UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Reuso de números aleatórios na simulação de Monte Carlo para apuração de uma carteira de derivativos exóticos

Igor Oliveira Aquino

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria (MECAI)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Igor Oliveira Aquino

Reuso de números aleatórios na simulação de Monte Carlo para apreçamento de uma carteira de derivativos exóticos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática, Estatística e Computação

Orientador: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

USP – São Carlos
Novembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A657r Aquino, Igor Oliveira
Reuso de números aleatórios na simulação de Monte Carlo para apreçamento de uma carteira de derivativos exóticos / Igor Oliveira Aquino; orientador Marinho Gomes de Andrade Filho. -- São Carlos, 2017.
57 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Simulação de Monte Carlo. 2. Apreçamento de derivativos. 3. Números aleatórios. I. Andrade Filho, Marinho Gomes de , orient. II. Título.

Igor Oliveira Aquino

**Reuse of random numbers in Monte Carlo simulation for
pricing a portfolio of exotic derivatives**

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Professional Masters in Mathematics, Statistics and Computing Applied to Industry. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics, Statistics and Computing

Advisor: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

**USP – São Carlos
November 2017**

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, meu Senhor, que me permitiu chegar até aqui.

À minha esposa Camila, pelo sempre presente e incondicional apoio ao meu lado, seja atravessando as dificuldades ou comemorando os sucessos.

Aos meus pais, Nilson e Fátima, e à minha irmã Sara, que, mesmo estando longe, sempre me auxiliaram com suas palavras e orações.

Ao Prof. Dr. Dorival Leão, pelo conhecimento compartilhado durante o curso, pela assessoria na elaboração dessa dissertação e pelo esforço em trazer profissionais com vasta experiência no mercado financeiro, como Marcos Carreira e Richard Brostowicz, para ministrarem disciplinas no curso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marinho Andrade, pela confiança depositada.

*“Confie no SENHOR de todo o seu coração
e não se apoie em seu próprio entendimento.”
(Salomão)*

RESUMO

AQUINO, I. O. **Reuso de números aleatórios na simulação de Monte Carlo para apreçamento de uma carteira de derivativos exóticos**. 2017. 57 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Derivativos exóticos são produtos com estrutura complexa e personalizada cujo apreçamento pode requerer o uso de simulações de Monte Carlo. Todavia, essas simulações têm alto custo computacional, o que torna lento o apreçamento de uma carteira com vários derivativos. Para mitigar esse problema, propõe-se o reuso de números aleatórios entre diferentes operações de uma mesma carteira apreçada através do método de Monte Carlo. Realiza-se o apreçamento de cinco carteiras de derivativos exóticos com duas implementações da simulação de Monte Carlo, uma sem e outra com reuso de números aleatórios. Observa-se que, quanto mais operações há na carteira, maior é a vantagem de performance da estratégia com reuso em relação à outra abordagem de implementação. O erro quadrático médio do preço dos derivativos obtidos através das simulações em relação ao preço teórico esperado mantém-se o mesmo em ambas as implementações. Portanto, é possível sugerir que o algoritmo com reuso de número aleatórios apresenta uma maneira de melhorar a performance do método de Monte Carlo sem aumentar o erro da simulação.

Palavras-chave: Simulação de Monte Carlo, Apreçamento de derivativos, Números aleatórios.

ABSTRACT

AQUINO, I. O. **Reuse of random numbers in Monte Carlo simulation for pricing a portfolio of exotic derivatives**. 2017. 57 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Exotic derivatives are products with complex and customized structure whose pricing may require the use of Monte Carlo simulation. However, this kind of simulation has high computational cost, which slows the pricing of a portfolio containing several derivatives. In order to mitigate this problem, it is proposed the reuse of random numbers across different trades in the same portfolio priced using the Monte Carlo method. Five portfolios of exotic derivatives are priced using two implementations of Monte Carlo simulation, with and without reuse of random numbers. It is observed that the more trades are in the portfolio, the better is the performance of the reuse approach compared to the regular implementation. The mean squared error of simulation prices compared to the theoretical value remain the same in both implementations. Therefore, it is possible to suggest that the algorithm which reuses random numbers presents a way to improve Monte Carlo method performance with no increment of simulation error.

Keywords: Monte Carlo simulation, Derivatives pricing, Random numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de frequência do preço de simulação de cada configuração da	
Tabela 4	39
Figura 2 – Tempo médio de processamento por categoria no algoritmo Monte Carlo	
Regular	43
Figura 3 – Tempo médio de geração de números aleatórios no algoritmo Monte Carlo	
Regular	44
Figura 4 – Tempo médio de processamento por categoria no algoritmo Monte Carlo Reuso	49
Figura 5 – Comparação do tempo total de execução dos algoritmos de Monte Carlo . .	50

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Apreçamento de um <i>payoff</i> com Monte Carlo Regular	40
Algoritmo 2 – Apreçamento de uma carteira com Monte Carlo Regular	41
Algoritmo 3 – Apreçamento de uma carteira com Monte Carlo Reuso	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Preço do ativo-objeto S_i nas datas de observação t_i	30
Tabela 2	– Exemplos de valores de opção de compra <i>fade-in</i> ($S = 100; K = 100; T = 0,5; r = 0,1; b = 0; N = 183$)	31
Tabela 3	– Analogia entre a estimativa do volume de uma região e o <i>payoff</i> de um derivativo	36
Tabela 4	– Configuração para mostrar o efeito do tamanho da amostra no valor do desvio padrão	38
Tabela 5	– Composição das carteiras de opções de compra <i>fade-in</i> usadas no teste dos algoritmos	42
Tabela 6	– Categorias de divisão do tempo de consumo de processamento.	42
Tabela 7	– Tempo médio de cada categoria na simulação Monte Carlo Regular (em segundos)	43
Tabela 8	– Preço e seu erro médio quadrático usando o algoritmo Regular	44
Tabela 9	– Quantidade de datas de observação das opções <i>fade-in</i> da carteira	46
Tabela 10	– Primeira rodada de trajetórias do ativo-objeto para cada opção <i>fade-in</i> na carteira	46
Tabela 11	– Valor do <i>payoff</i> dos derivativos na primeira rodada do algoritmo	47
Tabela 12	– Tempo médio de cada categoria na simulação Monte Carlo Reuso (em segundos)	48
Tabela 13	– Preço e seu erro médio quadrático usando o algoritmo Reuso	49
Tabela 14	– Comparação de tempo total médio de execução dos algoritmos Regular e Reuso	50
Tabela 15	– Comparação dos preços obtidos com os algoritmos Regular e Reuso	51
Tabela 16	– Perfil de risco da <i>Carteiras</i>	52

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Revisão bibliográfica	24
1.2	Contribuições e estrutura	25
2	MERCADO DE DERIVATIVOS	27
2.1	Conceitos do mercado de derivativos	27
2.1.1	<i>Opção de compra europeia</i>	28
2.1.2	<i>Opção de compra fade-in</i>	29
2.2	Modelo de Black-Scholes-Merton	31
2.3	Preço de um derivativo como valor esperado do <i>payoff</i>	32
3	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO NO APREÇAMENTO DE OP- ÇÕES	35
3.1	Método de Monte Carlo	36
3.2	Teorema central do limite e erro na simulação	37
3.3	Apreçamento com a abordagem Monte Carlo Regular	39
3.4	Apreçamento de uma carteira com a abordagem Monte Carlo Regular	41
3.4.1	<i>Configuração do teste de apreçamento de carteira</i>	41
3.4.2	<i>Execução do teste no algoritmo Monte Carlo Regular</i>	42
4	REUSO DE NÚMEROS ALEATÓRIOS NA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	45
4.1	Estratégia de reuso dos números aleatórios	45
4.2	Apreçamento de uma carteira com a abordagem Monte Carlo Reuso	48
4.2.1	<i>Comparação dos algoritmos Monte Carlo Regular e Monte Carlo Reuso</i>	49
5	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	55

INTRODUÇÃO

A negociação de derivativos exóticos é comum em um ambiente de banco de investimento, seja para atender à demanda de clientes ou para proteger a carteira de ativos da própria instituição. É também comum que o apreçamento de produtos exóticos não possua uma fórmula analítica definida e, portanto, recorre-se a simulações numéricas ou a simplificações de modelagem para calcular o preço desses derivativos. Uma das desvantagens de simplificar um modelo é que o preço obtido usando a simplificação pode não ser condizente com os preços observados no mercado. Esse é um dos contextos em que a simulação de Monte Carlo é uma ferramenta útil para apreçamento de produtos financeiros. Dados a função *payoff* do derivativo a ser apreçado e os modelos (simples ou complexos) que descrevem o comportamento dos ativos subjacentes, o método de Monte Carlo é capaz de obter o preço do produto em questão.

Um dos primeiros artigos sobre o método de Monte Carlo (MMC) foi publicado por [Metropolis e Ulam \(1949\)](#). Ele apresenta um método de solução que tanto evita lidar com equações complicadas com múltiplas integrações como evita o uso de simplificações para problemas que não têm uma fórmula fechada como solução. O método usa uma abordagem estatística para obter uma solução através de amostras de cadeias independentes de eventos que são facilmente paralelizáveis em computadores. A criação dessas cadeias independentes de eventos geralmente requer a geração de números aleatórios e a transformação deles de acordo com modelos de equações que definem os eventos. Por exemplo, para obter uma amostra do preço de um ativo que segue o modelo de volatilidade estocástica de Heston ([HESTON, 1993](#)), é necessário gerar dois processos de Wiener porque tanto o retorno do ativo quanto a sua volatilidade são processos estocásticos. Portanto, há um alto custo computacional para gerar variáveis aleatórias que satisfazem a correlação definida pelo modelo de Heston.

Custo computacional elevado e velocidade lenta de cálculo são as mais comuns desvantagens do MMC. Por exemplo, considere que sejam necessárias 30.000 amostras do valor do *payoff* de um derivativo para calcular o seu preço e que cada *payoff* exija que a trajetória do

ativo subjacente seja discretizada em 100 pontos. Assim, no mínimo, é necessária a geração de $30.000 \times 100 = 3.000.000$ de números aleatórios para apreçar apenas esse derivativo, dentre vários que podem existir na carteira de um banco de investimentos. O algoritmo Monte Carlo Regular (detalhado na [Seção 3.3](#)) apresenta uma implementação simples do MMC em que novos números aleatórios são gerados para apreçar cada derivativo presente na carteira em questão. Instituições financeiras podem ter centenas de produtos exóticos em sua carteira, demandando assim a geração de centenas de milhões de números aleatórios para apreçar todos os seus derivativos apenas uma única vez. Para atenuar tal demanda por números aleatórios, essa dissertação apresenta o algoritmo Monte Carlo Reuso, onde, numa rodada da simulação de Monte Carlo, os números aleatórios são reutilizados para calcular o *payoff* de diferentes derivativos da carteira.

