

Avaliação de valores em risco em séries de retorno financeiro

Camilla Ferreira Gomes

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação aplicado à Indústria (MECAI)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Camilla Ferreira Gomes

Avaliação de valores em risco em séries de retorno financeiro

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática, Estatística e Computação

Orientador: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

USP – São Carlos
Janeiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G634a Gomes, Camilla Ferreira
Avaliação de valores em risco em séries de retorno
financeiro / Camilla Ferreira Gomes; orientador
Marinho Gomes de Andrade Filho. - São Carlos - SP,
2018.
65 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação
em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística
e Computação Aplicadas à Indústria) - Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de
São Paulo, 2018.

1. Modelo ARCH. 2. valor em risco. 3. retornos
financeiros. 4. distribuição Normal. I. Filho,
Marinho Gomes de Andrade, orient. II. Título.

Camilla Ferreira Gomes

Value at risk evaluation in financial return time series

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Program in Mathematics, Statistics and Computing Applied to Industry. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics, Statistics and Computing

Advisor: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

USP – São Carlos
January 2018

Este trabalho é dedicado à Deus, à minha família e especialmente ao meu marido Danilo.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados ao meu marido Danilo que esteve ao meu lado e me apoiou em todos os momentos. À Deus e à minha mãe, que me iluminam e guiam meus passos. Ao meu pai, pelo incentivo e amor! Aos amigos da UFSCar pela compreensão e incentivo constante. A todos os professores da USP e UFSCar pelos ensinamentos.

Liberdade é um estado de espírito... Só perdoa quem se sente ofendido. Aquele que se liberta da ofensa, sequer precisa oferecer seu perdão porque sempre vive em paz!!!

RESUMO

GOMES, C. F.. **Avaliação de valores em risco em séries de retorno financeiro**. 2018. 65 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Os métodos geralmente empregados no mercado para o cálculo de medidas de risco baseiam-se na distribuição adotada para os retornos financeiros. Quando a distribuição Normal é adotada, estas avaliações tendem a subestimar o “Value at Risk” (valor em risco - VaR), pois a distribuição Normal tem caudas mais leves que as observadas nas séries financeiras. Muitas distribuições alternativas vêm sendo propostas na literatura, contudo qualquer modelo alternativo proposto deve ser avaliado com relação ao esforço computacional gasto para cálculo do valor em risco e comparado à simplicidade proporcionada pelo uso da distribuição Normal. Dessa forma, esta dissertação visa avaliar alguns modelos para cálculo do valor em risco, como a modelagem por quantis empíricos, a distribuição Normal e o modelo autorregressivo (AR), para verificação do melhor ajuste à cauda das distribuições das séries de retornos financeiros, além de avaliar o impacto do VaR para o ano seguinte. Nesse contexto, destaca-se o modelo autorregressivo com heterocedasticidade condicional (ARCH) capaz de detectar a volatilidade envolvida nas séries financeiras de retorno. Esse modelo tem-se mostrado mais eficiente, capaz de gerar informações relevantes aos investidores e ao mercado financeiro, com um esforço computacional moderado.

Palavras-chave: Modelo ARCH, valor em risco, retornos financeiros, distribuição Normal.

ABSTRACT

GOMES, C. F.. **Value at risk evaluation in financial return time series**. 2018. 65 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

The most used methods for risk evaluation in the financial market usually depend strongly on the distribution assigned to the financial returns. When we assign a normal distribution, results tend to underestimate the Value at Risk (VaR), since the normal distribution usually has a lighter tail than those from the empirical distribution of financial time series. Many other distributions have been proposed in the literature, but we need to evaluate their computational effort for obtaining the value at risk when compared to the easiness of calculation of the normal distribution. In this work, we compare several models for calculating the value at risk, such as the normal, the empirical-quantile and the autoregressive (AR) models, evaluating their goodness-of-fit to the tail of the distribution of financial return time series and the impact of applying the calculated VaR to the following year. We also highlight the autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) model due to its performance in detecting the volatility in the series. The ARCH model has proved to be efficient and able to generate relevant information to the investors and to the financial market with a moderate computational cost.

Key-words: ARCH model, value at risk, financial returns, normal distribution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Série temporal diária do valor de compra do Dólar de janeiro de 2014 a abril de 2016	29
Figura 2 – Série temporal diária do log-retorno de compra do Dólar de janeiro de 2014 a abril de 2016	30
Figura 3 – Boxplot e gráfico da Normal Quantil-Quantil para a série temporal do log-retorno do valor de compra do Dólar	31
Figura 4 – Coeficiente de autocorrelação (painel esquerdo) e autocorrelação parcial para o log-retorno do Dólar (painel direito)	32
Figura 5 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial para o log-retorno ao quadrado do Dólar (painel à direita)	32
Figura 6 – Série temporal diária do valor de compra do Euro de janeiro de 2014 a abril de 2016	34
Figura 7 – Série temporal diária do log-retorno de compra do Euro de janeiro de 2014 a abril de 2016	35
Figura 8 – Box plot (painel à esquerda) e gráfico do quantil quantil (painel à direita) para o log-retorno do valor de compra do Euro	36
Figura 9 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial para o log-retorno do Euro (painel à direita)	36
Figura 10 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial para o log-retorno ao quadrado do Euro (painel à direita)	37
Figura 11 – Série temporal diária do índice IBOVESPA de janeiro de 2014 a abril de 2016	38
Figura 12 – Série temporal diária do log-retorno do índice IBOVESPA de janeiro de 2014 a abril de 2016	39
Figura 13 – Box plot (painel à esquerda) e gráfico do quantil quantil (painel à direita) para o log-retorno do Índice IBOVESPA	40
Figura 14 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial (painel à direita) para o log-retorno do IBOVESPA	40
Figura 15 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial (painel à direita) para o log-retorno ao quadrado do IBOVESPA	41
Figura 16 – Função densidade empírica para o Dólar nos anos de 2014 e 2015 (linha sólida) e para 2016 (linha pontilhada)	45
Figura 17 – Função densidade empírica para o Euro nos anos de 2014 e 2015 (linha sólida) e para 2016 (linha pontilhada)	46

Figura 18 – Função densidade empírica para o Índice IBOVESPA nos anos de 2014 e 2015 (linha sólida) e para 2016 (linha pontilhada)	48
Figura 19 – Histograma (painel esquerdo) e Q-Q plot (painel direito) para o Dólar em 2014/15	50
Figura 20 – Histograma (painel à esquerda) e Q-Q plot (painel à direita) para o Euro em 2014/15	51
Figura 21 – Histograma (painel à esquerda) e Q-Q plot (painel à direita) para o IBOVESPA em 2014/15	53
Figura 22 – Estimação dos valores em risco para 2016 considerando os percentis 1 e 99%, utilizando o modelo ARCH (linha sólida), distribuição Normal (linha pontilhada) e os valores de log-retorno ocorridos em 2016 (pontos circulares)	58
Figura 23 – Estimação dos valores em risco para 2016 considerando os percentis 1 e 99%, utilizando o modelo ARCH (linha sólida), distribuição Normal (linha pontilhada) e os valores de log-retorno ocorridos em 2016 (pontos circulares)	60
Figura 24 – Estimação dos valores em risco para 2016 considerando os percentis 1 e 99%, utilizando o modelo ARCH (linha sólida), distribuição Normal (linha pontilhada) e os valores de log-retorno ocorridos em 2016 (pontos circulares)	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas para a série temporal de log-retorno de compra do Dólar	30
Tabela 2 – Estatísticas para a série temporal de log-retorno de compra do Euro	35
Tabela 3 – Estatísticas para a série temporal de log-retorno do Índice IBOVESPA	39
Tabela 4 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Dólar em 2014/15 baseado no percentis empíricos	44
Tabela 5 – Cálculo do percentis de 2016 com base no VaR do Dólar de 2014 e 2015	45
Tabela 6 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Euro em 2014/15 baseado no percentis empíricos	46
Tabela 7 – Cálculo do percentis de 2016 com base no VaR do Euro de 2014 e 2015	46
Tabela 8 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Índice IBOVESPA em 2014/15 baseado no percentis empíricos	47
Tabela 9 – Cálculo do percentis de 2016 com base no VaR do Índice IBOVESPA de 2014/15	47
Tabela 10 – Cálculo do VaR para o log-retorno do valor de compra do Dólar pela distribuição Normal homocedástica e percentil correspondente em 2016	49
Tabela 11 – Comparativo do VaR e percentis obtidos no ano de 2016 para o log-retorno do valor de compra do Dólar pela modelagem por quantis empíricos e distribuição Normal	50
Tabela 12 – Cálculo do VaR para o log-retorno do valor de compra do Euro pela distribuição Normal homocedástica e percentil correspondente em 2016	51
Tabela 13 – Comparativo do VaR e percentis obtidos no ano de 2016 para o log-retorno do valor de compra do Euro pela modelagem por quantis empíricos e distribuição Normal	52
Tabela 14 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Índice IBOVESPA pela distribuição Normal homocedástica e percentil correspondente em 2016	53
Tabela 15 – Comparativo do VaR e percentis obtidos no ano de 2016 para o log-retorno do Índice IBOVESPA pela modelagem por quantis empíricos e distribuição Normal	54
Tabela 16 – Número de parâmetros e o AIC e BIC obtidos para o modelo ARCH nos anos de 2014/15	57
Tabela 17 – Estatísticas do modelo	57
Tabela 18 – Número de parâmetros e o AIC e BIC obtidos para cada modelo ARCH para os anos de 2014/15	59

Tabela 19 – Estatísticas do modelo	59
Tabela 20 – Número de parâmetros, AIC e BIC obtidos para cada modelo ARCH nos anos de 2014/15	61
Tabela 21 – Estatísticas do modelo	61

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Descrição do problema	21
1.2	Revisão bibliográfica e trabalhos	22
2	SÉRIES DE RETORNO E APLICAÇÃO EM DADOS REAIS	25
2.1	Séries de retorno	25
2.1.1	<i>Varição relativa dos preços ou retorno líquido simples</i>	26
2.1.2	<i>Retorno bruto relativo</i>	26
2.1.3	<i>Log-retorno ou retorno composto contínuo</i>	26
2.1.4	<i>Retorno multiperíodos</i>	26
2.1.5	<i>Retorno médio anualizado ou média anual</i>	27
2.1.6	<i>Agregação de retornos</i>	27
2.2	Aplicação de séries de retorno para dados reais	29
2.2.1	<i>Dólar</i>	29
2.2.2	<i>Euro</i>	34
2.2.3	<i>Índice IBOVESPA</i>	38
3	METODOLOGIAS PARA CÁLCULO DO VAR	43
3.1	Abordagem não paramétrica - VaR empírico	44
3.1.1	<i>Cálculo do VaR pelo método dos percentis empíricos para o log-retorno do Dólar</i>	44
3.1.2	<i>Cálculo do VaR pelo método dos percentis empíricos para o log-retorno do Euro</i>	45
3.1.3	<i>Cálculo do VaR pelos percentis empíricos para o log-retorno do Índice IBOVESPA</i>	47
3.2	VaR baseado no modelo Normal Homocedástico - variância constante 48	
3.2.1	<i>Cálculo do VaR baseado na distribuição Normal homocedástica para o log-retorno do Dólar</i>	49
3.2.2	<i>Cálculo do VaR baseado na distribuição Normal homocedástica para o log-retorno do Euro</i>	51
3.2.3	<i>Cálculo do VaR baseado na distribuição Normal homocedástica para o log-retorno do Índice IBOVESPA</i>	52
4	MODELO HETEROCEDÁSTICO PARA CÁLCULO DO VAR	55

4.1	Modelo supondo distribuição Normal heterocedástico (variância não constante)	55
4.1.1	<i>Modelo ARCH para o log-retorno do dólar</i>	56
4.1.2	<i>Modelo ARCH para o log-retorno do Euro</i>	59
4.1.3	<i>Modelo ARCH para o log-retorno do Índice IBOVESPA</i>	61
5	CONCLUSÃO E PROPOSTAS FUTURAS	63
	REFERÊNCIAS	65

INTRODUÇÃO

Este capítulo contempla uma breve descrição do problema, a revisão bibliográfica e trabalhos referentes ao tema discutido nessa dissertação.

1.1 Descrição do problema

O presente trabalho baseia-se no cálculo e análise do “Value at Risk” (valor em risco), comumente conhecido como VaR, utilizando modelo de séries temporais de ativos financeiros. Dado um determinado período de tempo (t), o problema compreende a realização do cálculo da maior variação de um determinado ativo financeiro, ou seja, o foco é estabelecer qual o maior e o menor valor que esse ativo pode atingir, considerando os parâmetros pré estabelecidos.

Por exemplo, um investidor deseja investir R\$1.000.000,00 em dólares no horizonte de tempo de 1 ano. O cálculo do VaR consiste em avaliar qual o maior e o menor valor que o Dólar pode atingir nesse período para que o investidor, com certo nível de confiança, espere que o valor do Dólar não ultrapasse os valores estimados.

Esse problema é relevante pois pode acarretar em uma economia significativa para um investidor. Por exemplo, como os valores de algumas moedas, como Euro e Dólar, estiveram altos nos últimos 5 anos, buscar um valor ótimo para compra é muito interessante.

Para esse estudo, serão avaliados os ativos financeiros de destaque no mercado e que estão presentes no cotidiano da maioria dos investidores: Dólar, Euro e índice IBOVESPA. Dessa forma, a metodologia apresentada neste trabalho se torna útil para os investidores interessados em adquirir esses ativos.

O cálculo do VaR relaciona-se com o cálculo da volatilidade de um ativo financeiro ou de uma carteira de ativos. Nessa dissertação, será calculado o VaR para cada um dos ativos separadamente.

É importante que o conceito do VaR esteja bem claro para uma melhor compreensão de toda a metodologia que envolve o cálculo dessa medida de incerteza. O conceito do valor em risco será retomado na Seção 1.2, na qual serão apresentados os conceitos dessa medida segundo diversos autores.

Inicialmente, serão apresentadas seis tipos de séries de retorno no Capítulo 2 sendo que, para o estudo, será calculada a série de retorno conhecida como log-retorno ou retorno composto contínuo. Com base nos log-retornos dos ativos selecionados para este estudo, será feita uma análise estatística descritiva, além de análise gráfica, para compreensão do comportamento desses ativos ao longo do tempo e realização das modelagens e estudos pertinentes.

