UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Limitação de operadores fortemente de Calderón-Zygmund em espaços de Hardy

Pablo Andre Ramirez Liza

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Matemática.

Ribeirão Preto-SP
2024

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁ?TICA

Limitação de operadores fortemente de Calderón-Zygmund em espaços de Hardy

Pablo Andre Ramirez Liza

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon.

Ribeirão Preto-SP
2024

versão corrigida

Ramirez Liza, Pablo Andre
Limitação de operadores fortemente de Calderón-Zygmund em espaços de Hardy
Ribeirão Preto, 2024.
156 p. : il. ; 30 cm

Dissertação de Mestrado, apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto/USP. Área de concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Tiago H. Picon

1. Espaços de Hardy. 2. Decomposição atômica
3. Moléculas e operadores de Calderón-Zygmund.

Agradecimentos

A minha família pelo apoio incondicional e grande incentivo, em especial aos meus avós Cesar e Nery pelo seu carinho e cuidado, a minha mãe Cecilia pelas chamadas telefônicas cada semana durante na pós-graduação, meus tios e meus irmãos.

Ao Prof. Dr. Tiago Henrique Picon pelo seu apoio como pessoa e orientador, pelas aulas necessárias oferecidas, pelos seminários e reuniões, pelas correções feitas no andamento do projeto.

A todos os professores do DCM/FFCLRP-USP pelo seu apoio e seu cálido recebimento.

Ao povo de Ribeirão Preto e São Carlos pela gentileza e hospitalidade mostrada a mim como cidadão estrangeiro.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo 2022/00874-0 pelo apoio financeiro.

À minha mãe e ao meu avô que faleceram no ano passado.

“Em matemática, muitas vezes é mais importante compreender porque é que algo é verdadeiro do que simplesmente saber que é verdade”
Terence Tao

Limitação de operadores fortemente de Calderón-Zygmund em espaços de Hardy

Resumo: Nesta dissertação iremos estudar a limitação de operadores fortemente Calderón-Zygmund do tipo σ em espaços de Hardy $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ introduzidos por J. Alvarez & M. Milman baseado no artigo intitulado *"A note on Hardy continuity properties of strongly singular Calderón-Zygmund-type operators"* de C. Vasconcelos & T. Picon [28]. Um estudo sobre os espaços de Hardy e BMO no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ incluindo caracterizações maximais, decomposição atômica e dualidade também é apresentado.

Palavras chave: espaços de Hardy, decomposição atômica, moléculas e operadores de Calderón-Zygmund.

Boundedness of strongly singular Calderón-Zygmund operators in Hardy spaces

Abstract: In this dissertation, we will study the boundedness of strongly singular Calderón-Zygmund operators of type σ in Hardy spaces $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ introduced by J. Alvarez & M. Milman based on the paper entitled *"A note on Hardy continuity properties of strongly singular Calderón-Zygmund-type operators"* due to C. Vasconcelos & T. Picon [28]. A study on Hardy and BMO spaces in the euclidian space $\mathbb{R}^n$ including maximum characterizations, atomic decomposition and duality is also presented.

Keywords: Hardy spaces, atomic decomposition, molecules, Calderón-Zygmund operators.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Preliminares **7**
- 1.1 Tópicos de Teoria da Medida 7
- 1.2 Tópicos de Análise Funcional 13
- 1.3 Espaço de Distribuições 15
- 1.4 Transformada de Fourier em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 19
- 1.5 Tópicos de Análise Harmônica 20
  - 1.5.1 Função Maximal de Hardy-Littlewood 25

2 Espaços de Hardy **31**
- 2.1 Teorema de Caracterização Maximal dos espaços de Hardy 31
- 2.2 Propriedades do espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ 50
- 2.3 Teorema da decomposição de Calderón-Zygmund 57
- 2.4 Teorema de Decomposição Atômica em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ 72

3 Espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ **87**
- 3.1 Definição e Propriedades 87
- 3.2 Dualidade do espaço $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e a relação com $BMO(\mathbb{R}^n)$ 91

4 Limitação de operadores fortemente CZ em espaços de Hardy **95**
- 4.1 Moléculas 99
- 4.2 Prova do Teorema 4.0.1 114
- 4.3 Limitação em espaços de Hardy com peso 125

5 Apêndice **135**
- 5.1 Estimativas e lemas técnicos 135

Bibliografia **141**

Introdução

A teoria dos espaços de Hardy tem origem no início do século **XX** com o estudo sobre a caracterização de valores de fronteira de funções holomorfas $F : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ no disco unitário $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Em 1915, G. Hardy no artigo [16] estudou o comportamento de funções da forma

$$\mu_p(F;r) \doteq \left(\int_0^{2\pi} |F(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p < \infty \text{ e } 0 \leqslant r < 1,$$

com atenção especial ao princípio do módulo máximo. Em 1923, F. Riesz no artigo [24] considerou o conjunto

$$\mathbf{H}^p(\mathbb{D}) \doteq \left\{ F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa } : \sup_{0<r<1} \|\mu_p(F;r)\|_{L^p([0,2\pi))} < \infty \right\},$$

e investigou a existência do valor de fronteira da função

$$f(e^{it}) = \lim_{r \nearrow 1} \left\{ F(re^{it}) \right\} \tag{1}$$

em quase todo ponto $t \in [0, 2\pi]$ (a notação utilizada $\mathbf{H}^p$ foi dada em homenagem a Hardy). Quando $1 < p < +\infty$, a função F pode ser reconstruída a partir de $f(e^{it}) = \lim_{r \nearrow 1} F(re^{it})$ pela integral de Poisson

$$F(re^{it}) = \int_0^{2\pi} P_r(e^{i(t-\theta)}) f(e^{i\theta}) d\theta, \tag{2}$$

no qual P_r é o núcleo de Poisson que satisfaz $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(e^{i\eta}) d\eta = 1$. F. Riesz demonstrou que para cada $f(e^{it}) \in L^p([0, 2\pi))$ a fórmula (2) define $F \in \mathbf{H}^p(\mathbb{D})$ e $\mu_p(F;r) \leqslant A_p \|f(e^{i\cdot})\|_{L^p([0,2\pi))}$ uniformemente para $0 \leqslant r < 1$, sendo $A_p > 0$ independente de f, e além disso o limite em (1) pode ser estendido em norma para $L^p([0, 2\pi))$. Dessa forma, cada $f(e^{it}) \in L^p([0, 2\pi))$ é identificada como o valor de fronteira da parte real de funções em $\mathbf{H}^p(\mathbb{D})$ no sentido de (1). Os espaços de Hardy evoluíram para outras caracterizações como $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^2_+)$ associado ao semi-plano superior $\mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{H}^p(\mathbb{R})$ associado a reta, além de outras extensões como $\mathbf{H}^p(\mathcal{X})$ para espaços $\mathcal{X}$ do tipo homogêneo desenvolvida por R. Coifman e G. Weiss em [8] (veja [10] para mais detalhes).

Na metade do século **XX**, com o desenvolvimento da Teoria de Calderón-Zygmund iniciado no artigo [9], os espaços de Hardy tiveram um novo desenvolvimento. Em 1972, C. Fefferman e E. Stein em [13], apresentaram uma extensão dos espaços de Hardy no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Nesse trabalho, os espaços de Hardy em $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, é apresentado via família de funções maximais que haviam sido apresentadas de maneira preliminar no artigo [5] de 1971 devido a Burkholder, Gundy e Silverstein. Conforme apresentado em [13], dizemos que uma distribuição temperada $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ pertence ao espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ quando existe $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \neq 0$ tal que

$$M_\varphi f(x) \doteq \sup_{t>0} |(\varphi_t * f)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

no qual $\varphi_t(x) \doteq t^{-n}\varphi(t^{-1}x)$. Além disso, $\|f\|_{\mathbf{H}^p} \doteq \|M_\varphi f\|_{L^p}$ define em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ uma p-norma (também chamada de quasi-norma) quando $0 < p < 1$ e uma norma quando $1 \leqslant p < +\infty$, que induz uma métrica (ajustada quando $0 < p < 1$) tornando o espaço completo. Como consequência, temos que os espaços $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ equivalem (em norma) os espaços de Lesbesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $1 < p < \infty$ e que $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço próprio de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (veja [26]). Os espaços de Hardy $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ são considerados ótimos substitutos dos espaços de Lesbesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, uma vez que estes espaços coincidem para $1 < p < \infty$ e o espaço dual de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$ não é trivialmente nulo (na verdade são os espaços de Lipschitz/Zygmund cuja ordem depende do valor de $0 < p < 1$). Os elementos dos espaços de Hardy $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ são distribuições temperadas para $0 < p < 1$ e funções $1 \leqslant p < \infty$. No artigo [12] de 1971, C. Fefferman demonstrou uma importante propriedade dos espaços de Hardy na reta quando $p = 1$: o dual do espaço de Hardy $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ é identificado com o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$, conhecido como o espaço de F. John e L. Nirenberg das funções de oscilação média limitada, apresentado no clássico artigo [20]. Na demonstração dessa identificação, Fefferman apresentou uma decomposição do espaço $\mathbf{H}^1(\mathbb{R})$ em funções elementares denominadas átomos. Em 1974, no artigo [6] R. Coifman apresenta um teorema de decomposição em funções elementares para $\mathbf{H}^1(\mathbb{R})$ denominado por teorema de decomposição atômica que foi estendido por R. Latter para o espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leqslant 1$ no artigo [21] de 1978. Precisamente, dizemos que uma função mensurável a é um $\mathbf{H}^p$ átomo ou simplesmente um $(p, +\infty)$-átomo quando

(i) a possui suporte contido numa bola $B \doteq B(x_0, r)$;

(ii) $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant |B|^{-\frac{1}{p}}$;

(iii) a satisfaz condições de momento

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)x^\alpha dx = 0, \qquad \forall\, |\alpha| \leqslant N_p \doteq \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right\rfloor.$$

O teorema de decomposição atômica provado por Latter afirma que dada $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ existe uma família de $(p, +\infty)$-átomos dada por $\{a_j\}_{j=1}^{+\infty}$ e escalares $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$ complexos tais que $f = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j a_j$ em norma $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ (e consequentemente em distribuição), e além disso a norma $\|f\|_{\mathbf{H}^p}$ é comparável a

$$\inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \ f = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j a_j\right\},$$

no qual o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições atômicas de f.

Entre as inúmeras aplicações do teorema de decomposição atômica citado anteriormente (veja [26]) podemos ilustrar sobre a limitação de operadores lineares $T : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Seja T um operador linear contínuo em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Podemos afirmar que se T é limitado uniformemente em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ sobre $(p, +\infty)$-átomos, então T é limitado em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ então $f = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j a_j$ (convergência em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$) no qual $\{a_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é uma sequência de $(p, +\infty)$-átomos e $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \ell^p(\mathbb{C})$ uma sequência de escalares. Usando o fato de T ser um operador linear, temos $T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j) = \sum_{j=1}^N \lambda_j T(a_j)$, e sendo $\left\{T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j)\right\}_{N=1}^{+\infty}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j) \longrightarrow g$ quando $N \to +\infty$. Segue pela continuidade do operador T e pela unicidade do limite em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ que $T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j) \longrightarrow Tf$ quando $N \to +\infty$. Consequentemente temos T um operador limitado em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. A recíproca deste resultado também é válida e mais fraca, isto é se T for um operador limitado em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ então T é uniformemente limitado em $(p, +\infty)$-átomos. Isto decorre imediatamente do fato que os $(p, +\infty)$-átomos são uniformemente limitados em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$.

Comentamos anteriormente que os espaços de Hardy coincidem com os espaços de Lebesgue quando $p > 1$ e que algumas propriedades sobre os espaços de Lebesgue podem ser transferidas para os espaços $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Como exemplo podemos citar os operadores de Calderón-Zygmund (veja [26]) limitados em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$ (em geral não são limitados em $L^1(\mathbb{R}^n)$) são limitados em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $p_0 < p \leqslant 1$ em que p_0 depende da ordem do núcleo de Calderón-Zygmund. Por exemplo, o operador Transformada de Riesz R_j definido pelo multiplicador $\widehat{R_j u}(\xi) = \dfrac{\xi_j}{|\xi|}\hat{u}(\xi)$ para $j = 1, ..., n$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$ e em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$, mas não é limitado em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

O estudo de operadores integrais singulares iniciou em meados da década de 50 com os trabalhos de Calderón e Zygmund (veja por exemplo [9]). Tais operadores surgiram naturalmente em Equações Diferenciais Parciais e foram extensivamente estudados no século passado. Uma classe especial desses operadores, também chamado a primeira geração de operadores de Caderón–Zygmund, que englobam operadores de convolução invariante por translação e generalização para operadores não convolutivos é devido a Coifman e Meyer [22, 23], e também são referendados como operadores de Calderón–Zygmund padrão (inclui a transformada de Riesz apresentada acima). Motivados pelo estudo de operadores multiplicador associado a símbolos do tipo $e^{i|\xi|^\sigma}/|\xi|^\beta$, estudado em [18, 29], e *operadores de convolução fracamente-fortemente singulares* introduzidos por C. Fefferman em [11], Álvarez & Milman em [1] introduziram operadores de Calderón–Zygmund fortemente singular não convolutivos estendendo os clássicos operadores de Calderón–Zygmund padrão. Esses operadores são mais singulares em comparação aos operadores de Calderón–Zygmund padrão e portanto a técnica canônica de provar limitação não pode ser aplicada diretamente nesse contexto. Além do mais, apesar da limitação em $L^2(\mathbb{R}^n)$, a continuidade de $L^q(\mathbb{R}^n)$ para $L^2(\mathbb{R}^n)$ em que

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{n}, \quad \text{para algum } (1-\sigma)\frac{n}{2} \leqslant \beta < \frac{n}{2}$$

é também requerida. No mencionado trabalho, Alvarez & Milman mostraram que operadores de Calderón–Zygmund fortemente singular cujo kernel satisfaz a regularidade do tipo Hölder

$$|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)| \leqslant C\frac{|y-z|^{\delta}}{|x-z|^{n+\frac{\delta}{\sigma}}}$$

para todo $|x-z| \geqslant 2|y-z|^{\sigma}$, algum $0<\sigma\leqslant 1$ e $0<\delta\leqslant 1$, são limitados em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $\frac{n}{n+1}<p_0<p\leqslant 1$, no qual p_0 depende dos parâmetros do operador, sob a condição de cancelamento $T^*(1)=0$, que é essencialmente a imagem de átomo pelo operador possuir integral nula. Essa condição é também necessária (veja por exemplo [23] para o caso padrão) e está relacionado com a condição de momento querida em $H^p(\mathbb{R}^n)$. No artigo [2], Alvarez & Milman provaram estimativas L^p para $1\leqslant p<\infty$ sob a condição de $\sigma-$Hörmander sobre o núcleo, uma natural extensão do caso fortemente singular da condição de Hörmander dada por

$$\sup_{\substack{|y-z|\leqslant 1\\ z\in\mathbb{R}^n}} \int_{|x-z|\geqslant 2|y-z|^{\sigma}} |K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|dx \leqslant C$$

e

$$\sup_{\substack{|y-z|>1\\ z\in\mathbb{R}^n}} \int_{|x-z|\geqslant 2|y-z|} |K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|dx \leqslant C.$$

Ainda que essa condição é forte o bastante para demonstrar a limitação do operador em norma L^p para $p\geqslant 1$, a limitação para os espaços de Hardy quando $0<p\leqslant 1$ é mais delicada e permanece em aberto (veja [30]).

Nessa dissertação estamos interessados em estudar a limitação de operadores fortemente de Calderón-Zygmund em espaços de Hardy seguindo os resultados de C. Vasconcelos e T. Picon em [28]. A técnica de demonstração utilizada para provar a limitação de tais operadores é conhecida como o método de átomos e moléculas. Além do estudo aprofundado sobre os espaços de Hardy incluindo a prova da Teorema de Caracterização maximal, também está incluso uma prova do Teorema de Decomposição atômica e a dualidade entre H^1 e BMO.

No Capítulo 1, apresentamos todos os pré-requisitos e algumas notações como, por exemplo: O espaço de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, espaço de Distribuições Temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, Convolução, Teorema da aproximação da identidade, Teorema da Mudança de coordenadas polares, identidade de integração via função de distribuição. Teorema da interpolação Marcinkiewicz, Transformada de Fourier. Além disso, Função Maximal de Hardy-Littlewood e o fato que o operador maximal $\mathcal{M}$ é $(1,1)$ fraco e contínuo para $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $1<p\leqslant+\infty$.

No Capítulo 2, definimos as funções Maximal, Maximal não tangencial, Grand-Maximal e Maximal com peso. Logo demonstramos equivalências entre elas e assim mostramos o Teorema de Caracterização Maximal. Depois mostramos algumas propriedades do espaço de Hardy $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, demostramos o Teorema da decomposição de Calderón-Zygmund e o Teorema da decomposição Atômica.

No Capítulo 3, definimos o espaço das funções de oscilação média limitada (BMO), fazemos algumas propriedades desse espaço e provamos a importante relação da dualidade do espaço $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ com $BMO(\mathbb{R}^n)$.

No Capítulo 4, damos a definição de operador fortemente singular de Calderón-Zygmund, demonstramos a limitação uniforme no espaço de Hardy de certo tipos de moléculas e demonstramos o Teorema principal usando a técnica que átomos são levados em moléculas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos tópicos utilizados no desenvolvimento da teoria dos Espaços Hardy em $\mathbb{R}^n$, que serão definidos através de funções maximais suaves.

1.1 Tópicos de Teoria da Medida

Nesta seção revisaremos brevemente alguns tópicos utilizados como Teorema da Convergência Dominada, Teorema de Fubinni, Mudança em Coordenadas Polares, Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, dentre outros.

Definição 1.1.1. Seja o conjunto X não vazio e $\mathcal{A}$ uma coleção não-vazia de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra de X se satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se $A \in \mathcal{A}$, então $X \backslash A \in \mathcal{A}$;
2. Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos tais que $A_j \in \mathcal{A}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$. então

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Dizemos que μ é uma medida $\sigma-$finita se existe uma coleção $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ e $\mu(A_j) < +\infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Agora mostraremos algumas propriedades.

Proposição 1.1.2. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Então*

1. *Se* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *é tal que* $A_1 \subset A_2$*, então* $\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2)$*;*

2. *Se* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathcal{A}$*, então* $\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$*;*

3. *Se* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathcal{A}$ *tal que*

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset A_n \subset \cdots ,$$

   então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$*;*

4. *Se* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathcal{A}$ *tal que*

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset A_n \supset \cdots ,$$

   e existe $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mu(A_m) < +\infty$*. Então* $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$*,*

Demonstração. Ver [14]. □

Definição 1.1.3. Sejam os espaços mensuráveis $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ e seja a função $f : X \longrightarrow Y$. Dizemos que f é uma função $(\mathcal{A}, \mathcal{B})-$mensurável se para todo $B \in \mathcal{B}$ temos que a imagem inversa $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e f uma função $(\mathcal{A}, \mathcal{B})-$mensurável. Daremos algumas notações.

1. Se $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ respectivamente, a função f é dita $\mathcal{A}-$mensurável. Além disso se $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ é a $\sigma-$algebra de Lebesgue então f é dita Lebesgue-mensurável;

2. Seja $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}} = \left\{E \subset \overline{R} : \ E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\right\}$. Representamos por $M^+ \doteq M(X, \mathcal{A})$ o espaço das $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funções $(X, [0, +\infty])$-mensuráveis.

Definição 1.1.4. Seja o conjunto não vazio X e $A \subset X$, a função característica de A é

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Uma função $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ é dita simples se os A_j são mensuráveis e disjuntos dois a dois. Desta forma, definimos a integral de Lebesgue de uma função simples em M^+ por

$$\int_X \phi d\mu \doteq \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j).$$

Proposição 1.1.5. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável.*

1. *Se $f \in M^+$, então existe $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que*
   (a) $0 \leqslant \varphi_j \leqslant \varphi_{j+1} \leqslant f$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$;
   (b) $\varphi_j(x) \longrightarrow f(x)$ *quando* $j \to +\infty$ *para todo* $x \in X$;
   (c) $\varphi_j \longrightarrow f$ *quando* $j \to +\infty$ *uniformemente em subconjuntos de* X *no qual* f *é limitada.*

2. *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ for uma função mensurável, então existe $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que*
   (a) $0 \leqslant |\varphi_j| \leqslant |\varphi_{j+1}| \leqslant |f|$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$;
   (b) $\varphi_j(x) \longrightarrow f(x)$ *quando* $j \to +\infty$ *para todo* $x \in X$;
   (c) $\varphi_j \longrightarrow f$ *quando* $j \to +\infty$ *uniformemente em subconjuntos de* X *no qual* f *é limitada.*

Demonstração. Ver [14]. □

Desta forma, para $f \in M^+$ definimos a integral de Lebesgue de f com a relação a medida μ por

$$\int_X f d\mu \doteq \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \ \phi \in M^+ \text{ é uma função simples tal que } 0 \leqslant \phi \leqslant f \right\}.$$

Definição 1.1.6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. As partes positiva e negativa de f são definidas respectivamente por

$$f^+(x) \doteq \max\{f(x), 0\},$$
$$f^-(x) \doteq \max\{-f(x), 0\}.$$

Se $\displaystyle\int_X f^+ d\mu$ e $\displaystyle\int_X f^- d\mu$ forem finitas, então dizemos que f é integrável e definimos

$$\int_X f d\mu \doteq \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Por outro lado, se $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função mensurável a valores complexos tal que $Re(g)$ e $Im(g)$ são funções integráveis, então g é integrável e

$$\int_X g d\mu \doteq \int_X Re(g) d\mu + i \int_X Im(g) d\mu.$$

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e defina

$$L = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ é integrável}\}.$$

Considere sobre L a relação de equivalência dada por

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ em quase todo ponto}$$

e as clases de equivalência

$$[f] = \{g : X \longrightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f = g \ \ \mu - \text{ quase todo ponto}\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}^1(X)$ o conjunto

$$\mathcal{L}^1(X) = \{[f] : \ f \in L\}$$

munidos das operações usuais da soma e poduto de funções. Por simplicidade denotaremos $[f]$ por f.

Teorema 1.1.7 (Teorema da convergência monótona). *Seja $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em M^+ tais que $f_j \leqslant f_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $f = \lim\limits_{j\to+\infty} f_j$ em quase todo ponto. Então*

$$\int_X f d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_X f_j d\mu.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.1.8 (Teorema da convergência dominada). *Seja $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1(X)$ tal que $f_j \longrightarrow f$ em quase todo ponto com f mensurável. Além disso, suponha que existe uma função $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tal que para todo $x \in X$ e $j \in \mathbb{N}$*

$$|f_j(x)| \leqslant g(x).$$

Então $f \in \mathcal{L}^1(X)$ e

$$\int_X f d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_X f_j d\mu.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Corolário 1.1.9. *Seja $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1(X)$ tal que $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \int_X |f_j| d\mu < +\infty$. Então $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j$ converge em quase todo ponto a uma função em $\mathcal{L}^1(X)$ e*

$$\int_X \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j \right) d\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_X f_j d\mu.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.1.10 (Mudança de Variáveis). *Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um C^1-difeomorfismo. Então*

(i) Se f é Lebesgue-mensurável em $G(\Omega)$, então $f \circ G$ é Lebesgue-mensurável em Ω. Se $f \geqslant 0$ ou $f \in \mathcal{L}^1(G(\Omega), m)$ no qual m é a medida de Lebesgue, então

$$\int_{G(\Omega)} f(x) dx = \int_\Omega f \circ G(x) |det \ D_x G| dx.$$

(ii) Seja $E \subset \Omega$ um conjunto Lebesgue-mensurável, então $G(E)$ também é, além disso

$$m(G(E)) = \int_E |det \ D_x G| dx.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.1.11 (Teorema de Fubinni)**.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos*

(i) Se $f \in M^+(X,Y)$, então $g(x) = \int_Y f_x(y)d\nu \in M^+(X)$, $h(y)) \int_X f_y(x)d\mu \in M^+(Y)$ e

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu\right]d\mu$$
$$= \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu\right]d\nu.$$

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$, então $f_x(y) \in \mathcal{L}^1(\nu)$, e $f_y(x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ em quase todo ponto. Além disso, as funções $g(x) = \int_Y f_x(y)d\nu \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $h(y) = \int_X f_y(x)d\mu \in \mathcal{L}^1(\nu)$ e vale a igualdade anterior.

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.1.12 (Coordenadas Polares)**.** *Seja σ a medida canônica em S^{n-1}. Se f é Borel-mensurável em $\mathbb{R}^n$ e $f \geqslant 0$ ou $f \in \mathcal{L}^1(m)$ com m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, então:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}d\sigma(x')dr.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Corolário 1.1.13. *Seja f uma função mensurável definida em $\mathbb{R}^n$, não negativa e integrável tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g definida em $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, isto é, radial. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1})\int_0^{+\infty} g(r)r^{n-1}dr,$$

no qual σ representa a medida de Borel de S^{n-1}.

Demonstração. Segue do Teorema 1.1.12. □

Definição 1.1.14.

i) Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma medida com sinal é uma função

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [-\infty. +\infty]$$

tal que

(a) $\mu(\varnothing) = 0$;

(b) μ só pode assumir apenas um dos valores $-\infty$ e $+\infty$:

(c) Se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta de conjuntos em $\mathcal{A}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j),$$

no qual a soma acima converge absolutamente.

ii) Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma medida complexa é uma função

$$\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

(a) $\nu(\varnothing) = 0$;

(b) Se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta de conjuntos em $\mathcal{A}$, então

$$\nu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(E_j),$$

no qual a série acima converge absolutamente.

iii) Sejam μ uma medida positiva e ν medida com sinal definidas em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a μ, denotado $\nu \ll \mu$, se $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$;

iv) Sejam μ_1 e μ_2 medidas com sinal definidas em $\mathcal{A}$, Dizemos que μ_1 e μ_2 são mutuamente singular, denotado por $\mu_1 \perp \mu_2$ se existem $A, B \in \mathcal{A}$ com $A \cap B = \varnothing$ tal que $X = A \cup B$, A é nulo para μ_1 e B é nulo para μ_2, isto é, $\mu_1(E) = 0$ para todo $E \subset A$ e $\mu_2(F) = 0$ para todo $F \subset B$.

Teorema 1.1.15 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Sejam μ uma medida $\sigma-$finita positiva e λ uma medida complexa definidas em $(X, \mathcal{A})$. Então:*

i) Existem λ_a e λ_s medidas complexas sobre $\mathcal{A}$ tal que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ e $\lambda_s \perp \mu$;

ii) Existe uma única função $h \in L^1(X)$ tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

Demonstração. Ver [25]. □

Definição 1.1.16. Uma medida de Borel μ definida em $\mathbb{R}^n$ é denominada regular se satisfaz:

i) $\mu(K) < +\infty$, para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto;

ii) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$;

iii) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ U \subset E \text{ aberto}\}$.

Observação 1.1.17. Uma medida complexa μ é denominada regular quando sua variação total $|\mu|$ (ver [14]), que é uma medida positiva, é regular.

Definimos o espaço das funções que decaem no infinito como

$$C_0(\mathbb{R}^n) \doteq \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ contínua tal que } |f(x)| \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \to +\infty\}.$$

Teorema 1.1.18. *Se $\Phi : C_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é un funcional linear contínuo, então Φ pode ser representado por uma única medida de Borel complexa e regular, no seguinte sentido*

$$\Phi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu, \qquad \forall\, \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [25]. □

Proposição 1.1.19. *O teorema anterior permite definir a aplicação*

$$\begin{aligned} I : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)^* \\ \mu &\longmapsto I_\mu(\psi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu, \ \ \forall\, \psi \in C_0(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

No qual $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de medidas de Borel complexas e regulares. Note que $|\mu|$ e $\|\psi\|_\infty$ definem normas em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $C_0(\mathbb{R}^n)$ respectivamente, então

$$|\mu| = \sup_{\|\psi\|_\infty \leqslant 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu \right| = \|I_\mu\|,$$

isto é, I é uma isometria.

1.2 Tópicos de Análise Funcional

Nesta seção apresentamos alguns fatos básicos dos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.1. Sejam (X, μ) um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. Para cada $1 \leqslant p < +\infty$ definimos

$$\|f\|_{L^p} \doteq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$L^p(X) \doteq \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \|f\|_{L^p} < +\infty\}.$$

Para $p = +\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty \doteq \inf\{\lambda \geqslant 0 : \ \mu(\{x : \ |f(x)| > \lambda\}) = 0\} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$$

e

$$L^\infty(X) \doteq \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \|f\|_\infty < +\infty\}.$$

Definição 1.2.2. Considere $1 < p,\ q < +\infty$. Dizemos que p e q são exponentes conjugados se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dizemos também que 1 é exponente conjugado de $+\infty$ e vice-versa. Também denotaremos como p' ao exponente conjugado de p.

Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ e p' seu exponente conjugado. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^{p'}(X)$, então o produto $f \cdot g \in L^1(X)$ e*

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Minkowski). *Considere $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ e $f, g \in L^p(X)$. Então vale a desigualdade triangular*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Como consequência da desigualdade de Minkowski, mostra-se que $(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço vetorial normado para $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Além disso, é um espaço de Banach.

Proposição 1.2.5. *Sejam p e p' exponentes conjugados tal que $1 < p' \leqslant +\infty$. Se $f \in L^{p'}(X)$, então*

$$\|f\|_{p'} = \sup\left\{ \left| \int_X f \cdot g \, d\mu \right| : \|g\|_{L^p} = 1 \right\}.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Proposição 1.2.6. *Sejam $1 < p, p' < +\infty$ exponentes conjugados. Então $L^p(X)$ é reflexivo e $(L^p(X))^* \cong L^{p'}(X)$. Além disso. $(L^1(X))^* \cong L^\infty(X)$.*

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.2.7 (Desigualdade de Minkowsky geralizada). *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos. Se $f \geqslant 0$ é uma função mensurável definida em $X \times Y$ e $1 \leqslant p < +\infty$, então*

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu \right)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_Y \left[\int_X f(x,y)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} d\nu.$$

Se $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mathcal{X}, \mu)$ em quase todo ponto, e a função $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_{L^p}$ está em $L^1(\mathcal{Y}, \nu)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(\mathcal{Y}, \nu)$ em quase todo ponto, a função $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathcal{Y}} f(x,y) d\nu(y)$ está em $L^p(\mathcal{X}, \mu)$, e além disso

$$\left\| \int_{\mathcal{Y}} f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^p} \leqslant \int_{\mathcal{Y}} \|f(\cdot, y)\|_{L^p} d\nu(y).$$

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.2.8 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Seja E um espaço normado e $\sigma(E^*, E)$ a topologia fraça$-*$ em E^*, então*

$$B_{E*} = \{f \in E^* : \ \|f\|_{E*} \leqslant 1\}$$

é compacto na topologí a $\sigma(E^*, E)$.

Demonstração. Ver [4]. □

1.3 Espaço de Distribuições

Nesta seção vamos introduzir alguns resultados básicos em Teoria das Distribuições.

Definição 1.3.1 (Espaço de Schwartz)**.** Denotamos com $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ao subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < +\infty, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dizemos que uma sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para 0 ($\phi_n \longrightarrow 0$) em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ temos que $x^\alpha \partial^\beta \phi_n(x) \longrightarrow 0$ uniformemente. Observe que dado $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $t_n \longrightarrow 0$ temos que

$$\frac{\phi(\cdot + t_n e_i) - \phi(\cdot) - t_n \partial_{e_i} \phi(\cdot)}{t_n} \longrightarrow 0$$

em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, definimos a seminormas $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} \doteq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|.$$

Um funcional linear u em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo se $< u, \phi_n > \longrightarrow 0$ para toda sequência $\phi_n \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3.2. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, no qual $0 < p < +\infty$.*

Demonstração. Claramente $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n}{p} < N$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(1+|x|^N)\phi(x)|^p}{(1+|x|^N)^p} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} C^p \frac{1}{(1+|x|^N)^p} dx \\ \leqslant C^p \int_{B(0,1)} 1 dx + C^p \int_{1\leqslant|x|} \frac{1}{|x|^{Np}} dx < +\infty.\end{aligned}$$

□

Definição 1.3.3 (Aproximação da Identidade)**.** Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, definimos $\phi_t(x) \doteq \dfrac{1}{t^n}\phi\left(\dfrac{x}{t}\right)$, $t > 0$. A família $\{\phi_t\}_{t>0}$ é uma aproximação da identidade se $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$.

Observe que para todo $t > 0$ temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)dx = 1$.

Exemplo 1.3.4. Observe que se

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \|x\| \leqslant 1, \\ 0, & \|x\| > 1, \end{cases}$$

então a função $\phi = \dfrac{\psi}{\|\psi\|_{L^1}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ induz uma aproximação da identidade $\{\phi_t\}_{t>0}$.

Definição 1.3.5. Um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota com $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.3.6. *Seja u um funcional linear em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. As seguintes condições são equivalentes*

i) u é uma distribuição temperada.

ii) Existem inteiros M, m tais que para cada $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$|\langle u, \phi\rangle| \leqslant M \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^m \partial^\alpha \phi(x)\right|.$$

Demonstração. Ver [19] Teorema V.1.4. □

Observe que o funcional linear

$$\begin{aligned} \delta : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle \delta, \phi\rangle \doteq \phi(0), \end{aligned}$$

é uma distribuição temperada chamada "Delta de Dirac".

Definição 1.3.7. Seja $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução $u * \phi$ como a função $u * \phi(x) \doteq \langle u, \phi(x - \cdot)\rangle$. Observe que $\partial^\alpha(u * \phi)(x) = u * (\partial^\alpha \phi)(x)$ pois $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e para cada $t_n \longrightarrow 0$ temos que

$$\frac{\phi(x + t_n e_i - \cdot) - \phi(x - \cdot) - t_n \partial_{e_i}\phi(x - \cdot)}{t_n} \longrightarrow 0$$

em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\partial_{e_i}(u*\phi)(x) = u*(\partial_{e_i}\phi)(x)$. Portanto, no caso geral temos a igualdade.

Observe também que $\partial^\alpha(u * \phi)(x) = (\partial^\alpha u) * \phi(x)$, pois

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha u) * \phi(x) &= \langle \partial^\alpha u, \phi(x - \cdot)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha(\phi(x - \cdot))\rangle \\ &= \langle u, (\partial^\alpha \phi)(x - \cdot)\rangle = u * (\partial^\alpha \phi)(x) \\ &= \partial^\alpha (u * \phi)(x). \end{aligned}$$

Concluímos que $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3.8. *Seja $\{\phi_t\}_{t>0}$ uma aproximação da identidade, então $\phi_t \to \delta$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0$.*

Demonstração. Seja $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrário. Logo

$$\begin{aligned}
\langle \phi_t, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)\left(g(x)-g(0)\right)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)g(0)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right)\left(g(x)-g(0)\right)dx + g(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\left(g(ty)-g(0)\right)dy + g(0), \qquad y = \frac{x}{t}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\phi(x)\left(g(tx)-g(0)\right) \to 0$ em quase todo ponto quando $t \to 0$ e $|\phi(x)\left(g(tx)-g(0)\right)| \leqslant 2\|g\|_\infty \phi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então pelo Teorema 1.1.8 e $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrário, temos $\langle \phi_t, g\rangle \to g(0) = \langle \delta, g\rangle$ quando $t \to 0$ para todo $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim $\phi_t \to \delta$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 1.3.9. *Seja $1 \leqslant p < +\infty$ e $\{\phi_t\}_{t>0}$ aproximação da identidade. Então cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$f * \phi_t \to f,$$

em $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0$.

Demonstração. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p < +\infty$

$$\begin{aligned}
\left(\phi_t * f\right)(y) - f(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(z)f(y-z)dz - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(z)f(y)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(z)\left(f(y-z)-f(y)\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\left(f(y-tz)-f(y)\right)dz.
\end{aligned}$$

Na última igualdade, fizemos a mudança de variável de z por $\dfrac{z}{t}$. Assim pela igualdade anterior e pelo Teorema 1.2.7 temos

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\left(\phi_t * f\right)(y) - f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)||f(y-tz)-f(y)|dz\right]^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)|^p|f(y-tz)-f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} dz \quad \text{Mink.} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)|\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y-tz)-f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)|\|f(\cdot - tz) - f\|_{L^p} dz.
\end{aligned}$$

Dado que para todo $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$ então $\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} < \epsilon$. Então $|\phi(z)|\|f(\cdot - tz) - f\|_{L^p} \to 0$ (em particular em quase todo ponto), além disso, $|\phi(z)|\|f(\cdot - tz) - f\|_{L^p} \leqslant 2\|f\|_{L^p}|\phi(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o Teorema 1.1.8 temos:

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\left(\phi_t * f\right)(y) - f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0, \qquad t \to 0.$$

Portanto $\phi_t * f \longrightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Corolário 1.3.10. *Nas mesmas hipóteses do Teorema anterior temos que $f * \phi_t \longrightarrow f$ em quase todo ponto.*

Teorema 1.3.11. *Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1,\ \phi \geqslant 0,\ supp(\phi) \subset \{x:\ |x| \leqslant 1\},$$

e seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e definimos para $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy.$$

Então:

i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

ii) se $f(x) = 0$ em quase todo ponto fora do conjunto fechado A então $supp(f_\varepsilon) \subset A + \{x:\ |x| \leqslant \varepsilon\}$;

iii) se f é contínua e $supp(f)$ é compacto, $f_\varepsilon \longrightarrow f$ uniformemente quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Demonstração. Ver [17]. □

Corolário 1.3.12. *Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ e $\psi = 1$ numa vizinhança de K.*

Teorema 1.3.13 (Teorema do Resto de Taylor)**.** *Seja B uma bola em $\mathbb{R}^n$ centrada em $a \in \mathbb{R}^n$, seja $f : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função em $C^{d+1}(B)$. Então para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + h \in B$ temos*

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\leqslant d} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=d+1} R_\alpha(h)h^\alpha,$$

no qual

$$|R_\alpha(h)| \leqslant \sup_{y\in[a,a+h]} \left|\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(y)\right|, \qquad \forall\ |\alpha| = d+1.$$

Observação 1.3.14. Observe que se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então para todo $t > 0$ e todo $d \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}\left|\partial^{e_i}\left[f_t(a+h) - \sum_{|\alpha|\leqslant d}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f_t)(a)h^\alpha\right]\right| &= \left|(\partial^{e_i} f_t)(a+h) - \sum_{|\alpha|\leqslant d}\frac{\alpha_i}{\alpha!}(\partial^\alpha f_t)(a)h^{(\alpha-e_i)}\right| \\ &= \left|(\partial^{e_i} f_t)(a+h) - \sum_{|\alpha|\leqslant d-|e_i|}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha(\partial^{e_i} f_t))(a)h^\alpha\right|.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do resto de Taylor à função $g = \partial^{e_i} f_t$ de classe $C^{d-|e_i|+1}$ temos

$$\begin{aligned}\left|\partial^{e_i}\left[f_t(a+h) - \sum_{|\alpha|\leqslant d}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f_t)(a)h^\alpha\right]\right| &\leqslant \sum_{|\alpha|=d-|e_i|+1}\sup_{y\in[a,a+h]}\left|\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha(\partial^{e_i}f_t))(y)\right||h|^{d-|e_i|+1}\\ &\leqslant c(n,d)\sup_{|\alpha|=d-|e_i|+1,\ y\in[a,a+h]}|\partial^\alpha(\partial^{e_i}f_t)(y)|\,|h|^{d-|e_i|+1}\\ &\leqslant \frac{1}{t^{n+d+1}}c(n,d)\sup_{|\alpha|=d+1,\ y\in[a,a+h]}\left|\partial^\alpha f\left(\frac{y}{t}\right)\right||h|^{d-|e_i|+1}\\ &\leqslant \frac{1}{t^{n+d+1}}c(n,d)\sup_{|\alpha|=d+1,\ y\in[a,a+h]}\|f\|_{0,\alpha}|h|^{d-|e_i|+1}.\end{aligned}$$

Logo usando a indução temos o caso geral para $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ dado por

$$\left|\partial^{\beta}\left[f_t(a+h) - \sum_{|\alpha|\leqslant d}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f_t)(a)h^\alpha\right]\right| \leqslant \frac{1}{t^{n+d+1}}c(n,d)\sup_{|\alpha|=d+1}\|f\|_{0,\alpha}|h|^{d-|\beta|+1}.$$

1.4 Transformada de Fourier em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\zeta) = \hat{f}(\zeta) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\zeta}dx, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

em que $i = \sqrt{-1}$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ e $x \cdot \zeta = x_1\zeta_1 + \cdots + x_n\zeta_n$. Pelo Teorema 1.1.8 temos que $\hat{f}$ é contínua, além disso, é limitada, pois $\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\zeta)| \leqslant \|f\|_{L^1}$.

