UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações Diferenciais com Memória Dependendo do Estado

Ana Carolina Souza Melega

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Matemática.

Ribeirão Preto-SP
2024

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁ?TICA

Equações Diferenciais com Memória Dependendo do Estado

Ana Carolina Souza Melega

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Matemática.
Orientadora: Michelle Fernanda Pierri Hernandez.

Ribeirão Preto-SP
2024

Melega, Ana Carolina Souza
Equações Diferenciais com Memória Dependendo do Estado
Ribeirão Preto, 2024.
56 p. : il. ; 30 cm
Dissertação de Mestrado, apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto/USP.
Área de concentratração: Matemática.
Orientadora: Michelle Fernanda Pierri Hernandez
1. Equações Diferenciais. 2. Memória. 3. Neutras.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a **Deus**, por permitir que esta jornada acadêmica se concretizasse.

À minha família, meu porto seguro, expresso minha profunda gratidão. Aos meus pais, **Alexandre** e **Angélica**, que sempre estiveram ao meu lado, apoiando-me incondicionalmente e proporcionando o suporte necessário para que eu pudesse me dedicar aos estudos. Suas palavras de incentivo e amor foram meu alicerce.

Aos meus filhos, **João** e **Leonardo**, por serem tão compreensivos e pacientes. Seu carinho e compreensão foram essenciais para que eu pudesse conciliar os desafios da vida acadêmica com a vida familiar.

À minha orientadora, **Prof.ª Michelle**, sou imensamente grata. Sua competência, dedicação e paixão pelo ensino foram inspiradoras. Suas orientações precisas e encorajadoras foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação. Obrigada por ser uma excelente professora, profissional e, acima de tudo, humana.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a produção desta dissertação, meu sincero reconhecimento. Cada conversa, cada feedback, cada troca de ideias enriqueceu este trabalho. Agradeço aos colegas, amigos e familiares que estiveram presentes nessa jornada.

Por fim, agradeço à instituição de ensino que me acolheu e proporcionou o ambiente propício para o desenvolvimento deste estudo. Que este trabalho possa contribuir para o avanço do conhecimento em nossa área.

Que esta dissertação seja apenas o começo de uma trajetória repleta de aprendizado e realizações. Muito obrigada a todos!

Dedico aos meus queridos pais, **Alexandre** e **Angélica**, cujo amor e apoio foram a luz que iluminou cada passo desta jornada acadêmica. À minha mãe, que agora repousa nos braços do Pai, dedico este trabalho com saudade e gratidão. Sua memória e amor permanecerão eternamente em meu coração.

Aos meus filhos, **João** e **Leonardo**, que compreenderam os momentos de ausência e me motivaram a seguir em frente, agradeço por serem minha inspiração constante. Que este trabalho seja um legado para vocês, mostrando que a busca pelo conhecimento é uma jornada valiosa.

Especialmente à minha orientadora, **Prof.ª Michelle**, que com sabedoria, paciência e dedicação guiou-me por trilhas acadêmicas desafiadoras. Sua orientação foi fundamental para que este trabalho se tornasse realidade. Obrigada por ser uma mentora exemplar e por acreditar no meu potencial.

Com gratidão e respeito!

O que faz andar a estrada? É o sonho. Enquanto a gente sonhar a estrada permanecerá viva. É para isso que servem os caminhos, para nos fazerem parentes do futuro.

(Mia Couto)

Equações Diferenciais com Memória Dependendo do Estado

Resumo: Neste trabalho estudamos alguns aspectos básicos da teoria de Equações Diferenciais com Memória Dependendo do Estado. Nosso principal objetivo é o estudo da existência e unicidade de soluções para equações diferenciais neutras explícitas com memória dependendo do estado da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x'(\sigma(t, x(t)))), \quad t \in [0, a], \\ x_0 = \varphi \in C([-p, 0]; \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

onde $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$, via o Princípio da Contração de Banach, um dos tópicos mais importantes da teoria geral de equações diferenciais com memória dependendo do estado. Para atingirmos este objetivo desenvolvemos estudos qualitativos para modelos de equações diferenciais (com e sem memória) mais simples do que as equações diferenciais com memória dependendo do estado, o que também permitiu entender as diferenças entre a teoria qualitativa de equações diferenciais com memória dependendo do estado e as outras teorias de equações com memória.

Palavras chave: Equações diferenciais funcionais, equações diferenciais com memória, equações diferenciais com memória depedendo do estado, equações diferenciais neutras.

Differential Equations with State-Dependent Delay

Abstract: In this work we study some basic aspects of the theory of Differential Equations with state-dependent delay. Our main objective is to study the existence and uniqueness of solutions to explicit neutral differential equations with state-dependent delay of the form

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x'(\sigma(t, x(t)))), & t \in [0, a], \\ x_0 = \varphi \in C([-p, 0]; \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

where $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$, via the Banach Contraction Principle, one of the most important topics in the general theory of differential equations with state-dependent delay. To achieve this objective, we developed qualitative studies for models of differential equations (with and without memory) that are simpler than differential equations with state-dependent delay, which also allowed us to understand the differences between the qualitative theory of differential equations with state-dependent delay and the other theories of equations with memory.

Keywords: Functional differential equations, differential equations with delay, differential equations with state-dependent delay, neutral differential equations.

Conteúdo

Introdução

A teoria de equações com memória dependendo do estado teve início numa palestra de Rodney Driver sobre uma equação diferencial funcional do tipo neutro deduzida a partir do estudo de um problema de eletrodinâmica, no Congresso “International Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics”, em 1963. Especificamente, o problema apresentado por Driver estava relacionado com uma equação diferencial do tipo neutro da seguinte forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma_1(t, x(t))), x'(\sigma_2(t, x(t)))), \;\; t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C([0, a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in C([0, a] \times \mathbb{R}^n; [-p, a])$ e $\varphi \in C([-p, 0]; \mathbb{R}^n)$. No problema (1) os termos $\sigma_i(t, x(t))$, $i = 1, 2$, são os termos que dão sentido ao conceito “memória dependendo do estado.”

Atualmente, a teoria de equações diferenciais com memória dependendo do estado ocupa um lugar de destaque na teoria geral de equações diferenciais, com resultados independentes, não triviais e problemas em aberto. Mais ainda, podemos dizer que é a teoria mais geral no contexto da teoria de equações diferenciais funcionais com memória.

A grande diferença entre a teoria de equações com memória dependendo do estado e outras teorias de equações com memória, é o termo $\sigma_i(t, x(t))$. Mas esta diferença, não é apenas uma diferença na forma das equações estudadas ou na forma do retardo considerado, esta diferença tem implicações teóricas importantes e que estimulam o desenvolvimento da teoria. Para esclarecer este último ponto, consideremos o seguinte problema mais simples

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma(t, x(t)))), \;\; t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{2}$$

e suponhamos que a função $f \in C([0, a] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ seja Lispchitz, com a constante de Lispchitz denotada por $[f]_{C_{Lip}}$. Para estudar a existência e unicidade de soluções para o problema (2) usando o Princípio da Contração, é fundamental o estudo de uma estimativa da forma

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,b]} & \| f(t, x(\sigma(t, x(t)))) - f(t, y(\sigma(t, y(t)))) \| \\ & \leqslant \;\; [f]_{C_{Lip}} \| x(\sigma(t, x(t))) - y(\sigma(t, y(t))) \| \qquad (3) \\ & \leqslant \;\; C \parallel x - y \parallel_{C([0,b];X)} . \qquad (4) \end{aligned}$$

Entretanto, é fácil perceber que, em geral não é possível obter (4) a partir do termo (3), pois os termos $\sigma(t, x(t))$ e $\sigma(t, y(t))$ podem ser diferentes. Este simples fato tem implicações muito importantes na teoria de equações com memória dependendo do estado, não somente por limitar as técnicas para o estudo da “unicidade”de soluções e por implicar que muitos problemas com memória dependendo do estado estudados na literatura não sejam bem postos. Em qualquer teoria relacionada a equações diferenciais, a perda da unicidade de soluções tem diversas implicações teóricas que restringem seu desenvolvimento, em particular, em questões importantes como o comportamento assintótico de soluções. Ainda com relação à palestra de Driver, notamos que ela não foi importante somente por apresentar um novo tipo de equação diferencial, mas também por apresentar dois exemplos simples de equações neutras com memória dependendo do estado que verificam todas as condições usuais que permitem provar a unicidade de soluções, mas que apresentam mais de uma solução.

Embora os primeiros trabalhos sobre equações com memória dependendo do estado sejam sobre equações neutras, a maior parte da literatura sobre este tipo de equações é sobre equações não neutras. Para referências sobre equações neutras explícitas (equações com termos hereditários da forma $x'(t-\gamma(t))$, $x'(t-r), x'_t$, $x'(\sigma(t,x(t))))$, etc), citamos os trabalhos iniciais de Driver [2, 3, 4] e os artigos [8, 9, 13]. Já para equações ordinárias com memória dependendo do estado e equações ordinárias com argumento dependendo do estado (neste caso, $\sigma_i \in C([0,a]\times\mathbb{R}^n;[-p,a])$), mencionamos o survey [11] onde são apresentados diferentes modelos, exemplos e aplicações da teoria, os artigos [1, 5, 7, 12, 14] e os recentes artigos [16, 17, 18]. É importante notar que atualmente também existem várias pesquisas sobre problemas abstratos em espaços de dimensão infinita e sobre equações diferenciais parciais. Porém, como neste trabalho não estudaremos este tipo de problemas, não citaremos trabalhos a esse respeito.

Os fatos descritos acima incentivaram o objetivo deste projeto de dissertação que é o estudo da existência e unicidade de soluções para equações neutras explícitas descritas na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x'(\sigma(t,x(t)))), \;\; t \in [0,a], \\ x_0 = \varphi \in C([-p,0];\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

No que segue, apresentaremos um breve resumo do estudo desenvolvido neste trabalho de dissertação. Como foi mencionado acima, as equações com memória dependendo do estado correspondem ao modelo mais geral dentre as equações com memória. Sendo assim é natural e necessário conhecer alguns elementos teóricos básicos sobre a teoria de equações com memória antes de estudar algum modelo específico de equações com memória dependendo do estado. Além disso, as diferentes teorias sobre equações com memória são mais gerais do que a teoria de equações sem memória. Dessa forma, este trabalho está dividido em dois Capítulos como segue.

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos sobre a teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias sem memória, tendo como principais referências [10, 15]. Brevemente, apresentamos alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções, sobre prolongamento de soluções e sobre dependência das condições iniciais para equações diferenciais ordinárias descritas na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \;\; t \in [0,a], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$.

No Capítulo 2 apresentamos inicialmente o conceito de equações diferenciais com memória, bem como alguns exemplos desse tipo de equações. Em seguida apresentamos um estudo sobre existência e unicidade de soluções para equações com memória. Especificamente, na Seção 2.2 estudamos a existência local e global de soluções para uma classe de equações com memória dependendo do tempo descritas na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t - \gamma(t))), & t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-p, 0], \end{cases}$$

onde $f \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\gamma \in C([0,a]; [0,p])$ e $\varphi \in C([-p,0]; \mathbb{R}^n)$. O estudo deste modelo, nos permitiu ter um melhor preparo para o entendimento dos nossos estudos sobre equações com memória dependendo do estado. Na Seção 2.3 apresentamos um primeiro estudo sobre equações diferenciais com memória dependendo do estado. Especificamente, nesta seção estudamos a existência e unicidade de soluções para um problema com memória dependendo do estado da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma(t, x(t)))), & t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{5}$$

onde $f \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C([-p,0]; \mathbb{R}^n)$ e $\sigma \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n; [-p,a])$. É importante observar que os resultados desta seção foram adaptados a partir de alguns artigos bastante recentes sobre equações abstratas com memória dependendo do estado, como [6], contando com uma forte colaboração da professora Michelle Pierri para a adaptação e implementação desses resultados. Na Seção 2.4 estudamos resultados de prolongamento de soluções e de existência de solução maximal e global para o problema (5). Finalmente, na Seção 2.5, como era nosso objetivo, apresentamos um estudo sobre a existência e unicidade de soluções para equações neutras explícitas descritas na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x'(\sigma(t, x(t)))), & t \in [0, a], \\ x_0 = \varphi \in C([-p, 0]; \mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{6}$$

onde $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to [-p,a]$. Para o desenvolvimento desta parte do trabalho, iniciamos com o estudo do seguinte artigo:

(**1**) Grimm, L. J. Existence and continuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 29 (1971), 467-473, ([8] na Bibliografia),

um dos artigos pioneiros da teoria sobre equações com memória dependendo do estado. No entando, observamos que as técnicas utilizadas eram diferentes das que já havíamos utilizado em nossos estudos de existência e unicidade para equações com memória dependendo do estado. Além disso, percebemos que a partir dos nossos estudos para o problema diferencial (5), poderíamos obter um resultado de existência e unicidade de soluções para (6). Destacamos ainda que o resultado, apresentado no Teorema 62, é inédito, o que valoriza ainda mais este trabalho de dissertação. Em particular, observamos que os trabalhos pioneiros sobre equações neutras explícitas [2, 8], apresentam resultados de unicidade para modelos da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma_1(t, x(t))), x'(\sigma_2(t))), & t \in [0, a], \\ x_0 = \varphi \in C([-p, 0]; \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

o que claramente simplifica o problema.

Capítulo 1

Teoria Qualitativa para Equações Diferenciais

Neste capítulo introduziremos um estudo qualitativo da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias. Teremos como objetivo principal apresentar e provar o clássico Teorema de Existência e Unicidade via Princípio da Contração. Além disso, também veremos alguns resultados que falam sobre o comportamento de um problema de valor inicial com relação às condições iniciais impostas, bem como resultados sobre prolongamento de soluções e a existência de solução maximal para este problema.

1.1 Teoremas de Ponto Fixo

Definição 1. *Seja X um espaço vetorial. Uma **norma** em X é uma função $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\|x\| > 0$ para $x \in X$, com $x \neq 0$;*
2. *$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;*
3. *$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para $x, y, \in X$ (Desigualdade Triangular).*

O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **espaço vetorial normado**.

Definição 2. *Uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$ **converge** se existe $a = \lim_{m\to\infty} x_m$.*

No que segue deste trabalho, por facilidade de notação, poderemos utilizar $(x_m)_m$ para denotar uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Definição 3. *Uma sequência $(x_m)_m$ em $\mathbb{R}^n$ chama-se **sequência de Cauchy** se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, k > N_\epsilon$ então, $\|x_m - x_k\| < \epsilon$.*

Definição 4. *Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **completo** se todas as sequências de Cauchy convergem em X. Mais ainda, um espaço vetorial normado completo $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **Espaço de Banach**.*

Exemplo 5. É fácil mostrar que $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach com a norma euclidiana convencional

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2},$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. De fato, seja $(x_m)_m$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, k > N_\epsilon$ então,

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_k\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}\|^2} < \epsilon \\
&\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}\|^2 < \epsilon^2 \\
&\Rightarrow \|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}\|^2 < \epsilon^2, \qquad \forall j = 1, \cdots, n \\
&\Rightarrow \|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}\| < \epsilon, \qquad \forall j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que, para cada $j = 1, \cdots, n$, a sequência $(x_j^{(m)})_m$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, que é completo. Portanto, $(x_j^{(m)})_m$ converge para cada $j = 1, \cdots, n$. Daí segue que $(x_m)_m$ converge em $\mathbb{R}^n$ e que $\mathbb{R}^n$ é completo e, portanto, de Banach.

Definição 6. *Seja $(x_m)_m$ uma sequência de funções de $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que $(x_m)_m$ **converge uniformemente** para $x : I \to \mathbb{R}^n$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que, se $m \geqslant N_\epsilon$, então $\|x_m(t) - x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in I$.*

Segue da definição acima que, uma sequência de funções $x_m : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $I \subset \mathbb{R}$, converge uniformemente para x se, e somente se,

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m - x\| = \lim_{m\to\infty} (\sup_{t\in I} \|x_m(t) - x(t)\|) = 0.$$

Proposição 7. *O limite uniforme de funções contínuas é contínuo.*

Demonstração. De fato, suponha que a sequência de funções contínuas $(x_m)_m$ converge uniformemente para $x : I \to \mathbb{R}^n$, com $I \subset \mathbb{R}$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geqslant N_\epsilon$, então

$$\|x_m(t) - x(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \forall t \in I$$

Como x_m é contínua em I para todo $m \in \mathbb{N}$, segue que, para o mesmo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, se $|t - t_0| < \delta_\epsilon$, então

$$\|x_{N_\epsilon}(t) - x_{N_\epsilon}(t_0)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, temos que para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, se $|t - t_0| < \delta_\epsilon$, então

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x(t_0)\| &= \|x(t) - x_{N_\epsilon}(t) + x_{N_\epsilon}(t) - x_{N_\epsilon}(t_0) + x_{N_\epsilon}(t_0) - x(t_0)\| \\
&\leqslant \|x(t) - x_{N_\epsilon}(t)\| + \|x_{N_\epsilon}(t) - x_{N_\epsilon}(t_0)\| + \|x_{N_\epsilon}(t_0) - x(t_0)\| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, x é contínua. ∎

Exemplo 8. Seja I um intervalo fechado e considere o conjunto $C(I;\mathbb{R})$ das funções contínuas de I em $\mathbb{R}$. $C(I,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. Além disso, $C(I,\mathbb{R})$ se tornará um espaço normado se definirmos

$$\|x\| = \sup_{t\in I} |x(t)|.$$

Verifiquemos primeiro que a função acima é realmente uma norma.

(i) É claro que $x = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0, \forall t \in I \Leftrightarrow \|x\| = \sup_{t\in I} |x(t)| = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = \sup_{t\in I} |\lambda x(t)| = |\lambda| \sup_{t\in I} |x(t)| = |\lambda| \|x\|$.

(iii) Note que

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \sup_{t\in I} |x(t)+y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in I}(|x(t)| + |y(t)|) \\ &\leqslant \sup_{t\in I} |x(t)| + \sup_{t\in I} |y(t)| \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Estudemos agora a convergência neste espaço. Veremos que $C(I;\mathbb{R})$ com a norma definida acima é um **Espaço de Banach.** Suponha $(x_n)_n$ seja uma sequência de Cauchy em $C(I;\mathbb{R})$. Então, é fácil ver que que $(x_n(t))_n$ é uma sequência de Cauchy de números reais para qualquer t fixo. Em particular, como $\mathbb{R}$ é completo existe o limite de $x(t)$ para cada $t \in I$. Por outro lado, fazendo $m \to \infty$ em

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad n, m > N_\varepsilon,\ t \in I,$$

vemos que

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad n > N_\varepsilon,\ t \in I,$$

que mostra que $x_n(t)$ converge uniformemente para $x(t)$.

Entretanto, ainda não sabemos se $x(\cdot)$ está no espaço vetorial $C(I;\mathbb{R})$ ou não, isto é, se ela é contínua ou não. Mas, como $x(\cdot)$ é o limite uniforme de funções contínuas, pela Proposição anterior, temos que $x(\cdot)$ é contínua. Então, $x(\cdot) \in C(I;\mathbb{R})$, e assim todas as sequências de Cauchy em $C(I;\mathbb{R})$ convergem. Logo, $C(I;\mathbb{R})$ é um Espaço de Banach.

As ideias no Exemplo acima e o próximo resultado nos permitirão dar uma prova fácil e transparente para o Teorema de Existência e Unicidade.

