos que a série convirja.

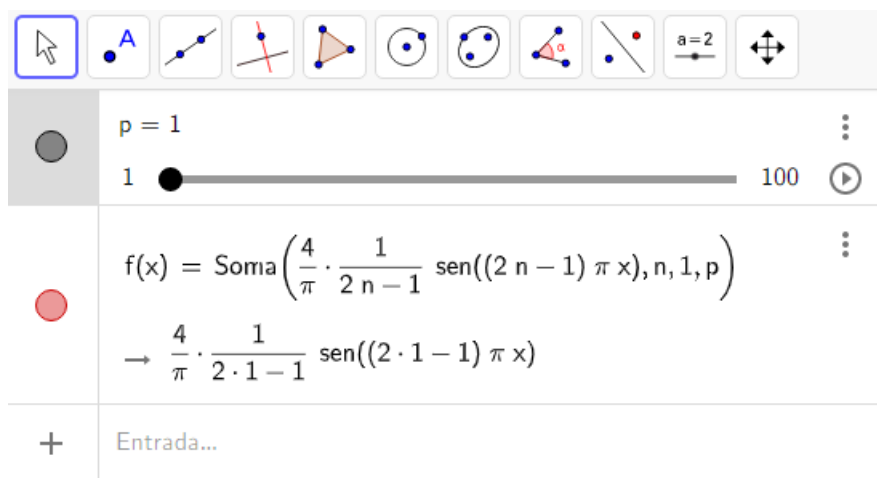


Figura 62 – Função tipo *Soma* da série de Fourier da função sinal.

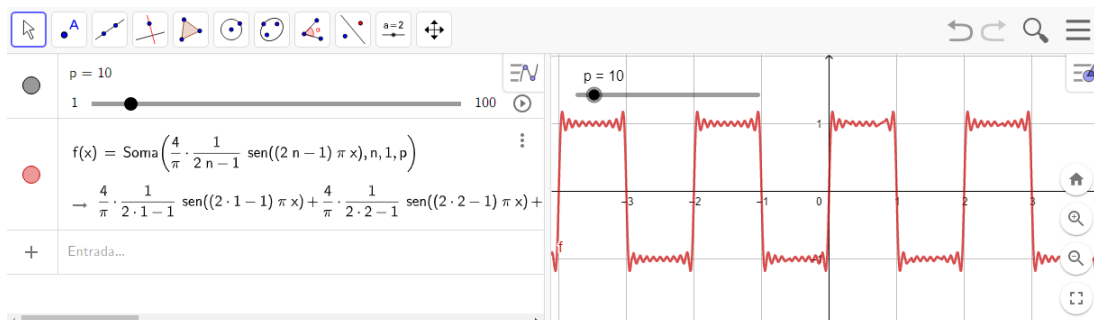


Figura 63 – Gráfico da série de Fourier da função sinal com  $p = 10$ .



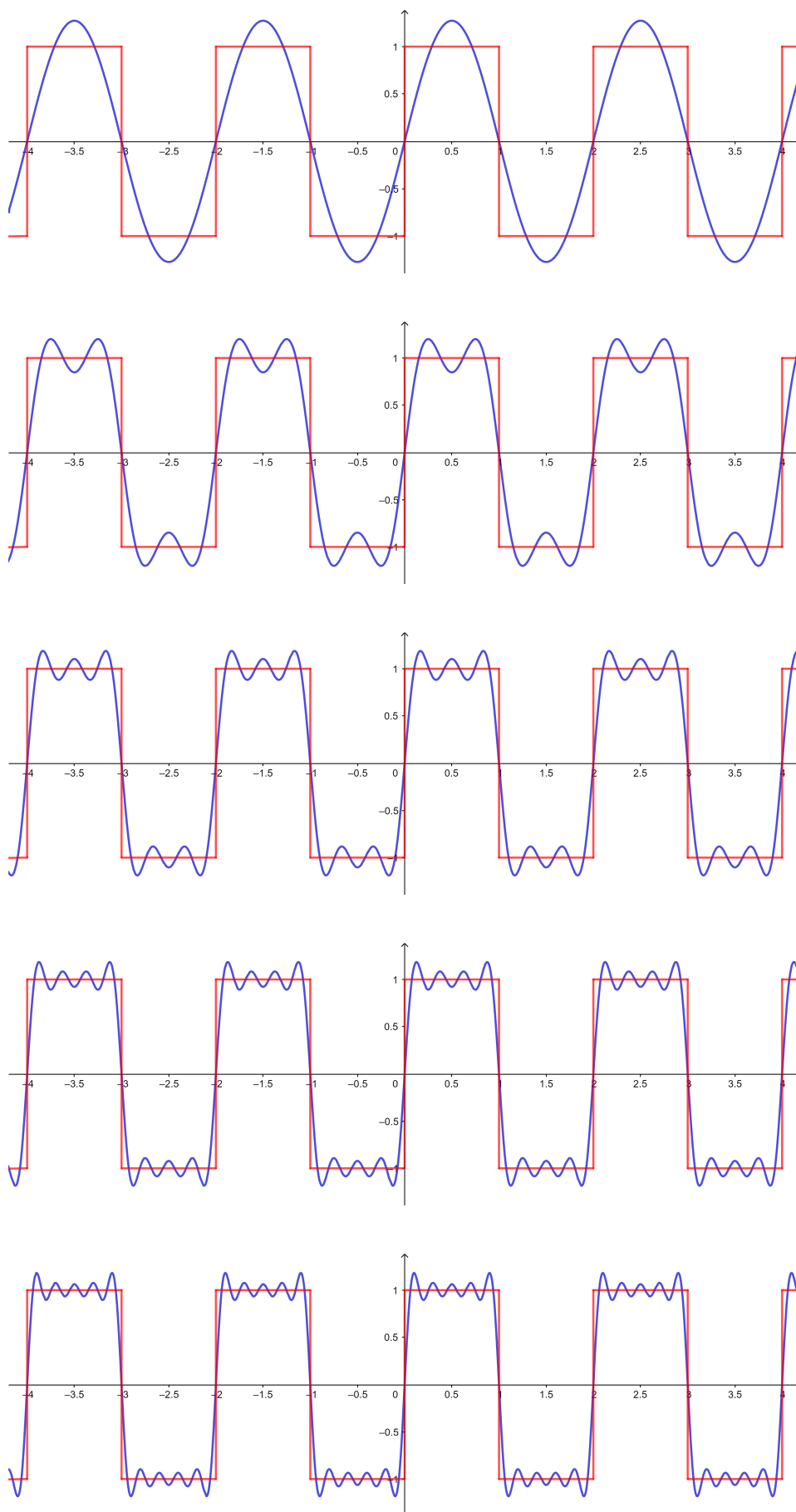


Figura 64 – Cinco primeiras somas da série de Fourier de uma onda quadrada.