Teorema 1.4.1. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e valem as propriedades:*

$$\widehat{\partial^\alpha\phi}(\zeta) = \zeta^\alpha\hat{\phi}(\zeta)$$
$$\mathcal{F}(x^\alpha\phi(x))(\zeta) = (i)^{|\alpha|}\partial^\alpha\hat{\phi}(\zeta).$$

Demonstração. Ver [19]. □

Teorema 1.4.2. *A transformada de Fourier é continuamente inversível de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\zeta)e^{ix\cdot\zeta}d\zeta, \qquad \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [19]. □

Observe que a transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

Teorema 1.4.3. *Se $\phi, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então se denotamos $\check{\phi}(\zeta) = \phi(-\zeta)$*

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\phi}(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\widehat{\varphi}(x)dx.$

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\overline{\varphi}(x)dx = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)\overline{\widehat{\varphi}}(x)dx.$

iii) $\widehat{\phi * \varphi} = \widehat{\phi}\cdot\widehat{\varphi}.$

iv) $\widehat{\phi \cdot \varphi} = (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\varphi}.$

v) $\widehat{\widehat{\phi}}(x) = (2\pi)^n\check{\phi}(x).$

vi) $\widehat{\check{\phi}}(x) = \check{\widehat{\phi}}(x).$

Demonstração. Ver [19]. □

1.5 Tópicos de Análise Harmônica

Nesta seção apresentamos tópicos essenciais de Análise Harmônica.

Definição 1.5.1. Sejam $(\mathcal{X},\mu)$ e $(\mathcal{Y},\nu)$ espaços de medida, $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$. Seja a aplicação linear

$$T : L^p(\mathcal{X},\mu) \longrightarrow \{f : \mathcal{Y} \to \mathbb{C} : \ \text{mensurável}\}.$$

Dizemos que

- T é tipo forte (p,q) se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{L^q} \leqslant c\|f\|_{L^p}, \qquad \forall f \in L^p(\mathcal{X},\mu).$$

- T é tipo fraco (p,q) se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\nu\left(\{y \in \mathcal{Y} : \ |Tf(y)| > \lambda\}\right) \leqslant \left(c\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^q, \qquad \forall\lambda > 0, \ \forall f \in L^p(\mathcal{X},\mu).$$

- T é tipo fraco $(p,+\infty)$ se é forte $(p,+\infty)$.

Observação 1.5.2. T é tipo (p,q) forte implica que é tipo (p,q) fraco, pois para $E_\lambda = \{y \in \mathcal{Y} : \ |Tf(y)| > \lambda\}$ temos

$$\begin{aligned}
\nu(E_\lambda) &= \int_{E_\lambda} 1d\nu \leqslant \int_{E_\lambda}\frac{|Tf(y)|^q}{\lambda^q}d\nu \\
&= \frac{1}{\lambda^q}\int_{E_\lambda}|Tf(y)|^q d\nu \leqslant \frac{1}{\lambda^q}\|Tf\|_{L^q}^q \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda^q}\left(c\|f\|_{L^p}\right)^q = \left(\frac{c\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^q.
\end{aligned}$$

Observação 1.5.3. Para o caso $(\mathcal{X},\mu) = (\mathcal{Y},\nu)$ e $T = Id_{\mathcal{X}}$ (identidade em $\mathcal{X}$), a propriedade fraco (p,p) é a desigualdade de Chebyshev.

Definição 1.5.4. Seja $\{T_t\}_{t>0}$ uma família de operadores lineares definidos em $L^p(\mathcal{X},\mu)$, o operador maximal T^* associado à família é definido como:

$$T^*f(x) = \sup_{t>0}|T_tf(x)|.$$

Teorema 1.5.5. *Seja $\{T_t\}_t$ uma família de operadores lineares definidos em $L^p(\mathcal{X},\mu)$. Se seu operador maximal T^* é fraco (p,q), então*

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in L^p(\mathcal{X},\mu) : \lim_{t\to t_0} T_tf(x) = f(x) \text{ em quase todo ponto} \right\}$$

é fechado no espaço $L^p(\mathcal{X},\mu)$.

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{A}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\mathcal{X},\mu)$, devemos mostrar que $\lim\limits_{t\to t_0} T_tf(x) = f(x)$ em quase todo ponto, isto é $f \in \mathcal{A}$.
Uma vez que $\lim\limits_{t\to t_0} T_tf(x) = f(x)$ se, e somente se, $\limsup\limits_{t\to t_0}|T_tf(x) - f(x)| = 0$, temos

$$\mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \lim_{t\to t_0} T_tf(x) \neq f(x)\right\}\right) = \mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \limsup_{t\to t_0}|T_tf(x) - f(x)| > 0\right\}\right).$$

Agora observe que por a linearidade de T_t

$$\begin{aligned} |T_tf(x) - f(x)| &= |T_t(f - f_n)(x) + T_tf_n(x) - f(x)| \\ &\leqslant |T_t(f - f_n)(x)| + |T_tf_n(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

o qual

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{x : \limsup_{t\to t_0}|T_tf(x) - f(x)| > \lambda\right\}\right) &\leqslant \mu\left(\left\{x : \limsup_{t\to t_0}|T_t(f - f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ &\quad + \mu\left(\left\{x : \limsup_{t\to t_0}|T_tf_n(x) - f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &\mu\left(\left\{ x \in \mathcal{X} : \limsup_{t\to t_0}|T_t(f - f_n)|(x) > \frac{\lambda}{2} \right\}\right) \\ &\qquad \leqslant \mu\left(\left\{ x \in \mathcal{X} : \sup_t|T_t(f - f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\}\right) \\ &\qquad = \mu\left(\left\{ x \in \mathcal{X} : T^*(f - f_n)(x) > \frac{\lambda}{2} \right\}\right) \leqslant \left(\frac{2c}{\lambda}\|f - f_n\|_{L^p} \right)^q, \end{aligned}$$

então desde que $\|f - f_n\|_{L^p} \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$, temos a convergência quando $n \to \infty$

$$\mu\left(\left\{ x \in \mathcal{X} : \limsup_{t\to t_0}|T_t(f - f_n)|(x) > \frac{\lambda}{2} \right\}\right) \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, desde que $T_tf_n \longrightarrow f_n$ em quase todo ponto

$$\mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \limsup_{t\to t_0}|T_tf_n(x) - f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) = \mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$

$$\leqslant \frac{2^p}{\lambda^p}\|f_n - f\|_{L^p}^p,$$

de isto temos que quando $n \to \infty$

$$\mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \limsup_{t\to t_0}|T_t f_n(x) - f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0.$$

Assim das duas convergências temos que todo $\lambda > 0$ satisfaz

$$\mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \limsup_{t\to t_0}|T_t f(x) - f(x)| > \lambda\right\}\right) = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \lim_{t\to t_0} T_t f(x) \neq f(x)\right\}\right) &= \lim_{\lambda\to 0^+}\mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \limsup_{t\to t_0}|T_t f(x) - f(x)| > \lambda\right\}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

isto é $f \in \mathcal{A}$. Portanto o conjunto é fechado. □

Definição 1.5.6. Seja $(\mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida e $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ função mensurável. A aplicação $a_f : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ definida por

$$a_f(\lambda) \doteq \mu\,(x \in \mathcal{X} : \ |f(x)| > \lambda)$$

é a função de distribuição de f.

Proposição 1.5.7. *Seja $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função diferenciável e crescente tal que $\phi(0) = 0$. Então*

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(|f(x)|)d\mu = \int_0^{+\infty} \phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} \phi(|f(x)|)d\mu &= \int_{\mathcal{X}} (\phi(|f(x)|) - \phi(0))\,d\mu\\ &= \int_{\mathcal{X}}\left(\int_0^{|f(x)|}\phi'(\lambda)d\lambda\right)d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^+\times\mathcal{X}} \chi_{\lambda<|f(x)|}(\lambda, x)\phi'(\lambda)\,(d\lambda \times d\mu)\\ &= \int_{R^+}\left(\int_{\mathcal{X}} \chi_{\lambda<|f(x)|}(\lambda, x)\phi'(\lambda)d\mu\right)d\lambda\\ &= \int_0^{+\infty}\phi'(\lambda)\left(\int_{|f(x)|>\lambda} 1d\mu\right)d\lambda\\ &= \int_0^{+\infty}\phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.\end{aligned}$$

□

Observação 1.5.8. Seja $0 < p < +\infty$. Aplicamos a proposição anterior para $\phi(\lambda) = \lambda^p$, temos

$$\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu = \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} a_f(\lambda) d\lambda.$$

Definição 1.5.9. Seja $\mathcal{X}$ um espaço de funções mensuráveis. Uma aplicação $T : \mathcal{X} \to \{g : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ mensurável $\}$ é sublinear quando:

- $|T(f_1 + f_2)(y)| \leqslant |Tf_1(y)| + |Tf_2(y)|, \ \forall y \in \mathcal{Y}.$
- $|T(\lambda f)(y)| = |\lambda||Tf(y)|, \ \forall y \in \mathcal{Y}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

Teorema 1.5.10 (Interpolação de Marcinkiewicz)**.** *Sejam $(\mathcal{X}, \mu)$ e $(\mathcal{Y}, \nu)$ espaços de medida, $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant +\infty$ e T um operador sublinear de $L^{p_0}(\mathcal{X}, \mu) + L^{p_1}(\mathcal{X}, \mu)$ ao conjunto de funções mensuráveis em Y. Se T é fraco (p_0, p_0) e fraco (p_1, p_1) então T é forte (p, p) para $p_0 < p < p_1$.*

Demonstração. Sejam $f \in L^p(\mathcal{X}, \mu)$, $\lambda > 0$ arbitrários e sejam A_0, A_1 as constantes das desigualdades fracas de (p_0, p_0) e (p_1, p_1), respectivamente. Definimos as seguintes funções:

$$f_0 \doteq f\chi_{\{|f(x)| > c\lambda\}} \qquad \text{e} \qquad f_1 \doteq f\chi_{\{|f(x)| \leqslant c\lambda\}}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} |f_0(x)|^{p_0} d\mu &= \int_{\{|f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} d\mu = \int_{\{|f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_0 - p} d\mu \\
&= \int_{\{|f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^p \left(\frac{|f(x)|}{c\lambda}\right)^{p_0 - p} (c\lambda)^{p_0 - p} d\mu \\
&\leqslant (c\lambda)^{p_0 - p} \int_{\{|f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^p d\mu \\
&\leqslant (c\lambda)^{p_0 - p} \int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu < +\infty,
\end{aligned}$$

logo

$$\|f_0\|_{p_0} \leqslant (c\lambda)^{1 - \frac{p}{p_0}} \|f\|_p^{\frac{p}{p_0}}.$$

Se $p_1 = +\infty$ então claramente $f_1 \in L^\infty(\mathcal{X}, \mu)$. Agora, se $p_1 < +\infty$ então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} |f_1(x)|^{p_1} d\mu &= \int_{\{|f(x)| \leqslant c\lambda\}} |f(x)|^{p_1} d\mu \\
&= \int_{\{|f(x)| \leqslant c\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1 - p} d\mu \\
&= \int_{\{|f(x)| \leqslant c\lambda\}} |f(x)|^p \left(\frac{|f(x)|}{c\lambda}\right)^{p_1 - p} (c\lambda)^{p_1 - p} d\mu \\
&\leqslant (c\lambda)^{p_1 - p} \int_{\{|f(x)| \leqslant c\lambda\}} |f(x)|^p d\mu
\end{aligned}$$

$$\leqslant (c\lambda)^{p_1-p}\int_{\mathcal{X}}|f(x)|^p d\mu,$$

logo

$$\|f_1\|_{p_1}\leqslant (c\lambda)^{1-\frac{p}{p_1}}\|f\|_p^{\frac{p}{p_1}}.$$

Assim $f\in L^{p_0}(\mathcal{X},\mu)+L^{p_1}(\mathcal{X},\mu)$.

- Para $p_1=+\infty$:
  Seja $c=2A_1$, então em quase todo ponto temos

$$\begin{aligned}|Tf_1(x)| &\leqslant \|Tf_1\|_\infty\\ &\leqslant A_1\|f_1\|\\ &\leqslant A_1\frac{\lambda}{2A_1}\\ &=\frac{\lambda}{2},\end{aligned}$$

  então $a_{Tf_1}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)=0$. Agora,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{Y}}|Tf(y)|^p d\nu &= \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1}a_{Tf}(\lambda)d\lambda\\ &\leqslant \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1}\left(a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)+a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)d\lambda\\ &= \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1}a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\\ &\leqslant \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}d\lambda\\ &= p(2A_0)^{p_0}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathcal{X}}\lambda^{p-p_0-1}\chi_{\{|f(x)|>c\lambda\}}(x)|f(x)|^{p_0}d\mu\right)d\lambda\\ &= p(2A_0)^{p_0}\int_{\mathcal{X}\times\mathbb{R}^+}\lambda^{p-p_0-1}\chi_{\{|f(x)|>c\lambda\}}(x,\lambda)|f(x)|^{p_0}d\left(\mu\times\lambda\right)\\ &= p(2A_0)^{p_0}\int_{\mathcal{X}}\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}}\lambda^{p-p_0-1}|f(x)|^{p_0}d\lambda\right)d\mu\\ &= p(2A_0)^{p_0}\int_{\mathcal{X}}\frac{1}{c^{p-p_0}(p-p_0)}|f(x)|^p d\mu\\ &= \frac{p}{p-p_0}\frac{(2A_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

- Para $p_1<+\infty$ temos:

$$\int_0^{+\infty}p\lambda^{p-1}a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\leqslant\int_0^{+\infty}p\lambda^{p-1}\left(\frac{2A_1}{\lambda}\|f_1\|_{p_1}\right)^{p_1}d\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&= p(2A_1)^{p_1} \int_{\mathcal{X}\times\mathbb{R}^+} \lambda^{p-p_1-1}\chi_{\{|f(x)|\leqslant c\lambda\}}(x,\lambda)|f(x)|^{p_1} d\,(\mu\times\lambda)\\
&= p(2A_1)^{p_1} \int_{\mathcal{X}} \left(\int_{\frac{|f(x)|}{c}}^{+\infty} \lambda^{p-p_1-1}|f(x)|^{p_1} d\lambda \right) d\mu\\
&= p(2A_1)^{p_1} \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{(p_1-p)c^{p-p_1}}|f(x)|^p d\mu\\
&= \frac{p}{p_1-p}\frac{(2A_1)^{p_1}}{c^{p-p_1}}\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{Y}} |Tf(y)|^p d\nu &\leqslant \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} a_{Tf_0}(\frac{\lambda}{2})d\lambda + \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} a_{Tf_1}(\frac{\lambda}{2})d\lambda\\
&\leqslant \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} \right)\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

□

1.5.1 Função Maximal de Hardy-Littlewood

Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ com $n \geqslant 1$. Definimos a função Maximal de Hardy-Littlewood como

$$
\mathcal{M}f(x) \doteq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy.
$$

Dado que a função definida no ponto x como

$$
\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy = \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0.r)} |f(x+y)|dy
$$

é continua pois, para $\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $\||f(x+h+\cdot) - |f(x+\cdot)|\||_{L^1_{B(0,r)}} < \epsilon$ se $|h| < \delta$. Então

$$
\left| \int_{B(0.r)} |f(x+h+y)|dy - \int_{B(0.r)} |f(x+y)|dy \right| \leqslant \||f(x+h+\cdot)| - |f(x+\cdot)|\|_{L^1_{B(0,r)}} < \epsilon.
$$

Logo o conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}$ é aberto, pois $\mathcal{M}$ é o supremo de funções continuas, e além disso $\mathcal{M}f$ é mensurável. Assim

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\\
f &\mapsto \mathcal{M}f.
\end{aligned}
$$

Observe que $\mathcal{M}$ é sublinear e que para $f \geqslant 0, \phi = \dfrac{1}{|B(0,1)|}\chi_{B(0,1)}$, temos:

$$
(\phi_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x-y)f(y)dy
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n|B(0,1)|}\chi_{B(0,1)}\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(0,t)|}\int_{B(x,t)} f(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)} f(y)dy.
\end{aligned}$$

Logo para a família $\{T_t\}_{t>0}$, no qual $T_t f(x) = (\phi_t * f)(x)$ e $f \geqslant 0$ temos que $\mathcal{M}f = T^*f$. Podemos definir o maximal de Hardy-Littlewood também sobre os cubos centrados em x e de lado $2r$

$$\mathcal{M}'f(x) \doteq \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)|dy.$$

Para isso basta observar as desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy &\leqslant \frac{2^n}{|B(0,1)|}\left[\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)|dy\right]. \\
\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)|dy &\leqslant \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n\left[\frac{1}{|B(x,\sqrt{n}r)|}\int_{B(x,\sqrt{n}r)}|f(y)|dy\right],
\end{aligned}$$

assim $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são equivalentes e

$$\frac{|B(0,1)|}{2^n}\mathcal{M}f(x) \leqslant \mathcal{M}'f(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \mathcal{M}f(x).$$

Observação 1.5.11. Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}f(x) &= \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy \\
&\leqslant \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|B(x,r)| \\
&= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

isto é, $\mathcal{M}$ é um operador forte $(+\infty,+\infty)$.

Lema 1.5.12. *Seja $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \cdots B_m\}$ uma coleção finita de bolas em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma subcoleção disjunta $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots B_{i_k}\} \subset \mathscr{B}$ tal que*

$$\left|\bigcup_{j=1}^m B_j\right| \leqslant 3^n\sum_{j=1}^k|B_{i_j}|.$$

Demonstração. Seja $B_{i_1} = B(x_{i_1}, r_{i_1})$ a bola com o maior raio, e considere a família $\mathscr{B}_1 = \{B_j : B_{i_1}\bigcap B_j = \varnothing\}$ logo:

- Se $\mathscr{B}_1 = \varnothing$, então $\bigcup_{j=1}^m B_j \subset B(x_{i_1}, 3r_{i_1})$ e aqui acabamos com a seleção da subfamília.

- Se $\mathscr{B}_1 \neq \varnothing$ então os $B_j \notin \mathscr{B}_1$ cumprem $B_j \subset B(x_{i_1}, 3r_{i_1})$. Assim

$$\bigcup_{j=1}^{m} B_j \subset \bigcup_{B\in\mathscr{B}_1} B \bigcup B(x_{i_1}, 3r_{i_1}), \qquad card(\mathscr{B}_1) < card\mathscr{B}.$$

  Fazemos o mesmo com a família $\mathscr{B}_1$ até $\mathscr{B}_{r+1} = \varnothing$. Observe que por construção, a família $\{B_{i_k}\}_{k=1}^{r}$ é disjunta e $\bigcup_{j=1}^{m} B_j \subset \bigcup_{k=1}^{r} B(x_{i_k}, 3r_{i_k})$.

Agora fazemos a conta temos

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right| &\leqslant \left|\bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j})\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} 3^n |B_{i_j}|.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.5.13. *O operador $\mathcal{M}$ maximal de Hardy-Littlewood é $(1,1)$ fraco e (p,p) forte para $1 < p \leqslant +\infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, basta provar que o operador é $(1,1)$ fraco e $(+\infty, +\infty)$ forte.

- $(+\infty, +\infty)$ forte, provado anteriormente na observação.

- $(1,1)$ fraco:
  Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ seja $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |\mathcal{M}f(x)| > \lambda\}$ o qual é aberto, temos $m(E_\lambda) = \sup\{m(K) : \ K \subset E_\lambda \text{ compacto}\}$ e para cada $x \in E_\lambda$ existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset E_\lambda$ com

$$\frac{1}{\lambda}\int_{B(x,r_x)} |f(y)|dy > |B(x, r_x)|,$$

  logo para um compacto $K \subset E_\lambda$, temos $K \subset \displaystyle\bigcup_{x\in E_\lambda} B(x, r_x)$, então $K \subset \displaystyle\bigcup_{1=j}^{m} B(x_j, r_{x_j})$.

  Aplicando o lema anterior temos

$$\begin{aligned} m(K) &\leqslant m\left(\bigcup_{1=j}^{m} B(x_j, r_{x_j})\right) \\ &\leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} m\left(B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})\right) \\ &\leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda}\int_{B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})} |f(y)|dy \\ &= 3^n \frac{1}{\lambda}\int_{\bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})} |f(y)|dy \end{aligned}$$

$$\leqslant 3^n \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.$$

Tomando o supremo sobre os $K \subset E_\lambda$ compactos, temos

$$m\,(E_\lambda) \leqslant \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Observação 1.5.14. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $f \neq 0$, então $\|f\|_{L^1} > 0$. Assim existem $R > 0, \epsilon > 0$ tais que

$$\int_{B(0,R)} |f(y)|dy \geqslant \epsilon.$$

Agora para cada $|x| > R$, $B(0,R) \subset B(x, 2|x|)$ segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}f(x) &\geqslant \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|dy \\
&\geqslant \frac{\epsilon}{2^n} \frac{1}{|x|^n}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}f(x)dx &\geqslant \int_{|x|>R} \mathcal{M}f(x)dx \\
&\geqslant \frac{\epsilon}{2^n} \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^n} dx \\
&= \frac{\epsilon}{2^n} \int_R^{+\infty} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{r^n} r^{n-1} d\sigma dr \\
&= \frac{\epsilon |S^{n-1}|}{2^n} \int_R^{+\infty} \frac{1}{r} dr \to \infty,
\end{aligned}$$

o qual $\mathcal{M}f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.5.15. *Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e ϕ uma função radial não negativa tal que $\varphi(r) \doteq \phi(|x|)$ com $r = |x|$, não crescente é integrável. Então*

$$\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(\,x)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)dy \right) \mathcal{M}f(x).$$

Demonstração.

- Se $\phi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$ é uma função simples não nula com $\{A_j\}_{j=1}^N$ disjuntos e a_j não nulos. Desde que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ positiva temos que $a_j |A_j| < +\infty$, podemos supor que $a_1 > a_2 > \cdots > a_N > 0$. Além disso cada A_j é um anel, pois a função é radial, também de ser não crescente temos que para os escalares $\{b_j\}_{j=1}^N$ definidos da seguinte forma

$$b_N \doteq a_N, \;\; b_{N-1} = a_{N-1} - a_N, \;\cdots,\; b_1 = a_1 - a_2,$$

são positivos. Logo $\phi = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{B(0,r_j)}$, no qual $B(0,r_j) = \bigcup_{i=1}^{j} A_j$, e consequentemente temos

$$\phi_t = \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{t^n} \chi_{B(0,tr_j)}.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\phi_t * f(x)| &= \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{t^n} \chi_{B(0,tr_j)} * f(x) \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{t^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,tr_j)}(x-y) f(y) dy \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{t^n} \int_{B(x,tr_j)} |f(y)| dy \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{t^n} |B(x,tr_j)| \left[\frac{1}{|B(x,tr_j)|} \int_{B(x,tr_j)} |f(y)| dy \right] \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} b_j |B(0,r_j)| \mathcal{M} f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy \right) \mathcal{M} f(x).
\end{aligned}$$

- No caso geral, lembremos que as funções (Teorema da convergência monótona)

$$\phi^k(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^k}, & x \in \phi^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)\right), \quad i = 1, \cdots, k2^k \\ k, & x \in \phi^{-1}([k, +\infty)) \\ 0, & x \in \phi^{-1}((-\infty, 0)) \end{cases}$$

tem a propriedade que $0 \leqslant \phi^1 \leqslant \cdots \leqslant \phi^k \leqslant \phi^{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \phi$ e $\lim_{k\to+\infty} \phi^k(x) = \phi(x)$. Como $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e radial, positiva e não crescente temos que cada ϕ^k também tem essas propriedades, pelo Teorema 1.1.8 e pelo caso anterior temos que

$$|\phi_t * f(x)| = \lim_{k\to+\infty} |(\phi^k)_t * f(x)| \leqslant \lim_{k\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi^k(y) dy \right) \mathcal{M} f(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy \right) \mathcal{M} f(x).$$

Portanto

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy \right) \mathcal{M} f(x).$$

□

Capítulo 2

Espaços de Hardy

Neste capítulo vamos apresentar os espaços de Hardy H^p no espaços euclidiano $\mathbb{R}^n$ via funções maximais suaves além de propriedades de suma importância como um Teorema de decomposição atômica que será bastante útil como ferramenta desses espaços.

2.1 Teorema de Caracterização Maximal dos espaços de Hardy

Iniciamos a seção com a definição de uma função maximal suave que será uma das formas de caracterizar as distribuições temperadas nos espaços de Hardy.

Definição 2.1.1. Seja $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. A função maximal de f associada a Φ é definida por

$$M_\Phi f(x) \doteq \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|.$$

Observe que claramente o operador é sublinear isto é para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ temos:

i) $M_\phi(\lambda f)(x) = |\lambda| M_\phi f(x)$;

ii) $M_\phi(f+g)(x) \leqslant M_\phi f(x) + M_\phi g(x)$.

Definimos o espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < +\infty$ como o conjunto das distribuições $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para alguma $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$. No caso $p = +\infty$ definimos $H^\infty(\mathbb{R}^n) \doteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Fixado uma $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$, definimos o espaço $\mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n)$ como o conjunto das distribuições $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, e associamos o funcional

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\phi : \mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_\phi \doteq \left(\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Demonstraremos mais adiante com o Teorema de Caracterização Maximal (ver Teorema 2.1.16) que $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) = \mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n)$ independente da função ϕ, além do mais dadas $\phi_i \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_i(x)dx \neq 0$ para $i = 1, 2$ então $\|\cdot\|_{\phi_i}$ são comparáveis.

Definição 2.1.2. A função maximal não tangencial associada a $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida como

$$M^*_\Phi f(x) \doteq \sup_{t>0} \left\{ \sup_{|x-y|<t} |f * \Phi_t(y)| \right\}.$$

Observe que $\|M_\phi f\|_{L^p} \leqslant \|M^*_\phi f\|_{L^p}$, pois todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$M_\phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)| \leqslant \sup_{t>0} \left\{ \sup_{|x-y|<t} |f * \phi_t(y)| \right\} = M^*_\phi f(x).$$

Definição 2.1.3. A função maximal não tangencial com peso associada a $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $N \in \mathbb{N}$ para $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida como

$$M^{**}_{\Phi,N} f(x) \doteq \sup_{t>0, y\in\mathbb{R}^n} \left\{ |f * \Phi_t(x-y)| \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-N} \right\}.$$

Observe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$M_\phi f(x) \leqslant M^*_\phi f(x) \leqslant 2^N M^{**}_{\phi,N} f(x),$$

pois

$$\begin{aligned} M^*_\phi f(x) &= \sup_{|y|<t} \{|f * \phi_t(x-y)|\} = \sup_{|y|<t} \left\{ |f * \phi_t(x-y)| \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{N-N} \right\} \\ &\leqslant 2^N \sup_{y\in\mathbb{R}^n, t>0} \left\{ |f * \phi_t(x-y)| \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-N} \right\} = 2^N M^{**}_{\phi,N} f(x). \end{aligned}$$

Definição 2.1.4. Considere o conjunto finito $\mathcal{F} = \left\{ \|\cdot\|_{\alpha_j,\beta_j} \right\}_j$ de seminormas em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\mathscr{S}_\mathcal{F} \doteq \left\{ \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) : \ \|\phi\|_{\alpha_j,\beta_j} \leqslant 1, \ \forall \ \|\cdot\|_{\alpha_j,\beta_j} \in \mathcal{F} \right\}.$$

Definimos a grand função maximal associada a $S_\mathcal{F}$ como

$$M_\mathcal{F} f(x) \doteq \sup_{\phi\in\mathscr{S}_\mathcal{F}} M_\phi f(x).$$

Observe que se $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então existe $c > 0$ tal que para cada $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$\|M_\phi f\|_{L^p} \leqslant c\|M_\mathcal{F} f\|_{L^p}.$$

De fato, para $c = \max_j \left\{ \|\phi\|_{\alpha_j,\beta_j} \right\}$ temos $c^{-1}\phi \in \mathscr{S}_\mathcal{F}$ o qual para cada $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$c^{-1} M_\phi f(x) = M_{c^{-1}\phi} f(x) \leqslant M_\mathcal{F} f(x),$$

logo $M_\phi f(x) \leqslant c M_\mathcal{F} f(x)$.

Lema 2.1.5. *Seja $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < +\infty$ e $N > \frac{n}{p}$. Então existe $c(n,p,N) > 0$ tal que para cada $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$\|M^{**}_{\phi,N} f\|_{L^p} \leqslant c(n,N,p)\|M^*_\phi f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
M^{**}_{\phi,N} f(x)^p &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n, t>0}\left\{|f * \phi_t(x-y)|^p\left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-Np}\right\} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\sup_{2^{k-1}t\leqslant|y|\leqslant 2^k t}\left\{|f * \phi_t(x-y)|^p\left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-Np}\right\} + \\
&\quad \sup_{|y|\leqslant t}\left\{|f * \phi_t(x-y)|^p\left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-Np}\right\} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p}\sup_{2^{k-1}t\leqslant|y|\leqslant 2^k t}\{|f * \phi_t(x-y)|^p\} + 2^{Np}\sup_{|y|\leqslant t}\{|f * \phi_t(x-y)|^p\} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p}\sup_{|y|\leqslant 2^k t}\{|f * \phi_t(x-y)|^p\} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p}\sup_{|x-y|\leqslant 2^k t}\{|f * \phi_t(y)|^p\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p}\left[F^*_{2^k} f(x)\right]^p, \quad F^*_a f(x) = \sup_{|x-y|\leqslant at}|f * \phi_t(y)|.
\end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} F^*_a f(x)^p dx \leqslant c(n,p)(1+a)^n \int_{\mathbb{R}^n} F^*_1 f(x)^p dx$ (ver Corolário 5.1.9) e $F^*_1(x) = M^*_\phi(x)$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M^{**}_{\phi,N} f(x)|^p dx \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p}(1+2^k)^n c(n,p)\int_{\mathbb{R}^n} M^*_\phi f(x)^p dx,$$

então de $N > \frac{n}{p}$ temos que

$$\|M^{**}_{\phi,N}\|_{L^p} \leqslant c(n,p,N)\|M^*_\phi f\|_{L^p}.$$

□

Lema 2.1.6. *Sejam $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $N > \frac{n}{2}$. Então para cada par de multi-índices α e $\beta \in \mathbb{N}^n$ existe $c(\alpha,\beta,n,N) > 0$ tal que*

$$\|\widehat{\psi}\|_{\alpha,\beta} \leqslant c(\alpha,\beta,n,N)\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\|\psi\|_{\beta-\gamma+2N,\alpha-\gamma}.$$

Demonstração. Seja $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Então pelas propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.4.1), temos

$$|\zeta^\alpha\partial^\beta\widehat{\psi}(\zeta)| = \left|\zeta^\alpha\widehat{x^\beta\psi}(\zeta)\right| = \left|\widehat{\partial^\alpha(x^\beta\psi)}(\zeta)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}\partial^\alpha\left(x^\beta\psi(x)\right)e^{-ix\cdot\zeta}dx\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\partial^{\gamma}x^{\beta}\right)\left(\partial^{\alpha-\gamma}\psi(x)\right)\right|dx\\
&= \sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta} c(\alpha,\gamma,\beta)\int_{\mathbb{R}^n}\left|x^{\beta-\gamma}\frac{(1+|x|^2)^N}{(1+|x|^2)^N}\partial^{\alpha-\gamma}\psi(x)\right|dx\\
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta} c(\alpha,\gamma,\beta)\|\psi\|_{2N+\beta-\gamma,\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx\\
&\leqslant C(\alpha,\beta,n,N)\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\|\psi\|_{2N+\beta-\gamma,\alpha-\gamma}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.1.7. *Sejam $N > \frac{n}{2}$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 1$. Então para cada $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência $\{\eta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que:*

i) $\psi = \sum_{k=0}^{+\infty}\eta^k * \phi_{2^{-k}}$.

ii) Para todo $M > 0$ e $\|.\|_{\alpha,\beta}$ seminorma em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\frac{\|\eta^k\|_{\alpha,\beta}}{2^{-kM}} \leqslant 2^{-k}c(\alpha,n,N,\phi)\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}\ \sum_{\theta\leqslant\delta}\|\psi\|_{\delta-\theta+2N,\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta-\theta}.$$

Em particular

$$\frac{\|\eta^k\|_{\alpha,\beta}}{2^{-kM}} \to 0, \qquad k \to +\infty.$$

Demonstração. Sejam $M > 0$ e $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Para demonstrar a primeira propriedade basta exibir a existência de uma sequência $\{\eta^k\}_k$ tal que $\hat{\psi}(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty}\hat{\eta^k}(\xi)\hat{\phi}(2^{-k}\xi)$, pois $\widehat{\phi_{2^{-k}}}(\zeta) = \hat{\phi}(2^{-k}\zeta)$ e pelo Teorema 1.4.3 temos

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}\right)(x)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\eta^k}\hat{\phi}(2^{-k}\cdot)\right)(x)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\eta^k * \phi_{2^{-k}}(x).
\end{aligned}
$$

Fixe uma função $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{\theta} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\theta} = 1$ em $B(0,1)$ e *supp* $\hat{\theta} \subset B(0,2)$. Definimos $\hat{\psi}_0(\xi) \doteq \hat{\theta}(\xi)$ e $\hat{\psi}_k(\xi) \doteq \hat{\theta}(2^{-k}\xi) - \hat{\theta}(2^{1-k}\xi)$ para $k \in \mathbb{N}$. Então

- *supp* $\hat{\psi}_k \subset B(0,2^{k+1})\backslash B(0,2^{k-1})$.
  É imediato, pois *supp* $\hat{\theta}(2^{-k}\cdot) \subset B(0,2^{k+1})$, *supp* $\hat{\theta}(2^{1-k}\cdot) \subset B(0,2^k)$ e $\widehat{\psi_k} \equiv 0$ em $B(0,2^{k-1})$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{L} \hat{\psi}_k(\xi) = \hat{\theta}(2^{-L}\xi)$ (é telescópica), no qual $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{\psi}_k(\xi)$, pois

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{\psi_k}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}(2^{-n}\xi) = \widehat{\theta}(0) = 1$$

Agora de $\hat{\phi}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, afirmamos que para k_0 suficientemente grande temos $|\hat{\phi}(\xi)| \geqslant \dfrac{1}{2}$ para todo $\xi \in B(0, 2^{-(k_0-1)})$, assim

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{\psi}_k(\xi)\hat{\psi}(\xi)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\hat{\psi}_k(\xi)\psi(\xi)}{\widehat{\phi}(2^{-(k+k_0)}\xi)}\widehat{\phi}(2^{-(k+k_0)}\xi).\end{aligned}$$

Definimos $\widehat{\eta^k}(\xi) \doteq \dfrac{\widehat{\psi_k}(\xi)}{\widehat{\phi}(2^{-(k+k_0)}\xi)}\hat{\psi}(\xi)$ que pertenece a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pois $\hat{\phi}(2^{-(k+k_0)}) \geqslant \dfrac{1}{2}$ quando $\xi \in$ *supp* $\widehat{\psi_k} \subset B(0, 2^{k+1})$, logo o produto pertenece $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Note também *supp* $\widehat{\eta^k} \subset$ *supp* $\widehat{\psi_k} \subset B(0, 2^{k+1})\backslash B(0, 2^{k-1})$.
Agora provaremos que cada par de multi-índices α, β satisfazem

$$\|\eta^k\|_{\alpha,\beta} \leqslant 2^{-kM}2^{-k}c(\alpha, n, N, \phi) \sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta} \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma} \sum_{\theta\leqslant\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta,\ \theta\leqslant\delta} \|\psi\|_{\delta-\theta+2N,\ \lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta-\theta} \tag{2.1}$$

<u>Com efeito</u>:

$$\begin{aligned}(2\pi)^n|x^\alpha\partial^\beta\eta^k(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\left\{x^\alpha\partial^\beta\eta^k\right\}(\zeta)e^{ix\cdot\zeta}d\zeta\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial^\alpha\left[\mathcal{F}\left\{\partial^\beta\eta^k\right\}(\zeta)\right]\right| d\zeta\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\partial^\alpha\left[\zeta^\beta\widehat{\eta^k}(\zeta)\right]\right|d\zeta = \int_{B(0,2^{k+1})\backslash B(0,2^{k-1})}\left|\partial^\alpha\left[\zeta^\beta\widehat{\eta^k}(\zeta)\right]\right|d\zeta\\ &= \int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}\left|\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\partial^\gamma\zeta^\beta\partial^{\alpha-\gamma}\widehat{\eta^k}(\zeta)\right|d\zeta\\ &\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}|\partial^\gamma\zeta^\beta||\partial^{\alpha-\gamma}\widehat{\eta^k}(\zeta)|d\zeta\\ &\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha}\sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\alpha-\gamma}{\delta}\int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}|\partial^\gamma\zeta^\beta||\partial^\delta\hat{\psi}(\zeta)|\left|\partial^{\alpha-\gamma-\delta}\left[\frac{\widehat{\psi_k}(\zeta)}{\phi(2^{-(k+k_0)}\zeta)}\right]\right|d\zeta,\end{aligned}$$

assim

$$|x^\alpha\partial^\beta\eta^k(x)| \leqslant c\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}\int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}|\zeta^{\beta-\gamma}||\partial^\delta\hat{\psi}(\zeta)|\left|\partial^{\alpha-\gamma-\delta}\left[\frac{\widehat{\psi_k}(\zeta)}{\phi(2^{-(k+k_0)}\zeta)}\right]\right|d\zeta \tag{2.2}$$

Inicialmente provaremos que para todo α multi-índice temos que

$$\left|\partial^{\alpha}\left[\frac{\widehat{\psi_k}(\zeta)}{\hat{\phi}(2^{-(k+k_0)}\zeta))}\right]\right| \leqslant c_{\alpha}(\phi,\theta)2^{-k|\alpha|}.$$

Começamos com

$$\left|\partial^{e_i}\left[\frac{\widehat{\psi_k}(\zeta)}{\hat{\phi}(2^{-(k+k_0)}\zeta))}\right]\right| \leqslant \frac{4\|\hat{\theta}\|_{\infty}2^{-k}+2^{1-k_0}\|\hat{\theta}\|_{\infty}2^{-k}\|\hat{\phi}\|_{0,e_i}}{\hat{\phi}(2^{-(k+k_0)}\zeta)^2} \leqslant 2^{-k}c_{e_i}.$$