Definição 9. *Um* ***ponto fixo*** *de uma função $K : C \subseteq X \to C$ é um elemento $x \in C$ tal que $K(x) = x$. Além disso, K é chamada* ***contração*** *se existe uma constante $\theta \in [0,1)$ tal que*

$$\|K(x) - K(y)\| \leqslant \theta \|x - y\|,\ x, y \in C.$$

Teorema 10. *(Princípio da Contração) Seja C um subconjunto fechado (não vazio) de um espaço de Banach X e seja $K : C \to C$ uma contração, então K tem um único ponto fixo $\bar{x} \in C$. Além disso,*

$$\|K^n(x) - \bar{x}\| \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta} \|K(x) - x\|, \qquad x \in C,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Provemos inicialmente a unicidade. Para isso suponha que $x = K(x)$ e $\widetilde{x} = K(\widetilde{x})$. Então,

$$\|x - \widetilde{x}\| = \|K(x) - K(\widetilde{x})\| \leqslant \theta\|x - \widetilde{x}\|,$$

o que implica que

$$\|x - \widetilde{x}\| \leqslant \theta\|x - \widetilde{x}\|.$$

Se $x \neq \widetilde{x}$ temos que $\|x - \widetilde{x}\| \neq 0$. Logo,

$$\|x - \widetilde{x}\| \leqslant \theta\|x - \widetilde{x}\| \Rightarrow \theta \geqslant 1,$$

o que é um absurdo, pois como K é uma contração, temos que $\theta \in [0, 1)$. Logo $x = \widetilde{x}$.

Vejamos agora a existência. Fixe $x_0 \in C$ e considere a sequência $x_n = K^n(x_0)$. Note que

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|K(x_n) - K(x_{n-1})\| \leqslant \theta\|x_n - x_{n-1}\|, \\
\theta\|x_n - x_{n-1}\| &= \theta\|K(x_{n-1}) - K(x_{n-2})\| \leqslant \theta^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\|, \\
&\vdots \\
\theta^{n-1}\|x_2 - x_1\| &= \theta^{n-1}\|K(x_1) - K(x_0)\| \leqslant \theta^n\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Então,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \theta\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \theta^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leqslant \ldots \leqslant \theta^n\|x_1 - x_0\|.$$

Disso e da desigualdade triangular obtemos (para $n > m$)

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leqslant \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\
&\leqslant \theta^{n-1}\|x_1 - x_0\| + \theta^{n-2}\|x_1 - x_0\| + \ldots + \theta^m\|x_1 - x_0\| \\
&\leqslant \theta^m \sum_{j=0}^{n-m-1} \theta^j\|x_1 - x_0\| \\
&\leqslant \frac{\theta^m}{1-\theta}\|x_1 - x_0\|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{\theta^m}{1-\theta}\|x_1 - x_0\| \tag{1.2}$$

Agora, como $\theta \in [0, 1)$, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe um $N_\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\theta^m}{1-\theta}\|x_1 - x_0\| \leqslant \varepsilon, \qquad m > N_\varepsilon.$$

Logo,

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon, n, m > N_\varepsilon \quad \text{(pois } n > m\text{)}.$$

Assim, $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em C e tende a um limite $\overline{x} \in C$, pois C é um espaço de Banach. Além disso, como K é contínua (pois K é uma contração) temos que

$$\|K(\overline{x}) - \overline{x}\| = \|K(\lim_{n\to\infty} x_n) - \lim_{n\to\infty} x_n\| = \|\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0,$$

pois $(x_n)_n$ é de Cauchy. Isto mostra que $\overline{x}$ é um ponto fixo e a estimativa (1.1) pode ser obtida depois de tomar $n \to \infty$ na expressão (1.2).

■

Observação 11. Da teoria de análise sabemos que todo subconjunto fechado de um espaço de Banach também é um espaço de Banach. Isto garante que a sequência $(x_n)_n$ do Teorema 10 converge para um ponto em C, pois C é fechado em X.

1.2 Teorema Fundamental de Existência e Unicidade

Iniciamos introduzindo o conceito de função localmente Lipschitz.

Definição 12. *Dizemos que uma função $f : U \to \mathbb{R}^m$, com $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, é* ***localmente Lipschitz*** *quando, para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma vizinhança V de (t_0, x_0) e uma constante $L_{(t_0,x_0)}$ tal que*

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leqslant L_{(t_0,x_0)}(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|), \quad \forall \ (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in V.$$

Queremos agora usar os conceitos da seção anterior para mostar a existência e unicidade de soluções para o seguinte Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Suponhamos $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $(t_0, x_0) \in U$. Note que integrando (1.3) em relação a t temos

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \Rightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

ou seja,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.4}$$

A seguir tomaremos $t_0 = 0$ e consideraremos apenas o caso em que $t \geqslant 0$ para simplificar a notação. Mas o raciocínio é o mesmo para $t \leqslant 0$ e para $t_0 \in \mathbb{R}$.

Começamos definindo

$$K(x)(t) = x_0 + \int_{0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Tomando $X = C([0, T], \mathbb{R}^n)$, (onde T será devidamente determinado), com a norma $\|x\| = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$, podemos ver que $K : X \to X$.

Agora encontraremos um subconjunto fechado C de X tal que $K : C \to C$. Tentemos uma bola fechada de raio δ centrada em x_0, onde $\delta > 0$, deve ser determinado.

Vamos considerar $V = [0, T]$ x $B_\delta(x_0) \subset U$, onde $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leqslant \delta\}$. Logo, se o gráfico de x estiver contido em V, isto é, se $\{(t, x(t)) : t \in [0, T]\} \subset V$, então

$$\begin{aligned} \|K(x)(t) - x_0\| &\leqslant \int_0^t \|f(s, x(s))\|ds \\ &\leqslant \int_0^t \max_{(\tau,x)\in V} \|f(\tau, x)\|ds \end{aligned}$$

$$\leqslant \; t \max_{(t,x)\in V} |f(t,x)|,$$

ou seja,

$$\|K(x)(t) - x_0\| \leqslant t \max_{(t,x)\in V} \|f(t,x)\|.$$

Note que o máximo existe porque f é contínua e V é compacto. Assim, para $t \leqslant T_0$, onde

$$T_0 = \min\left(T, \frac{\delta}{M}\right); \qquad M = \max_{(t,x)\in V} \|f(t,x)\|,$$

temos que

$$\|K(x)(t) - x_0\| \leqslant t \max_{(t,x)\in V} \|f(t,x)\| \leqslant T_0.M \leqslant \delta,$$

e assim o gráfico de $K(x)$ está contido em em V.

Logo, escolhemos $X = C([0,T_0],\mathbb{R}^n)$ como nosso espaço de Banach com a norma $\|x\| = \max_{t\in[0,T_0]} \|x(t)\|$ e $C = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant \delta\}$ como nosso conjunto fechado, então $K : C \to C$.

Agora precisamos mostrar que K é uma contração. Para isso note que para todo $t \in [0,T_0]$

$$\|K(x)(t) - K(y)(t)\| \leqslant \int_0^t \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\| ds.$$

É claro que $\|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|$ é pequeno se $\|x(s) - y(s)\|$ também é. Mas note que isto não é sufuciente para "estimar" a integral acima. Para isso precisamos da seguinte condição.

Suponha que f seja **localmente Lipschitz contínua** na segunda variável, uniformemente com respeito a primeira, isto é, para todo conjunto compacto $V \subset U$ temos que

$$L = \sup_{(t,x)\neq(t,y)\in V} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|} < \infty.$$

Então, para $x, y \in C$, $x \neq y$ e $s \in [0,T_0]$, observamos que

(i) se $x(s) = y(s)$, então

$$\|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\| = 0 = L\|x(s) - y(s)\| \leqslant L\|x - y\|;$$

(ii) se $x(s) \neq y(s)$, então

$$\begin{aligned}
\|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\| &= \frac{\|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|}{\|x(s) - y(s)\|}\|x(s) - y(s)\| \\
&\leqslant \sup_{(t,x)\neq(t,y)\in V} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|}\|x(s) - y(s)\| \\
&\leqslant L\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que para $x, y \in C$, $x \neq y$ e $t \in [0,T_0]$,

$$\int_0^t \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds \leqslant Lt\|x-y\| \ \leqslant LT_0\|x-y\|.$$

o que implica que

$$\|K(x)(t) - K(y)(t)\| \leqslant LT_0\|x-y\|, \qquad x, y \in C, \ t \in [0, T_0],$$

e, portanto, que

$$\|K(x) - K(y)\| \leqslant LT_0\|x-y\|, \qquad x, y \in C.$$

Escolhendo $T_0 < L^{-1}$ podemos ver que K é uma contração e, portanto, pelo princípio da contração K possui um único ponto fixo, que será a única solução do P.V.I. (1.3).

Isto prova o seguinte Teorema de Existência e Unicidade.

Teorema 13. *(Picard-Lindelöf) Suponha que $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e que $(t_0, x_0) \in U$. Se f é localmente Lipschitz contínua na segunda variável, uniformemente com respeito à primeira, então existe uma única solução local do P.V.I.*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Lema 14. *Suponha que $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 1$, onde U é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e que $(t_0, x_0) \in U$. Então, a solução local $\overline{x}(\cdot)$ do P.V.I. (1.3) é de classe C^{k+1}.*

Demonstração. Do P.V.I (1.3) segue que $\overline{x}(\cdot) \in C^1$. Mais ainda, escrevendo

$$\overline{x}'(t) = f(t, \overline{x}(t)),$$

e usando que $f \in C^1$ obtemos

$$\frac{d}{dt} f(t, \overline{x}(t)) = \overline{x}''(t),$$

o que implica que $\overline{x} \in C^2$. Procedendo dessa forma vemos facilmente que, como $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, então

$$f^{(k)}(t, \overline{x}(t)) = \overline{x}^{(k+1)}(t),$$

o que mostra que $\overline{x} \in C^{k+1}$. ■

1.3 Algumas Extensões

Nesta seção queremos obter algumas extensões do Teorema de Picard-Lindelöf. Para isso, iniciamos com uma generalização do princípio da contração

Teorema 15. *(Teorema de Weissinger) Seja C um subconjunto fechado não vazio de um espaço de Banach X. Suponha $K : C \to C$ que satisfaça*

$$\|K^n(x) - K^n(y)\| \leqslant \theta_n\|x-y\|, \qquad x, y \in C, \ n \in \mathbb{N},$$

com $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$. Então, K tem um único ponto fixo $\overline{x}$ tal que

$$\|K^n(x) - \overline{x}\| \leqslant \left(\sum_{j=n}^{\infty} \theta_j\right) \|K(x) - x\|, \qquad x \in C, \ n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Mostremos inicialmente a unicidade. Suponha que $x, \widetilde{x} \in C$ sejam dois pontos fixos de K, isto é, $x = K(x)$ e $\widetilde{x} = K(\widetilde{x})$. Então, temos que

$$K^n(x) = K^{n-1}(K(x)) = K^{n-1}(x) = \cdots = K(x) = x$$

e

$$K^n(\widetilde{x}) = K^{n-1}(K(\widetilde{x})) = K^{n-1}(\widetilde{x}) = \cdots = K(\widetilde{x}) = \widetilde{x}.$$

Assim,

$$\|x - \widetilde{x}\| = \|K^n(x) - K^n(\widetilde{x})\| \leqslant \theta_n \|x - \widetilde{x}\|.$$

Se $x \neq \widetilde{x}$, então $\|x - \widetilde{x}\| > 0$ e

$$\|x - \widetilde{x}\| \leqslant \theta_n \|x - \widetilde{x}\| \Rightarrow \theta_n > 1, \ n \in \mathbb{N},$$

o que implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$ diverge e isso é uma contradição. Logo, $x = \widetilde{x}$.

Provemos agora a existência de ponto fixo. Para isto fixemos $x_0 \in C$ e consideremos a sequência $(x_n)_n$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = K^n(x_0)$. Então,

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|K^n(K(x_0)) - K^n(x_0)\| \leqslant \theta_n \|K(x_0) - x_0\| = \theta_n \|x_1 - x_0\|, \ n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \theta_n \|x_1 - x_0\|, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $L = L(\varepsilon) > 0$ tal que $\sum_{i \geqslant L}^{\infty} \theta_i < \varepsilon$. Então, tomando $n > m \geqslant L$ temos

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leqslant \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\
&\leqslant \theta_{n-1}\|x_1 - x_0\| + \theta_{n-2}\|x_1 - x_0\| + \ldots + \theta_m \|x_1 - x_0\| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=m}^{n-1} \theta_i \right) \|x_1 - x_0\| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=m}^{\infty} \theta_i \right) \|x_1 - x_0\| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=L}^{\infty} \theta_i \right) \|x_1 - x_0\| \\
&\leqslant \varepsilon \|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Logo, $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy que tende para um limite $\overline{x}$. Além disso, como K é contínua temos que

$$\|K(\overline{x}) - \overline{x}\| = \|K(\lim_{n\to\infty} x_n) - \lim_{n\to\infty} x_n\| = \|\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n\| = \|\overline{x} - \overline{x}\| = 0,$$

o que mostra que $K(\bar{x}) = \bar{x}$.

Finalmente, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \left(\sum_{i=m}^{\infty} \theta_i \right) \|x_1 - x_0\|,$$

obtemos

$$\|\overline{x} - K^m(x_0)\| \leqslant \left(\sum_{i=m}^{\infty} \theta_i\right) \|K(x_0) - x_0\| \Rightarrow \|K^m(x_0) - \overline{x}\| \leqslant \left(\sum_{i=m}^{\infty} \theta_i\right) \|K(x_0) - x_0\|.$$

Como $x_0 \in C$ é arbitrário, podemos concluir que

$$\|K^m(x) - \overline{x}\| \leqslant \left(\sum_{j=m}^{\infty} \theta_j\right) \|K(x) - x\|, \qquad x \in C, \ m \in \mathbb{N}.$$

■

Nosso objetivo agora é utilizar o Teorema de Weissinger para fazer a demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf e com isso conseguimos evitar a restrição $T_0 < L^{-1}$.

Teorema 16. *(Picard-Lindelöf) Suponha que $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e que f seja localmente Lipschitz contínua na segunda variável. Escolha $(t_0, x_0) \in U$, $\delta > 0$ e $T > t_0$ tal que $[t_0, T] \times B_\delta(x_0) \subset U$. Sejam*

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} \sup_{x \in B_\delta(x_0)} \|f(s,x)\| ds \quad e$$

$$L(t) = \sup_{x \neq y \in B_\delta(x_0)} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|}.$$

Note que $M(\cdot)$ é não decrescente e defina $T_0 := \sup\{T > t_0 : M(T) = \delta\}$. Então, a solução local $\overline{x}$ do P.V.I. (1.3) é dada por

$$\overline{x} = \lim_{n \to \infty} K^n(x_0) \in C^1([t_0, T_0], B_\delta(x_0))$$

onde, para cada $x \in C$, $(K^n(x))_n = (x_n)_n$ é a sequência definida por

$$K^n(x)(t) = K(K^{n-1}(x))(t) = K(x_{n-1})(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s)) ds.$$

Além disso, para $x(t) = x_0(t) = x_0$, $t \in [t_0, T_0]$, vale a seguinte estimativa:

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \|\overline{x}(t) - K^n(x_0(t))\| \leqslant \frac{(\int_{t_0}^{T_0} L(s) ds)^n}{n!} e^{\int_{t_0}^{T_0} L(s) ds} \int_{t_0}^{T_0} \|f(s, x_0(s))\| ds. \tag{1.5}$$

Demonstração. Para simplificar a notação vamos tomar $t_0 = 0$. Nosso objetivo é verificar as condições do Teorema de Weissinger escolhendo $X = C([0, T_0], \mathbb{R}^n)$ e $C = C([0, T_0], B_\delta(x_0)) \subset X$. Primeiramente, se $x(t) \in B_\delta(x_0)$ para todo $t \in [0, T_0]$, temos que

$$\|K(x)(t) - x_0\| \leqslant \int_0^t \|f(s, x(s))\| ds \leqslant M(t) \leqslant M(T_0) = \delta,$$

isto é, $K(x)(t) \in B_\delta(x_0)$ para $t \in [0, T_0]$, o que explica a escolha de T_0. Agora, como na demostração do Teorema 13, vemos que para $x, y \in C$, $x \neq y$,

$$\|K(x)(t) - K(y)(t)\| \ \leqslant \ \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^t L(s) \sup_{\tau\in[0,s]} \|x(\tau)-y(\tau)\| ds \\
&\leqslant L_1(t) \sup_{\tau\in[0,T_0]} \|x(\tau)-y(\tau)\|,
\end{aligned}
$$

onde $L_1(t) = \int_0^t L(s)ds$. Além disso, observando que $L(t) = L_1'(t)$ e que $\int L_1(s)L_1'(s)ds = \frac{(L_1(t))^2}{2} + C$ e, novamente argumentando como no Teorema 13, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|K^2(x)(t) - K^2(y)(t)\| \\
&\quad\leqslant \int_0^t \|f(s,K(x)(s)) - f(s,K(y)(s))\| ds \\
&\quad\leqslant \int_0^t L(s)\|K(x)(s) - K(y)(s)\| ds \\
&\quad\leqslant \int_0^t L(s)L_1(s) \sup_{\tau\in[0,s]} \|x(\tau)-y(\tau)\| ds \\
&\quad\leqslant \sup_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau)-y(\tau)\| \int_0^t L(s)L_1(s) ds \\
&\quad\leqslant \sup_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau)-y(\tau)\| \int_0^t L_1'(s)L_1(s) ds \\
&\quad\leqslant \frac{(L_1(t))^2}{2} \sup_{\tau\in[0,T_0]} \|x(\tau)-y(\tau)\|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\|K^2(x)(t) - K^2(y)(t)\| \leqslant \frac{(L_1(t))^2}{2} \sup_{\tau\in[0,T_0]} \|x(\tau)-y(\tau)\|
$$

Agora, por indução, suponhamos que

$$
\|K^n(x)(t) - K^n(y)(t)\| \leqslant \frac{(L_1(t))^n}{n!} \sup_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau)-y(\tau)\|
$$

e provemos que a fórmula vale para o caso $n+1$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|K^{n+1}(x)(t) - K^{n+1}(y)(t)\| &\leqslant \int_0^t \|f(s,K^n(x)(s)) - f(s,K^n(y)(s))\| ds \\
&\leqslant \int_0^t L(s)\|K^n(x)(s) - K^n(y)(s)\| ds \\
&\leqslant \int_0^t L(s)\frac{(L_1(s))^n}{n!} \sup_{\tau\in[0,s]} \|x(\tau)-y(\tau)\| ds \\
&\leqslant \sup_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau)-y(\tau)\| \int_0^t L_1'(s)\frac{(L_1(s))^n}{n!} ds \\
&\leqslant \frac{(L_1(t))^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau)-y(\tau)\|.
\end{aligned}
$$

Portanto, provamos que

$$\|K^n(x)(t) - K^n(y)(t)\| \leqslant \frac{(L_1(t))^n}{n!} \sup_{\tau \in [0,T_0]} \|x(\tau) - y(\tau)\|,$$

de onde segue que

$$\sup_{t \in [0,T_0]} \|K^n(x)(t) - K^n(y)(t)\| \leqslant \sup_{t \in [0,T_0]} \frac{(L_1(t))^n}{n!} \sup_{\tau \in [0,T_0]} \|x(\tau) - y(\tau)\|,$$

e, se considerarmos que estamos usando a norma do supremo, obtemos

$$\|K^n(x) - K^n(y)\| \leqslant \frac{(L_1(T_0))^n}{n!} \|x - y\|. \tag{1.6}$$

Para que todas as condições do Teorema de Weissinger sejam satisfeitas, resta verificarmos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(L_1(T_0))^n}{n!} < \infty$. Agora, observe que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(L_1(T_0))^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(L_1(T_0))^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{L_1(T_0)}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

o que implica, pelo teste da razão, que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(L_1(T_0))^n}{n!} < \infty$. Com isso mostramos que K satisfaz as condições do Teorema de Weissinger e, portanto, concluímos que $K : C \to C$ possui um único ponto fixo.