**Exemplo 5.0.2.** A série de Fourier da função periódica de período  $2\pi$  dada por  $f(x) = x$ , para  $-\pi \leq x < \pi$ , foi calculada no Exemplo 3.3.2 por

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \text{sen}(nx).$$

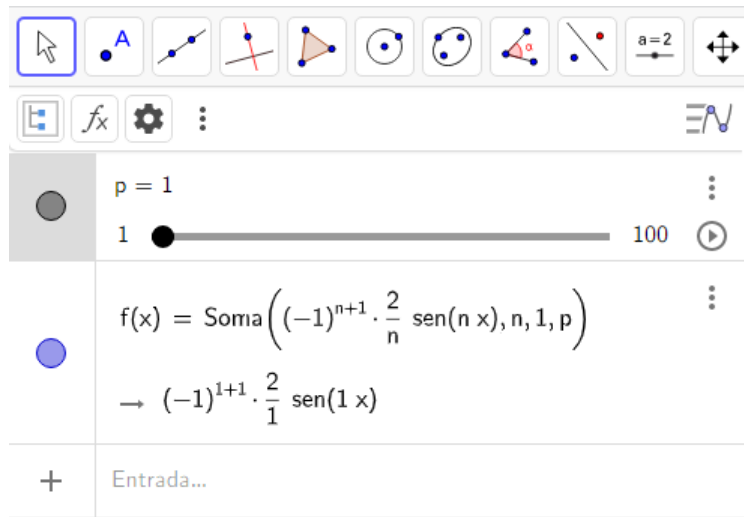
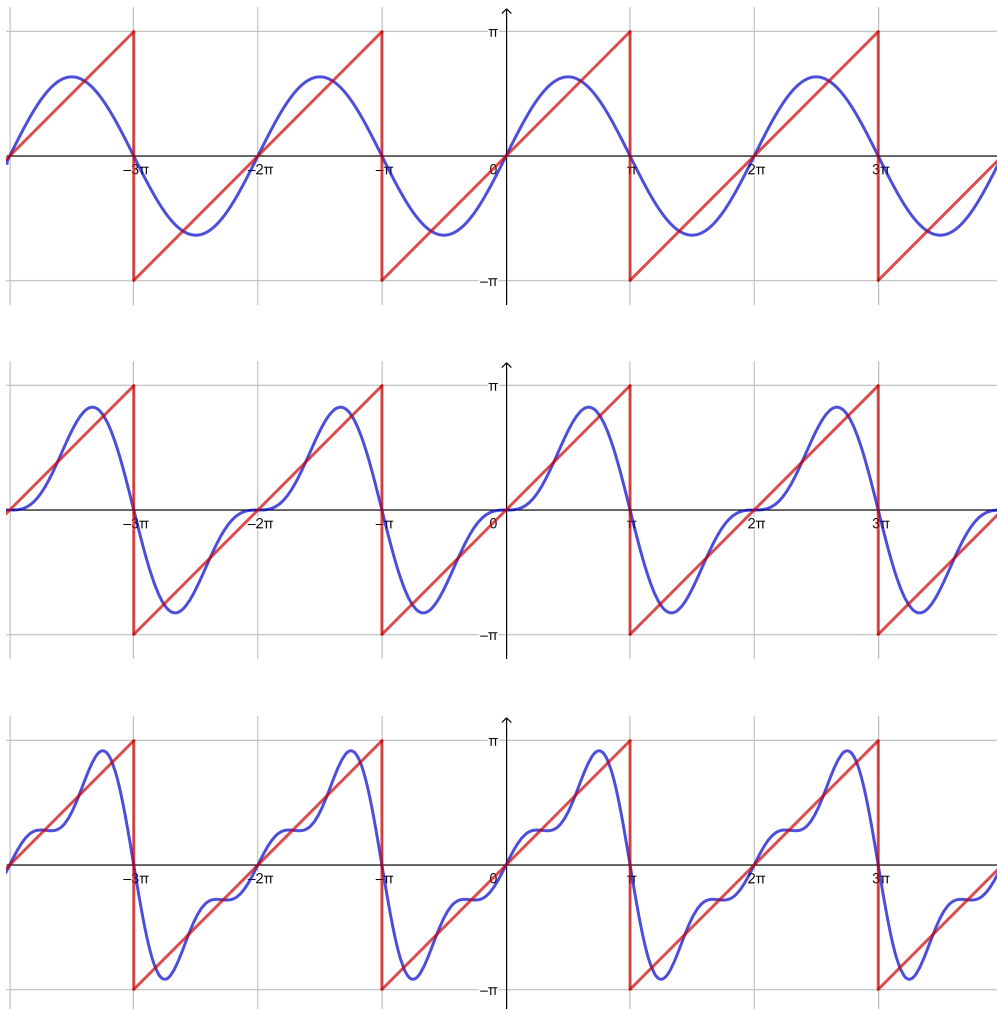


Figura 65 – Função tipo *Soma* da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.2.



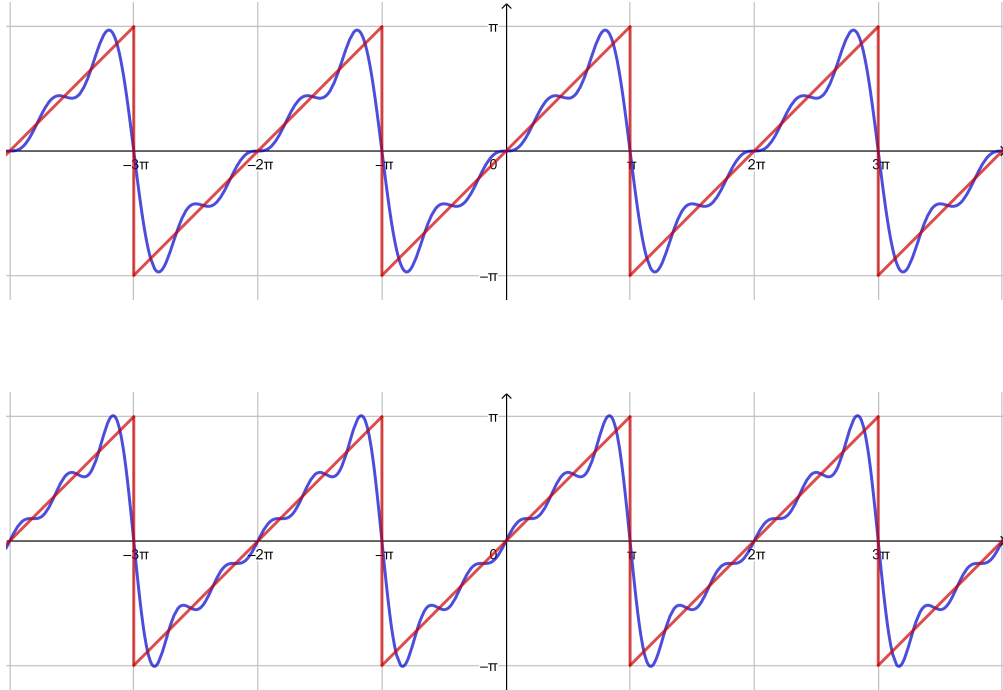


Figura 66 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.2.