1.1 Revisão bibliográfica

O algoritmo de Monte Carlo é uma ferramenta versátil para apreçar produtos financeiros porque, uma vez implementada a geração de trajetórias do ativo-objeto, qualquer operação que dependa desse ativo-objeto pode ser apreçada bastando apenas trocar a equação que define o *payoff* da operação. Por exemplo, considere uma trajetória que descreva o valor da taxa de câmbio dólar-real para um determinado período de tempo. Essa mesma trajetória pode ser usada para apreçar uma simples opção de compra europeia (basta observar o valor da taxa de câmbio na data de vencimento), uma não tão simples opção asiática (veja a taxa de câmbio em cada uma das datas de observação definidas no contrato), ou mesmo um derivativo exótico cujo *payoff* dependa de várias condições (barreiras de alta, barreiras de baixa, máximo, mínimo, etc.) relativas à taxa de câmbio dólar-real.

Mais uma evidência da versatilidade do método de Monte Carlo é a vasta gama de áreas financeiras em que ele é usado: apreçamento de opções americanas ([BOUCHARD; WARIN, 2012](#)); apreçamento de opções barreira do tipo *knock-in* e *knock-out* sob o modelo de volatilidade estocástica de Heston ([ACHTSIS; COOLS; NUYENS, 2013](#)); cálculo de otimização de carteiras em problemas de alocação de ativos com mercado completo ([DETEMPLE; GARCIA; RINDISBACHER, 2003](#)); apreçamento de opções de títulos usando o modelo de Heath, Jarrow e Morton ([CARVERHILL; PANG, 1995](#)); proteção para o armazenamento de combustível ([WARIN, 2012](#)); apreçamento de opções com múltiplas datas de exercício em tempo discreto no mercado de derivativos de taxa de juros e energia ([MEINSHAUSEN; HAMBLBY, 2004](#)); criação de uma ferramenta para apreçamento de produtos baseados em hipotecas ([SCHWARTZ; TOROUS, 1989](#)); e cálculo do valor em risco para instrumentos financeiros não-lineares ([AMMANN; REICH, 2001](#)).

A respeito do reuso de números aleatórios na simulação de Monte Carlo, o campo de Computação Gráfica tem artigos que descrevem melhora na performance e na qualidade da imagem após aplicar o reuso de trajetórias. Uma técnica de aceleração para renderizar algoritmos

é descrita por (BEKAERT; SBERT; HALTON, 2002), uma ferramenta para eliminar ruído num algoritmo de iluminação global é proposta por (XU; SBERT, 2007) e uma estratégia para acelerar o processamento de quadros em animações de fonte de luz é mostrada em (SBERT; HALTON, 2004). O reuso de números aleatórios no método de Monte Carlo também é aplicado por (JI; LI, 2012) para solucionar sistemas lineares e, dessa forma, proporciona significativa melhora de performance no processo de obtenção da solução do sistema. O reuso dos números aleatórios ocorre entre diferentes elementos desconhecidos do sistema linear, garantindo assim que as amostras de números aleatórios para um mesmo elemento desconhecido sejam i.i.d. Não foram encontrados exemplos de reuso de variáveis aleatórias em simulações de Monte Carlo aplicadas diretamente no apreamento de produtos financeiros.

1.2 Contribuições e estrutura

Essa dissertação apresenta o algoritmo Monte Carlo Reuso, que é uma abordagem do método de Monte Carlo que reutiliza variáveis aleatórias para apreçar diferentes derivativos presentes em uma mesma carteira. Suponha que, dentre os diversos produtos financeiros presentes numa carteira, o derivativo D_1 seja aquele que requer mais variáveis aleatórias em seu apreamento, digamos n variáveis. Na implementação Reuso, a cada rodada da simulação de Monte Carlo para apreamento dessa carteira são geradas n variáveis aleatórias, que é a quantidade suficiente para apreçar o derivativo que requer mais variáveis. Dessa forma todos os demais produtos da carteira conseguem ser apreçados usando um subconjunto dessas n variáveis geradas para D_1 . Na próxima rodada da simulação, mais n v.a.'s são geradas e utilizadas para apreçar todos os produtos mais uma vez e assim segue-se até serem completadas todas as rodadas da simulação.

Os testes executados nesse trabalho indicam que o algoritmo Reuso pode reduzir a quantidade de variáveis aleatórias necessárias no apreamento para até $1/d$ da quantidade requerida pelo algoritmo Regular, onde d é o número de derivativos presentes na carteira. Dessa forma, a implementação Reuso contribui para diminuir o custo computacional da simulação de Monte Carlo. Os testes executados também mostram que o erro médio quadrático do algoritmo Reuso é semelhante ao do Regular, ou seja, a abordagem proposta por esse trabalho não apresentou redução da qualidade das simulações de Monte Carlo. O erro é calculado em relação à solução analítica (forma fechada) das opções que compõem a carteira.

Dado que, quando o ativo-objeto segue o modelo de Black-Scholes-Merton (BSM), existe uma solução em forma fechada para o preço dos derivativos abordados nesse trabalho, seria dispensável o uso de simulação de Monte Carlo para calcular o preço. Todavia, o uso da simulação e a simplificação de considerar que o ativo-objeto segue o modelo BSM são úteis para validar que ambas as implementações do método de Monte Carlo aqui apresentadas (Regular e Reuso) são coerentes com o resultado teórico esperado para o apreamento.

Esse trabalho está estruturado da maneira mostrada a seguir. O [Capítulo 1](#) expõe a importância da simulação de Monte Carlo no contexto de apreçamento de derivativos exóticos e apresenta uma revisão bibliográfica sobre o reuso de trajetórias em simulações e sobre aplicações financeiras do método de Monte Carlo. O [Capítulo 2](#) introduz o conceito de contratos de opções e apresenta o modelo de Black-Scholes-Merton (BSM). Além disso, mostra que o preço de uma opção é dado pelo valor esperado do *payoff* na medida martingale equivalente. O [Capítulo 3](#) trata do método de Monte Carlo e mostra sua utilidade para apreçar derivativos financeiros. Ele também apresenta o algoritmo Regular, que é a implementação básica do MMC, sem otimização alguma. O [Capítulo 4](#) descreve o algoritmo Reuso e a simulação para cálculo do preço de uma carteira de opções usando essa abordagem. Por último, o [Capítulo 5](#) contém a conclusão dessa dissertação.

MERCADO DE DERIVATIVOS

Derivativos são instrumentos financeiros que têm seu preço derivado de outros ativos, geralmente mais elementares, chamados ativos subjacentes (ou ativos-objeto). Os derivativos podem ser classificados como simples (*vanilla*) ou complexos (exóticos). Não há uma regra clara que distinga uma operação *vanilla* de uma exótica. Em geral, as primeiras são negociadas em maior volume e estão disponíveis em bolsas de valores com várias configurações pré-definidas de preços e vencimentos, enquanto as últimas costumam ser negociadas no mercado balcão entre investidores especializados e ter características personalizadas em cada negócio.

Dessa forma, para determinar o preço de um derivativo, é preciso conhecer o preço do ativo-objeto na data de vencimento do contrato em questão (em alguns casos, não só na data de vencimento, mas também ao longo do período de vigência da operação). Portanto, para poder calcular o preço de derivativos antes da data de vencimento, isto é, antes de a trajetória do preço do ativo subjacente ser conhecida efetivamente, são utilizados modelos matemáticos que visam descrever o comportamento do preço do ativo ao longo do tempo.

Na [Seção 2.1](#) são listados mais conceitos relativos ao mercado de derivativos, tendo sido usado como referência os trabalhos de [Volchan \(1999\)](#), [Haug \(2007\)](#) e [Hull \(2012\)](#). Além disso, são descritos os *payoffs* dos derivativos abordados nessa dissertação. Na [Seção 2.2](#) o modelo de Black-Scholes-Merton (BSM) é apresentado. Por último, a [Seção 2.3](#) mostra que o preço de um derivativo é dado pelo valor esperado do seu *payoff* na medida martingale equivalente.

2.1 Conceitos do mercado de derivativos

Nessa dissertação é discutido apenas um tipo de derivativo: as opções. Contratos de opção concedem ao seu possuidor o direito, mas não a obrigação, de comprar (ou vender, conforme o caso) determinada quantidade de um ativo (chamado ativo-objeto ou subjacente) em um determinado prazo por um preço pré-acordado. Uma opção de compra dá ao seu possuidor

o direito de comprar o ativo subjacente definido no contrato, enquanto uma opção de venda concede o direito ao seu possuidor de vender o ativo subjacente. Além disso, mais algumas características básicas de contratos de opção são:

- valor nocional: também chamado apenas de nocional, é a quantidade total de ativo-objeto à qual o contrato de opção se refere;
- preço de exercício: preço pelo qual o vendedor do contrato de opção se compromete a vender (ou comprar) o ativo subjacente;
- data de vencimento: também chamada data de maturidade, é a data em que o contrato de opção expira;
- prêmio: é o preço pago pelo comprador do contrato ao vendedor para ter o direito de exercer a opção;
- *payoff*: é uma função que determina o resultado financeiro (lucro ou prejuízo) do contrato.

Com relação à data de exercício, pode-se citar dois tipos de opções. Opções europeias dão ao comprador o direito de exercer a opção apenas na data de vencimento. Por outro lado, opções americanas dão ao comprador o direito de exercer a opção em qualquer momento entre o início do contrato e a data de vencimento.

Nesse trabalho são abordadas duas variações de contratos, a opção de compra europeia e a opção de compra *fade-in*, apresentadas, respectivamente, na [Subseção 2.1.1](#) e na [Subseção 2.1.2](#).

2.1.1 Opção de compra europeia

Uma opção de compra europeia sobre um ativo subjacente S é um contrato financeiro que concede ao seu detentor o direito de comprar esse ativo S pelo preço de exercício K . Esse direito pode ser exercido apenas na data de vencimento T . O preço P pago ao adquirir uma opção de compra é chamado *prêmio*.