Finalmente, verifiquemos a estimativa (1.5). Pelo Teorema de Weissinger temos que

$$\|K^n(x) - \overline{x}\| \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(L_1(T_0))^j}{j!} \|K(x) - x\|, \qquad \forall\, x \in C, n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(L_1(T_0))^j}{j!}$ é convergente, temos que $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(L_1(T_0))^j}{j!} = 0$, o que implica que $\|K^n(x) - \overline{x}\| \to 0$, quando $n \to \infty$. Agora,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in [0,T_0]} \|K^n(x)(t) - \overline{x}(t)\| \\
&\qquad \leqslant \left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(L_1(T_0))^j}{j!} \right) \sup_{t \in [0,T_0]} \|K(x)(t) - x(t)\| \\
&\qquad \leqslant \left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(L_1(T_0))^j}{j!} \right) \sup_{t \in [0,T_0]} \|x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds - x(t)\| \\
&\qquad \leqslant \left(\frac{(L_1(T_0))^n}{n!} \right) e^{\int_0^{T_0} L(s) ds} \sup_{t \in [0,T_0]} \| \int_0^t f(s, x(s)) ds + x_0 - x(t)\|.
\end{aligned}$$

Em particular, se $x = x_0$ em $[0, T_0]$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0,T_0]} \|K^n(x_0)(t) - \overline{x}(t)\| &\leqslant \left(\frac{(L_1(T_0))^n}{n!} \right) e^{\int_0^{T_0} L(s) ds} \int_0^{T_0} \|f(s, x_0(s))\| ds \\
&\leqslant \left(\frac{(\int_0^{T_0} L(s) ds)^n}{n!} \right) e^{\int_0^{T_0} L(s) ds} \int_0^{T_0} \|f(s, x_0(s))\| ds.
\end{aligned}$$

(1.7)

Logo,

$$\sup_{t\in[0,T_0]} \|K^n(x_0)(t)-\overline{x}(t)\| \leqslant \left(\frac{(\int_0^{T_0} L(s)ds)^n}{n!}\right) e^{\int_0^{T_0} L(s)ds} \int_0^{T_0} \|f(s,x_0(s))\|ds,$$

o que completa a demonstração.

■

Se $f(t,x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e podemos encontrar a constante global de Lipschitz, então podemos dizer mais sobre o intervalo de existência da solução, como veremos a seguir.

Corolário 17. *Suponha* $[t_0,T]\times\mathbb{R}^n \subset U$ *e*

$$\int_{t_0}^{T} L(s)ds < \infty; \qquad L(t) = \sup_{x\neq y\in\mathbb{R}^n} \frac{\|f(t,x)-f(t,y)\|}{\|x-y\|}$$

então, a solução $\overline{x}$*, encontrada no Teorema 16, está definida para todo* $t\in[t_0,T]$*. Em particular se* $U=\mathbb{R}^{n+1}$ *(ou seja,* $[t_0,T]=\mathbb{R}$*) e*

$$\int_{-T}^{T} L(s)ds < \infty$$

para todo $T>0$*, então* $\overline{x}$ *está definida para todo* $t\in\mathbb{R}$*.*

Demonstração. Como, neste caso, f está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ podemos tomar $X = C([0,T],\mathbb{R}^n)$ e $C = C([0,T],\mathbb{R}^n)$, ou seja, não nos preocupamos com a escolha de T_0 e também $\delta=\infty$. E com isso a Demonstração segue como a anterior.

Para o caso particular Tomamos $X = C = C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ e também podemos proceder como antes.

■

1.4 Dependência da Condição Inicial

Na maioria dos casos os dados conhecidos sobre um determinado problema são aproximações. Se nós tivermos um problema bem colocado então pequenas mudanças nos dados resultará em pequenas mudanças da solução. Isso será mostrado no próximo teorema, mas antes disso vejamos alguns pontos importantes sobre a desigualdade de Gronwall.

Lema 18. *(Desigualdade de Gronwall) Seja* $\alpha > 0$ *uma constante e* u,v *funções contínuas não negativas no intervalo* $[a,b]$ *satisfazendo*

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds, \qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

Então,

$$u(t) \leqslant \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}, \qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

Demonstração. Seja $R(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Então, $R(a) = \alpha$ e $u(t) \leqslant R(t)$. Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$R'(t) = u(t)v(t) \leqslant R(t)v(t).$$

Multiplicando a expressão acima por $e^{-\int_a^t v(s)ds}$ obtemos

$$R'(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} \leqslant R(t)v(t)e^{-\int_a^t v(s)ds},$$

de onde segue que

$$R'(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} - R(t)v(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} \leqslant 0.$$

Entretanto, note que

$$R'(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} - R(t)v(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} = \frac{d}{dt}\left[R(t)e^{-\int_a^t v(s)ds}\right],$$

o que implica que

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)e^{-\int_a^t v(s)ds}\right] \leqslant 0.$$

Integrando a desigualdade acima obtemos

$$R(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} - R(a) \leqslant 0.$$

Como $R(a) = \alpha$ temos que

$$R(t) \leqslant \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Finalmente, como $u(t) \leqslant R(t)$ concluímos que

$$u(t) \leqslant \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

∎

Como consequência da desigualdade de Gronwall chegamos ao seguinte resultado.

Proposição 19. *Se $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $u(\cdot)$ é não negativa e*

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_0^t (\beta u(s) + \gamma)ds, \qquad t \in [0, T],$$

então,

$$u(t) \leqslant \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t} - 1), \qquad t \in [0, T].$$

Demonstração. Por hipótese temos que

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_0^t (\beta u(s) + \gamma)ds,$$

que é equivalente a escrever

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_0^t \beta(u(s) + \frac{\gamma}{\beta})ds.$$

Somando $\frac{\gamma}{\beta}$ em ambos os lados da desigualdade acima obtemos

$$u(t) + \frac{\gamma}{\beta} \leqslant \alpha + \frac{\gamma}{\beta} + \int_0^t \beta(u(s) + \frac{\gamma}{\beta})ds.$$

Definindo $\widetilde{u}(t) := u(t) + \frac{\gamma}{\beta}$ podemos escrever a última expressão como

$$\widetilde{u}(t) \leqslant \left(\alpha + \frac{\gamma}{\beta}\right) + \int_0^t \beta\widetilde{u}(s)ds,$$

e, pela desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\widetilde{u}(t) \leqslant \left(\alpha + \frac{\gamma}{\beta}\right) e^{\int_0^t \beta ds},$$

o que implica que

$$u(t) + \frac{\gamma}{\beta} \leqslant \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta} e^{\beta t}.$$

e, portanto,

$$u(t) \leqslant \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t} - 1).$$

■

Com isto podemos mostrar que o P.V.I. (1.3) é bem posto.

Teorema 20. *Suponha que $f, g \in C(U, \mathbb{R}^n)$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$, e que f seja Lipschitz com constante de Lipschitz $L > 0$. Se $(t_0, x_0), (t_0, y_0) \in U$ e x e y são as respectivas soluções dos P.V.I's*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

e $M = \sup_{(t,x)\in U} \|f(t,x) - g(t,x)\| < \infty$, então

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Demonstração. Para simplificar a notação, novamente tomamos $t_0 = 0$ e $t \in [0, T]$. Então,

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds - y_0 - \int_0^t g(s, y(s))ds \right\| \\ &\leqslant \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\| ds. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\| &= \|f(s, x(s)) - f(s, y(s)) + f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| \\ &\leqslant \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| + \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| \\ &\leqslant L\|x(s) - y(s)\| + \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| \\ &\leqslant L\|x(s) - y(s)\| + \sup_{s\in[0,T]} \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\|, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\|x(t)-y(t)\| \leqslant \|x_0-y_0\| + \int_0^t (L\|x(s)-y(s)\|+M)ds.$$

Agora, pela Proposição 19 temos que

$$\|x(t)-y(t)\| \leqslant \|x_0-y_0\|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt}-1).$$

■

Observe que denotando a solução do P.V.I. (1.3) por $\phi(t,x_0)$ e considerando o caso especial em que $f = g$ teremos os seguintes P.V.I's

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_1. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 20 obtemos

$$\|\phi(t,x_0)-\phi(t,x_1)\| \leqslant \|x_0-x_1\|e^{L|t-t_0|}, \tag{1.8}$$

o que mostra que ϕ depende continuamente da condição inicial. Note ainda que esta limitação depende exponencialmente de t.

Teorema 21. *Seja $f \in C(U,\mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz na segunda variável, uniformemente com respeito à primeira. Em torno de cada ponto $(t_0,x_0) \in U$, podemos encontrar um conjunto compacto $I \times B \subset U$, tal que $\phi \in C(I \times B : \mathbb{R}^n)$. Além disso, ϕ é Lipschitz, satisfazendo*

$$\|\phi(t,x)-\phi(s,y)\| \leqslant \|x-y\|e^{L|t-t_0|} + |s-t|M\ , \tag{1.9}$$

onde

$$L = \sup_{\substack{(t,x),(t,y) \in I \times B \\ x \neq y}} \frac{\|f(t,x)-f(t,y)\|}{\|x-y\|} \qquad e \qquad M = \max_{(t,x)\in I\times B} \|f(t,x)\|.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que existe tal compacto $I \times B$ para cada $(t_0,x_0) \in U$, tal que ϕ existe para todo $(t,x) \in I \times B$. Para tanto, vamos utilizar as mesmas ideias utilizadas na demonstração do Teorema 13. Queremos encontrar um intervalo $[0,T_1]$ e uma bola $B = B_{\delta_1}(x_0)$, tais que, a solução do PVI com condição inicial $x \in B$ existe para todo $t \in [0,T_1]$.

Seja $(t_0,x_0) \in U$ e considere $t_0 = 0$, $I = [0,T_1]$ e $y_0 \in B = B_{\delta_1}(x_0)$, onde $T_1 = \frac{T_0}{2}$ e $\delta_1 = \frac{\delta}{2}$, com T_0 e δ definidos como no Teorema 13. Observe que $V_1 = I \times B \subset [0,T_0] \times B_\delta(x_0) = V$. Queremos mostrar que a solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \\ x(0) = y_0, \end{cases}$$

denotada por $\phi(t,y_0)$ existe e é única. Defina a função $K : C \to C([0,T_1],\mathbb{R}^n)$ como no Teorema 13 onde $C = \{x \in C(I : B); \|x-y_0\| \leqslant \delta_1\}$. Assim, para $x \in C$ e $t \in I$, temos que

$$\|K(x)(t)-y_0\| \ \leqslant \ \int_0^t \|f(s,x(s))\|ds$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^t \max_{(t,x)\in V_1} \|f(t,x)\|ds \\
&\leqslant tM \\
&\leqslant MT_1.
\end{aligned}$$

Agora, da continuidade de f, temos que existe $M' = \sup_{(s,x)\in[0,T_0]\times B_\delta(x_0)} \|f(s,x)\|$. Além disso, temos que

$$M = \max_{(t,x)\in I\times B} \|f(t,x)\| \leqslant \sup_{(s,x)\in[0,T_0]\times B_\delta(x_0)} \|f(s,x)\| = M'.$$

Assim,

$$MT_1 \leqslant M'\frac{T_0}{2} = \frac{\delta}{2},$$

o que implica que

$$\|K(x)(t) - y_0\| \quad \leqslant \quad MT_1 \leqslant \frac{\delta}{2} = \delta_1$$

Portanto, $K(x) \in C$, o que implica que $K : C \to C$, onde C é um espaço de Banach. Agora, como na demonstração do Teorema 13, para quaisquer $x, y \in C$, $x \neq y$, e $t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned}
\|Kx(t) - Ky(t)\| &\leqslant \int_0^t \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds \\
&\leqslant \int_0^t L\|x(s) - y(s)\|ds \\
&\leqslant Lt\|x - y\|,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|K(x) - K(y)\| \leqslant LT_1\|x - y\| \leqslant LT_0\|x - y\|. \qquad x, y \in C.$$

Assim, como $T_0 < L^{-1}$, podemos ver que K é uma contração e, portanto, pelo princípio da contração K possui um único ponto fixo. Daí segue que o P.V.I. acima tem solução única no intervalo $[0, T_1]$. Como a escolha de T_1 não depende de y_0, temos que para todo $y_0 \in B = B_{\delta_1}(x_0)$, a solução existe e é única para todo $t \in [0, T_1]$, ou seja, $\phi(t, x)$ existe para todo $(t, x) \in I \times B$.

Resta agora mostrar a relação (1.9). Para tanto, basta observar que, usando (1.8), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi(t,x) - \phi(s,y)\| &\leqslant \|\phi(t,x) - \phi(t,y)\| + \|\phi(t,y) - \phi(s,y)\| \\
&\leqslant \|x - y\|e^{L|t-t_0|} + \|\int_s^t f(r,\phi(r,y))dr\| \\
&\leqslant \|x - y\|e^{L|t-t_0|} + |s - t|M,
\end{aligned}$$

o que completa a prova.

■

1.5 Prolongamento e Soluções Maximais

Nesta seção estudaremos o prolongamento e existência de soluções maximais para o P.V.I.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I = (a, b), \\ x(0) = x_0 \in A, \end{cases} \tag{1.10}$$

onde $f \in C(I \times A; \mathbb{R}^n)$, $f(\cdot)$ é uma função localmente Lipschitz, $0 \in I$, a pode ser $-\infty$, b pode ser ∞ e A é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Inicialmente, notamos que as soluções de (1.10) podem não estar definidas em todo o intervalo (a, b), mesmo sendo $I = \mathbb{R}$. Isto nos leva a questionar sobre o intervalo máximo onde uma solução de (1.10) pode estar definida. Dos resultados da seção anterior, sabemos que existe uma única solução $x : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^n$ do problema (1.10) para algum intervalo $[c, d] \subset (a, b)$ com $0 \in [c, d]$. É claro que a função $x_{|_{[0,d]}} : [0, d] \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma solução do problema de evolução

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, b), \\ x(0) = x_0 \in A, \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $f \in C([0, b) \times A; \mathbb{R}^n)$. Dessa forma, para evitar notações excessivas e motivados pelos nossos próximos estudos sobre equações com memória, no que segue desta seção restringiremos nossos estudos sobre prolongamento de soluções e sobre a existência de soluções maximais para o problema de evolução (1.11). Notamos que o caso geral, pode ser estudado de forma similar aos resultados que serão apresentados a seguir.

Usando as ideias que permitiram mostrar a existência de solução para o problema (1.11), obtemos o seguinte resultado simples sobre prolongamento de soluções.

Lema 22. *Suponha que $u \in C([0, d]; \mathbb{R}^n)$ seja uma solução do problema (1.11). Então, existe $\delta > 0$ e uma única solução $v \in C([0, d + \delta]; \mathbb{R}^n)$ do problema (1.11) tal que $u = v$ em $[0, d]$.*

Demonstração. Usando o mesmo argumento que permite provar a existência de $u(\cdot)$, podemos mostrar a existência e unicidade de uma solução $w \in C([d, d + \delta]; \mathbb{R}^n)$ do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [d, d + \delta], \\ x(d) = u(d). \end{cases} \tag{1.12}$$

Defina agora a função $v : [0, d + \delta] \mapsto \mathbb{R}^n$ por $v(t) = u(t)$ para $t \in [0, d]$ e $v(t) = w(t)$ para $t \in [d, d + \delta]$. Como $u(\cdot)$ e $w(\cdot)$ são contínuas e $u(d) = w(d)$, segue que $v(\cdot)$ é um função contínua. Mais ainda, como $v(\cdot) = u(\cdot)$ em $[0, d]$, é claro que $v(\cdot)$ é uma solução do problema (1.11) em $[0, d]$. Além disso, para $t \in [d, d + \delta]$ temos que

$$\begin{aligned} v(t) = w(t) &= u(d) + \int_d^t f(s, w(s))ds \\ &= x_0 + \int_0^d f(s, u(s))ds + \int_d^t f(s, w(s))ds \\ &= x_0 + \int_0^d f(s, v(s))ds + \int_d^t f(s, v(s))ds \\ &= x_0 + \int_0^t f(s, v(s))ds, \end{aligned} \tag{1.13}$$

o que mostra que $v(\cdot)$ é uma solução de (1.11) em $[0, d+\delta]$ e uma extensão, um prolongamento, da solução $u(\cdot)$. Isto prova a primeira parte do lema.

A unicidade da solução $v(\cdot)$ é uma consequência do fato que $f(\cdot)$ é uma função localmente Lipschitz. De fato, suponha que $z \in C([0, d+\delta]; \mathbb{R}^n)$ também seja uma solução de (1.11) em $[0, d+\delta]$. Como as funções $v(\cdot)$ e $z(\cdot)$ são contínuas em $[0, d+\delta]$, segue que $V = \{v(t), z(t) : t \in [0, d+\delta]\}$ é compacto e está contido em A. Seja $L_f > 0$ a constante de Lipschitz de $f(\cdot)$ em $[0, d+\delta] \times V$. Nas condições acima, para $t \in [0, d+\delta]$ vemos que

$$\begin{aligned} \| v(t) - z(t) \| &\leqslant \int_0^t \| f(s, v(s)) - f(s, z(s)) \| \, ds \\ &\leqslant L_f \int_0^t \| v(s) - z(s) \| \, ds, \end{aligned} \tag{1.14}$$

o que nos permite mostrar que $v(t) = z(t)$ para todo $t \in [0, d+\delta]$ usando a desigualdade de Gronwall. Isto completa a prova.

■

Definição 23. *Uma solução $u \in C(I; \mathbb{R}^n)$ do problema (1.11), onde $I \subset [0, b)$ é um intervalo contendo 0, é chamada solução maximal de (1.11) se não existe uma solução $v : J \mapsto \mathbb{R}^n$ de (1.11) tal que $I \subset J$ e $u = v$ em I. Neste caso usamos a notação $I = I_{\max}$.*

Usando o Lema 22, podemos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 24. *Se f é localmente Lipschitz contínua na segunda variável, uniformemente com respeito a primeira, então existe uma única solução maximal $u : I_{\max} \mapsto \mathbb{R}^n$ de (1.11).*

Demonstração. Para mostrar a existência de uma solução maximal, usaremos o Lema de Zorn. Suponha que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ seja uma cadeia ordenada de soluções do problema (1.11) no seguinte sentido: $u_\lambda \leqslant u_\gamma$ se o domínio D_{u_λ} de u_λ está contido no domínio D_{u_γ} de u_γ e $u_\lambda = u_\gamma$ em D_{u_λ}. Definindo a função $u : \cup_{\lambda \in \Omega} D_{u_\lambda} \mapsto \mathbb{R}^n$ por $u(t) = u_\lambda(t)$ se $t \in D_{u_\lambda}$, obtemos uma solução de (1.11) tal que $u_\lambda \leqslant u$ para todo $\lambda \in \Omega$. Isto permite usar o Lema de Zorn, garantindo que existe uma solução maximal $u : I_{\max} \mapsto \mathbb{R}^n$ do problema (1.11).