**Exemplo 5.0.3.** A série de Fourier da função de período  $2\pi$  que está definida em um período por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$$

foi calculada no Exemplo 3.3.3 por

$$S_f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

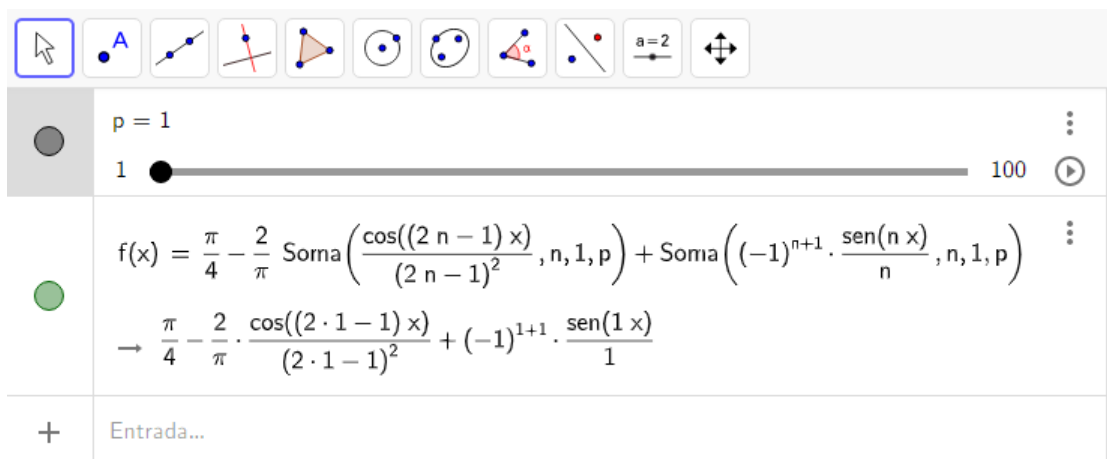


Figura 67 – Função tipo *Soma* da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.3.

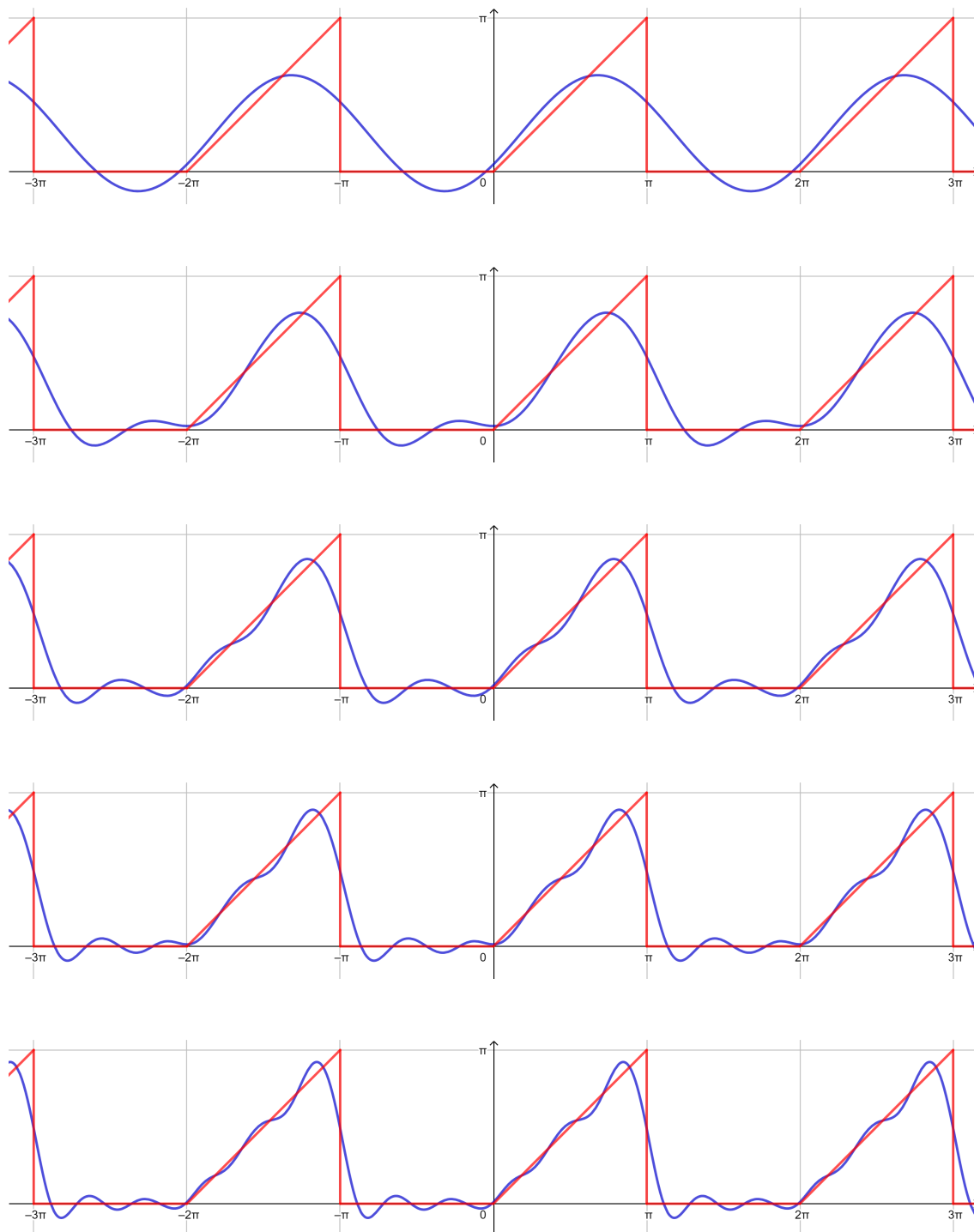


Figura 68 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.3.