Seja S_t o preço do ativo-objeto no instante de tempo t . Supondo que o detentor da opção é um indivíduo que deseja o maior retorno financeiro possível, ele exercerá seu direito apenas se o preço de exercício for menor que o preço de mercado do ativo subjacente na data de vencimento, isto é, apenas se $K < S_T$. Nesse caso, o *payoff* do detentor do contrato vale $(S_T - K)$, que é a diferença entre o preço de mercado do ativo e o preço pago de fato pelo detentor da opção. Por outro lado, caso $S_T < K$, é preferível comprar o ativo diretamente no mercado a exercer a opção e, nesse caso, o *payoff* da opção vale zero. Matematicamente, pode-se representar o *payoff* c_T de uma opção de compra europeia na data de vencimento por

$$c_T = (S_T - K)^+ \quad (2.1)$$

onde $(X)^+ = \max\{0, X\}$.

Em outras palavras, a [Equação 2.1](#) indica o prêmio justo a ser pago pela opção no dia do vencimento. Porém, como o prêmio é pago quando a opção é adquirida, qual é o seu valor justo no instante da aquisição? Considerando que o ativo-objeto segue certas premissas mencionadas na [Seção 2.2](#), a [Equação 2.2](#) representa o preço justo c da opção de compra europeia, ou seja, representa o valor do prêmio que deve ser pago ao adquirir a opção. Essa equação foi, dentre outras pessoas, derivada por [Black e Scholes \(1973\)](#) e [Merton \(1973\)](#) e sua fórmula é

$$c_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r_t T} N(d_2) \quad (2.2)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r_t + \sigma_t^2/2)T}{\sigma_t \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r_t - \sigma_t^2/2)T}{\sigma_t \sqrt{T}} = d_1 - \sigma_t \sqrt{T}$$

$N(x)$ = função de distribuição de probabilidade acumulada para uma distribuição normal padronizada;

S_t = valor do ativo no instante do cálculo do preço da opção;

K = preço de exercício;

r_t = taxa livre de risco;

T = tempo até o vencimento;

σ_t = volatilidade do preço do ativo-objeto.

2.1.2 Opção de compra fade-in

Uma opção de compra *fade-in* é uma opção de compra europeia cujo valor nocional é ponderado por um fator λ . O fator λ cresce a cada instante t_i em que o ativo subjacente esteja dentro de um dado intervalo $[L; H]$. Os instantes t_i , chamados datas de observação, e o intervalo $[L; H]$ são determinados pelo contrato. Se o ativo-objeto nunca sair do intervalo, o *payoff* da opção de compra *fade-in* é exatamente igual ao *payoff* da opção de compra europeia com 100% do valor nocional. Matematicamente, o *payoff* f_T de uma opção de compra *fade-in* é dado por

$$f_T = \lambda (S_T - K)^+, \quad \text{com} \quad \lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_{t_i} \in [L; H]\}}, \quad (2.3)$$

onde $0 < t_1 < \dots < t_N = T$ são as datas de observação. O [Exemplo 1](#) ilustra o cálculo do *payoff* de uma opção *fade-in*.

Exemplo 1 (Opção de compra *fade-in*). Considere uma opção de compra *fade-in* com quatro datas de observação $0 < t_1 < \dots < t_4 = T$, com intervalo $[L; H] = [95; 105]$ e com preço de exercício $K = 100$.

Tabela 1 – Preço do ativo-objeto S_i nas datas de observação t_i

Datas t_i	Preços S_i
t_1	96,12
t_2	94,80
t_3	95,23
t_4	104,60

Fonte – Elaborada pelo autor.

A Tabela 1 apresenta o preço do ativo subjacente em todas as datas de observação. Pode-se ver que, das quatro datas, apenas em t_2 o ativo ficou fora do intervalo. Portanto, $\lambda = \frac{3}{4}$. Assim, o *payoff* dessa opção vale

$$f_T = \lambda(S_T - K)^+ = \frac{3}{4}(104,60 - 100,00) = \frac{3}{4}4,60 = 3,45.$$

Uma expressão de forma fechada para o apreçamento da opção de compra *fade-in* c , quando o ativo-objeto segue o modelo de Black-Scholes-Merton (Seção 2.2), foi apresentada por Brockhaus *et al.* (1999) e corrigida por Haug (2007). Sua fórmula é dada por

$$c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S^{(b-r)T} [M(-d_5, d_1; -\rho) - M(-d_3, d_1; -\rho)] - X \exp^{-rT} [M(-d_6, d_2; -\rho) - M(-d_4, d_2; -\rho)], \quad (2.4)$$

onde N é o número de datas de observação, b é a taxa de custo de carregamento, r é a taxa de juros livre de risco, T é o tempo até o vencimento (expresso em anos), σ é a volatilidade do preço do ativo-objeto, $\rho = \frac{\sqrt{t_u}}{\sqrt{T}}$, $t_u = \frac{iT}{N}$ e

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} & d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \\ d_3 &= \frac{\ln(S/L) + (b + \sigma^2/2)t_u}{\sigma\sqrt{t_u}} & d_4 &= d_3 - \sigma\sqrt{t_u} \\ d_4 &= \frac{\ln(S/H) + (b + \sigma^2/2)t_u}{\sigma\sqrt{t_u}} & d_6 &= d_5 - \sigma\sqrt{t_u}. \end{aligned}$$

O termo $M(a, b; \rho)$ representa a função de distribuição normal bivariada acumulada padronizada, que retorna a probabilidade de uma variável aleatória ser menor que a e uma segunda variável aleatória ser menor que b quando a correlação entre essas duas variáveis é ρ :

$$M(a, b, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right] dx dy.$$

A [Tabela 2](#) mostra alguns valores de opção de compra *fade-in*. Pode-se perceber que quando o intervalo $[L; H]$ aumenta para longe do preço atual do ativo e a volatilidade é relativamente baixa, o valor da *fade-in* converge para o valor da opção de compra europeia comum, cujo preço está representado na última linha (BSM: valores Black-Scholes-Merton). Para simplificar, assume-se um ano com 366 dias, de forma que 183 datas de observação equivalem a meio ano. Além disso, ajustes devido ao mercado estar fechado nos finais de semana são ignorados.

Tabela 2 – Exemplos de valores de opção de compra *fade-in*
($S = 100; K = 100; T = 0,5; r = 0,1; b = 0; N = 183$)

L	H	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,15$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,25$	$\sigma = 0,3$	$\sigma = 0,35$	$\sigma = 0,4$
95	105	1,5427	1,7228	1,8353	1,9118	1,9663	2,0064	2,0364
90	110	2,2929	2,7573	3,0387	3,2410	3,3968	3,5206	3,6207
85	115	2,5864	3,4034	3,8948	4,2314	4,4887	4,6974	4,8716
80	120	2,6649	3,7549	4,4901	4,9887	5,3564	5,6489	5,8931
75	125	2,6802	3,9189	4,8735	5,5533	6,0497	6,4344	6,7493
50	150	2,6828	4,0229	5,3479	6,5956	7,6934	8,6153	9,3749
BSM:		2,6828	4,0232	5,3623	6,6997	8,0350	9,3679	10,6978

Fonte – ([HAUG, 2007](#), p. 123)

2.2 Modelo de Black-Scholes-Merton

Uma vez conhecido o preço do ativo-objeto S_t em todo instante t desde a partida do contrato de derivativo até o seu vencimento, é fácil calcular o *payoff* dado pelas equações (2.1) e (2.3). Porém, no instante t_0 em que se inicia a operação, quando o preço do ativo até o vencimento T ainda não é conhecido, é necessário definir o prêmio a ser pago pela opção. Conforme discutido na [Seção 2.3](#), o prêmio é dado pelo valor esperado do *payoff* trazido a valor presente. Para calcular o valor esperado do *payoff* é necessário um modelo que descreva o comportamento do ativo-objeto ao longo do tempo. Fisher Black, Myron Scholes e Robert Merton propuseram um modelo para realizar essa tarefa, que é conhecido por modelo de Black-Scholes-Merton (BSM). As características do modelo BSM serão sintetizadas nessa seção, tendo como referência as exposições feitas nos livros de [Hull \(2012\)](#), [Haug \(2007\)](#) e [Glasserman \(2013\)](#).

Considere uma opção de compra europeia com preço de exercício K e vencimento no tempo T , sendo $t = 0$ o tempo atual. Portanto, o *payoff* dessa opção no tempo T vale $(S_T - K)^+$. Para obter o valor presente desse *payoff* multiplica-se ele pelo fator de desconto e^{-rT} , sendo r a taxa de juros livre de risco (também chamada taxa de juros neutra ao risco, ideia que será vista na [Seção 2.3](#)). Assim, tem-se que o valor presente esperado é $\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+]$. Para calcular esse valor esperado faz-se necessário saber qual é a distribuição da variável aleatória S_T , o preço

do ativo-objeto na data de vencimento. O modelo de Black-Scholes-Merton considera que o ativo subjacente segue o movimento Browniano geométrico dado por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.5)$$

onde μ é a taxa instantânea de retorno do ativo, σ é a volatilidade do preço do ativo e dW_t é um processo de Wiener. Daí, assumindo que o retorno esperado do ativo é a taxa livre de risco ($\mu = r$), a solução da Equação 2.5 é dada por

$$S_T = S_0 \exp \left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2} \right] T + \sigma W_T \right) \quad (2.6)$$

onde S_0 é o preço atual do ativo, que é conhecido. A variável aleatória W_T tem distribuição normal com média zero e variância T , portanto pode ser rescrita como $\sqrt{T}Z$, sendo Z a variável aleatória padrão, que tem média zero e variância unitária. A representação no formato $\sqrt{t}Z$ será útil para construir a trajetória do ativo na simulação de Monte Carlo, com t variando de acordo com as datas de observação desejadas.

Considerando que o ativo-objeto não paga dividendos durante a vigência do contrato de opção, Black e Scholes (1973) derivaram uma fórmula que pode ser usada para apreçar uma opção de compra europeia. Merton (1973) estendeu o modelo de Black-Scholes para considerar que o ativo subjacente tem rendimentos de dividendos contínuos. Assim, a fórmula generalizada BSM para apreçar uma opção de compra europeia c é

$$c = S e^{(b-r)T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.7)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$b = r$ representa a fórmula proposta por Black e Scholes (1973).