Para finalizar, mostremos que $u(\cdot)$ é a única solução maximal. Suponha que $w : I_{\max,w} \mapsto \mathbb{R}^n$ seja uma solução maximal e que $I_{\max} \subset I_{\max,w}$. Seja $a > 0$ tal que $[0, a] \subset I_{\max}$ e L_f a constante de Lipschitz de $f(\cdot)$ em $[0, a] \times V$, sendo $V = \{u(t), w(t) : t \in [0, a]\}$. Para $t \in [0, a]$ temos que

$$\| w(t) - u(t) \| \leqslant \int_0^t \| f(s, w(s)) - f(s, u(s)) \| \, ds \leqslant L_f \int_0^t \| w(s) - u(s) \| \, ds,$$

o que nos permite concluir, pela desigualdade de Gronwall, que $u = w$ em $[0, a]$. Como a é arbitrário segue que $u = w$ em D_u. Mais ainda, como $u(\cdot)$ é uma solução maximal, segue que $I_{\max} = I_{\max,w}$.

Se $I_{\max,w} \subset I_{\max}$, podemos usar o mesmo argumento anterior para mostrar que $u = w$ em D_w e que $I_{\max} = I_{\max,w}$. Isto completa a prova.

$\blacksquare$

No próximo resultado, estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que uma solução $u : I \mapsto \mathbb{R}^n$ de (1.11) seja uma solução maximal.

Proposição 25. *Seja $I \subset [0, b)$ um intervalo contendo 0 e suponha que $d = \sup I < b$. Então, $u : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução maximal de (1.11) e $I = I_{\max}$ se, e somente se, $\lim_{t\to d} f(t, u(t))$ não existe.*

Demonstração. Suponha que $u : I = I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ seja uma solução maximal de (1.11) e que $\lim_{t\to d} f(t, u(t))$ exista. Então, é fácil verificar que

$$\lim_{t\to d} u(t) = x_0 + \lim_{t\to d} \int_0^t f(s, u(s))ds = x_0 + \int_0^d f(s, u(s))ds.$$

Ou seja, $\lim_{t\to d} u(t)$ existe e

$$\lim_{t\to d} u(t) = x_0 + \int_0^d f(s, u(s))ds.$$

Assim, definimos a função $\overline{u} : [0, d] \to \mathbb{R}^n$ por $\overline{u}(t) = u(t)$ se $t \in [0, d)$ e $\overline{u}(d) = \lim_{t\to d} u(t)$. Da definição de $\overline{u}$ vemos que

$$\overline{u}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \overline{u}(s))ds$$

para todo $t \in [0, d]$, o que implica que $\overline{u}$ é uma solução de (1.11) em $[0, d]$. Mais ainda, usando o Lema 22, obtemos uma solução de (1.11) definida sobre algun intervalo $[0, d+\delta]$ o que é contrário à maximalidade de $u(\cdot)$. Assim, concluímos que $\lim_{t\to d} f(t, u(t))$ não existe.

Por outro lado, de forma similar, suponha que $\lim_{t\to d} f(t, u(t))$ não exista e que $u : I \to \mathbb{R}^n$ não seja uma solução maximal de (1.11). Então, por definição, existe uma solução $\overline{u} : [0, d] \to \mathbb{R}^n$ de (1.11), onde $\overline{u} = u$ em $[0, d)$ e $\overline{u}(d) = \lim_{t\to d} u(t)$. Isto implica que $\lim_{t\to d} f(t, u(t))$ existe, o que é uma contradição com nossa hipótese.

$\blacksquare$

Nos seguintes resultados são apresentadas condições de modo que uma solução maximal de (1.11) esteja definida em $[0, b)$.

Lema 26. *Suponha que $u : [0, d) \mapsto \mathbb{R}^n$ com $d < b$ seja uma solução de (1.11) e que exista um conjunto compacto $C \subset A$ tal que $u(t) \in C$ para todo $t \in [0, d)$. Então, existe $\varepsilon > 0$ e uma extensão $\overline{u} : [0, d+\varepsilon] \mapsto \mathbb{R}^n$ de $u(\cdot)$. Em particular, se $u(\cdot)$ é uma solução maximal de (1.11) e $C \subset A$ é um compacto tal que $u(t) \in C$ para todo $t \in [0, d)$ então $d = b$.*

Demonstração. Para provar o resultado usamos a Proposição 25. Como $d < b$ e $f(\cdot)$ é uma função contínua no compacto $[0, d] \times C$, temos que existe $M > 0$ tal que $\|f(s, x)\| \leqslant M$ para todo $s \in [0, d]$ e todo $x \in C$. Logo, para $0 < s < t < d$ temos que

$$\|u(t) - u(s)\| = \int_s^t \|f(\tau, u(\tau))\| d\tau \leqslant M|t - s|,$$

o que nos permite concluir que $\lim_{t\to d} u(t)$ existe, o que por sua vez implica que $\lim_{t\to d} f(t,u(t))$ também existe. Argumentando agora como na prova da Proposição 25, podemos mostrar que existe uma extensão de $u(\cdot)$ a algum intervalo $[0, d+\varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$.

Suponha agora que $u(\cdot)$ seja uma solução maximal e que $\{u(t); t \in I_{\max}\}$ está contido em algum conjunto compacto. Se $d < b$, podemos usar a primeira parte da prova para mostrar que existe uma extensão de $u(\cdot)$, o que é absurdo, pois $u(\cdot)$ é uma solução maximal. Portanto, $d = b$.

■

Do resultado acima, podemos concluir o seguinte resultado.

Corolário 27. *Suponha que $u : [0,d) \mapsto \mathbb{R}^n$ seja uma solução maximal de (1.11) e que $C \subset A$ seja compacto. Então, existe uma sequência $(t_n)_{n\in N}$ em $[0,d)$ convergente para d tal que $u(t_n) \notin C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, valem as seguintes afirmações.*

(a) *Se A é limitado, então existe uma sequência $(t_n)_{n\in N}$ em $[0,d)$ convergente para d tal que $u(t_n) \to \partial A$ quando $n \to \infty$, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(u(t_n), \partial A) = \inf_{y\in\partial U} \| u(t_n) - y \| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant N_\varepsilon$.*

(b) *Se $A = R^n$, então existe uma sequência $(t_n)_{n\in N}$ em $[0,d)$ convergente para d tal que $\lim_{n\to\infty} \| u(t_n) \| = \infty$.*

Para finalizar esta seção apresentamos o seguinte resultado sobre soluções globais.

Proposição 28. *Suponha que $A = \mathbb{R}^n$ e que para todo $T > 0$ existam constantes M_T e L_T tais que $\|f(t,x)\| \leqslant M_T + L_T\|x\|$, para todo $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Então, a solução maximal de (1.11) está definida em $[0,\infty)$.*

Demonstração. Seja $u : [0,d) \mapsto \mathbb{R}^n$ a solução maximal de (1.11) e suponha $d < \infty$. Das propriedades de $f(\cdot)$, para $t \in [0,d)$ vemos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leqslant \|x_0\| + \int_0^t \|f(s,u(s))\|ds \\ &\leqslant \|x_0\| + \int_0^t (M_d + L_d\|u(s)\|)ds \\ &\leqslant \|x_0\| + M_d d + \int_0^t L_d\|u(s)\|ds, \end{aligned}$$

o que implica, da Desigualdade de Gronwall, que $\|u(t)\| \leqslant (\|x_0\| + M_d d)e^{L_d d}$, para todo $t \in [0,d)$, e que $u(\cdot)$ é limitada. Agora o resultado segue do item (**b**) do Corolário 27.

■

Capítulo 2

Equações Diferenciais com Memória

Neste capítulo apresentaremos algumas questões básicas da teoria de Equações Diferenciais com Memória, incluindo alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções para esse tipo de equações, através do Princípio da Contração de Banach, com atenção especial para o caso de equações diferenciais com memória dependendo do estado. Além disso, apresentaremos alguns resultados sobre prolongamento de soluções e de exitência de solução maximal para as equações diferenciais com memória dependendo do estado. O capítulo será finalizado com o estudo sobre existência e unicidade de soluções para uma equação diferencial neutra explícita com memória dependendo do estado, através de um resultado inédito, o qual possui uma demonstração simples e didática.

2.1 Equações Diferenciais com Memória

Nesta seção introduziremos o conceito de Equações Diferenciais com Memória e apresentaremos alguns exemplos desse tipo de equação.

Consideremos inicialmente o seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t-r)), \ \ t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \ \ \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $a > 0$, $p \geqslant r$, $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ é a história inicial e $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Note que, neste caso, quando $t = 0$, temos que $x(t-r) = x(-r)$ e quando $t = r$, temos que $x(t-r) = x(0)$, ou seja, para obtermos informações do estado x no intervalo $[0, r]$ precisamos de informações de x em pontos anteriores a este intervalo, especificamente, precisamos de informações de x para $t \in [-r, 0]$.

Definição 29. *Equações diferenciais em que precisamos de informações anteriores para determinarmos o comportamento do estado em um determinado tempo t, são chamadas de* **equações diferenciais com memória** *ou* **equações diferenciais com retardo**.

A teoria de equações com memória é diferente e mais complexa do que a de equações sem memória e, pensando em aplicações reais, quanto mais informações anteriores (do passado) tivermos, melhores resultados podemos esperar para a solução, pois teremos uma solução a partir de informações mais precisas. Dessa forma, o estudo desse tipo de equação é muito importante. Vale ainda observar que, apesar da teoria de equações com memória ser mais antiga, o seu estudo foi impulsionado pelo matemático Jack Hale, a partir de 1950.

O problema (2.1) é considerado um dos modelos mais simples de equações com memória. Em particular, se tomarmos $r = 1$, $f(t, x(t-1)) = x(t-1)$ e $x(\theta) = 1$, para $\theta \in [-1, 0]$ e $t \geqslant 0$, então teremos o seguinte problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1), \quad t \geqslant 0, \\ x(\theta) = 1, \quad \theta \in [-1, 0]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Integrando de 0 a t ($t > 0$) ambos os lados da equação (2.2), obtemos

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(\tau - 1) d\tau.$$

Observando que se $t \in [0, 1]$, então $t - 1 \in [-1, 0]$, temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau - 1) d\tau \\ &= 1 + \int_0^t 1 d\tau \\ &= 1 + t. \end{aligned}$$

Logo, $x(t) = 1 + t$ para $t \in [0, 1]$. Portanto, temos que

$$x(t) = \begin{cases} 1, \quad t \in [-1, 0], \\ t + 1, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Ou seja, a partir da história fomos capazes de encontrar a solução do problema (2.2) no intervalo $[0, 1]$. Logo, é natural nos perguntarmos se seria possível encontrar a solução desse problema no intervalo $[1, 2]$. Como no caso anterior, para $t \in [1, 2]$ temos que $t - 1 \in [0, 1]$ e assim

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau - 1) d\tau \\ &= x(0) + \int_0^1 x(\tau - 1) d\tau + \int_1^t x(\tau - 1) d\tau \\ &= x(1) + \int_1^t x(\tau - 1) d\tau \\ &= 2 + \int_1^t [1 + (\tau - 1)] d\tau \\ &= 2 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}$ para $t \in [1, 2]$ e, portanto,

$$x(t) = \begin{cases} 1, \quad t \in [-1, 0], \\ t + 1, \quad t \in [0, 1], \\ \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}, \quad t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Analogamente, se $t \in [2,3]$, então $t-1 \in [1,2]$ e, assim,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau-1)d\tau \\ &= x(0) + \int_0^2 x(\tau-1)d\tau + \int_2^t x(\tau-1)d\tau \\ &= x(2) + \int_2^t x(\tau-1)d\tau \\ &= \frac{7}{2} + \int_2^t [\frac{3}{2} + \frac{(\tau-1)^2}{2}]d\tau \\ &= \frac{1}{6} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + 2t \end{aligned}$$

Então, temos uma solução para o problema (2.2) definida no intervalo $[-1,3]$, dada por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1,0], \\ t+1, & t \in [0,1], \\ \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}, & t \in [1,2], \\ \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{6}, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Note que prosseguindo com esse argumento, é possível encontrar uma solução para o problema no intervalo $[0,\infty)$.

Consideremos outro caso particular do problema (2.1), com $r = 1$, $f(t, x(t-1)) = x(t-1)$ e $x(\theta) = \theta$, para $\theta \in [-1,0]$ e $t \geqslant 0$. Então, teremos o seguinte problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1), & t \geqslant 0, \\ x(\theta) = \theta, & \theta \in [-1,0]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Integrando de 0 a t ($t > 0$) ambos os lados da equação (2.3), obtemos

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(\tau-1)d\tau.$$

Observando que se $t \in [0,1]$, então $t-1 \in [-1,0]$, temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau-1)d\tau \\ &= 0 + \int_0^t (\tau-1)\ d\tau \\ &= \frac{t^2}{2} - t. \end{aligned}$$

Logo, $x(t) = \frac{t^2}{2} - t$ para $t \in [0,1]$. Portanto, segue que

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1,0], \\ \frac{t^2}{2} - t, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Analogamente, para $t \in [1,2]$ obtemos que $t-1 \in [0,1]$ e assim,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(\tau-1)d\tau$$

$$\begin{aligned} &= x(0) + \int_0^1 x(\tau - 1)d\tau + \int_1^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= x(1) + \int_1^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= \frac{-1}{2} + \int_1^t [\frac{(\tau - 1)^2}{2} - (\tau - 1)]d\tau \\ &= \frac{t^3}{6} - t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Logo, $x(t) = \frac{t^3}{6} - t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{6}$ para $t \in [1, 2]$ e, portanto,

$$x(t) = \begin{cases} t, \quad t \in [-1, 0], \\ \frac{t^2}{2} - t, \ \ t \in [0, 1], \\ \frac{t^3}{6} - t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{6}, \ \ t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Novamente, podemos perceber que prosseguindo com esse argumento, é possível encontrar uma solução para o problema (2.3) em $[0, \infty)$.

Podemos ainda considerar um caso particular, porém mais abstrato, do problema (2.1), tomando $r = 1$, $f(t, x(t-1)) = x(t-1)$ e $x(\theta) = \varphi(\theta)$, para $\theta \in [-1, 0]$ e $t \in [0, a]$. Então, teremos o seguinte problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t - 1), \quad t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-1, 0]. \end{cases} \tag{2.4}$$

Integrando de 0 a t ($t > 0$) ambos os lados da equação (2.4), obtemos

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(\tau - 1)d\tau.$$

Observando que se $t \in [0, 1]$, então $t - 1 \in [-1, 0]$, temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^t \varphi(\tau - 1)\ d\tau. \end{aligned}$$

Logo, $x(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi(\tau - 1)\ d\tau$ para $t \in [0, 1]$. Portanto,

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), \quad t \in [-1, 0], \\ \varphi(0) + \int_0^t \varphi(\tau - 1)\ d\tau, \ \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Analogamente, para $t \in [1, 2]$ obtemos que $t - 1 \in [0, 1]$ e assim,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= x(0) + \int_0^1 x(\tau - 1)d\tau + \int_1^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= x(1) + \int_1^t (\varphi(0) + \int_0^{\tau - 1} \varphi(s - 1)\, ds)\, d\tau \end{aligned}$$

$$= \quad \varphi(0) + \int_0^1 \varphi(\tau-1)d\tau + \varphi(0)(t-1) + \int_1^t \int_0^{\tau-1} \varphi(s-1)\, ds\, d\tau.$$

Logo, $x(t) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi(\tau-1) + \varphi(0)(t-1) + \int_1^t \int_0^{\tau-1} \varphi(s-1)\, ds\, d\tau$ para $t \in [1,2]$ e, portanto,

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), \quad t \in [-1,0], \\ \varphi(0) + \int_0^t \varphi(\tau-1)\ d\tau, \ \ t \in [0,1], \\ \varphi(0) + \int_0^1 \varphi(\tau-1)d\tau + \varphi(0)(t-1) + \int_1^t \int_0^{\tau-1} \varphi(s-1)\, ds\, d\tau, \ \ t \in [1,2]. \end{cases}$$

Novamente, podemos perceber que, mesmo neste caso mais abstrato, prosseguindo com esse argumento, é possível encontrar uma solução para o problema (2.4) em $[0,a]$.

A seguir apresentaremos outros dois exemplos de equações com memória e que podem ser descritos na forma (2.1).

Exemplo 30. Podemos descrever o problema

$$\begin{cases} x'(t) = te^{x(t-1)}, \ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \theta, \ \theta \in [-p,0], \ p \geqslant 1, \end{cases}$$

na forma (2.1) tomando $r=1$, $\varphi(\theta) = \theta$ e $f(t,x) = te^x$.

Exemplo 31. Podemos descrever o problema

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 \cos(x(t-2)), \quad t \in [0,a], \\ x(\theta) = e^{2\theta}, \quad \theta \in [-p,0], \ p \geqslant 2, \end{cases}$$

na forma (2.1) tomando $r=2$, $\varphi(\theta) = e^{2\theta}$ e $f(t,x) = t^2 \cos x$.

Considerando os exemplos acima, percebemos que, procedendo como antes, é possível encontrar suas soluções. No entanto, também é fácil perceber que o processo pode se tornar difícil dependendo da função e da história consideradas. Dessa forma, o estudo da existência de solução e de suas propriedades qualitativas pode ser vantajoso se considerarmos o problema em seu formato abstrato (2.1).

Outro modelo clássico de equações com memória é o seguinte

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t-t_1), x(t-t_2), \cdots, x(t-t_n)), \ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \ \theta \in [-p,0], \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$, $p \geqslant \max\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$, $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t_i \in \mathbb{N}$, $t_i \neq 0$.

A seguir temos dois exemplos de equações com memória que podem ser descritos na forma (2.5).

Exemplo 32. Podemos descrever o problema

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 \prod_{i=1}^n \cos(x(t-i)), \ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \theta^2, \ \theta \in [-p,0], \ p \geqslant n, \end{cases}$$

na forma (2.5) tomando $t_i = i$, $\varphi(\theta) = \theta^2$ e $f(t, x_1, ..., x_n) = t^2 \prod_{i=1}^n \cos x_i$.

Exemplo 33. Podemos descrever o problema

$$\begin{cases} x'(t) = p(t)e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x(t-t_i)},\ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-p,0], \end{cases}$$

na forma (2.5) tomando $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$, $p \geqslant \max\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ com $t_i \in \mathbb{N}$, $t_i \neq 0$ e $f(t, x_1, ..., x_n) = p(t)e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}$.

Como antes, a partir dos dois exemplos anteriores, podemos concluir que o estudo da existência de solução e de suas propriedades qualitativas deverá ser vantajoso se considerarmos o problema em seu formato abstrato (2.5).

As equações apresentadas até o momento, ou seja, equações da forma (2.1) ou (2.5) são chamadas de **Equações Diferenciais com Memória Discreta**.

Outro tipo de equações com memória que podemos citar são as **equações diferenciais com memória dependendo do tempo**. Especificamente, podemos representar estas equações na seguinte forma abstrata

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t-\gamma(t))),\ \ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \ \theta \in [-p,0], \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $a > 0$, $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$, $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma(t) > t$ para algum $t \in [0,a]$.

A seguir apresentamos dois exemplos de equações com memória dependendo do tempo que podem ser descritos na forma (2.6).