Deste modo, esses dados serão analisados segundo uma abordagem não paramétrica, baseada nos quantis empíricos dos log-retornos dos ativos selecionados.

Em seguida, o cálculo do VaR é feito segundo uma abordagem paramétrica baseada no modelo Normal homocedástico.

Por fim, será realizado uma análise mais elaborada para as séries temporais em questão, supondo uma distribuição autorregressiva condicional heterocedástica - ARCH, em que a variância dos dados não é constante e sua volatilidade tem relação direta com o tempo, o que permite, portanto, que os comportamentos assimétricos de volatilidade sejam retratados por esse modelo.

Neste contexto, partindo da premissa de que a análise risco-retorno compreende um dos critérios relevantes de decisão dos investidores, será feita uma análise final do valor em risco (VaR) obtido pelas três modelagens selecionadas, os impactos desses valores para o ano seguinte, e, em seguida, proposto o modelo mais adequado para os ativos. Por fim, serão sugeridas propostas futuras possíveis a serem implementadas.

1.2 Revisão bibliográfica e trabalhos

As séries de retorno financeiro foram inicialmente estudadas por [Bachelier \(1900\)](#), que defendeu sua tese de Teoria da Especulação e usou os movimentos aleatórios para modelar os dados da bolsa de valores, sendo também um dos responsáveis pelo desenvolvimento da matemática financeira.

Nesse sentido, o estudo de [Kendall e Hill \(1953\)](#) analisou as séries de preços de ações e de produtos agrícolas com base em séries de retorno. [Fama \(1965\)](#) também realizou diversos estudos estatísticos das séries financeiras como as séries de preços das ações da Dow Jones. Além disso, a Teoria dos mercados eficientes diz que os preços incorporam a informação disponível aos participantes do mercado implicando em variações de preços (retornos) não tão previsíveis, uma vez que não se pode prever retornos anormais ([FAMA, 1965](#)).

[Morettin e Tolo \(2006\)](#) apresenta a avaliação de risco frequentemente mensurada em termos da variação de preços dos ativos. Na definição das séries de retorno, baseada nas

variações desses preços, define-se o log-retorno ou retorno composto continuamente como retorno, simplesmente. Essa abordagem reforça a escolha desse tipo de retorno, dentre inúmeros outros, para esse trabalho.

Nesse contexto, é relevante mencionar que, quando há um padrão existente ao longo do tempo no comportamento de uma variável como o preço de um ativo, por exemplo, aplica-se a análise de séries temporais, uma vez que estes dados apresentam correlação ao longo do tempo (MORETTIN; TOLOI, 2006). Cada série é tratada particularmente, segundo a manipulação das informações e complexidade das abordagens contidas para a realização da sua extrapolação.

Os riscos financeiros dividem-se em diversas categorias. Morettin (2008) os divide em operacional, crédito, liquidez, legal e de mercado. Nos riscos financeiros de mercado, foco do estudo, salienta-se a utilização do VaR (valor em risco) que envolve o cálculo da volatilidade de ativos ou de carteira de instrumentos financeiros, medindo o grau de incerteza sobre retornos futuros. Esse cálculo torna-se muito útil pois mede a perda associada a um evento extremo, sob condições normais de mercado. Essa medida mensura a variação potencial máxima do valor de um ativo segundo uma certa probabilidade. Ou seja, será calculado, a partir de uma certa probabilidade, o quanto se pode perder ou ganhar, num determinado tempo.

Dessa forma, nas séries financeiras, a volatilidade de uma dada série temporal é uma medida de risco que corresponde a variância condicional da série de retornos de um instrumento financeiro. Tsay e Brady (2010) define a previsão de “Value at Risk” (VaR) como uma medida de risco de uma carteira de ativos financeiros e refere-se ao pior desempenho esperado que pode ocorrer num determinado período de tempo sujeito a uma certa probabilidade a priori.

Assim, a análise do VaR representa uma ferramenta extremamente útil. Morettin (2008) reforça que um dos problemas mais importantes atualmente em finanças consiste em calcular o risco de uma posição financeira e o VaR representa, portanto, um instrumento frequentemente usado e adequado para isso.

É importante destacar as vantagens e limitações no uso do VaR. Essa métrica pode ser utilizada para comparar os riscos de mercado de todas as atividades da empresa, podendo ser estendida a outros tipos de risco como crédito e operacional. Como desvantagem, ele somente considera riscos de curto prazo em circunstâncias normais de mercado, com possibilidade de custo de implementação alto e de medidas imprecisas, conforme experiências apontadas na literatura por Berkowitz e O'Brien (2002).

Assim, serão feitos nessa dissertação o estudo e avaliação de alguns modelos com base nas séries de retornos financeiros, analisando-se o melhor ajuste.

Para elaboração do modelo de previsão ao longo do tempo é importante levar em consideração que existe incerteza para o modelo ideal de acordo com Chatfield (2004). Com base nisso, serão apresentados nesse estudo mais de um modelo, bem como as vantagens e desvantagens inerentes a cada um.

Dentre os modelos que serão abordados, é importante destacar o modelo autorregressivo com heterocedasticidade (ARCH). Esse modelo proposto por [Engle \(1982\)](#) é caracterizado pela dependência não-linear entre os retornos em que a volatilidade num determinado instante de tempo depende diretamente dos valores passados da série financeira. Em contraposição, o modelo de volatilidade estocástica (MVE), primeiro proposto por [Taylor \(2008\)](#), não faz essa suposição sobre a volatilidade.

Para o modelo ARCH, [Morettin e Tolo \(2006\)](#) salienta que os retornos são não-correlacionados serialmente, mas a volatilidade ou variância condicional depende de retornos passados por meio de uma função quadrática. Sendo assim, a seleção desse modelo foi relevante pois leva em consideração a característica heterocedástica da série. Dessa forma, a análise de diversos modelos permitem uma discussão interessante para a conclusão do melhor ajuste do valor em risco para as séries financeiras selecionadas.

SÉRIES DE RETORNO E APLICAÇÃO EM DADOS REAIS

As técnicas de análise de séries temporais são amplamente aplicadas na área financeira para a modelagem da série de retornos. Este capítulo contextualiza os diversos tipos de retornos e sua aplicação às séries financeiras selecionadas.

2.1 Séries de retorno

As séries de retornos tornam-se mais úteis do que a utilização das série dos preços dos ativos pois são livres de escala e possuem propriedades estatísticas interessantes, como estacionariedade e ergodicidade, além de atender aos interesses de investidores.

Uma série temporal estacionária se desenvolve aleatoriamente no tempo, em torno de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estatístico ao longo do tempo, em que as leis de probabilidade do processo não mudam com o tempo.

Ergodicidade, conforme (MORETTIN, 2008) permite estimar características de interesse, como média, autocovariância, etc, a partir de uma trajetória única do processo. Ou seja, um processo é ergódico na média, se a média amostral convergir, em probabilidade, para a média verdadeira do processo.

Um dos objetivos desta dissertação será, portanto, modelar o retorno dos ativos selecionados em diversos modelos que serão apresentados nos Capítulos 3 e 4. Dos retornos em séries financeiras destacam-se os que serão citados nas subseções seguintes, considerando:

$P_t, t \geq 0$ a série de preços de um ativo no tempo t e

$\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$, a variação de preços entre $t - 1$ e t .

2.1.1 Variação relativa dos preços ou retorno líquido simples

Considere o preço do ativo no instante t por P_t , calcula-se a variação relativa dos preços entre os instantes $t - 1$ e t por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}. \quad (2.1)$$

2.1.2 Retorno bruto relativo

Considere o preço do ativo no instante t por P_t , calcula-se o retorno bruto relativo entre os instantes $t - 1$ e t como:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \Rightarrow 1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (2.2)$$

2.1.3 Log-retorno ou retorno composto contínuo

Como, $\ln(1 + R_t) \approx R_t$ se $|R_t| < 1$, então é aconselhável utilizar o log-retorno:

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \Rightarrow R_t = e^{r_t} - 1. \quad (2.3)$$

Denotando-se por $p_t = \log P_t$ temos que: $r_t = p_t - p_{t-1}$.

Em complemento:

$$R_t = e^{r_t} - 1.$$

pode-se usar como aproximação para r_t pequeno que $e^{r_t} \approx 1 + r_t$. Portanto, $R_t \approx r_t$. Além disso, a aproximação entre r_t e R_t é $\log(1 + R_t) \approx R_t$ se $|R_t| < 1$.

2.1.4 Retorno multiperíodos

O retorno simples do período k entre $t - k$ e t é dado por:

$$R_t(k) = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}.$$

Em termos de retorno de um período podemos escrever $R_t(k)$ como:

$$[1 + R_t(k)] = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1}).$$

Então:

$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} \Rightarrow R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1 \quad (2.4)$$

2.1.5 Retorno médio anualizado ou média anual

Considera-se o retorno médio ou média anual como a média geométrica dos retornos.

$$\bar{R}_t(k) = \left[\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]^{1/k} - 1$$

O log-retorno do período k corresponde a:

$$r_t(k) = \log(1 + R_t(k)),$$

sendo

$$1 + R_t(k) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}),$$

tem-se que:

$$\log(1 + R_t(k)) = \sum_{j=0}^{k-1} \log(1 + R_{t-j}).$$

Portanto:

$$r_t(k) = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}. \quad (2.5)$$

2.1.6 Agregação de retornos

Supondo uma carteira com N ativos, A_1, \dots, A_N , associados, respectivamente, aos pesos w_1, \dots, w_n , com

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

Em que R_i são os retornos simples e r_i os log-retornos desses ativos, para $i = 1, 2, \dots, N$. Se P_0 indicar o preço inicial da carteira, após um período tem-se, para retornos continuamente compostos:

$$\frac{P_1}{P_0} = \sum_{i=1}^N (w_i e^{r_i})$$

O log- retorno da carteira é:

$$r_t = \log \frac{P_1}{P_0} = \log \sum_{i=1}^N (w_i e^{r_i}) \quad (2.6)$$

O retorno simples da carteira é :

$$R_c = \sum_{i=1}^N (w_i R_i) \quad (2.7)$$

Na composição contínua, o retorno simples é a soma ponderada de retornos simples. Considerando a composição discreta, temos:

$$R_c = \sum_{i=1}^N (w_i r_i)$$

Na composição discreta, o retorno simples é a soma ponderada de log-retornos. Isso se justifica quando $|r_i| < 1$ pois $e^{r_i} \approx 1 + r_i$ e $R_i = e^{r_i} - 1 \approx r_i$.

Segundo (MORETTIN; TOLOI, 2006) os retornos financeiros apresentam características peculiares que outras séries não possuem, uma vez que:

1. Raramente apresentam tendências ou sazonalidades, com exceção de séries de preços podem apresentar tendências;
2. Retornos são, em geral, não correlacionados;
3. Os quadrados dos retornos, normalmente, apresentam correlação;
4. séries de retorno apresentam agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo;
5. A distribuição dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma distribuição Normal;
6. A distribuição aproximadamente simétrica, é em geral leptocúrtica;

Dessa forma, o objetivo dessa dissertação consiste em modelar a volatilidade, que é a variância condicional de uma variável, comumente um retorno. Essas modelagens serão apresentadas nos Capítulos 3 e 4.

2.2 Aplicação de séries de retorno para dados reais

Nesse trabalho será utilizado o log-retorno ou retorno composto contínuo para as séries financeiras diárias do Dólar, Euro e Índice IBOVESPA no período de janeiro de 2014 a abril de 2016.

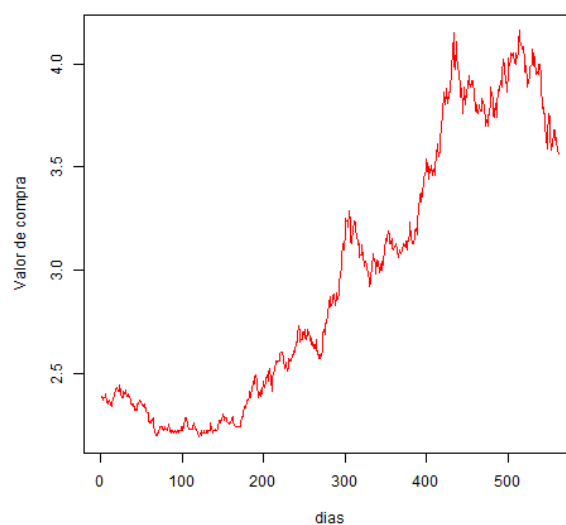
Nessa seção será apresentada uma breve descrição de cada uma dessas variáveis.

2.2.1 Dólar

O Dólar comercial é a cotação da moeda norte-americana (US\$) com paridade na moeda brasileira (R\$), utilizado pelas grandes empresas para a realização de importação e exportação de mercadorias.

A base de dados utilizada foi extraída do site *Thomson Reuters* ([REUTERS](#),) e corresponde ao valor diário de compra do Dólar do período de 02 de janeiro de 2014 a 01 de abril de 2016.

Figura 1 – Série temporal diária do valor de compra do Dólar de janeiro de 2014 a abril de 2016

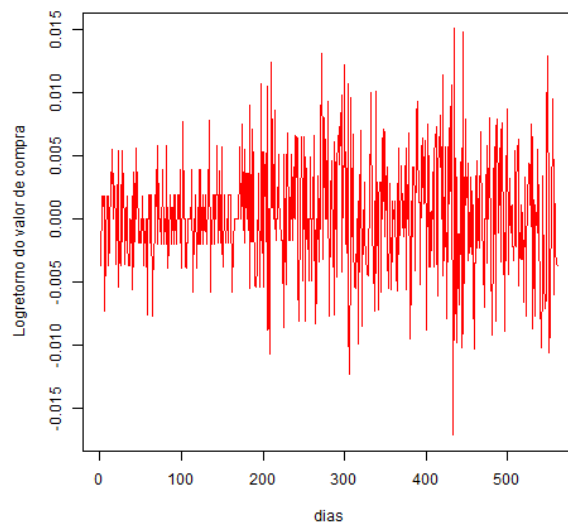


Fonte: Elaborado pelo autor.

Foi calculado o log-retorno do valor de compra dessa moeda para o período mencionado e realizado uma estatística descritiva para melhor interpretação dessa série temporal. O cálculo do log-retorno foi realizado a partir do tempo $t = 2$, uma vez que é necessário o dado referente ao tempo anterior ($t = 1$) para o cálculo dessa estatística.