**Exemplo 5.0.4.** A série de Fourier da função de período 2 definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

foi calculada no Exemplo 3.3.4 por

$$S_f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)\pi x)}{2n-1}.$$

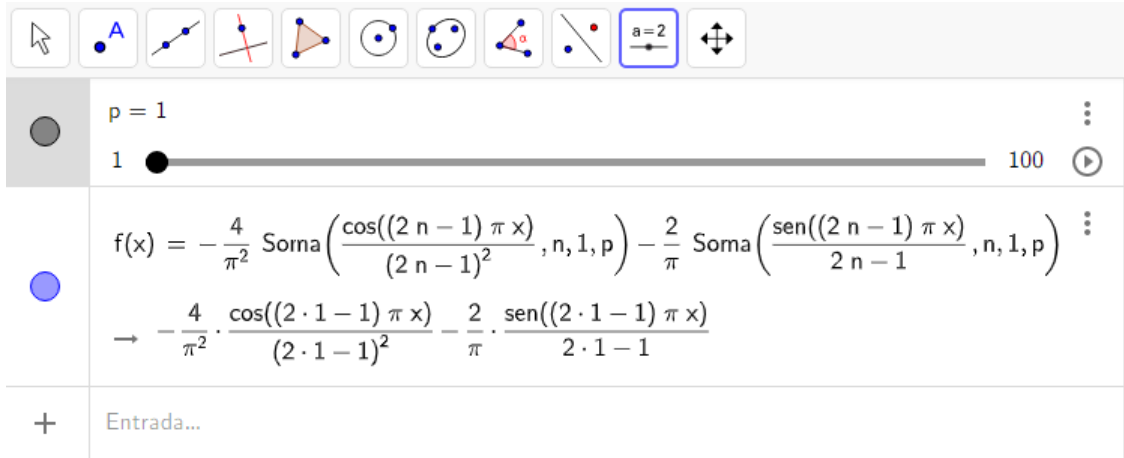
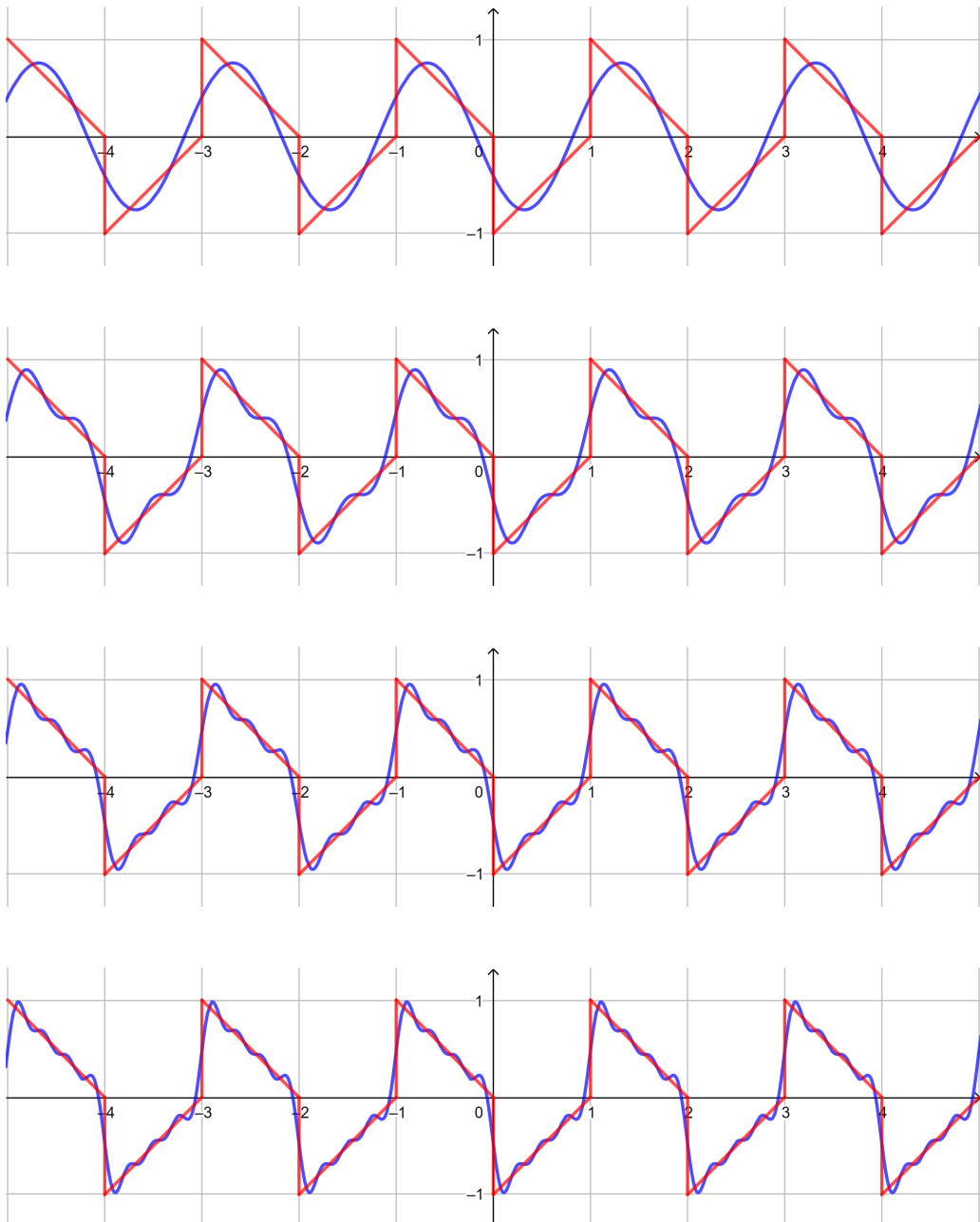


Figura 69 – Função tipo *Soma* da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.4.