Exemplo 34. Podemos descrever o problema

$$\begin{cases} x'(t) = t\cos(x(2t-3)),\ \ \ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \theta,\ \ \ \theta \in [-3,0], \end{cases}$$

na forma (2.6) tomando $p = 3$, $\varphi(\theta) = \theta$, $\gamma(t) = 3 - t$ e $f(t,x) = t\cos x$.

Exemplo 35. Podemos descrever o problema

$$\begin{cases} x'(t) = t^2\cos(x(t-e^{t^2}-1)),\ \ \ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \theta,\ \ \ \theta \in [-2,0], \end{cases}$$

na forma (2.6) tomando $p = 2$, $\varphi(\theta) = \theta$, $\gamma(t) = e^{t^2} + 1$ e $f(t,x) = t^2\cos x$.

Também podemos considerar as chamadas **equações com memória contínua**, que podem ser representadas na seguinte forma abstrata

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t),\ \ t \in [0,a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \ \theta \in [-p,0], \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $x_t : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$ é definida por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, com $\theta \in [-p,0]$, $f : [0,a] \times C([-p,0];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$.

Exemplo 36. Note que definindo $f : [0,\infty) \times C([-1,0];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ por $f(t,\phi) = \phi(-1)$, podemos representar o problema (2.2) através do modelo (2.7) pois, neste caso,

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) = x_t(-1) = f(t, x_t),\ \ \ t \geqslant 0, \\ x(\theta) = 1,\ \ \ \theta \in [-1,0]. \end{cases}$$

Considerando o exemplo acima, é importante observar que apesar do problema (2.2) poder ser representado através do modelo (2.7), o estudo de existência de solução se torna mais fácil trabalhando diretamente com (2.2), já que as propriedades de f, neste caso, são abordadas de forma mais simples.

Exemplo 37. Podemos descrever o problema

$$\begin{cases} x'(t) = t^2(\sin x(t-1) + \cos x(t-2) + e^{x(t-3)}), \quad t \in [0,a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-3,0], \end{cases}$$

na forma (2.7) tomando $f(t,\phi) = t^2(\sin\phi(-1) + \cos\phi(-2) + e^{\phi(-3)})$.

2.2 Existência e Unicidade de Soluções para Equações com Memória Dependendo do Tempo

Nesta seção apresentaremos um estudo sobre existência e unicidade de soluções para equações diferenciais com memória dependendo do tempo da seguinte forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t-\gamma(t))), \;\; t \in [0,a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-p,0], \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $a > 0$, $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$, $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [0,a] \to [0,p]$.

Definição 38. *Uma função $x : [-p,a] \to \mathbb{R}^n$ é solução de (2.8) se $x(\cdot)$ é contínua em $[0,a]$ e (2.8) é satisfeita.*

Note que se $x \in C([-p,a];\mathbb{R}^n)$ é uma solução do problema (2.8), então integrando de 0 a t a equação diferencial de (2.8) temos que

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau, \;\; t \in [0,a]. \tag{2.9}$$

Por outro lado, se $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [0,a] \to [0,p]$ são funções contínuas, vemos que a função $x \in C([-p,a];\mathbb{R}^n)$ definida por $x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p,0]$ e pela equação integral (2.9) para $t \in [0,a]$ é solução do problema (2.8).

Logo, podemos definir a solução da equação (2.8) como segue.

Definição 39. *Uma função $x \in C([-p,a];\mathbb{R}^n)$ é solução de (2.8) se $x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p,0]$ e a equação integral (2.9) é satisfeita.*

Proposição 40. *Suponha que $f \in C([0,a]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in C([0,a];[0,p])$ e que $\gamma(0) > 0$. Então, existe $b > 0$ e uma única solução do problema (2.8) em $[-p,b]$. Mais ainda, podemos supor que $b > 0$ é tal que $\gamma(t) > 0$ para todo $t \in [0,b]$ e a solução é dada por*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau, \;\; t \in [0,b]$$

Demonstração. Notemos inicialmente que, como a função $\alpha(t) = t - \gamma(t)$ é contínua e $\alpha(0) < 0$, podemos fixar $\delta > 0$ tal que

$$|\alpha(t) - \alpha(0)| \leqslant \frac{|\alpha(0)|}{2}, \quad \forall t \in [-\delta, \delta].$$

Agora, note que se $x : [-p, \delta] \to \mathbb{R}^n$ é solução de (2.8), então para $t \in [0, \delta]$ temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau. \end{aligned}$$

Logo, tomando $b = \delta$, o problema (2.8) tem uma única solução dada por $x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$ e

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau, \ \ t \in [0, b].$$

■

A seguir veremos como podemos estender a solução encontrada na Proposição 40.

Proposição 41. *Seja $x_1 \in C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ a solução do problema (2.8) encontrada na Proposição 40 e considere o problema*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t - \gamma(t))), \ \ t \in [b, a], \\ x(\theta) = x_1(\theta), \ \ \theta \in [-p, b]. \end{cases} \tag{2.10}$$

Suponha que $b - \gamma(b) < b$ (ou seja, $\gamma(b) > 0$). Então, existe $b_1 > b$ e uma única solução de (2.10) tal que

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^b f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau + \int_b^t f(\tau, x_1(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau, \ \ t \in [b, b_1].$$

Demonstração. Notemos inicialmente que, como a função $\alpha(t) = t - \gamma(t)$ é contínua e $b - \gamma(b) < b$, podemos fixar $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\alpha(t) - \alpha(b)| \leqslant \frac{|b - \alpha(b)|}{2},$$

para $|t - b| < \delta_1$. Neste caso, temos que $t - \gamma(t) < b$. Logo, se $x(\cdot)$ é solução de (2.10) temos que para $t \in [b, b + \delta_1]$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(b) + \int_b^t f(\tau, x(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau \\ &= x_1(b) + \int_b^t f(\tau, x_1(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^b f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau + \int_b^t f(\tau, x_1(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau. \end{aligned}$$

Logo, tomando $b_1 = b + \delta_1$, o problema (2.10) tem uma única solução tal que

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^b f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau + \int_b^t f(\tau, x_1(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau, \quad t \in [b, b_1].$$

∎

É claro que a solução encontrada para o problema (2.10) é solução do problema (2.8) no intervalo $[-p, b_1]$ e, pela construção a solução é única. No próximo resultado veremos sob quais condições podemos utilizar um procedimento similar ao usado na Proposição 41 para garantirmos a existência de uma solução global para o problema (2.8).

Teorema 42. *Suponha que $f \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\gamma \in C([0,a];[0,p])$ e que exista $0 < \varepsilon < p$ tal que $\gamma(t) > \varepsilon$, para todo $t \in [0,a]$. Então, existe uma única solução do problema (2.8) definida em $[-p, a]$.*

Demonstração. Mostraremos que, sob nossas hipóteses, podemos encontrar uma única solução do problema (2.8) em intervalos da forma $[-p, \varepsilon]$, $[-p, 2\varepsilon]$, $[-p, 3\varepsilon]$, e assim por diante, o que implicará o resultado já que $\varepsilon > 0$.

Inicialmente, note que para $t \in [0, \varepsilon]$ temos que $-p \leqslant t - \gamma(t) < \varepsilon - \varepsilon = 0$. Logo, se $x : [-p, \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ é solução de (2.8), então para $t \in [0, \varepsilon]$ segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau. \end{aligned}$$

Logo, o problema (2.8) tem uma única solução $x_1(\cdot)$, em $[-p, \varepsilon]$ dada por $x_1(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$ e

$$x_1(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau, \quad t \in [0, \varepsilon].$$

Agora, consideremos o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t - \gamma(t))), \quad t \in [\varepsilon, a], \\ x(\theta) = x_1(\theta), \quad \theta \in [-p, \varepsilon]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Para $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ temos que $-p < \varepsilon - p \leqslant t - \gamma(t) \leqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Logo, se $x : [-p, 2\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ é solução de (2.11), então para $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t f(\tau, x(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau \\ &= x_1(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t f(\tau, x_1(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^\varepsilon f(\tau, \varphi(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau + \int_\varepsilon^t f(\tau, x_1(\tau - \gamma(\tau)))\, d\tau. \end{aligned}$$

É claro que a solução encontrada para (2.11) é a única solução do problema (2.8) no intervalo $[-p, 2\varepsilon]$. Continuando este processo, podemos concluir que existe uma única solução do problema (2.8) no intervalo $[-p, a]$.

∎

Teorema 43. *Suponha que $\gamma \in C([0,a];[0,p])$ com $\gamma(0) = 0$ e que $f \in C([0,a]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ seja Lipschitz com constante de Lipschitz L_f, ou seja,*

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \leqslant L_f(|t-s| + \|x-y\|),$$

para todos $s,t \in [0,a]$ e $x,y \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma única solução de (2.8) em $[-p,a]$.

Demonstração. Seja $S = \{x \in C([-p,b];\mathbb{R}^n);\ x|_{[-p,0]} = \varphi\}$, com $0 < b \leqslant a$, munido da norma

$$\|x-y\| = \sup_{t\in[0,b]} \|x(t) - y(t)\|.$$

Seja $\Gamma : S \to S$ definida por $\Gamma x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p,0]$ e

$$\Gamma x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\tau - \gamma(\tau)))\ d\tau, \ \ t \in [0,b].$$

Então, para $x, y \in S$ e $t \in [0,b]$ temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| &\leqslant \left\| \int_0^t f(\tau, x(\tau-\gamma(\tau)))\ d\tau - \int_0^t f(\tau, y(\tau-\gamma(\tau)))\ d\tau \right\| \\
&\leqslant \int_0^t \|f(\tau, x(\tau-\gamma(\tau))) - f(\tau, y(\tau-\gamma(\tau)))\|\ d\tau \\
&\leqslant \int_0^t L_f \|x(\tau-\gamma(\tau))) - y(\tau-\gamma(\tau)))\|\ d\tau \\
&\leqslant \int_0^t L_f \sup_{\theta\in[0,t]} \|x(\theta) - y(\theta)\|\ d\tau \\
&\leqslant \int_0^t L_f \|x-y\|\ d\tau \\
&\leqslant L_f b\ \|x-y\|.
\end{aligned}$$

Logo, tomando $b > 0$ tal que $L_f b < 1$ temos que Γ é uma contração e, portanto, tem um único ponto fixo. Assim, podemos concluir que existe uma única solução de (2.8) em $[-p,b]$.

Em seguida, como nos resultados anteriores, podemos encontrar uma única solução de (2.8) em $[-p,2b]$ e assim por diante, o que nos permite concluir a existência de uma única solução de (2.8) em $[-p,a]$.

■

Observação 44. Acima estudamos o problema de existência e unicidade de solução para o problema (2.8) para os seguintes casos:

(i) $\gamma(0) > 0$, o que implica que $x(t-\gamma(t)) = \varphi(t-\gamma(t))$ para t pequeno, ou seja, neste caso pudemos usar a história para encontrar a solução;

(ii) $\gamma(0) = 0$, o que implica que $x(0-\gamma(0)) = x(0) = \varphi(0)$ e então usamos o Teorema de Contração para encontrar a solução.

No entanto, notamos que para o caso $\gamma(0) < 0$ temos que $x(0-\gamma(0)) = x(-\gamma(0))$ e $-\gamma(0) > 0$. Então, deveríamos ter algum conhecimento da solução para $t \geqslant 0$, o que torna o problema mais difícil.

2.3 Existência e Unicidade de Soluções para Equações com Memória Dependendo do Estado

Iniciaremos esta seção observando que se $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to [0,a]$, então a equação

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma(t, x(t)))), & t \in [0,a], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é uma equação diferencial funcional. Especificamente, este modelo de equações é chamado de equação diferencial com argumento dependendo do estado. Já para equações com memória, existe um grupo de equações, chamadas de **equações diferenciais com memória dependendo do estado** que podem, usualmente, ser modeladas da seguinte forma.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma(t, x(t)))), & t \in [0,a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{2.12}$$

onde $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to [-p,a]$ (desde que $\sigma(t, x(t))$ tome valores negativos).

Como antes podemos considerar a seguinte definição de solução para a equação (2.12)

Definição 45. *Uma função $x \in C([-p,a]; \mathbb{R}^n)$ é solução de (2.12) se $x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$ e*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\, d\tau, \quad \textit{para todo } t \in [0,a].$$

Um dos problemas mais interessantes da equação (2.12) está relacionado com a unicidade de solução. De fato, considerando Γ como antes, quando usamos o Teorema da Contração, devemos obter uma estimativa da seguinte forma

$$\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| \leqslant L \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)},$$

com $L < 1$. No entanto, considerando a equação (2.12) e supondo que f seja uma função Lipschitz, temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| &\leqslant \int_0^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, y(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\, d\tau \\ &\leqslant \int_0^t L_f\, \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - y(\sigma(\tau, y(\tau)))\|\, d\tau. \end{aligned}$$

Como pode acontecer de $\sigma(\tau, x(\tau)) \neq \sigma(\tau, y(\tau))$, não podemos obter da estimativa acima um termo da forma $\|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}$. Para tentarmos resolver este problema, notemos primeiro que

$$\begin{aligned} \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - y(\sigma(\tau, y(\tau)))\| &\leqslant \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(\sigma(\tau, y(\tau)))\| \\ &\quad + \|x(\sigma(\tau, y(\tau))) - y(\sigma(\tau, y(\tau)))\| \\ &\leqslant \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(\sigma(\tau, y(\tau)))\| + \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Agora, podemos supor que $x : [-p, a] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$ sejam Lipschitz com constantes de Lipschitz $[x]_{Lip}$ e $[\sigma]_{Lip}$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
\|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - y(\sigma(\tau, y(\tau)))\| &\leqslant \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(\sigma(\tau, y(\tau)))\| + \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant [x]_{Lip}|\sigma(\tau, x(\tau))) - \sigma(\tau, y(\tau))| + \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant [x]_{Lip}[\sigma]_{Lip}\|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} + \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant ([x]_{Lip}[\sigma]_{Lip} + 1)\|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| &\leqslant \int_0^t L_f([x]_{Lip}[\sigma]_{Lip} + 1)\|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}\, d\tau \\
&\leqslant L_f b\ ([x]_{Lip}[\sigma]_{Lip} + 1)\|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Dessa forma temos dois problemas que devem ser resolvidos:

1. Como $\Gamma : S \to S$, precisamos que $x \in S$ seja uma função Lipschitz. Então, S deve ser formado por funções Lipschitz. Logo, deveremos provar que Γx é Lipschitz para toda função $x \in S$.

2. Para que Γ seja uma contração precisamos garantir que

$$L_f b\ ([x]_{Lip}[\sigma]_{Lip} + 1) < 1, \tag{2.13}$$

para algum $b > 0$.

Note que a pergunta chave para que possamos resolver o segundo problema e, consequentemente, o primeiro problema é: *Podemos fixar $b > 0$ de modo que a condição (2.13) seja verificada* **para todo** $x \in S$*?*

Note que se pudermos fixar $R > 0$ que limite $[x]_{Lip}$, então o candidato para o conjunto S é o seguinte:

$$S = \{x \in C([-p, b]; \mathbb{R}^n);\ x|_{[-p,0]} = \varphi, x \text{ é Lipschitz},\ [x]_{Lip} \leqslant R\}.$$

Para que possamos resolver adequadamente os problemas citados acima introduziremos a seguir os conceitos de norma e semi-norma de uma função Lipschitz. Para isto, lembramos, inicialmente, a definição de função Lipschitz para funções $x : [0, a] \to \mathbb{R}^n$.

Definição 46. *Uma função $x : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitz se existe $L > 0$ tal que*

$$\|x(t) - x(s)\| \leqslant L|t - s|,$$

para todos $t, s \in [0, a]$.

Definição 47. *Se $x : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ é uma função Lipschitz, dizemos que*

$$[x]_{Lip} = \sup_{s,t \in [0,a], s \neq t} \frac{\|x(t) - x(s)\|}{|t - s|}$$

é a semi-norma Lipschitz de x.

Observação 48. Note que se $x : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ é uma função Lipschitz, então $[x]_{Lip} < \infty$. De fato, se $L > 0$ é uma constante de Lipschitz de x, temos que para quaisquer $s, t \in [0, a]$, $s \neq t$,

$$\frac{\|x(t) - x(s)\|}{|t - s|} \leqslant L \quad \Rightarrow \quad \sup_{s,t \in [0,a]} \frac{\|x(t) - x(s)\|}{|t - s|} = [x]_{Lip} \leqslant L < \infty.$$

Isto implica que $[x]_{Lip}$ é o menor número $L > 0$ tal que

$$\|x(t) - x(s)\| \leqslant L\ |t - s|,\ \ s, t \in [0, a],$$

ou, equivalentemente,

$$[x]_{Lip} = inf\{L > 0; \|x(t) - x(s)\| \leqslant L\ |t - s|,\ \ s, t \in [0, a]\}.$$

Observação 49. Pode-se verificar que o espaço

$$C_{Lip}([0, a], \mathbb{R}^n) = \{x : [0, a] \to \mathbb{R}^n;\ \ x \text{ é Lipschitz}\},$$

munido com a norma

$$\|x - y\|_{Lip} = \|x - y\|_{C([0,a],\mathbb{R}^n)} + [x - y]_{Lip},$$

é um espaço de Banach. Isto justifica o nome *semi-norma* dado na definição acima.

É importante notar que a definição de semi-norma, bem como as observações feitas acima, podem ser generalizadas facilmente para funções da forma $f : X \to Y$, onde X, Y são espaços de Banach.

Apresentaremos a seguir um resultado de existência e unicidade para o problema (2.12) considerando o caso em que $\sigma(0, \varphi(0)) < 0$. Veremos que este caso poderá ser tratado de forma mais simples, pois poderemos fazer uso da história inicial $\varphi(\cdot)$ para encontrarmos a solução.

Teorema 50. *Suponha que $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$ sejam funções contínuas e Lipschitz na segunda variável, que $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ seja uma função Lipschitz e que $\sigma(0, \varphi(0)) < 0$. Então, existe uma única solução $x \in C([-p, b], \mathbb{R}^n)$ do problema (2.12), para algum $b > 0$.*

Demonstração. Note que como $\sigma(\cdot, \cdot)$ é contínua e $\sigma(0, \varphi(0)) < 0$, então $\sigma(t, x) < 0$ para (t, x) numa vizinhança de $(0, \varphi(0))$. Seja $r > 0$ tal que

$$|\sigma(t, x) - \sigma(0, \varphi(0))| < min\left\{\frac{|\sigma(0, \varphi(0))|}{2}, \frac{|\sigma(0, \varphi(0)) + p|}{2}\right\} := \mu,$$

para todo $t \in [-r, r]$ e $x \in B_r(\varphi(0), \mathbb{R}^n)$. Ou seja, $\sigma(t, x) \in (\sigma(0, \varphi(0)) - \mu, \sigma(0, \varphi(0)) + \mu)$ e, consequentemente, $-p < \sigma(t, x) < 0$, para todo $t \in [-r, r]$ e $x \in B_r(\varphi(0), \mathbb{R}^n)$.