Com base na Figura 2 nota-se que a série é aparentemente estacionária, com a presença de agrupamentos das volatilidades e média em torno de zero, característica essa reforçada pela Tabela 1.

Figura 2 – Série temporal diária do log-retorno de compra do Dólar de janeiro de 2014 a abril de 2016



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 1 – Estatísticas para a série temporal de log-retorno de compra do Dólar

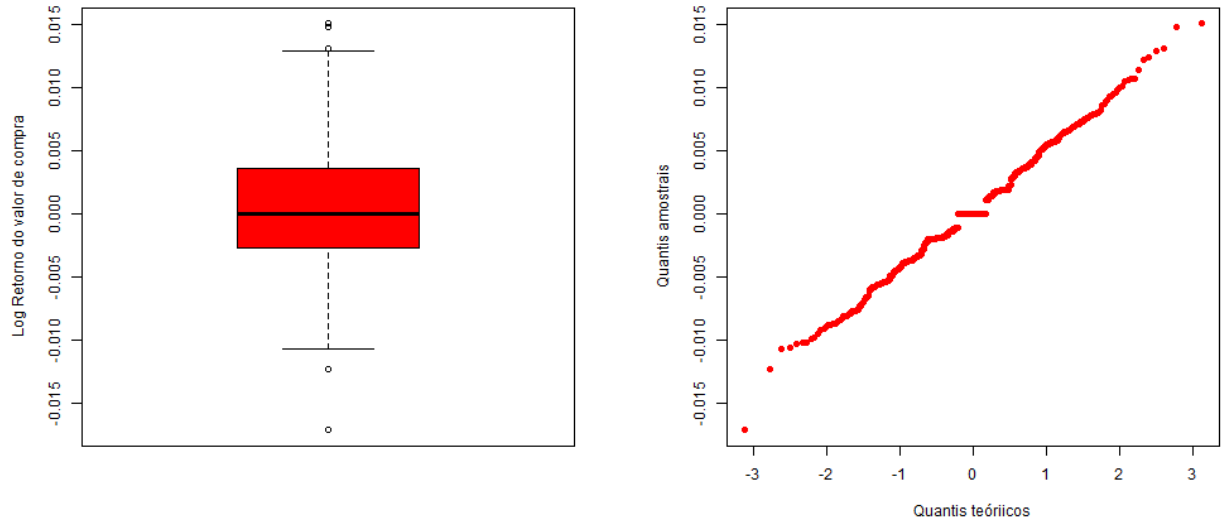
Estatísticas	Valor
Média	0,000308
Variância	0,000022
1º quartil	-0,002697
Mediana	0
3º quartil	0,003604
Log-retorno mínimo	-0,017080
Log-retorno máximo	0,015050
Desvio padrão	0,004735
Coef.assimetria	0,064348
Curtose	0,128274

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelas estatísticas da Tabela 1 é possível deduzir que a média da série do log-retorno de compra do Dólar está próxima de zero e a série apresenta uma variância pequena. O coeficiente de assimetria positivo é próximo a zero. Pelo boxplot, apresentado na Figura 3 ratificam-se essas características uma vez que a posição da linha mediana no retângulo que informa sobre a assimetria da distribuição está em torno de zero. No caso, como a mediana é um pouco mais próxima do 1º quartil os dados são ligeiramente positivamente assimétricos. Em complemento, a curtose, medida de dispersão que caracteriza o pico da curva da função de distribuição de probabilidade, possui valor positivo e bem próximo a zero, então a distribuição é um pouco mais afunilada. Essa distribuição se aproxima a uma mesocúrtica com leve tendência a leptocúrtica.

Pela Figura 3, no gráfico quantil-quantil, ferramenta útil para checar adequação de distribuição de frequência dos dados a uma distribuição de probabilidades, testou-se a adequação

Figura 3 – Boxplot e gráfico da Normal Quantil-Quantil para a série temporal do log-retorno do valor de compra do Dólar



Fonte: Elaborado pelo autor.

da série temporal a uma distribuição Normal. Como resultado, apesar de os dados em sua maior parte apresentarem uma aderência à distribuição Normal, ao centro e nas extremidade é possível perceber uma linha horizontal que destoa do restante, colocando em dúvida o fato dos dados apresentarem uma distribuição Normal.

Na Figura 4 é apresentado o coeficiente de autocorrelação que mede a associação entre o valor de uma variável e o valor da mesma variável em período de tempo fixo anterior. Em geral, as correlações estão em sua maioria dentro da linha pontilhada (intervalo com 95% de confiança) o que revela que as correlações são não significativas.

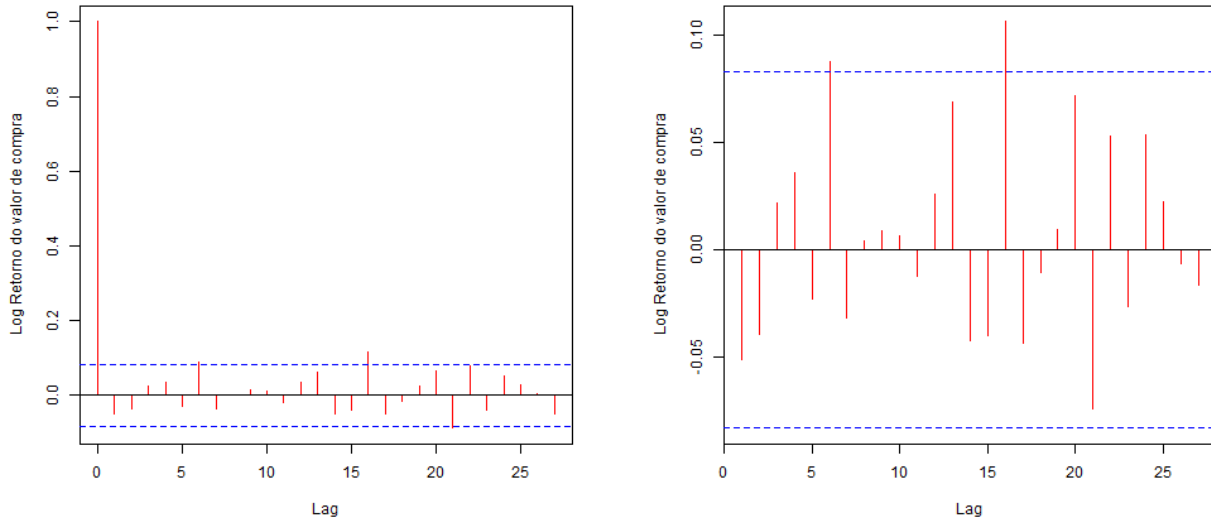
Ainda na Figura 4, a autocorrelação parcial corresponde a correlação de r_t e r_{t-k} removendo o efeito das observações $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-k+1}$. Essas duas últimas figuras sugerem que os dados sejam não correlacionados. Esse resultado é esperado conforme descrito na Seção 2.1, referente às peculiaridades dos retornos financeiros.

Juntamente com a hipótese de normalidade poderia-se concluir que os dados são independentes. Para verificar essa hipóteses será feito também a análise de autocorrelação do log-retorno ao quadrado da série.

Na Figura 5 que refere-se ao log-retorno ao quadrado é possível perceber que os dados são correlacionados e não são independentes devido. Isso reforça um fato estilizado relativo a retornos financeiros em que os quadrados do retorno são autocorrelacionados, conforme mencionado na Seção 2.1.

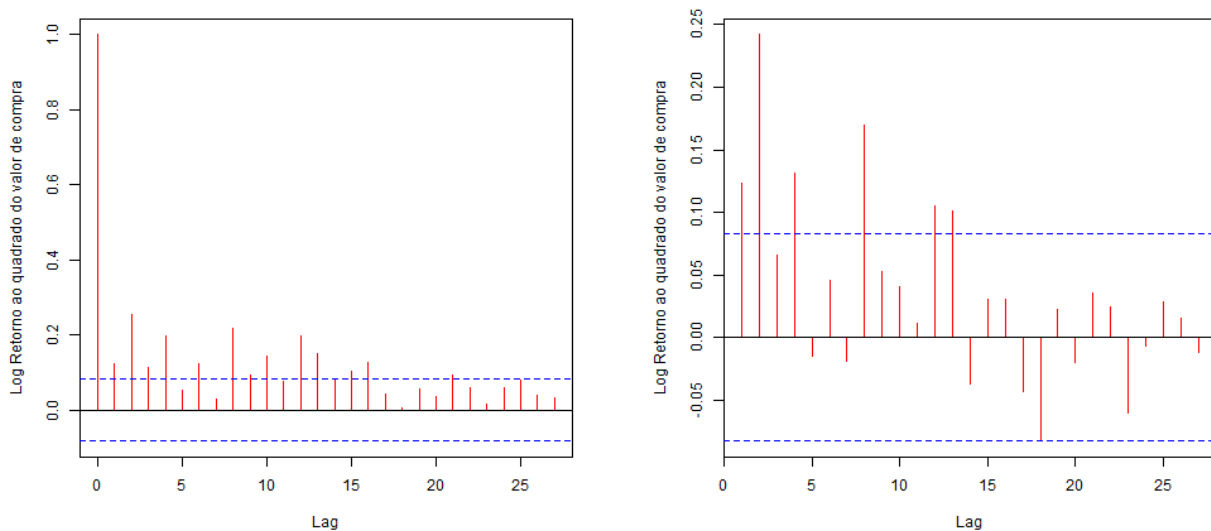
Dessa forma, pode-se afirmar que os log-retornos são não correlacionados, mas não são independentes e não se descarta a possibilidade de utilização de modelos de séries temporais

Figura 4 – Coeficiente de autocorrelação (painel esquerdo) e autocorrelação parcial para o log-retorno do Dólar (painel direito)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial para o log-retorno ao quadrado do Dólar (painel à direita)



Fonte: Elaborado pelo autor.

para esses dados.

Além disso, foi realizado um teste quantitativo para verificar a normalidade da série de retorno do Dólar, considerando o log-retorno. Salienta-se que o log-retorno ao quadrado foi utilizado somente para o teste supracitado.

O teste de *Kolmogorov-Smirnov* testa a diferença absoluta entre a função de distribuição

acumulada assumida para os dados, no caso a Normal, e a função de distribuição empírica dos dados (avalia o ajuste de uma distribuição para seus dados).

Nesse caso, as hipóteses são:

- H_0 : A amostra provém de uma população Normal
- H_1 : A amostra não provém de uma população Normal

O nível de significância do teste considerado será de 10% para o log-retorno do valor de compra do Dólar. Dessa forma o teste consiste em rejeitar H_0 ao nível de significância α de 10% se o p-valor calculado for inferior a α . Ao realizar o teste de *Kolmogorov*, obteve-se a seguinte estatística:

Teste de normalidade para os dados referentes ao log-retorno:

$$D = 0,494, p - \text{valor} < 2,2e - 16$$

Dessa forma, como $2,2e-16 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados. Assim, quando avalia-se os dados referentes ao log-retorno pode-se afirmar ao nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

Em complemento, foi realizado um outro teste estatístico para verificar a adequação dos dados a uma determinada distribuição. Para isso, foi utilizado o teste de *Shapiro-Wilk* para verificação da adequação da distribuição dos dados referentes ao log-retorno a uma distribuição Normal:

Os valores obtidos foram:

$$W = 0,99498, p - \text{valor} = 0,06443$$

Dessa forma, como $0,06443 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados. Assim, quando avalia-se os dados referentes ao log-retorno pode-se afirmar com nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

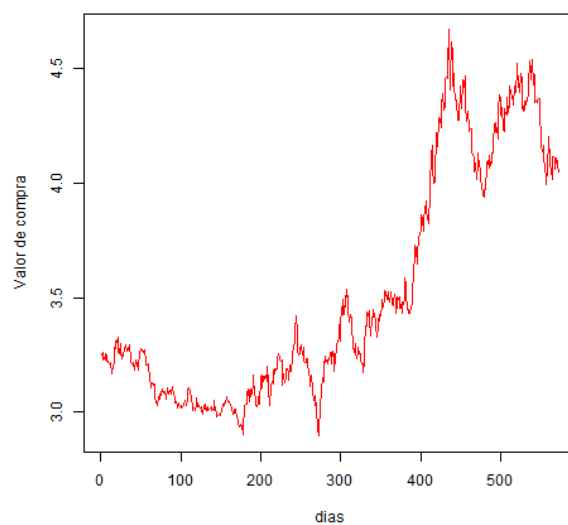
Assim, podemos concluir sobre o log-retorno do valor de compra do dólar que o teste qualitativo (gráfico) quantil-quantil apresentou um indicativo sobre os retornos serem provenientes de uma distribuição Normal, mas as divergências ao centro e nas extremidades do gráfico, colocaram essa hipótese em dúvida. Em complemento, realizou-se os testes quantitativos *Kolmogorov* e *Shapiro*, e ambos indicaram que os dados de log-retorno não provém de uma distribuição Normal.

2.2.2 Euro

O Euro é a moeda oficial da União Européia, a qual é constituída por 28 Estados-membros independentes situados principalmente na Europa.

A base de dados foi extraída do site *Thomson Reuters* ([REUTERS](#),) e contempla os dados referentes ao valor de compra diária do Euro para o período de 02 de janeiro de 2014 a 01 de abril de 2016. Essa série temporal é representada, conforme a Figura 6:

Figura 6 – Série temporal diária do valor de compra do Euro de janeiro de 2014 a abril de 2016



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base nesses dados foi elaborada a série de retorno calculada com base no log-retorno ou retorno composto contínuo do valor de compra dessa moeda e realizado diversas estatísticas descritivas, a seguir.

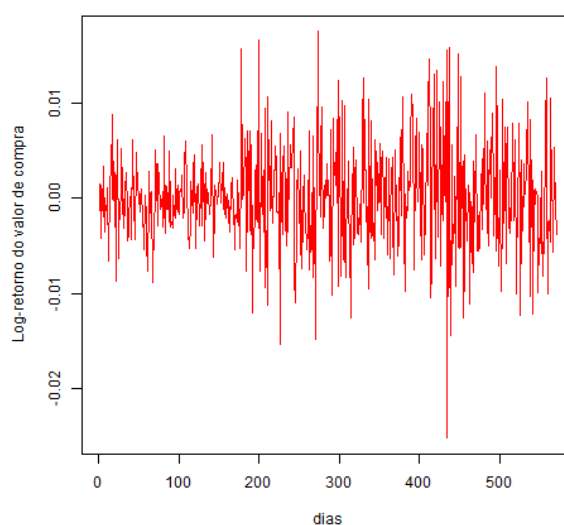
O cálculo do log-retorno foi realizado a partir do tempo $t = 2$, uma vez que é necessário o dado referente ao tempo anterior ($t = 1$) para o cálculo dessa estatística.