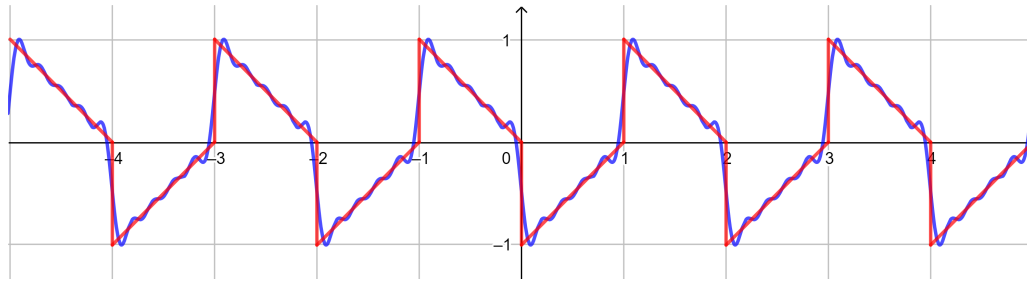


Figura 70 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.4.

**Exemplo 5.0.5.** A série de Fourier da função quadrática de período 2 dada por

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

foi calculada no Exemplo 3.3.5 por

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

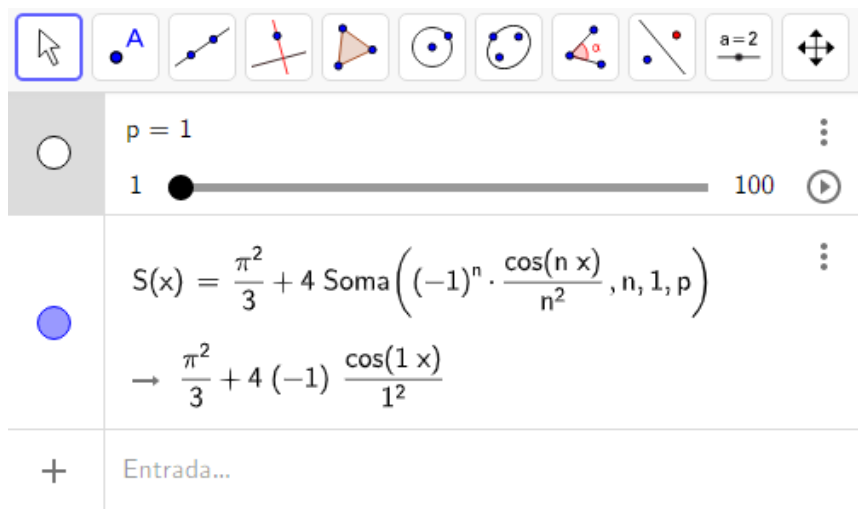
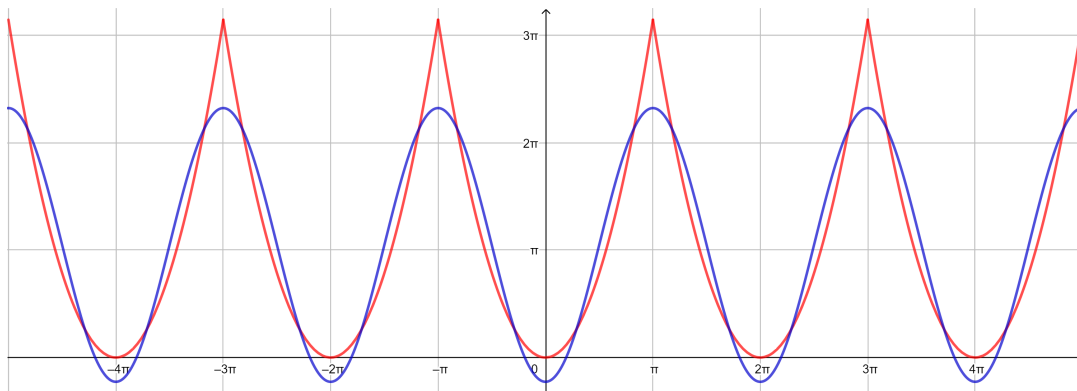


Figura 71 – Função tipo *Soma* da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.5.



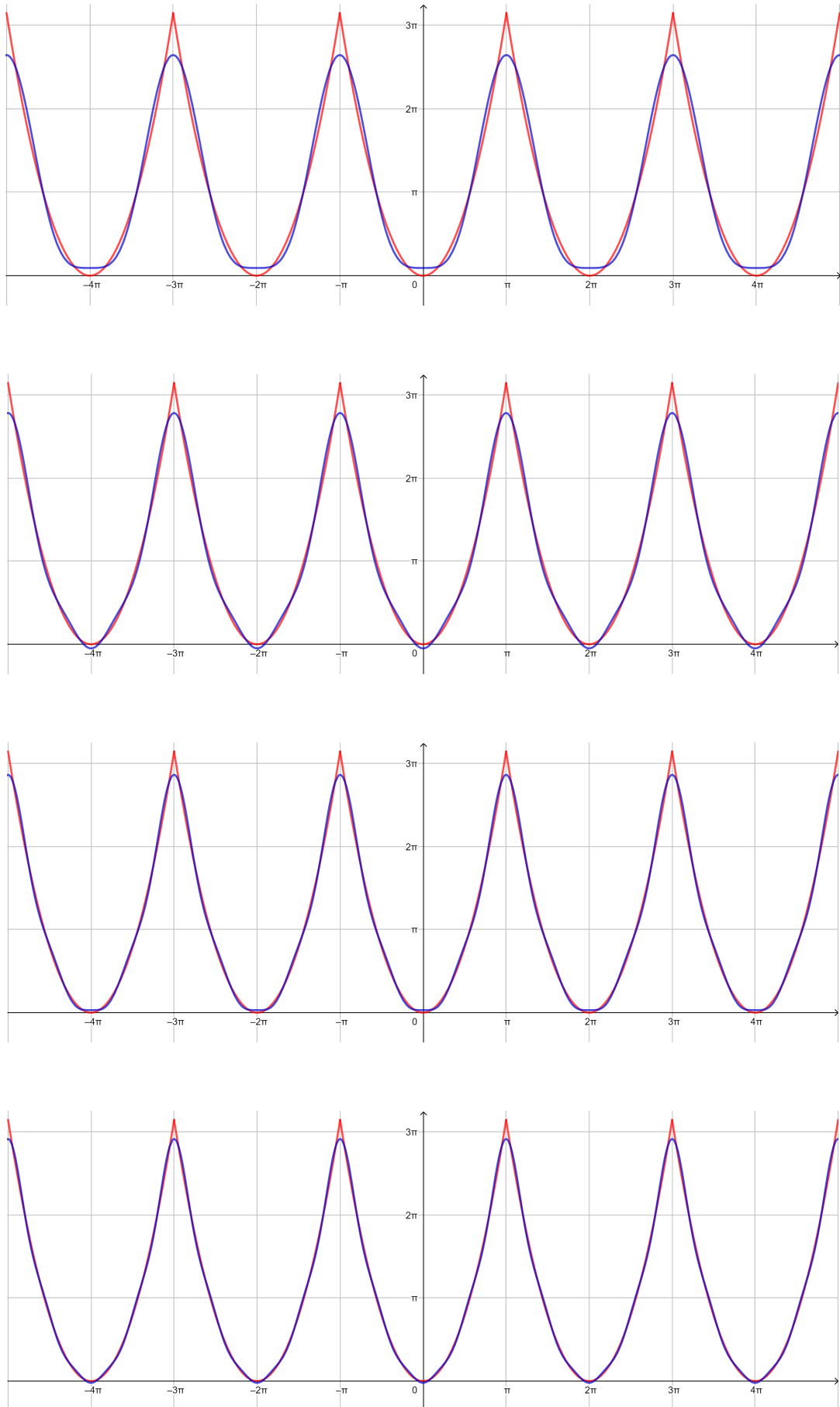


Figura 72 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do exemplo (5.0.5).