Agora, tome $0 < b < min\left\{r, \frac{r}{M}, \frac{1}{1+[f]_{Lip}[\varphi]_{Lip}[\sigma]_{Lip}}\right\}$, onde

$$M = sup\{\|f(t, \varphi(s))\|; (t, s) \in [0, a] \times [-p, 0]\} < \infty,$$

e consideremos o conjunto

$$S = \{x \in C([-p,b];\mathbb{R}^n);\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-p,0],\ \|x(t) - \varphi(0)\| \leqslant r,\ t \in [0,b]\}.$$

Em seguida, defina $\Gamma : S \to C([-p,b] : \mathbb{R}^n)$ por $\Gamma x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p,0]$ e

$$\Gamma x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\ d\tau,\ t \in [0,b].$$

Vejamos inicialmente que o conjunto S é fechado em $C([-p,b];\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $(x_n)_n$ uma sequência em S e suponhamos que $x_n \to y$ em $C([-p,b];\mathbb{R}^n)$. Então, $x_n(\theta) \to y(\theta)$ para todo $\theta \in [-p,0]$. Por outro lado, como $x_n = \varphi$ em $[-p,0]$, temos que $x_n(\theta) \to \varphi(\theta)$ para todo $\theta \in [-p,0]$, o que implica que $y(\theta) = \varphi(\theta)$ para todo $\theta \in [-p,0]$. Além disso, para $t \in [0,b]$ temos que

$$\|y(t) - \varphi(0)\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n(t) - \varphi(0)\| \leqslant \lim_{n\to\infty} r = r,$$

o que implica que $y \in S$ e, portanto, que S é fechado em $C([-p,b];\mathbb{R}^n)$.

Mostremos agora que $\Gamma(S) \subset S$. Dado $x \in S$, é claro que $\Gamma x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p,0]$. Além disso, para $t \in [0,b]$ temos que $\|x(t) - \varphi(0)\| \leqslant r$, o que implica que $\sigma(t, x(t)) < 0$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma x(t) &= \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\ d\tau \\
&= \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\sigma(\tau, x(\tau))))\ d\tau.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Gamma x(t) - \varphi(0)\| \leqslant \int_0^t \|f(\tau, \varphi(\sigma(\tau, x(\tau))))\|\ d\tau \leqslant Mb \leqslant r, \quad t \in [0,b],$$

o que permite concluir que $\Gamma(S) \subset S$, ou seja, $\Gamma : S \to S$.

Finalmente, mostremos que $\Gamma : S \to S$ é uma contração. Sejam $x, y \in S$ e $t \in [0,b]$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| &\leqslant \int_0^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, y(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\ d\tau \\
&= \int_0^t \|f(\tau, \varphi(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, \varphi(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\ d\tau \\
&\leqslant [f]_{Lip} \int_0^t \|\varphi(\sigma(\tau, x(\tau))) - \varphi(\sigma(\tau, y(\tau)))\|\ d\tau \\
&\leqslant [f]_{Lip}[\varphi]_{Lip} \int_0^t |\sigma(\tau, x(\tau)) - \sigma(\tau, y(\tau))|\ d\tau \\
&\leqslant [f]_{Lip}[\varphi]_{Lip}[\sigma]_{Lip} \int_0^t \|x(\tau) - y(\tau)\|\ d\tau \\
&\leqslant ([f]_{Lip}[\varphi]_{Lip}[\sigma]_{Lip}\, b)\ \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Como $[f]_{Lip}[\varphi]_{Lip}[\sigma]_{Lip}\, b < 1$, podemos concluir que $\Gamma : S \to S$ é uma contração, o que implica que Γ tem um único ponto fixo. Portanto, existe uma única solução $x \in C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ do problema (2.12).

■

No próximo resultado trabalharemos com o caso $\sigma(0, \varphi(0)) = 0$, mais complexo do que o caso anterior, e será nele que deveremos supor que $x \in S$ é uma função Lipschitz, bem como encontrar uma limitação para $[x]_{Lip}$, como discutido no início desta seção.

Teorema 51. *Suponha que $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$ e $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ sejam funções Lipschitz, $\sigma(0, \varphi(0)) = 0$ e que $\sigma(s, z) \leqslant s$, para todo $s \in [0, a]$ e todo $z \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma única solução $x \in C_{Lip}([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ do problema (2.12), para algum $b > 0$.*

Demonstração. Seja $R \geqslant [\varphi]_{Lip} + M + 1$, onde

$$M = sup\{\|f(s, x)\|;\ s \in [0, a],\ x \in B_1(\varphi(0), \mathbb{R}^n)\},$$

e seja $0 < b < a$, tal que

$$R\,[\sigma]_{Lip}(1 + R)b < 1 \qquad \text{e} \qquad [f]_{Lip}\,(R\,[\sigma]_{Lip} + 1)b < 1.$$

Agora, considerando o conjunto

$$S = \{x \in C([-p, b]; \mathbb{R}^n);\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-p, 0],\ [x]_{Lip} \leqslant R\},$$

defina $\Gamma : S \to C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ por $\Gamma x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$ e

$$\Gamma x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\ d\tau,\ \ t \in [0, b].$$

Note que Γ está bem definida, pois, por hipótese, $\sigma(\tau, x(\tau)) \leqslant \tau \leqslant b$, o que implica que $x(\sigma(\tau, x(\tau)))$ está bem definida. Mais ainda, é fácil verificar que S é um subconjunto fechado de $C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$. De fato, se $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em S, notando que $C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach temos que existe $x \in C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ tal que $x_n \to x$ em $C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$. Usando este fato, para $t, s \in [0, b]$ vemos que

$$\| x(t) - x(s) \| = \lim_{n \to \infty} \| x_n(t) - x_n(s) \| \leqslant \lim_{n \to \infty} R \mid t - s \mid \leqslant R \mid t - s \mid,$$

o que implica que $[x]_{C_{Lip}([0,b];\mathbb{R}^n)} \leqslant R$ e que $x \in S$. Isto prova que S é um espaço completo.

Para completar a prova resta mostrarmos que $\Gamma(S) \subset S$ e, em seguida, que $\Gamma : S \to S$ é uma contração.

Para mostrarmos que $\Gamma(S) \subset S$ basta provarmos que dado $x \in S$,

$$\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| \leqslant R\,|t - s|,$$

para todos $t, s \in [-p, b]$. Para isto, dado $x \in S$ devemos analisar os seguintes casos:

1. $t, s \in [-p, 0]$.

   Neste caso, temos que

$$\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| = \|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leqslant [\varphi]_{Lip}\,|t - s| \leqslant R\,|t - s|.$$

2. $t, s \in [0,b]$, $t > s$.

   Neste caso, observamos inicialmente que

$$\begin{aligned}
\|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - \varphi(0)\| &= \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(0)\| \\
&= \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(\sigma(0, \varphi(0)))\| \\
&\leqslant [x]_{Lip} |\sigma(\tau, x(\tau)) - \sigma(0, \varphi(0))| \\
&\leqslant R\,[\sigma]_{Lip} (|\tau - 0| + \|x(\tau) - \varphi(0)\|) \\
&\leqslant R\,[\sigma]_{Lip}\,(b + [x]_{Lip}\,\tau) \\
&\leqslant R\,[\sigma]_{Lip}\,(1 + R)\,b < 1,
\end{aligned}$$

   para todo $\tau \in [0,b]$ e todo $x \in S$, o que implica que $x(\sigma(\tau, x(\tau))) \in B_1(\varphi(0), \mathbb{R}^n)$, para todo $\tau \in [0,b]$ e todo $x \in S$. Logo, para $t, s \in [0,b]$, $t > s$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| &= \|\int_0^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\, d\tau - \int_0^s f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\, d\tau\| \\
&\leqslant \int_s^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\|\, d\tau \\
&\leqslant M|t - s| \\
&\leqslant R|t - s|.
\end{aligned}$$

3. $s \in [-p, 0]$ e $t \in [0,b]$.

   Usando as desigualdades obtidas nos dois casos anteriores, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| &\leqslant \|\Gamma x(t) - \Gamma x(0)\| + \|\Gamma x(s) - \Gamma x(0)\| \\
&\leqslant R|t - 0| + R|s - 0| \\
&\leqslant R(|t| + |s|) \\
&= R(t - s) \\
&= R\,|t - s|.
\end{aligned}$$

Ou seja, dado $x \in S$, temos que

$$\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| \leqslant R\,|t - s|,$$

para todos $t, s \in [-p, b]$, o que prova que $[\Gamma x]_{Lip} \leqslant R$. Portanto, $\Gamma(S) \subset S$.

Mostremos agora que $\Gamma : S \to S$ é uma contração. Sejam $x, y \in S$ e $t \in [0,b]$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| &\leqslant \int_0^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, y(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\, d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, x(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\, d\tau \\
&\quad + \int_0^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, y(\tau)))) - f(\tau, y(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\, d\tau \\
&\leqslant [f]_{Lip} \int_0^t \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(\sigma(\tau, y(\tau)))\|\, d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+[f]_{Lip}\int_0^t \|x(\sigma(\tau,y(\tau)))-y(\sigma(\tau,y(\tau)))\|\,d\tau\\
\leqslant\ &[f]_{Lip}[x]_{Lip}\int_0^t |\sigma(\tau,x(\tau))-\sigma(\tau,y(\tau))|\,d\tau\\
&+[f]_{Lip}\int_0^t \sup_{\theta\in[0,b]}\|x(\theta)-y(\theta)\|\,d\tau\\
\leqslant\ &[f]_{Lip}R[\sigma]_{Lip}\int_0^t \|x(\tau)-y(\tau)\|\,d\tau+[f]_{Lip}b\|x-y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}\\
\leqslant\ &[f]_{Lip}R[\sigma]_{Lip}\,b\,\|x-y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}+[f]_{Lip}b\,\|x-y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}\\
\leqslant\ &[f]_{Lip}(R[\sigma]_{Lip}+1)\,b\,\|x-y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Como $[f]_{Lip}(R[\sigma]_{Lip}+1)b<1$, podemos concluir que $\Gamma : S \to S$ é uma contração, o que implica que Γ tem um único ponto fixo. Portanto, existe uma única solução $x \in C_{Lip}([-p,b];\mathbb{R}^n)$ do problema (2.12).

■

2.4 Prolongamento e Soluções Maximais para Equações com Memória Dependendo do Estado

Na seção anterior mostramos a existência e unicidade de solução para o problema (2.12) em um determinado intervalo $[-p,b]$, para os casos em que $\sigma(0,\varphi(0))<0$ e $\sigma(0,\varphi(0))=0$.

Para facilitar a leitura desta seção lembramos que o problema (2.12) é dado por

$$
\begin{cases}
x'(t)=f(t,x(\sigma(t,x(t)))), & t\in[0,a],\\
x(\theta)=\varphi(\theta), & \theta\in[-p,0],
\end{cases}
$$

onde $f:[0,a]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\varphi:[-p,0]\to\mathbb{R}^n$ e $\sigma:[0,a]\times\mathbb{R}^n\to[-p,a]$.

A seguir mostraremos que, usando ideias similares ao que foi apresentado na seção anterior, podemos estender as soluções encontradas para o problema (2.12) em intervalos da forma $[-p,b+\delta]$, para algum $\delta>0$.

Iniciaremos apresentando um resultado de prolongamentdo de solução para o problema (2.12) para o caso $\sigma(0,\varphi(0))<0$. Para isso lembramos que para obter o resultado de existência e unicidade de solução, supomos que a história $\varphi:[-p,0]\to\mathbb{R}^n$ era uma função Lipschitz. A ideia agora é mostrar a existência e unicidade de solução para o problema

$$
\begin{cases}
x'(t)=f(t,x(\sigma(t,x(t)))), & t\in[b,a],\\
x(\theta)=u(\theta), & \theta\in[-p,b],
\end{cases}
$$

onde $u\in C([-p,b];\mathbb{R}^n)$ é a solução do problema (2.12) encontrada no Teorema 50. Como antes, precisaremos que $u(\cdot)$ seja uma função Lipschitz. Mas note que, como $u\in C([-p,b];\mathbb{R}^n)$ é solução de (2.12) em $[-p,b]$, então $u\in C^1([-p,b];\mathbb{R}^n)$ e, portanto, Lipschitz em $[-p,b]$.

Teorema 52. *Suponha que $u\in C([-p,b];\mathbb{R}^n)$ seja a solução do problema (2.12) encontrada no Teorema 50 (caso $\sigma(0,\varphi(0))<0$) e que $\sigma(b,u(b))<b$. Então, existe uma única solução $x\in C([-p,b+\delta];\mathbb{R}^n)$ do problema (2.12), para algum $\delta>0$.*

Demonstração. Inicialmente, consideremos o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma(t, x(t)))), & t \in [b, a], \\ x(\theta) = u(\theta), & \theta \in [-p, b]. \end{cases} \tag{2.14}$$

Como $\sigma(\cdot, \cdot)$ é contínua e $\sigma(b, u(b)) < b$, então $\sigma(t, x) < b$ para (t, x) numa vizinhança de $(b, u(b))$. Seja $r > 0$ tal que

$$|\sigma(t, x) - \sigma(b, u(b))| < min \left\{ \frac{|\sigma(b, u(b)) + p|}{2}, \frac{|b - \sigma(b, u(b)|}{2} \right\} := \mu,$$

para todo $t \in [b-r, b+r]$ e $x \in B_r(u(b), \mathbb{R}^n)$. Ou seja, $\sigma(t, x) \in (\sigma(b, u(b)) - \mu, \sigma(b, u(b)) + \mu)$ e, consequentemente, $-p < \sigma(t, x) < b$, para todo $t \in [b-r, b+r]$ e $x \in B_r(u(b), \mathbb{R}^n)$.

Agora, tome $0 < \delta < min \left\{ r, \frac{r}{M}, \frac{1}{1+[f]_{Lip}[u]_{Lip}[\sigma]_{Lip}} \right\}$, onde

$$M = sup \{ \|f(t, u(s))\|; (t, s) \in [0, a] \times [-p, b] \} < \infty,$$

e consideremos o conjunto

$$S = \{ x \in C([-p, b+\delta] : \mathbb{R}^n); \, x(\theta) = u(\theta), \; \theta \in [-p, b], \; \|x(t) - u(b)\| \leqslant r, \; t \in [b, b+\delta] \}.$$

Em seguida, defina $\Gamma : S \to C([-p, b+\delta] : \mathbb{R}^n)$ por $\Gamma x(\theta) = u(\theta)$ para $\theta \in [-p, b]$ e

$$\Gamma x(t) = u(b) + \int_b^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) \, d\tau, \; t \in [b, b+\delta].$$

Como antes, é fácil verificar que o conjunto S é fechado em $C([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n)$. De fato, seja $(x_n)_n$ uma sequência em S e suponhamos que $x_n \to y$ em $C([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n)$. Então, $x_n(\theta) \to y(\theta)$ para todo $\theta \in [-p, b]$. Por outro lado, como $x_n = u$ em $[-p, b]$, temos que $x_n(\theta) \to u(\theta)$ para todo $\theta \in [-p, b]$, o que implica que $y(\theta) = u(\theta)$ para todo $\theta \in [-p, b]$. Além disso, para $t \in [b, b+\delta]$ temos que

$$\|y(t) - u(b)\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n(t) - u(b)\| \leqslant \lim_{n \to \infty} r = r,$$

o que implica que $y \in S$ e, portanto, S é fechado em $C([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n)$.

Mostremos agora que $\Gamma(S) \subset S$. Dado $x \in S$, por definição, temos que $\Gamma x(\theta) = u(\theta)$ para $\theta \in [-p, b]$. Além disso, para $t \in [b, b+\delta]$ temos que $\|x(t) - u(b)\| \leqslant r$, o que implica que $\sigma(t, x(t)) < b$ e, assim,

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) &= u(b) + \int_b^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) \, d\tau \\ &= u(b) + \int_b^t f(\tau, u(\sigma(\tau, x(\tau)))) \, d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $t \in [b, b+\delta]$

$$\|\Gamma x(t) - u(b)\| \leqslant \int_b^t \|f(\tau, u(\sigma(\tau, x(\tau))))\| \, d\tau \leqslant M(t-b) \leqslant M(b+\delta-b) \leqslant M\delta \leqslant r,$$

o que permite concluir que $\Gamma(S) \subset S$, ou seja, $\Gamma : S \to S$.

Finalmente, mostremos que $\Gamma : S \to S$ é uma contração. Sejam $x, y \in S$ e $t \in [b, b+\delta]$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| &\leqslant \int_b^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, y(\sigma(\tau, y(\tau))))\| \, d\tau \\
&= \int_b^t \|f(\tau, u(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, u(\sigma(\tau, y(\tau))))\| \, d\tau \\
&\leqslant [f]_{Lip} \int_b^t \|u(\sigma(\tau, x(\tau))) - u(\sigma(\tau, y(\tau)))\| \, d\tau \\
&\leqslant [f]_{Lip}[u]_{Lip} \int_b^t |\sigma(\tau, x(\tau)) - \sigma(\tau, y(\tau))| \, d\tau \\
&\leqslant [f]_{Lip}[u]_{Lip}[\sigma]_{Lip} \int_b^t \|x(\tau) - y(\tau)\| \, d\tau \\
&\leqslant ([f]_{Lip}[u]_{Lip}[\sigma]_{Lip} \, (t-b)) \, \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant ([f]_{Lip}[u]_{Lip}[\sigma]_{Lip} \, \delta) \, \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Como $[f]_{Lip}[u]_{Lip}[\sigma]_{Lip} \, \delta < 1$, podemos concluir que $\Gamma : S \to S$ é uma contração, o que implica que Γ tem um único ponto fixo. Portanto, existe uma única solução $x \in C([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n)$ do problema (2.14).

Agora, note que x é uma solução do problema (2.12), pois:

1. para $t \in [-p, 0]$ temos que
$$x(t) = u(t) = \varphi(t);$$

2. para $t \in [0, b]$ temos que se $t \in [0, b)$, então
$$x'(t) = u'(t) = f(t, u(\sigma(t, u(t)))) = f(t, u(\sigma(t, x(t)))) = f(t, x(\sigma(t, x(t)))) \text{ e}$$
$$\frac{d^- x(b)}{dt} = f(b, u(\sigma(b, u(b)))) = f(b, u(\sigma(b, x(b)))) = f(b, x(\sigma(b, x(b))));$$

3. para $t \in [b, b+\delta]$ temos que se $t \in (b, b+\delta]$, então
$$x'(t) = f(t, x(\sigma(t, x(t)))) \text{ e}$$
$$\frac{d^+ x(b)}{dt} = f(b, x(\sigma(b, x(b)))).$$

Assim, a prova está completa.

■

No próximo teorema apresentaremos um resultado de prolongamentdo de solução para o problema (2.12), considerando o caso $\sigma(0, \varphi(0)) = 0$.

Teorema 53. *Suponha que $u \in C([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ seja a solução do problema (2.12) encontrada no Teorema 51 (caso $\sigma(0, \varphi(0)) = 0$) e que $\sigma(b, u(b)) = b$. Então, existe uma única solução $x \in C([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n)$ do problema (2.12), para algum $\delta > 0$.*

Demonstração. Inicialmente lembre que, pelo Teorema 51, a solução $u(\cdot)$ é Lipschitz. Usando este fato, fixemos $R \geqslant [u]_{Lip} + M + 1$, onde

$$M = sup\{\|f(s,x)\|;\ s \in [0,a],\ x \in B_1(u(b), \mathbb{R}^n)\},$$

e seja $\delta > 0$, tal que

$$R\,[\sigma]_{Lip}(1+R)\,\delta < 1 \qquad \text{e} \qquad [f]_{Lip}\,(R\,[\sigma]_{Lip} + 1)\delta < 1.$$

Agora, considerando o conjunto

$$S = \{x \in C([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n);\ x(\theta) = u(\theta),\ \theta \in [-p,b],\ [x]_{Lip} \leqslant R\},$$

defina $\Gamma : S \to C([-p, b+\delta] : \mathbb{R}^n)$ por $\Gamma x(\theta) = u(\theta)$ para $\theta \in [-p, b]$ e

$$\Gamma x(t) = u(b) + \int_b^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\ d\tau,\ \ t \in [b, b+\delta].$$

Note que Γ está bem definida, pois, por hipótese, $\sigma(\tau, x(\tau)) \leqslant \tau \leqslant b+\delta$, o que implica que $x(\sigma(\tau, x(\tau)))$ está bem definida. Mais ainda, é fácil verificar que S é um subconjunto fechado de $C([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n)$. Logo, resta mostrarmos que $\Gamma(S) \subset S$ e, em seguida, que $\Gamma : S \to S$ é uma contração.