A última desigualdade é valida, pois $\frac{1}{2} \leqslant \hat{\phi}(2^{-(k+k_0)}\zeta)^2$ quando $\zeta \in B(0,2^{k+1})\backslash B(0,2^{k-1})$. Para demonstrar a desigualdade com α geral só realizamos o processo de indução. Note que a função θ está fixada o qual não tem importância e assim $c_{\alpha}(\phi,\theta) = c_{\alpha}(\phi)$.
Voltando para (2.2) temos

$$\begin{aligned}
|x^{\alpha}\partial^{\beta}\eta^k(x)| &\leqslant c\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}\int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}|\zeta^{\beta-\gamma}||\partial^{\delta}\hat{\psi}(\zeta)|c_{\alpha-\gamma-\delta}2^{-k|\alpha-\gamma-\delta|}d\zeta \\
&\leqslant C\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}2^{k|\gamma+\delta|}\int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}|\zeta^{\beta-\gamma}||\partial^{\delta}\hat{\psi}(\zeta)|d\zeta \\
&= C\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}2^{k|\gamma+\delta|}\int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}\frac{|\zeta^{\gamma+\delta}||\zeta^{M+n+1}|}{|\zeta^{\gamma+\delta}||\zeta^{M+n+1}|}|\zeta^{\beta-\gamma}||\partial^{\delta}\hat{\psi}(\zeta)|d\zeta \\
&= C\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}2^{k|\gamma+\delta|}\int_{2^{k-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 2^{k+1}}\frac{\|\hat{\psi}\|_{\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta,\ \delta}}{|\zeta^{\gamma+\delta}||\zeta^{M+n+1}|}d\zeta \\
&\leqslant C\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}2^{k|\gamma+\delta|}\|\hat{\psi}\|_{\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta,\ \delta}\ 2^{-k[M+1+|\gamma+\delta|]}|B(0,1)|\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right) \\
&= 2^{-kM}2^{-k}C\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}\|\hat{\psi}\|_{\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta,\ \delta},
\end{aligned}$$

logo pelo Lema 2.1.6 temos que para $N > \frac{n}{2}$

$$|x^{\alpha}\partial^{\beta}\eta^k(x)| \leqslant 2^{-kM}2^{-k}C\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}\ \sum_{\theta\leqslant\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta,\ \theta\leqslant\delta}\|\psi\|_{\delta-\theta+2N,\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta-\theta}.$$

Então para todo $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\frac{\|\eta^k\|_{\alpha,\beta}}{2^{-kM}} \leqslant 2^{-k}c(\alpha,n,N,\phi)\sum_{\gamma\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant\beta}\ \sum_{\delta\leqslant\alpha-\gamma}\ \sum_{\theta\leqslant\delta}\|\psi\|_{\delta-\theta+2N,\lceil M\rceil+1+n+\beta+\delta-\theta} \tag{2.3}$$

Claramente $\frac{\|\eta^k\|_{\alpha,\beta}}{2^{-kM}} \longrightarrow 0$ quando $k \to +\infty$. $\square$

Lema 2.1.8. *Sejam $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 1$, $0 < p < +\infty$ e $N > \frac{n}{p}$. Então existe um conjunto finito de seminormas $\mathcal{F}$ e uma constante $c(n,p,N,\phi) > 0$ tal que cada $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$\|M_{\mathcal{F}}f\|_{L^p} \leqslant c(n,p,N,\phi)\|M_{\phi}^{*}f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Definamos $\mathcal{F} \doteq \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : \ |\alpha| \leqslant n+3N+1, \ |\beta| \leqslant 2N+2n+2\}$ e seja $\psi \in S_{\mathcal{F}}$. Usando o Lema anterior e $(\eta^k * \phi_{2^{-k}})_t = \eta_t^k * (\phi_{2^{-k}})_t$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
f * \psi_t(x) &= f * \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \eta^k * \phi_{2^{-k}} \right)_t (x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f * \left(\eta^k * \phi_{2^{-k}}\right)_t (x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} f * \left(\eta_t^k * (\phi_{2^{-k}})_t\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(f * \eta_t^k\right) * (\phi_{2^{-k}})_t(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\eta_t^k * f\right) * (\phi_{2^{-k}})_t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(f * (\phi_{2^{-k}})_t\right)(x-y)\eta_t^k(y)dy \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f * \phi_{2^{-k}t})(x-y) \frac{\eta^k(\frac{y}{t})}{t^n} \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N-N} dy \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f * \phi_{2^{-k}t})(x-y) \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{-N} \frac{\eta^k(\frac{y}{t})}{t^n} \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N} dy.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f * \psi_t(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\phi,N}^{**} f(x) \frac{|\eta^k(\frac{y}{t})|}{t^n} \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N} dy \\
&= M_{\phi,N}^{**} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\eta^k(\frac{y}{t})|}{t^n} \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N} dy \\
&= M_{\phi,N}^{**} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta^k(y)| \left(1 + 2^k |y|\right)^{N} dy \\
&\leqslant M_{\phi,N}^{**} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{kN} |\eta^k(y)| \frac{(1+|y|)^{n+N+1}}{(1+|y|)^{n+1}} dy \\
&\leqslant M_{\phi,N}^{**} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{kN} \sup_{|\alpha| \leqslant n+N+1} \|\eta^k\|_{\alpha,0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|)^{n+1}} dy \\
&= C(n) M_{\phi,N}^{**} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{kN} \sup_{|\alpha| \leqslant n+N+1} \|\eta^k\|_{\alpha,0}.
\end{aligned}$$

Aplicando (2.3) para $M \doteq N$, $|\alpha| \leqslant n+N+1$ temos que

$$\begin{aligned}
2^{kM} \|\eta^k\|_{\alpha,0} &\leqslant 2^{-k} c(\alpha,n,N,\phi) \sum_{\delta \leqslant \alpha} \sum_{\theta \leqslant \delta} \|\psi\|_{\delta-\theta+2N, \ N+1+n+\delta-\theta} \\
&\leqslant 2^{-k} c(\alpha,n,N,\phi) \sum_{|\overline{\alpha}| \leqslant n+3N+1, \ |\overline{\beta}| \leqslant 2n+2N+2} \|\psi\|_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} \\
&\leqslant 2^{-k} c(n,N,\phi),
\end{aligned}$$

então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|f * \psi_t(x)| \leqslant \overline{C}(n,N,\phi) M_{\phi,N}^{**} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}.$$

Passando o supremo temos que para todo $\psi \in S_{\mathcal{F}}$ satisfaz $M_\psi f(x) \leqslant C(n, N, \phi) M^{**}_{\phi,N} f(x)$, o qual do Lema 2.1.5 temos que

$$\|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} \leqslant c(n, p, N, \phi) \|M^{**}_{\phi,N} f\|_{L^p} \leqslant C(n, p, N, \phi) \|M^*_\phi f\|_{L^p}.$$

. □

Lema 2.1.9. *Sejam* $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ *e* $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha| \leqslant N, |\beta| \leqslant M}$ *um conjunto de seminormas em* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*. Então existe* $c(R, \phi, \mathcal{F}) > 0$ *tal que todo* $h \in B(0, R)$ *satisfaz*

$$M_{\phi(\cdot + h)} f(x) \leqslant c(R, \phi, \mathcal{F}) M_{\mathcal{F}} f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Sejam $|h| \leqslant R$ e $\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos.

$$\begin{aligned} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x+h)\right| &\leqslant |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \phi(x+h)| \leqslant (|x+h| + |h|)^{|\alpha|} \, |\partial^\beta \phi(x+h)| \\ &\leqslant 2^{|\alpha|} |x+h|^{|\alpha|} |\partial^\beta \phi(x+h)| + 2^{|\alpha|} |h|^{|\alpha|} |\partial^\beta \phi(x+h)|, \qquad (a+b)^j \leqslant 2^j a^j + 2^j b^j \\ &\leqslant 2^{|\alpha|} \sum_{|\gamma| \leqslant |\alpha|} c_{\gamma.\alpha} \left|(x+h)^\gamma \partial^\beta \phi(x+h)\right| + 2^{|\alpha|} R^{|\alpha|} \|\phi\|_{0,\beta} \\ &\leqslant c_\alpha \sum_{|\gamma| \leqslant |\alpha|} \|\phi\|_{\gamma,\beta} + c_\alpha R^{|\alpha|} \|\phi\|_{0,\beta} \leqslant c(R, \phi, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Então para toda $\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$ temos

$$\|\phi(\cdot + h)\|_{\alpha,\beta} \leqslant c(R, \phi, \mathcal{F}),$$

o que implica $M_{\phi(\cdot+h)} f(x) \leqslant c(R, \phi, \mathcal{F}) M_{\mathcal{F}} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. □

Lema 2.1.10. *Sejam* $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < +\infty$, $N > \dfrac{n}{p}$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ *e* $\|M^*_\phi f\|_{L^p} < +\infty$*. Então existe uma constante* $C(n, p, N, \phi) > 0$ *tal que*

$$\|M^*_\phi f\|_{L^p} \leqslant C(n, p, N, \phi) \|M_\phi f\|_{L^p} \tag{2.4}$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ do Lema 2.1.8 e para $\lambda > 0$ definimos

$$F \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^n / \ M_{\mathcal{F}} f(x) \leqslant \lambda M^*_\phi f(x)\right\}.$$

Então do Lema 2.1.8 temos

$$\begin{aligned} \int_{F^c} |M^*_\phi f(x)|^p dx &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{F^c} |M_{\mathcal{F}} f(x)|^p dx \leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |M_{\mathcal{F}} f(x)|^p dx \\ &\leqslant \frac{c^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |M^*_\phi f(x)|^p dx \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |M^*_\phi f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

A última desigualdade é valida ao escolher $\lambda > 0$ tal que $2^{\frac{1}{p}} c \leqslant \lambda$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M^*_\phi f(x)|^p dx = \int_F |M^*_\phi f(x)|^p dx + \int_{F^c} |M^*_\phi f(x)|^p dx$$

$$\leqslant \int_F |M_\phi^* f(x)|^p dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |M_\phi^* f(x)|^p dx,$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\phi^* f(x)|^p dx \leqslant 2 \int_F |M_\phi^* f(x)|^p dx. \tag{2.5}$$

Afirmação: para $p > q$ existe uma constante $c(n, p, N, \phi) > 0$ tal que toda $x \in F$ satisfaz

$$M_\phi^* f(x) \leqslant c(n, p, N, \phi) \left[\mathcal{M}(M_\phi f)^q(x)\right]^{\frac{1}{q}},$$

no qual $\mathcal{M}$ é a função Maximal de Hardy-Littlewood. Para demonstrar a desigualdade, vamos a definir

$$\begin{aligned} f(x,t) &\doteq f * \phi_t(x), \\ f^*(x) &\doteq \sup_{|x-y|<t} |f(y,t)| = \sup_{|x-y|<t} |f * \phi_t(y)| = M_\phi^* f(x). \end{aligned}$$

Observe que como $M_\phi^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos que $M_\phi^* f(x) < +\infty$ em quase todo ponto. Assumimos sem perda de generalidade que $M_\phi^* f(x) < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Seja $x \in F$, pela definição de $M_\phi^* f(x)$ existe $(y, t) \in \Gamma(x) = \{(w, s) : \ |x - w| < s\}$ tal que

$$\frac{f^*(x)}{2} \leqslant f(y,t).$$

Fixemos $r > 0$ posteriormente escolhido e assim dado $u \in B(y, rt)$ temos

$$|f(u,t) - f(y,t)| \leqslant |u - y| \sup_{z\in[u,y]} |\nabla_z f(z,t)| \leqslant rt \sup_{z\in B(y,rt)} |\nabla_z f(z,t)|.$$

Mas

$$\begin{aligned} \partial_{z_i} f(z,t) &= (f * \partial_{z_i}\phi_t)(z) = \frac{1}{t}\left(f * (\partial_{z_i}\phi)_t\right)(z) \\ &= \frac{1}{t}\langle f, (\partial_{z_i}\phi)_t(z - \cdot)\rangle = \frac{1}{t}\left\langle f, \frac{1}{t^n}(\partial_{z_i}\phi)\left(\frac{x-\cdot}{t} - h\right)\right\rangle = \frac{1}{t}\left(f * (T_h\partial_{z_i}\phi)_t\right)(x), \end{aligned}$$

no qual $ht = x - z$ e $T_h g(x) \doteq g(x - h)$. Como

$$|h| = \left|\frac{x-z}{t}\right| = \left|\frac{x-y+y-z}{t}\right| \leqslant \frac{t+rt}{t} \leqslant r+1$$

temos

$$\begin{aligned} |f(u,t) - f(y,t)| &\leqslant rt \sup_{z\in B(y,rt)} |\nabla_z f(z,t)| \leqslant rt\sqrt{n} \sup_{z\in B(y,rt)} \max_{i=1,\dots,n} |\partial_{z_i} f(z,t)| \\ &\leqslant rt\sqrt{n} \sup_{|h|\leqslant r+1} \max_{i=1,\dots,n} \left|\frac{1}{t}\left(f * (T_h\partial_{z_i}\phi)_t\right)(x)\right| \\ &= r\sqrt{n} \sup_{|h|\leqslant r+1} \max_{i=1,\dots,n} \left|\left(f * (T_h\partial_{z_i}\phi)_t\right)(x)\right| \\ &\leqslant r\sqrt{n} \sup_{|h|\leqslant r+1} \max_{i=1,\dots,n} M_{(T_h\partial_{z_i}\phi)} f(x) \end{aligned}$$

$$\leqslant r\sqrt{n}dM_{\mathcal{F}}f(x) \leqslant r\sqrt{n}d\lambda M_{\phi}^{*}f(x),$$

no qual a penúltima desigualdade é justificada pelo Lema 2.1.9. Portanto como $u \in B(y,rt)$ é arbitrário, podemos escolher r tal que $rd\sqrt{n}\lambda \leqslant \dfrac{1}{4}$, assim todo $u \in B(y,rt)$ satisfaz

$$|f(u,t)| \geqslant |f(y,t)| - |f(y,t) - f(u,t)| \geqslant \frac{f^{*}(x)}{2} - \frac{f^{*}(x)}{4},$$

Logo de $B(y,rt) \subset B(x,(r+1)t)$ temos

$$\begin{aligned}
f^{*}(x)^{q} &\leqslant 4^{q}\frac{1}{|B(y,rt)|}\int_{B(y,rt)}|f(u,t)|^{q}du \leqslant 4^{q}\frac{1}{|B(y,rt)|}\int_{B(x,(r+1)t)}|f(u,t)|^{q}du\\
&\leqslant 4^{q}\frac{1}{|B(y,rt)|}\frac{|B(x,(r+1)t)|}{|B(x,(r+1)t)|}\int_{B(x,(r+1)t)}|f*\phi_{t}(u)|^{q}du\\
&\leqslant 4^{q}\frac{|B(x,(r+1)t)|}{|B(y,rt)|}\frac{1}{|B(x,(r+1)t)|}\int_{B(x,(r+1)t)}M_{\phi}f(u)^{q}du\\
&\leqslant 4^{q}\frac{|B(x,(r+1)t)|}{|B(y,rt)|}\mathcal{M}\left[(M_{\phi}f)^{q}\right](x)\\
&\leqslant 4^{q}\left(\frac{1+r}{r}\right)^{n}\mathcal{M}\left[(M_{\phi}f)^{q}\right](x).
\end{aligned}$$

Portanto como $M_{\phi}^{*}f(x) = f^{*}(x)$ e $x \in F$ arbitrário, temos

$$M_{\phi}^{*}f(x) \leqslant c(n,p,N,\phi)\left\{\mathcal{M}\left[(M_{\phi}f)^{q}\right](x)\right\}^{\frac{1}{q}}, \qquad \forall\, x \in F.$$

Uma vez demonstrada a desigualdade vamos finalizar a prova do Lema. Como $1 < \dfrac{p}{q}$ então $\mathcal{M}$ é contínua em $L^{\frac{p}{q}}(\mathbb{R}^{n})$, da continuidade e de (2.5) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n}}|M_{\phi}^{*}f(x)|^{p}dx \leqslant 2\int_{F}|M_{\phi}^{*}f(x)|^{p}dx &\leqslant 2c^{p}\int_{F}\left[\mathcal{M}(M_{\phi}f)^{q}(x)\right]^{\frac{p}{q}}dx\\
&\leqslant C\|(M_{\phi}f)^{q}\|_{L^{\frac{p}{q}}}^{\frac{p}{q}} = C\|M_{\phi}f\|_{L^{p}}^{p}.
\end{aligned}$$

Portanto demonstramos que:

$$\|M_{\phi}^{*}f\|_{L^{p}} \leqslant C(n,p,N,\phi)\|M_{\phi}f\|_{L^{p}}.$$

□

Vamos a demonstrar agora que $M_{\phi}^{*}f \in L^{p}(\mathbb{R}^{n})$ se $M_{\phi}f \in L^{p}(\mathbb{R}^{n})$. Para isso vamos a definir as seguintes funções

$$\begin{aligned}
M_{\phi}^{\varepsilon,L}f(x) &\doteq \sup_{t<\varepsilon^{-1}}|f*\phi_{t}(x)|\frac{t^{L}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x|)^{L}},\\
M_{\phi}^{*,\varepsilon,L}f(x) &\doteq \sup_{|x-y|<t<\varepsilon^{-1}}|f*\phi(y)|\frac{t^{L}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^{L}},
\end{aligned}$$

$$M^{**,\varepsilon,L}_{\phi,N} f(x) \doteq \sup_{y\in\mathbb{R}^n, t<\varepsilon^{-1}} |f * \phi_t(x-y)\frac{t^L}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x-y|)}\left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-N}|$$
$$M_{\mathcal{F}}{}^{\varepsilon,L} f(x) \doteq \sup_{\phi\in S_{\mathcal{F}}} M^{\varepsilon,L}_{\phi} f(x).$$

e provar algumas proposições.

Proposição 2.1.11. *Sejam $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \varepsilon < 1$. Então existe $L = L(f) > 0$ tal que $M^{*,\varepsilon,L}_{\phi} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Desde que $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 1.3.6 existem $A = A(f), m = m(f) \in \mathbb{N}$ tais que todo $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$|\langle f,\psi\rangle| \leqslant A\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|x|^2)^m\partial^\alpha\psi(x)\right|.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $|x-y| < t < \varepsilon^{-1}$, então pela desigualdade anterior temos

$$\begin{aligned}
|f*\phi_t(y)| = |\langle f,\phi_t(y-\cdot)\rangle| &\leqslant A\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|z|^2)^m\partial^\alpha\phi_t(y-z)\right|\\
&= A\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left|\left(1+t^2|\frac{z}{t}|^2)\right)^m\frac{1}{t^{n+|\alpha|}}(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|\\
&\leqslant A\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left|\left[1+t^2\left(|\frac{y-z}{t}|+|\frac{y}{t}|\right)^2\right]^m\frac{1}{t^{n+|\alpha|}}(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|\\
&\leqslant A\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{t^{n+|\alpha|}}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{2^m\left(1+4t^2|\frac{y-z}{t}|^2\right)^m\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|+8^m|y|^{2m}\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|\right\}
\end{aligned}$$

Se $1 \leqslant t$:

$$\begin{aligned}
|f*\phi_t(y)| &\leqslant A\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{2^m\left(1+4t^2|\frac{y-z}{t}|^2\right)^m\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|+8^m|y|^{2m}\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|\right\}\\
&\leqslant At^{2m}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{2^m\left(1+4|\frac{y-z}{t}|^2\right)^m\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|+8^m|y|^{2m}\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|\right\}\\
&\leqslant At^{2m}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left[c\sum_{|\beta|\leqslant 2m}\|\phi\|_{\beta,\alpha}+c|y|^{2m}\|\phi\|_{0,\alpha}\right]\leqslant\varepsilon^{-2m}\left[c_1(f,\phi)+c_2(f,\phi)|y|^{2m}\right].
\end{aligned}$$

Se $0 < t < 1$:

$$|f*\phi_t(y)| \leqslant \frac{A}{t^{n+m}}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{2^m\left(1+4t^2|\frac{y-z}{t}|^2\right)^m\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|+8^m|y|^{2m}\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|\right\}$$

$$\begin{aligned}
|f*\phi_t(y)| &\leqslant \frac{A}{t^{n+m}}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{2^m\left(1+4|\frac{y-z}{t}|^2\right)^m\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|+8^m|y|^{2m}\left|(\partial^\alpha\phi)\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|\right\}\\
&\leqslant \frac{A}{t^{n+m}}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left[c\sum_{|\beta|\leqslant 2m}\|\phi\|_{\beta,\alpha}+c|y|^{2m}\|\phi\|_{0,\alpha}\right]\leqslant\frac{1}{t^{n+m}}\left[c_1(f,\phi)+c_2(f,\phi)|y|^{2m}\right].
\end{aligned}$$

Agora mostremos que $M^{*,\varepsilon,L}_{\phi} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para L suficientemente grande.

- $\displaystyle\int_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx$: Seja $L > \max\{2m, n+m\}$. No caso que $1 \leqslant t$ quando $|x-y| < t < \varepsilon^{-1}$ temos

$$\begin{aligned}|f * \phi_t(y)|\frac{t^L}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^L} &\leqslant \varepsilon^{-2m}(c_1+c_2|y|^{2m})\frac{t^L}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^L}\\ &\leqslant \varepsilon^{-2m}(c_1+c_2|y|^{2m}) \leqslant \varepsilon^{-L}(c_1+c_2|y|^{2m}).\end{aligned}$$

No caso que $0 < t < 1$ então $0 < t^{L-(n+m)} < 1$, quando $|x-y| < t < \varepsilon^{-1}$ temos

$$\begin{aligned}|f * \phi_t(y)|\frac{t^L}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^L} &\leqslant \frac{1}{t^{n+m}}(c_1+c_2|y|^{2m})\frac{t^L}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^L}\\ &= (c_1+c_2|y|^{2m})\frac{t^{L-(n+m)}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^L} \leqslant (c_1+c_2|y|^{2m})\frac{1}{\varepsilon^L}\\ &= \varepsilon^{-L}(c_1+c_2|y|^{2m}).\end{aligned}$$

Assim temos

$$M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) \leqslant \varepsilon^{-L} \sup_{|x-y|<t<\varepsilon^{-1}} (c_1+c_2|y|^{2m}).$$

Quando $x \in B(0, 2(\varepsilon^{-1}-1))$ temos que $|y| \leqslant |x-y| + |x| \leqslant \frac{3}{\epsilon} - 2$, logo

$$M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) \leqslant \varepsilon^{-L} \sup_{|x-y|<t<\varepsilon^{-1}} (c_1+c_2|y|^{2m}) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^L}$$

o qual

$$\int_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx \leqslant \int_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))} \frac{C^p}{\varepsilon^{Lp}} dx < +\infty$$

- $\displaystyle\int_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))^c} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx$:
Quando $|x| \geqslant 2(\varepsilon^{-1}-1)$ temos que

$$\frac{\varepsilon}{2}|x| \leqslant \varepsilon + \varepsilon|x| - 1 \leqslant \varepsilon + t + \varepsilon|x| - \varepsilon t,$$

como

$$\varepsilon|x| \leqslant \varepsilon|x-y| + \varepsilon|y| \leqslant \varepsilon t + \varepsilon|y|,$$

logo

$$\frac{\varepsilon}{2}|x| \leqslant \varepsilon + t + \varepsilon|x| - \varepsilon t \leqslant \varepsilon + t + \varepsilon|y|,$$

assim para $|x-y| < t < \varepsilon^{-1}$ temos

$$\frac{(c_1+c_2|y|^{2m})t^L}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^L} \leqslant 2^L\frac{(c_1+c_2|y|^{2m})t^L}{\varepsilon^L|x|^L} \leqslant t^L\frac{2^L}{\varepsilon^L}\frac{[c_1+c_2(\varepsilon^{-1}+|x|)^{2m}]}{|x|^L}.$$

No caso que $1 \leqslant t$ temos

$$\begin{aligned}
|f * \phi_t(y)| \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} &\leqslant \varepsilon^{-2m} \frac{(c_1 + c_2|y|^{2m})t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} \\
&\leqslant \varepsilon^{-2m} t^L \frac{2^L}{\varepsilon^L} \frac{[c_1 + c_2(\varepsilon^{-1} + |x|)^{2m}]}{|x|^L} \\
&\leqslant \varepsilon^{-2m-2L} 2^L \frac{[c_1 + c_2(\varepsilon^{-1} + |x|)^{2m}]}{|x|^L}.
\end{aligned}$$

No caso que $0 < t < 1$, como $L > m + n$ temos

$$\begin{aligned}
|f * \phi_t(y)| \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} &\leqslant \frac{1}{t^{n+m}} \frac{(c_1 + c_2|y|^{2m})t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} \\
&\leqslant t^{L-(n+m)} \frac{2^L}{\varepsilon^L} \frac{[c_1 + c_2(\varepsilon^{-1} + |x|)^{2m}]}{|x|^L} \\
&\leqslant \varepsilon^{-L} 2^L \frac{[c_1 + c_2(\varepsilon^{-1} + |x|)^{2m}]}{|x|^L}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\chi_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))}(x) M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) &= \chi_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))}(x) \sup_{|x-y|<t<\varepsilon^{-1}} |f * \phi_t(y)| \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} \\
&\leqslant \varepsilon^{-2m-2L} 2^L \frac{[c_1 + c_2(\varepsilon^{-1} + |x|)^{2m}]}{|x|^L}.
\end{aligned}$$

Desde que para $L = L(f) > 0$ suficientemente grande a função

$$g(x) = \varepsilon^{-2m-2L} 2^L \chi_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))}(x) \frac{c_1 + c_2(\varepsilon^{-1} + |x|)^{2m}}{|x|^L} \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

o qual de

$$\chi_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) \leqslant g(x),$$

temos que $\chi_{B(0,2(\varepsilon^{-1}-1))} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Portanto de ambas as contas temos que para $L = L(f) > 0$ suficientemente grande $M_\phi^{*,\varepsilon,L} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 < \varepsilon < 1$. □

Observe que $L > 0$ é independente de $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \varepsilon < 1$ mas dependente da $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.1.12. *Sejam $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < +\infty$, $N > \dfrac{n}{p}$, $0 < \varepsilon < 1$ e $L > 0$. Então existe $c(n, N, p) > 0$ tal que*

$$\|M_{\phi,N}^{**,\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant c(n, N, p) \|M_\phi^{*,\varepsilon,L} f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Vamos a trabalhar similarmente ao Lema 2.1.5

$$
\begin{aligned}
M_\phi^{**,\varepsilon,L} f(x)^p &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n, t<\varepsilon^{-1}} \left\{ |f*\phi_t(x-y)|^p \frac{t^{Lp}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x-y|)^{Lp}} \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \right\} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{2^{k-1}\leqslant|y|\leqslant 2^k t, t<\varepsilon^{-1}} \left\{ |f*\phi_t(x-y)|^p \frac{t^{Lp}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x-y|)^{Lp}} \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \right\} \\
&\quad + \sup_{|y|\leqslant t, t<\varepsilon^{-1}} \left\{ |f*\phi_t(x-y)|^p \frac{t^{Lp}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x-y|)^{Lp}} \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \right\} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p} \sup_{2^{k-1}\leqslant|y|\leqslant 2^k t, t<\varepsilon^{-1}} \left\{ |f*\phi_t(x-y)|^p \frac{t^{Lp}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x-y|)^{Lp}} \right\} \\
&\quad + \sup_{|y|\leqslant t, t<\varepsilon^{-1}} \left\{ |f*\phi_t(x-y)|^p \frac{t^{Lp}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x-y|)^{Lp}} \right\} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p} \sup_{|y|\leqslant 2^k t, t<\varepsilon^{-1}} \left\{ |f*\phi_t(x-y)|^p \frac{t^{LP}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|x-y|)^{Lp}} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p} \sup_{|x-y|\leqslant 2^k t, t<\varepsilon^{-1}} \left\{ |f*\phi_t(y)|^p \frac{t^{LP}}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^{Lp}} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p} \left[F_{2^k}^{*,\varepsilon,L} f(x) \right]^p,
\end{aligned}
$$

no qual $F_a^{*,\varepsilon,L} f(x) \doteq \sup_{|y|\leqslant at, t<\varepsilon^{-1}} |f*\phi_t(y)| \frac{t^L}{(\varepsilon+t+\varepsilon|y|)^L}$. Mas pelo Lema 5.1.9

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \left[F_a^{*,\varepsilon,L} f(x)\right]^p dx \leqslant c(n,p)(1+a)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left[F_1^{*,\varepsilon,L} f(x)\right]^p dx,
$$

então de $N > \dfrac{n}{p}$ e $F_1^{*,\varepsilon,L} f(x) = M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi^{**,\varepsilon,L} f(x)^p dx &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p}(1+2^k) c(n,p) \int_{\mathbb{R}^n} \left[F_1^{*,\varepsilon,L} f(x)\right]^p dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-N(k-1)p}(1+2^k)^n c(n,p) \int_{\mathbb{R}^n} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx \\
&\leqslant C(n,N,p) \int_{\mathbb{R}^n} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx.
\end{aligned}
$$

Portanto $\|M_{\phi,N}^{**,\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant C(n,N,p)\|M_\phi^{*,\varepsilon,L} f\|_{L^p}$. □

Observe que a constante é independente de $L > 0$ e $\varepsilon > 0$.

Proposição 2.1.13. *Sejam $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < +\infty$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, $N > \dfrac{n}{p}$, $0 < \varepsilon < 1$ e $L > 0$. Então existem uma constante $c(n,p,N,L,\phi) > 0$ e um conjunto finito de seminormas $\mathcal{F}$ tal que*

$$
\|M_{\mathcal{F}}^{\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant c(n,p,N,L,\phi)\|M_\phi^{*,\varepsilon,L} f\|_{L^p}.
$$

Demonstração. Definimos $\mathcal{F} \doteq \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha|\leqslant 3N+n+1+L, |\beta|\leqslant 2N+2n+2+L}$, sejam $\psi \in S_{\mathcal{F}}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Para $t < \varepsilon^{-1}$ fazemos o mesmo que no Lema 2.1.8 e temos

$$|f * \psi_t(x)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f * \phi_{2^{-k}t})(x-y) t^{-n} \eta^k \left(\frac{y}{t}\right) \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N-N} dy \right|,$$

assim

$$\begin{aligned}
&|f * \psi_t(x)| \frac{t^l}{(\varepsilon + t + \varepsilon|x|)^L} \\
&\leqslant \frac{t^L (2^{-k}t)^{L-L}}{(\varepsilon + t + \varepsilon|x|)^L} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f * \phi_{2^{-k}t})(x-y) t^{-n} \frac{|\eta^k(\frac{y}{t})|}{(\varepsilon + 2^{-k}t + \varepsilon|x-y|)^{L-L}} \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N-N} dy \\
&\leqslant M^{**,\varepsilon,L}_{\phi,N} f(x) \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|x|)^L} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(2^{-k}t)^{-L}}{(\varepsilon + 2^{-k}t + \varepsilon|x-y|)^{-L}} t^{-n} \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N} |\eta^k(\frac{y}{t})| dy.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon + 2^{-k}t + \varepsilon|x-y|}{\varepsilon + t + \varepsilon|x|} &\leqslant \frac{\varepsilon + t + \varepsilon|x-y|}{\varepsilon + t + \varepsilon|x|} \leqslant \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}|x-y|}{1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}|x|} \\
&\leqslant \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}|x| + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}|y|}{1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}|x|} \leqslant 1 + \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}|y|}{1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}|x|} \\
&\leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + t}|y| \leqslant 1 + \frac{|y|}{t},
\end{aligned}$$

então substituindo na desigualdade anterior temos

$$\begin{aligned}
\frac{|f * \psi_t(x)| t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|x|)^L} &\leqslant M^{**,\varepsilon,L}_{\phi,N} f(x) t^L \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (2^{-k}t)^{-L} \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^L \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^N t^{-n} \left|\eta^k\left(\frac{y}{t}\right)\right| dy \\
&= M^{**,\varepsilon,L}_{\phi,N} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{kL} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^L (1 + 2^k|y|)^N |\eta^k(y)| dy \\
&\leqslant M^{**,\varepsilon,L}_{\phi,N} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(L+N)} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^L \frac{(1 + |y|)^{N+n+1}}{(1 + |y|)^{n+1}} |\eta^k(y)| dy \\
&\leqslant M^{**,\varepsilon,L}_{\phi,N} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(L+N)} \sup_{|\alpha|\leqslant N+n+1+L} \|\eta^k\|_{\alpha,0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |y|)^{n+1}} dy \\
&\leqslant c(n) M^{**,\varepsilon,L}_{\phi,N} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(N+L)} \sup_{|\alpha|\leqslant N+n+1+L} \|\eta^k\|_{\alpha,0}.
\end{aligned}$$

Aplicando o (2.3) para $M = N + L$, $|\alpha| \leqslant N + n + 1 + L$ temos

$$\begin{aligned}
2^{k(N+L)} \|\eta^k\|_{\alpha,0} &\leqslant 2^{-k} c(n, N, L, \phi) \sum_{\delta \leqslant \alpha} \sum_{\theta \leqslant \delta} \|\psi\|_{\delta-\theta+2N, N+1+n+\delta-\theta} \\
&\leqslant 2^{-k} c(n, N, L, \phi) \sum_{|\overline{\alpha}|\leqslant 3N+n+1+L, |\overline{\beta}|\leqslant 2N+2n+2+L} \|\psi\|_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} \\
&\leqslant 2^{-k} \overline{c}(n, N, L, \phi),
\end{aligned}$$

assim, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} M_{\psi}^{\varepsilon,L} f(x) &= \sup_{t<\varepsilon^{-1}} |f * \psi_t(x)| \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|x|)^L} \leqslant C(n,N,L,\phi) M_{\phi,N}^{**,\varepsilon,L} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \\ &\leqslant C(n,N,L,\phi) M_{\phi,N}^{**,\varepsilon,L} f(x). \end{aligned}$$

Como $\psi \in S_{\mathcal{F}}$ é $x \in \mathbb{R}^n$ são arbitrários, então pela Proposição 2.1.12 temos que

$$\|M_{\mathcal{F}}^{\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant C(n,N,L,\phi) \|M_{\phi,N}^{**,\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant c(n,p,N,L,\phi) \|M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f\|.$$

□

Observe que a constante é independente de $\varepsilon > 0$ mas depende de $L > 0$ só nas seminormas $\mathcal{F}$, o qual se limitamos superiormente L por outra constante fixada então a constante da proposição anterior queda livre do L.

Proposição 2.1.14. *Sejam $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < +\infty$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, $N > \frac{n}{p}$, $0 < \varepsilon < 1$ e $L = L(f) > 0$ suficientemente grande. Então existe uma constante $c(n,p,N,L,\phi) > 0$ tal que*

$$\|M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant c(n,p,N,L,\phi) \|M_{\phi} f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha| \leqslant 3N+n+1+L, |\beta| \leqslant 2N+2n+2+L}$, para $\lambda > 0$ definimos o conjunto

$$F \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ M_{\mathcal{F}}^{\varepsilon,L} f(x) \leqslant \lambda M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x) \right\},$$

então pela Proposição 2.1.13 temos

$$\begin{aligned} \int_{F^c} M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x) &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{F^c} M_{\mathcal{F}}^{\varepsilon,L} f(x)^p dx \leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\mathcal{F}}^{\varepsilon,L} f(x)^p dx \\ &\leqslant \frac{c^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx. \end{aligned}$$

A última desigualdade é valida ao escolher $\lambda > 0$ tal que $\frac{c^p}{\lambda^p} \leqslant \frac{1}{2}$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx &= \int_F M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx + \int_{F^c} M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx \\ &\leqslant \int_F M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx, \end{aligned}$$

portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx \leqslant 2 \int_F M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x)^p \tag{2.6}$$

Afirmação: Para $p > q$ existir uma constante $c(n,p,N,L,\phi) > 0$ tal que todo $x \in F$ satisfaz

$$M_{\phi}^{*,\varepsilon,L} f(x) \leqslant c(n,p,N,L,\phi) \left[\mathcal{M}(M_{\phi} f)^q(x) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Definamos novamente como no Lema 2.1.10

$$f(x,t) \doteq f * \phi_t(x),$$

observe que o $L(f)$ suficientemente grande temos pela Proposição 2.1.11 que $M_\phi^{*,\varepsilon,L} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ o qual podemos assumir sem perda de generalidade que $M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $x \in F$, pela definição existem $|x-y| < t < \varepsilon^{-1}$ tal que

$$\frac{1}{2} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) \leqslant f(y,t) \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L}.$$

Fixemos $r > 0$ posteriormente escolhido, para todo $u \in B(y, rt)$ temos

$$\begin{aligned}
|f(u,t) - f(y,t)| &\leqslant rt \sup_{z \in B(y,rt)} |\nabla_z f(z,t)| \leqslant r\varepsilon^{-1} \sup_{z \in B(y,rt)} |\nabla_z f(z,t)| \\
&\leqslant r\varepsilon^{-1} c \sup_{z \in B(y,rt)} \max_{i=1,\ldots,n} |\partial_{z_i} f(z,t)| \\
&= r\varepsilon^{-1} c \sup_{|h| \leqslant r+1} \max_{i=1,\ldots,n} \left| \left(f * (T_h \partial_{z_i} \phi)_t \right)(x) \right|,
\end{aligned}$$

no qual $ht = x - z$ e $T_h g(x) \doteq g(x-h)$, a última igualdade da acima é obtida como no Lema 2.1.10. Logo

$$\begin{aligned}
|f(u,t) - f(y,t)| \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} &\leqslant r\varepsilon^{-1} c \sup_{|h| \leqslant r+1} \max_{i=1,\ldots,n} \left| \left(f * (T_h \partial_{z_i} \phi)_t \right)(x) \right| \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} \\
&= r\varepsilon^{-1} c \sup_{|h| \leqslant r+1} \max_{i=1,\ldots,n} M_{T_h \partial_{z_i} \phi}^{\varepsilon,L} f(x) \\
&\leqslant r\varepsilon^{-1} c d M_{\mathcal{F}}^{\varepsilon,L} f(x) \leqslant r\varepsilon^{-1} c d \lambda M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x).
\end{aligned}$$

A penúltima desigualdade é obtida pelo Lema 2.1.9. Escolhemos $r > 0$ tal que $rcd\varepsilon^{-1}\lambda \leqslant \frac{1}{4}$, então para todo $u \in B(y, rt)$ temos que

$$\begin{aligned}
|f(u,t)| \geqslant |f(u,t)| \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} &\geqslant \frac{|f(y,t)| t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} - \frac{|f(u,t) - f(y,t)|^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L} \\
&\geqslant \frac{1}{2} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) - \frac{1}{4} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) = \frac{1}{4} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x),
\end{aligned}$$

como $B(y, rt) \subset B(x, (r+1)t)$. Logo

$$\begin{aligned}
M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^q &\leqslant 4^q \frac{1}{|B(y,rt)|} \int_{B(y,rt)} |f(u,t)|^q du \leqslant \frac{4^q}{|B(y,rt)|} \int_{B(x,(r+1)t)} |f(u,t)|^q du \\
&= \frac{4^q}{|B(y,rt)|} \frac{|B(x,(r+1)t)|}{|B(x,(r+1)t)|} \int_{B(x,(r+1)t)} |f * \phi_t(u)|^q du \\
&\leqslant 4^q \frac{|B(x,(r+1)t)|}{|B(y,rt)|} \left[\frac{1}{|B(x,(r+1)t)|} \int_{B(x,(r+1)t)} M_\phi f(u)^q du \right] \\
&\leqslant 4^q \frac{|B(x,(r+1)t)|}{|B(y,rt)|} \mathcal{M} \left[(M_\phi f)^q \right](x)
\end{aligned}$$

$$\leqslant 4^q \left(\frac{1+r}{r}\right)^n \mathcal{M}\left[(M_\phi f)^q\right](x).$$

Então cada $x \in F$ satisfaz

$$M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x) \leqslant c(n,p,N,L,\phi)\left\{\mathcal{M}\left[(M_\phi f)^q\right](x)\right\}^{\frac{1}{q}},$$

mas de (2.6), $1 < \dfrac{p}{q}$ e $\mathcal{M}$ é continua em $L^{\frac{p}{q}}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx \leqslant 2\int_F M_\phi^{*,\varepsilon,L} f(x)^p dx \leqslant 2c^p \int_F \left(\mathcal{M}\left[(M_\phi f)^q\right](x)\right)^{\frac{p}{q}} dx \\ \leqslant c(n,p,N,L,\phi)\|(M_\phi f)^q\|_{L^{\frac{p}{q}}}^{\frac{p}{q}} \leqslant C(n,p,N,L,\phi)\|M_\phi f\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Portanto está demonstrado que

$$\|M_\phi^{*,\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant c(n,p,N,L,\phi)\|M_\phi f\|_{L^p}.$$

□

Observe que a constante é independente de $\epsilon > 0$, também de $L > 0$ se o limitamos por cima.