**Exemplo 5.0.6.** A série de Fourier da função de período 2 dada por

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$$

foi calculada no Exemplo 3.3.6 por

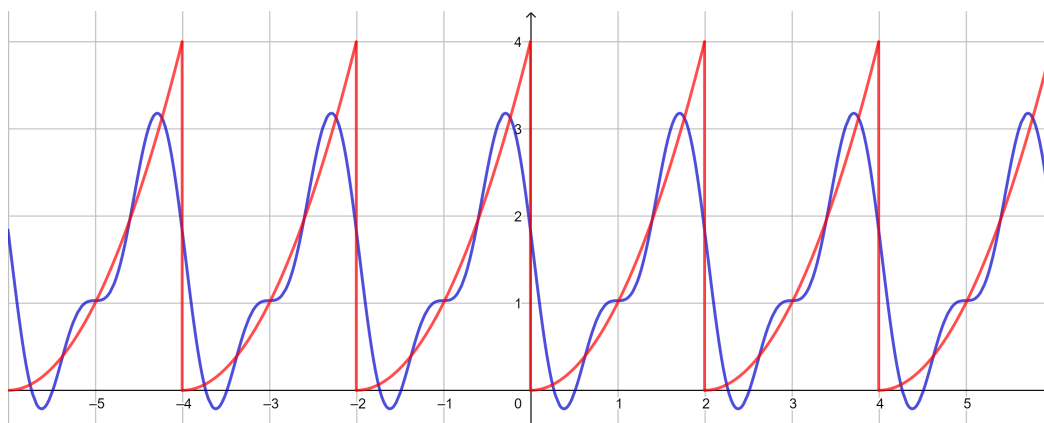
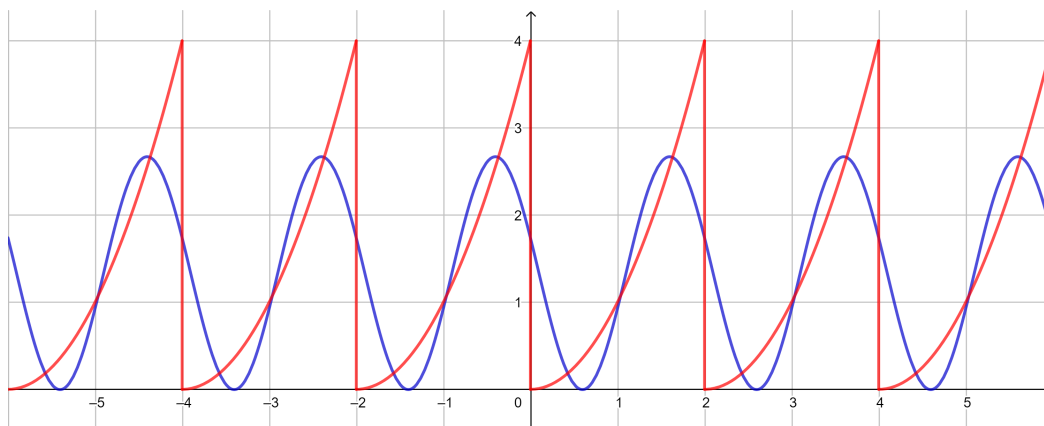
$$S(x) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi x)}{n}.$$

$p = 1$   
 1 100

$S(x) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \text{Soma}\left(\frac{\cos(n \pi x)}{n^2}, n, 1, p\right) - \frac{4}{\pi} \text{Soma}\left(\frac{\text{sen}(n \pi x)}{n}, n, 1, p\right)$   
 $\rightarrow \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(1 \pi x)}{1^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}(1 \pi x)}{1}$

+ Entrada...

Figura 73 – Função tipo *Soma* da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.6.