$b = r - q$ representa a fórmula proposta por Merton (1973) com rendimentos de dividendos contínuos q

2.3 Preço de um derivativo como valor esperado do *payoff*

Um resultado crucial para o uso de métodos de Monte Carlo no apreçamento de derivativos e também para a matemática financeira em geral é o que costuma ser chamado de *teorema fundamental do apreçamento de ativos*, que diz que, dado um processo estocástico de preço $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, há uma medida martingale equivalente se, e somente se, o mercado em que o processo se encontra não possui oportunidades de arbitragem. A prova dessa relação de equivalência pode ser encontrada no trabalho de Delbaen e Schachermayer (1994, p. 479) e nas referências citadas

por eles. Em outras palavras, considerando que não há arbitragem no processo S , o teorema diz que a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em que S se encontra possui uma medida de probabilidade equivalente $\mathbb{Q}$ tal que o processo S é um martingale em $\mathbb{Q}$. Isso permite que o preço justo (sem possibilidade de arbitragem) seja obtido através do cálculo do valor esperado usando a medida de probabilidade equivalente $\mathbb{Q}$.

O conceito de oportunidade de arbitragem pode ser informalmente definido como a possibilidade de obter lucro sem correr risco e sem fazer um investimento financeiro líquido positivo. Por exemplo, considere que a taxa de câmbio entre as moedas americana e brasileira (USD/BRL) seja negociada em diversos mercados. Suponha ainda, para simplificar, que essa taxa no mercado brasileiro seja 1:1. Portanto, espera-se que em todos os demais mercados a taxa USD/BRL também valha 1:1. Porém, suponha que num mercado americano seja possível comprar um BRL pagando 0,99 USD. Então alguém poderia comprar BRL no mercado americano e simultaneamente vender a mesma quantidade de BRL no mercado brasileiro, obtendo lucro de 0,01 USD para cada unidade de BRL comprada e vendida. A essa estratégia de obtenção de lucro sem risco e sem investimento financeiro dá-se o nome de arbitragem.

A seguir é apresentada uma breve abordagem para explicar por que o apreamento de derivativos pode ser feito através do cálculo de valor esperado numa medida martingale equivalente. Essa abordagem foi baseada no livro de [Andersen e Piterbarg \(2010\)](#) e lá podem ser encontradas as demonstrações e os conceitos que não foram explicitados aqui. O trabalho de [Delbaen e Schachermayer \(1994\)](#) é outra referência que explica em detalhes os conceitos que permeiam o teorema fundamental do apreamento de ativos.

Considere um derivativo com data de vencimento T cujo *payoff* paga na data T uma variável aleatória $V(T)$ $\mathcal{F}_T$ -mensurável e não tem pagamentos intermediários antes do vencimento. Considere que o derivativo pode ser replicado por uma estratégia de negociação ϕ , ou seja, $V(T) = \phi(T)X(T) = \pi(T)$ quase certamente, onde $X(t)$ é o valor do ativo X no instante t , $\phi(t)$ é a quantidade do ativo na estratégia no instante t e $\pi(t)$ é o valor da estratégia no instante t . Como a estratégia replica o derivativo e não há arbitragem, tem-se que $V(t) = \pi(t)$, $t \in [0, T]$. Em particular, no início do contrato do derivativo ($t = 0$) tem-se que $V(0) = \pi(0)$. Essa observação é o fundamento para a teoria de apreamento por não-arbitragem e permite apreçar um derivativo através do valor esperado numa medida martingale equivalente.

Seja D um deflator e assumamos a existência de uma medida martingale equivalente Q^D induzida por D , logo a existência de Q^D garante que não há arbitragem no mercado. Daí, sendo $\pi(t)/D(t)$ um martingale na medida Q^D e retomando a relação $V(t) = \pi(t)$, segue que

$$\frac{V(t)}{D(t)} = \mathbb{E}_t^{Q^D} \left(\frac{V(T)}{D(T)} \right)$$

ou

$$V(t) = D(t) \mathbb{E}_t^{Q^D} \left(\frac{V(T)}{D(T)} \right).$$

SIMULAÇÃO MONTE CARLO NO APREÇAMENTO DE OPÇÕES

Derivativos exóticos são produtos frequentemente negociados em bancos de investimentos e têm alto grau de customização, ou seja, desde que acordado entre ambas as partes do contrato, as características do *payoff* do derivativo em questão podem ser praticamente quaisquer. Um dos custos de tamanha flexibilidade das operações exóticas é que, geralmente, elas não possuem solução em forma fechada para seu preço. Em alguns casos, considerando certas premissas a respeito da dinâmica do preço do ativo-objeto, é possível encontrar uma fórmula analítica para o preço do derivativo. Porém, se tais premissas forem restritas de forma que não retratem o comportamento real do ativo subjacente, o preço determinado pela fórmula analítica não será igual ao preço negociado no mercado, justamente por causa das simplificações feitas pelas premissas para que fosse possível determinar uma solução em forma fechada. Portanto, ao usar modelos sofisticados cujas premissas representam mais fielmente o comportamento do ativo no mercado financeiro, geralmente é preciso lançar mão do uso de métodos numéricos para realizar o apuração.

O método de Monte Carlo (MMC) é uma poderosa ferramenta para o apuração de produtos financeiros porque, dados o modelo que descreve a dinâmica do preço do ativo-objeto e a maneira de trazer a valor presente o *payoff* do derivativo, ele consegue estimar o preço da operação em questão ao simular uma grande quantidade de possíveis trajetórias para o ativo-objeto. Perceba que não é necessário aqui encontrar a solução de uma equação para o preço, basta simular a trajetória do ativo subjacente de acordo com o modelo desejado, seja ele simples ou sofisticado, e aplicar a regra do *payoff* definida no contrato do derivativo.

Por outro lado, o MMC tem duas desvantagens principais. A primeira se refere ao apuração de produtos como opções americanas, isto é, que permitem o exercício antecipado da opcionalidade. Nesses casos, é preciso calcular o valor presente esperado do *payoff* em cada ponto da trajetória do ativo-objeto e verificar em que instante se dá o momento ótimo de

exercício. Esse procedimento é muito lento e, quanto mais pontos houver na trajetória do ativo, maior será o tempo de execução do algoritmo. Segundo, as simulações de Monte Carlo têm alto custo computacional, ou seja, apreçar carteiras que contêm muitos derivativos exóticos pode levar tempo demais. Portanto, para mitigar essa desvantagem, técnicas têm sido desenvolvidas para aperfeiçoar a implementação do método de Monte Carlo. No sentido de contribuir para o aperfeiçoamento de implementações do MMC, o [Capítulo 4](#) dessa dissertação apresenta uma abordagem que reutiliza números aleatórios e, dessa forma, promove a redução do tempo total de execução da simulação.

A [Seção 3.1](#) mostra uma ideia intuitiva sobre como o método de Monte Carlo funciona. Em seguida, a [Seção 3.2](#) apresenta como os parâmetros do algoritmo impactam o erro do resultado da simulação. A [Seção 3.3](#) descreve os algoritmos para apreçamento de um derivativo e de uma carteira de derivativos usando a abordagem Regular do método de Monte Carlo. Por último, a [Seção 3.4](#) mostra o teste que será realizado para comparar as duas implementações da simulação de Monte Carlo tratadas nesse trabalho e mostra também os resultados desse teste ao utilizar o algoritmo Regular.

3.1 Método de Monte Carlo

[Glasserman \(2013, p. 1\)](#) descreve um exemplo simples para apresentar uma ideia intuitiva sobre o funcionamento do método de Monte Carlo (MMC). Ele diz que o MMC é baseado na relação entre probabilidade e volume de forma que, para calcular o volume de uma região, geram-se amostras aleatórias do universo de resultados possíveis para onde aquela região está situada e pega-se a fração das amostras que caem dentro da região desejada. Essa fração é uma estimativa do volume da região. A lei dos grandes números garante que essa estimativa converge para o valor correto do volume à medida que a quantidade de amostras aumenta. O teorema central do limite diz a magnitude do erro da estimativa dada a quantidade de amostras geradas. A [Tabela 3](#) apresenta uma analogia entre essa ideia do volume e a ideia de cálculo do *payoff* em Finanças.

Tabela 3 – Analogia entre a estimativa do volume de uma região e o *payoff* de um derivativo

Estimativa do volume	Estimativa do <i>payoff</i>
Amostras do universo de resultados possíveis para onde a região está situada.	Trajetoórias do ativo-objeto desde o início do derivativo até o seu vencimento.
Para cada amostra � verificado se ela está dentro da região.	Para cada trajetória � calculado o <i>payoff</i> do derivativo.
O volume � estimado pela fra�o das amostras que caem dentro da região.	O <i>payoff</i> � estimado pela média dos <i>payoffs</i> de todas as trajetórias que foram traçadas.

Fonte – Elaborada pelo autor.

Por exemplo, seja C uma opo de compra europeia sobre o ativo S , com data de

vencimento T e preço de exercício K . Considere que a dinâmica de S é definida pelo modelo de Black-Scholes-Merton. Assim, de acordo com a [Equação 2.6](#), o preço S_T do ativo no instante T pode ser representado por

$$S_T = S_0 \exp \left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2} \right] T + \sigma \sqrt{T} Z \right)$$

onde Z é uma variável aleatória normal padrão, com média zero e variância unitária. Ou seja, para cada amostra Z_i da v.a. Z tem-se uma respectiva amostra $S_{T,i} = S_0 \exp \left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2} \right] T + \sigma \sqrt{T} Z_i \right)$ do preço do ativo na data de vencimento e uma amostra correspondente $C_i = (S_{T,i} - K)^+$ do *payoff* da opção. Dessa forma, geram-se n amostras $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ e, conseqüentemente, obtém-se n valores $S_{T,1}, S_{T,2}, \dots, S_{T,n}$ e n valores $C_1, C_2, \dots, C_n$. Então, estima-se o *payoff* C da opção via $\hat{C}_n = \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n}$.

É importante ressaltar que o preço do ativo-objeto é baseado numa distribuição de probabilidade tal que cada amostra é obtida *aleatória e independentemente*.

3.2 Teorema central do limite e erro na simulação

O algoritmo do MMC utiliza números aleatórios em suas simulações. Portanto, é esperado que cada simulação apresente um resultado ligeiramente diferente uma da outra. Considerando isso, um questionamento que pode surgir é: quão cada resultado da simulação é diferente do outro? O teorema central do limite (TCL) é um ponto chave para responder essa questão.