Lema 2.1.15. *Seja $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, então $M_\phi^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Sejam $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Fixemos $L = L(f) > 0$ suficientemente grande, pela Proposição 2.1.14 existe $c(n,p,N,L,\phi) > 0$ tal que cada $0 < \varepsilon < 1$ satisfaz

$$\|M_\phi^{*,\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leqslant c(n,p,N,L,\phi)\|M_\phi f\|_{L^p},$$

então pelo Lema de Fatou temos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi^* f(x)^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to+\infty}\left[\left(M_\phi^{*,\frac{1}{n},L} f(x)\right)^p\right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{n\to+\infty}\left[\left(M_\phi^{*,\frac{1}{n},L} f(x)\right)^p\right] dx \\ &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(M_\phi^{*,\frac{1}{n},L} f(x)\right)^p dx \leqslant C\int_{R^n} M_\phi f(x)^p dx \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.16 (Teorema de Caracterização Maximal)**.** *Seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e seja $0 < p < +\infty$. Então são equivalentes:*

(i) Existe $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$ tal que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(ii) Existe $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$ tal que $M_\phi^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(iii) Existe uma coleção finita $\mathcal{F}$ de seminormas em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $M_{\mathcal{F}}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Além disso,

$$\|M_\phi f\|_{L^p} \simeq \|M_\phi^* f\|_{L^p} \simeq \|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p}.$$

Demonstração.

- i) $\Rightarrow$ ii):
  Sem perda de generalidade podemos assumir que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, então pelo Lema 2.1.15 e (2.4) temos que

$$\|M_\phi^* f\|_{L^p} \leqslant c\|M_\phi f\|_{L^p} < +\infty.$$

- ii) $\Rightarrow$ iii):
  Sem perda de generalidade podemos assumir que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Então pelo Lema 2.1.8 temos a existência da $\mathcal{F}$ tal que

$$\|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} \leqslant c\|M_\phi^* f\|_{L^p} < +\infty,$$

  isto é $M_{\mathcal{F}}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

- iii) $\Rightarrow$ i):
  Basta com escolher $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 1$, então pela observação na definição 2.1.4 temos que existe $c > 0$ tal que

$$\|M_\phi f\|_{L^p} \leqslant c\|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} < +\infty,$$

  isto é $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Observe que a equivalência entre as "normas" é de graça. □

Observação 2.1.17. Observe que o teorema anterior permite a $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ ser independente de $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$, pois para $N > \frac{n}{p}$ e a coleção finita de seminormas $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha|\leqslant n+3N,\ |\beta|\leqslant 2N+2n+2}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$c_1\|f\|_\phi \leqslant \|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} \leqslant c_2\|f\|_\phi.$$

O qual temos $\|f\|_\psi \simeq \|f\|_\phi$ para qualquer outra $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx \neq 0$. Assim $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ é independente das funções e $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) = \mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n)$.

Podemos definir $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ como o conjunto das $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $M_{\mathcal{F}}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, no qual $\mathcal{F}$ é o conjunto de seminormas da observação anterior. Também podemos definir

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbf{H}^p} : \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_{\mathbf{H}^p} \doteq \|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

2.2 Propriedades do espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$

Nesta seção vamos a provar algumas propriedades do espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.2.1. *Seja $h \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Então todo $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$\|T_h f\|_{\mathbf{H}^p} = \|f\|_{\mathbf{H}^p}, \qquad \|f(\lambda\cdot)\|_{\mathbf{H}^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathbf{H}^p},$$

no qual $\langle T_h f, \phi\rangle \doteq \langle f, T_{-h}\phi\rangle = \langle f, \phi(\cdot + h)\rangle$ e $\langle f(\lambda\cdot), \phi\rangle \doteq \langle f, \phi_\lambda\rangle$.

Demonstração. É imediato pois para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ temos

$$M_\phi(T_h f)(x) = (M_\phi f)(x - h);$$
$$(M_\phi f(\lambda\cdot))(x) = (M_\phi f)(\lambda x).$$

Assim, concluímos que para tudo $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\|T_h f\|_{\mathbf{H}^p} = \|M_{\mathcal{F}}(T_h f)\|_{L^p} = \|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} = \|f\|_{\mathbf{H}^p}$$
$$\|f(\lambda\cdot)\|_{\mathbf{H}^p} = \|M_{\mathcal{F}} f(\lambda\cdot)\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathbf{H}^p}$$

□

Proposição 2.2.2. *Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ radial e não negativa com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Se $1 < p < +\infty$, então $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, existem constantes universais $c_1, c_2 > 0$ tais que para toda $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$c_1\|f\|_{L^p} \leqslant \|M_\phi f\|_{L^p} \leqslant c_2\|f\|_{L^p}.$$

Demonstração.

- $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n)$:

  Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, claramente $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ pois a aplicação definida por $\psi \longrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx$ para todo $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição temperada. Desde que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, pela Proposição 1.5.1 temos que

  $$M_\phi f(x) = \sup_{t>0}|f * \phi_t(x)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)dy\right) Mf(x) = Mf(x),$$

  o qual da continuidade de $\mathcal{M}$, operador Maximal de Hardy-Littlewood, em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$ temos que

  $$\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|Mf\|_{L^p} \leqslant c\|f\|_{L^p} < +\infty.$$

  Portanto $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|M_\phi f\|_{L^p} \leqslant c\|f\|_{L^p}$.

- $\mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$:
Seja $f \in \mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n)$ vamos provar que existe $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que para toda $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz
$$\langle f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\psi(x)dx.$$
Definimos $f_j \doteq f * \phi_{t_j}$ para $t_j \geqslant 0$ tal que $t_j \longrightarrow 0$. Então $\{f_j\}_j$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$ pois
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f * \phi_{t_j}(x)|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} M_\phi f(x)^p dx = \|M_\phi f\|^p_{L^p} < +\infty,$$
como $L^p(\mathbb{R}^n)$ é Banach e reflexivo, então existe uma subsequência $\{f_{j_k}\}_k$ e $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que $f_{j_k} \rightharpoonup f_0$ em $\sigma(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))$ (convergência fraca). Como $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ temos que para cada $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, satisfaz
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{j_k}(x)\psi(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\psi(x)dx,$$
e assim $f_{j_k} \longrightarrow f_0$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pela aproximação da identidade temos que $f_{j_k} \longrightarrow f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e segue da unicidade do limite que como distribuição $f_0 = f$. Além disso, note que se $g_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é tal que como distribuição é igual a f, então como $C^\infty_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que para cada $\psi \in \mathbb{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, satisfaz
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_0(x)\psi(x)dx,$$
isto é $f_0 = g_0$. Com isto acabamos de mostrar que $\mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.
Por outro lado,
$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f * \phi_t(x)| + |f * \phi_t(x)|,$$
então
$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f - f * \phi_t\|_{L^p} + \|M_\phi f\|_{L^p},$$
e como $\|f - f * \phi_t\|_{L^p} \longrightarrow 0$ quando $t \to 0$, segue que
$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|M_\phi f\|_{L^p}.$$

De ambas inclusões e das desigualdades concluímos que $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) = \mathbf{H}^p_\phi(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{\mathbf{H}^p} \simeq \|M_\phi f\|_{L^p} \simeq \|f\|_{L^p}$. □

Proposição 2.2.3. *Seja $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ radial e não negativa com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\|f\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{\mathbf{H}^1}$ para toda $f \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) = \mathbf{H}^1_\phi(\mathbb{R}^n)$ e uma sequência $\{t_j\}_j$ positiva tal que $t_j \longrightarrow 0$. Definimos $f_j \doteq f * \phi_{t_j}$, logo $\{f_j\}_j$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^n)$ pois
$$\|f_j\|_{L^1} \leqslant \|M_\phi f\|_{L^1} < +\infty.$$

Como $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ isometricamente via a aplicação $f \mapsto fd\lambda$, no qual $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de medidas de Borel complexas e regulares, λ é a medida de Lebesgue. Lembremos que

$$\begin{aligned} I : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)^* \\ \mu &\longmapsto I_\mu(\psi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu, \ \forall \psi \in C_0(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico (ver Proposição 1.1.19). Então $\left\{I_{f_j d\lambda}\right\}$ é limitada em $C_0(\mathbb{R}^n)$, logo pelo Teorema 1.2.8 e pela isometría de I, existem uma subsequência $\{f_{j_k}\}$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tais que para cada $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * \phi_{t_{j_k}})(x)\psi(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu,$$

em particular também satisfaz para toda $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Agora vamos mostrar que existe $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $d\mu = f_0 d\lambda$, para isto usaremos o Teorema 1.1.15 que nos permite escrever

$$\mu = f_0 d\lambda + \mu_s,$$

no qual $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_s \perp \lambda$. Para provar que $\mu_s = 0$, basta demonstrar a seguinte propriedade:

$$\lambda(E) \Rightarrow \mu(E) = 0.$$

Sem perda da generalidade podemos assumir que μ é positiva. Como μ é regular (medida de Radon), temos que

$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(K) : \ K \subset E, \ K \text{ compacto}\right\},$$

então basta provar a propriedade para os compactos K. Seja K compato com $\lambda(K) = 0$, então existe uma sequência $\{\psi_l\}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que

- $0 \leqslant \psi_\ell \leqslant 1$;
- $\psi_\ell = 1$ em K,
- *supp* $\psi_l \subset K + B(0, \frac{1}{\ell})$.

Aplicando o Teorema 1.1.8 temos que

$$\mu(K) = \int_K 1 d\mu = \lim_{\ell \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\ell(x) d\mu.$$

Seja $\epsilon > 0$, logo para algum ℓ_0 temos que se $\ell \geqslant \ell_0$, satisfaz

$$\mu(K) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\ell(x)d\mu + \frac{\epsilon}{3} \leqslant \int_{K+B(0,\frac{1}{\ell})} (f * \phi_{t_{j_k}})(x)\psi_\ell(x)dx + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3},$$

no qual $k \geqslant k_0$. Essa ultima desigualdade é obtida pelo fato de

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * \phi_{t_{j_k}})(x)\psi_\ell(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\ell(x)d\mu,$$

então como $|f * \phi_t(x)| \leqslant M_\phi f(x)$, do Teorema 1.1.8 ao fazer $\ell \to +\infty$ e de fazer $\epsilon \to 0$ temos que

$$\mu(K) \leqslant \int_K M_\phi f(x)dx = 0.$$

Da mesma forma que para o caso $p > 1$ podemos provar que f_0 é único e $\|f\|_{L^1} \leqslant \|M_\phi f\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{\mathbf{H}^1}$. Portanto temos provada a proposição. □

Definição 2.2.4. Uma quase-norma em um espaço vetorial X sobre um corpo real ou complexo é uma função $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, +\infty)$, que satisfaz:

i) $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$;

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, para todo $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

iii) Existe uma constante $C \geqslant 1$ tal que para quaisquer $x_1, x_2 \in X$,

$$\|x_1 + x_2\| \leqslant C(\|x_1\| + \|x_2\|).$$

Proposição 2.2.5. *O espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ é normado para $1 \leqslant p < +\infty$ e métrico para $0 < p < 1$ no qual a métrica é dada por $d(f,g) = \|f - g\|^p_{\mathbf{H}^p}$. Além disso, $\|\cdot\|^p_{\mathbf{H}^p}$ é uma quase-norma para $0 < p < 1$.*

Demonstração. Fixe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$

- Seja $1 \leqslant p < +\infty$. Satisfazem as seguintes propriedades:

  i) $\|M_\phi(\cdot)\|_{L^p}$ é não negativa:
  É imediato da definição.

  ii) $\|M_\phi f\|_{L^p} = 0$ se e somente se $f = 0$:
  Seja $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|M_\phi f\|_{L^p} = 0$, logo pelas Proposições 2.2.2 e 2.2.3 temos que $\|f\|_{L^p} \leqslant \|M_\phi f\|_{L^p} = 0$, portanto $f = 0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e logo $f = 0$ como distribuição.
  Se $f = 0$ é imediato da definição que $\|M_\phi f\|_{L^p} = 0$.

  iii) $\|M_\phi(cf)\|_{L^p} = |c|\|M_\phi f\|_{L^p}$ para todo $c \in \mathbb{C}$:
  É imediato da definição que $|c|M_\phi f(x) = M_\phi(cf)(x)$, então a propriedade é verdadeira.

  iv) $\|M_\phi(f + g)\|_{L^p} \leqslant \|M_\phi f\|_{L^p} + \|M_\phi g\|_{L^p}$ para todo $f, g \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$:
  Para $f, g \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ temos da definição que $M_\phi(f+g)(x) \leqslant M_\phi f(x) + M_\phi g(x)$, como $M_\phi f, M_\phi g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então

  $$\|M_\phi(f + g)\|_{L^p} \leqslant \|M_\phi f + M_\phi g\|_{L^p} \leqslant \|M_\phi f\|_{L^p} + \|M_\phi g\|_{L^p}.$$

  Portanto das propriedades anteriores temos que $(\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n), \|M_\phi(\cdot)\|_{L^p})$ é normado.

- Seja $0 < p < 1$:

i) $d(f,g) = 0$ se e somente se $f = g$:
Sejam $f, g \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ tais que $d(f,g) = 0$ e $\mathcal{F}$ o conjunto das seminormas em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ do Teorema 2.1.16. Seja $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrário, definimos a função Φ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como $\Phi(x) = \psi(-x)$. Então de (2.4), pela observação da Definição 2.1.4 e pelo Teorema 2.1.16 temos

$$\|M_\Phi^*(f-g)\|_{L^p} \leqslant c\|M_\Phi(f-g)\|_{L^p} \leqslant c_1\|M_{\mathcal{F}}(f-g)\| \leqslant c_2\|M_\phi(f-g)\|_{L^p} = 0.$$

Da desigualdade anterior temos $\sup\limits_{t>0} \sup\limits_{|x-y|<t} \{|(f-g) * \Phi_t(y)|\} = M_\Phi^*(f-g)(x) = 0$ em quase todo ponto, então existe uma sequência $x_n \longrightarrow 0$ quando $n \to +\infty$ tal que para todo $t > 0$, $|x_n - y| < t$ temos $|(f-g) * \Phi_t(y)| = 0$. Em particular para $t = 1$ e $y = x_n$, assim

$$\langle f-g, \psi\rangle = (f-g) * \Phi(0) = \lim_{n\to+\infty} (f-g) * \Phi(x_n) = 0.$$

Como $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é arbitrário, então $f = g$.

ii) $d(f,h) \leqslant d(f,g) + d(g,h)$ para todo $f, g, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:
Sejam $f, g, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então pela sublinearidade de M_ϕ e a propriedade $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ para $a, b \geqslant 0$ e $0 < p < 1$ temos que

$$\begin{aligned} d(f,h) = \int |M_\phi(f-h)(x)|^p\,dx &\leqslant \int |M_\phi(f-g)(x) + M_\phi(g-h)(x)|^p\,dx \\ &\leqslant \int \{(M_\phi(f-g)(x))^p + (M_\phi(g-h)(x))^p\}\,dx = d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

Então das propriedades anteriores temos que $(\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n), d)$ é métrico. Para provar que $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^p}$ é uma quase-norma segue de

$$\begin{aligned} \left(\int (M_\phi(f+g)(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\int (M_\phi(x))^p\,dx + \int (M_\phi g(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant 2^{\frac{1}{p}}\left(\int (M_\phi f(x))^p\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}}\left(\int (M_\phi g(x))^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

A última desigualdade é obtida pela propriedade $(a+b)^r \leqslant 2^r a^r + 2^r b^r$ para $a, b, r \geqslant 0$.

□

Proposição 2.2.6. *O espaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ é completo com a métrica definida anteriormente.*

Demonstração. Fixemos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$. Quando $p > 1$ é imediato, pois $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|M_\phi(\cdot)\|_{L^p} \simeq \|\cdot\|_{L^p}$. Agora trabalhemos o caso $0 < p < 1$. Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Primeiro mostremos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Seja $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

- Se $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \neq 0$, definimos $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como $\Phi(x) \doteq \psi(-x)$. Observe que pela definição, cada $|x-y|<1$ satisfaz

$$|f * \Phi(x)| \leqslant M_\Phi^* f(y),$$

então para $|y|<1$ temos

$$|\langle f_n, \psi\rangle - \langle f_m, \psi\rangle| = |(f_n - f_m) * \Phi(0)| \leqslant M_\Phi^*(f_n - f_m)(y).$$

Logo

$$|B(0,1)||\langle f_n, \psi\rangle - \langle f_m, \psi\rangle|^p = \int_{B(0,1)} |\langle f_n, \psi\rangle - \langle f_m, \psi\rangle|^p dy \leqslant \int_{B(0,1)} M_\Phi^*(f_n - f_m)(y)^p dy,$$

assim

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, \psi\rangle - \langle f_m, \psi\rangle|^p &\leqslant \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} M_\Phi^*(f_n - f_m)(y)^p dy \\
&\leqslant \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^n} M_\Phi^*(f_n - f_m)(y)^p dy \\
&\leqslant c \int_{\mathbb{R}^n} M_\Phi(f_n - f_m)(y)^p dy = c\|f_n - f_m\|_{\mathbf{H}^p},
\end{aligned}$$

a última desigualdade foi obtida por (2.4). Como $\{f_n\}_n$ é de Cauchy em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, então $\{\langle f_n, \psi\rangle\}_n$ é de Cauchy.

- Seja $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0$. Consideremos $\psi + \phi$ e ϕ, como $\int_{\mathbb{R}^n} (\psi+\phi)(x)dx \neq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$ temos que

$$\|M_{(\psi+\phi)} f\|_{L^p} \simeq \|M_\phi f\|_{L^p},$$

então pelo caso anterior temos que $\{\langle f_n, \psi+\phi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\langle f_n, \phi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ são de Cauchy, portanto $\{\langle f_n, \psi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\langle f_n, \psi+\phi\rangle - \langle f_n, \phi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Portanto de ambos casos temos que $\{\langle f_n, \psi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para toda $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é completo, existe $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Agora mostraremos que $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Como $\{f_n\}_n$ é de Cauchy, então podemos assumir que para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\|f_j - f_{j+1}\|_\phi^p \leqslant 2^{-j}.$$

De $f_n \longrightarrow f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ temos que para todo $t>0$ satisfaz

$$\begin{aligned}
|(f - f_n) * \phi_t(x)| &= |\langle f - f_n, \phi_t(x - \cdot)\rangle| \\
&= \left|\sum_{j=n}^{+\infty} \langle f_{j+1} - f_j, \phi_t(x - \cdot)\rangle\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{j=n}^{+\infty} |\langle f_{j+1} - f_j, \phi_t(x - \cdot)\rangle| \\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} |(f_{j+1} - f_j) * \phi_t(x)| \\
&\leqslant \sum_{j=n}^{+\infty} M_\phi(f_{j+1} - f_j)(x),
\end{aligned}$$

assim passando ao supremo

$$M_\phi(f - f_n)(x)^p \leqslant \left(\sum_{j=n}^{+\infty} M_\phi(f_{j+1} - f_j)(x) \right)^p \leqslant \sum_{j=n}^{+\infty} M_\phi(f_{j+1} - f_j)(x)^p.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int M_\phi(f - f_n)(x)^p dx &\leqslant \int \sum_{j=n}^{+\infty} M_\phi(f_{j+1} - f_j)(x)^p dx \leqslant \sum_{j=n}^{+\infty} \int M_\phi(f_{j+1} - f_j)(x)^p dx \\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \|f_{j+1} - f_j\|_\phi^p \leqslant \sum_{j=n}^{+\infty} 2^{-j} = 2^{-n+1},
\end{aligned}$$

então $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ pois $f_n - f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, além disso $f_n \longrightarrow f$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. □

Proposição 2.2.7. *Toda $f \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 0$.*

Demonstração. Fixemos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Seja $f \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$, então pela Proposição 2.2.3 temos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ o qual $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ e $\hat{f}$ estão bem definidas. Seja $t > 0$, para $\zeta \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\widehat{(f * \phi_t)}(\zeta) = \hat{f}(\zeta)\hat{\phi}_t(\zeta) = \hat{f}(\zeta)\hat{\phi}(t\zeta),$$

em particular $\widehat{(f * \phi_t)}(0) = \hat{f}(0)$, pois $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Fazendo conta temos

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(0) - \widehat{(f * \phi_t)}(\zeta)| = \left| \widehat{(f * \phi_t)}(0) - \widehat{(f * \phi_t)}(\zeta) \right| &\leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |1 - e^{-i<x,\zeta>}||f * \phi_t(x)|dx \\
&\leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |1 - e^{-i<x,\zeta>}|M_\phi f(x)dx,
\end{aligned}$$

então pelo Teorema 1.1.8 temos que $|\hat{f}(0) - \hat{f}(\zeta)\hat{\phi}(t\zeta)| = |\hat{f}(0) - \widehat{(f * \phi_t)}(\zeta)| \longrightarrow 0$ quando $\zeta \longrightarrow 0$. Logo para $\varepsilon > 0$ existe $\zeta > 0$ suficientemente pequeno tal que $|\hat{f}(0) - \hat{f}(\zeta)\hat{\phi}(t\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2}$, como $\hat{\phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ o qual $\lim_{x \to \infty} \hat{\phi}(x) = 0$ e $t > 0$ foi arbitrário, então temos que existe $t > 0$ suficientemente grande tal que $|\hat{f}(\zeta)\hat{\phi}(t\zeta)| \leqslant \|f\|_{L^1}|\hat{\phi}(t\zeta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, assim

$$|\hat{f}(0)| \leqslant |\hat{f}(0) - \hat{f}(\zeta)\hat{\phi}(t\zeta))| + |\hat{f}(\zeta)\hat{\phi}(t\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ temos $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \hat{f}(0) = 0$. □

2.3 Teorema da decomposição de Calderón-Zygmund

Esta seção é dedicada ao Teorema da Decomposição de Calderón-Zygmund, que será usado para provar o Teorema da Decomposição Atômica.

Definição 2.3.1. Definimos o conjunto $\mathcal{A}_{n,N}$ como o conjunto das funções $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

- *supp* $\phi \subseteq B$, no qual B é uma bola de raio r.
- $|\partial^\alpha \phi(x)| \leqslant r^{-n-|\alpha|}$, $\forall\ |\alpha| \leqslant N$.

Lema 2.3.2. *Sejam $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N \doteq \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\ :\ |\alpha|, |\beta| \leqslant N\}$. Então existe $A_N > 0$ tal que para toda $\phi \in \mathcal{A}_{n,N}$ temos*

$$|\langle f, \phi\rangle| \leqslant A_N M_{\mathcal{F}} f(\overline{x}), \quad \forall\ \overline{x} \in B,$$

no qual B é a bola de raio r para ϕ mencionada anteriormente na definição.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{A}_{n,N}$ com B a bola de raio r para ϕ mencionada na definição anterior. Seja $\overline{x} \in B$ e definimos $\psi(x) \doteq \phi(-rx+\overline{x})$, claramente temos *supp* $\psi \subset B(0,2)$. Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $|\alpha|, |\beta| \leqslant N$ satisfaz

$$|x^\alpha \partial^\beta \psi(x)| \leqslant |x|^{|\alpha|} r^{|\beta|} |\partial^\beta \phi(-rx + \overline{x})| \leqslant 2^N r^{-n}.$$

Assim $2^{-N} r^n \psi \in S_{\mathcal{F}}$ e, além disso

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{F}} f(\overline{x}) &\geqslant |f * (2^{-N} r^n \psi)_r(\overline{x})| = |\langle f, (2^{-N} r^n \psi)_r(\overline{x} - \cdot)\rangle| \\ &= 2^{-N} |\langle f, r^n \psi_r(\overline{x} - \cdot)\rangle| = 2^{-N} |\langle f, \psi\left(\frac{\overline{x} - \cdot}{r}\right)\rangle| \\ &= 2^{-N} |\langle f, \phi\rangle|, \quad \psi\left(\frac{\overline{x} - x}{r}\right) = \phi\left(-r(\frac{\overline{x} - x}{r}) + \overline{x}\right) = \phi(x). \end{aligned}$$

Logo de $\overline{x} \in B$ arbitrário temos

$$|\langle f, \phi\rangle| \leqslant 2^N M_{\mathcal{F}} f(\overline{x}), \quad \forall\ \overline{x} \in B.$$

□

Observação 2.3.3. Uma consequência direta do Lema anterior é que existe $A_N > 0$ tal que:

$$\langle f, \phi\rangle \leqslant A_N M_{\mathcal{F}} f(\overline{x}),\ \forall\ \overline{x} \in B.$$

Teorema 2.3.4. *(Decomposição de Whitney) Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Então existe uma coleção de cubos diádicos $\{Q_k\}_k$ tais que:*

- $\Omega \doteq F^c = \bigcup_k Q_k$.
- *Existem $c_1(n), c_2(n) > 0$ tais que*

$$c_1(n) diam(Q_k) \leqslant d(Q_k, F) \leqslant c_2(n) diam(Q_k).$$

- *A interseção ocorre apenas nos bordos, isto é para todo Q_k, Q_l temos*

$$Q_k^\circ \cap Q_l^\circ = \varnothing.$$

Aqui denotamos Q_k° o interior de Q_k.

Demonstração. Fixemos uma constante $c > 0$ a ser escolhida posteriormente. Seja $\mathcal{Q}_0$ a família de cubos diádicos de lado 1. Para $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\begin{aligned}
\Omega_k &\doteq \left\{y \in \mathbb{R}^n / c2^{-k} \leqslant d(y,F) < c2^{-k+1}\right\}, \\
\mathcal{Q}_k &\doteq 2^{-k}\mathcal{Q}_0, \\
\mathcal{F}_k &\doteq \{Q \in \mathcal{Q}_k / \ Q \cap \Omega_k \neq \varnothing\}.
\end{aligned}$$

Sejam $Q \in \mathcal{F}_k$ e $y \in Q \cap \Omega_k$. Para cada $x \in Q$ arbitrário temos

$$d(x,F) \leqslant d(x,y) + d(y,F) \leqslant \sqrt{n}2^{-k} + c2^{-k+1} = \left(1 + \frac{2c}{\sqrt{n}}\right) diam(Q).$$

Também

$$d(x,F) \geqslant d(y,F) - d(x,y) \geqslant c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k} = \left(\frac{c}{\sqrt{n}} - 1\right) diam(Q).$$

Agora escolhemos $c > \sqrt{n}$ e as constantes positivas $c_1 \doteq \dfrac{c}{\sqrt{n}} - 1$, $c_2 \doteq 1 + \dfrac{2c}{\sqrt{n}}$ temos

$$c_1 diam(Q) \leqslant d(Q,F) \leqslant c_2 diam(Q), \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}, \forall\ Q \in \mathcal{F}_k.$$

Da desigualdade temos que $0 < d(Q,F)$, além disso $Q \subset F^c = \Omega$ pois F é fechado. Afirmamos que $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k} Q$, pois

$$\begin{aligned}
\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}_k} (\Omega_k \cap Q) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k} \Omega_k \cap Q \\
&\subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k} Q \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k} \Omega = \Omega.
\end{aligned}$$

Além disso os cubos só podem se interceptar em seus bordos dois a dois, pois para cubos com o mesmo tamanho a condição é verdadeira (os interiores são disjuntos) e no caso que Q_k e Q_j sejam cubos distintos na família que não satisfazem a condição temos que um deles está contido no outro. Suponhamos que $Q_k \subset Q_j$ isto é $j < k$, então $2^{-k+1} \leqslant 2^{-j}$ e existe $y \in Q_j \cap Q_k$ tal que

$$d(y,F) < c2^{-k+1} \leqslant c2^{-j} \leqslant d(y,F),$$

que é uma contradição. $\square$

Observação 2.3.5. Observe que $1 < c_2$ e podemos escolher $c > 0$ tal que $1 < c_1$ (por exemplo $c = 3\sqrt{n}$). Além disso, as constantes são independentes do conjunto fechado F.

Denotaremos agora $Q(x,r)$ como o cubo com centro em x e lado r. Também para $Q = Q(x,r)$, denotamos $Q^s \doteq Q(x,sr)$ para $s > 0$. A seguir enunciamos um Teorema chamado decomposição de Calderón-Zygmund.

Teorema 2.3.6 (Decomposição de Calderón-Zygmund)**.** *Sejam* $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$ *com* $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mathcal{N}$ *e* $\frac{n}{n+1} < p \leqslant 1$. *Dados* $f \in (L^1_{loc} \cap \mathbf{H}^p)(\mathbb{R}^n)$ *e* $\lambda > 0$, *podemos escrever* $f = g + b$ *tal que:*

(i) Existe $c(\phi,n,N) > 0$ *tal que* $\|g\|_{L^\infty} \leqslant c(\phi,n,N)\lambda$.

(ii) $b = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k$, *supp* $b_k \subset Q_k^{1+s}$, $\int_{\mathbb{R}^n} b_k(x)dx = 0$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_k(x))^p dx \leqslant C(\phi,n,p,N) \int_{Q_k^{1+s}} (M_\mathcal{F} f(x))^p dx.$$

(iii) $\bigcup_k Q_k^{1+s} = \{x \in \mathbb{R}^n / \, M_\mathcal{F} f(x) > \lambda\}$ *e a família* $\left\{Q_k^{1+s}\right\}_k$ *tem a propriedade da interseção limitada.*

Demonstração.

(iii) Definimos

$$\begin{aligned}\Omega &\doteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; \lambda < M_\mathcal{F} f(x) = \sup_{\Phi\in S_\mathcal{F}} M_\Phi f(x)\right\} = \bigcup_{\Phi\in S_\mathcal{F}} \{x \in \mathbb{R}^n : \; \lambda < M_\Phi f(x)\} \\ &= \bigcup_{\Phi\in S_\mathcal{F}} \bigcup_{t>0} \{x \in \mathbb{R}^n : \; \lambda < |f * \Phi_t \, (x)|\},\end{aligned}$$

que é aberto, pois da continuidade de $f*\Phi_t$ temos que cada $\{x \in \mathbb{R}^n : \; \lambda < |f * \Phi_t \, (x)|\}$ é aberto. Aplicando o Teorema da decomposição de Whitney para Ω^c, temos a existência da família $\{Q_k\}_k$ de cubos diádicos tais que

- $\Omega = \bigcup_k Q_k$.
- Existem $c_1 > 1$ e $c_2 > 1$ tais que para todo Q_k temos

$$c_1 diam \; Q_k \leqslant d(Q_k, \Omega^c) \leqslant c_2 diam \; Q_k.$$

Considere $\ell_k = 2^{-k}$ e $Q_k = Q_k(x_k, \ell_k)$. Seja $y \in Q_k^{1+s}$ arbitrário, tal que $0 < s < c_1 - 1$. Note que

$$\begin{aligned}d(y,\Omega^c) &\geqslant d(x_k,\Omega^c) - d(x_k,y) \geqslant d(Q_k,\Omega^c) - \ell_k(1+s)\sqrt{n} \\ &\geqslant c_1\ell_k\sqrt{n} - \ell_k(1+s)\sqrt{n} = \sqrt{n}(c_1 - (1+s))\ell_k \\ &> 0,\end{aligned}$$

assim $y \in \Omega$ (Ω^c é fechado), o qual $Q_k^{1+s} \subset \Omega$. Logo $\Omega = \bigcup_k Q_k^{1+s}$ pois $\Omega = \bigcup_k Q_k \subset \bigcup_k Q_k^{1+s} \subset \bigcup_k \Omega = \Omega$.

Agora mostremos a propriedade da interseção limitada. Seja $y \in Q_k^{1+s} \cap Q_j^{1+s}$, logo

$$\begin{aligned}
c_1\sqrt{n}2^{-j} &\leqslant d(Q_j, \Omega^c) \leqslant d(x_j, \Omega^c) \\
&\leqslant d(x_j, y) + d(y, \Omega^c) \\
&\leqslant d(x_j, y) + d(Q_k^{1+s}, \Omega^c) + diam\ Q_k^{1+s} \\
&\leqslant \sqrt{n}(1+s)2^{-j} + d(Q_k, \Omega^c) + \sqrt{n}(1+s)2^{-k} \\
&\leqslant \sqrt{n}(1+s)2^{-j} + c_2\sqrt{n}2^{-k} + \sqrt{n}(1+s)2^{-k}.
\end{aligned}$$

A última desigualdade também é valida se trocarmos j por k, logo

$$2^{|k-j|} \leqslant \frac{c_2 + 1 + s}{c_1 - (1+s)},$$

o qual

$$|k-j| \leqslant \frac{ln\left(\frac{c_2+1+s}{c_1-(1+s)}\right)}{ln2}.$$

Assim cada cubo Q_k^{1+s} no máximo só pode ser intersectado por um número finito fixo vezes (dependente só de n pois as constantes são) por cubos na família $\left\{Q_j^{1+s}\right\}_j$, isto verifica a propriedade. Denotamos a esse número como $\gamma(n)$.

(i) Seja $Q = Q(z_0, 1)$ o cubo diádico canônico de lado 1. Fixemos $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:

- $supp\ \Phi \subset Q^{1+a}$, com $0 < a < s$.
- $\Phi \equiv 1$ em Q.
- $0 \leqslant \Phi \leqslant 1$.

Definimos $\psi_k(x) \doteq \Phi\left(\dfrac{x - x_k}{\ell_k} + z_0\right)$ que claramente $supp\ \psi_k \subset Q_k^{1+a}$ e $\psi_k \equiv 1$ em $Q(x_k, \ell_k)$. A propriedade da interseção limitada permite definir as seguintes funções:

$$\psi(x) \doteq \sum_k \psi_k(x), \quad \eta_k(x) \doteq \frac{\psi_k(x)}{\psi(x)}.$$

Logo se cumprem as seguintes propriedades:

- $supp\ \eta_k \subset Q_k^{1+a}$, pois $supp\ \eta_k \subset supp\ \psi_k \subset Q_k^{1+a}$.
- A propriedade de interseção finita permite definir $\displaystyle\sum_k \eta_k$ além disso $\chi_\Omega = \displaystyle\sum_k \eta_k$, pois η_k é nula em Ω^c e em Ω temos

$$\sum_k \eta_k = \sum_k \frac{\psi_k}{\psi} = \frac{\sum_k \psi_k}{\sum_k \psi_k} = 1.$$

- $\chi_\Omega \leqslant \psi \leqslant \gamma(n)\chi_\Omega$.
  Isto é verificado, pois ψ é nulo em Ω^c e, por outro lado, desde que $\Omega = \bigcup_k Q_k$, $\psi_k \equiv 1$ em Q_k, $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$ e da propriedade de interseção finita temos que para $x \in \Omega$ vale
$$1 \leqslant \sum_k \psi_k(x) \leqslant \gamma(n).$$
- $\dfrac{\psi_k}{\gamma(n)} \leqslant \eta_k \leqslant 1$, da desigualdade anterior e da definição de η_k.
- Para $x \in Q_k$ temos $|\partial^\alpha \psi(x)| \leqslant c_\alpha(n)\ell_k^{-|\alpha|}$, pois para os cubos Q_j que tem interseção com Q_k temos $\dfrac{\ell_k}{\ell_j} = 2^{j-k} \leqslant \dfrac{c_2+1+s}{c_1-(1+s)}$ e assim
$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \psi(x)| &\leqslant \sum_j |\partial^\alpha \psi_j(x)| \leqslant \sum_{Q_j\colon Q_j\cap Q_k \neq \varnothing} \ell_j^{-|\alpha|} \left|(\partial^\alpha \Phi)\left(\frac{x-x_j}{\ell_j}+z_0\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{Q_j\colon Q_j\cap Q_k \neq \varnothing} \left(\frac{c_2+1+s}{c_1-(1+s)}\right)^{|\alpha|} \ell_k^{-|\alpha|}\|\partial^\alpha\Phi\|_\infty \\ &\leqslant \gamma(n)\left(\frac{c_2+1+s}{c_1-(1+s)}\right)^{|\alpha|} \ell_k^{-|\alpha|}\|\partial^\alpha\Phi\|_\infty = c_\alpha(n)\ell^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(x)dx \simeq \ell_k^n$ pois $supp\ \eta_k \subset Q_k^{1+a}$ e
$$\begin{aligned} \frac{\ell_k^n}{\gamma(n)} &\leqslant \frac{1}{\gamma(n)} \int_{Q(x_k,\ell_k)} 1dx \leqslant \frac{1}{\gamma(n)} \int_{Q(x_k,(1+a)\ell_k)} \psi_k dx \\ &\leqslant \int_{Q(x_k,(1+a)\ell_k)} \eta_k dx \leqslant \int_{Q(x_k,(1+a)\ell_k)} 1dx \\ &= (1+a)^n \ell_k^n. \end{aligned}$$
- $|\partial^\alpha \eta_k(x)| \leqslant c_\alpha(n)\ell_k^{-|\alpha|}$. De fato, considere $\alpha = e_i$ então
$$\begin{aligned} |\partial^{e_i}\eta_k(x)| &= \left|\frac{\partial^{e_i}(\psi_k(x))}{\psi(x)} - \frac{\psi_k(x)\partial^{e_i}\psi(x)}{\psi(x)^2}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{\partial^{e_i}\Phi(\frac{x-x_k}{\ell_k})}{\ell_k}\right| + \|\Phi\|_\infty \frac{c_i}{\ell_k} \\ &\leqslant \left(\|\partial^{e_i}\Phi\|_\infty + \|\Phi\|_\infty c_i\right)\ell_k^{-1} = c_i\ell_k^{-1}. \end{aligned}$$
  Por indução, podemos concluir que para α geral temos a desigualdade,
$$|\partial^\alpha \eta_k(x)| \leqslant c_\alpha(n)\ell_k^{-|\alpha|}. \tag{2.7}$$

Agora definamos as funções g, b e b_k como:

- $b_k \doteq (f-c_k)\eta_k$, no qual $c_k \doteq \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n} f\eta_k dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\eta_k dx}$. Disto segue que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} b_k(x)dx = 0$.

- $b \doteq \sum_k b_k$ que está bem definido pela propriedade da interseção limitada.
- $g \doteq \chi_{\Omega^c} f + \sum_k c_k \eta_k$.