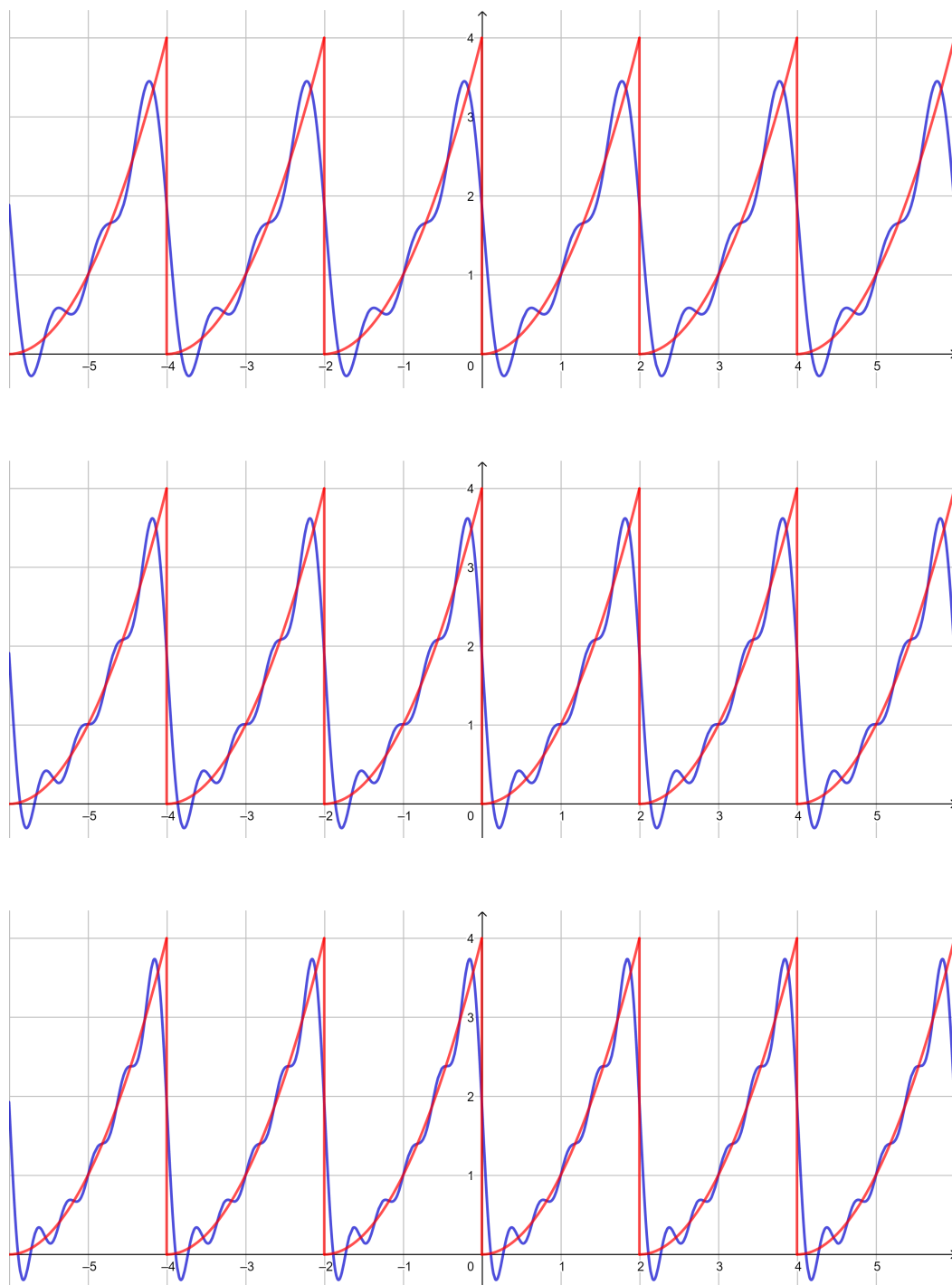


Figura 74 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.6.

**Exemplo 5.0.7.** A série de Fourier da função de período  $2\pi$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen } x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

foi calculada no Exemplo 3.3.7 por

$$S(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(x) + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}.$$

$p = 1$   
 1 100

$S(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(x) + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \text{Soma}\left(\frac{\cos(2 n x)}{1 - 4 n^2}, n, 1, p\right)$   
 $\rightarrow \frac{1}{2} \text{sen}(x) + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(2 \cdot 1 x)}{1 - 4 \cdot 1^2}$

+ Entrada...

Figura 75 – Função tipo *Soma* da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.7.

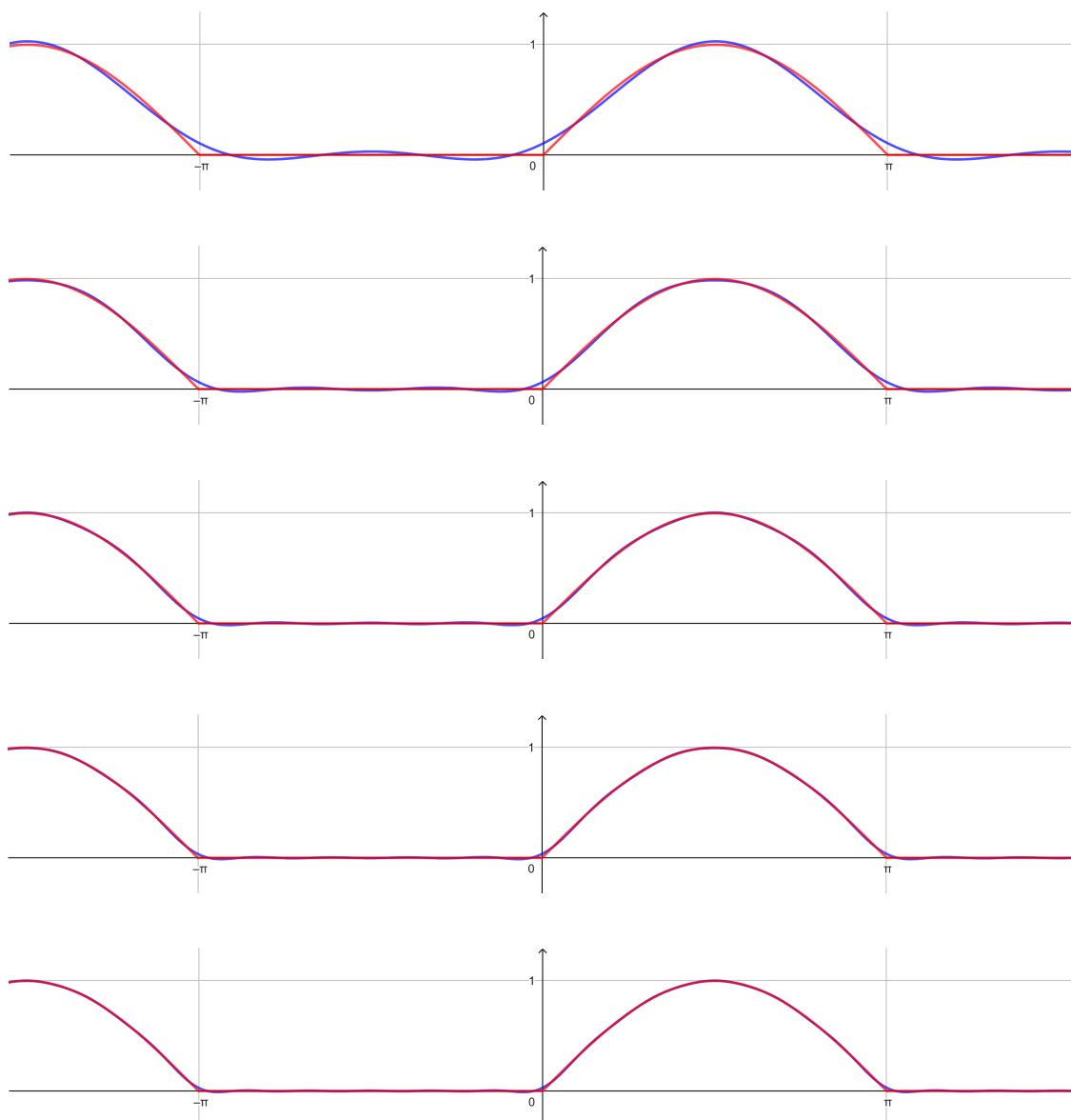


Figura 76 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função do Exemplo 5.0.7.