Segundo [Mood, Graybill e Boes \(1974, p. 195\)](#), o TCL pode ser definido como:

If for each positive integer n , $X_1, \dots, X_n$ are independent and identically distributed random variables with mean μ_X and variance σ_X^2 , $0 < \sigma_X < \infty$, then for each z

$F_{Z_n}(z)$ converges to $\Phi(z)$ as n approaches ∞ ,

where

$$Z_n = \frac{(\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n))}{\sqrt{\text{var}[\bar{X}_n]}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}}.$$

Os termos $F_{Z_n}(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ referem-se, respectivamente, à função de distribuição acumulada de Z_n e à função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão. Essa definição é equivalente a dizer que, dada uma distribuição com média μ_X e variância σ_X^2 , a distribuição amostral das médias das amostras se aproxima de uma distribuição normal com média μ_X e variância σ_X^2/n à medida que n , o tamanho da amostra, cresce indefinidamente. Dois pontos importantes de enfatizar aqui são:

- Não importa qual é a distribuição de $X_1, \dots, X_n$, ela apenas precisa ter média e variância finitas;

- n , em σ_X^2/n , é o tamanho da amostra usada para calcular cada média e não o número de médias amostradas.

Portanto, para reduzir a variância do resultado de uma simulação de Monte Carlo e, conseqüentemente, reduzir o erro na simulação, é necessário aumentar o tamanho da amostra usada no cálculo de cada média. A [Tabela 4](#) apresenta um exemplo desse efeito. Foram definidas quatro configurações com diferentes tamanhos de amostra usadas para calcular o preço de uma opção de compra europeia cujo ativo-objeto tem dinâmica definida pelo modelo Black-Scholes-Merton. Cada configuração foi executada 1.000 vezes para que fosse obtida uma estimativa da variância da média amostral e para gerar dados para plotar a [Figura 1](#). Os parâmetros da opção, comuns às quatro configurações, são:

- Preço inicial do ativo-objeto: \$ 100;
- Preço de exercício: \$ 120;
- Tempo até o vencimento: 1 ano;
- Taxa livre de risco: 10% ao ano;
- Volatilidade: 30% ao ano.

Tabela 4 – Configuração para mostrar o efeito do tamanho da amostra no valor do desvio padrão

	<i>Setup</i> ₁	<i>Setup</i> ₂	<i>Setup</i> ₃	<i>Setup</i> ₄
Tamanho da amostra (n)	100	2.500	4.900	10.000
Preço da simulação	8,6412	8,6040	8,6173	8,6112
Desvio padrão da amostra (σ)	1,8403	0,3644	0,2648	0,1774
Razão de n para o <i>Setup</i> ₁	1	$25 = 5^2$	$49 = 7^2$	$100 = 10^2$
Razão esperada de σ para o <i>Setup</i> ₁	1	$\frac{1}{5} = 0,2000$	$\frac{1}{7} = 0,1429$	$\frac{1}{10} = 0,1000$
Razão realizada de σ para o <i>Setup</i> ₁	1	0,1980	0,1439	0,0964

Fonte – Elaborada pelo autor.

De acordo com a [Equação 2.2](#), o valor teórico dessa opção é 8,6063. Apesar de o preço resultante do *Setup*₂ estar mais próximo do preço teórico do que o preço do *Setup*₄, este tem menor desvio padrão do que aquele. Na [Figura 1](#) é fácil ver que o diagrama de frequência dos preços da simulação do *Setup*₄ tem menor desvio padrão do que qualquer outra configuração.

O objetivo dessa seção é prover uma ideia intuitiva a respeito de como os parâmetros da simulação afetam a magnitude do erro do resultado. Uma abordagem mais abrangente desse assunto pode ser encontrada em [Glasserman \(2013\)](#).

Figura 1 – Diagrama de frequência do preço de simulação de cada configuração da Tabela 4

Fonte – Elaborada pelo autor.

3.3 Apreçamento com a abordagem Monte Carlo Regular

O Algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo para o apreçamento de um *payoff* usando a abordagem Regular do método de Monte Carlo. A função `MonteCarloRegular` retorna o preço de um derivativo e requer os seguintes parâmetros:

- m : quantidade de trajetórias que serão amostradas;
- S_0 : preço inicial do ativo-objeto;
- r : taxa de juros livre de risco ao ano;
- σ : volatilidade ao ano;
- τ : tempo até o vencimento, expresso em anos;
- *Payoff*: função *payoff* do derivativo a ser apreçado (dada a trajetória do ativo-objeto, essa função retorna o valor do *payoff* do derivativo).

Na linha 2 a variável n contém a quantidade de números aleatórios necessários para construir uma trajetória para apreçar o *payoff* que foi passado como parâmetro da simulação. Cada *payoff* pode requerer uma quantidade distinta de datas de observação para calcular o preço do ativo-objeto e consequentemente uma quantidade distinta de números aleatórios. Opções de compra europeias como a que foi descrita na Subseção 2.1.1 têm apenas uma data de observação, que é a data de vencimento do contrato, e portanto requerem apenas um número aleatório para construir a trajetória (que só tem um ponto). Já as opções de compra *fade-in* apresentadas na

Algoritmo 1 – Apreçamento de um *payoff* com Monte Carlo Regular

```

1: função MONTECARLOREGULAR( $m, S_0, r, \sigma, \tau, Payoff$ )
2:    $n \leftarrow$  quantidade de números aleatórios necessários por trajetória
3:    $todasVAs \leftarrow \text{AmostraNormal}(n \times m)$   $\triangleright$  gera  $n \times m$  amostras da Normal padrão
4:    $soma \leftarrow 0, 0$ 
5:   para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça
6:      $VAs = \text{Extrai}(n, todasVAs)$   $\triangleright$  obtém  $n$  v.a.'s da coleção  $todasVAs$ 
7:      $caminho \leftarrow \text{ConstroiTrajetoria}(VAs, S_0, r, \sigma, \tau)$ 
8:      $soma \leftarrow soma + Payoff(caminho)$   $\triangleright$  calcula o payoff da trajetória
9:   fim para
10:   $desconto = e^{-r\tau}$   $\triangleright$  calcula o fator de desconto
11:  retorna  $(soma/m) \times desconto$   $\triangleright$  retorna o preço
12: fim função

```

Subseção 2.1.2 podem precisar de mais datas de observação. Por exemplo, a opção *fade-in* apresentada na **Tabela 1** requer 183 datas de observação do preço do ativo-objeto, portanto, nesse caso, o valor de n na linha 2 seria 183. Na linha 3 todos os números aleatórios (obtidos a partir de uma distribuição Normal padrão) necessários para construir as m trajetórias e apreçar o derivativo são gerados juntos pela função `AmostraNormal` e armazenados na lista `todasVAs`. Na linha 6 n números são removidos da lista `todasVAs` para construir um caminho do ativo subjacente. Na linha 7 o caminho é construído e na linha 8 o *payoff* é calculado usando a trajetória que acabou de ser gerada. Por último, o fator de desconto para trazer o *payoff* a valor presente é calculado na linha 10 e o resultado da simulação é retornado na linha 11.

É importante deixar claro como a função `ConstroiTrajetoria` simula o caminho do ativo-objeto. A **Equação 2.6** mostra como simular S_T dado S_0 . Para simular S_i dado S_{i-1} o procedimento é análogo, discretizando o movimento browniano geométrico

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} \exp \left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2} \right] (t_i - t_{i-1}) + \sigma \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i \right) \quad (3.1)$$

em que Z_i são variáveis aleatórias independentes que seguem a distribuição Normal padrão.

O parâmetro τ da função se refere ao tamanho do intervalo de tempo entre um instante e o próximo, $t_i - t_{i-1}$. Sem perda da generalidade, para simplificar a implementação, considera-se que, quando a trajetória possui mais de uma data de observação, elas são distribuídas igualmente espaçadas desde a data de início do contrato até a data de vencimento. Assim, explica-se a necessidade de cada parâmetro da função `ConstroiTrajetoria`.

Uma vez detalhado o **Algoritmo 1**, que descreve o apreçamento de um derivativo apenas, o **Algoritmo 2** apresenta como apreçar uma carteira com vários derivativos usando a abordagem Monte Carlo Regular. A função `CarteiraMonteCarloRegular` retorna uma lista de preços referentes à lista de *payoffs* de derivativos que recebeu como parâmetro. Os parâmetros m , S_0 , r e σ têm o mesmo significado daqueles da função `MonteCarloRegular`. Os parâmetros distintos

são:

- p : a quantidade de derivativos da carteira que será apreçada;
- $\tau[]$: uma lista de tamanho p que contém o tempo até o vencimento de cada derivativo;
- $Payoffs[]$: uma lista de tamanho p que contém a função *payoff* de cada derivativo.

Algoritmo 2 – Apreçamento de uma carteira com Monte Carlo Regular

```

1: função CARTEIRAMONTECARLOREGULAR( $m, S_0, r, \sigma, p, \tau[ ], Payoffs[ ]$ )
2:    $precos \leftarrow \mathbf{Zeros}[p]$ 
3:   para  $i \leftarrow 1$  até  $p$  faça
4:      $precos[i] \leftarrow \mathbf{MonteCarloRegular}(m, S_0, r, \sigma, \tau[i], Payoffs[i])$ 
5:   fim para
6:   retorna  $precos$ 
7: fim função
  
```

Na linha 2 a lista *precos*, de tamanho p , é inicializada com todos os elementos iguais a zero. Na linha 4 cada derivativo é apreçado pela função *MonteCarloRegular* e o resultado da simulação é salvo numa posição da lista *precos*. Por fim, na linha 6 a lista com o preço de todos os derivativos da carteira é retornada.

3.4 Apreçamento de uma carteira com a abordagem Monte Carlo Regular

Aqui é apresentada a configuração do teste de apreçamento de carteira usado para comparar as duas abordagens da simulação de Monte Carlo tratadas nessa dissertação. Além disso, são mostrados os resultados desse teste ao executar o algoritmo Monte Carlo Regular.

3.4.1 Configuração do teste de apreçamento de carteira

O teste consiste em apreçar cinco carteiras que têm de uma a cinco opções de compra *fade-in*, conforme apresentado na Tabela 5, e então comparar o tempo de execução dos algoritmos em questão, Monte Carlo Regular e Monte Carlo Reuso. Além disso, também compara-se o erro médio quadrático dos preços resultantes das simulações em relação ao preço teórico esperado de acordo com a Equação 2.4, que representa a expressão em forma fechada do preço de uma *fade-in*.