Observe que $f = g + b$.
Afirmação:

$$|c_k| \leqslant c(n, N)\lambda. \tag{2.8}$$

<u>Com efeito</u>:
Observe que $B(x_k, (1 + c_2)\sqrt{n}\ell_k) \cap \Omega^c \neq \varnothing$, pois

$$d(x_k, \Omega^c) \leqslant d(Q_k, \Omega^c) + diam(Q_k) \leqslant (1 + c_2)\sqrt{n}\ell_k.$$

Assim podemos escolher $\overline{x_k} \in B(x_k, (1 + c_2)\sqrt{n}\ell_k) \cap \Omega^c$. Por outro lado, $supp\ \eta_k \subset B(x_k, (1 + c_2)\sqrt{n}\ell_k)$ e

$$|\partial^\alpha \eta_k(x)| \leqslant c_\alpha \ell_k^{-|\alpha|} = c_\alpha \ell_k^{-n-|\alpha|} \ell_k^n = d_\alpha \ell_k^n \left[(1 + c_2)\sqrt{n}\ell_k\right]^{-n-|\alpha|}$$

isto é $\dfrac{\eta_k}{d\ell_k^n} \in \mathcal{A}_{n,N}$, no qual $d = \max\limits_{|\alpha| \leqslant N} \{d_\alpha\}$. Então pelo Lema 2.3.2 temos

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left|\langle f, \frac{\eta_k}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k}\rangle\right| \leqslant \gamma(n) \left|\langle f, \frac{\eta_k}{\ell_k^n}\rangle\right| = \gamma(n) d \left|\langle f, \frac{\eta_k}{d\ell_k^n}\rangle\right| \\ &\leqslant \gamma(n) d A_N M_{\mathcal{F}} f(\overline{x}) \leqslant \gamma(n) d A_N\ \lambda, \end{aligned}$$

assim para $c(n, N) = \max\{\gamma(n) d A_N, 1\}$ temos $|c_k| \leqslant c(n, N)\lambda$. Agora mostremos $|g(x)| \leqslant c(\phi, n, N)\lambda$ em quase todo ponto. Se $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |\sum_k c_k \eta_k(x)| \leqslant \sum_k |c_k| \eta_k(x) \\ &\leqslant c(n, N)\lambda \sum_k \eta_k(x) = c(n, N)\lambda \chi_\Omega(x) = c(n, N)\lambda. \end{aligned}$$

Se $x \in \Omega^c$ podemos assumir sem perda de generalidade que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$ (necessária para aproximação da identidade), Logo em quase todo ponto temos

$$\begin{aligned} |g(x)| = |f(x)| &= \lim_{t \to 0} |f * \phi_t\ (x)| \\ &\leqslant M_\phi f(x) \leqslant c(\phi, N) M_{\mathcal{F}} f(x) \\ &\leqslant c(\phi, N)\lambda. \end{aligned}$$

De ambos casos concluímos que para $c(\phi, n, N) = \max\{c(\phi, N), c(n, N)\}$ temos

$$|g(x)| \leqslant c(\phi, n, N)\lambda,$$

o qual $\|g\|_{L^\infty} \leqslant c(\phi, n, N)$.

(ii) Afirmação:

a) $M_\phi b_k(x) \leqslant \widetilde{c}(\phi, n, N) M_{\mathcal{F}} f(x),\ x \in Q_k^{1+s}$.

b) $M_\phi b_k(x) \leqslant \widetilde{\widetilde{c}}(\phi, n, N)\lambda \dfrac{\ell_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}},\ x \notin Q_k^{1+s}$.

Vamos provar (a). Seja $x \in Q_k^{1+s} \subset \Omega$ então pela sublinearidade de M_ϕ e (2.8) temos

$$\begin{aligned}
M_\phi b_k(x) &= M_\phi((f - c_k)\eta_k)(x) \leqslant M_\phi(f\eta_k)(x) + |c_k| M_\phi(\eta_k)(x) \\
&= \sup_{t>0} |f\eta_k * \phi_t(x)| + c(n, N)\lambda \sup_{t>0} |\eta_k * \phi_t(x)| \\
&\leqslant \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_k(y)\phi_t(x - y)dy \right| + c(n, N)\lambda \|\eta_k\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)dy \\
&\leqslant \sup_{t>0} |< f, \eta^t >| + c(n, N)\lambda \\
&\leqslant \sup_{t>0} |< f, \eta^t >| + c(n, N) M_{\mathcal{F}} f(x),
\end{aligned}$$

no qual $\eta^t(y) \doteq \eta_k(y)\phi_t(x - y)$ e $x \in \Omega$ portanto $M_{\mathcal{F}} f(x) > \lambda$. Observe que *supp* $\eta^t \subset B(x, t) \cap Q(x_k, (1 + s)\ell_k)$.

- Se $\ell_k \leqslant t$, então *supp* $\eta^t \subset B(x_k, (1 + s)\sqrt{n}\ell_k)$, $x \in B(x_k, (1 + s)\sqrt{n}\ell_k)$ e de (2.7) temos que

$$|\partial^\alpha \eta^t(x)| \leqslant A_\alpha(\phi, n) \left[\sqrt{n}(1 + s)\ell_k\right]^{-n-|\alpha|}.$$

- Se $t < \ell_k$, então *supp* $\eta^t \subset B(x, t)$ e de (2.7) temos que

$$|\partial^\alpha \eta^t(x)| \leqslant B_\alpha(\phi, n) t^{-n-|\alpha|}.$$

Assim escolhendo $A(\phi, n, N) = \max_{|\alpha| \leqslant N} \{A_\alpha(\phi, n), B_\alpha(\phi, n)\}$ temos $\dfrac{\eta^t}{A} \in \mathcal{A}_{n,N}$, o qual pelo Lema 2.3.2 podemos ajustar por uma constante tal que para todo $t > 0$ temos

$$|\langle f, \eta^t \rangle| \leqslant \overline{A}(\phi, n, N) M_{\mathcal{F}} f(x).$$

Então

$$\begin{aligned}
M_\phi(b_k)(x) &\leqslant \sup_{t>0} |\langle f, \eta^t \rangle| + c M_{\mathcal{F}} f(x) \leqslant (\overline{A} + c) M_{\mathcal{F}} f(x) \\
&= \widetilde{c}(\phi, n, N) M_{\mathcal{F}} f(x).
\end{aligned}$$

Vamos a provar (b):

Dado que $x \notin Q_k^{1+s}$ temos $|x - y| \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}\ell_k(s - a)$ e $|x - x_k| \geqslant \dfrac{1 + s}{2}\ell_k$. Agora mostremos que para $y \in Q_k^{1+a}$ se cumpre $|x - y| \simeq |x - x_k|$. De fato,

$$\begin{aligned}
|x - y| &\leqslant |x - x_k| + |x_k - y| \leqslant |x - x_k| + \sqrt{n}(1 + a)\ell_k \\
&\leqslant |x - x_k| + 2\sqrt{n}\frac{1 + a}{1 + s}|x - x_k| \\
&= \overline{c_1}|x - x_k|.
\end{aligned}$$

A outra desigualdade

$$\begin{aligned}|x-x_k| &\leqslant |x-y|+|y-x_k| \leqslant |x-y|+\sqrt{n}(1+a)\ell_k\\ &\leqslant |x-y|+\sqrt{n}(1+a)\frac{2}{\sqrt{n}(s-a)}|x-y|\\ &= \overline{c_2}|x-y|.\end{aligned}$$

- Se $\dfrac{|x-x_k|}{\overline{c_2}t} \geqslant 1$, então $\left|\dfrac{x-y}{t}\right| \geqslant 1$ o qual $\phi_t\left(\dfrac{x-y}{t}\right)=0$ e portanto $b_k * \phi_t(x)=0$ pois $supp\ b_k \subset supp\ \eta_k \subset Q_k^{1+a}$.
- Se $\dfrac{|x-x_k|}{\overline{c_2}t} < 1$, então como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} b_k(x)dx = 0$ temos

$$\begin{aligned}b_k * \phi_t(x) &= \frac{1}{t^n}\int_{\mathbb{R}^n} b_k(y)\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)dy\\ &= \frac{1}{t^n}\int_{\mathbb{R}^n} b_k(y)\left[\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\phi\left(\frac{x-x_k}{t}\right)\right]dy\\ &= I_1 - I_2,\end{aligned}$$

no qual

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{t^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_k(y)\left[\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\phi\left(\frac{x-x_k}{t}\right)\right]dy,\\ I_2 &= \frac{c_k}{t^n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(y)\left[\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\phi\left(\frac{x-x_k}{t}\right)\right]dy.\end{aligned}$$

Para I_1, definamos $\Psi^t(y) \doteq \dfrac{\eta_k(y)}{t^n}\left[\phi\left(\dfrac{x-y}{t}\right)-\phi\left(\dfrac{x-x_k}{t}\right)\right]$. Temos que $|\partial^\alpha\Psi^t(y)| \leqslant a_\alpha(\phi,n)\dfrac{\ell_k}{|x-x_k|^{n+1}}\ell_k^{-|\alpha|}$. De fato, para $\alpha=e_i$ temos.

$$\begin{aligned}|\partial^{e_i}\Psi^t(y)| &= \frac{1}{t^n}\left|\partial^{e_i}\eta_k(y)\left[\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\phi\left(\frac{x-x_k}{t}\right)\right]+\eta_k(y)\frac{\partial^{e_i}\phi(\frac{x-y}{t})}{t}\right|\\ &\leqslant \frac{1}{t^n}c_{e_i}\ell_k^{-1}\left|\frac{y-x_k}{t}\right| + \frac{1}{t^{n+1}}\|\partial^{e_i}\phi\|_\infty\\ &\leqslant \frac{1}{t^{n+1}}\left[c_{e_i}\sqrt{n}(1+a)+\|\partial^{e_i}\phi\|_\infty\right]\\ &\leqslant \frac{\overline{c_2}^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}}\left[c_{e_i}\sqrt{n}(1+a)+\|\partial^{e_i}\phi\|_\infty\right]\frac{\ell_k}{\ell_k^{|e_i|}}\\ &= a_{e_i}\frac{\ell_k}{|x-x_k|^{n+1}}\ell_k^{-|e_i|}.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (2.7) e

$$\left|\partial^\alpha\left(\phi\left(\frac{x-\cdot}{t}\right)-\phi\left(\frac{x-x_k}{t}\right)\right)\right| \leqslant \frac{1}{t^{|\alpha|}}\|\partial^\alpha\phi\|_\infty.$$

se prova no processo de indução a desigualdade da acima para Ψ^t. Assim, para todo $|\alpha|\leqslant N$ temos que $|\partial^\alpha\Psi^t(y)|\dfrac{|x-x_k|^{n+1}}{\ell_k^{n+1}} \leqslant \widetilde{A}(\phi,n,N)\ \ell_k^{-n-|\alpha|}$.

Além disso, $supp\ \Psi^t \subset supp\ \eta^k \subset B(x_k,(1+c_2)\sqrt{n}\ell_k)$ e $\overline{x} \in B(x_k,(1+c_2)\sqrt{n}\ell_k)$. Logo ajustando por uma constante $R(\phi,n,N)>0$ tal que $\dfrac{1}{R}\Psi^t\dfrac{|x-x_k|^{n+1}}{\ell_k^{n+1}} \in \mathcal{A}_{n,N}$, podemos aplicar o Lema 2.3.2 e assim

$$\langle f, \frac{1}{R}\Psi^t\frac{|x-x_k|^{n+1}}{\ell_k^{n+1}}\rangle \leqslant A_N M_{\mathcal{F}} f(\overline{x}) \leqslant A_N\lambda.$$

Logo

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Psi^t(y)dy\right| = \left|\langle f,\Psi^t\rangle\right| \\
&= \frac{\ell_k^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}}R\left|\langle f, \frac{|x-x_k|^{n+1}}{R\ell_k^{n+1}}\Psi^t\rangle\right| \leqslant A_N\lambda R\frac{\ell_k^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Para I_2:

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_k\eta_k(y)}{t^n}\left[\phi(\frac{x-y}{t})-\phi(\frac{x-x_k}{t})\right]dy\right| \\
&\leqslant \frac{|c_k|}{t^n}\int_{Q_k^{1+a}}\left|\phi(\frac{x-y}{t})-\phi(\frac{x-x_k}{t})\right|dy \\
&\leqslant \frac{|c_k|}{t^n}\int_{Q_k^{1+a}}\|\phi'\|\frac{|y-x_k|}{t}dy \\
&\leqslant \frac{c\lambda}{t^{n+1}}\|\phi'\||Q_k^{1+a}|(1+a)\ell_k\sqrt{n} \\
&\leqslant c\lambda\frac{\overline{c_2}^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}}\|\phi'\|(1+a)^{n+1}\ell_k^{n+1}\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Então usando ambas desigualdades para todo t temos

$$\begin{aligned}
|b_k*\phi_t(x)| &\leqslant |I_1|+|I_2| \\
&\leqslant RA_N\lambda\frac{\ell_k^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}}+\sqrt{n}\|\phi'\|(1+a)^{n+1}\overline{c_2}^{n+1}c\lambda\frac{\ell_k^{n+1}}{|x-x_k|}.
\end{aligned}$$

Portanto de ambos casos temos a desigualdade

$$M_\phi b_k(x) \leqslant \tilde{\tilde{c}}(\phi,n,N)\lambda\frac{\ell_k^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}},\ \forall\ x\notin Q_k^{1+s}.$$

Agora faremos a conta usando a), b) e $\dfrac{n}{n+1}<p\leqslant 1$ para concluir que.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}(M_\phi b_k(x))^p dx &= \int_{Q_k^{1+s}}(M_\phi b_k(x))^p dx + \int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_k^{1+s}}(M_\phi b_k(x))^p dx \\
&\leqslant \tilde{c}^p\int_{Q_k^{1+s}}(M_{\mathcal{F}}f(x))^p dx + \tilde{\tilde{c}}^p\lambda^p\ell_k^{(n+1)p}\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_k^{1+s}}\frac{1}{|x-x_k|^{(n+1)p}}dx \\
&\leqslant \tilde{c}^p\int_{Q_k^{1+s}}(M_{\mathcal{F}}f(x))^p dx + \tilde{\tilde{c}}^p\lambda^p\ell_k^{(n+1)p}\int_{B(x_k,\frac{\ell_k}{2}(1+s))^c}\frac{1}{|x-x_k|^{(n+1)p}}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx + \widetilde{\widetilde{c}}^p \lambda^p \ell_k^{(n+1)p} \int_{\frac{\ell_k}{2}(1+s)}^{+\infty} \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1}}{r^{(n+1)p}} d\sigma(x')dr \\
&= \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx + \widetilde{\widetilde{c}}^p |S^{n-1}| \lambda^p \frac{\ell_k^n}{p(n+1)-n} \frac{(1+s)^{n-np-p}}{2^{n-np-p}} \\
&= \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx + |S^{n-1}| \frac{\widetilde{\widetilde{c}}^p}{p(n+1)-n} \frac{(1+s)^{-np-p}}{2^{n-np-p}} \int_{Q_k^{1+s}} \lambda^p dx \\
&\leqslant \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx + \frac{|S^{n-1}|\widetilde{\widetilde{c}}^p}{p(n+1)-n} \frac{(1+s)^{-np-p}}{2^{n-np-p}} \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx \\
&= C(\phi, n, p, N) \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx,
\end{aligned}
$$

e dessa forma o teorema está concluído.

A seguir vamos a estender o Teorema de decomposição de Calderón-Zygmund para todo $0 < p < 1$.

□

Proposição 2.3.7 (Decomposição de Calderón-Zygmund generalizada). *Nas mesmas hipóteses do Teorema 2.3.6, mas agora com $p > 0$ arbitrário, podemos escrever $f = g+b$ tal que:*

(i) Existe $c(\phi, n, d, N) > 0$ tal que $\|g\|_{L^\infty} \leqslant c(\phi, n, N)\lambda$.

(ii) $b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k$, supp $b_k \subset Q_k^{1+s}$ com as condições de momento

$$\int_{\mathbb{R}^n} b_k(x) x^\alpha dx = 0, \ \forall \ |\alpha| \leqslant d, \ \text{no qual} \ \left\lfloor n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right\rfloor \leqslant d.$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_k(x))^p dx \leqslant C(\phi, n, p, N) \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx.$$

(iii) $\bigcup_k Q_k^{1+s} = \{x \in \mathbb{R}^n / \ M_{\mathcal{F}} f(x) > \lambda\}$ e a família $\left\{Q_k^{1+s}\right\}_k$ tem a propriedade da interseção limitada.

Demonstração.

(iii) Fazemos o mesmo que no Teorema 2.3.6 e temos a propriedade.

(i) Fixemos $d \in \mathbb{N}$ posteriormente escolhido e considere a medida $d\mu_k \doteq \eta_k dx$, no qual as funções η_k são aquelas definidas no Teorema 2.3.6. Denotamos os espaços $\mathcal{H}^k \doteq L^2(Q_k^{1+s}, d\mu_k)$,$\mathcal{H}_d$ os polinômios em Q^{1+s} com grau não maior a d, $\mathcal{H}_d^k$ os polinômios em Q_k^{1+s} com grau não maior a d.

Considere o produto interior $< g, h >_1 \doteq \int_{Q_k^{1+s}} g\overline{h} d\mu_k$. Fixemos uma base $\{e_\alpha\}_{|\alpha| \leqslant d}$ ortonormal em $\mathcal{H}_d^k$, no qual $e_{\mathbf{0}} \doteq \dfrac{1}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k dx}}$. Definamos a projeção,

$$
\begin{aligned}
P_k^d : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{H}_d^k \\
f &\mapsto (P_k^d f)(x) \doteq \sum_{|\alpha| \leqslant d} < f, \overline{e_\alpha \eta_k} > e_\alpha(x),
\end{aligned}
$$

e definamos os b_k como

$$b_k \doteq (f - P_k^d f)\eta_k.$$

Denotamos $c_k \doteq P_k^d f$ e também definimos g e b do mesmo modo que no teorema anterior. Observe que no teorema anterior os b_k são os mesmo quando $d = 0$. Agora provaremos que

$$|c_k \eta_k| \leqslant c(n, d, N)\lambda. \tag{2.9}$$

Com efeito:
Em $\mathcal{H}_d^k$ podemos definir 3 normas:

$$
\begin{aligned}
\|q\|_{Q_k} &\doteq \left(\int_{Q_k} |q|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\|q\|_{Q_k^{1+s}} &\doteq \left(\int_{Q_k^{1+s}} |q|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\|q\|_{k,d} &\doteq \sqrt{< q, q >_1}.
\end{aligned}
$$

Também podemos definir as seguintes normas em $\mathcal{H}_d$:

$$
\begin{aligned}
\|q\|_\infty &\doteq \sup_{x \in Q^{1+s}} |q(x)|, \\
\|q\|_Q &\doteq \left(\int_Q |q|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\|q\|_{Q^{1+s}} &\doteq \left(\int_{Q^{1+s}} |q|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Vamos fazer algumas observações:

- $\gamma_1(n, d)\|q\|_{Q^{1+s}} \leqslant \|q\|_Q \leqslant \gamma_2(n, d)\|q\|_{Q^{1+s}}$, pois o espaço é de dimensão finita. Observe que as constantes são independentes de s, pois só precisamos fixar um tal que $0 < s < c_1(n) - 1$.
- $\|q\|_{Q_k^{1+s}} \simeq \|q\|_{k,d}$, pois

$$\frac{1}{\gamma(n)} \int_{Q_k} |q(x)|^2 dx \leqslant \int_{Q_k} |q(x)|^2 \eta_k(x) dx \leqslant \int_{Q_k^{1+s}} |q(x)|^2 \eta_k(x) dx$$

$$\leqslant \int_{Q_k^{1+s}} |q(x)|^2 dx,$$

pois $\eta_k \equiv 1$ em Q_k e $0 \leqslant \eta_k \leqslant 1$. Por outro lado, seja y_k o vértice inferior de Q_k. Aplicando a mudança de variável $\dfrac{x - y_k}{l_k} = y$ temos

$$\begin{aligned}\int_{Q_k} |q(x)|^2 dx &= \int_Q |q(y\ell_k + y_k)|^2 \ell_k^n dy \\ &= \ell_k^n \|q_k\|_Q^2, \quad q_k(y) \doteq y\ell_k + y, \text{ e } Q \text{ é o cubo canônico.}\end{aligned}$$

Assim

$$\int_{Q_k} |q(x)|^2 dx \geqslant \ell_k^n \gamma_1^2 \|q_k\|_{Q^{1+s}}^2 = \gamma_1^2 \int_{Q_k^{1+s}} |q(x)|^2 dx.$$

Na penúltima igualdade foi feito o uso da mudança de variável $x = yl_k + y_k$. Juntando ambas desigualdades temos

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_1^2}{\gamma(n)} \int_{Q_k^{1+s}} |q(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{\gamma(n)} \int_{Q_k} |q(x)|^2 dx &\leqslant \int_{Q_k^{1+s}} |q(x)|^2 \eta_k(x) dx \\ &\leqslant \int_{Q_k^{1+s}} |q(x)|^2 dx,\end{aligned}$$

o qual

$$\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma(n)}} \|q\|_{Q_k^{1+s}} \leqslant \|q\|_{k,d} \leqslant \|q\|_{Q_k^{1+s}}.$$

- $\sup_{x \in Q_k^{1+s}} |\partial^\beta q(x)| \leqslant \sigma_\beta(n,d) \ell_k^{-\frac{n}{2} - |\beta|} \|q\|_{Q_k^{1+s}}, \ q \in \mathcal{H}_d^k.$

  Dado que

$$\begin{aligned}\partial^\beta : (\mathcal{H}_d, \|\cdot\|_{Q^{1+s}}) &\longrightarrow (\mathcal{H}_d, \|\cdot\|_\infty) \\ p &\longmapsto \partial^\beta p,\end{aligned}$$

é linear entre espaços de dimensão finita, temos que existe $\sigma_\beta(n,d) > 0$ tal que para todo $p \in \mathcal{H}_d$ satisfaz

$$\sup_{x \in Q^{1+s}} |\partial^\beta p(x)| \leqslant \sigma_\beta(n,d) \|p\|_{Q^{1+s}}.$$

Logo mudando de variável temos que para todo $q \in \mathcal{H}_d^k$ satisfaz

$$\sup_{x \in Q_k^{1+s}} |\partial^\beta q(x)| \leqslant \sigma_\beta(n,d) \|q\|_{Q_k^{1+s}} \ell_k^{-\frac{n}{2} - |\beta|}. \tag{2.10}$$

Assim

$$\left| \langle f, \frac{\overline{q}}{\|q\|_{k,d}} \overline{\eta_k} \rangle \frac{q(x)}{\|q\|_{k,d}} \right| \leqslant \left| \langle f, \frac{\overline{q}}{\|q\|_{k,d}} \overline{\eta_k} \rangle \right| \frac{\|q\|_{Q_k^{1+s}}}{\|q\|_{k,d}} \leqslant \left| \langle f, \frac{\overline{q}}{\|q\|_{k,d}} \overline{\eta_k} \rangle \right| \ell_k^{-\frac{n}{2}} \sigma_0(n,d)$$

$$= \left|\langle f, \eta_q^k \rangle\right| \sigma_0(n,d),$$

no qual $\eta_q^k(x) = \dfrac{\overline{q(x)}}{\|q\|_{k,d}} \overline{\eta_k(x)} \ell_k^{-\frac{n}{2}}$. Das desigualdades (2.10) e (2.7) temos que

$$|\partial^\alpha \eta_q^k(x)| \leqslant d_\alpha(n,d) \ell_k^{-n-|\alpha|}.$$

Com efeito, para o caso $\alpha = e_i$ de (2.7) e (2.10) temos

$$\begin{aligned}
|\partial^{e_i} \eta_q^k(x)| &= \frac{\ell_k^{-\frac{n}{2}}}{\|q\|_{k,d}} \left| \overline{\partial^{e_i} q(x) \eta_k(x)} + \overline{q(x) \partial^{e_i} \eta_k(x)} \right| \\
&\leqslant \frac{\ell_k^{-\frac{n}{2}}}{\|q\|_{k,d}} \left[\sigma_i(n,d) \|q\|_{Q_k^{1+s}} \ell_k^{-\frac{n}{2}-1} + \sigma_0(n,d) \|q\|_{Q_k^{1+s}} \ell^{-\frac{n}{2}} c_i(n) \ell^{-1} \right] \\
&\leqslant c(n,d) \ell_k^{-n-1} \frac{\|q\|_{Q_k^{1+s}}}{\|q\|_{k,d}} = c(n,d) \ell_k^{-n-|e_i|}.
\end{aligned}$$

Seguindo por indução temos a desigualdade para o caso geral.
Como *supp* $\eta_q^k \subset$ *supp* $\eta_k \subset B(x_k, (1+c_2)\sqrt{n}\ell_k)$ e existe $\overline{x} \in B(x_k, (1+c_2)\sqrt{n}\ell_k) \cap \Omega^c$, logo podemos ajustar por uma constante e aplicar o Lema 2.3.2 de tal forma que

$$\begin{aligned}
\left|\langle f, \eta_q^k \rangle\right| &\leqslant d(n,d,N) M_{\mathcal{F}} f(\overline{x}) \\
&\leqslant d(n,d,N)\lambda.
\end{aligned}$$

Então todo polinômio $q \in \mathcal{H}_d^k$ com $\|q\|_{k,d} = 1$ satisfaz

$$|\langle f, \overline{q\eta_k} \rangle q(x)| \leqslant d(n,d,N)\sigma_0 \lambda.$$

Logo

$$\begin{aligned}
|c_k \eta_k(x)| \leqslant |c_k(x)| &= \left| \sum_{|\alpha| \leqslant d} \langle f, \overline{e_\alpha \eta_k} \rangle e_\alpha(x) \right| \\
&\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant d} |\langle f, \overline{e_\alpha \eta_k} \rangle e_\alpha(x)| \\
&\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant d} d(n,d,N)\sigma_0 \lambda \\
&\leqslant c(n,d,N)\lambda, \quad c(n,d,N) = \max\left\{ d(n,d,N)\sigma_0, 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Por definição temos

$$\begin{aligned}
g &= \chi_{\Omega^c} f + \sum_k c_k \eta_k, \\
b &= \sum_k b_k.
\end{aligned}$$

Observe que $f = g + b$ e procedendo como no Teorema 2.3.6 temos

$$\|g\|_{L^\infty} \leqslant c(\phi, n, d, N)\lambda.$$

Igualmente como no Teorema 2.3.6 vamos a provar:

a) $M_\phi b_k(x) \leqslant \overline{c}(\phi, n, d, N) M_{\mathcal{F}} f(x), \ x \in Q_k^{1+s}$.

b) $M_\phi b_k(x) \leqslant \overline{\overline{c}}(\phi, n, d, N) \lambda \dfrac{\ell_k^{n+d+1}}{|x - x_k|^{n+d+1}}, \ x \notin Q_k^{1+s}$.

Começamos com a justificativa de a). Novamente sem perdida de generalidade assumimos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} M_\phi b_k(x) &= M_\phi((f - c_k)\eta_k)(x) \\ &\leqslant \sup_{t>0} |f\eta_k * \phi_t(x)| + \sup_{t>0} |c_k \eta_k * \phi_t(x)| \\ &\leqslant \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_k(y)\phi_t(x-y)dy \right| + \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} c_k(x-y)\eta_k(x-y)\phi_t(y)dy \right| \\ &\leqslant \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_k(y)\phi_t(x-y)dy \right| + \|c_k\eta_k\|_{L^\infty} \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)dy \\ &\leqslant \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_k(y)\phi_t(x-y)dy \right| + c\lambda, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)dy = 1. \end{aligned}$$

Então procedemos da mesma forma que no Teorema anterior e assim temos a desigualdade

$$M_\phi b_k(x) \leqslant \overline{c}(\phi, n, d, N) M_{\mathcal{F}} f(x), \ x \in Q_k^{1+s}.$$

Agora provaremos a afirmação b). Da mesma forma que na prova da parte b) de ii) do Teorema 2.3.6 temos que todo $y \in Q_k^{1+a}$ satisfaz

$$\begin{aligned} |x - y| &\leqslant \overline{c_1}|x - x_k|. \\ |x - x_k| &\leqslant \overline{c_2}|x - y|. \end{aligned}$$

– Se $\dfrac{|x - x_k|}{\overline{c_2}t} \geqslant 1$, então $\dfrac{|x-y|}{t} \geqslant 1$ o qual $\phi_t\left(\dfrac{x-y}{t}\right) = 0$ logo de *supp* $b_k \subset$ *supp* $\eta_k \subset Q_k^{1+a}$ temos que $b_k * \phi_t(x) = 0$.

– Se $\dfrac{|x - x_k|}{\overline{c_2}t} < 1$:
Seja $z_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$q^t(h) \doteq \sum_{|\alpha| \leqslant d} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \phi_t(z_0) h^\alpha,$$

pela Observação 1.3.14 temos

$$\left|\partial^\alpha \left[\phi_t(z_0 + h) - q^t(h)\right]\right| \leqslant \frac{c(n,d)}{t^{n+d+1}} \sup_{|\gamma| = d+1} \|\phi\|_{0,\gamma} |h|^{d-|\alpha|+1}.$$

Fixando $z_0 = x - x_k$ definimos

$$\Psi(y) \doteq \eta_k(y)\left(\phi_t(x-y) - q^t(x-y)\right),$$

observe que fazendo $h = x_k - y$, pela desigualdade anterior temos

$$\left|\partial^\alpha \left[\phi_t(x-y) - q^t(x_k - y)\right]\right| \leqslant \frac{M(n,d,\phi)}{t^{n+d+1}} |x_k - y|^{d-|\alpha|+1}, \qquad (2.11)$$

Então das condições de momento temos

$$\begin{aligned} b_k * \phi_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} b_k(y)\phi_t(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} b_k(y)\left[\phi_t(x-y) - q^t(x_k-y)\right]dy \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned}$$

no qual

$$\begin{aligned} I_1 &\doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Psi(y)dy = \langle f, \Psi\rangle, \\ I_2 &\doteq \int_{\mathbb{R}^n} c_k(y)\eta_k(y)\left[\phi_t(x-y) - q^t(x_k-y)\right]dy. \end{aligned}$$

Começamos fazendo conta para I_1. De *supp* $\eta_k \subset Q_k^{1+a} = Q(x_k, \ell_k(1+a))$, (2.7) e (2.11) temos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha\eta_k(y)\partial^\beta\left[\left(\phi_t(x-y) - q^t(x_k-y)\right)(y)\right] &\leqslant c_\alpha l_k^{-|\alpha|} M(n,d,\phi)\frac{|x_k-y|^{d+1-|\beta|}}{t^{n+d+1}} \\ &\leqslant c_\alpha(n,d,\phi)\overline{c_2}^{n+d+1} l_k^{-|\alpha|}\frac{l_k^{d+1-|\beta|}}{|x-x_k|^{n+d+1}}, \end{aligned}$$

assim;

$$|\partial^\alpha\Psi(y)| \leqslant C_\alpha(\phi,n,d)\frac{l_k^{d+1-|\alpha|}}{|x-x_k|^{n+d+1}}.$$

Fazendo o mesmo como no Teorema anterior, podemos ajustar por uma constante e escolher $\overline{x} \in B(x_k, (1+c_2)\sqrt{n}\ell_k) \cap \Omega^c$ tal que

$$|I_1| = |\langle f, \Psi\rangle| \leqslant \overline{c_\alpha}(\phi,n,d,N)\lambda\frac{\ell_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}.$$

Por outro lado das desigualdades (2.9) e (2.11) temos

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} c_k(y)\eta_k(y)\left[\phi_t(x-y) - q^t(x_k-y)\right]dy\right| \\ &\leqslant c\lambda\frac{M}{t^{n+d+1}}\int_{Q_k^{1+a}} |x_k-y|^{d+1}dy \\ &\leqslant c\lambda M\frac{\overline{c_2}^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}(1+a)^{n+d+1}\ell_k^{n+d+1}. \end{aligned}$$

Logo usando ambas desigualdades para $|I_1|$ e $|I_2|$ temos

$$M_\phi b_k(x) = \sup_{t>0}|b_k * \phi_t(x)| \leqslant \widetilde{\widetilde{c}}(\phi,n,d,N)\lambda\frac{\ell_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}.$$

Agora fazemos uma conta similar ao teorema anterior para $\|M_\phi f\|_{L^p}$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_k(x))^p \, dx \\
&\quad \leqslant \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f)^p \, dx + \widetilde{\widetilde{c}}^p \lambda^p \ell_k^{(n+d+1)p} \int_{(Q_k^{1+s})^c} \left(\frac{1}{|x-x_k|}\right)^{(n+d+1)p} dx \\
&\quad \leqslant \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f)^p \, dx + \widetilde{\widetilde{c}}^p \lambda^p \ell_k^{(n+d+1)p} \int_{B(x_k, \frac{\ell_k}{2}(1+s))^c} \frac{1}{|x-x_k|^{(n+d+1)p}} dx \\
&\quad = \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f)^p \, dx + \widetilde{\widetilde{c}}^p \lambda^p \ell_k^{(n+d+1)p} |S^{n-1}| \int_{\frac{\ell_k}{2}(1+s)}^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{(n+d+1)p}} dr.
\end{aligned}$$

Agora escolhemos d tal que $n < (n+d+1)p$, logo:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_k(x))^p \, dx \\
&\quad \leqslant \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p \, dx + \widetilde{\widetilde{c}}^p \frac{|S^{n-1}|}{p(n+d+1)-n} \frac{(1+s)^{-(n+d+1)p}}{2^{n-(n+d+1)p}} \left(\lambda^p (1+s)^n \ell_k^n\right) \\
&\quad \leqslant \widetilde{c}^p \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p \, dx + \widetilde{\widetilde{c}}^p \frac{|S^{n-1}|}{p(n+d+1)-n} \frac{(1+s)^{-(n+d+1)p}}{2^{n-(n+d+1)p}} \int_{Q_k^{1+s}} \lambda^p dx \\
&\quad \leqslant C(\phi, n, d, p, N) \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p \, dx.
\end{aligned}$$

□

2.4 Teorema de Decomposição Atômica em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$

Dedicamos esta seção para provar um Teorema da Decomposição Atômica nos espaços de Hardy. Este teorema é uma ferramenta primária na demonstração do resultado principal do artigo [28].

Definição 2.4.1. Sejam $0 < p \leqslant 1 \leqslant q < +\infty$, $p < q$. Uma função a é um (p,q)-átomo se:

- Existe uma bola B tal que *supp* $a \subset B$.
- $\|a\|_{L^q} \leqslant |B|^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^\alpha dx = 0$, para todo $|\alpha| \leqslant \left\lfloor n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right\rfloor$.

Para $q = +\infty$ definimos $(p,+\infty)$-átomo ou p-átomo em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, se a segunda condição é substituída por $\|a\|_\infty \leqslant |B|^{-\frac{1}{p}}$.

Teorema 2.4.2. *Existe uma constante universal $c > 0$ tal que todo $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ átomo "a" satisfaz:*

$$\|a\|_{\mathbf{H}^p} \leqslant c.$$

Demonstração. Seja a um $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ átomo, observe que $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ pois para todo $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\Psi(x)dx \right| \leqslant |B|^{1-\frac{1}{p}} \|\Psi\|_\infty.$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não negativa tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$ e seja $B = B(x_0, r)$ tal que *supp* $a \subset B$.

- Se $x \in B(x_0, 2r)$:

$$\begin{aligned} M_\phi a(x) &= \sup_{t>0} |a * \phi_t(x)| \leqslant \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |a(x-y)|\phi_t(y)dy \\ &\leqslant |B|^{-\frac{1}{p}} \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)dy \\ &= \|\phi\|_{L^1} |B|^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

- Se $x \notin B(x_0, 2r)$:
  Seja $q^t(z) = \displaystyle\sum_{|\alpha| \leqslant d} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \phi_t(z_0) z^\alpha$ com $d = \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right\rfloor$. Pelo controle do Resto de Taylor temos

$$|\phi_t(z) - q^t(z)| \leqslant \sup_{|\gamma|=d+1,\ \zeta \in [z, z_0]} |\partial^\gamma \phi_t(\zeta)||z - z_0|^{d+1} \leqslant \frac{1}{t^{n+d+1}} c(\phi, d)|z - z_0|^{d+1},$$

  fixando $z_0 = x - x_0$ temos que

$$\left|\phi_t(x-y) - q^t(x-y)\right| \leqslant c(\phi, d) \frac{|y - x_0|^{d+1}}{t^{n+d+1}}.$$

  Observe que para todo $y \in B(x_0, r)$ temos que $|x - x_0| \geqslant 2r \geqslant 2|y - x_0|$ pois $x \notin B(x_0, 2r)$, então

$$|x - y| \geqslant |x - x_0| - |y - x_0| \geqslant |x - x_0| - \frac{|x - x_0|}{2} = \frac{|x - x_0|}{2},$$

  - Se $\dfrac{|x - x_0|}{2} \geqslant t$ então $|x - y| \geqslant t$ para todo $y \in B(x_0, r)$ o qual $a * \phi_t(x) = 0$, pois $supp; a \subset B(x_0, r)$.
  - Se $\dfrac{|x - x_0|}{2} < t$, das condições de momento e pelo Resto de Taylor temos

$$\begin{aligned} |a * \phi_t(x)| &= \left| \int_{B(x_0,r)} a(y)\phi_t(x-y)dy \right| = \left| \int_{B(x_0,r)} a(y) \left[\phi_t(x-y) - q^t(x-y)\right] dy \right| \\ &\leqslant \int_{B(x_0,r)} |a(y)| \left|\phi_t(x-y) - q^t(x-y)\right| dy \leqslant c(\phi, d) \int_B |B|^{-\frac{1}{p}} \frac{|y - x_0|^{d+1}}{t^{n+d+1}} dy \\ &\leqslant c(\phi, d) 2^{n+d+1} \frac{|B|^{-\frac{1}{p}}}{|x - x_0|^{n+d+1}} \int_{B(x_0,r)} |y - x_0|^{d+1} dy \\ &\leqslant c(\phi, n, d) \frac{|B|^{-\frac{1}{p}}}{|x - x_0|^{n+d+1}} r^{d+1}|B| = c(\phi, n, d)|B|^{-\frac{1}{p}} \frac{r^{n+d+1}}{|x - x_0|^{n+d+1}}. \end{aligned}$$

Portanto de ambos casos temos que

$$M_\phi a(x) \leqslant c(\phi, n, d)|B|^{-\frac{1}{p}} \frac{r^{n+d+1}}{|x-x_0|^{n+d+1}}, \qquad \forall\, x \notin B(x_0, r).$$

O qual

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi a(x)^p dx &= \int_{B(x_0,2r)} M_\phi a(x)^p dx + \int_{B(x_0,2r)^c} M_\phi a(x)^p dx \\
&\leqslant \|\phi\|^p |B|^{-1}|B| + c(\phi,n,d,p)|B|^{-1} \int_{B(x_0,2r)^c} \frac{r^{(n+d+1)p}}{|x-x_0|^{(n+d+1)p}} dx \\
&= c(\phi,p) + c(\phi,n,d,p)|B|^{-1} \int_{2r}^{+\infty} r^{(n+d+1)p} \lambda^{n-1-(n+d+1)p} d\lambda \\
&= c(\phi,p) + c(\phi,n,d,p)|B|^{-1} \frac{r^{(n+d+1)p}}{(n+d+1)p-n} (2r)^{n-(n+d+1)p} \\
&= c(\phi,p) + c(\phi,n,d,p) = c(\phi,n,d,p).
\end{aligned}$$

□

Note que o Teorema anterior também é valido para os (p,q)-átomos pois

$$\begin{aligned}
M_\phi a(x) &\leqslant \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |a(x-y)|\phi_t(y) dy \leqslant \sup_{t>0} \|a\|_{L^q} \|\phi_t\|_{L^{q'}} && (2.12) \\
&\leqslant |B|^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} && (2.13)
\end{aligned}$$

Teorema 2.4.3. *Seja $0 < p \leqslant 1$. Então $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. .*

Demonstração. Fixemos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não negativa com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Sejam $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$, definimos o conjunto

$$\Omega_\lambda \doteq \{x \in \mathbb{R}^n /\ \lambda < M_{\mathcal{F}} f(x)\}.$$

Considere a família de cubos diádicos $\{Q_k\}_k$ da decomposição de Whitney para Ω_λ. Sejam também as funções η_k do Teorema 2.3.6 e definimos as funções

$$\begin{aligned}
b_k : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
\Phi &\longmapsto \langle b_k, \Phi\rangle \doteq \langle (f-c_k)\eta_k, \Phi\rangle,
\end{aligned}$$

no qual $c_k \doteq \dfrac{\langle f, \eta_k\rangle}{\langle \eta_k, 1\rangle}$. Lembremos que no Teorema 2.3.6 a hipótese $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ só foi usada para provar que $|g(x)| \leqslant c\lambda$, quando $x \in \Omega_\lambda^c$. Agora mostraremos alguns fatos:

- $c_k\eta_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, pois $c_k\eta_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $b_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:
  Desde que $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ temos que existem $M, m \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\langle f\eta_k, \Phi\rangle| = |\langle f, \eta_k\Phi\rangle| \leqslant M \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup \left|(1+|x|^2)^m \partial^\alpha(\eta_k\Phi)\right|.$$

E como $|\partial^\alpha \eta_k(x)| \leqslant c_\alpha \ell_k^{-|\alpha|}$ temos que existem $M', m' \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\langle f\eta_k, \Phi\rangle| \leqslant M' \sum_{|\alpha|\leqslant m'} \sup \left|(1+|x|^2)^{m'}\partial^\alpha \Phi\right|.$$

Portanto $b_k = (f - c_k)\eta_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

- $b_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$:
Desde que $b_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ temos que $b_k \in D'(\mathbb{R}^n)$, e também *supp* $b_k \subset$ *supp* η_k que é compacto. Assim concluímos que $b_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

- $b \doteq \sum_k b_k \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$:
Seguindo o mesmo que no Teorema 2.3.6 temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_k(x))^p dx \leqslant c(\phi, n, p, N) \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\phi b(x)|^p dx \leqslant \sigma(n) \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_k(x))^p dx \leqslant c(\phi, n, p, N) \sum_k \int_{Q_k^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx$$
$$\leqslant \widetilde{c}(\phi, n, p, N) \int_{\Omega_\lambda} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx < +\infty.$$

A primeira desigualdade é pela propriedade da interseção limitada, assim de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ completo temos que existe o limite $\sum_k b_k \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b(x))^P dx \leqslant \widetilde{c}(\phi, n, p, N) \int_{\Omega_\lambda} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx.$$

- $g_\lambda \doteq f - b \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi (f - g_\lambda)(x))^p \, dx \leqslant \widetilde{c}(\phi, n, p, N) \int_{\Omega_\lambda} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx.$$

É imediato do anterior pois $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$.