Na Figura 7 nota-se a média em torno de zero, uma certa estacionariedade, acompanhada de grupos de volatilidade ao longo do tempo.

Pelas estatísticas da Tabela 2 é possível deduzir que a média da série do retorno de compra do Euro também está próxima de zero. A variância da série de retornos está pequena e com coeficiente de assimetria próximo a zero, com uma concentração de dados em torno da média e distribuição simétrica com leve assimetria positiva. A curtose está positiva e próxima a zero, sendo a distribuição um pouco afunilada.

No gráfico boxplot, apresentado na Figura 8, a mediana está em torno de zero e apresenta alguns *outliers*. No gráfico quantil-quantil, não se pode descartar a possibilidade dos dados se adequarem a uma distribuição Normal.

Figura 7 – Série temporal diária do log-retorno de compra do Euro de janeiro de 2014 a abril de 2016



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Estatísticas para a série temporal de log-retorno de compra do Euro

Estatísticas	Valor
Média	0,000167
Variância	0,000028
1º quartil	-0,002889
Mediana	-0,000028
3º quartil	0,003204
Log-retorno mínimo	-0,025140
Log-retorno máximo	0,017440
Desvio padrão	0,005307
Coef.assimetria	0,068667
Curtose	1,323611

Fonte: Elaborado pelo autor.

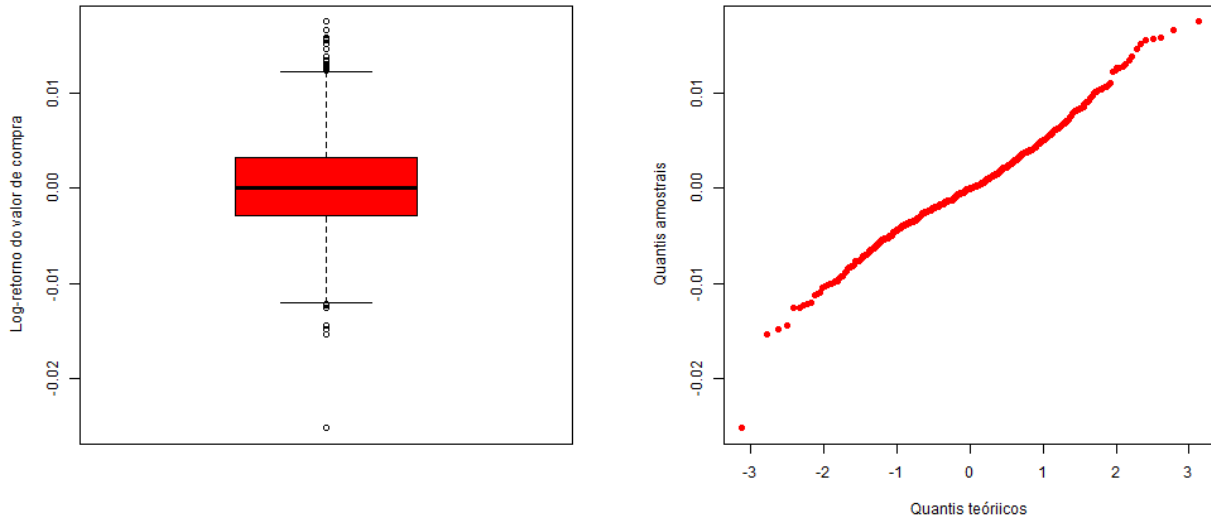
Na Figura 9 é apresentado o coeficiente de autocorrelação que está em sua maioria dentro da linha pontilhada (intervalo com 95% de confiança) o que revela que os dados apresentam autocorrelação não significativa. A autocorrelação parcial também possui diversas observações dentro da linha pontilhada.

Dessa forma, foi elaborado novamente os gráficos referentes ao coeficiente de autocorrelação e autocorrelação parcial e aplicado aos dados, porém considerando o log-retorno elevado ao quadrado.

Com os gráficos da Figura 10 nota-se que a série temporal diária do log-retorno ao quadrado apresenta correlação e, conseqüentemente, os dados não são independentes.

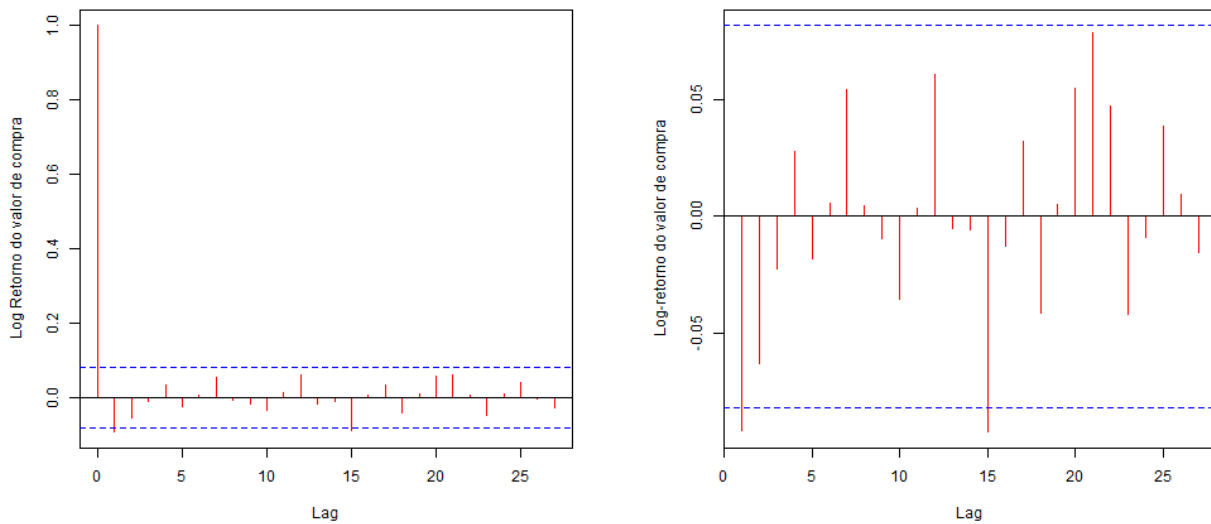
Os testes quantitativos para o Euro obtiveram os seguintes resultados:

Figura 8 – Box plot (painel à esquerda) e gráfico do quantil quantil (painel à direita) para o log-retorno do valor de compra do Euro



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial para o log-retorno do Euro (painel à direita)



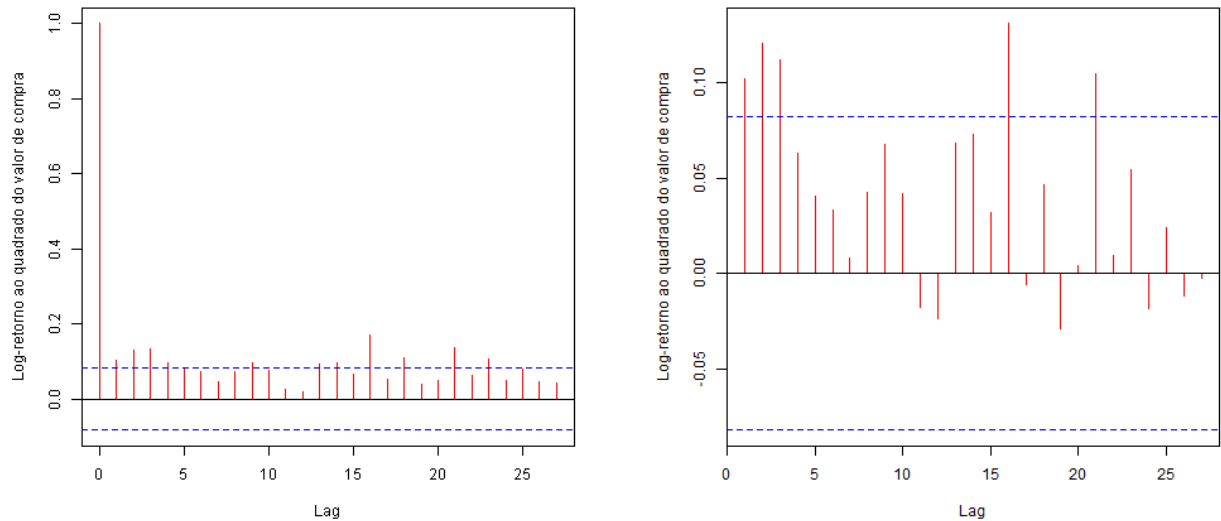
Fonte: Elaborado pelo autor.

Teste de *kolmogorov-Smirnov* considerando o nível de significância de 10% para os dados referentes ao log-retorno:

$$D = 0,49304, p - \text{valor} < 2,2e - 16.$$

Dessa forma, como $2,2e-16 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados.

Figura 10 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial para o log-retorno ao quadrado do Euro (painel à direita)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, quando avalia-se os dados referentes ao log-retorno pode-se afirmar com nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

Para o teste de *Shapiro-Wilk* aplicado ao log-retorno dos dados, considerando o nível de significância de 10%, os valores obtidos foram:

$$W = 0,98538, p - \text{valor} = 1,722e - 05$$

Dessa forma, como $1,722e-05 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados. Assim, quando avalia-se os dados referentes ao log-retorno pode-se afirmar com nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

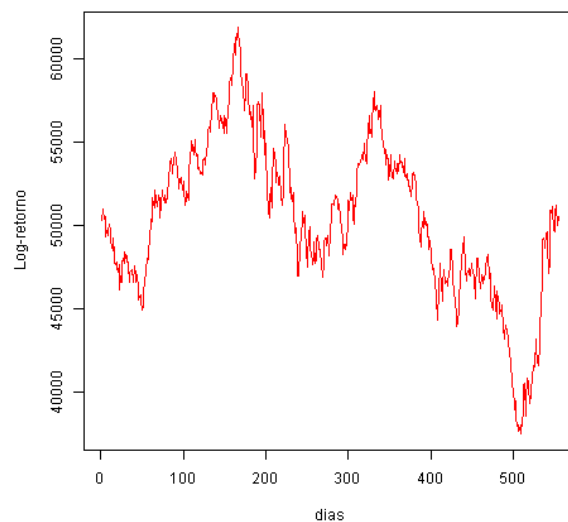
Pode-se concluir sobre o log-retorno do valor de compra do euro que o teste qualitativo (gráfico) quantil-quantil sugere uma distribuição Normal, mas alguns pontos nas caudas colocou essa hipótese em dúvida. Assim realizou-se os testes quantitativos *Kolmogorov* e *Shapiro-Wilk*, e ambos indicaram que os dados de log-retorno não provém de uma distribuição Normal. A correlação entre os dados referente ao log-retorno do valor de compra do Euro demonstra-se irrelevante.

2.2.3 Índice IBOVESPA

O IBOVESPA, principal índice de ações da Bolsa de Valores de São Paulo, é o resultado de uma carteira de ativos que objetiva representar um indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro. A análise estatística temporal desse índice revelou importantes conclusões.

A base de dados foi extraída do site "www.bmfbovespa.com.br" (BOVESPA, 2015) e corresponde ao valor diário do índice IBOVESPA de 02 de janeiro de 2014 a 01 de abril de 2016. Essa série temporal é representada conforme Figura 11:

Figura 11 – Série temporal diária do índice IBOVESPA de janeiro de 2014 a abril de 2016



Fonte: Elaborado pelo autor.

Foi elaborado a série temporal desse índice com base no log-retorno e feito uma análise com base em estatística descritiva, a seguir:

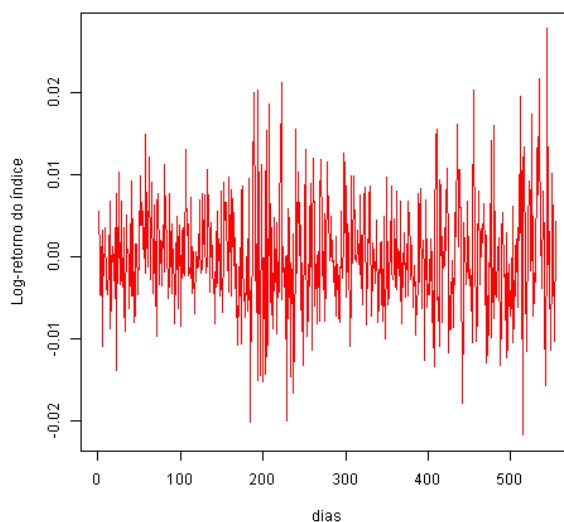
O cálculo do log-retorno foi realizado a partir do tempo $t = 2$, uma vez que é necessário o dado referente ao tempo anterior ($t = 1$) para o cálculo dessa estatística.

A Figura 12 reforça os fatos estilizados referentes aos retornos como estacionariedade e agrupamento de volatilidades, além da média em torno de zero, que também é reforçada pela análise quantitativa seguinte.

Na Tabela 3, referente as estatísticas descritivas, é possível deduzir que a média e a variância da série do log-retorno do Índice IBOVESPA está próxima de zero assim como o coeficiente de assimetria positivo, com uma distribuição simétrica e leve assimetria positiva. Em complemento, a curtose possui valor positivo e próximo a zero, o que sugere uma distribuição com a cauda um pouco mais afunilada e alta.

No gráfico da Figura 13, que refere-se ao quantil-quantil, não é possível descartar uma

Figura 12 – Série temporal diária do log-retorno do índice IBOVESPA de janeiro de 2014 a abril de 2016



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 – Estatísticas para a série temporal de log-retorno do Índice IBOVESPA

Estatísticas	Valor
Média	0,000003
Variância	0,000022
1º quartil	-0,004467
Mediana	-0,000488
3º quartil	0,004081
Log-retorno mínimo	-0,021660
Log-retorno máximo	0,027740
Desvio padrão	0,006985
Coef.assimetria	0,300761
Curtose	0,758217

Fonte: Elaborado pelo autor.