Os dados de mercado e os parâmetros da Simulação de Monte Carlo comuns a todas as opções no teste são:

- Quantidade de trajetórias traçadas em cada simulação: 30.000;

Tabela 5 – Composição das carteiras de opções de compra *fade-in* usadas no teste dos algoritmos

	Faixa baixa	Faixa alta	Carteira ₁	Carteira ₂	Carteira ₃	Carteira ₄	Carteira ₅
<i>Fade-in 1</i>	95	105	X	X	X	X	X
<i>Fade-in 2</i>	90	110		X	X	X	X
<i>Fade-in 3</i>	85	115			X	X	X
<i>Fade-in 4</i>	80	120				X	X
<i>Fade-in 5</i>	75	125					X

Fonte – Elaborada pelo autor.

- Preço inicial do ativo-objeto: \$ 100;
- Preço de exercício: \$ 100;
- Tempo até o vencimento: 0,5 ano;
- Taxa de juros livre de risco: 10% por ano;
- Volatilidade: 20% ao ano;
- Quantidade de datas de observação: 183.

Cada uma das cinco carteiras é apreçada 1.000 vezes usando o algoritmo Regular e outras 1.000 vezes usando o algoritmo Reuso. O tempo de consumo de processamento é coletado a cada execução e dividido nas quatro categorias definidas na [Tabela 6](#).

Tabela 6 – Categorias de divisão do tempo de consumo de processamento.

Nome	Descrição
<i>Tempo₁</i>	Tempo de geração dos números aleatórios
<i>Tempo₂</i>	Tempo de construção da trajetória do ativo-objeto
<i>Tempo₃</i>	Tempo de cálculo do <i>payoff</i>
<i>Tempo₄</i>	Tempo restante (tempo total de execução menos os três tempos citados acima)

Fonte – Elaborada pelo autor.

A biblioteca `MathNet.Numerics.dll` ([<nuget.org/packages/MathNet.Numerics/>](http://nuget.org/packages/MathNet.Numerics/)) é usada para gerar as amostras de números aleatórios que seguem a distribuição Normal padrão.

3.4.2 Execução do teste no algoritmo Monte Carlo Regular

As implementações dos [Algoritmo 1](#) e [Algoritmo 2](#) resultam numa aplicação que calcula os preços de derivativos presentes numa carteira. O resultado do cálculo das cinco carteiras listadas na [Tabela 5](#) usando essa aplicação é mostrado a seguir.

Com relação ao tempo de processamento de cada categoria descrita na [Tabela 6](#) pela função `MonteCarloRegular`, o *Tempo₁* se refere à linha 3, o *Tempo₂* à linha 7 e o *Tempo₃* à

linha 8 do Algoritmo 1. A Figura 2 e a Tabela 7 mostram o tempo médio consumido para cada categoria após 1.000 execuções da simulação Monte Carlo Regular. É fácil ver que a maior parte do tempo da simulação é gasta na geração de números aleatórios ($Tempo_1$).

Figura 2 – Tempo médio de processamento por categoria no algoritmo Monte Carlo Regular

Fonte – Elaborada pelo autor.

Tabela 7 – Tempo médio de cada categoria na simulação Monte Carlo Regular (em segundos)

	Tempo total	$Tempo_1$	$Tempo_2$	$Tempo_3$	$Tempo_4$
$Carteira_1$	0,73	0,35	0,19	0,16	0,03
$Carteira_2$	1,46	0,71	0,38	0,32	0,05
$Carteira_3$	2,16	1,04	0,56	0,48	0,08
$Carteira_4$	3,24	1,57	0,84	0,71	0,12
$Carteira_5$	3,60	1,75	0,93	0,79	0,13

Fonte – Elaborada pelo autor.

Ainda, a Figura 3 indica que o tempo consumido pela geração de números aleatórios cresce de maneira praticamente linear com o aumento da quantidade de derivativos na carteira. Portanto, o reuso de números aleatórios é uma estratégia com bom potencial para contribuir com a redução do tempo total de simulação.

Com relação aos preços dos derivativos da carteira, a Tabela 8 apresenta a comparação entre os preços calculado com a fórmula analítica (Equação 2.4) e os preços obtidos via simulação do algoritmo Monte Carlo Regular.

Figura 3 – Tempo médio de geração de números aleatórios no algoritmo Monte Carlo Regular

Fonte – Elaborada pelo autor.

Tabela 8 – Preço e seu erro médio quadrático usando o algoritmo Regular

	Faixa baixa	Faixa alta	Preço analítico	Preço da simulação	Erro médio quadrático
<i>Fade-in 1</i>	95,00	105,00	2,6093	2,6091	0,0004
<i>Fade-in 2</i>	90,00	110,00	4,3436	4,3417	0,0008
<i>Fade-in 3</i>	85,00	115,00	5,6409	5,6408	0,0013
<i>Fade-in 4</i>	80,00	120,00	6,6030	6,6078	0,0019
<i>Fade-in 5</i>	75,00	125,00	7,2695	7,2758	0,0023

Fonte – Elaborada pelo autor.

REUSO DE NÚMEROS ALEATÓRIOS NA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Conforme visto na [Subseção 3.4.2](#), o tempo gasto na geração de números aleatórios responde por quase 50% do tempo total de execução da abordagem Monte Carlo Regular, o que leva para essa parte do algoritmo o foco de tentativas de melhoria na performance da simulação. Nesse capítulo é apresentado o algoritmo Monte Carlo Reuso, que é uma maneira de reusar números aleatórios para apreçar diferentes derivativos de uma mesma carteira. No caso ótimo, quando todos os derivativos da carteira requerem a mesma quantidade de números aleatórios para o cálculo do preço, o algoritmo Reuso é capaz de reduzir a quantidade total de números aleatórios gerados para $1/n$ da quantidade requerida pelo algoritmo Regular, onde n é a quantidade de derivativos presentes na carteira sujeita ao apreçamento.

A [Seção 4.1](#) descreve em detalhes o algoritmo de reuso de números aleatórios. A [Seção 4.2](#) apresenta, usando o algoritmo Monte Carlo Reuso, os resultados do apreçamento da carteira definida na [Subseção 3.4.1](#) e, além disso, compara tais resultados com aqueles obtidos ao usar a abordagem Monte Carlo Regular.

4.1 Estratégia de reuso dos números aleatórios

Considere uma carteira composta por três opções de compra *fade-in*, cada qual com sua respectiva quantidade de datas de observação, conforme mostra a [Tabela 9](#). Os demais parâmetros da opção *fade-in* não impactam a quantidade de variáveis aleatórias que devem ser geradas para a realização do apreçamento.

No algoritmo Monte Carlo Reuso, a cada rodada de apreçamento são geradas as variáveis aleatórias necessárias para calcular o *payoff* dos derivativos apenas uma vez, ou seja, a cada rodada é construída apenas uma trajetória do ativo-objeto para cada derivativo da carteira. Note

Tabela 9 – Quantidade de datas de observação das opções *fade-in* da carteira

Derivativo	Quantidade de datas de observação
<i>Fade-in</i> ₁	3
<i>Fade-in</i> ₂	4
<i>Fade-in</i> ₃	6

Fonte – Elaborada pelo autor.

que isso contrasta com o [Algoritmo 2](#), da função `CarteiraMonteCarloRegular`, em que são geradas todas as trajetórias referentes a um derivativo e só depois disso passa-se para a geração de trajetórias do derivativo seguinte.

A quantidade de variáveis aleatórias necessárias para apreçar uma opção *fade-in* é igual à quantidade de datas de observação dela. Portanto, para apreçar *Fade-in*₁ são necessários três números aleatórios para construir uma trajetória do ativo-objeto com três datas de observação. Analogamente, para apreçar *Fade-in*₂ são necessários quatro números aleatórios. Todavia, ao invés de gerar quatro novos números aleatórios, usa-se os três já gerados para a *Fade-in*₁ e gera-se apenas mais um número aleatório. Da mesma maneira, para apreçar *Fade-in*₃ são necessários seis números aleatórios, porém basta gerar dois novos números e usá-los juntamente com os quatro já gerados para então construir uma trajetória com seis datas de observação. Resumindo, numa rodada de apreçamento dessa carteira, ao invés de serem gerados $3 + 4 + 6 = 13$ números aleatórios, são gerados apenas seis.

Sem perda de generalidade, apenas para exemplificar, a [Tabela 10](#) ilustra a primeira rodada da simulação do algoritmo Monte Carlo Reuso. Para montar a [Tabela 10](#) considera-se que o ativo-objeto segue o modelo Black-Scholes-Merton e, portanto, usa-se a [Equação 3.1](#) para traçar sua trajetória. Consideram-se também os seguintes valores para os demais parâmetros, comuns às três opções da carteira: taxa livre de risco $r = 10\%$ ao ano, volatilidade $\sigma = 20\%$ ao ano, tempo até o vencimento $\tau = 1$ ano, preço inicial do ativo-objeto $S_0 = 100,00$, faixa de baixa $L = 90,00$, faixa de alta $H = 110,00$ e preço de exercício $K = 103,00$.

Tabela 10 – Primeira rodada de trajetórias do ativo-objeto para cada opção *fade-in* na carteira

Variável aleatória	<i>Fade-in</i> ₁	<i>Fade-in</i> ₂	<i>Fade-in</i> ₃
0,83754	113,13	110,93	108,51
-0,88945	104,85	103,54	102,27
-0,14925	105,84	104,07	102,39
-0,05535		105,59	103,29
0,87721			112,45
0,61316			119,81

Fonte – Elaborada pelo autor.

Assim, dados os parâmetros para a construção da trajetória dos ativos subjacentes de cada derivativo da carteira, uma mesma amostra de variável aleatória (por exemplo 0,83754)

pode ser usada três vezes, gerando os valores de ativo 113,13, 110,93 e 108,51 para as opções $Fade-in_1$, $Fade-in_2$ e $Fade-in_3$, respectivamente. Com as trajetórias construídas e com a fórmula que descreve a opção *fade-in* (Equação 2.3), é fácil calcular o valor do *payoff* dos derivativos da carteira na data de vencimento, conforme mostrado na Tabela 11.

Tabela 11 – Valor do *payoff* dos derivativos na primeira rodada do algoritmo

	$Fade-in_1$	$Fade-in_2$	$Fade-in_3$
$(S_T - K)^+$	2,84	2,59	16,81
Peso λ	0,67	0,75	0,67
<i>Payoff</i>	1,89	1,94	11,21

Fonte – Elaborada pelo autor.