Agora provaremos que $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, para isto provaremos primeiro que

$$(M_\phi g_\lambda)(x) \leqslant c(\phi, N) M_{\mathcal{F}} f(x) \chi_{\Omega_\lambda^c}(x) + c(\phi, n, N)\lambda \sum_k \frac{\ell_k^{n+1}}{(\ell_k + |x - x_k|)^{n+1}}. \tag{2.14}$$

<u>Com efeito</u>:
Verificaremos a desigualdade nos dois casos.

(I) Se $x \notin \Omega_\lambda$.
Desde que $Q_k^{1+s} \subset \Omega_\lambda$ temos que $x \notin Q_k^{1+s}$, para $M_\phi b_k(x)$ seguemos o mesmo processo que realizamos no Teorema 2.3.6 e temos

$$M_\phi b_k(x) \leqslant \widetilde{\widetilde{c}}(\phi, n, N)\lambda \frac{\ell_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}},$$

mas $B(x_k, \frac{1+s}{2}\ell_k) \subset Q_k^{1+s}$, então

$$M_\phi b_k(x) \leqslant \left(1 + \frac{2}{1+s}\right)^{n+1} \widetilde{\widetilde{c}}\lambda \frac{\ell_k^{n+1}}{(\ell_k + |x - x_k|)^{n+1}}.$$

Aplicando a desigualdade temos

$$\begin{aligned} M_\phi g_\lambda(x) &\leqslant M_\phi f(x) + \sum_k M_\phi b_k(x) \\ &\leqslant c(\phi, N) M_{\mathcal{F}} f(x) \chi_{\Omega_\lambda^c}(x) + c(\phi, n, N)\lambda \sum_k \frac{\ell_k^{n+1}}{(\ell_k + |x - x_k|)^{n+1}}. \end{aligned}$$

(II) Se $x \in \Omega_\lambda$:
Como $\Omega_\lambda = \bigcup_k Q_k$, existe Q_m tal que $x \in Q_m$. Tomemos a família

$$\mathcal{C}_\lambda \doteq \left\{ Q_k^{1+s} / \; Q_m^{1+s} \cap Q_k^{1+s} \neq \varnothing \right\}$$

que é finita, pois $\{Q_k\}_k$ tem a propriedade da interseção limitada. Isto nos permite escrever

$$g_\lambda = \left(f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} b_k \right) - \sum_{Q_k^{1+s} \notin \mathcal{C}_\lambda} b_k,$$

em consequência

$$M_\phi g_\lambda(x) \leqslant M_\phi \left(f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x) + M_\phi \left(\sum_{Q_k^{1+s} \notin \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x).$$

(a) Trabalhando $M_\phi \left(\sum_{Q_k^{1+s} \notin \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x)$.

Desde que $x \in Q_m$, $Q_m^{1+s} \cap Q_k^{1+s} = \varnothing$ e $B(x_k, \frac{1+s}{2}\ell_k) \subset Q_k^{1+s}$, temos que $x \notin Q_k^{1+s}$ e $\dfrac{1+s}{2}\ell_k \leqslant |x - x_k|$. Portanto podemos fazer o mesmo que no item i) para o controle em cada término $b_k(x)$ da soma, assim

$$M_\phi \left(\sum_{Q_k^{1+s} \notin \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x) \leqslant \widetilde{\widetilde{c}}(\phi, n, N)\lambda \sum_{Q_k^{1+s} \notin \mathcal{C}_\lambda} \frac{\ell_k^{n+1}}{(\ell_k + |x - x_k|)^{n+1}}.$$

(b) Trabalhando $M_\phi \left(f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x)$.

Definamos $h \doteq f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} f\eta_k$, então

$$f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} b_k = h - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} c_k \eta_k.$$

Começamos com $\displaystyle\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda} c_k\eta_k$,

$$M_\phi\left(\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda} c_k\eta_k\right)\leqslant\sum_{Q_k^{1+s}}|c_k|(M_\phi\eta_k)(x)\leqslant c(n,N)\lambda\sum_{Q_k^{1+s}}\|\eta_k\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n}\phi_t(y)dy$$
$$\leqslant c(n,N)\lambda\gamma(n)\frac{\ell_m^{n+1}}{\ell_m^{n+1}}\leqslant c(n,N)\lambda\gamma(n)(\sqrt{n}+1)^{n+1}\frac{\ell_m^{n+1}}{(\ell_m+|x-x_m|)^{n+1}}.$$

A última desigualdade é obtida pelo fato de $x\in Q_m\subset B(x_m,\sqrt{n}\ell_m)$. Seja

$$\Psi_t(y)\doteq\left(1-\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\right)(y)\phi_t(x-y),$$

então

$$h*\phi_t(x)=\langle f,\Psi_t\rangle.$$

Vamos aos casos

- Se $t\leqslant\frac{s}{2}\ell_m$.

  Desde que $\left(1-\displaystyle\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\right)$ é nula em Q_m^{1+s}, então Ψ_k é nula também.

  Por outro lado, para $y\notin Q_m^{1+s}$ temos que $|x-y|\geqslant\frac{s}{2}\ell_k$ assim, $1\leqslant\dfrac{|x-y|}{t}$ isto é, $\phi_t(x-y)=0$ pois *supp* $\phi\subset B(0,1)$. Então

  $$h*\phi_t(x)=0.$$

- Se $t\geqslant\frac{s}{2}\ell_m$.

  Desde que $x\in Q_m$, $c_1(n)diamQ_m\leqslant dist(Q_m,\Omega_\lambda^c)\leqslant c_2(n)diamQ_m$, temos

  $$B(x,(1+c_2)\sqrt{n}\ell_m)\cap\Omega_\lambda^c\neq\varnothing.$$

  Agora tomemos $K>1$ tal que

  $$B(x,(1+c_2)\sqrt{n}\ell_m)\subset\ B(x,Kt),$$

  assim temos as seguintes propriedades:

  i) Existe $\overline{x}\in B(x,Kt)\cap\Omega_\lambda^c$.

  ii) *supp* $\phi_t\subset B(x,Kt)$.

  iii) $\left|\partial^\alpha\phi\left(\dfrac{x-y}{t}\right)\right|\leqslant\dfrac{1}{t^{|\alpha|}}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty}$, o qual

  $$|\partial^\alpha\phi_t(x-y)|\leqslant\frac{1}{t^{n+|\alpha|}}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty}.$$

  Logo ajustamos por uma constante e pelo Lema 2.3.2 temos a desigualdade

  $$|f*\phi_t(x)|=|\langle f,\phi_t(x-\cdot)\rangle|\leqslant c(\phi,N)M_{\mathcal{F}}f(\overline{x})\leqslant c(\phi,N)\lambda.$$

  Por outro lado, temos as seguintes propriedades:

iv) $|\partial^\alpha \eta_k(y)| \leqslant c_\alpha(n)\ell_k^{-|\alpha|}$.

v) $\dfrac{\ell_m}{\ell_k} = 2^{k-m} \leqslant \dfrac{c_2+1+s}{c_1-(1+s)}$.

vi) Temos o seguinte controle

$$\left|\partial^\alpha\left(\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\phi_t(x-y)\right)\right| \leqslant \widetilde{\widetilde{c}}_\alpha(\phi,n)\ell_m^{-|\alpha|-n}. \tag{2.15}$$

Para verificar isto começamos com

$$\begin{aligned}\left|\partial^\alpha\left(\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\right)(y)\right| &\leqslant \sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda} c_\alpha(n)\ell_k^{-|\alpha|}\\ &\leqslant c_\alpha(n)\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\left(\frac{c_2+1+s}{c_1-(1+s)}\right)^{|\alpha|}\ell_m^{-|\alpha|}\\ &= C_\alpha(n)\ell_m^{-|\alpha|},\end{aligned}$$

em consequência

$$\begin{aligned}\left|\partial^\alpha\left(\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\right)(y)\partial^\beta\left(\phi_t(x-y)\right)\right| &\leqslant C_\alpha(n)\ell_m^{-|\alpha|}\frac{1}{t^{|\beta|+n}}\|\partial^\beta\phi\|_\infty\\ &\leqslant \overline{c}_{\alpha,\beta}(\phi,n)\ell_m^{-|\alpha+\beta|-n}.\end{aligned}$$

Dessa forna está verificada a desigualdade (2.15).

De $supp\left(\sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\phi_t(x-y)\right)\subset\ supp\ \phi_t\subset B(x,Kt)$, de $\overline{x}\in B(x,Kt)$ e da desigualdade (2.15), podemos ajustar por uma constante e aplicar o Lema 2.3.2 e assim

$$\left|\left\langle f, \sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\phi_t(x-\cdot)\right\rangle\right| \leqslant c(\phi,n,N)\ M_{\mathcal{F}}f(\overline{x}) \leqslant c(\phi,n,N)\lambda.$$

Logo

$$\begin{aligned}M_\phi h(x) &= \sup_{t>0}|(h*\phi_t)(x)|\\ &\leqslant \sup_{t>0}|f*\phi_t(x)| + \sup_{t>0}\left|\left\langle f, \sum_{Q_k^{1+s}\in\mathcal{C}_\lambda}\eta_k\phi_t(x-\cdot)\right\rangle\right|\\ &\leqslant M_\phi f(x) + c(\phi,n,N)\lambda \leqslant c(\phi,N)M_{\mathcal{F}}f(x)\\ &\leqslant c(\phi,n,N)\lambda = c(\phi,n,N)\lambda\frac{\ell_m^{n+1}}{\ell_m^{n+1}}\\ &\leqslant c(\phi,n,N)\lambda\frac{\ell_m^{n+1}}{(\ell_m+|x-x_m|)^{n+1}}.\end{aligned}$$

A última desigualdade é obtida para $x\in Q_m$

Voltando para $f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} b_k$, seguindo das desigualdades temos

$$M_\phi \left(f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x) \leqslant c(\phi, n, N)\lambda \frac{\ell_m^{n+1}}{(\ell_m + |x - x_m|)^{n+1}}.$$

Juntando a) e b) temos que para todo $x \in \Omega_\lambda^c$ satisfaz

$$\begin{aligned}
M_\phi g_\lambda(x) &\leqslant M_\phi \left(\sum_{Q_k^{1+s} \notin \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x) + M_\phi \left(f - \sum_{Q_k^{1+s} \in \mathcal{C}_\lambda} b_k \right)(x) \\
&\leqslant \tilde{\tilde{c}}(\phi, n, N)\lambda \sum_{Q_k^{1+s} \notin \mathcal{C}_\lambda} \frac{\ell_k^{n+1}}{(\ell_k + |x - x_k|)^{n+1}} \\
&\leqslant c(\phi, N) M_{\mathcal{F}} f(x) \chi_{\Omega_\lambda^c}(x) + c(\phi, n, N)\lambda \sum_k \frac{\ell_k^{n+1}}{(\ell_k + |x - x_k|)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Com isso verificamos (2.14).

Juntando I) e II) vamos mostrar que $M_\phi(g_\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi(g_\lambda)(x)dx &\leqslant c_1 \int_{\Omega_\lambda^c} M_{\mathcal{F}} f(x)dx + c_2 \lambda \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\ell_k^{n+1}}{(\ell_k + |x - x_k|)^{n+1}} dx \\
&\leqslant c_1 \lambda^{1-p} \int_{\Omega_\lambda^c} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx + c_2 \lambda \sum_k |\ell_k|^n \\
&\leqslant c_1 \lambda^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx + c_2 \lambda |\Omega_\lambda| < +\infty.
\end{aligned}$$

No caso para $p = 1$ temos $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, o qual g_λ tem uma representação em $L^1(\mathbb{R}^n)$, em consequência $g_\lambda \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Em geral, temos a desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi(f - g_\lambda)(x))^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b)(x))^p dx \\
&\leqslant \tilde{c}(\phi, n, p, N) \int_{\Omega_\lambda} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx,
\end{aligned}$$

então de $\lambda > 0$ arbitrário, realizamos $\lambda \to +\infty$ e temos $g_\lambda \to f$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$.

Portanto temos demonstrado que $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^m) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 2.4.4. *Seja $0 < p \leqslant 1$. Fixando $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, existe $C(\phi, n, p, d, N) > 0$ tal que para cada $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ existe a sequência $\{a_j\}_j$ de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ átomos tais que*

$$f = \sum_j \lambda_j a_j,$$

em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ além disso,

$$\sum_k |\lambda_k|^p < C(\phi, n, p, d, N) \|f\|^p_{\mathbf{H}^p}.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária, fixemos $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ aplicamos a Proposição 2.3.7 para $\lambda = 2^j$, exibindo assim:

- $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \; 2^j < M_{\mathcal{F}} f(x)\right\} = \Omega_j = \displaystyle\bigcup_k Q_{j,k}^{1+s}$, $s > 0$
- Podemos escrever $f = g_j + b_j$ pontualmente
- $\|g_j\|_{L^\infty} \leqslant c(\phi, n, d, N)2^j$
- Podemos escrever $b_j = \displaystyle\sum_k b_{j,k}$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

  i) *supp* $b_{j,k} \subset Q_{j,k}^{1+s}$.

  ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} b_{j,k}(x)x^\alpha dx = 0$, para cada $|\alpha| \leqslant d \doteq N_p = \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right\rfloor$.

  iii) Existe $c(\phi, n, p) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_{j,k}(x))^p dx \leqslant c(\phi, n, p) \int_{Q_{j,k}^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx.$$

  iv) $g_j \longrightarrow f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to +\infty$.
  De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi(f - g_j)(x))^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_j(x))^p dx \leqslant \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi b_{j,k}(x))^p dx$$
$$\leqslant \sum_k c \int_{Q_{j,k}^{1+s}} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx \leqslant c \int_{\Omega_j} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p dx,$$

  e desde que $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} |\Omega_j| = |\lim_{j\to+\infty} \Omega_j| = |\varnothing| = 0$ (pois $\|f\|_{\mathbf{H}^p} < +\infty$ e $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j$), temos que $g_j \longrightarrow f$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to +\infty$. Consequentemente $g_j \longrightarrow f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to +\infty$.

- $g_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to -\infty$:
  É imediato, pois de $\|g_j\|_{L^\infty} \leqslant c(\phi, n, d, N)2^j$, temos que $g_j \longrightarrow 0$ uniformemente em quease todo ponto quando $j \to -\infty$. Então do Teorema 1.1.8 temos que $g_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to -\infty$.

Observe que em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ temos

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (g_{j+1} - g_j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (b_j - b_{j+1}),$$

além disso

$$g_{j+1} - g_j = b_j - b_{j+1} = \sum_k (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_m (f - c_m^{j+1})\eta_m^{j+1},$$

no qual as funções η_k^j e $c_k^j = P_k^j(f)$ são definidas como na Proposição 2.3.7 para $Q_{j,k}^{1+s}$. Também tomamos a base ortonormal $\{e_{j,k}^\alpha\}_{|\alpha|\leqslant d}$ de $L^2(Q_{j,k}^{1+s}, \eta_k^j dx)$ como nessa mesma Proposição. Definimos

$$c_{k,m} \doteq P_m^{j+1}\left[(f - c_m^{j+1})\eta_k^j\right],$$

os quais são polinômios em $Q_{j+1,m}^{1+s}$ de grau não maior a d.

Mostremos alguns fatos:

- $c_{k,m} = 0$ se $Q_{j,k}^{1+s} \cap Q_{j+1,m}^{1+s} = \varnothing$.

  É imediato, pois os escalares $\langle (f - c_m^{j+1})\eta_k^j, \overline{e_{j+1}^\alpha \eta_m^{j+1}}\rangle$ da projeção são nulos pois $supp\ \eta_k^j \cap\ supp\ \eta_m^{j+1} \subset Q_{j,k}^{1+s} \cap Q_{j+1,m}^{1+s} = \varnothing$.

- $c_{k,m} \neq 0$ implica que $Q_{j,k}^{1+s} \cap Q_{j+1,m}^{1+s} \neq \varnothing$ além disso

  $$c_1(n)diam(Q_{j+1,m}) \leqslant (c_2(n) + 1 + s)diam(Q_{j,k}).$$

  Do anterior é imediato que $Q_{j,k}^{1+s} \cap Q_{j+1,m}^{1+s} \neq \varnothing$ se $c_{k,m} \neq 0$. Seja $z \in Q_{j,k}$ arbitrário, seja $y \in Q_{j,k}^{1+s} \cap Q_{j+1,m}^{1+s}$ então

  $$\begin{aligned} c_1 diam(Q_{j+1,m}) &\leqslant d(Q_{j+1,m}, \Omega_{j+1}^c) \leqslant d(y, \Omega_{j+1}^c) \leqslant d(y,z) + d(z, \Omega_{j+1}^c) \\ &\leqslant \sqrt{n}\ell_k(1+s) + d(z, \Omega_j^c) = (1+s)diam(Q_{j,k}) + d(z, \Omega_j^c). \end{aligned}$$

  Logo da arbitrariedade temos que

  $$c_1 diam(Q_{j+1,m}) \leqslant (c_2 + 1 + s)diam(Q_{j,k}).$$

- $|c_{k,m}\eta_m^{j+1}| \leqslant c(n,d,N)2^j$:

  $$\begin{aligned} c_{k,m} &= \sum_{|\alpha|\leqslant d} \langle (f - c_m^{j+1})\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant d} \langle f, \eta_k^j \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha - \sum_{|\alpha|\leqslant d} \langle \sum_{|\beta|\leqslant d} \langle f, \overline{e_{j+1,m}^\beta \eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\beta \eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant d} \langle f, \eta_k^j \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha - \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant d} \langle f, \overline{e_{j+1,m}^\beta \eta_m^{j+1}}\rangle \langle e_{j+1,m}^\beta \eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha. \end{aligned}$$

  Estimando $\langle f, \eta_k^j \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha$: Observando que na demonstração da Proposição 2.3.7 obtemos que

  $$|\partial^\alpha \eta_k^j(x)| \leqslant c_\alpha(n)\ell_k^{-|\alpha|} \qquad \text{e} \qquad \sup_{x\in Q_k^{1+s}} |\partial^\beta q(x)| \leqslant \sigma_\beta(n,d)\ell_k^{-\frac{n}{2}-|\beta|}\|q\|_{Q_{j,k}^{1+s}},$$

  no qual q varia nos polinômios em $Q_{j,k}^{1+s}$ com grau menor ou igual a d. Além disso, as constantes c_α, σ_β são independentes de k e λ_j. Assim de $c_1 diam(Q_{j+1,m}) \leqslant (c_2 + 1 + s)diam(Q_{j,k})$ temos que

  $$|\partial^\alpha \eta_k^j(x)| \leqslant c_\alpha \ell_k^{-|\alpha|} \leqslant c_\alpha c_1^{-|\alpha|}(c_2 + 1 + s)^{|\alpha|}\ell_m^{-|\alpha|},$$

então

$$|\partial^\alpha(\eta_k^j\overline{e_{j+1,m}^\alpha\eta_m^{j+1}})| \leqslant \widetilde{c_\alpha}(n)\ell_m^{-\frac{n}{2}-|\alpha|}.$$

Seguindo o mesmo processo que na Proposição 2.3.7 podemos ter a desigualdade

$$\left|\langle f, \eta_k^j\overline{e_{j+1,m}^\alpha\eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha\right| \leqslant c(n,d,N)2^{j+1} = c(n,d,N)2^j.$$

Assim

$$\left|\sum_{|\alpha|\leqslant d}\langle f, \eta_k^j\overline{e_{j+1,m}^\alpha\eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha\right| \leqslant c(n,d,N)2^j.$$

Estimando $\langle f, \overline{e_{j+1,m}^\beta\eta_m^{j+1}}\rangle\,\langle e_{j+1,m}^\beta\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\beta\eta_m}^{j+1}\rangle e_{j+1,m}^\alpha$:

$$\begin{aligned}\left|\langle e_{j+1,m}^\beta\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha\eta_m^{j+1}}\rangle\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e_{j+1,m}^\beta\eta_k^j\overline{e_{j+1,m}^\alpha\eta_m^{j+1}}dx\right| \leqslant \int_{Q_{j+1,m}^{1+s}}|e_{j+1,m}^\beta||e_{j+1,m}^\alpha|\eta_k^j\eta_m^{j+1}dx\\ &\leqslant \sigma_0^2\ell_m^{-n}\int_{Q_{j+1,m}^{1+a}}1dx \leqslant \sigma_0^2\ell_m^{-n}(1+a)^n\int_{Q_{j+1,m}}1dx \leqslant c(n,d).\end{aligned}$$

Para $\langle f, \overline{e_{j+1,m}^\beta\eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha$ fazemos o mesmo que na Proposição 2.3.7 e temos

$$\left|\langle f, \overline{e_{j+1,m}^\beta\eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha\right| \leqslant c(n,d,N)2^{j+1} = c(n,d,N)2^j.$$

Assim

$$\left|\langle f, \overline{e_{j+1,m}^\beta\eta_m^{j+1}}\rangle\,\langle e_{j+1,m}^\beta\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha\eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha\right| \leqslant c(n,d,N)2^j,$$

logo

$$\left|\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant d}\langle f, \overline{e_{j+1,m}^\beta\eta_m^{j+1}}\rangle\,\langle e_{j+1,m}^\beta\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha\eta_m^{j+1}}\rangle e_{j+1,m}^\alpha\right| \leqslant c(n,d,N)2^j.$$

Combinando as duas desigualdades temos

$$|c_{k,m}| \leqslant c(n,d,N)2^j + c(n,d,N)2^j = c(n,d,N)2^j.$$

Agora vamos seguir com a demonstração do Teorema, usando a propriedade da interseção limitada. Definimos

$$A_k^j \doteq (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_m (f - c_m^{j+1})\eta_m^{j+1}\eta_k^j + \sum_m c_{k,m}\eta_m^{j+1}.$$

Mostremos algumas propriedades das funções A_k^j.

i) $g_{j+1} - g_j = \sum_k A_k^j$ pontualmente:
Observe que pelo Teorema 1.1.8 temos que

$$\sum_k \langle (f - c_m^{j+1})\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}} \rangle = \langle (f - c_m^{j+1})\chi_{\Omega_j}, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}} \rangle = \langle f - c_m^{j+1}, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}} \rangle,$$

a última igualdade é justificada por $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ e *supp* $\eta_m^{j+1} \subset \Omega_{j+1}$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_k c_{k,m} &= \sum_k P_m^{j+1}\left[(f - c_m^{j+1})\eta_k^j\right] \\
&= \sum_k \sum_{|\alpha| \leqslant d} \langle (f - c_m^{j+1})\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}} \rangle e_{j+1,m}^\alpha \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant d} \sum_k \langle (f - c_m^{j+1})\eta_k^j, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}} \rangle e_{j+1.m}^\alpha \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant d} \langle f - c_m^{j+1}, \overline{e_{j+1,m}^\alpha \eta_m^{j+1}} \rangle e_{j+1,m}^\alpha \\
&= P_m^{j+1}(f - c_m^{j+1}) = 0,
\end{aligned}$$

assim como *supp* $\eta_m^{j+1} \subset \Omega_j$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_k A_k^j &= \sum_k (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_k \sum_m (f - c_m^{j+1})\eta_m^{j+1}\eta_k^j + \sum_k \sum_m c_{k,m}\eta_m^{j+1} \\
&= \sum_k (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_m (f - c_m^{j+1})\eta_m^{j+1}\chi_{\Omega_j} + \sum_m \sum_k c_{k,m}\eta_m^{j+1} \\
&= \sum_k (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_m (f - c_m^{j+1})\eta_m^{j+1} \\
&= g_{j+1} - g_j.
\end{aligned}$$

ii) *supp* $A_k^j \subset B\left(x_{j,k}, \left(\frac{1}{2} + \frac{c_2 + 1 + s}{c_1}\right)(1+s)\sqrt{n}\ell_k\right) \doteq B_{j,k}$, no qual $Q_{j,k} = Q(x_{j,k}, \ell_k)$.
Claramente

$$\begin{aligned}
supp\ (A_k^j - \sum_m c_{k,m}\eta_m^{j+1}) &\subset supp\ \eta_k^j \subset Q_{j,k}^{1+s} \\
&\subset B\left(x_{j,k}, \left(\frac{1+s}{2} + \frac{1+s}{c_1}(c_2 + 1 + s)\right)\sqrt{n}\ell_k\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando que $c_{k,m} \neq 0$ implica $diam(Q_{j+1,m}^{1+s}) \leqslant \dfrac{c_2 + 1 + s}{c_1}\sqrt{n}(1+s)\ell_k$, temos que

$$supp\ \left(\sum_k c_{k,m}\eta_m^{j+1}\right) \subset B\left(x_{j,k}, \left(\frac{1+s}{2} + \frac{1+s}{c_1}(c_2 + 1 + s)\right)\sqrt{n}\ell_k\right).$$

Logo *supp* $A_k^j \subset B_{j,k}$, além disso $|B_{j,k}| = c(n)|Q_{j,k}|$.

iii) $|A_k^j| \leqslant c(\phi,n,d,N)2^j$ em quase todo ponto:

$$\begin{aligned}|A_k^j| &= \left| f\eta_k^j\chi_{\Omega_{j+1}^c} - c_k^j\eta_k^j + \sum_m c_m^{j+1}\eta_m^{j+1}\eta_k^j + \sum_m c_{k,m}\eta_m^{j+1}\right|\\ &\leqslant |f\chi_{\Omega_{j+1}^c}| + |c_k^j\eta_k^j| + \sum_m |c_m^{j+1}|\eta_m^{j+1} + \sum_m |c_{k,m}|\eta_m^{j+1}\\ &\leqslant |f\chi_{\Omega_{j+1}^c}| + c(n,d,N)2^j + c(n,d,N)2^{j+1} + c(n,d,N)2^j.\end{aligned}$$

Como $|f(x)| \leqslant c(\phi,n,d,N)2^j$ em quase todo ponto em Ω_{j+1}^c pois $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ o qual pela Proposição 2.3.7 f é g_j nesse conjunto e $\|g\|_{L^\infty} \leqslant c(\phi,n,d,N)2^{J+1}$, então em quase todo ponto temos

$$|A_k^j| \leqslant c(\phi,n,d,N)2^j$$

iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} A_k^j(x)x^\alpha dx = 0$, para todo $|\alpha| \leqslant d$:
Seja $|\alpha| \leqslant d$, assim

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} A_k^j(x)x^\alpha dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (f-c_k^j)\eta_k^j(x)x^\alpha dx +\\ &\sum_k \int \left\{P_m^{j+1}\left[(f-c_m^{j+1})\eta_k^j\right]\eta_m^{j+1} - (f-c_m^{j+1})\eta_k^j\eta_m^{j+1}\right\} x^\alpha dx\\ &= \int b_{j,k}(x)x^\alpha dx + \sum_m \int (P_m^{j+1} - Id)\left[(f-c_m^{j+1})\eta_k^j\right]\eta_m^{j+1}(x)x^\alpha dx\\ &= 0 + \sum_m 0 = 0.\end{aligned}$$

Agora definimos

$$a_k^j \doteq \lambda_{j,k}^{-1}A_k^j,$$

no qual $\lambda_{j,k} \doteq c(\phi,n,d,N)2^j|B_{j,k}|^{\frac{1}{p}}$. Pelas propriedades anteriores temos que:

- *supp* $a_k^j =$ *supp* $A_k^j \subset B_{j,k}$.
- $\|a_k^j\|_\infty \leqslant |B_{j,k}|^{-\frac{1}{p}}$, pois

$$|a_k^j(x)| \leqslant |\lambda_{j,k}||A_k^j(x)| \leqslant \frac{1}{c(\phi,n,d,N)2^j|B_{j,k}|^{\frac{1}{p}}}c(\phi,n,d,N)2^j = |B_{j,k}|^{-\frac{1}{p}}.$$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)x^\alpha dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda_{j,k}}A_k^j(x)x^\alpha dx = 0$, para todo $|\alpha| \leqslant d$.
- $\displaystyle\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p \leqslant c(\phi,n,p)\|f\|^p_{\mathbf{H}^p}$.

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_k |\lambda_{j,k}|^p = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_k c(\phi,n,p)2^{jp}|B_{j,k}| = c(\phi,n,p)\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_k 2^{jp}|Q_{j,k}|$$

$$= c(\phi, n, p) \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jp} |\Omega_j| = c \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(j-1)p} 2^p a_{(M_{\mathcal{F}} f)}(2^j),$$

no qual $a_f(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}$. Seguindo com a mesma desigualdade da acima temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_k |\lambda_{j,k}|^p &= c \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^p}{2^p - 1} \int_{2^{j-1} \leqslant r \leqslant 2^j} p r^{p-1} dr \; a_{(M_{\mathcal{F}} f)}(2^j) \\
&\leqslant c \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^p}{2^p - 1} \int_{2^{j-1} \leqslant r \leqslant 2^j} p r^{p-1} a_{(M_{\mathcal{F}} f)}(r) dr \\
&= c \frac{2^p}{2^p - 1} \int_0^{+\infty} p r^{p-1} a_{(M_{\mathcal{F}} f)}(r) dr = c \frac{2^p}{2^p - 1} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\mathcal{F}}(x)^p dx \\
&= C(\phi, n, p) \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p.
\end{aligned}$$

- $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_k \lambda_{j,k} a_k^j$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$:
  Desde que

$$\begin{aligned}
\int \left(M_\phi \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_k \lambda_{j,k} a_k^j \right)(x) \right)^p dx &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_k |\lambda_{j,k}|^p \int M_\phi(a_k^j(x))^p dx \leqslant c \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_k |\lambda_{j,k}|^p \\
&\leqslant c \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p < +\infty,
\end{aligned}$$

temos que existe $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_k \lambda_{j,k} a_k^j$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ pois o espaço é completo. Por outro lado, temos que em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$

$$g_{j+1} - g_j = \sum_k \lambda_{j,k} a_k^j,$$

então em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$

$$f = \sum_j g_{j+1} - g_j = \sum_j \sum_k \lambda_{j,k} a_k^j.$$

□

Definição 2.4.5. Seja $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, dizemos que $\sum_j \lambda_j a_j$ é uma representação de f se:

- $f = \sum_j \lambda_j a_j$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$;
- $\{a_j\}_j$ é uma coleção de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ átomos;
- $\sum_j |\lambda_j|^p < +\infty$.

Corolário 2.4.6. *Seja $0 < p \leqslant 1$ e $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Então para cada $f \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ temos*

$$\|f\|_{\mathbf{H}^p} \simeq \inf \left(\sum_j |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

no qual o ínfimo é tomado no conjunto das representações $\sum_j \lambda_j a_j$ de f.

Demonstração. Seja $f = \sum_j \lambda_j a_j$ uma representação, então

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\mathcal{F}} f(x))^p \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j |\lambda_j|^p \, (M_{\mathcal{F}} a_j(x))^p \, dx \\ &= \sum_j |\lambda_j|^p \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\mathcal{F}} a_j(x))^p \, dx \leqslant c \sum_j |\lambda_j|^p. \end{aligned}$$

Então da arbitrariedade da representação temos

$$\|f\|_{\mathbf{H}^p} \leqslant c \, \inf \left(\sum_j |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ denso em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ e do teorema anterior temos que existe $\{f_n\}_n$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tais que

- $f_0 \doteq 0$.
- $f_n \longrightarrow f$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$.
- $\|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{H}^p}^p \leqslant 2^{-n-1} \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p$.
- Podemos escrever $f_{n+1} - f_n = \sum_j \lambda_{j,n} a_{j,n}$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ com

$$\sum_j |\lambda_{j,n}|^p \leqslant c \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{H}^p}^p \leqslant c 2^{-n-1} \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p,$$

então

$$\sum_{n,j} |\lambda_{j,n}|^p \leqslant c \sum_n 2^{-n-1} \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p \leqslant c \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p.$$

Assim em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$f = \sum_n (f_{n-1} - f_n) = \sum_{n,j} \lambda_{j,n} a_{j,n},$$

isto é $f = \sum_{n,j} \lambda_{j,n} a_{j,n}$ é uma representação. Então

$$\inf \sum_k |\lambda_k|^p \leqslant \sum_{n,j} |\lambda_{j,n}|^p \leqslant c \|f\|_{\mathbf{H}^p}^p.$$

Destas duas desigualdades concluímos a demonstração do corolário. ∎

Capítulo 3

Espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$

Este capítulo é dedicado a demonstrar que o espaço dual de $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ é o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ introduzido por John & Nirenberg. Esse resultado foi demonstrado por Charles Fefferman, pelo qual recebeu a Medalha Fields no ano 1978. Informações complementares sobre o espaço dual de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$ podem ser obtidas em [8, 31, 32].

3.1 Definição e Propriedades

Nesta seção introduziremos o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ e veremos algumas propriedades.

Definição 3.1.1. Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ (bounded mean oscillation) se

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx < +\infty,$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as bolas $B \subset \mathbb{R}^n$ e $f_B \doteq \dfrac{1}{|B|} \displaystyle\int_B f(x) dx$. Definimos o seguinte funcional em $BMO(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{BMO} \doteq \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx.$$

Claramente temos que se $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

(i) $\|f + g\|_{BMO} \leqslant \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$;

(ii) $\|\lambda f\|_{BMO} = |\lambda| \|f\|_{BMO}$;

(iii) Se $f = 0$ então $\|f\|_{BMO} = 0$;

(iv) Se $\|f\|_{BMO} = 0$ então f é constante em quase todo ponto, pois para cada bola $B \subset \mathbb{R}^n$ temos $f = f_B$ em quase todo ponto.

Em $BMO(\mathbb{R}^n)$, identificamos elementos cuja diferença é uma função constante, logo o funcional $\|\cdot\|_{BMO}$ define uma norma tomando o espaço quociente com as funções constantes. O novo espaço será denotado por simplicidade de notação também por $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Vamos a enunciar algumas propriedades nos espaços $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.1.2.

1. $\|\cdot\|_{BMO}$ *é invariante por traslação e dilatação, isto é para toda* $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f_h(x) = f(x+h)$ *e* $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ *temos*
$$\|f_\lambda\|_{BMO} = \|f\|_{BMO} = \|f_h\|_{BMO}.$$
Com efeito: Sejam $f_\lambda(x) = f(x\lambda)$ *e* $B = B(x_0, r)$, *note que*
$$\begin{aligned}(f_\lambda)_B &= \frac{1}{|B|}\int_B f_\lambda(x)dx = \frac{1}{|B|}\int_B f(\lambda x)dx = \frac{1}{|B|}\int_{B(\lambda x_0,\lambda r)} \lambda^{-n} f(y)dy \\ &= \frac{1}{|B(\lambda x_0, \lambda r)|}\int_{B(\lambda x_0,\lambda r)} f(x)dx = f_{B(\lambda x_0,\lambda r)}.\end{aligned}$$
Seguindo a mesma argumentação temos
$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B |f_\lambda(x) - (f_\lambda)_B|dx &= \frac{1}{B}\int_B |f(\lambda x) - f_{B(\lambda x_0,\lambda r)}|dx \\ &= \frac{1}{|B(\lambda x_0, \lambda r)|}\int_{B(\lambda x_0,\lambda r)} |f(x) - f_{B(\lambda x_0,\lambda r)}|.\end{aligned}$$
Por outro lado,
$$(f_h)_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x+h)dx = \frac{1}{|B(x_0+h, r)|}\int_{B(x_0+h,r)} f(x)dx = f_{B(x_0+h)}.$$
Seguindo a mesma argumentação temos
$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B |f_h(x) - (f_h)_B|dx &= \frac{1}{|B(x_0+h, r)|}\int_B |f(x+h) - f_{B(x_0+h,r)}|dx \\ &= \frac{1}{|B(x_0+h, r)|}\int_{B(x_0+h,r)} |f(x) - f_{B(x_0+h,r)}|dx.\end{aligned}$$

2. *Se* $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, *então* $|f| \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *e*
$$\||f|\|_{BMO} \leqslant 2\|f\|_{BMO}.$$
Com efeito: Desde que $(f_B)_B = f_B$
$$\begin{aligned}|f| &\leqslant |f - f_B| + |f_B| = |f - f_B| + |(f - f_B)_B + f_B| \\ &\leqslant |f - f_B| + |(f - f_B)_B| + |f_B| \leqslant |f - f_B| + |f - f_B|_B + |f|_B,\end{aligned}$$
combinando com a desigualdade
$$\begin{aligned}|f|_B &\leqslant |f - f_B|_B + |f_B|_B = |f - f_B|_B + |f_B| \\ &\leqslant |f - f_B|_B + |f - f_B| + |f|,\end{aligned}$$
temos que
$$||f| - |f|_B| \leqslant |f - f_B| + |f - f_B|_B.$$
Logo
$$\frac{1}{|B|}\int_B ||f| - |f|_B|dx \leqslant \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|dx + |f - f_B|_B \leqslant 2\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|dx,$$
assim $\||f|\|_{BMO} \leqslant 2\|f\|_{BMO}$.