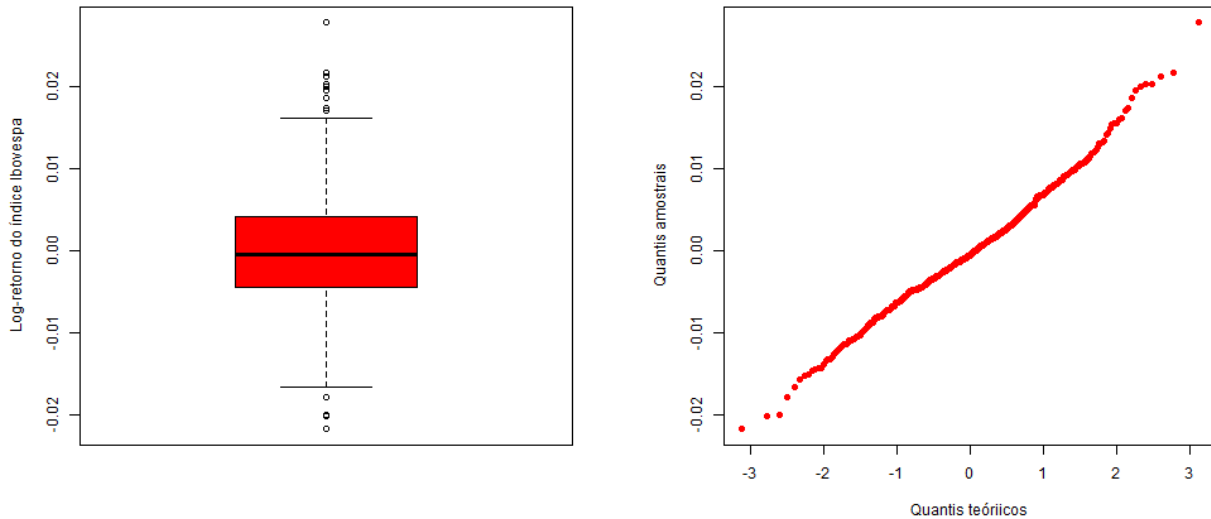
adequação de distribuição de frequência a uma distribuição Normal.

Na Figura 14 é possível verificar o coeficiente de autocorrelação e a autocorrelação parcial que estão em sua maioria dentro da linha pontilhada (intervalo com 95 por cento de confiança), o que revela que a correlação dos dados é não significativa.

Com os gráficos da Figura 15 foram realizados os mesmos testes anteriores, porém aplicado ao log-retorno elevado ao quadrado. Assim, nota-se que a série temporal diária do log-retorno ao quadrado apresenta dados correlacionados e, conseqüentemente, não independentes, o que sugere a utilização de um modelo de séries temporais.

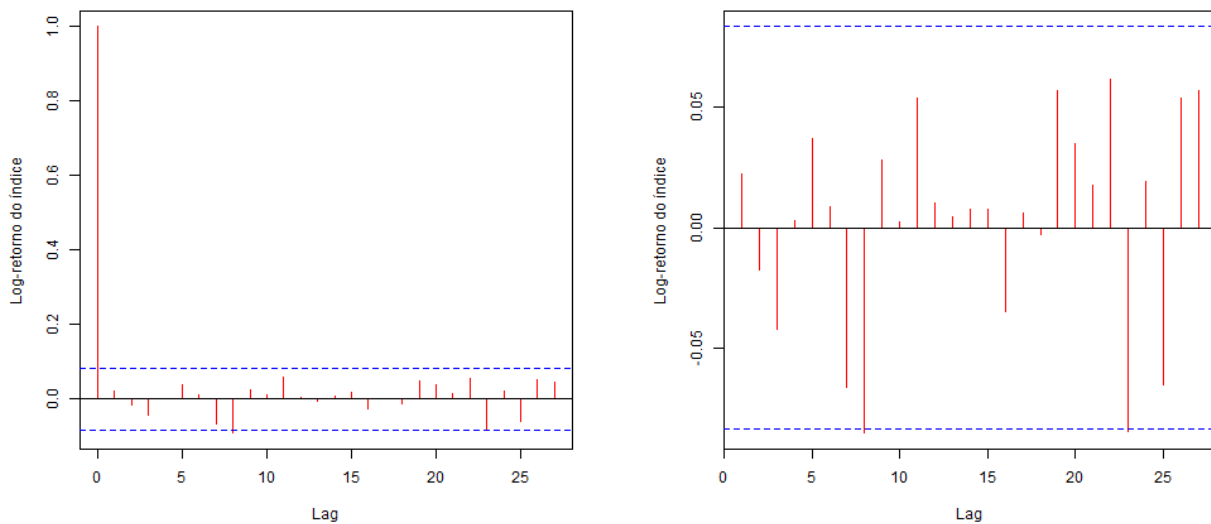
Em complemento, os testes quantitativos realizados para o índice IBOVESPA contemplou os seguintes resultados:

Figura 13 – Box plot (painel à esquerda) e gráfico do quantil quantil (painel à direita) para o log-retorno do Índice IBOVESPA



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial (painel à direita) para o log-retorno do IBOVESPA



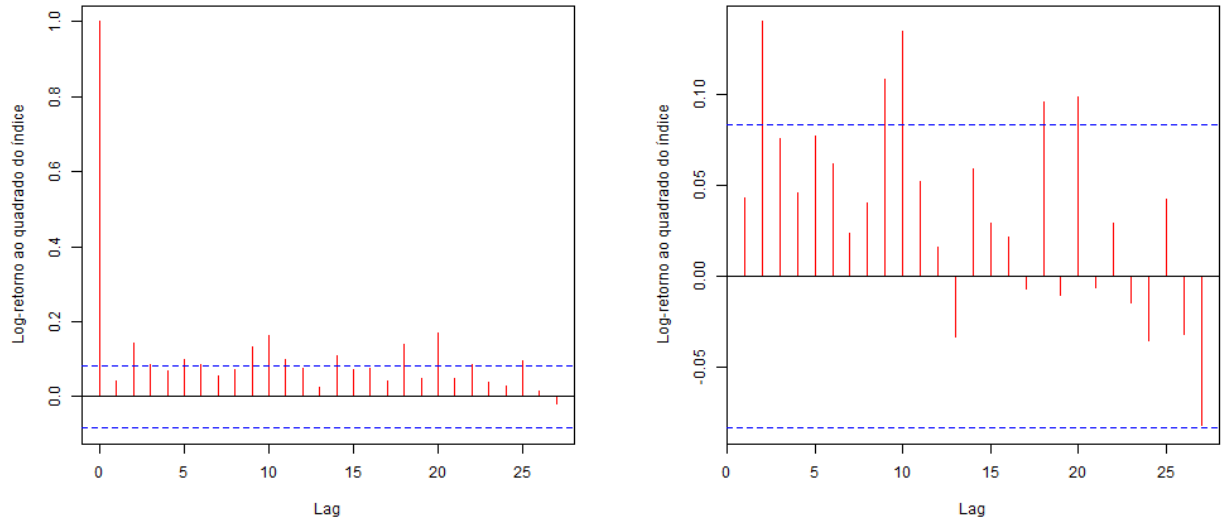
Fonte: Elaborado pelo autor.

Teste de *kolmogorov-Smirnov* considerando o nível de significância de 10% para os dados referentes ao log-retorno do Índice IBOVESPA:

$$D = 0,49136, p - \text{valor} < 2,2e - 16$$

Dessa forma, como $2,2e-16 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados.

Figura 15 – Coeficiente de autocorrelação (painel à esquerda) e autocorrelação parcial (painel à direita) para o log-retorno ao quadrado do IBOVESPA



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, quando se avalia os dados referentes ao log-retorno, pode-se afirmar com nível de significância de 1% que a amostra não provém de uma população Normal.

Para o teste de Shapiro-Wilk aplicado ao log-retorno dos dados, considerando o nível de significância de 10%, os valores obtidos foram:

$$W = 0.99066, p - \text{valor} = 0.001401$$

Dessa forma, como $0,001401 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados. Assim, quando se avalia os dados referentes ao log-retorno pode-se afirmar com nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

Pode-se concluir sobre o log-retorno do valor diário do Índice IBOVESPA:

1. O teste qualitativo (gráfico) quantil-quantil sugere uma distribuição Normal, mas alguns pontos nas caudas colocaram essa hipótese em dúvida. Assim realizou-se os testes quantitativos *Kolmogorov* e *Shapiro*, e ambos, assim como o ocorrido no Dólar e euro, indicaram que os dados de log-retorno não provém de uma distribuição Normal.
2. A correlação do log-retorno do Índice IBOVESPA está muito baixa ao contrário do que acontece com o log-retorno ao quadrado.

De uma forma geral, pode-se concluir que, como os dados de todos os ativos analisados não seguem uma distribuição Normal, não apresentam autocorrelação do log-retorno, então

não existe independência entre os dados de cada ativo. Isso reforça a ideia de que uma série de retornos é, em geral, não correlacionada, mas dependente (MORETTIN, 2008) .

Assim, modelos ARCH tornam-se adequados para o cálculo do VaR, pois se ajustam bem a retornos não correlacionados serialmente e com volatilidade dependente de retornos passados, sendo essa última característica mais aprofundada no Capítulo 4.

METODOLOGIAS PARA CÁLCULO DO VaR

O valor em risco mensura a volatilidade do ativo financeiro ou de uma carteira de instrumentos financeiros, ou seja, sua variação máxima ou o quanto seria possível perder/ganhar, com uma certa probabilidade ao longo de um determinado tempo. Do ponto de vista empresarial, o valor em risco corresponde a uma medida de perda associada a um evento extremo (variação máxima), sob condições normais de mercado.

Suponha que em determinado instante t , esteja-se interessado em calcular o risco de uma posição financeira para um horizonte $t > 0$. Como já definido no Capítulo 2, seja $r_t(k)$ o logaritmo da variação do valor desse ativo entre dois instantes t e $t - k$ e considerando F a função acumulada de $r_t(k)$, define-se:

VaR de uma posição comprada, possuir um determinado ativo no tempo, com probabilidade p :

$$p = Pr(r_t(k) \leq VaR_p) = F(VaR_p). \quad (3.1)$$

VaR de uma posição vendida, vender um ativo que não se possui, que é alugado, com probabilidade p :

$$p = Pr(r_t(k) \geq VaR_p) = 1 - F(VaR_p). \quad (3.2)$$

O cálculo do VaR está diretamente relacionado ao quantil da distribuição considerada e a variância dos retornos. Na fórmula 3.1 tem-se o p -quantil da distribuição, já na fórmula 3.2 tem-se o $(1-p)$ -quantil da distribuição dos retornos. Para se calcular o VaR, deve-se estimar a função de distribuição F . Consequentemente, diversas formas de estimar a função de distribuição F , acarretam diversas formas de estimar o VaR. Na dissertação será adotada a forma segundo a expressão em 3.1, na qual o VaR é o p -quantil da distribuição F .

Assim, propõe-se, inicialmente, o cálculo do VaR segundo duas metodologias: uma abordagem baseada no cálculo dos quantis empíricos e, num segundo momento, outra com base no modelo Normal com variância constante.

3.1 Abordagem não paramétrica - VaR empírico

O VaR empírico é o p-quantil da distribuição empírica dos dados, F_T :

$$F_{(r_t)}(x) = 1/T * \sum_{t=1}^T I(r_t \leq x). \quad (3.3)$$

Onde $I(A)$ é uma função indicadora de um evento A , tal que:

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorre} \\ 0, & \text{se } A \text{ não ocorre.} \end{cases}$$

Dessa forma, o VaR_p é definido como:

$$VaR_p = F_{(r_t)}^{-1}(p). \quad (3.4)$$

Para isso, supõe-se que a distribuição preditiva dos retornos corresponde ao da amostra, no caso, nas amostras do Dólar, Euro e Índice IBOVESPA. Dessa forma, segue o cálculo dos percentis empíricos do log-retorno para o ano de 2014 e 2015, nas subseções seguintes:

3.1.1 Cálculo do VaR pelo método dos percentis empíricos para o log-retorno do Dólar

Inicialmente foram selecionados os log-retornos apenas dos anos de 2014 e 2015 e realizado o cálculo dos percentis 1%, 5%, 10%, 90%, 95% e 99%, conforme Tabela 4:

Tabela 4 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Dólar em 2014/15 baseado no percentis empíricos

Percentil (%)	VaR do Dólar em 2014/15
1	-0,009830
5	-0,007608
10	-0,005377
90	0,006540
95	0,007890
99	0,011415

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, com base nos valores encontrados para os anos de 2014 e 2015, verificou-se qual seria o percentil correspondente a esses valores para o ano de 2016, com o intuito de avaliar como esse quantil se comporta ao longo do tempo, conforme Tabela 5.

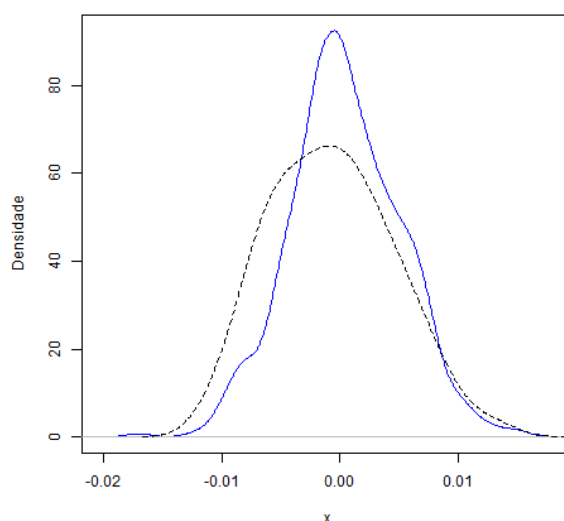
Dessa forma, é possível perceber que, ao analisar a curva de 2016 nota-se um deslocamento da mesma para a direita, além de um achatamento da curva quando comparada com a do ano anterior, com destaque nas caudas que ficam mais pesadas. Assim, conclui-se que

Tabela 5 – Cálculo do percentis de 2016 com base no VaR do Dólar de 2014 e 2015

VaR do Dólar em 2014/15	Percentil correspondente em 2016 (%)
-0,009830	3,23
-0,007608	9,68
-0,005377	22,58
0,006540	91,94
0,007890	95,16
0,011415	98,39

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Função densidade empírica para o Dólar nos anos de 2014 e 2015 (linha sólida) e para 2016 (linha pontilhada)



Fonte: Elaborado pelo autor.

a variância não permanece constante, uma vez que o achatamento da cauda está diretamente relacionado ao aumento da variância.