Para mostrarmos que $\Gamma(S) \subset S$ basta provarmos que dado $x \in S$,

$$\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| \leqslant R\,|t-s|,$$

para todos $t, s \in [-p, b+\delta]$. Para isto, dado $x \in S$ devemos analisar os seguintes casos:

1. $t, s \in [-p, b]$.

   Neste caso, temos que

   $$\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| = \|u(t) - u(s)\| \leqslant [u]_{Lip}\,|t-s| \leqslant R\,|t-s|.$$

2. $t, s \in [b, b+\delta]$, $t > s$.

   Neste caso, observamos inicialmente que

   $$\begin{aligned}
   \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - u(b)\| &= \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(b)\| \\
   &= \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(\sigma(b, u(b)))\| \\
   &\leqslant [x]_{Lip}|\sigma(\tau, x(\tau)) - \sigma(b, u(b))| \\
   &\leqslant R\,[\sigma]_{Lip}(|\tau - b| + \|x(\tau) - x(b)\|) \\
   &\leqslant R\,[\sigma]_{Lip}\,(\delta + [x]_{Lip}\,|\tau - b|) \\
   &\leqslant R\,[\sigma]_{Lip}\,(1+R)\,\delta < 1,
   \end{aligned}$$

   para todo $\tau \in [b, b+\delta]$ e todo $x \in S$, o que implica que $x(\sigma(\tau, x(\tau))) \in B_1(u(b), \mathbb{R}^n)$, para todo $\tau \in [b, b+\delta]$ e todo $x \in S$. Logo, para $t, s \in [b, b+\delta]$, $t > s$, temos que

   $$\begin{aligned}
   \|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| &= \|\int_b^t f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\,d\tau - \int_b^s f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\,d\tau\| \\
   &\leqslant \int_s^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau))))\|\,d\tau \\
   &\leqslant M|t-s| \leqslant R|t-s|.
   \end{aligned}$$

3. $s \in [-p, b]$ e $t \in [b, b+\delta]$.

Usando as desigualdades obtidas nos dois casos anteriores, obtemos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| &\leqslant \|\Gamma x(t) - \Gamma x(b)\| + \|\Gamma x(b) - \Gamma x(s)\| \\ &\leqslant R|t-b| + R|b-s| \\ &= R[(t-b) + (b-s)] = R(t-s) = R\,|t-s|.\end{aligned}$$

Ou seja, dado $x \in S$, temos que

$$\|\Gamma x(t) - \Gamma x(s)\| \leqslant R\,|t-s|,$$

para todos $t, s \in [-p, b+\delta]$, o que prova que $[\Gamma x]_{Lip} \leqslant R$. Portanto, $\Gamma(S) \subset S$.

Mostremos agora que $\Gamma : S \to S$ é uma contração. Sejam $x, y \in S$ e $t \in [b, b+\delta]$. Então,

$$\begin{aligned}\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\| &\leqslant \int_b^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, y(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\, d\tau \\ &\leqslant \int_b^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, x(\tau)))) - f(\tau, x(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\, d\tau \\ &\quad + \int_b^t \|f(\tau, x(\sigma(\tau, y(\tau)))) - f(\tau, y(\sigma(\tau, y(\tau))))\|\, d\tau \\ &\leqslant [f]_{Lip} \int_b^t \|x(\sigma(\tau, x(\tau))) - x(\sigma(\tau, y(\tau)))\|\, d\tau \\ &\quad + [f]_{Lip} \int_b^t \|x(\sigma(\tau, y(\tau))) - y(\sigma(\tau, y(\tau)))\|\, d\tau \\ &\leqslant [f]_{Lip}[x]_{Lip} \int_b^t |\sigma(\tau, x(\tau)) - \sigma(\tau, y(\tau))|\, d\tau \\ &\quad + [f]_{Lip} \int_b^t \sup_{\theta \in [b, b+\delta]} \|x(\theta) - y(\theta)\|\, d\tau \\ &\leqslant [f]_{Lip} R[\sigma]_{Lip} \int_b^t \|x(\tau) - y(\tau)\|\, d\tau + [f]_{Lip}\delta\|x-y\|_{C([b,b+\delta];\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant [f]_{Lip} R[\sigma]_{Lip}\, \delta\, \|x-y\|_{C([b,b+\delta];\mathbb{R}^n)} + [f]_{Lip}\delta\, \|x-y\|_{C([b,b+\delta];\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant [f]_{Lip}(R[\sigma]_{Lip} + 1)\, \delta\, \|x-y\|_{C([b,b+\delta];\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Como $[f]_{Lip}(R[\sigma]_{Lip} + 1)\delta < 1$, podemos concluir que $\Gamma : S \to S$ é uma contração, o que implica que Γ tem um único ponto fixo. Portanto, como no Teorema 52, podemos concluir que existe uma única solução $x \in C_{Lip}([-p, b+\delta]; \mathbb{R}^n)$ do problema (2.12).

■

A seguir, apresentaremos o estudo de soluções maximais para o problema (2.12). Para isso iniciamos com a definição de solução maximal.

Definição 54. *Uma solução $u \in C(I; \mathbb{R}^n)$ do problema (2.12), onde $I \subset [-p, a]$ é um intervalo da forma $[-p, b)$ ou $[-p, b]$, $b > 0$, é chamada solução maximal de (2.12) se não existe uma solução $v : J \mapsto \mathbb{R}^n$ de (2.12) tal que $I \subset J$ e $u = v$ em I. Neste caso, denotamos $I = I_{\max}$.*

Observação 55. Em palavras, a Definição 54 diz que se u é uma solução maximal de (2.12), então não existe uma solução v de (2.12) definida num intervalo contendo o domínio de u tal que u e v coincidam no domínio de u.

Nosso próximo passo será estudar a existência de soluções maximais e suas propriedades, com o objetivo de encontrar um critério que implique que o intervalo da solução maximal seja o intervalo $[-p, a]$. Isto garantirá a existência de solução global para o problema (2.12).

Inicialmente, vale reforçar que, do estudo de prolongamento acima, para uma solução $u_1 \in C_{Lip}([-p, b_1]; \mathbb{R}^n)$ de (2.12), podemos encontrar uma solução $u_2 \in C([-p, b_2]; \mathbb{R}^n)$ de (2.12) tal que $b_2 > b_1$ e $u_1 = u_2$ em $[-p, b_1]$. Além disso, nesse estudo vimos que é fundamental o fato de que $u_1 \in C_{Lip}([-p, b_1]; \mathbb{R}^n)$. Mais adiante veremos que, este fato e o Lema de Zorn, garantem que existe uma solução maximal $u : I_{max} \subset [-p, a] \to \mathbb{R}^n$ de (2.12).

A seguir, admitindo a existência de solução maximal Lipschitz provaremos que existe uma solução global de (2.12).

Teorema 56. *Se $u \in C(I_{max}; \mathbb{R}^n)$ é uma solução maximal do problema (2.12), u é Lipschitz e $\sigma(s, z) \leqslant s$, para todo $s \in [0, a]$ e todo $z \in \mathbb{R}^n$, então $I_{max} = [-p, a]$. Ou seja, existe uma solução global de (2.12).*

Demonstração. Suponhamos que $I_{max} \neq [-p, a]$. Então, as seguintes opções são possíveis:

1. $I_{max} = [-p, b_\varphi]$, com $b_\varphi < a$.

   Neste caso, temos que u é Lipschitz em $[-p, b_\varphi]$, com $b_\varphi < a$. Logo, usando os teoremas de prolongamento de solução provados anteriormente, podemos encontrar uma nova solução $v \in C_{Lip}([-p, b_\varphi + \delta]; \mathbb{R}^n)$, com $\delta > 0$ e $b_\varphi + \delta < a$, do problema (2.12), onde $u = v$ em $[-p, b_\varphi]$. E isto é uma contradição, pois u é uma solução maximal do problema (2.12).

2. $I_{max} = [-p, b_\varphi)$, com $b_\varphi < a$.

   Neste caso, temos que u é Lipschitz em $[-p, b_\varphi)$, com $b_\varphi < a$, o que implica que $\lim_{t \to b_\varphi^-} u(t)$ existe. De fato, seja $t_n = b_\varphi - \frac{1}{n}$. É claro que $t_n \to b_\varphi$ quando $n \to \infty$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, podemos fixar $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $[u]_{Lip}\frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Logo, para $n, m > N_\varepsilon$ temos que

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u(t_m)\| &\leqslant [u]_{Lip}|t_n - t_m| \\ &\leqslant [u]_{Lip}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) \\ &\leqslant [u]_{Lip}\frac{2}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

   ou seja,

$$\|u(t_n) - u(t_m)\| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N_\varepsilon,$$

   o que implica que $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente em $\mathbb{R}^n$. Logo, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} u(t_n) = x.$$

Dessa forma, observando que para $t < b_\varphi$

$$\begin{array}{rcl} \|u(t) - x\| & \leqslant & \|u(t) - u(t_n)\| + \|u(t_n) - x\| \\ & \leqslant & [u]_{Lip}|t - t_n| + \|u(t_n) - x\|, \end{array}$$

obtemos que

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t \to b_\varphi^-} \|u(t) - x\| & \leqslant & \lim\limits_{t \to b_\varphi^-} ([u]_{Lip}|t - t_n| + \|u(t_n) - x\|) \\ & \leqslant & [u]_{Lip}|b_\varphi - t_n| + \|u(t_n) - x\| \\ & \leqslant & [u]_{Lip}\dfrac{1}{n} + \|u(t_n) - x\|, \end{array}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, como

$$\lim_{n \to \infty} ([u]_{Lip}\frac{1}{n} + \|u(t_n) - x)\|) = 0,$$

podemos concluir que

$$\lim_{t \to b_\varphi^-} \|u(t) - x\| = 0,$$

e, portanto, que

$$\lim_{t \to b_\varphi^-} u(t) = x.$$

Agora, definimos a função $w : [-p, b_\varphi] \to \mathbb{R}^n$ por

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [-p, b_\varphi), \\ x, & t = b_\varphi. \end{cases}$$

Mostremos que w é Lipschitz e é uma solução do problema (2.12). De fato, é fácil verificar que w é uma função Lipschitz. Além disso, para $t \in [0, b_\varphi)$

$$w(t) = u(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau))))\ d\tau.$$

Agora, para $t = b_\varphi$ temos que

$$\begin{array}{rcl} w(b_\varphi) & = & \lim\limits_{t \to b_\varphi^-} u(t) \\ & = & \lim\limits_{t \to b_\varphi^-} [\varphi(0) + \displaystyle\int_0^t f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau))))\ d\tau] \\ & = & \varphi(0) + \lim\limits_{t \to b_\varphi^-} \displaystyle\int_0^t f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau))))\ d\tau. \end{array}$$

Logo, se tivermos que

$$\lim_{t \to b_\varphi^-} \int_0^t f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau))))\ d\tau = \int_0^{b_\varphi} f(\tau, w(\sigma(\tau, w(\tau))))\ d\tau, \tag{2.15}$$

então,

$$w(b_\varphi) = \varphi(0) + \int_0^{b_\varphi} f(\tau, w(\sigma(\tau, w(\tau))))\ d\tau,$$

e podemos concluir que w é uma solução do problema (2.12).

A seguir provaremos que a igualdade (2.15) é verdadeira. De fato, lembrando que $\sigma(s,z) \leqslant s$, para todo $s \in [0,a]$ e notando que a função $f(\cdot, w(\sigma(\cdot, w(\cdot))))$ é contínua em $[0, b_\varphi]$ e que isto implica que $\sup_{\tau\in[0,b_\varphi]} \|f(\tau, w(\sigma(\tau, w(\tau))))\|$ é finito, temos que

$$\begin{aligned}
\| \int_0^{b_\varphi} f(\tau, w(\sigma(\tau, w(\tau))))\, d\tau - \int_0^{t} f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau))))\, d\tau \| & \\
\leqslant \int_t^{b_\varphi} \|f(\tau, w(\sigma(\tau, w(\tau))))\|\ d\tau & \\
\leqslant \sup_{\tau\in[0,b_\varphi]} \|f(\tau, w(\sigma(\tau, w(\tau))))\|(b_\varphi - t), &
\end{aligned}$$

o que permite concluir que o limite (2.15) é verdadeiro.

Dessa forma, temos que w é uma solução Lipschitz do problema (2.12) em $[-p, b_\varphi]$, o que implica, das observações anteriores, que u não é uma solução maximal de (2.12) e isto é uma contradição.

3. $I_{max} = [-p, b_\varphi)$, com $b_\varphi = a$.

   Neste caso, temos que u é Lipschitz em $I_{max} = [-p, a)$. Logo, usando o mesmo argumento do Caso 2 acima, podemos provar que $\lim_{t\to a^-} u(t)$ existe e que a função $w : [-p, a] \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & , \quad t \in [-p, a), \\ \lim_{t\to a^-} u(t) & , \quad t = a, \end{cases}$$

   é uma solução Lipschitz do problema (2.12) em $[-p, a]$, o que implica que u não é uma solução maximal de (2.12) e isto é uma contradição.

Do estudo acima, concluímos que $b_\varphi = a$ e que $I_{max} = [-p, a]$. Ou seja, existe uma solução global de (2.12).

■

No resultado anterior assumimos, além da existência de solução maximal, que esta solução era uma função Lipschitz. Assim, é natural a seguinte pergunta.

Pergunta: Sob quais condições a solução maximal do problema (2.12) é uma função Lipschitz?

Teorema 57. *Suponha que $f : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$ e $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ sejam funções Lipschitz e que $\sigma(s,z) \leqslant s$, para todo $s \in [0,a]$ e todo $z \in \mathbb{R}^n$. Se $u \in C(I_{max}; \mathbb{R}^n)$ é uma solução maximal do problema (2.12), então u é uma função Lipschitz.*

Demonstração. Seja $u : I_{max} \subset [-p, a] \to \mathbb{R}^n$ a solução maximal de (2.12). Vejamos inicialmente que $u(\cdot)$ é limitada em I_{max}. Para isto notemos que para $s \in I_{max}$, com $s \geqslant 0$ temos

$$\begin{aligned}
\|u(s)\| &\leqslant \|\varphi(0)\| + \int_0^s \|f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau))))\| \, d\tau \\
&\leqslant \|\varphi(0)\| + \int_0^s \|f(\tau, 0)\| \, d\tau + \int_0^s \|f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau)))) - f(\tau, 0)\| \, d\tau \\
&\leqslant \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a + [f]_{Lip} \int_0^s \|u(\sigma(\tau, u(\tau)))\| \, d\tau \\
&\leqslant \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a + [f]_{Lip} \int_0^s \sup_{\theta \in [-p,\tau]} \|u(\theta)\| \, d\tau \\
&\leqslant \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a + [f]_{Lip} \int_0^s \|u\|_{C([-p,\tau];\mathbb{R}^n)} \, d\tau \\
&\leqslant \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a + [f]_{Lip} \int_0^s (\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^n)}) \, d\tau.
\end{aligned}$$

Dessa forma, supondo que $I_{max} = [-p, b_\varphi)$ e fixando $t \in [0, b]$, com $b < b_\varphi$, temos que para todo $s \in [0, t]$

$$\begin{aligned}
\|u(s)\| &\leqslant \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a + [f]_{Lip} \int_0^s (\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,\tau]);\mathbb{R}^n)} \, d\tau \\
&\leqslant \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a + [f]_{Lip} \int_0^t (\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^n)}) \, d\tau,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|u\|_{C([0,t])} \leqslant \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a + [f]_{Lip} \int_0^t (\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^n)}) \, d\tau.$$

Ou seja, temos que para todo $t \in [0, b]$

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,t])} &\leqslant \|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a \\
&\quad + [f]_{Lip} \int_0^t (\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^n)}) \, d\tau \\
&= \alpha + \int_0^t [f]_{Lip} (\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^n)}) \, d\tau,
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|\varphi(0)\| + \sup_{\tau \in [0,a]} \|f(\tau, 0)\| \, a$. Logo, pela Desigualdade de Gronwall segue que

$$\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,t];\mathbb{R}^n)} \leqslant \alpha e^{[f]_{Lip} a}, \qquad \forall \, t \in [0, b],$$

e, como $b < b_\varphi$ é arbitrário e α é independente de t, concluímos que

$$\|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,t];\mathbb{R}^n)} \leqslant \alpha e^{[f]_{Lip} a}, \qquad \forall \, t \in [0, b_\varphi).$$

Isto permite concluir que $u(\cdot)$ é uma função limitada em $[-p, b_\varphi)$, pois para todo $\bar{t} \in [-p, b_\varphi)$ temos que

$$\|u(\bar{t})\| \leqslant \|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C([0,\bar{t}];\mathbb{R}^n)} \leqslant \alpha e^{[f]_{Lip}a}.$$

Logo, para $t \in [0, b_\varphi)$, segue que

$$\begin{aligned} \|u'(t)\| &= \|f(t, u(\sigma(t, u(t))))\| \\ &\leqslant \|f(t, u(\sigma(t, u(t)))) - f(0,0)\| + \|f(0,0)\| \\ &\leqslant [f]_{Lip}(t + \|u(\sigma(t, u(t)))\|) + \|f(0,0)\| \\ &\leqslant [f]_{Lip}(a + \alpha e^{[f]_{Lip}a}) + \|f(0,0)\|, \end{aligned}$$

o que mostra que $u'(\cdot)$ é uma função limitada em $[0, b_\varphi)$. Com isso, podemos concluir que $u(\cdot)$ é uma função Lipschitz em $[-p, b_\varphi)$. De fato, em $[-p, 0]$ temos que $u = \varphi$ e φ é uma função Lipschitz. Agora, para $t \in [0, b_\varphi)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in [0, b_\varphi)$,

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\| &\leqslant \int_t^{t+h} \|u'(\tau)\|\, d\tau \\ &\leqslant ([f]_{Lip}(a + \alpha e^{[f]_{Lip}a}) + \|f(0,0)\|)h. \end{aligned}$$

Logo, $u(\cdot)$ é uma função Lipschitz em $[-p, b_\varphi)$.

Note que para o caso $I_{max} = [-p, b_\varphi]$ não há o que fazer, pois as limitações de $u(\cdot)$ neste intervalo e de $u'(\cdot)$ em $[0, b_\varphi]$ serão diretamente obtidas.

Assim, concluímos que a solução maximal $u : I_{max} \subset [-p, a] \to \mathbb{R}^n$ de (2.12) é uma função Lipschitz, o que completa a prova.

■

Finalmente, para que os dois últimos resultados façam sentido, falta garantirmos a existência de uma solução maximal do problema (2.12), o que será feito no próximo resultado a partir dos resultados de prolongamento de solução no ínicio desta seção e de algumas condições sobre as funções f, φ e σ.