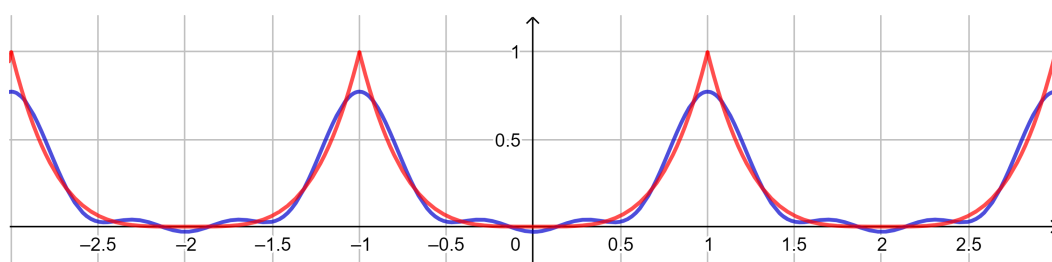
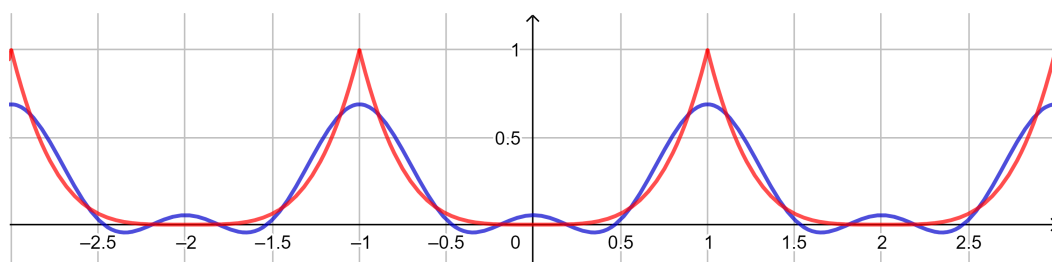
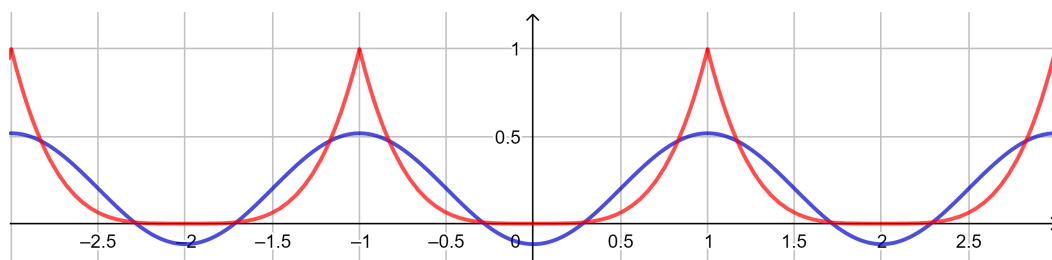
**Exemplo 5.0.8.** A série de Fourier da função  $f(x) = x^4$ , para  $0 < x < 2\pi$  é dada por

$$x^4 = \frac{16\pi^4}{5} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4} \right) \cos(nx) + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \text{sen}(nx).$$

$p = 1$   
 1 30

$S(x) = \frac{1}{5} - \frac{8}{\pi^4} \text{Soma} \left( (-1)^n \cos(\pi n x) \frac{-\pi^2 n^2 + 6}{n^4}, n, 1, p \right)$   
 $\rightarrow \frac{1}{5} - \frac{8}{\pi^4} (-1) \cos(\pi \cdot 1 x) \frac{-\pi^2 \cdot 1^2 + 6}{1^4}$

+ Entrada...



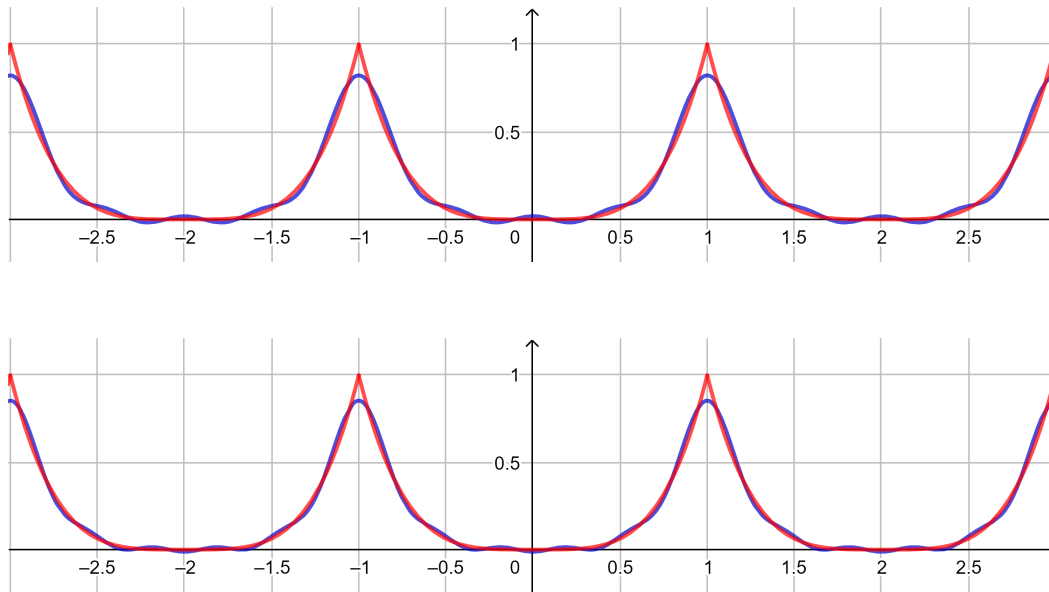


Figura 77 – Cinco primeiras somas da série de Fourier da função  $f(x) = x^4$ , para  $0 < x < 2\pi$ .

## REFERÊNCIAS

---

---

EDWARDS, C.; PENNEY, D. E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno**. [S.l.]: LTC, Rio de Janeiro, 1995. Citado na página 38.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, 1995. Nenhuma citação no texto.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. Nenhuma citação no texto.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, vol. 2**. [S.l.]: LTC, 2000. Nenhuma citação no texto.

\_\_\_\_. **Um curso de cálculo, vol. 1**. [S.l.]: LTC, 2000. Nenhuma citação no texto.

\_\_\_\_. **Um curso de cálculo, vol. 4**. [S.l.]: LTC, 2000. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E. L. **Análise real**. [S.l.]: Impa Rio de Janeiro, 2004. v. 1. Nenhuma citação no texto.