3.1.2 Cálculo do VaR pelo método dos percentis empíricos para o log-retorno do Euro

O cálculo dos percentis empíricos nos anos de 2014 e 2015 para o Euro acarretou nos seguintes valores, conforme Tabela 6:

Para cada um dos valores correspondentes aos percentis empíricos do ano de 2014 e 2015 avaliou-se qual seria o percentil desses valores para o ano de 2016, de acordo com a Tabela 7.

Pela Figura 7, é possível notar que a curva referente ao ano de 2016 está mais achatada que a dos anos anteriores, sendo que a cauda esquerda está mais densa e a da direita inicia mais

Tabela 6 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Euro em 2014/15 baseado no percentis empíricos

Percentil (%)	VaR do Euro em 2014/15
1	-0,012551
5	-0,007781
10	-0,005717
90	0,006542
95	0,009370
99	0,015076

Fonte: Elaborado pelo autor.

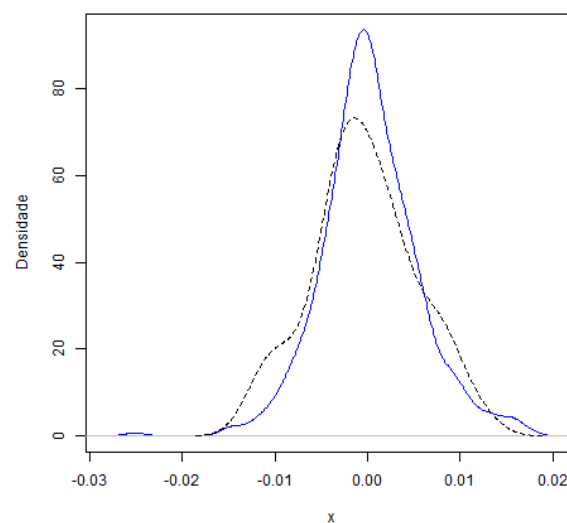
Tabela 7 – Cálculo do percentis de 2016 com base no VaR do Euro de 2014 e 2015

VaR do Euro em 2014/15	Percentil correspondente em 2016 (%)
-0,012551	0
-0,007781	10,76
-0,005717	15,38
0,006542	86,15
0,009370	95,38
0,015076	100

Fonte: Elaborado pelo autor.

densa e depois sofre uma redução. Isso revela uma alteração da variância sendo que em alguns momentos essa estatística está maior e menor quando comparado com a dos anos anteriores.

Figura 17 – Função densidade empírica para o Euro nos anos de 2014 e 2015 (linha sólida) e para 2016 (linha pontilhada)



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.3 Cálculo do VaR pelos percentis empíricos para o log-retorno do Índice IBOVESPA

Foi calculado para o Índice IBOVESPA, os percentis empíricos de 2014 e 2015. Os resultados obtidos estão contemplados na Tabela 8.

Tabela 8 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Índice IBOVESPA em 2014/15 baseado no percentis empíricos

Percentil (%)	VaR do Índice IBOVESPA em 2014/15
1	-0,015101
5	-0,010805
10	-0,008086
90	0,008389
95	0,010662
99	0,016351

Fonte: Elaborado pelo autor.

Avaliou-se para cada um dos valores correspondentes aos percentis empíricos do ano de 2014 e 2015, qual seria o percentil desses valores para o ano de 2016, conforme Tabela 9:

Tabela 9 – Cálculo do percentis de 2016 com base no VaR do Índice IBOVESPA de 2014/15

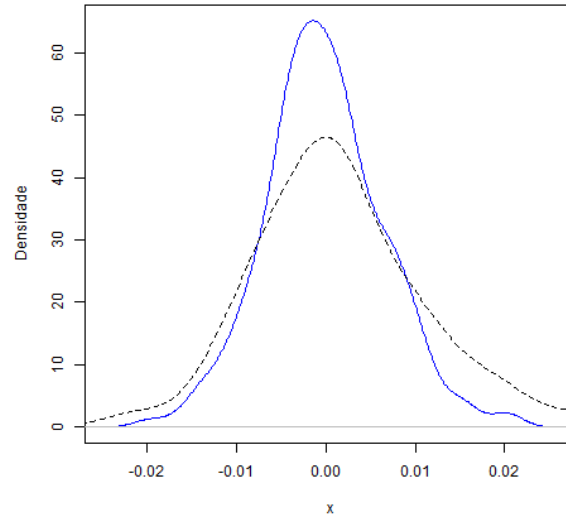
VaR do Índice IBOVESPA em 2014/15	Percentil correspondente em 2016 (%)
-0,015101	3,33
-0,010805	8,33
-0,008086	11,67
0,008389	80
0,010662	85
0,016351	91,67

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 18 o achatamento da curva referente ao ano 2016 é bem marcante com foco nas caudas bem densas nas extremidades o que revela um aumento muito significativo da variância nesse ano quando comparada com a de 2014 e 2015.

Em geral, nos três ativos é possível notar que as caudas advindas do ano de 2016 ficam mais pesadas nos extremos, além de mais achatadas, o que indica heterocedasticidade nas três séries, sugerindo, portanto, uma modelagem que leve esse fato em consideração. Assim, no capítulo seguinte, será avaliado um outro modelo mais elaborado em que destaca-se a heterocedasticidade (variância não é constante), para o log-retorno desses três ativos.

Figura 18 – Função densidade empírica para o Índice IBOVESPA nos anos de 2014 e 2015 (linha sólida) e para 2016 (linha pontilhada)



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 VaR baseado no modelo Normal Homocedástico - variância constante

Nessa seção será realizada a estimativa do valor em risco supondo que a distribuição condicional dos retornos, dada a informação passada é Normal com média μ e variância constante.

Assumindo a distribuição Normal, com média μ e variância σ^2 . Os parâmetros utilizados são estimados da seguinte forma:

O estimador para a média é representado por:

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t. \quad (3.5)$$

Em complemento, o estimador para a variância é por:

$$s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2. \quad (3.6)$$

Segundo técnicas referentes à inferência estatística podemos considerar que:

$$r_t \sim N(\bar{r}, s^2).$$

Assim, pode-se estimar os percentis para as três moedas (Dólar, Euro e Índice IBOVESPA), utilizando a distribuição Normal para o período em análise com base nas ferramentas

estatísticas pertinentes. A aplicação desse modelo para as moedas estudadas será apresentado nos itens seguintes.

3.2.1 Cálculo do VaR baseado na distribuição Normal homocedástica para o log-retorno do Dólar

Foi realizado o cálculo da média e o valor obtido para a amostra do log-retorno de compra do Dólar para 2014 e 2015 corresponde a 4.373×10^{-4} . Por sua vez, a variância obtida para o valor do log-retorno de compra do Dólar para esse período corresponde a 4.663×10^{-3} . Dessa forma, podemos considerar que:

$$x_t \sim N(4.373 \times 10^{-4}, 4.663 \times 10^{-3})$$

Assim, foi realizado o cálculo dos percentis com base na Normal utilizando esses parâmetros calculados acima e os percentis encontrados conforme essa modelagem estão na Tabela 10. Com base nesses valores gerados, verificou-se quais são os percentis que esses valores representam em 2016, levando em consideração também uma Normal, no entanto com média e variância baseado na série de 2016, conforme última coluna ainda nessa mesma tabela.

Tabela 10 – Cálculo do VaR para o log-retorno do valor de compra do Dólar pela distribuição Normal homocedástica e percentil correspondente em 2016

Percentil (%)	VaR do Dólar em 2014/15	Percentil correspondente em 2016 (%)
1	-0,010411	3,14
5	-0,007233	10,57
10	-0,005538	17,77
90	0,006413	91,49
95	0,008107	95,51
99	0,011285	98,94

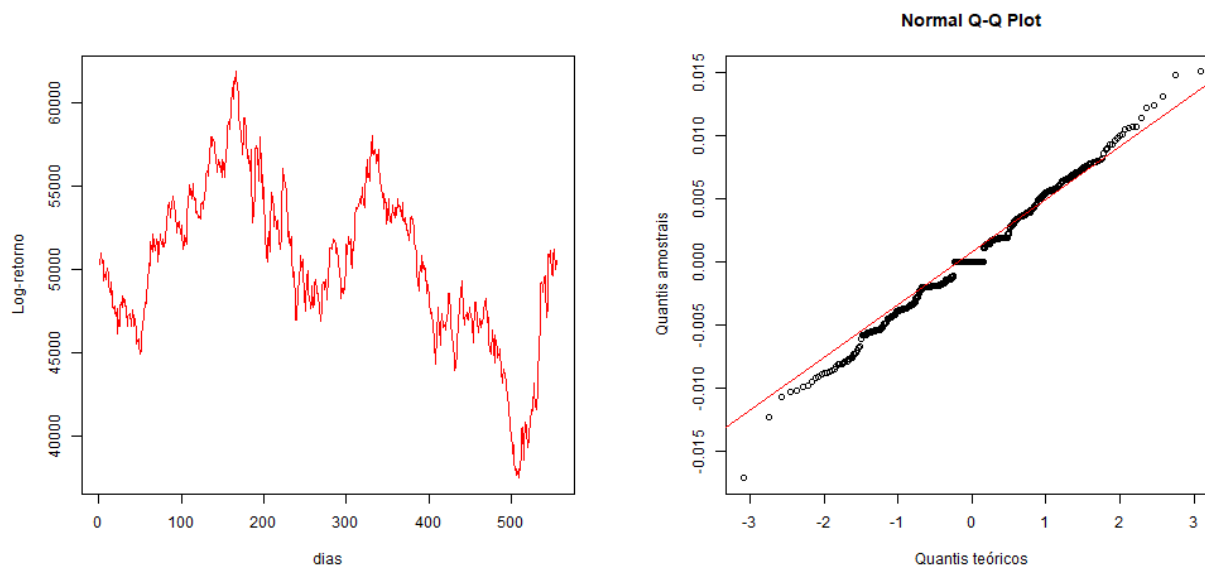
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na tabela 10 nota-se que o percentil sofre uma maior oscilação nos valores 1, 5 e 10 e pouca variação nos percentis 90, 95 e 99. Assim, o modelo mostra-se mais ajustado para os percentis acima de 90%, mas apresenta divergência na cauda inferior. Isso deve-se à presença de assimetria na distribuição de retornos como pode ser visto nos gráficos da Figura 19.

Em complemento, foi realizado o teste quantitativo de *Shapiro-Wilk* para verificar a adequação dos dados a distribuição Normal, considerando o nível de significância de 10%. O valor da estatística de teste e p-valor são respectivamente:

$$W = 0,99348, p - valor = 0,02983.$$

Figura 19 – Histograma (painel esquerdo) e Q-Q plot (painel direito) para o Dólar em 2014/15



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, como $0,02983 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados. Assim, quando avalia-se os dados referentes ao log-retorno para os anos de 2014 e 2015 pode-se afirmar com nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

Será analisado, portanto, um quadro comparativo contemplando o VaR e o percentil calculado com base nos quantis empíricos e o percentil calculado com base na distribuição Normal, conforme Tabela 11:

Tabela 11 – Comparativo do VaR e percentis obtidos no ano de 2016 para o log-retorno do valor de compra do Dólar pela modelagem por quantis empíricos e distribuição Normal

Percentil (%)	VaR (quantis empíricos)	Quantis empíricos/16 (%)	Normal/16 (%)
1	-0,009830	3,23	3,14
5	-0,007608	9,68	10,57
10	-0,005377	22,58	17,77
90	0,006540	91,94	91,49
95	0,007890	95,16	95,51
99	0,011415	98,39	98,94

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao comparar os percentis obtidos para 2016, em ambas as modelagens, é possível concluir que os valores obtidos estão bem próximos, com exceção do percentil 10 em que a Normal subestima o valor em risco calculado pelo quantil empírico. Torna-se importante destacar que, quando se trata de um montante de investimento financeiro volumoso, essa diferença, embora seja pequena, pode impactar consideravelmente ao montante.

3.2.2 Cálculo do VaR baseado na distribuição Normal homocedástica para o log-retorno do Euro

Foi realizado o cálculo dos percentis utilizando a distribuição Normal para o Euro. Para isso, foi utilizado a média e variância do log-retorno do valor de compra dessa moeda e os percentis encontrados conforme essa modelagem estão na Tabela 12. Com base nesses valores gerados, verificou-se quais são os percentis que esses valores representam em 2016, levando em consideração também uma Normal, no entanto com média e variância baseado na série de 2016, conforme última coluna ainda nessa mesma tabela.

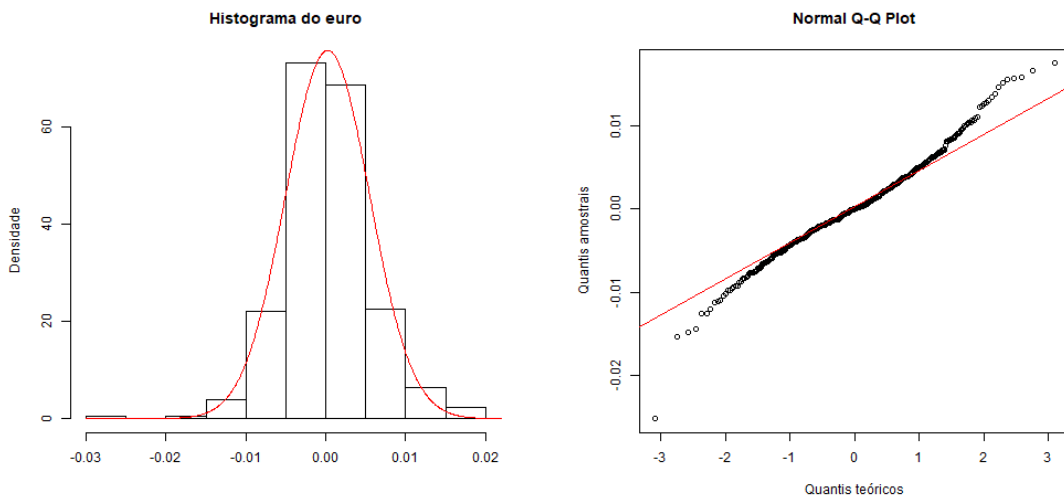
Tabela 12 – Cálculo do VaR para o log-retorno do valor de compra do Euro pela distribuição Normal homocedástica e percentil correspondente em 2016

Percentil (%)	VaR do Euro em 2014/15	Percentil correspondente em 2016 (%)
1	-0,012008	1,96
5	-0,008420	7,72
10	-0,006507	13,91
90	0,006988	90,52
95	0,008901	95,06
99	0,012489	98,89

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que o modelo mostra-se adequado para os percentis acima de 90%, mas apresenta divergência na cauda inferior. Isso deve-se à presença de assimetria na distribuição de retornos como pode ser visto nos gráficos da Figura 20.