Vale ressaltar que esse algoritmo não tem restrição com relação à data de vencimento nem com relação ao ativo-objeto dos derivativos da carteira. Em outras palavras, o algoritmo aceita derivativos que não têm a mesma data de vencimento nem têm o mesmo ativo-objeto. Dadas as variáveis aleatórias, cada trajetória pode ser construída de acordo com seus respectivos parâmetros e modelo.

Esse procedimento é repetido a cada rodada de geração de trajetórias dos ativos subjacentes dos derivativos da carteira até que seja completado o número total de amostras definidas para essa simulação de Monte Carlo. Ou seja, na segunda rodada do algoritmo Reuso são geradas mais seis variáveis aleatórias e, a partir delas, novas três trajetórias dos ativos subjacentes e, portanto, mais três valores de *payoff* dos derivativos da carteira.

O Algoritmo 3 apresenta o pseudocódigo do apreçamento uma carteira com vários derivativos usando a abordagem Monte Carlo Reuso. A função `CarteiraMonteCarloReuso` recebe os mesmos parâmetros da função `CarteiraMonteCarloRegular` (descrita na Seção 3.3) e retorna uma lista de preços referentes à lista de *payoffs* de derivativos que recebeu como parâmetro.

Na linha 2 são percorridos todos os derivativos da carteira para encontrar aquele que requer maior quantidade de variáveis aleatórias em seu apreçamento, pois é essa quantidade (n_{Max}) que será gerada a cada rodada da simulação de Monte Carlo. Na linha 4 são geradas as variáveis aleatórias (obtidas a partir de uma distribuição Normal padrão) necessárias para construir uma trajetória do ativo-objeto para cada derivativo da carteira. No *loop* da linha 5 as variáveis que acabaram de ser geradas são usadas para construir uma trajetória para cada derivativo e, em seguida, o respectivo *payoff* é calculado. Por último, os fatores de desconto para trazer o *payoff* a valor presente são calculados na linha 11 e o resultado da simulação é retornado na linha 14.

Algoritmo 3 – Apreçamento de uma carteira com Monte Carlo Reuso

```

1: função CARTEIRAMONTECARLOREUSO( $m, S_0, r, \sigma, p, \tau[ ], Payoff[ ]$ )
2:    $nMax \leftarrow$  maior quantidade de v.a.'s necessárias por trajetória  $\triangleright$  na Tabela 9,  $nMax \leftarrow 6$ 
3:   para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça  $\triangleright$  geração de  $m$  trajetórias por derivativo
4:      $VAsDaRodada = \text{AmostraNormal}(nMax)$   $\triangleright$  v.a.'s compartilhadas na rodada
5:     para  $j \leftarrow 1$  até  $p$  faça  $\triangleright$  gera 1 caminho por derivativo
6:        $caminho \leftarrow \text{ConstroiTrajetoria}(VAsDestaRodada, S_0, r, \sigma, \tau_j)$ 
7:        $soma_j \leftarrow soma_j + Payoff_j(caminho)$   $\triangleright$  calcula o  $payoff_j$ 
8:     fim para
9:   fim para
10:  para  $j \leftarrow 1$  até  $p$  faça
11:     $desconto_j \leftarrow e^{-r\tau_j}$   $\triangleright$  calcula o fator de desconto de cada derivativo
12:     $precos_j \leftarrow (soma_j/m) \times desconto_j$   $\triangleright$  calcula o preço de cada derivativo
13:  fim para
14:  retorna  $precos$   $\triangleright$  retorna a lista de preços
15: fim função

```

4.2 Apreçamento de uma carteira com a abordagem Monte Carlo Reuso

A implementação do Algoritmo 3 resulta numa aplicação que calcula os preços de derivativos presentes numa carteira. O resultado do cálculo das cinco carteiras listadas na Tabela 5 usando essa aplicação é mostrado a seguir.

Com relação ao tempo de processamento de cada categoria descrita na Tabela 6, o $Tempo_1$ se refere à linha 4, o $Tempo_2$ à linha 6 e o $Tempo_3$ à linha 7 do Algoritmo 3. A Tabela 12 e a Figura 4 mostram o tempo médio consumido para cada categoria após 1.000 execuções da simulação Monte Carlo Reuso.

Tabela 12 – Tempo médio de cada categoria na simulação Monte Carlo Reuso (em segundos)

	Tempo total	$Tempo_1$	$Tempo_2$	$Tempo_3$	$Tempo_4$
$Carteira_1$	0,76	0,36	0,18	0,16	0,05
$Carteira_2$	1,14	0,36	0,37	0,32	0,09
$Carteira_3$	1,48	0,35	0,54	0,47	0,11
$Carteira_4$	2,02	0,35	0,81	0,70	0,16
$Carteira_5$	2,20	0,35	0,90	0,78	0,18

Fonte – Elaborada pelo autor.

Perceba que, como em todas as carteiras a quantidade máxima de variáveis aleatórias necessárias para construir uma trajetória é a mesma (183 v.a.'s), o $Tempo_1$ gasto pela função $CarteiraMonteCarloReuso$ é praticamente o mesmo seja para apreçar uma carteira com um derivativo apenas ($Carteira_1$) ou com cinco derivativos ($Carteira_5$), pois, a cada rodada da simulação de Monte Carlo, a mesma quantidade de variáveis aleatórias é gerada no apreçamento das cinco carteiras.

Figura 4 – Tempo médio de processamento por categoria no algoritmo Monte Carlo Reuso

Fonte – Elaborada pelo autor.

Com relação aos preços dos derivativos da carteira, a [Tabela 13](#) apresenta a comparação entre os preços calculados com a fórmula analítica ([Equação 2.4](#)) e os preços obtidos via simulação com o algoritmo Monte Carlo Reuso.

Tabela 13 – Preço e seu erro médio quadrático usando o algoritmo Reuso

	Faixa baixa	Faixa alta	Preço ana-lítico	Preço da simulação	Erro médio quadrático
<i>Fade-in 1</i>	95	105	2,6093	2,6096	0,0004
<i>Fade-in 2</i>	90	110	4,3436	4,3426	0,0008
<i>Fade-in 3</i>	85	115	5,6409	5,6410	0,0013
<i>Fade-in 4</i>	80	120	6,6030	6,6065	0,0018
<i>Fade-in 5</i>	75	125	7,2695	7,2766	0,0023

Fonte – Elaborada pelo autor.

4.2.1 Comparação dos algoritmos Monte Carlo Regular e Monte Carlo Reuso

A comparação do tempo total médio para apreçamento das cinco carteiras definidas na [Tabela 5](#) usando os algoritmos Regular e Reuso é apresentada na [Tabela 14](#). De acordo com o detalhamento dos tempos de execução mostrados na [Tabela 7](#) e na [Tabela 12](#), o tempo consumido na construção de trajetórias do ativo-objeto ($Tempo_2$) e no cálculo do *payoff* ($Tempo_3$) é semelhante em ambas as implementações. O $Tempo_4$ é maior no algoritmo Reuso do que no

Regular devido ao *overhead* para gerenciar o reuso das variáveis aleatórias. Por outro lado, quando a carteira é composta por dois ou mais derivativos, o tempo gasto com a geração de variáveis aleatórias ($Tempo_1$) no algoritmo Reuso é menor do que no Regular. A redução do $Tempo_1$ no algoritmo Reuso é o motivo da sua melhor performance quando comparado com a abordagem Regular. A Figura 5 ilustra a comparação do tempo total médio de execução dos dois algoritmos e a Tabela 14 apresenta as diferenças absoluta e percentual no tempo de apuração quando o algoritmo Reuso é aplicado ao invés do Regular. Note que apenas no caso em que a carteira contém só um derivativo é que o algoritmo Reuso tem performance pior que o Regular, o que se deve ao *overhead* comentado anteriormente.

Figura 5 – Comparação do tempo total de execução dos algoritmos de Monte Carlo

Fonte – Elaborada pelo autor.

Tabela 14 – Comparação de tempo total médio de execução dos algoritmos Regular e Reuso

	Tempo total médio (s)		Diferença no tempo de execução	
	Regular	Reuso	Absoluta (s)	Percentual
<i>Carteira₁</i>	0,73	0,76	0,03	4%
<i>Carteira₂</i>	1,46	1,14	-0,32	-22%
<i>Carteira₃</i>	2,16	1,48	-0,68	-31%
<i>Carteira₄</i>	3,24	2,02	-1,22	-38%
<i>Carteira₅</i>	3,60	2,20	-1,40	-39%

Fonte – Elaborada pelo autor.

Num ambiente de banco de investimento, as carteira geralmente têm dezenas de derivativos exóticos e é importante conhecer mais informações sobre elas do que apenas seu preço. Por exemplo, para os negociadores de derivativos, é importante conhecer o perfil de risco de suas

carteiras. Um perfil de risco mostra qual seria o lucro ou prejuízo (P&L) da carteira de acordo com mudanças nos dados de mercado. Por exemplo, o valor do *payoff* da opção de compra *fade-in* depende do preço corrente (S_0) do ativo-objeto e de sua volatilidade (σ), pois esses dois dados de mercado são utilizados na simulação das trajetórias do ativo subjacente. Portanto, alterações nos dados S_0 ou σ (ou nos dois) podem impactar o preço da carteira.

O perfil de risco da *Carteira₅* para variações do preço do ativo-objeto e da sua volatilidade é apresentado na [Tabela 16](#). Para gerar esse perfil de risco é necessário apreçar a *Carteira₅* usando cada uma das 221 combinações do par preço de ativo e volatilidade. Portanto, considerando os tempos de execução apresentados na [Tabela 14](#), a geração do perfil de risco da *Carteira₅* leva 486 segundos (em torno de 8 minutos) com o algoritmo Reuso enquanto que, com o Regular, o tempo gasto é de 795 segundos (em torno de 13 minutos).

A [Tabela 15](#) sintetiza a comparação do preço da carteira obtido com cada algoritmo e mostra que o erro médio quadrático (EMQ) do preços das opções *fade-in* não sofreu alteração relevante entre os algoritmos. Portanto, é possível sugerir que a implementação Reuso não afetou a qualidade do preços obtidos através do método de Monte Carlo.