3. *Se $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|\max(f,g)\|_{BMO} \leqslant \frac{3}{2}(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO});$$
$$\|\min(f,g)\|_{BMO} \leqslant \frac{3}{2}(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}).$$

4. *Definimos*

$$\|f\|_{BMO_2} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx,$$

no qual o supremo e tomado sobre todos os cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$. Então existem constantes C_n e c_n tais que

$$c_n \|f\|_{BMO_2} = \|f\|_{BMO} \leqslant C_n \|f\|_{BMO_2}.$$

Proposição 3.1.3. *Para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ temos que*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leqslant \sup_B \inf_{c_B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c_B| dx \leqslant \|f\|_{BMO}.$$

Demonstração. A desigualdade $\sup_B \inf_{c_B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c_B| dx \leqslant \|f\|_{BMO}$ é imediata. Vamos a provar a outra desigualdade. De fato,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_B| &\leqslant |f(x) - c_B| + |c_B - f_B| = |f(x) - c_B| + \left| \frac{1}{|B|} \int_B [f(y) - c_B]\, dy \right| \\ &\leqslant |f(x) - c_B| + \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - c_B| dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx \leqslant 2 \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c_B| dx$$

o qual prova a propriedade. □

Note que se para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ existe c_B tal que $\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c_B| dx$ é uniformemente limitado, então $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Agora mostremos outras propriedades do espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$.

i) $L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow BMO(\mathbb{R}^n)$ (inclusão contínua): com efeito, se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ então

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx &\leqslant \frac{1}{|B|} \int_B |f(x)| dx + \frac{1}{|B|} \int_B |f_B| dx = \frac{1}{|B|} \int_B |f(x)| dx + |f_B| \\ &\leqslant \frac{1}{|B|} \int_B \|f\|_{L^\infty} dx + |f_B| = \|f\|_{L^\infty} + |f_B| \\ &= \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{|B|} \int_B |f(x)| dx \leqslant 2\|f\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

logo $\|f\|_{BMO} \leqslant 2\|f\|_{L^\infty}$.

ii) A inclusão é estrita, mais ainda $\ln|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$ mas $\ln|x| \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Seja $B = B(x_0, r)$, mostremos que existe c_B tal que $\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - c_B|dx$ é uniformemente limitado.

- Seja $|x_0| > 2r$. Se $x \in B(x_0, r)$, então $\frac{1}{2} < \frac{|x|}{|x_0|} < \frac{3}{2}$. Seja $c_B = \ln|x_0|$, logo

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - c_B|dx = \frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - \ln|x_0||dx = \frac{1}{|B|}\int_B \left|\ln\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)\right| dx$$
$$\leqslant \max\left\{\left|\ln\frac{1}{2}\right|, \ln\frac{3}{2}\right\}.$$

- Seja $|x_0| \leqslant 2r$. Note que $B \subset B(0, 3r)$. Seja $c_B = \ln(r)$ logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - c_B|dx = \frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - \ln(r)|dx &\leqslant \frac{1}{|B|}\int_{B(0,3r)} \left|\ln\left(\frac{|x|}{r}\right)\right| dx \\ &= \frac{r^{-n}}{|B(0,1)|}\int_0^{3r}\int_{S^{n-1}} \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)\lambda^{n-1}dx'd\lambda \\ &= \frac{|S^{n-1}|}{|B(0,1)|} r^{-n}\int_0^{3r} \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)\lambda^{n-1}d\lambda \\ &= \int_0^3 t^{n-1}\ln(t)dt,\end{aligned}$$

mas $\int_0^3 t^{n-1}\ln(t)dt = 3\ln(3) - 3$ se $n = 1$ e $\int_0^3 t^{n-1}\ln(t)dt = \frac{3^n(n\ln 3 - 1)}{n^2}$ se $n > 1$.

- Existe uma função f tal que $|f| \in BMO(\mathbb{R}^n)$ mas $f \notin BMO(\mathbb{R}^n)$. De fato, considere em $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & , \text{ se } 0 < x < 1; \\ -\ln(|x|) & , \text{ se } -1 < x < 0; \\ 0 & , \text{ se } |x| > 1. \end{cases}$$

Note que $|f| \in BMO(\mathbb{R})$ pois $|f| = \chi_{(-1,1)}|\ln|x||$ e $|\ln|x|| \in BMO(\mathbb{R})$. Agora mostremos que $f \notin BMO(\mathbb{R})$, Considere $I_r = (-r, r) \subset (-1, 1)$, como f é impar temos

$$f_{I_r} = \frac{1}{|I_r|}\int_{I_r} f(x)dx = 0.$$

Assim como $|f|$ é uma função par, temos que

$$\frac{1}{|I_r|}\int_{I_r} |f(x) - f_{I_r}|dx = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |\ln x|dx = \frac{1}{r}\int_0^r |\ln x|dx = -\frac{1}{r}\int_0^r \ln(x)dx$$
$$= 1 - \ln(r),$$

mas $1 - \ln(r) \to +\infty$ quando $r \to 0^+$. Portanto $f \notin BMO(\mathbb{R})$.

3.2 Dualidade do espaço $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e a relação com $BMO(\mathbb{R}^n)$

Dada $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ podemos definir o funcional $\ell_f : \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\ell_f(g) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx.$$

Claramente ℓ_f é um funcional contínuo em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, pela desigualdade de Hölder

$$|\ell_f(g)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\right| \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{\mathbf{H}^1}, \tag{3.1}$$

pois $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$. Conclusão $L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow (\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n))^*$. A seguir veremos que o resultado anterior pode ser estendido para $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ em norma $BMO(\mathbb{R}^n)$. O resultado será estendido na Proposição 3.2.1. Note que se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e $g = \sum_j \lambda_j a_j$ uma representação, então pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ e pelas propriedades dos $(1,+\infty)$-átomos temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\right| &= \left|\int_{B_j} f(x)\sum_j \lambda_j a_j(x)dx\right| = \left|\sum_j \lambda_j \int_{B_j} f(x)a_j(x)dx\right| \\
&= \left|\sum_j \lambda_j \int_{B_j} (f(x) - f_{B_j})a_j(x)dx\right| \leqslant \sum_j |\lambda_j| \int_{B_j} \frac{|f(x) - f_{B_j}|}{|B_j|}dx \\
&\leqslant \sum_j |\lambda_j| \|f\|_{BMO},
\end{aligned}$$

passando sobre o ínfimo de todas as representações de g em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, temos pelo Corolário 2.4.6 que:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\right| \leqslant C\|g\|_{\mathbf{H}^1}\|f\|_{BMO}. \tag{3.2}$$

Definimos o espaço $\mathbf{H}^1_0(\mathbb{R}^n)$ como o espaço gerado pelos átomos em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$, isto é que cada $g \in \mathbf{H}^1_0(\mathbb{R}^n)$ é da forma $g = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j$ no qual cada a_j é um átomo. Note que $\mathbf{H}^1_0(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$, pois pelo Corolário 2.4.6 cada $g \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ tem ao menos uma representação $g = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j a_j$ o qual para $g_m = \sum_{j=0}^m \lambda_j a_j \in \mathbf{H}^1_0(\mathbb{R}^n)$ temos que:

$$\|g - g_m\|_{\mathbf{H}^1} = \left\|\sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j a_j\right\|_{\mathbf{H}^1} \leqslant \sum_{j=m+1}^{+\infty} |\lambda_j|\|a_j\|_{\mathbf{H}^1} \leqslant C \sum_{j=m+1}^{+\infty} |\lambda_j| \longrightarrow 0.$$

Proposição 3.2.1. *Seja $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1_0}$ o funcional induzido pelo $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ no subespaço $\mathbf{H}^1_0(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\ell_f : \mathbf{H}^1_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g \longmapsto \ell_f(g) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx,$$

é um funcional linear limitado e

$$\|\ell_f(g)\| \leqslant c\|f\|_{BMO}\|g\|_{\mathbf{H}_0^1}.$$

Demonstração. Seja $g = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j$, considere

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} -k, \text{ se } f(x) \leqslant -k \\ f(x), \text{ se } -k \leqslant f(x) \leqslant k \\ k, \text{ se } f(x) \geqslant k \end{cases},$$

note que $f^{(k)} = \min\{\max\{f, -k\}, k\} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\|_{BMO} &\leqslant \frac{3}{2}\left(\|\max\{f,-k\}\|_{BMO} + \|k\|_{BMO}\right) \\ &\leqslant \frac{9}{4}\left(\|f\|_{BMO} + \|-k\|_{BMO}\right) = \frac{9}{4}\|f\|_{BMO}. \end{aligned}$$

Logo pelo (3.2) e como $\mathbf{H}_0^1(\mathbb{R}^n)$ está imerso em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f^{(k)}(x)g(x)dx\right| \leqslant C\|f^{(k)}\|_{BMO}\|g\|_{\mathbf{H}^1} \leqslant c\|f\|_{BMO}\|g\|_{\mathbf{H}^1}.$$

Note que:

- $f^{(k)} \longrightarrow f$ em quase todo ponto, o qual $f^{(k)}g \longrightarrow fg$ em quase todo ponto.
- $|f^{(k)}g| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j||f||a_j| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois $|f^{(k)}| \leqslant |f|$ e $fa_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pois $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e cada a_j é um átomo.

Logo pelo Teorema 1.1.8 temos que

$$\begin{aligned} |\ell_f(g)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to+\infty} f^{(k)}(x)g(x)dx\right| \\ &= \left|\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f^{(k)}(x)g(x)dx\right| \leqslant c\|f\|_{BMO}\|g\|_{\mathbf{H}^1}, \end{aligned}$$

□

Como $\mathbf{H}_0^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$, podemos estender de forma única ℓ_f a $L_f : \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ com

$$\|L_f\| \leqslant c\|f\|_{BMO},$$

isto permite dar a seguinte definição.

Definição 3.2.2. Sejam $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \doteq L_f(g).$$

Note que se $g = \sum_j \lambda a_j$ é uma representação, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = L_f(g) = L_f\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j a_j\right) &= \lim_{N\to+\infty} L_f\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j a_j\right)\\
= \lim_{N\to+\infty} \ell_f\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j a_j\right) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\int_{\mathbb{R}^n} f(x)a_j(x)dx\\
= \sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x)a_j(x)dx.
\end{aligned}$$

Seja $L^2_{B,0}(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \ supp(\phi) \subset B, \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 0\right\}$. Note que se $f, h \in BMO(\mathbb{R}^n)$ tais que $L_f = L_h$ temos que para todo B e cada $g \in L^2_{B,0}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)g(x)dx,$$

pois $\dfrac{|B|^{-\frac{1}{2}}}{\|g\|_{L^2}} g$ é um $(1,2)$-átomo (pelo Corolário 4.1.8 cada $(1,2)$-átomo é uniformemente limitado em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$, veja [31]) e assim $f = h + cte$ em cada B, isto é $f = h$ em $BMO(\mathbb{R}^n)$. Portanto

$$\begin{aligned}
L : BMO(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)^*\\
f &\longmapsto L(f) \doteq L_f
\end{aligned}$$

é injetiva. Além disso, é limitado pois:

$$\|L(f)\| = \|L_f\| \leqslant c\|f\|_{BMO}.$$

Teorema 3.2.3. *$L : BMO(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)^*$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Fixando $\ell \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)^*$ e $B \subset \mathbb{R}^n$, considere o subespaço fechado $L^2_{B,0}(\mathbb{R}^n)$ do $L^2(\mathbb{R}^n)$ e seja $g \in L^2_{B,0}(\mathbb{R}^n)$. Claramente $a_B \doteq |B|^{-\frac{1}{2}}\dfrac{g}{\|g\|_{L^2}}$ é um $(1,2)$-átomo, logo pelo Corolário 4.1.8 temos

$$\begin{aligned}
|\ell(g)| = \left|\ell\left(|B|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2}a_B\right)\right| &= |B|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2}|\ell(a_B)|\\
&\leqslant |B|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2}\|\ell\|_{(\mathbf{H}^1)^*}\|a_B\|_{\mathbf{H}^1} \leqslant C|B|^{\frac{1}{2}}\|\ell\|_{(\mathbf{H}^1)^*}\|g\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Assim pelo Teorema de Representação de Riesz no subespaço de Hilbert $L^2_{B,0}(\mathbb{R}^n)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $F^B \in L^2_{B,0}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\ell(g) = \int_B F^B(x)g(x)dx, \ \forall\, g \in L^2_{B,0}(\mathbb{R}^n)$$

e $\|F^B\|_{L^2} \leqslant C|B|^{\frac{1}{2}}\|\ell\|_{(\mathbf{H}^1)^*}$. Afirmamos que se $B_1 \subset B_2$ então $F^{B_1} - F^{B_2}$ é constante em B_1 pois F^{B_1} e F^{B_2} produzem o mesmo funcional linear em $L^2_{B_1,0}$ o qual

$$\int_{B_1} F^{B^1}(x)g(x)dx = \int_{B_1} F^{B_2}(x)g(x)dx, \ \forall\, g \in L^2_{B_1,0}(\mathbb{R}^n).$$

Sejam $B_j = B(0,j)$. Definimos para $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \doteq F^{B_j}(x) + \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} F^{B_j}(z)dz,$$

no qual $x \in B_j$. Note que f esta bem definida, pois para $x \in B_j \subset B_k$ temos que

$$F^{B_j}(x) - F^{B_k}(x) - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}\left[F^{B_j}(z) - F^{B_k}(z)\right]dz = c_j - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} c_j dz = c_j - c_j = 0$$

Agora mostremos que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$, existe $B_j \supset B$ e definimos a constante induzida em B como

$$c_B \doteq F^{B_j} - F^B + \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} F^{B_j}(z)dz.$$

Daí

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - c_B|dx = \frac{1}{|B|}\int_B |F^B(x)|dx \leqslant |B|^{-\frac{1}{2}}\|F^B\|_{L^2} \leqslant C|B|^{-\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}\|\ell\|_{(\mathbf{H}^1)^*},$$

como B é bola arbitrária temos $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{BMO} \leqslant C\|\ell\|_{(\mathbf{H}^1)^*}$. Seja $g \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e $g = \sum_j \lambda_j a_j$ uma representação em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ com as bolas B_{a_j} associadas para cada $(1,+\infty)$-átomo a_j. Desde que $\ell \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)^*$, $a_j \in L^2_{B_{a_j},0}(\mathbb{R}^n)$ (cada $(1,+\infty)$-átomo é um $(1,2)$-átomo) e pela propriedade de momento temos que

$$\begin{aligned}
\ell(g) = \sum_j \lambda_j \ell(a_j) &= \sum_j \lambda_j \int_{B_{a_j}} F^{B_{a_j}}(x)a_j(x)dx \\
&= \sum_j \lambda_j \int_{B_{a_j}} \left(F^{B_{a_j}}(x) + c_{B_{a_j}}\right)a_j(x)dx \\
&= \sum_j \lambda_j \int_{B_{a_j}} f(x)a_j(x)dx = L_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x),
\end{aligned}$$

portanto $\ell = L_f = L(f)$. Note que pela injetividade de L, ℓ determina de forma univoca $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz $\ell = L(f)$. Denotamos $f = G_\ell$, temos $\|G_\ell\|_{BMO} = \|f\|_{BMO} \leqslant C\|\ell\|_{(\mathbf{H}^1)^*}$ como $\ell \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)^*$ foi fixado ao início. Definimos a aplicação linear limitada

$$\begin{aligned}
G : \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)^* &\longrightarrow BMO(\mathbb{R}^n) \\
\ell &\longmapsto G(\ell) \doteq G_\ell.
\end{aligned}$$

Note que por construção da G temos $G \circ L = I_{BMO(\mathbb{R}^n)}$ e $L \circ G = I_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)^*}$, assim L é um isomorfismo entre os espaços $BMO(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$. □

Capítulo 4

Limitação de operadores fortemente de Calderón-Zygmund em espaços de Hardy

Neste capítulo vamos a tratar os principais resultados obtidos por C. Vasconcelos e T. Picon no artigo [28]. O principal resultado a ser provado é o seguinte Teorema (as definições serão dadas posteriormente).

Teorema 4.0.1. *Seja $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador limitado e suponha que:*

(i) T estende-se a um operador limitado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$;

(ii) T tem kernel associado que satisfaze a condição D_{s_1} para algum $1 \leqslant s_1 < +\infty$;

(iii) Para algum $n\,(1-\sigma)\left(1-\dfrac{1}{s_2}\right) \leqslant \beta < n\left(1-\dfrac{1}{s_2}\right)$, T estende-se a um operador limitado de $L^q(\mathbb{R}^n)$ em $L^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, no qual $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{s_2} + \dfrac{\beta}{n}$ e $s_2 > 1$.

Além dessas condições, se $T^*(x^\alpha) = 0 \ \forall \ |\alpha| \leqslant \lfloor \delta \rfloor, 1 < s_1 \leqslant 2$ e $s_1 \leqslant s_2$ então T poder ser estendido a um operador limitado de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ para $p_0 < p \leqslant 1$, no qual

$$\frac{1}{p_0} \doteq \frac{1}{s_2} + \frac{\beta}{n} \frac{\left[\frac{\delta}{\sigma} + n\left(1 - \frac{1}{s_2}\right)\right]}{\left(\frac{\delta}{\sigma} - \delta + \beta\right)}.$$

Além disso, se T^* satisfaz (iii) então a conclusão também é valida para $1 < s_1 < +\infty$ e $s_1 \leqslant s_2$. No caso $s_1 = 1$ também é valido, contudo só para $p_0 < p < 1$.

Vamos agora introduzir o conceito de operadores δ-Calderón-Zygmund e fortemente singular de Calderón-Zygmund.

Definição 4.0.2. Seja $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear limitado. Dizemos que T está associado a um δ-standard kernel se existir uma função $K(x,y)$ contínua fora da diagonal tal que:

(i) $|K(x,y)| \leqslant \dfrac{C}{|x-y|^n}$, para todo $x \neq y$;

(ii) $|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) + K(z,x)| \leqslant C\dfrac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\delta}}$, se $2|y-z| \leqslant |x-z|$ para algum $0 < \delta \leqslant 1$;

(iii) $\langle T(f), g\rangle = \displaystyle\int K(x,y)f(y)g(x)dydx$ para qualquer $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com suportes disjuntos.

Definição 4.0.3. Seja T associado a um δ-standard kernel. Dizemos que T é um operador δ-Calderón-Zygmund se T pode ser estendido a um operador de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

No artigo [1] o seguinte Teorema foi enunciado e provado.

Teorema 4.0.4. *Seja T um operador δ-Calderón-Zygmund tal que $T^*(1) = 0$ (definimos isto mais adiante). Então T se estende a um operador contínuo de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ para $\dfrac{n}{n+\delta} < p \leqslant 1$.*

O demonstração do teorema acima utiliza a técnica que T mapeia átomos em moléculas, que são elementos mais grosseiros que átomos, precisamente se a é $(p, +\infty)$-átomo então $T(a)$ é uma (p, q, λ)-molécula. Será visto que cada (p, q, λ)-molécula (veja a Definição 4.1.1) podem ser decompostas em uma soma de (p, q)-átomos no sentido de $L^q(\mathbb{R}^n)$ (veja o Lema 4.1.2) o qual cada (p, q, λ)-molécula é uniformemente limitada em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Uma parte da demonstração utiliza que todo operador T de δ-Calderón-Zygmund se estende a um operador contínuo de $L^q(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < q < +\infty$.

Em [1], os autores apresentam uma nova classe de operadores de Calderón-Zygmund chamados *operadores fortemente singulares de Calderón-Zygmund* que será descrito a seguir

Definição 4.0.5. Um operador linear e limitado $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é chamado um operador fortemente singular de Calderón-Zygmund quando:

(i) T se estende a um operador limitado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$;

(ii) T está associado a um δ-kernel do tipo σ no sentido que para toda $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com suportes disjuntos temos

$$\langle Tf, g\rangle = \int\int K(x,y)f(y)g(x)dydx,\ \forall\ f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

e $K(x,y)$ é uma função contínua fora da diagonal que satisfaz

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)| \leqslant C\frac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\frac{\delta}{\sigma}}} \tag{4.1}$$

para todo $2|y-z|^\sigma \leqslant |x-z|$ para algum $0 < \delta \leqslant 1$, $0 < \sigma < 1$.

(iii) Para algum $(1-\sigma)\dfrac{n}{2} \leqslant \beta < \dfrac{n}{2}$ ambos operadores T e T^*, são estendidos a operadores contínuos de $L^q(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, no qual $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\beta}{n}$.

A definição desta nova classe de operadores de Calderón-Zygmund é motivada pelo estudo de uma classe de multiplicadores cujo símbolo fora da origem é dado por $e^{i|\zeta|^\sigma}/|\zeta|^\beta$. A suposição da limitação $L^q(\mathbb{R}^n) - L^2(\mathbb{R}^n)$ é motivada pelos operadores de convolução associados a kernels que satisfazem o controle $|\hat{K}(\zeta)| \lesssim (1+|\zeta|)^{-\beta}$.

Observe que se $\sigma = 1$ obtemos um operador de δ-Calderón-Zygmund. Em [28], os autores apresentam uma versão mais fraca de núcleos δ-kernel do tipo σ.

Definição 4.0.6. Dizemos que um kernel $K(x,y)$ associado ao operador T satisfaz a condição D_s para $1 \leqslant s < +\infty$ se

$$\left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y)-K(x,z)|^s + |K(y,x)-K(z,x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \lesssim |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s}-1} 2^{-j\delta},$$

quando $r > 1$ e

$$\left(\int_{C_j(z,r^\rho)} |K(x,y)-K(x,z)|^s + |K(y,x)-K(z,x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \lesssim |C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s}-1+\frac{\delta}{n}(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma})} 2^{-j\frac{\delta}{\rho}},$$

quando $r \leqslant 1$, no qual $C_j(z,\overline{r}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^j\overline{r} < |x-z| \leqslant 2^{j+1}\overline{r}\right\}$, $0 < \rho \leqslant \sigma \leqslant 1$, $z \in \mathbb{R}^n$ e $|y-z| < r$.

Note que $\dfrac{1}{s} \leqslant 1$ e da propriedade $(a+b)^{\frac{1}{s}} \leqslant a^{\frac{1}{s}} + b^{\frac{1}{s}}$, $\forall\, a,b \geqslant 0$. Então podemos definir de forma equivalente a condição D_s como:

$$\left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y)-K(x,z)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \lesssim |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s}-1} 2^{-j\delta}$$
$$\left(\int_{C_j(z,r)} |K(y,x)-K(z,x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \lesssim |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s}-1} 2^{-j\delta},$$

quando $r > 1$ e

$$\left(\int_{C_j(z,r^\rho)} |K(x,y)-K(x,z)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \lesssim |C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s}-1+\frac{\delta}{n}(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma})} 2^{-j\frac{\delta}{\rho}}$$
$$\left(\int_{C_j(z,r^\rho)} |K(y,x)-K(z,x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \lesssim |C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s}-1+\frac{\delta}{n}(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma})} 2^{-j\frac{\delta}{\rho}}$$

quando $r \leqslant 1$.

Definição 4.0.7. Definimos a condição D_∞ se satisfaz

$$\|K(\cdot,y)-K(\cdot,z)\|_{L^\infty(C_j(z,r))} + \|K(y,\cdot)-K(z,\cdot)\|_{L^\infty(C_j(z,r))} \lesssim |C_j(z,r)|^{-1} 2^{-j\delta},$$

quando $r > 1$ e

$$\|K(\cdot,y)-K(\cdot,z)\|_{L^\infty(C_j(z,r^\rho))} + \|K(y,\cdot)-K(z,\cdot)\|_{L^\infty(C_j(z,r^\rho))} \lesssim |C_j(z,r^\rho)|^{-1+\frac{\delta}{n}(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma})} 2^{-j\frac{\delta}{\rho}},$$

quando $r \leqslant 1$. No qual $|y-z| < r$, $0 < \rho \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Note que seguindo o caso $1 \leqslant s_1 < +\infty$, podemos definir de forma equivalente a condição D_∞ em quatro desigualdades uniformes.

Observação 4.0.8. Se um kernel satisfaz a condição D_{s_1} então também satisfaz a condição D_{s_2} para $1 \leqslant s_2 < s_1 \leqslant +\infty$. Com efeito, no caso $1 \leqslant s_2 < s_1 < +\infty$ pela desigualdade de Hölder para $\frac{s_1}{s_2} > 1$ temos

$$\left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|^{s_2} dx\right) \leqslant \left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|^{s_1} dx\right)^{\frac{s_2}{s_1}} |C_j(z,r)|^{1-\frac{s_2}{s_1}},$$

logo

$$\begin{aligned}\left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|^{s_2} dx\right)^{\frac{1}{s_2}} &\leqslant \left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|^{s_1} dx\right)^{\frac{1}{s_1}} |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1}} \\ &\lesssim |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_1}-1} 2^{-j\delta} |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1}} = |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_2}-1} 2^{-j\delta}.\end{aligned}$$

De forma análoga temos

$$\left(\int_{C_j(z,r)} |K(y,x) - K(z,x)|^{s_2} dx\right)^{\frac{1}{s_2}} \lesssim |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_2}-1} 2^{-j\delta}.$$

Assim as duas desigualdades uniformes para quando $r > 1$ são satisfeitas. Similarmente, podemos provar as duas desigualdades uniformes quando $r \leqslant 1$.

O caso $s_1 = +\infty$ é imediato, pois

$$\begin{aligned}\left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|^{s_2} dx\right)^{\frac{1}{s_2}} &\leqslant \left(\int_{C_j(z,r)} \|K(\cdot,y) - K(\cdot,z)\|^{s_2}_{L^\infty(C_j(z,r))} dx\right)^{\frac{1}{s_2}} \\ &\lesssim \left(\int_{C_j(z,r)} |C_j(z,r)|^{-s_2} 2^{-j\delta s_2} dx\right)^{\frac{1}{s_2}} \\ &= |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_2}-1} 2^{-j\delta}.\end{aligned}$$

Similarmente podemos provar as trés desigualdades uniformes restantes para o caso $s_1 = +\infty$.

Observação 4.0.9. Todo operador T fortemente singular de Calderón-Zygmund satisfaz a condição D_∞. Com efeito, fixemos $|y - z| < r$, se $r > 1$ e $x \in C_j(z,r)$ então $2|y - z|^\sigma \leqslant 2^j r^\sigma \leqslant 2^j r < |x - z|$. Logo

$$\begin{aligned}|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)| &\leqslant C \frac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\frac{\delta}{\sigma}}} \lesssim \frac{r^\delta}{(2^j r)^{n+\frac{\delta}{\sigma}}} \\ &= (2^j r)^{-n} 2^{-j\frac{\delta}{\sigma}} r^{\delta - \frac{\delta}{\sigma}} \leqslant (2^j r)^{-n} 2^{-j\delta} \\ &\lesssim |C_j(z,r)|^{-1} 2^{-j\delta}.\end{aligned}$$

Se $r \leqslant 1$ e $x \in C_j(z, r^\rho)$ então $2|y-z|^\sigma \leqslant 2r^\sigma \leqslant 2r^\rho \leqslant 2^j r^\rho < |x-z|$. Logo

$$\begin{aligned}
|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)| &\leqslant C\frac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\frac{\delta}{\sigma}}} \lesssim \frac{r^\delta}{(2^j r^\rho)^{n+\frac{\delta}{\sigma}}} \\
&= \frac{r^\delta}{(2^j r^\rho)^{n+\frac{\delta}{\sigma}}}(2^j r^\rho)^{-n+\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}(2^j r^\rho)^{n-\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)} \\
&\simeq |C_j(z,r^\rho)|^{-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)} r^{\delta+\rho n-\rho\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)-\rho n-\rho\frac{\delta}{\sigma}}(2^{-j})^{n+\frac{\delta}{\sigma}-n+\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)} \\
&= |C_j(z,r^\rho)|^{-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}(2^{-j})^{\frac{\delta}{\rho}}
\end{aligned}$$

Observe que isto implica que todo operador fortemente singular de Calderón-Zygmund satisfaz a condição D_s para $1 \leqslant s \leqslant +\infty$.

Definição 4.0.10. Seja $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dizemos que um operador T satisfaz $T^*(x^\alpha) = 0$ para todo $|\alpha| \leqslant m$ se

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha Ta(x)dx = 0, \ \ \forall\, a \in L^2_{c,m}(\mathbb{R}^n),$$

no qual $L^2_{c,m}(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \ supp(f) \text{ é compacto e} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)dx = 0, \ \forall |\alpha| \leqslant m \right\}$.

4.1 Moléculas

Nesta seção apresentaremos alguns tipos de moléculas, que são parte essencial para a demonstração do Teorema Principal. Para obter mais informações sobre outros tipos de moléculas, indicamos as referências [1, 31, 32].

Definição 4.1.1. Seja $0 < p \leqslant 1 < q < +\infty$, $\lambda > n\left(\dfrac{q}{p}-1\right)$. Uma função $M(x)$ é uma (p,q,λ)-molécula se existir uma bola $B(z,r)$ tal que:

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^q dx \leqslant Cr^{n\left(1-\frac{q}{p}\right)}$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^q |x-z|^\lambda dx \leqslant Cr^{\lambda+n\left(1-\frac{q}{p}\right)}$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} M(x)dx = 0$.

As condições (i) e (ii) são equivalentes as condições

$$\int_{B(z,r)} |M(x)|^q dx \leqslant Cr^{n(1-\frac{q}{p})} \quad \text{e} \quad \int_{B(z,r)^c} |M(x)|^q |x-z|^\lambda dx \qquad \leqslant Cr^{\lambda+n(1-\frac{q}{p})}.$$

Em [1] é demonstrado que se $M(x)$ satisfaz i) e ii), então $M \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Também é dado o seguinte Lema.

Lema 4.1.2. *Seja $M(x)$ uma (p,q,λ)-molécula. Então em $L^q(\mathbb{R}^n)$ temos*

$$M = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j a_j,$$

no qual cada a_j é um (p,q)-átomo suportado em $B(z, 2^{j+1}r)$ e $\sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda_j|^p < +\infty$.

Na prova deste Lema dada por [1] implicitamente temos:

$$|\lambda_j| \|a_j\|_{L^q} = \|\alpha_j\|_{L^q} \leqslant C 2^{-j\left[\frac{\lambda}{q} + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\right]} |B_j|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}},$$

no qual $C > 0$ não depende de M e a_j é um (p,q)-átomo. Logo,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda_j|^p = C^p \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j\left[\frac{p}{q}\lambda + n\left(\frac{p}{q} - 1\right)\right]} \lesssim 1.$$

A convergência é obtida pelo fato de $p < q$ e $n\left(\dfrac{q}{p} - 1\right) < \lambda$, portanto $\dfrac{p}{q}\lambda + n\left(\dfrac{p}{q} - 1\right) > 0$.

Desde que $M = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j a_j$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, temos que $M = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j a_j$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e como todo (p,q)-átomo é uniformemente limitado em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\|M\|_{\mathbf{H}^p} \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda_j|^p \|a_j\|_{\mathbf{H}^p} \leqslant C \sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda_j|^p \leqslant \overline{C} \lesssim 1.$$

Portanto toda (p,q,λ)-molécula é uniformemente limitada em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 4.1.3. Seja $0 < p,\ \rho < 1 < q < s < +\infty,\ 1 \leqslant t < +\infty$ e $t \leqslant s$ tal que

$$n\left(\frac{t}{p} - 1\right) < \lambda \leqslant n\left(\frac{t}{s} - 1\right) + \frac{nt}{1-\rho}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{s}\right).$$

Se $p = 1$, restringimos $1 < t < +\infty$. Dizemos que a função $M(x)$ é uma $(p,\rho,q,\lambda,s,t)-$molécula se existe uma bola $B(z,r) \subset \mathbb{R}^n$ e uma constante $C > 0$ tal que para $r > 1$ temos

M1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^t dx \leqslant C r^{n\left(1 - \frac{t}{p}\right)}$;

M2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^t |x - z|^\lambda dx \leqslant C r^{\lambda + n\left(1 - \frac{t}{p}\right)}$,

e para $r \leqslant 1$

M3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^t dx \leqslant C r^{n\left[\rho\left(1 - \frac{t}{s}\right) + t\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\right]}$;

M4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^t |x - z|^\lambda dx \leqslant C r^{\rho\lambda + n\left[\rho\left(1 - \frac{t}{s}\right) + t\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\right]}$.

Além disso, $M(x)$ satisfaz as condições de momento

M5. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} M(x)x^\alpha dx = 0,\ \forall\ |\alpha| \leqslant N_p = \left\lfloor n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right\rfloor.$

Note que podemos trocar as propriedades M1, M2, M3 e M4 pelas propriedades:

M1'. $\displaystyle\int_{B(z,2r)} |M(x)|^t dx \leqslant Cr^{n\left(1-\frac{t}{p}\right)};$

M2'. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,2r)} |M(x)|^t|x-z|^\lambda dx \leqslant Cr^{\lambda+n\left(1-\frac{t}{p}\right)},$

quando $r > 1$. Quando $r \leqslant 1$

M3'. $\displaystyle\int_{B(z,r^\rho)} |M(x)|^t dx \leqslant Cr^{n\left[\rho\left(1-\frac{t}{s}\right)+t\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]};$

M4'. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,r^\rho)} |M(x)|^t|x-z|^\lambda dx \leqslant Cr^{\rho\lambda+n\left[\rho\left(1-\frac{t}{s}\right)+t\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]}.$

O anterior é consequência das seguintes desigualdades:

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,2r)} |M(x)|^t dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,2r)} |M(x)|^t \frac{|x-z|^\lambda}{(2r)^\lambda} dx \lesssim r^{n\left(1-\frac{t}{p}\right)};$$

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,r^\rho)} |M(x)|^t dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,r^\rho)} |M(x)|^t \frac{|x-z|^\lambda}{(r^\rho)^\lambda} dx \lesssim r^{n\left[\rho\left(1-\frac{t}{s}\right)+t\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]};$$

$$\int_{B(z,2r)} |M(x)|^t|x-z|^\lambda dx \leqslant \int_{B(z,2r)} |M(x)|^t(2r)^\lambda dx \lesssim r^{\lambda+n\left(1-\frac{t}{p}\right)};$$

$$\int_{B(z,r^\rho)} |M(x)|^t|x-z|^\lambda dx \leqslant \int_{B(z,r^\rho)} |M(x)|^t(r^\rho)^\lambda \lesssim r^{\rho\lambda+n\left[\rho\left(1-\frac{t}{s}\right)+t\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]}.$$

Note também que a função $M(x+z)$ é uma $(p,\rho,q,\lambda,s,t)-$molécula com bola associada $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^t dx = \int_{\mathbb{R}^n} |M(x+z)|^t dx; \quad \int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^t|x-z|^\lambda dx = \int_{\mathbb{R}^n} |M(x+z)|^t|x|^\lambda dx.$$

Observação 4.1.4. Observe que se assumimos $q = s$, $\rho = 1$ e $\dfrac{n}{n+\delta} < p \leqslant 1$ temos que toda (p,t,λ)-nolécula é uma $(p,1,s,\lambda,s,t)$-molécula pois

$$\rho\left(1-\frac{t}{s}\right)+t\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right) = 1-\frac{t}{p} \quad \text{e} \quad \lfloor N_p \rfloor = 0.$$

Proposição 4.1.5. *Seja $M(x)$ uma função que satisfaz $(M1)$ e $(M2)$ ou $(M3)$ e $(M4)$. Então $x^\alpha M(x)$ é uma função absolutamente integrável.*

Demonstração. Suponhamos que $1 < t < +\infty$. Seja M uma função que satisfaz $(M3)$ e $(M4)$ para $r \leqslant 1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha M(x)| dx = \int_{B(z,r)} |x^\alpha M(x)| dx + \int_{B(z,r)^c} |x^\alpha M(x)| dx.$$

Na primeira integral usamos a desigualdade de Hölder e $(M3)$, temos

$$\int_{B(z,r)} |x^\alpha M(x)|dx \leqslant \|x^\alpha\|_{L^\infty(B(z,r))}|B(z,r)|^{1-\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M(x)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}} < +\infty.$$

Na segunda integral temos

$$\begin{aligned}
\int_{B(z,r)^c} |x^\alpha M(x)|dx &\leqslant \int_{B(z,r)^c} |M(x)| \left(|x-z|+|z|\right)^{|\alpha|} dx \\
&\leqslant \int_{B(z,r)^c} |M(x)| \sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|} c_{\gamma,\alpha}|x-z|^{|\gamma|}|z|^{|\alpha|-|\gamma|}dx \\
&\leqslant \|M|\cdot - z|^{\frac{\lambda}{t}}\|_{L^t} \sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|} c_{\gamma,\alpha,|z|} \left(\int_{B(z,r)^c} |x-z|^{(|\gamma|-\frac{\lambda}{t})\frac{t}{t-1}} dx\right)^{1-\frac{1}{t}} \\
&\leqslant \|M|\cdot - z|^{\frac{\lambda}{t}}\|_{L^t} \sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|} c_{\gamma,\alpha,|z|}|S^{n-1}| \int_r^{+\infty} s^{\left(|\gamma|-\frac{\lambda}{t}\right)\frac{t}{t-1}+n-1}ds \\
&= \|M|\cdot - z|^{\frac{\lambda}{t}}\|_{L^t} \sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|} \frac{c_{\gamma,\alpha,|z|}|S^{n-1}|}{\left(\frac{\lambda}{t}-|\gamma|\right)\frac{t}{t-1}+n} r^{\left(|\gamma|-\frac{\lambda}{t}\right)\frac{t}{t-1}+n} < +\infty.
\end{aligned}$$

A última desigualdade é verdadera pois, $|\gamma| \leqslant |\alpha| \leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right)$ e $-\lambda < n\left(1-\frac{t}{p}\right)$, logo

$$\begin{aligned}
\left(|\gamma| - \frac{\lambda}{t}\right)\frac{t}{t-1} + n &\leqslant \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right) - \frac{\lambda}{t}\right]\frac{t}{t-1} + n \\
&< \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right) + \frac{n}{t}\left(1-\frac{t}{p}\right)\right]\frac{t}{t-1} + n = 0.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{B(z,r)^c} |x^\alpha M(x)|dx &\leqslant \|M|\cdot - z|^{\frac{\lambda}{t}}\|_{L^t} \sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|} \frac{c_{\gamma,\alpha,|z|}|S^{n-1}|}{\left(\frac{\lambda}{t}-|\gamma|\right)\frac{t}{t-1}+n} r^{(|\gamma|-\frac{\lambda}{t})\frac{t}{t-1}+n} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Para o caso $r > 1$ a prova é similar. Quando $t = 1$, $r \leqslant 1$ á prova é similar até

$$\int_{B(z,r)^c} |x^\alpha M(x)|dx \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|} c_{\gamma,\alpha,|z|} \int_{B(z,r)^c} |M(x)||x-z|^{\frac{\lambda}{t}+(|\gamma|-\frac{\lambda}{t})}dx,$$

mas $|\gamma| - \lambda \leqslant |\alpha| - \lambda \leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right) - \lambda < 0$, logo de $|x-z| \geqslant r$ temos

$$\int_{B(z,r)^c} |x^\alpha M(x)|dx \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|} c_{\gamma,\alpha,|z|} r^{|\gamma|-\lambda} \int_{B(z,r)^c} |M(x)||x-z|^\lambda < +\infty$$

Quando $r > 1$ é similar. $\square$

Agora vamos demonstrar que toda molécula vinda da Definição 4.1.3 é uniformemente limitada em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Antes disso, vamos precisar do seguinte lema:

Lema 4.1.6. *Sejam os conjuntos* $B_0 = B(0,r)$, $B_j = B(0,2^j r)$, $E_0 = B_0, E_j = B_j \backslash B_{j-1}$. $\mathscr{H}_j \doteq L^2\left(E_j, \dfrac{1}{|E_j|}dx\right)$ *e* P_j *o espaço dos polinômios em* E_j *com grau não maior a* N_p. *Então existe uma base* $\{\phi_\gamma^j\}_{|\gamma|\leqslant N_p}$ *de* P_j, *que satisfaz*

$$\frac{1}{|E_j|}\int_{E_j} \phi_\gamma^j(x)x^\beta dx =< \phi_\gamma^j, x^\beta >_{\mathscr{H}_j} = \delta_{\beta,\gamma} = \begin{cases} 1, \gamma = \beta \\ 0, \gamma \neq \beta \end{cases}.$$

Além disso,

$$\left(2^j r\right)^{|\gamma|} |\phi_\gamma^j(x)| \lesssim 1, \qquad \forall x \in E_j,$$

no qual a constante não depende de r *e* j.