Figura 20 – Histograma (painel à esquerda) e Q-Q plot (painel à direita) para o Euro em 2014/15



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em complemento, foi realizado o teste quantitativo de *Shapiro-Wilk* para verificar a adequação dos dados a distribuição Normal, considerando o nível de significância de 10%. O valor da estatística de teste e p-valor são respectivamente:

$$W = 0,98155, p - \text{valor} = 5,025e - 06.$$

Dessa forma, como $0,000005 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de Normalidade dos dados. Assim, quando avaliam-se os dados referentes ao log-retorno para os anos de 2014 e 2015 pode-se afirmar com nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

Ao comparar o VaR e o percentil calculado com base nos quantis empíricos e o percentil calculado com base na distribuição Normal, conforme Tabela 13 nota-se que na maioria dos percentis a Normal subestima os quantis empíricos (5%, 10%, 95% e 99%) e os superestima nos percentis 1% e 90%.

Tabela 13 – Comparativo do VaR e percentis obtidos no ano de 2016 para o log-retorno do valor de compra do Euro pela modelagem por quantis empíricos e distribuição Normal

Percentil (%)	VaR (quantis empíricos)	Quantis empíricos/16 (%)	Normal/16 (%)
1	-0,012551	0	1,96
5	-0,007781	10,76	7,72
10	-0,005717	15,38	13,91
90	0,006542	86,15	90,52
95	0,009370	95,38	95,06
99	0,015076	100	98,89

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.3 Cálculo do VaR baseado na distribuição Normal homocedástica para o log-retorno do Índice IBOVESPA

Foi realizado o cálculo dos percentis utilizando a distribuição Normal para o Índice IBOVESPA. Para isso, foi utilizado a média e variância do log-retorno do valor de compra dessa moeda e os percentis encontrados conforme essa modelagem estão na Tabela 14. Com base nesses valores gerados, verificou-se quais são os percentis que esses valores representam em 2016, conforme última coluna ainda nessa mesma tabela.

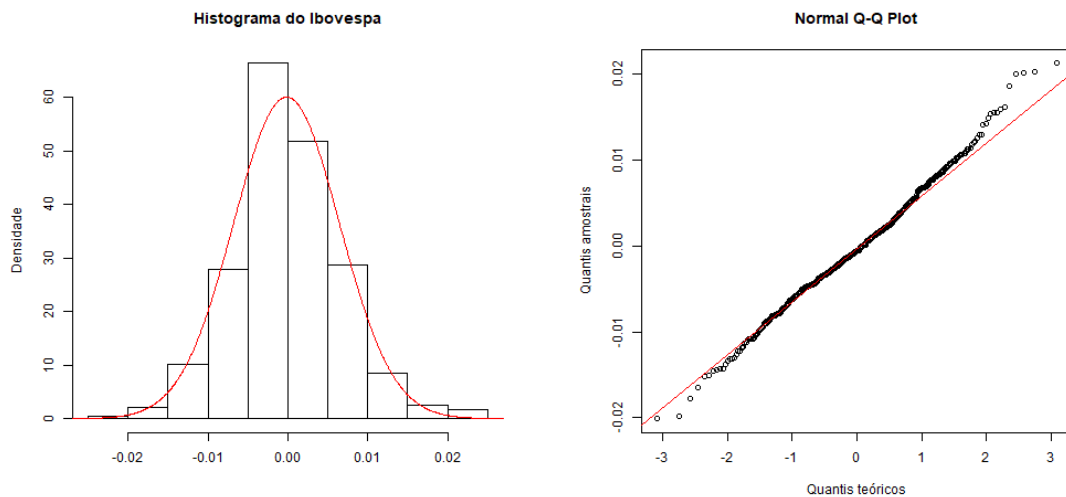
Em complemento, foi realizado o teste quantitativo de *Shapiro-Wilk* para verificar a adequação dos dados a distribuição Normal, considerando o nível de significância de 10%. O valor da estatística de teste e p-valor são respectivamente:

Tabela 14 – Cálculo do VaR para o log-retorno do Índice IBOVESPA pela distribuição Normal homocedástica e percentil correspondente em 2016

Percentil (%)	VaR em 2014/15	Percentil correspondente em 2016 (%)
1	-0,015601	3,49
5	-0,011076	9,20
10	-0,008664	14,23
90	0,008352	77,44
95	0,010764	84,92
99	0,015288	93,28

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – Histograma (painel à esquerda) e Q-Q plot (painel à direita) para o IBOVESPA em 2014/15



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$W = 0,99377, p - \text{valor} = 0,3993.$$

Dessa forma, como $0,03993 < 0,1$, rejeita-se a hipótese nula de Normalidade dos dados. Assim, quando avalia-se os dados referentes ao log-retorno para os anos de 2014 e 2015 pode-se afirmar com nível de significância de 10% que a amostra não provém de uma população Normal.

Foi realizado um comparativo entre o VaR e o percentil calculado com base nos quantis empíricos e com base na distribuição Normal, conforme Tabela 15:

Assim, nota-se que, para a maioria dos percentis, aqueles calculados pela Normal subestimam os quantis empíricos, com exceção dos percentis 90% e 95%, sendo que, para esse ativo especificamente, em ambas as metodologias, são os que mais se distanciam dos percentis iniciais.

Em todos os ativos é possível notar que a distribuição Normal não modela os dados adequadamente, conforme os testes qualitativos e quantitativos realizados. Quando comparado com a metodologia dos quantis empíricos, a distribuição Normal superestima ou subestima os

Tabela 15 – Comparativo do VaR e percentis obtidos no ano de 2016 para o log-retorno do Índice IBOVESPA pela modelagem por quantis empíricos e distribuição Normal

Percentil (%)	VaR (quantis empíricos)	Quantis empíricos/16 (%)	Normal/16 (%)
1	-0,015101	3,33	3,49
5	-0,010805	8,33	9,20
10	-0,008086	11,67	14,23
90	0,008389	80,00	77,44
95	0,010662	85,00	84,92
99	0,016351	91,67	93,28

Fonte: Elaborado pelo autor.

percentis calculados, o que sugere uma certa cautela na análise da aplicação da metodologia aos ativos avaliados. Também, é possível perceber nos três ativos avaliados uma alteração entre os percentis iniciais e os calculados pelas metodologias dos quantis empíricos e Normal, o que indica que a variância não é constante. Assim, o cálculo do valor em risco com base nessas modelagens torna-se comprometido, embora apresente um custo de implementação baixo. Portanto, será implementado no capítulo seguinte, uma metodologia que leva em consideração o fato de a variância não ser constante.

MODELO HETEROCEDÁSTICO PARA CÁLCULO DO VAR

Nesse capítulo 4 será apresentado o modelo autorregressivo com heterocedasticidade condicional (ARCH) e a sua aplicação ao Dólar, Euro e Índice IBOVESPA.

4.1 Modelo supondo distribuição Normal heterocedástico (variância não constante)

Os modelos autorregressivos com heterocedasticidade condicional (ARCH), propostos por (ENGLE, 1982) se caracterizam pela dependência não linear entre os retornos. Nele é considerado que a volatilidade em um dado instante de tempo depende dos valores passados da série. O modelo ARCH ajusta a variação da volatilidade como uma média móvel das observações passadas da série temporal, ou seja, modela diretamente a volatilidade da série de retornos, conforme (MORETTIN, 2008). Esse modelo surgiu da possibilidade de modelar a imprevisibilidade da inflação na origem dos ciclos econômicos. O nome autorregressivo se deve ao fato de que Y_t no instante t é função dos $Y's$ nos instantes anteriores a t .

Devido ao fato da sua variância condicional ser aleatória, são feitas estimações de previsões e, por esse motivo, esse modelo tem grande destaque em séries temporais financeiras que apresentam uma variação significativa num determinado período.

A determinação de estimadores de Máxima Verossimilhança (MV) dos parâmetros de modelos da família ARCH requer a maximização da função de verossimilhança, supondo-se:

$$r_t \sim N(0, \sigma_t^2).$$

Embora os estudos realizados nos capítulos anteriores indicarem que essa distribuição não é a mais adequada para os dados, a mesma apresenta um esforço computacional viável

para utilização do modelo ARCH. Além disso, o que reforça a utilização do modelo ARCH são duas características que foram concluídas no Capítulo 3 de que a variância dos log-retornos não são constantes, são não-correlacionados, mas são dependentes. O modelo ARCH (p) é definido como:

$$r_t = \sqrt{h_t} * \varepsilon_t. \quad (4.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 * r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p * r_{t-p}^2. \quad (4.2)$$

Ainda sobre o modelo ARCH, é importante destacar:

1. As Volatilidades altas são precedidas de retornos ou volatilidades grandes, observando-se os grupos de volatilidades presentes em séries financeiras;
2. Os retornos positivos e negativos são tratados de forma similar, já que quadrados dos retornos entram na fórmula da volatilidade.

Nesse sentido, sabendo das principais características envolvidas nessa modelagem, utilizando o software R, foram gerados 5 modelos distintos, para cada um dos ativos financeiros, em que a diferença entre eles consiste no número de parâmetros envolvidos, que se inicia com apenas 1 e o último contempla 5. Para seleção do melhor modelo será utilizado o Critério de Informação de Akaike (AIC) e o Critério Bayesiano de Schwarz (BIC).

O AIC representa uma função genérica para um ou mais objetos do modelo ajustado visando a seleção do melhor modelo. O Critério Bayesiano de Schwarz (BIC) é definido como a estatística que maximiza a probabilidade de se identificar o verdadeiro modelo dentre os avaliados. Da mesma forma que o AIC, o modelo com menor BIC é considerado o de melhor ajuste.

Portanto, será analisado o melhor modelo ARCH, com base nas características descritas acima para cada um dos três ativos financeiros. Os resultados obtidos estão a seguir.

4.1.1 Modelo ARCH para o log-retorno do dólar

Foi realizado o ajuste do modelo ARCH para o log-retorno do Dólar para os anos de 2014 e 2015 e analisados os valores de AIC e BIC de acordo com o número de parâmetros gerados nos modelos. Os resultados obtidos estão na Tabela 16.

Assim, o modelo com menor valor de AIC e BIC é considerado o modelo de melhor ajuste. Conseqüentemente, pela Tabela 16 nota-se que o menor valor de AIC é -7,9591 e o menor valor de BIC é -7,916933, sendo que ambos referem-se ao modelo que contempla 4 parâmetros.

Tabela 16 – Número de parâmetros e o AIC e BIC obtidos para o modelo ARCH nos anos de 2014/15

Núm. parâmetros	AIC	BIC
1	-7,900896	-7,884011
2	-7,945218	-7,919891
3	-7,944378	-7,910609
4	-7,959143	-7,916933
5	-7,955922	-7,905270

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, torna-se importante destacar mais informações referentes ao modelo ARCH estimado composto por 4 parâmetros.

Tabela 17 – Estatísticas do modelo

Parâmetros	Valor estimado	Erro padrão	t - valor	Pr(> t)
α_0	0,00001	0,00166	6,118	9,49e-10
α_1	0,15504	0,06628	2,339	0,01932
α_2	0,18757	0,07082	2,649	0,00808
α_3	0,05989	0,05189	1,154	0,24840
α_4	0,14057	0,05964	2,357	0,01844

Fonte: Elaborado pelo autor.

Código de significância: 0 ‘***’ 0,001 ‘**’ 0,01 ‘*’ 0,05 ‘.’ 0,1 ‘ ’ 1.

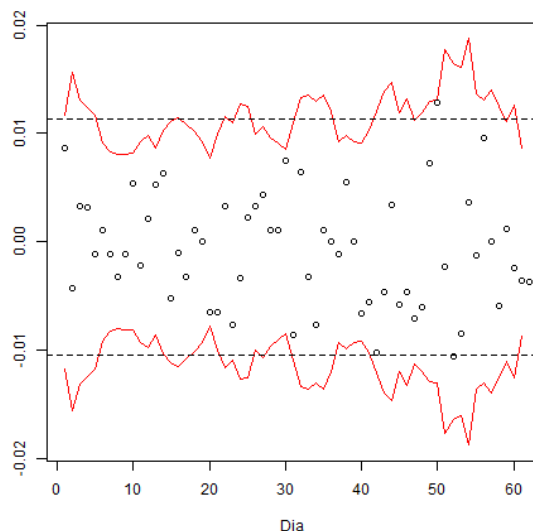
Ao avaliar as estatísticas geradas pelo modelo composto por 4 parâmetros, conforme Tabela 17, nota-se que para um nível de significância de 5%, rejeita-se a hipótese nula de que os parâmetros α_0 , α_1 , α_2 e α_4 são não significativos para o modelo. Dessa forma, apesar de somente o parâmetro α_3 não ser significativo para o modelo, considerando os valores dos índices AIC e BIC, opta-se por permanecer com o modelo representado pela Equação 4.3. Dessa forma, o modelo proposto seria representado por:

$$\sigma_t^2 = 0,00001 + 0,15504r_{t-1}^2 + 0,18757r_{t-2}^2 + 0,059894r_{t-3}^2 + 0,14057r_{t-4}^2. \quad (4.3)$$

Com base no modelo representado pela Equação 4.3 e tendo em vista que a base de dados utilizada abrange o ano todo de 2014 e de 2015 e somente 61 dias de 2016, foi realizado uma estimativa de previsão para 61 dias de 2016, sendo que, como a variância não é constante, para cada dia, os percentis calculados são diferentes.

Essa estimativa foi realizada iniciando-se pelo dia 01/01/2016 com previsão para o dia seguinte, e assim sucessivamente, a cada dia considerado, estimou-se para o dia seguinte,

Figura 22 – Estimação dos valores em risco para 2016 considerando os percentis 1 e 99%, utilizando o modelo ARCH (linha sólida), distribuição Normal (linha pontilhada) e os valores de log-retorno ocorridos em 2016 (pontos circulares)



Fonte: Elaborado pelo autor.

utilizando-se todo o histórico observado, incluindo o dia anterior. O resultado obtido está na Figura 22 em que a linha sólida superior representa os valores do percentil 99% previsto a partir do dia anterior e a linha sólida inferior representa os valores referentes ao percentil 1% previsto a partir do dia anterior, iniciando a partir de 01/01/2016 e até o dia 01/04/2016. A linha pontilhada corresponde aos percentis estimados pela distribuição Normal em 2016, com base nos parâmetros desse mesmo ano. Os pontos circulares correspondem aos valores do log-retorno que ocorreram nos dias.