Tabela 15 – Comparação dos preços obtidos com os algoritmos Regular e Reuso

	Faixa baixa	Faixa alta	Preço analítico	Preço Regular	EMQ Regular	Preço Reuso	EMQ Reuso
<i>Fade-in 1</i>	95	105	2,6093	2,6091	0,0004	2,6096	0,0004
<i>Fade-in 2</i>	90	110	4,3436	4,3417	0,0008	4,3426	0,0008
<i>Fade-in 3</i>	85	115	5,6409	5,6408	0,0013	5,6410	0,0013
<i>Fade-in 4</i>	80	120	6,6030	6,6078	0,0019	6,6065	0,0018
<i>Fade-in 5</i>	75	125	7,2695	7,2758	0,0023	7,2766	0,0023

Fonte – Elaborada pelo autor.

Tabela 16 – Perfil de risco da *Carreiras*

		Variações percentuais da volatilidade σ												
		-10,00%	-5,00%	-2,00%	-1,00%	-0,50%	-0,10%	0,00%	0,10%	0,50%	1,00%	2,00%	5,00%	10,00%
Variação do preço do ativo em relação a S_0	-20,00%	-26,43	-25,76	-24,97	-24,67	-24,38	-24,35	-24,31	-24,22	-24,02	-23,91	-23,50	-22,19	-20,27
	-10,00%	-22,92	-18,91	-16,69	-15,71	-15,68	-15,23	-15,13	-15,20	-14,75	-14,49	-14,07	-12,43	-10,18
	-5,00%	-14,62	-10,89	-8,56	-8,14	-7,87	-7,63	-7,61	-7,66	-7,37	-7,31	-6,59	-5,65	-3,96
	-3,50%	-11,08	-7,51	-5,65	-5,57	-5,22	-5,22	-5,41	-4,99	-4,61	-4,69	-4,57	-3,44	-2,35
	-2,00%	-7,41	-5,07	-3,57	-3,31	-3,05	-2,62	-2,74	-2,60	-2,65	-2,29	-2,32	-1,67	-0,84
	-1,00%	-5,00	-2,57	-1,99	-1,90	-1,44	-1,56	-1,26	-1,19	-1,09	-1,25	-0,83	-0,33	0,19
	-0,50%	-3,32	-1,80	-0,99	-0,95	-0,20	-0,80	-0,89	-0,69	-0,83	-0,62	-0,31	0,17	0,92
	-0,25%	-2,76	-1,26	-0,70	-0,51	-0,52	-0,49	-0,60	-0,55	-0,05	-0,06	-0,12	0,51	0,97
	0,00%	-2,05	-1,12	-0,35	0,25	0,03	0,18	0,00	0,10	-0,12	0,17	0,05	0,53	0,59
	0,25%	-1,76	-0,33	-0,09	0,29	0,13	0,43	0,31	0,33	0,16	0,48	0,52	1,02	1,24
	0,50%	-0,98	-0,07	0,35	0,53	0,38	0,73	0,53	0,72	0,66	0,30	0,87	0,94	1,60
	1,00%	0,14	0,89	1,20	1,04	0,84	1,29	1,06	1,20	1,04	1,37	1,56	1,48	1,91
	2,00%	2,86	2,70	2,37	2,53	2,15	2,57	2,62	2,60	2,25	2,31	2,10	2,23	2,51
	3,50%	5,98	4,32	4,15	3,88	4,01	3,77	3,93	3,83	3,69	3,75	3,30	3,14	3,10
	5,00%	8,26	6,17	5,62	5,22	4,73	4,98	4,66	4,65	4,78	4,63	4,27	3,85	3,57
	10,00%	11,52	7,79	6,25	5,62	5,37	5,29	5,22	5,49	5,36	4,96	4,53	3,85	2,89
	20,00%	-4,43	-4,45	-4,53	-4,83	-4,76	-4,82	-4,68	-4,79	-4,97	-4,83	-4,90	-4,98	-4,79

Fonte – Elaborada pelo autor.

CONCLUSÃO

O algoritmo Monte Carlo Reuso, proposto nessa dissertação, contribui para a redução do tempo de processamento da simulação sem aumentar do erro médio quadrático quando comparado ao algoritmo Monte Carlo Regular. Na [Subseção 4.2.1](#) é possível verificar que, quando a carteira tem dois ou mais derivativos, o tempo total de execução do algoritmo Reuso é menor do que quando a abordagem Regular é utilizada. Além disso, verifica-se também que os preços simulados por ambos os algoritmos têm semelhante erro médio quadrático quando comparados aos preços calculados pela fórmula analítica. Portanto, é possível sugerir que o algoritmo Reuso apresenta uma maneira de melhorar a performance do método de Monte Carlo sem aumentar o erro da simulação.

Uma técnica que poderia reduzir ainda mais o tempo de execução do método de Monte Carlo no apreçamento de derivativos é o reuso de trajetórias do ativo subjacente. A [Tabela 7](#) e a [Tabela 12](#) indicam que, depois da geração de variáveis aleatórias, a construção de trajetórias do ativo subjacente é o passo que consome mais tempo da simulação. Consequentemente, o reuso de trajetórias pode ter potencial de melhorar a performance do método de Monte Carlo. Todavia, conciliar numa mesma trajetória todas as diferentes datas de observação dos derivativos de uma carteira é um desafio dessa técnica. Pesquisas futuras podem verificar se o reuso de trajetórias é uma abordagem factível para reduzir o tempo de execução da simulação de Monte Carlo no apreçamentos de produtos financeiros.

REFERÊNCIAS

ACHTSIS, N.; COOLS, R.; NUYENS, D. Conditional sampling for barrier option pricing under the heston model. In: _____. **Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2012**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 253–269. ISBN 978-3-642-41095-6. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-41095-6_9. Citado na página 24.

AMMANN, M.; REICH, C. Var for nonlinear financial instruments — linear approximation or full monte carlo? **Financial Markets and Portfolio Management**, v. 15, n. 3, p. 363–378, 2001. ISSN 1555-497X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11408-001-0306-9>. Citado na página 24.

ANDERSEN, L. B.; PITERBARG, V. V. **Interest Rate Modeling - Volume 1 - Foundations and Vanilla Models**: Foundations and vanilla models. [S.l.]: Atlantic Financial Press, 2010. v. 1. Citado na página 33.

BEKAERT, P.; SBERT, M.; HALTON, J. Accelerating path tracing by re-using paths. In: **Proceedings of the 13th Eurographics Workshop on Rendering**. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2002. (EGRW '02), p. 125–134. ISBN 1-58113-534-3. Disponível em: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=581896.581914>. Citado na página 25.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of political economy**, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Citado nas páginas 29 e 32.

BOUCHARD, B.; WARIN, X. Monte-carlo valuation of american options: Facts and new algorithms to improve existing methods. In: _____. **Numerical Methods in Finance: Bordeaux, June 2010**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 215–255. ISBN 978-3-642-25746-9. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25746-9_7. Citado na página 24.

BROCKHAUS, O.; FERRARIS, A.; GALLUS, C.; LONG, D.; MARTIN, R.; OVERHAUS, M. **Modelling and hedging equity derivatives**. [S.l.]: Risk Books, 1999. Citado na página 30.

CARVERHILL, A.; PANG, K. Efficient and flexible bond option valuation in the heath, jarow and morton framework. **Journal of Fixed Income**, v. 5, n. 2, p. 70–77, 1995. Citado na página 24.

DELBAEN, F.; SCHACHERMAYER, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. **Mathematische annalen**, Springer, v. 300, n. 1, p. 463–520, 1994. Citado nas páginas 32 e 33.

DETEMPLE, J. B.; GARCIA, R.; RINDISBACHER, M. A monte carlo method for optimal portfolios. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd., v. 58, n. 1, p. 401–446, 2003. ISSN 1540-6261. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00529>. Citado na página 24.

- GLASSERMAN, P. **Monte Carlo methods in financial engineering**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 53. Citado nas páginas 31, 36 e 38.
- HAUG, E. G. **The complete guide to option pricing formulas**. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 2007. Citado nas páginas 27, 30 e 31.
- HESTON, S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. **The Review of Financial Studies**, v. 6, n. 2, p. 327, 1993. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/rfs/6.2.327>>. Citado na página 23.
- HULL, J. C. **Options, futures, and other derivatives**. [S.l.]: Pearson, 2012. Citado nas páginas 27 e 31.
- JI, H.; LI, Y. Reusing random walks in monte carlo methods for linear systems. **Procedia Computer Science**, v. 9, n. Supplement C, p. 383 – 392, 2012. ISSN 1877-0509. Proceedings of the International Conference on Computational Science, ICCS 2012. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050912001627>>. Citado na página 25.
- MEINSHAUSEN, N.; HAMBLY, B. M. Monte carlo methods for the valuation of multiple-exercise options. **Mathematical Finance**, Blackwell Publishers, Inc., v. 14, n. 4, p. 557–583, 2004. ISSN 1467-9965. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.0960-1627.2004.00205.x>>. Citado na página 24.
- MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. **The Bell Journal of economics and management science**, JSTOR, p. 141–183, 1973. Citado nas páginas 29 e 32.
- METROPOLIS, N.; ULAM, S. The monte carlo method. Taylor & Francis Group, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949. Citado na página 23.
- MOOD, A.; GRAYBILL, F.; BOES, D. **Introduction to the Theory of Statistics**. McGraw-Hill, 1974. (McGraw-Hill international editions). ISBN 9780070854659. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=dAjnRwAACAAJ>>. Citado na página 37.
- SBERT, M.; HALTON, J. Reuse of paths in light source animation. In: **Proceedings Computer Graphics International, 2004**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 532–535. ISSN 1530-1052. Citado na página 25.
- SCHWARTZ, E. S.; TOROUS, W. N. Prepayment and the valuation of mortgage-backed securities. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 44, n. 2, p. 375–392, 1989. ISSN 1540-6261. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1989.tb05062.x>>. Citado na página 24.
- VOLCHAN, S. B. Modelos matemáticos em finanças: avaliação de opções. **Revista Matemática Universitária**, v. 26, n. 27, p. 67–121, 1999. Citado na página 27.
- WARIN, X. Gas storage hedging. In: _____. **Numerical Methods in Finance: Bordeaux, June 2010**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 421–445. ISBN 978-3-642-25746-9. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25746-9_14>. Citado na página 24.
- XU, Q.; SBERT, M. A new way to re-using paths. In: _____. **Computational Science and Its Applications – ICCSA 2007: International Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, August**

26-29, 2007. Proceedings, Part II. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. p. 741–750. ISBN 978-3-540-74477-1. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-74477-1_67>. Citado na página 25.