Teorema 58. *Suponha que $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$ e $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ sejam funções Lipschitz e que $\sigma(s, z) \leqslant s$, para todo $s \in [0, a]$ e todo $z \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma única solução maximal $u : I_{\max} \mapsto \mathbb{R}^n$ de (2.12).*

Demonstração. Para mostrar a existência de uma solução maximal, usaremos o Lema de Zorn. Suponha que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ seja uma cadeia ordenada de soluções do problema (2.12) no seguinte sentido: $u_\lambda \leqslant u_\gamma$ se o domínio D_{u_λ} de u_λ está contido no domínio D_{u_γ} de u_γ e $u_\lambda = u_\gamma$ em D_{u_λ}. Definindo a função $u : \cup_{\lambda \in \Omega} D_{u_\lambda} \mapsto \mathbb{R}^n$ por $u(t) = u_\lambda(t)$ se $t \in D_{u_\lambda}$, obtemos uma solução de (2.12) tal que $u_\lambda \leqslant u$ para todo $\lambda \in \Omega$. Isto permite usar o Lema de Zorn, garantindo que existe uma solução maximal $u : I_{\max} \mapsto \mathbb{R}^n$ do problema (2.12).

Para finalizar, mostremos que $u(\cdot)$ é a única solução maximal. Suponhamos que $w : I_{\max,w} \mapsto \mathbb{R}^n$ seja uma solução maximal e que $I_{\max} \subset I_{\max,w}$. Seja $b > 0$ tal que $[0, b] \subset I_{\max}$. Para $s \in [0, b]$ temos que

$$\|w(s) - u(s)\| \leqslant \int_0^s \|f(\tau, u(\sigma(\tau, u(\tau)))) - f(\tau, w(\sigma(\tau, w(\tau))))\|\, d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant [f]_{Lip}\int_0^s \|u(\sigma(\tau,u(\tau))) - w(\sigma(\tau,w(\tau)))\|\ d\tau\\
&\leqslant [f]_{Lip}\int_0^s \|u(\sigma(\tau,u(\tau))) - w(\sigma(\tau,u(\tau)))\|\ d\tau\\
&\quad + [f]_{Lip}\int_0^s \|w(\sigma(\tau,u(\tau))) - w(\sigma(\tau,w(\tau)))\|\ d\tau\\
&\leqslant [f]_{Lip}\int_0^s \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)-w(\theta)\|\ d\tau\\
&\quad + [f]_{Lip}[w]_{Lip([0,b])}[\sigma]_{Lip}\int_0^s \|u(\tau)-w(\tau)\|\ d\tau\\
&\leqslant [f]_{Lip}\int_0^s \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)-w(\theta)\|\ d\tau\\
&\quad + [f]_{Lip}[w]_{Lip([0,b])}[\sigma]_{Lip}\int_0^s \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)-w(\theta)\|\ d\tau\\
&\leqslant [f]_{Lip}(1+[w]_{Lip([0,b])}[\sigma]_{Lip})\int_0^s \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)-w(\theta)\|\ d\tau.
\end{aligned}
$$

Logo, fixado $t \in [0,b]$ temos que para todo $s \in [0,t]$

$$
\begin{aligned}
\|w(s)-u(s)\| &\leqslant [f]_{Lip}(1+[w]_{Lip([0,b])}[\sigma]_{Lip})\int_0^s \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)-w(\theta)\|\ d\tau\\
&\leqslant [f]_{Lip}(1+[w]_{Lip([0,b])}[\sigma]_{Lip})\int_0^t \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)-w(\theta)\|\ d\tau,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$
\sup_{s\in[0,t]}\|w(s)-u(s)\| \leqslant [f]_{Lip}(1+[w]_{Lip([0,b])}[\sigma]_{Lip})\int_0^t \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)-w(\theta)\|\ d\tau,
$$

ou seja,

$$
\|w-u\|_{C([0,t];\mathbb{R}^n)} \leqslant [f]_{Lip}(1+[w]_{Lip([0,b])}[\sigma]_{Lip})\int_0^t \|w-u\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^n)}\ d\tau,
$$

para todo $t \in [0,b]$, o que nos permite concluir, pela desigualdade de Gronwall, que $u = w$ em $[0,b]$. Como b é arbitrário segue que $u = w$ em D_u. Mais ainda, como $u(\cdot)$ é uma solução maximal, segue que $I_{\max} = I_{\max,w}$.

Se $I_{\max,w} \subset I_{\max}$, podemos usar o mesmo argumento anterior para mostrar que $u = w$ em D_w e que $I_{\max} = I_{\max,w}$. Isto completa a prova.

■

Note que dos três resultados acima podemos concluir diretamente o seguinte corolário.

Corolário 59. *Suponha que $f : [0,a]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,a]\times\mathbb{R}^n \to [-p,a]$ e $\varphi : [-p,0] \to \mathbb{R}^n$ sejam funções Lipschitz e que $\sigma(s,z) \leqslant s$, para todo $s \in [0,a]$ e todo $z \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma única solução global $u \in C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R}^n)$ de (2.12).*

2.5 Existência e Unicidade de Soluções para Equações Neutras Explícitas com Memória Dependendo do Estado

Nesta seção estudaremos a existência e unicidade de solução para a equação

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x'(\sigma(t, x(t)))), \ \ t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \ \ \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{2.16}$$

onde $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : [-p, 0] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to [-p, a]$.

A equação (2.16) é chamada de **equação diferencial neutra explícita com memória dependendo do estado**.

É importante observar que os estudos desenvolvidos nas seções anteriores deste capítulo foram base para o resultado que será apresentado nesta seção para o problema (2.16).

Antes de enunciar e provar nosso próximo teorema, vamos apresentar um exemplo simples de uma equação neutra explícita com memória dependendo do estado onde as funções $f(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são localmente Lipschitz e o problema tem mais de uma solução. Este fato, que é uma das grandes motivações para o desenvolvimento da teoria das equações diferenciais com memória dependendo do estado, nos permitirá compreender as hipóteses que utilizaremos no nosso próximo resultado. Este exemplo foi apresentado na conferência de Driver [2].

Considere a equação com memória dependendo do estado

$$\begin{cases} x'(t) = -x'(t - \frac{x^2(t)}{4}), \quad t \in [0, \infty) \\ x(t) = \varphi(t) = 1 - t, \quad\ \ t \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Para representar este problema na forma (2.16), definimos $f(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ por $f(t, x) = -x$ e $\sigma(t, x) = t - \frac{x^2}{4}$. É fácil ver que $f(\cdot)$ é Lipschitz e que $\sigma(\cdot)$ é localmente Lipschitz. Além disso, não é difícil verificar que as funções

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \leqslant 0 \\ 1 + t, & t \in [0, 1], \\ 1 + t, & t \in \left(1, \frac{3}{2}\right), \end{cases} \qquad\qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \leqslant 0 \\ 1 + t, & t \in [0, 1], \\ 3 - t, & t \in \left(1, \frac{3}{2}\right), \end{cases}$$

são solucões diferentes do problema (2.17) no intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right)$. De fato, para a função $x_1(\cdot)$ basta observar que para todo $t > 0$ teremos que $t - \frac{x_1^2(t)}{4} < 0$. Já para a função $x_2(\cdot)$ podemos verificar que para $t \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ teremos que $0 < t - \frac{x_2^2(t)}{4} < 1$.

Como já notamos anteriormente, o modelo (2.16) é o que deu origem à teoria das equações com memória dependendo do estado e para este modelo podemos considerar a seguinte definição de solução.

Definição 60. *Uma função $x \in C([-p, a]; \mathbb{R}^n)$ é solução de (2.16) se $x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$ e*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x'(\sigma(\tau, x(\tau)))) \, d\tau, \ \ t \in [0, a].$$

Novamente, devido às características da teoria de equações com memória dependendo do estado, no resultado a seguir estudaremos a existência e unicidade de solução utilizando o princípio da contração de Banach.

Observação 61. No teorema abaixo assumiremos as condições do Teorema 51 e para $b \in [0, a]$ usaremos as notações

$$[f]_{C_{Lip,b}} = [f]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \quad \text{e} \quad [\sigma]_{C_{Lip,b}} = [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathbb{R}^n;[-p,b])}.$$

Teorema 62. *Suponha que as condições do Teorema 51 sejam verificadas e que* $\varphi'(0) = f(0, \varphi'(\sigma(0, \varphi(0))))$. *Suponha ainda que* $\varphi' \in C_{Lip}([-p, 0]; \mathbb{R}^n)$ *e que*

$$\lim_{b\to 0} [f]_{C_{Lip,b}} < 1 \quad e \quad \lim_{b\to 0} [f]_{C_{Lip,b}} [\sigma]_{C_{Lip,b}} = 0. \tag{2.18}$$

Então, existe uma única solução $x \in C_{Lip}([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ *do problema (2.16), para algum* $b \in [0, a]$.

Demonstração. Usando que $\lim_{b\to 0} [f]_{C_{Lip,b}} < 1$, podemos fixar $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$[\varphi']_{C_{Lip}} + \| \varphi'(0) \| + \| f(\cdot, \varphi'(0))\|_{C([0,a];\mathbb{R}^n)} + [f]_{C_{Lip,b}} R < R.$$

Mais ainda, usando que $\lim_{b\to 0} [f]_{C_{Lip,b}} [\sigma]_{C_{Lip,b}} = 0$, podemos fixar $0 < b < a$ tal que

$$\begin{aligned} [\varphi']_{C_{Lip}} + \| \varphi'(0) \| + \| f(\cdot, \varphi'(0))\|_{C([0,a];\mathbb{R}^n)} + [f]_{C_{Lip,b}} R & \\ + [f]_{C_{Lip,b}} R [\sigma]_{C_{Lip,b}} (1 + Rb + R) &< R, \\ [f]_{C_{Lip,b}} (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1)(b + 1) &< 1. \end{aligned}$$

Agora, considerando o conjunto

$$S = \{x \in C^1([-p, b]; \mathbb{R}^n);\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-p, 0],\ [x']_{Lip} \leqslant R\},$$

munido da métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} + \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)},$$

definimos a função $\Gamma : S \to C^1([-p, b] : \mathbb{R}^n)$ por $\Gamma x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$ e

$$\Gamma x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x'(\sigma(\tau, x(\tau))))d\tau, \text{ para } t \in [0, b].$$

Note que Γ está bem definida, pois, por hipótese, $\sigma(\tau, x(\tau))) \leqslant \tau \leqslant b$, o que implica que $x'(\sigma(\tau, x(\tau)))$ está bem definida. Mais ainda, é simples notar que, por exemplo, a função $x : [-p, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ dada por $x(\theta) = \varphi(\theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$ e $x(t) = t\varphi'(0) + \varphi(0)$ para $t \in [0, b]$ pertence a S, o que implica que $S \neq \varnothing$. Além disso, procedendo como na demostração do Teorema 51, podemos provar que S é um subespaço fechado de $C^1([-p, b]; \mathbb{R}^n)$. Logo, resta mostrarmos que $\Gamma(S) \subset S$ e, em seguida, que $\Gamma : S \to S$ é uma contração.

Para mostrarmos que $\Gamma(S) \subset S$ notamos primeiro que a partir da condição $\varphi'(0) = f(0, \varphi'(\sigma(0, \varphi(0))))$, é fácil mostrar que para $x \in S$ temos que $(\Gamma x)'$ existe, é uma função contínua em $[-p, b]$ e

$$(\Gamma x)'(t) = f(t, x'(\sigma(t, x(t)))), \quad \forall\, t \in [0, b]. \tag{2.19}$$

Logo, basta provarmos que para $x \in S$,

$$\|(\Gamma x)'(t) - (\Gamma x)'(s)\| \leqslant R\,|t - s|,$$

para todos $t, s \in [-p, b]$. Para isto, dado $x \in S$ devemos analisar os seguintes casos:

1. $t, s \in [-p, 0]$.

   Neste caso, é claro que

$$\|(\Gamma x)'(t) - (\Gamma x)'(s)\| = \|\varphi'(t) - \varphi'(s)\| \leqslant [\varphi']_{C_{Lip}}\,|t - s| \leqslant R\,|t - s|.$$

2. $t, s \in [0, b]$, $t > s$.

   Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}
&\|(\Gamma x)'(t) - (\Gamma x)'(s)\| \\
&\quad = \|f(t, x'(\sigma(t, x(t)))) - f(s, x'(\sigma(s, x(s))))\| \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + \|x'(\sigma(t, x(t))) - x'(\sigma(s, x(s)))\|) \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + [x']_{C_{Lip}}|\sigma(t, x(t)) - \sigma(s, x(s))|) \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + R[\sigma]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + \|x(t) - x(s)\|)) \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + R[\sigma]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + \int_s^t \|x'(\tau)\| d\tau)) \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + R[\sigma]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + \int_s^t (\|x'(\tau) - \varphi'(0)\| + \|\varphi'(0)\|) d\tau)) \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + R[\sigma]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + \int_s^t ([x']_{C_{Lip}}\tau + R) d\tau)) \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + R[\sigma]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + \int_s^t (R\tau + R) d\tau)) \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + R[\sigma]_{C_{Lip,b}}(|t - s| + (Rb + R)(t - s))) \\
&\quad \leqslant ([f]_{C_{Lip,b}} + [f]_{C_{Lip,b}} R[\sigma]_{C_{Lip,b}}(1 + Rb + R))|t - s| \\
&\quad \leqslant R|t - s|.
\end{aligned}$$

3. $s \in [-p, 0]$ e $t \in [0, b]$.

   Neste caso, basta observarmos que

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma x)'(t) - (\Gamma x)'(s)\| &\leqslant \|(\Gamma x)'(t) - (\Gamma x)'(0)\| + \|(\Gamma x)'(0) - (\Gamma x)'(s)\| \\
&\leqslant Rt + R(-s) = R|t - s|.
\end{aligned}$$

Ou seja, dado $x \in S$, temos que

$$\|(\Gamma x)'(t) - (\Gamma x)'(s)\| \leqslant R\,|t - s|,$$

para todos $t, s \in [-p, b]$, o que prova que $[(\Gamma x)']_{Lip} \leqslant R$. Portanto, $\Gamma(S) \subset S$.

Mostremos agora que $\Gamma : S \to S$ é uma contração. Sejam $x, y \in S$ e $t \in [0, b]$. Então, usando (2.19) temos que

$$\begin{aligned}
&\|(\Gamma x)'(t) - (\Gamma y)'(t)\| \\
&\quad \leqslant \|f(t, x'(\sigma(t, x(t)))) - f(t, y'(\sigma(t, y(t))))\| \\
&\quad \leqslant \|f(t, x'(\sigma(t, x(t)))) - f(t, x'(\sigma(t, y(t))))\| \\
&\qquad + \|f(t, x'(\sigma(t, y(t)))) - f(t, y'(\sigma(t, y(t))))\| \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} \|x'(\sigma(t, x(t))) - x'(\sigma(t, y(t)))\| \\
&\qquad + [f]_{C_{Lip,b}} \|x'(\sigma(t, y(t))) - y'(\sigma(t, y(t)))\| \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} [x']_{C_{Lip}} |\sigma(t, x(t)) - \sigma(t, y(t))| + [f]_{C_{Lip,b}} \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} R [\sigma]_{C_{Lip,b}} \|x(t) - y(t)\| + [f]_{C_{Lip,b}} \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} R [\sigma]_{C_{Lip,b}} b \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} + [f]_{C_{Lip,b}} \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1) \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|(\Gamma x)' - (\Gamma y)'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1) \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}.$$

Mais ainda, observando que $\|\Gamma x - \Gamma y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \leqslant b \|(\Gamma x)' - (\Gamma y)'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}$, concluímos da desigualdade acima que

$$\|\Gamma x - \Gamma y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} b (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1) \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma x - \Gamma y\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} + \|(\Gamma x)' - (\Gamma y)'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} b (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1) \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad\quad + [f]_{C_{Lip,b}} (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1) \|x' - y'\|_{C([0,b];\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1)(b + 1) d(x, y),
\end{aligned}$$

o que permite concluir que

$$d(\Gamma x, \Gamma y) \leqslant [f]_{C_{Lip,b}} (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1)(b + 1) d(x, y).$$

Como $[f]_{C_{Lip,b}} (R[\sigma]_{C_{Lip,b}} b + 1)(b + 1) < 1$, podemos concluir que $\Gamma : S \to S$ é uma contração, o que implica que Γ tem um único ponto fixo. Portanto, existe uma única solução $x \in C_{Lip}([-p, b]; \mathbb{R}^n)$ do problema (2.16). Isto completa a nossa demonstração. ■

Como foi observado na Introdução deste trabalho, o teorema acima é inédito e, apesar da demonstração apresentada ser relativamente simples, pode ser considerado interessante para a teoria de equações neutras explícitas com memória dependendo do estado, pois, por exemplo, os trabalhos pioneiros sobre equações neutras explícitas [2, 8], apresentam resultados de unicidade para o modelos da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma_1(t, x(t))), x'(\sigma_2(t))), & t \in [0, a], \\ x_0 = \varphi \in C([-p, 0]; \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

o que claramente simplifica o problema das equações neutras explícitas com memória dependendo do estado.

Bibliografia

[1] Cooke, Kenneth L. Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = -au(t - r(u(t)))$. *J. Math. Anal. Appl.* 19 (1967), 160-173.

[2] Driver, R.D., A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics, in: J. LaSalle, S. Lefschtz (Eds.), International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press, New York, 1963, pp. 474-484.

[3] Driver, R.D., A neutral system with state-dependent delay. *J. Differential Equations* 54 (1984) 73-86.

[4] Driver, R.D., Delay-differential equations and an application to a two-body problem of classical electrodynamics. Thesis (Ph.D.)-University of Minnesota. 1960. 63 pp,

[5] Dunkel, Gregory M. On nested functional differential equations. *SIAM J. Appl. Math.* 18 (1970), 514-525.

[6] E; Hernández., M. Pierri., J. Wu. $\mathbf{C^{1+\alpha}}$-strict solutions and wellposedness of abstract differential equations with state dependent delay. *J. Differential Equations* 261, (2016) 12, 6856-6882.

[7] Eder, E. The functional-differential equation $x'(t) = x(x(t))$. *J. Differential Equations* 54 (1984), no. 3, 390-400.

[8] Grimm, L. J. Existence and continuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 29 (1971), 467-473.

[9] Grimm, L. J. Existence and uniqueness for nonlinear neutral-differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 77 (1971), 374-376. 34.75

[10] J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, Krieger Publishing Co., Inc., 1980.

[11] Hartung, F., Krisztin, T., Walther, Hans-Otto., Wu, J. *Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications.* Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. III, 435-545, Handb. Differ. Equ.

[12] H-O. Walther., The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay. J. Differential Equations 195 (2003), no. 1, 46-65. `doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.001`.

[13] Jackiewicz, Z. Existence and uniqueness of solutions of neutral delay-differential equations with state dependent delays. *Funkcial. Ekvac.* 30 (1987), no. 1, 9-17.

[14] Oberg, R. J. On the local existence of solutions of certain functional-differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1969), 295-302.

[15] Teschl, G. Ordinary differential equations and dynamical systems. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 140.

[16] Walther, Hans-Otto. A finite atlas for solution manifolds of differential systems with discrete state-dependent delays. *Differential and Integral Equations* 35.5/6 (2022): 241-276.

[17] Walther, Hans-Otto. Dense Short Solution Segments from Monotonic Delayed Arguments. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2021), 1-34.

[18] Walther, Hans-Otto. Solution manifolds which are almost graphs. *Journal of Differential Equations*, v. 293, p. 226-248, 2021.