Assim, pode-se concluir que, dado um determinado período de tempo (t), no caso, 61 dias, sobre uma probabilidade de 98%, o maior e o menor valor em risco calculado, em 100% das vezes foi bem estimado, uma vez que os pontos, que representam os dados reais ocorridos em 2016, estão em sua totalidade dentro dos percentis estimados, considerando a estimativa pelo modelo ARCH.

Já na estimativa pela distribuição Normal, nota-se que 2 pontos, entre os 61, extrapolam o intervalo delimitado entre os percentis 1 e 99%. Assim, o maior e o menor valor em risco calculado, em 96,72% das vezes foi bem estimado. Dessa forma, conclui-se que o modelo que se ajusta melhor à série temporal do valor de compra do Dólar é o modelo ARCH.

4.1.2 Modelo ARCH para o log-retorno do Euro

Para o log-retorno do Euro, foi realizado o ajuste do modelo ARCH para os anos de 2014 e 2015 e analisados os valores de AIC e BIC de acordo com o número de parâmetros gerados nos modelos. Os resultados obtidos estão na Tabela 18:

Tabela 18 – Número de parâmetros e o AIC e BIC obtidos para cada modelo ARCH para os anos de 2014/15

Núm. parâmetros	AIC	BIC
1	-7,670332	-7,653627
2	-7,684321	-7,659262
3	-7,706200	-7,672789
4	-7,709501	-7,667737
5	-7,709234	-7,659117

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Tabela 18 nota-se que o menor valor de AIC é -7,709501 (modelo com 4 parâmetros) e o menor valor de BIC é -7,672789 (modelo com 3 parâmetros). Como os critérios de informação indicaram modelos distintos, opta-se pelo modelo com 3 parâmetros.

Tabela 19 – Estatísticas do modelo

Parâmetros	Valor estimado	Erro padrão	t - valor	Pr(> t)
α_0	0,00001	0,000002	8,368	< 2e-16
α_1	0,17150	0,06312	2,716	0,00660
α_2	0,06581	0,04654	1,414	0,15735
α_3	0,16430	0,06214	2,645	0,00818

Fonte: Elaborado pelo autor.

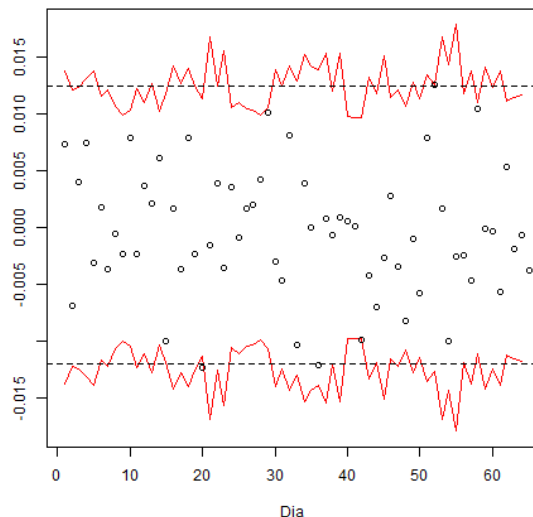
Signif. codes: 0 '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1.

Ao avaliar as estatísticas geradas pelo modelo composto por 3 parâmetros, conforme Tabela 19, nota-se que para um nível de significância de 5%, rejeita-se a hipótese nula de que os parâmetros α_0 , α_1 e α_3 sejam não significativos para o modelo. Assim, embora o nível de significância sugira um modelo desconsiderando α_2 , juntamente com a análise realizada pelos índices AIC e BIC, opta-se por permanecer com o modelo representado pela Equação 4.4.:

$$\sigma_t^2 = 0,00001 + 0,1715r_{t-1}^2 + 0,06581r_{t-2}^2 + 0,1643r_{t-3}^2. \quad (4.4)$$

Considerando o modelo selecionado e o fato de que a base de dados utilizada abrange o ano todo de 2014 e de 2015 e somente alguns dias de 2016, foi realizado uma estimativa de previsão para os mesmos, conforme Figura 23.

Figura 23 – Estimação dos valores em risco para 2016 considerando os percentis 1 e 99%, utilizando o modelo ARCH (linha sólida), distribuição Normal (linha pontilhada) e os valores de log-retorno ocorridos em 2016 (pontos circulares)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa estimativa foi realizada iniciando-se pelo dia 01/01/2016 com previsão para o dia seguinte, e assim sucessivamente, a cada dia considerado, estimou-se para o dia seguinte. O resultado obtido está na Figura 23 em que a linha superior representa os valores do percentil 99% previsto a partir do dia anterior e a linha inferior representa os valores referentes ao percentil 1% previsto a partir do dia anterior, iniciando a partir de 01/01/2016 e até o dia 01/04/2016. A linha pontilhada corresponde aos percentis estimados pela distribuição Normal em 2016, com base nos parâmetros desse mesmo ano. Os pontos circulares correspondem aos valores do log-retorno que ocorreram nos dias.

Assim, pode-se concluir que, dado um determinado período de tempo (t), sobre uma probabilidade (p), de 98%, o maior e o menor valor em risco calculado, em aproximadamente 100% das vezes foi bem estimado, uma vez que, é possível observar nenhum ponto fora do intervalo, considerando a estimativa pelo modelo ARCH.

Já na estimativa pela distribuição Normal, nota-se que 2 pontos extrapolam o intervalo delimitado entre os percentis 1 e 99%. Assim, o maior e o menor valor em risco calculado, em 96,92% das vezes foi estimado adequadamente. Dessa forma, conclui-se que a estimativa realizada pelo modelo ARCH se ajusta melhor à série temporal do valor de compra do Euro.

4.1.3 Modelo ARCH para o log-retorno do Índice IBOVESPA

Foi realizado o ajuste do modelo ARCH também para o log-retorno do Índice IBOVESPA para os anos de 2014 e 2015 e analisados os valores de AIC e BIC de acordo com o número de parâmetros gerados nos modelos. Os resultados obtidos foram:

Tabela 20 – Número de parâmetros, AIC e BIC obtidos para cada modelo ARCH nos anos de 2014/15

Núm. parâmetros	AIC	BIC
1	-7,18895	-7,171941
2	-7,19522	-7,169700
3	-7,19712	-7,163092
4	-7,19644	-7,153906
5	-7,20887	-7,157828

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Tabela 20 nota-se que o menor valor de AIC é -7,208871 (modelo com 5 parâmetros) e o menor valor de BIC é -7,171941 (modelo com 1 parâmetro). Como os critérios de informação indicaram modelos distintos, optou-se pelo modelo com apenas 1 parâmetro. A Tabela 21 mostra os valores estimados para os parâmetros do modelo.

Tabela 21 – Estatísticas do modelo

Parâmetros	Valor estimado	Erro padrão	t - valor	Pr(> t)
α_0	0,00004	0,000003	12,635	<2e-16
α_1	0,06475	0,05066	1,278	0,201

Fonte: Elaborado pelo autor.

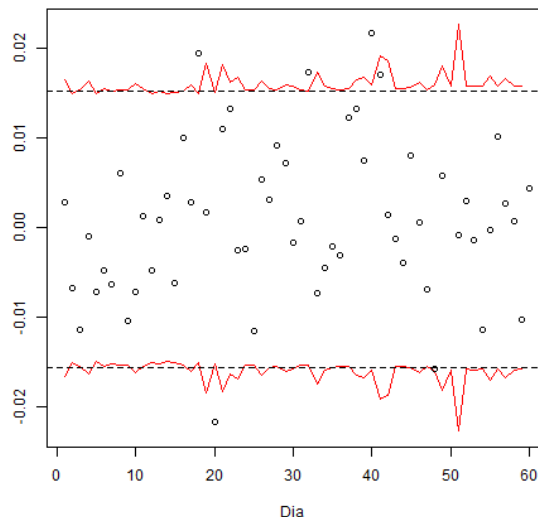
Signif. codes: 0 '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1.

Ao avaliar as estatísticas geradas pelo modelo composto por 1 parâmetro, conforme Tabela 21, nota-se que a um nível de significância de 5%, rejeita-se a hipótese nula de que o parâmetro α_0 não seja significativo para o modelo. Assim, embora o nível de significância sugira um modelo somente com esse parâmetro, e considerando os índices AIC e BIC, opta-se por permanecer com o modelo representado pela Equação 4.5.

$$\sigma_t^2 = 0,00004 + 0,06475r_{t-1}^2. \quad (4.5)$$

Com base nesse modelo e tendo em vista que a base de dados utilizada abrange todo o ano de 2014 e de 2015 e somente alguns dias de 2016, foi realizada uma estimativa de previsão para os mesmos, conforme Figura 24.

Figura 24 – Estimação dos valores em risco para 2016 considerando os percentis 1 e 99%, utilizando o modelo ARCH (linha sólida), distribuição Normal (linha pontilhada) e os valores de log-retorno ocorridos em 2016 (pontos circulares)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa estimativa foi realizada iniciando-se pelo dia 01/01/2016 com previsão para o dia seguinte, e assim sucessivamente, para os dias disponíveis em 2016. A cada dia considerado, estimou-se para o dia seguinte. O resultado obtido está na Figura 24 em que a linha de cima representa os valores do percentil 99% previsto a partir do dia anterior e a linha de baixo representa os valores referentes ao percentil 1% previsto a partir do dia anterior, iniciando-se a partir de 01/01/2016 e até o dia 01/04/2016. A linha pontilhada corresponde aos percentis estimados pela distribuição Normal em 2016, com base nos parâmetros desse mesmo ano. Os pontos circulares correspondem aos valores de log-retorno que ocorreram nos dias.

Assim, pode-se concluir que, dado um determinado período de tempo (t), sobre uma probabilidade (p), de 98%, o maior e o menor valor em risco calculado, em aproximadamente 93% (56/60) das vezes foi bem estimado, uma vez que os pontos, que representam os dados reais, estão em sua grande parte dentro dos percentis estimados, sendo que somente 6 deles estão fora desse limite.

Na estimativa pela distribuição Normal, nota-se que 6 pontos extrapolam o intervalo delimitado entre os percentis 1 e 99%. Assim, o maior e o menor valor em risco calculado, em 90% das vezes foi estimado adequadamente. Dessa forma, conclui-se que a estimativa do modelo ARCH se ajusta melhor do que a distribuição Normal à série de retorno do Índice IBOVESPA.

Com relação aos demais ativos financeiros, nota-se que o modelo ARCH aplicado à série de retorno do Dólar e Euro foram os que refletiram um melhor ajuste aos dados, uma vez que o maior e o menor valor em risco calculado, em 100% das vezes, sobre uma probabilidade de 98%, contemplou os dados avaliados.

CONCLUSÃO E PROPOSTAS FUTURAS

Após a avaliação dos modelos utilizados em cada um dos ativos é possível concluir que o modelo proposto seria o ARCH, pois esse modelo demonstra um ajuste mais adequado, quando comparado com a modelagem por quantis empíricos e distribuição Normal, com complexidade de implementação e robustez moderada.

A classe dos modelos ARCH é adequada para modelar as séries temporais avaliadas, da forma como foi realizada, de cada ativo isoladamente. A dificuldade com esta modelagem é que se torna difícil calcular o VaR de uma carteira com muitos ativos, o que seria objeto para discussões futuras.

Em contrapartida, os modelos EGARCH, por não tratar os retornos simetricamente, uma vez que é sabido que a volatilidade tende a ser maior em retornos negativos, poderiam ser analisados como proposta para implementação futura, assim como outras modelagens dessa família que merecem ser estudadas mais aprofundadamente.

Uma teoria que merece destaque pra um estudo posterior é a teoria de valores extremos (TVE) clássica que estuda o comportamento de máximos e mínimos e estatísticas de ordem para variáveis aleatórias i.i.d. com extensões para séries temporais estacionárias com dependência fraca e não estacionárias (COLES *et al.*, 2001). No entanto, o grande desafio dessa teoria é no tamanho da escolha dos blocos, que são bases para as análises, e caso haja poucas observações nos mesmos, os estimadores serão enviesados e com variância discrepante.

Por fim, seria interessante verificar a existência de correlação entre os ativos financeiros contemplados e o estudo de uma modelagem única para os três ativos financeiros.

REFERÊNCIAS

- BACHELIER, L. **Théorie de la spéculation**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1900. Citado na página 22.
- BERKOWITZ, J.; O'BRIEN, J. How accurate are value-at-risk models at commercial banks? **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 57, n. 3, p. 1093–1111, 2002. Citado na página 23.
- BOVESPA, B. Disponível em: < <http://www.bmfbovespa.com.br> >. Acesso em abril de 2016, 2015. Citado na página 38.
- CHATFIELD, C. **The Analysis of Time Series**. [S.l.]: JSTOR, 2004. Citado na página 23.
- COLES, S.; BAWA, J.; TRENNER, L.; DORAZIO, P. **An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values**. [S.l.]: Springer, 2001. v. 208. Citado na página 63.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 987–1007, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 55.
- FAMA, E. F. The behavior of stock-market prices. **The Journal of Business**, JSTOR, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965. Citado na página 22.
- KENDALL, M. G.; HILL, A. B. The analysis of economic time-series-part i: Prices. **Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)**, JSTOR, v. 116, n. 1, p. 11–34, 1953. Citado na página 22.
- MORETTIN, P. A. **Econometria Financeira**. [S.l.: s.n.], 2008. Citado 4 vezes nas páginas 23, 25, 42 e 55.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. **Análise de Séries Temporais**. [S.l.]: Blucher, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 24 e 28.
- REUTERS, T. Disponível em: <http://www.thomsonreuters.com.br>. Acesso em abril de 2016. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.
- TAYLOR, S. J. **Modelling Financial Time Series**. [S.l.]: World Scientific, 2008. Citado na página 24.
- TSAY, M.; BRADY, M. A case study of cooperative learning and communication pedagogy: Does working in teams make a difference?. **Journal of the Scholarship of Teaching and Learning**, ERIC, v. 10, n. 2, p. 78–89, 2010. Citado na página 23.
-