Demonstração. Para existir a base $\left\{\phi_\gamma^j = \sum_{|\beta|\leqslant N_p} c_{\beta,\gamma}^j x^\beta\right\}_{|\gamma|\leqslant N_p}$, as constantes $c_{\beta,\gamma}^j$ têm que ser uma solução do sistema

$$\sum_{|\beta|\leqslant N_p} c_{\beta,\gamma}^j < x^\beta, x^\alpha >_{\mathscr{H}_j} =< \phi_\gamma^j, x^\alpha >_{\mathscr{H}_j} = \delta_{\alpha,\gamma}. \tag{4.2}$$

Desde que $<,>_{\mathscr{H}_j}$ é um produto interno e $\{x^\beta\}_{|\beta|\leqslant N_p}$ sendo uma base de P_j, então o sistema anterior tem solução única, logo a base existe.

Por outro lado

$$< x^\beta, x^\alpha >_{\mathscr{H}_j} = \frac{1}{|E_j|}\int_{E_j} x^{\alpha+\beta}dx;$$

- Se $j \geqslant 1$:

$$< x^\beta, x^\alpha >_{\mathscr{H}_j} = \frac{1}{|E_j|}\int_{2^{j-1}r}^{2^j r} \zeta^{|\alpha+\beta|}\int_{S^{n-1}} x^{\alpha+\beta}\zeta^{n-1}dxd\zeta = f_{\alpha,\beta}\left(2^j r\right)^{|\alpha+\beta|+n},$$

  no qual $f_{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{|B|}\dfrac{2^n}{2^n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{|\alpha+\beta|+n}}\right)\dfrac{1}{|\alpha+\beta|+n}\displaystyle\int_{S^{n-1}} x^{\alpha+\beta}dx$ e $B = B(0,1)$. Reescrevemos (4.2)

$$\sum_{|\beta|\leqslant N_p} f_{\alpha,\beta}c_{\beta,\gamma}^j\left(2^j r\right)^{|\alpha+\beta|} = \delta_{\alpha,\gamma}$$

$$\sum_{|\beta|\leqslant N_p} f_{\alpha,\beta}c_{\beta,\gamma}^j\left(2^j r\right)^{|\beta|} = \frac{\delta_{\alpha,\gamma}}{\left(2^j r\right)^{|\gamma|}}. \tag{4.3}$$

  Note que quando $j = 0$ e $r = 1$, o sistema anterior se escreve como

$$\sum_{|\beta|\leqslant N_p} f_{\alpha,\beta}c_{\beta,\gamma}^0 = \delta_{\alpha,\gamma} \tag{4.4}$$

Fixando $d = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n : \ |\alpha| \leqslant N_p\}$, estabelecemos uma indexação de $\{\alpha \in \mathbb{N}^n : \ |\alpha| \leqslant N_p\}$ com as coordenadas $\mathbb{R}^d$. Definimos o isomorfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto (f(x))_\alpha \doteq \sum_{|\beta| \leqslant N_p} f_{\alpha,\beta}\,(x)_\beta\,, \end{aligned}$$

assim (4.4) é equivalente a $f\left(c_\gamma^0\right) = e_\gamma$, no qual $\left(c_\gamma^0\right)_\beta = c_{\beta.\gamma}^0$ e $\{e_\gamma\}_{\gamma \leqslant d}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^d$.
Voltamos a (4.3). Seja $\left(d_\gamma^j\right)_\beta = \left(c_\gamma^j\right)_\beta (2^j r)^{|\beta|}$, temos $f(d_\gamma^j) = \dfrac{e_\gamma}{(2^j r)^{|\gamma|}}$ o qual

$$d_\gamma^j = f^{-1}\left(\frac{e_\gamma}{(2^j r)^{|\gamma|}}\right),$$

então

$$\left(2^j r\right)^{|\beta|} |c_{\beta,\gamma}^j| = |\left(d_\gamma^j\right)_\beta| \leqslant \|d_\gamma^j\|_\infty \leqslant \frac{\|f^{-1}\|}{(2^j r)^{|\gamma|}}.$$

Assim $|c_{\beta,\gamma}^j| \leqslant \|f^{-1}\| \dfrac{1}{(2^j r)^{|\gamma|}} \dfrac{1}{(2^j r)^{|\beta|}}$, então

$$\begin{aligned} \left(2^j r\right)^{|\gamma|} |\phi_\gamma^j(x)| &\leqslant \left(2^j r\right)^{|\gamma|} \sum_{|\beta| \leqslant N_p} |c_{\beta,\gamma}^j| \|x\|^{|\beta|} \\ &\leqslant \left(2^j r\right)^{|\gamma|} \sum_{|\beta| \leqslant N_p} \frac{\|f^{-1}\|}{(2^j r)^{|\gamma|}} \frac{(2^j r)^{|\beta|}}{(2^j r)^{|\beta|}} \\ &= \|f^{-1}\| d, \end{aligned}$$

isto é $(2^j r)^{|\gamma|} |\phi_\gamma^j(x)| \lesssim 1, \forall x \in E_j$, no qual não depende de $r > 0$ nem de $j \geqslant 1$.

- Se $j = 0$:

$$< x^\beta, x^\alpha >_{\mathscr{H}_0} = g_{\alpha,\beta} r^{|\alpha+\beta|}, \ g_{\alpha,\beta} = \frac{1}{|B|} \frac{1}{|\alpha+\beta|+n} \int_{S^{n-1}} (x')^{\alpha+\beta} dx'$$

Note que quando $r = 1$, podemos proceder como no caso anterior e obter o isomorfismo g, assim $|c_{\beta,\gamma}^0| \leqslant \|g^{-1}\| \dfrac{1}{r^{|\gamma|}} \dfrac{1}{r^{|\beta|}}$. Logo

$$r^\gamma |\phi_\gamma^0(x)| \lesssim 1, \forall x \in E_0 \text{ independente de } r > 0.$$

Portanto de ambos casos temos

$$\left(2^j r\right)^{|\gamma|} |\phi_\gamma^j(x)| \lesssim 1, \forall x \in E_j,$$

no qual a constante no depende de $r > 0$ e $j \geqslant 0$. $\square$

Lema 4.1.7. *Seja $M(x)$ uma (p,ρ,q,λ,s,t)- molécula. Então $M = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j a_j$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ no qual $a_j(x)$ é um (p,t)- átomo e $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de escalares complexos tais que $\sum_j |\gamma_j|^p \lesssim 1$. Além disso, existe uma constante $C>0$ independente de M tal que $\|M\|_{\mathbf{H}^p} \leqslant C$.*

Demonstração. Seja $M(x)$ uma (p,ρ,q,λ,s,t)-molécula e $B = B(z,r)$ a bola associada. Definimos os seguintes conjuntos e funções $B_j \doteq B(z, 2^j r)$, $E_0 \doteq B_0$, $E_j \doteq B_j \backslash B_{j-1}$, $M_j \doteq \chi_{E_j} M$, $P_N \doteq \{p(x) : \text{polinômios em } \mathbb{R}^n \text{ com } deg\,(p(x)) \leqslant N_p\}$ e $P_{N,j} \doteq \left\{p(x)\,|_{E_j}\!:\ p(x) \in P_N\right\}$. Seja $\mathcal{H}_j \doteq L^2\left(E_j, \frac{1}{|E_j|}dx\right)$, aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para a base $\left\{x^\beta\right\}_{|\beta|\leqslant N_p}$ no espaço $P_{N,j}$, temos a base $\left\{\phi^j_\gamma\right\}_{|\gamma|\leqslant N_p}$ de polinômios tais que:

$$\frac{1}{|E_j|}\int_{E_j} \phi^j_\gamma(x) x^\beta dx =< \phi^j_\gamma, x^\beta >_{\mathcal{H}_j} = \delta_{\gamma,\beta} = \begin{cases} 1, \gamma = \beta \\ 0, \gamma \neq \beta \end{cases},$$

além disso, pelo Lema 4.1.6 temos a desigualdade uniforme em j e r

$$(2^j r)^{|\gamma|} |\phi^j_\gamma(x)| \lesssim 1, \ \forall x \in E_j.$$

Seja $M^\gamma_j \doteq \frac{1}{|E_j|}\int_{E_j} M(x)x^\gamma dx$, que está bem definido, pois $x^\alpha M(x)$ é absolutamente integrável para todo $|\alpha| \leqslant N_p$. Seja $P_j = \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} M^\gamma_j \phi^j_\gamma$, Note que

$$M = \sum_{j=0}^{+\infty} M_j = \sum_{j=0}^{+\infty}(M_j - P_j) + \sum_{j=0}^{+\infty} P_j, \qquad \text{pontualmente.}$$

<u>Afirmação</u>: $M_j - P_j = d_j A_j$, no qual A_j é (p,t)-átomo e $\sum_{j=0}^{+\infty} |d_j|^p < +\infty$.

Com efeito:

- Quando $r \leqslant 1$:
  Desde que $supp(M_j), supp(P_j) \subset E_j \subset B_j$, temos $supp(M_j - P_j) \subset E_j \subset B_j$, logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (M_j(x) - P_j(x))x^\alpha dx &= \int_{E_j}\left(M_j(x) - \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} M^j_\gamma \phi^j_\gamma(x)\right)x^\alpha dx \\
&= \int_{E_j} M_j(x)x^\alpha dx - \sum_{|\gamma|\leqslant N_p}\left(\int_{E_j} M(y)y^\gamma dy\right)\frac{1}{|E_j|}\int_{E_j}\phi^j_\gamma(x)x^\alpha dx \\
&= \int_{E_j} M_j(x)x^\alpha dx - \sum_{|\gamma|\leqslant N_p}\left(\int_{E_j} M(y)y^\gamma dy\right)\delta_{\gamma,\alpha} \\
&= \int_{E_j} M(x)x^\alpha dx - \int_{E_j} M(y)y^\alpha dy = 0,
\end{aligned}$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_j(x) - P_j(x))\, x^\alpha dx = 0,\ \forall |\alpha| \leqslant N_p. \tag{4.5}$$

Estimando $\|M_j\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}$: $M \in L^t(\mathbb{R}^n)$ pois é uma molécula, logo $M_j = \chi_{E_j} M \in L^t(\mathbb{R}^n)$ e de $E_j = B(z, 2^j r)\backslash B(z, 2^{j-1} r)$ temos que

$$\begin{aligned}
\|M_j\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_j(x)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}} = \left(\int_{E_j} |M_j(x)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leqslant \left(\int_{E_j} |M_j(x)|^t \left(\frac{2^\lambda |x-z|^\lambda}{2^{j\lambda} r^\lambda}\right) dx\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leqslant 2^{\frac{\lambda}{t}} (2^j r)^{-\frac{\lambda}{t}} \left(\int_{E_j} |M_j(x)|^t |x-z|^\lambda dx\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\lesssim (2^j r)^{-\frac{\lambda}{t}} \left(\int_{E_j} |M_j(x)|^t |x-z|^\lambda dx\right)^{\frac{1}{t}},
\end{aligned}$$

logo pela propriedade (M4) temos

$$\begin{aligned}
\|M_j\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} &\lesssim (2^j r)^{-\frac{\lambda}{t}} r^{\rho\frac{\lambda}{t} + n\left[\rho\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right]} \\
&= (2^j)^{n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{p}\right)} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t} + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right)} r^{-\frac{\lambda}{t}(1-\rho) + n\left[\rho\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{q} - \frac{1}{t}\right]} \\
&= |B(0,1)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{t}} |B_j|^{\frac{1}{t} - \frac{1}{p}} r^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right)} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t} + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right)} r^{-\frac{\lambda}{t}(1-\rho) + n\left[\rho\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{q} - \frac{1}{t}\right]}.
\end{aligned}$$

A última igualdade é valida pois $B_j = B(z, 2^j r)$. Como $p \leqslant t$, $\lambda \leqslant n\left(\frac{t}{s} - 1\right) + \frac{nt}{1-\rho}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{s}\right)$, logo

$$-\frac{\lambda}{t}(1-\rho) + n\left[\rho\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{q} - \frac{1}{t}\right] \geqslant 0$$

e $\frac{1}{p} - \frac{1}{t} \geqslant 0$. Então de $r \leqslant 1$ temos:

$$\|M_j\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \lesssim |B(0,1)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{t}} |B_j|^{\frac{1}{t} - \frac{1}{p}} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t} + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right)} \lesssim |B_j|^{\frac{1}{t} - \frac{1}{p}} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t} + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right)} \tag{4.6}$$

Agora para P_j:

$$\begin{aligned}
|P_j(x)| &= \left|\sum_{|\gamma| \leqslant N_p} M_\gamma^j \phi_\gamma^j(x)\right| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant N_p} |M_\gamma^j| |\phi_\gamma^j(x)| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant N_p} |\phi_\gamma^j(x)| \frac{1}{|E_j|} \int_{E_j} |M(y)| |y|^\gamma dy \\
&\leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant N_p} |\phi_\gamma^j(x)| (2^j r)^{|\gamma|} \frac{1}{|E_j|} K \int_{E_j} |M(y)| dy,\ K = \frac{|z|}{r} + 1,
\end{aligned}$$

como $M(x+z)$ é uma (p,ρ,q,λ,s,t)-molécula e pela Proposição 2.2.1

$$\|M(\cdot+z)\|_{\mathbf{H}^p} = \|M\|_{\mathbf{H}^p},$$

podemos assumir sem perda de generalidade que $z=0$ e assim $K=1$. Pelo Lema 4.1.6 temos $|\phi^j_\gamma(x)|(2^j r)^{|\gamma|} \lesssim 1$, logo

$$\begin{aligned}
|P_j(x)| &\leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} |\phi^j_\gamma(x)|(2^j r)^{|\gamma|}\frac{1}{|E_j|}\int_{E_j}|M(y)|dy \\
&\lesssim \frac{1}{|E_j|}\int_{E_j}|M(y)|dy = \frac{1}{|E_j|}\int_{\mathbb{R}^n}|M_j(y)|\chi_{E_j}(y)dy \\
&\leqslant \frac{1}{|E_j|}\|M_j\|_{L^t}\|\chi_{E_j}\|_{L^{\frac{t}{t-1}}} = |E_j|^{-\frac{1}{t}}\|M_j\|_{L^t}
\end{aligned}$$

então

$$\int_{E_j}|P_j(x)|^t dx \lesssim \int_{E_j}\|M_j\|^t_{L^t}\frac{1}{|E_j|}dx = \|M_j\|^t_{L^t},$$

assim $\|P_j\|_{L^t} \lesssim \|M_j\|_{L^t}$. Logo de (4.6) temos

$$\|M_j - P_j\|_{L^t} \leqslant 2\|M_j\|_{L^t} \lesssim |B_j|^{\frac{1}{t}-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}. \tag{4.7}$$

Definimos A_j como $(M_j-P_j)(x) \doteq d_j A_j(x)$, no qual $d_j = \|M_j-P_j\|_{L^t}|B_j|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{t}}$. Logo:

i) $supp(A_j) \subset supp\,(M_j-P_j) \subset B_j,\ \forall\, j$;

ii) $\|A_j\|_{L^t} \leqslant |B_j|^{\frac{1}{t}-\frac{1}{p}},\ \forall\, j$;

iii) $\int_{\mathbb{R}^n} A_j(x)x^\alpha dx = 0,\ \forall\, |\alpha|\leqslant N_p$, pela propriedade (4.5).

Dessa forma concluímos que A_j é um (p,t)-átomo, além disso, de (4.7) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty}|d_j|^p &= \sum_{j=0}^{+\infty}\|M_j-P_j\|^p_{L^t}|B|^{1-\frac{p}{t}} \lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}|B|^{\frac{p}{t}-1}(2^j)^{-\frac{\lambda p}{t}+np\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}|B|^{1-\frac{p}{t}} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}(2^j)^{-\frac{\lambda p}{t}+n\left(1-\frac{p}{t}\right)} = \sum_{j=0}^{+\infty}(2^\theta)^j < +\infty,
\end{aligned}$$

a última identidade é justificada, pois $\lambda > n\left(\frac{t}{p}-1\right)$ e logo $\theta = -\frac{\lambda p}{t}+n\left(1-\frac{p}{t}\right) < 0$. Logo

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|d_j|^p \lesssim 1.$$

Afirmação: $\sum_{j=0}^{+\infty} P_j(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} \psi_\gamma^j(x)$

Com efeito: Definimos $N_\gamma^j \doteq |E_k| \sum_{k=j}^{+\infty} M_\gamma^k = \sum_{k=j}^{+\infty} \int_{E_k} M(x)x^\gamma dx$ e
$\psi_\gamma^j(x) \doteq N_\gamma^{j+1}\left[\frac{1}{|E_{j+1}|}\phi_\gamma^{j+1}(x) - \frac{1}{|E_j|}\phi_\gamma^j(x)\right]$, claramente

$$supp(\psi_\gamma^j) \subset E_{j+1} \backslash B_{j+1} \tag{4.8}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} P_j(x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} M_\gamma^j \phi_\gamma^j(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} (M_\gamma^j |E_j|)(|E_j|^{-1}\phi_\gamma^j(x)) \\
&= \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} \sum_{j=0}^{+\infty} (N_\gamma^j - N_\gamma^{j+1})(|E_j|^{-1}\phi_\gamma^j(x)), N_\gamma^j - N_\gamma^{j+1} = |E_j| M_\gamma^j \\
&= \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{N_\gamma^{j+1}}{|E_{j+1}|}\phi_\gamma^{j+1}(x) - \frac{N_\gamma^{j+1}}{|E_j|}\phi_\gamma^j(x)\right] + \left[\frac{N_\gamma^j}{|E_j|}\phi_\gamma^j(x) - \frac{N_\gamma^{j+1}}{|E_{j+1}|}\phi_\gamma^{j+1}(x)\right] \\
&= \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_\gamma^j(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{N_\gamma^j}{|E_j|}\phi_\gamma^j(x) - \frac{N_\gamma^{j+1}}{|E_{j+1}|}\phi_\gamma^{j+1}(x)\right] \right\} \\
&= \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_\gamma^j(x) + N_\gamma^0 \right\} = \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_\gamma^j(x),
\end{aligned}$$

a última identidade é valida, pois $N_\gamma^0 = \int_{\mathbb{R}^n} M(x)x^\gamma dx = 0$, logo $\sum_{j=0}^{+\infty} P_j(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} \psi_\gamma^j(x)$.

Além disso, para todo $|\alpha|, |\beta| \leqslant N_p$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\gamma^j(x)x^\beta dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[N_\gamma^{j+1}|E_{j+1}|^{-1}\phi_\gamma^{j+1}(x) - N_\gamma^{j+1}|E_j|^{-1}\phi_\gamma^j(x)\right] x^\beta dx \\
&= N_\gamma^{j+1}\left[\frac{1}{|E_{j+1}|}\int_{E_{j+1}} \phi_\gamma^{j+1}(x)x^\beta dx - \frac{1}{|E_j|}\int_{E_j} \phi_\gamma^j(x)x^\beta dx\right] \\
&= N_\gamma^{j+1}\left[\delta_{\gamma,\beta} - \delta_{\gamma,\beta}\right] = 0,
\end{aligned}$$

assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\gamma^j(x)x^\beta dx = 0, \forall j, \forall\ |\gamma|, |\beta| \leqslant N_p. \tag{4.9}$$

Estimando $\|\psi_\gamma^j\|_{L^\infty}$:
De $\psi_\gamma^j(x) = N_\gamma^{j+1}\left[\frac{1}{|E_{j+1}|}\phi_\gamma^{j+1}(x) - \frac{1}{|E_j|}\phi_\gamma^j(x)\right]$, basta estimar N_γ^{j+1}. Pela invariância baixo traslações de $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^p}$, sem perda de geralidade podemos supor que

$z = 0$. Logo

$$|N_\gamma^{j+1}| = \left|\sum_{k=j+1}^{+\infty} \int_{E_k} M(x)x^\gamma dx\right| \leqslant \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k r)^{|\gamma|} \int_{E_k} |M_k(x)|dx$$

$$\leqslant \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k r)^{|\gamma|} \|M_k\|_{L^t} \|\chi_{E_k}\|_{L^{\frac{t}{t-1}}} = \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k r)^{|\gamma|} |E_k|^{1-\frac{1}{t}} \|M_k\|_{L^t},$$

pelo (4.6) e $|E_k| \leqslant |B_k|$ temos

$$|N_\gamma^{j+1}| \lesssim \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k r)^{|\gamma|} |E_k|^{1-\frac{1}{t}} |B_k|^{\frac{1}{t}-\frac{1}{p}} (2^k)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}$$

$$\leqslant \sum_{k=j+1}^{+\infty} r^{|\gamma|} |B_k|^{1-\frac{1}{p}} (2^k)^{|\gamma|-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}$$

$$\lesssim \sum_{k=j+1}^{+\infty} r^{|\gamma|} (2^k r)^{n(1-\frac{1}{p})} (2^k)^{|\gamma|-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}$$

$$= r^{|\gamma|+n(1-\frac{1}{p})} \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k)^{|\gamma|-\frac{\lambda}{t}+n\left(1-\frac{1}{t}\right)},$$

então

$$|N_\gamma^{j+1}| \lesssim r^{|\gamma|+n(1-\frac{1}{p})} \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k)^{|\gamma|-\frac{\lambda}{t}+n\left(1-\frac{1}{t}\right)}.$$

De $|\gamma| \leqslant N_p \leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right)$ e $\lambda > n\left(\frac{t}{p}-1\right)$, temos $|\gamma| - \frac{\lambda}{t} + n\left(1-\frac{1}{t}\right) < 0$ o qual a série anterior é convergente. Assim

$$|N_\gamma^{j+1}| \lesssim \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k r)^{|\gamma|+n(1-\frac{1}{p})} (2^k)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}$$

$$\leqslant \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^j r)^{|\gamma|+n(1-\frac{1}{p})} (2^k)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}, \text{ pois } |\gamma| + n\left(1-\frac{1}{p}\right) \leqslant 0$$

$$= (2^j r)^{n(1-\frac{1}{p})} (2^j r)^{|\gamma|} \sum_{k=j+1}^{+\infty} (2^k)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}$$

$$\lesssim (2^j r)^{n(1-\frac{1}{p})} (2^j r)^{|\gamma|}, \text{ pois } -\frac{\lambda}{t} + n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right) < 0,$$

logo

$$|N_\gamma^{j+1}| \lesssim |B_j|^{1-\frac{1}{p}} (2^j r)^{|\gamma|} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)},$$

também $|N_\gamma^j| \lesssim |B_j|^{1-\frac{1}{p}} (2^j r)^{|\gamma|} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}$ pois $|B_j| = 2^n |B_{j-1}|$ e $N_\gamma^0 = 0$. Então

$$\left.\begin{array}{r} |N_\gamma^{j+1}| \\ |N_\gamma^j| \end{array}\right\} \lesssim |B_j|^{1-\frac{1}{p}} (2^j r)^{|\gamma|} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)} \tag{4.10}$$

Agora procedemos a estimar $\psi_\gamma^j(x) = N_\gamma^{j+1}\left[\frac{1}{|E_{j+1}|}\phi_\gamma^{j+1}(x) - \frac{1}{|E_j|}\phi_\gamma^j(x)\right]$, de (4.9) e $(2^j r)^{|\gamma|}|\phi_\gamma^j(x)| \lesssim 1$ temos

$$\begin{aligned}|N_\gamma^j|E_j|^{-1}\phi_\gamma^j(x)| &\lesssim |B_j|^{1-\frac{1}{p}}(2^j r)^{|\gamma|}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}|E_j|^{-1}|\phi_\gamma^j(x)|\\ &\lesssim |B_j|^{-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}|B_j||E_j|^{-1}\\ &\lesssim |B_j|^{-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)} \text{ pois } |E_j| = |B_j|\left(1-\frac{1}{2^n}\right),\end{aligned}$$

logo

$$|N_\gamma^j|E_j|^{-1}\phi_\gamma^j(x)| \lesssim |B_j|^{-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}. \tag{4.11}$$

Similarmente de (4.10), temos:

$$|N_\gamma^{j+1}|E_j|^{-1}\phi_\gamma^j(x)| \lesssim |B_j|^{-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)} \lesssim |B_{j+1}|^{-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)},$$

então de (4.11) temos

$$|\psi_\gamma^j(x)| = |N_\gamma^{j+1}|E_{j+1}|^{-1}\phi_\gamma^{j+1}(x) - N_\gamma^{j+1}|E_j|^{-1}\phi_\gamma^j(x)| \lesssim |B_{j+1}|^{-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}.$$

Assim de (4.8) e (4.9):

i) $supp(\psi_\gamma^j) \subset B_{j+1},\ \forall\, j, \forall\, |\gamma| \leqslant N_p$;

ii) $\|\psi_\gamma^j\|_{L^\infty} \leqslant D|B_{j+1}|^{-\frac{1}{p}}(2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)},\ \forall\, j, \forall\, |\gamma| \leqslant N_p$, no qual D não depende dos ψ, j e r;

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\gamma^j(x)x^\beta dx = 0,\ \forall\, j, \forall\, |\gamma|, |\beta| \leqslant N_p$.

Definimos $W_{j,\gamma}(x) = \dfrac{\psi_\gamma^j(x)}{h_j}$, no qual $h_j = (2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}D$, logo:

i) $supp(W_{j,\gamma}) \subset supp(\psi_\gamma^j) \subset B_{j+1},\ \forall\, j, \forall\, |\gamma| \leqslant N_p$;

ii) $\|W_{j,\gamma}\|_{L^\infty} = \dfrac{\|\psi_\gamma^j\|_{L^\infty}}{h_j} \leqslant |B_{j+1}|^{-\frac{1}{p}}$;

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} W_{j,\gamma}(x)x^\beta dx = \frac{1}{h_j}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\gamma^j(x)x^\beta dx = 0,\ \forall\, j, \forall\, |\gamma|, |\beta| \leqslant N_p$.

Dessa forma concluímos que $W_{j,\gamma}(x)$ é um $(p,+\infty)$-átomo, além disso, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}|h_j|^p \lesssim 1$ pois

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|h_j|^p = D^p\sum_{j=0}^{+\infty}(2^j)^{-\frac{\lambda p}{t}+n\left(1-\frac{p}{t}\right)} < +\infty.$$

- Quando $r > 1$:
  Estimando $\|M_j\|_{L^t}$: Da mesma forma que para no caso $r \leqslant 1$, temos pela propriedade (M2)

$$\begin{aligned}\|M_j\|_{L^t} &\lesssim (2^j r)^{-\frac{\lambda}{t}} \left(\int_{E_j} |M_j(x)|^t |x-z|^\lambda dx\right)^{\frac{1}{t}} \\ &\lesssim (2^j r)^{-\frac{\lambda}{t}} r^{\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{p}\right)} = (2^j r)^{n\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{p}\right)} (2^j r)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)} r^{\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{p}\right)} \\ &= |B(0,1)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{t}} |B_j|^{\frac{1}{t}-\frac{1}{p}} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)} r^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)+\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{p}\right)},\end{aligned}$$

  então

$$\|M_j\|_{L^t} \lesssim |B_j|^{\frac{1}{t}-\frac{1}{p}} (2^j)^{-\frac{\lambda}{t}+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)}.$$

  A desigualdade anterior é a mesma desigualdade (4.6) obtida no caso $r \leqslant 1$, note que depois da desigualdade (4.6) não foi usado (M3) ou (M4), o qual a demonstração é valida para $r > 1$.

□

Corolário 4.1.8. *O conjunto dos* $(1,2)$*-átomo é limitado em* $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Fixemos $p = 1,\ t = s = 2,\ q = \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{6} < \rho < 1$ e algum $\lambda > 0$ tal que

$$n\left(\frac{t}{p}-1\right) < \lambda \leqslant n\left(\frac{t}{s}-1\right) + \frac{nt}{1-\rho}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s}\right).$$

Seja $a(x)$ um $(1,2)-$átomo com bola associada $B = B(0,r)$ (novamente pela Proposição 2.2.1 assumimos sem perda de generalidade que $z = 0$), então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)|^t dx \leqslant |B|^{1-\frac{t}{p}} = |B(0,1)|^{1-\frac{t}{p}} r^{n\left(1-\frac{t}{p}\right)};$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)|^t |x|^\lambda dx \leqslant \int_{B(0,r)} |a(x)|^t r^\lambda dx \leqslant |B(0,1)|^{1-\frac{t}{p}} r^{\lambda+n\left(1-\frac{t}{p}\right)}.$$

Claramente se $r > 1$ temos que $a(x)$ é uma (p,ρ,q,λ,s,t)-molécula e assim

$$\|a\|_{\mathbf{H}^p} \lesssim 1.$$

No caso $r \leqslant 1$ definimos $A(x) \doteq \left(\dfrac{r}{2}\right)^{\frac{n}{p}} a\left(\dfrac{r}{2}x\right)$, logo é uma (p,ρ,q,λ,s,t)-molécula, pois *supp* $A \subset B(0,2)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |A(x)|^t dx \leqslant |B(0,1)|^{1-\frac{t}{p}} 2^{n\left(1-\frac{t}{p}\right)};$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |A(x)|^t |x|^\lambda dx \leqslant |B(0,1)|^{1-\frac{t}{p}} 2^{\lambda+n\left(1-\frac{t}{p}\right)}.$$

Logo pela Proposição 2.2.1 temos

$$\|a\|_{\mathbf{H}^p} = \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{n}{p}} \left\|a\left(\frac{r}{2}\cdot\right)\right\|_{\mathbf{H}^p} = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{n}{p}}} \|A\|_{\mathbf{H}^p} \lesssim 1.$$

Portanto de ambos casos temos que o conjunto dos $(1,2)$-átomo é limitado em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

□

Definição 4.1.9. Seja $\lambda > 0, 1 \leqslant s_1 < +\infty, 1 < s_2 < +\infty, s_1 \leqslant s_2, 0 < p, \rho < 1$, $0 < \sigma \leqslant 1$ e β tal que $(1-\sigma)\left(1-\frac{1}{s_2}\right)n \leqslant \beta < \left(1-\frac{1}{s_2}\right)n$. Dizemos que $(p, \rho, \beta, \lambda, s_2, s_1)$ são parâmetros admissíveis se

$$n\left(\frac{s_1}{p}-1\right) < \lambda \leqslant n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right) + \frac{s_1\beta}{(1-\rho)}.$$

Quando $p = 1$ restringimos $1 < s_1 < +\infty$.

Proposição 4.1.10. *Seja T um operador linear limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre ele mesmo, com kernel associado que satisfaz a condição D_1. Então $x^\alpha Ta(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $a \in L^2_{c,m}(\mathbb{R}^n)$ com $|\alpha| \leqslant m < \delta$.*

Demonstração. Basta provar para o caso $supp(a) \subset B(0,r)$ pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha Ta(x-h)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (x+h)^\alpha Ta(x)dx$$

é combinação linear das $x^\beta Ta(x)$ com $|\beta| \leqslant m$.

- Quando $r \geqslant 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha Ta(x)|dx = \int_{B(0,2r)} |x^\alpha Ta(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)} |x^\alpha Ta(x)|dx.$$

Pela desigualdade de Hölder e a limitação em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\int_{B(0,2r)} |x^\alpha Ta(x)|dx \leqslant (2r)^{|\alpha|}\|\chi_{B(0,2r)}\|_{L^2}\|Ta\|_{L^2} \lesssim r^{|\alpha|+\frac{n}{2}}\|a\|_{L^2} < +\infty.$$

Por outro lado, desde que $a \in L^2_{c,m}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}|Ta(x)| &= \left|\int_{B(0,r)} K(x,y)a(y)dy\right| = \left|\int_{B(0,r)} \left[K(x,y)-K(x,0)\right]a(y)dy\right| \\ &\leqslant \int_{B(0,r)} |K(x,y)-K(x,0)|\,|a(y)|dy,\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)} |x^\alpha Ta(x)|dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)} |x|^{|\alpha|}\int_{B(0,r)} |K(x,y)-K(x,0)|\,|a(y)|dydx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n\setminus \overline{B(0,r)}} |x|^{|\alpha|}\int_{B(0,r)} |K(x,y)-K(x,0)|\,a(y)dydx \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{C_j(0,r)} |x|^{|\alpha|}\int_{B(0,r)} |K(x,y)-K(x,0)|\,|a(y)|dydx \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}r)^{|\alpha|}\int_{C_j(0,r)}\int_{B(0,r)} |K(x,y)-K(x,0)|\,|a(y)|dydx\end{aligned}$$

logo pelo Teorema de Fubinni e pela condição D_1 temos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)} |x^\alpha Ta(x)|dx &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}r)^{|\alpha|}\int_{B(0,r)}\int_{C_j(0,r)} |K(x,y)-K(x,0)|\,|a(y)|dxdy\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}r)^{|\alpha|}\int_{B(0,r)}|a(y)|2^{-j\delta}dy\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j}r)^{|\alpha|}2^{-j\delta}\|a\|_{L^2}\|\chi_{B(0,r)}\|_{L^2}\\ &\lesssim r^{|\alpha|+\frac{n}{2}}\|a\|_{L^2}\sum_{j=0}^{+\infty}(2^j)^{|\alpha|-\delta} < +\infty,\end{aligned}$$

a convergência da série é garantida, pois $|\alpha| < \delta$, disso concluímos que quando $r \geqslant 1$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x^\alpha Ta(x)|dx < +\infty.$$

- Quando $r < 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x^\alpha Ta(x)|dx = \int_{B(0,2r^\rho)}|x^\alpha Ta(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r^\rho)}|x^\alpha Ta(x)|dx,$$

para algum $0 < \rho \leqslant \sigma < 1$. Da mesma forma que no caso $r \geqslant 1$ podemos justificar que

$$\int_{B(0,2r^\rho)}|x^\alpha Ta(x)|dx < +\infty.$$

Na outra integral vamos a fazer o mesmo que quando $r \geqslant 1$, só trocamos $\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)$ e $C_j(0,r)$ pelos $\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r^\rho)$ e $C_j(0,2r^\rho)$ respectivamente, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r^\rho)}|x^\alpha Ta(x)|dx \lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}r^\rho)^{|\alpha|}\int_{B(0,r)}\int_{C_j(0,r^\rho)}|K(x,y)-K(x,0)|\,|a(y)|dxdy,$$

logo pela condição D_1 temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r^\rho)}|x^\alpha Ta(x)|dx &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}r^\rho)^{|\alpha|}\int_{B(0,r)}|a(y)||C_j(0,r^\rho)|^{\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}dy\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}(2^jr^\rho)^{|\alpha|}(2^{j+1}r^\rho)^{\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}\int_{B(0,r)}|a(y)|dy\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}(2^jr^\rho)^{|\alpha|}(2^jr^\rho)^{\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}(2^j)^{-\frac{\delta}{\rho}}\|a\|_{L^2}\|\chi_{B(0,r)}\|_{L^2}\\ &\lesssim \|a\|_{L^2}\, r^{|\alpha|\rho+\frac{n}{2}+\delta-\delta\frac{\rho}{\sigma}}\sum_{j=0}^{+\infty}(2^j)^{|\alpha|-\frac{\delta}{\sigma}} < +\infty,\end{aligned}$$

a convergência da série é garantida pelo fato de $|\alpha| < \dfrac{\delta}{\sigma}$ pois $|\alpha| < \delta$ e $\sigma < 1$. Logo para $r < 1$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha Ta(x)|dx < +\infty.$$

Portanto de ambos casos temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha Ta(x)|dx < +\infty,$$

para todo $|\alpha| \leqslant m < \delta$. □

4.2 Prova do Teorema 4.0.1

Demonstração. Seja $a(x)$ um $(p, +\infty)$-átomo suportado em $B(z, r) \subset \mathbb{R}^n$, então se provamos que Ta é $(p, \rho, q, \lambda, s_2, s_1)$ molécula no qual $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{s_2} + \dfrac{\beta}{n}$ e $(p, \rho, \beta, \lambda, s_1, s_2)$ são parâmetros admissíveis para algum $\rho \leqslant \sigma$ terminamos, pois do Lema 4.1.7 temos que $\|Ta\|_{\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1$.

Vamos a restringir ao caso $0 < p \leqslant 1$ e $1 < s_1 \leqslant 2$.

- Para $r > 1$, devemos provar que:

  i) $\displaystyle\int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} dx \leqslant C r^{n\left(1-\frac{s_1}{p}\right)}$

  ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} |x - z|^\lambda dx \leqslant C r^{\lambda + n\left(1-\frac{s_1}{p}\right)}$

  Com efeito:

$$\begin{aligned}\int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} dx &= \int_{B(z,2r)} \chi_{B(z,2r)}(x) |Ta(x)|^{s_1} dx \\ &\leqslant \|\chi_{B(z,2r)}\|_{(\frac{2}{s_1})'} \||Ta|^{s_1}\|_{\frac{2}{s_1}} = |B(z, 2r)|^{1-\frac{s_1}{2}} \|Ta\|_{L^2}^{s_1},\end{aligned}$$

  pela limitação $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}\int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} dx &\lesssim |B(z, 2r)|^{1-\frac{s_1}{2}} \|a\|_{L^2}^{s_1} \lesssim |B(z, r)|^{1-\frac{s_1}{2}} \left(\int_{B(z,r)} |B(z, r)|^{-\frac{2}{p}} dx \right)^{\frac{s_1}{2}} \\ &= |B(z, r)|^{1-\frac{s_1}{2}} |B(z, r)|^{-\frac{s_1}{p}+\frac{s_1}{2}} = |B(z, r)|^{1-\frac{s_1}{p}},\end{aligned}$$

  então

$$\int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} dx \lesssim r^{n\left(1-\frac{s_1}{p}\right)}.$$

Para o outro termo, usando que $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx = 0$ e *supp* $a \subset B(z,r)$, lembrando que $Ta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)a(y)dy$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash B(z,r))$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,2r)} \left|\int_{B(z,r)} K(x,y)a(y)dy\right|^{s_1} |x-z|^{\lambda}dx \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,2r)} \left|\int_{B(z,r)} [K(x,y)-K(x,z)]\,a(y)dy\right|^{s_1} |x-z|^{\lambda}dx \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{C_j(z,r)} \left|\int_{B(z,r)} [K(x,y)-K(x,z)]\,a(y)dy\right|^{s_1} |x-z|^{\lambda}dx \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}\left\{\left[\int_{C_j(z,r)}\left(\int_{B(z,r)}|K(x,y)-K(x,z)||a(y)||x-z|^{\frac{\lambda}{s_1}}dy\right)^{s_1}dx\right]^{\frac{1}{s_1}}\right\}^{s_1},
\end{aligned}
$$

então pela desigualdade de Minkoswky geralizada temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}\left\{\int_{B(z,r)}\left[\int_{C_j(z,r)}|K(x,y)-K(x,z)|^{s_1}|a(y)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx\right]^{\frac{1}{s_1}}dy\right\}^{s_1} \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}(2^jr)^{\lambda}\left\{\int_{B(z,r)}|a(y)|\left[\int_{C_j(z,r)}|K(x,y)-K(x,z)|^{s_1}dx\right]^{\frac{1}{s_1}}dy\right\}^{s_1},
\end{aligned}
$$

então pela condição D_{s_1} temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \\
&\qquad \lesssim \sum_{j=1}^{+\infty}(2^jr)^{\lambda}\left\{\int_{B(z,r)}|a(y)||C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_1}-1}2^{-j\delta}dy\right\}^{s_1} \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}(2^jr)^{\lambda}|C_j(z,r)|^{1-s_1}2^{-js_1\delta}\left(\int_{B(z,r)}|a(y)|dy\right)^{s_1} \\
&\qquad \lesssim \sum_{j=1}^{+\infty}(2^jr)^{\lambda}(2^jr)^{-n(s_1-1)}2^{-js_1\delta}|B(z,r)|^{s_1-\frac{s_1}{p}} \\
&\qquad \lesssim \sum_{j=1}^{+\infty}(2^jr)^{\lambda}(2^jr)^{-n(s_1-1)}2^{-js_1\delta}r^{s_1n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \\
&\qquad = r^{\lambda+n\left(1-\frac{s_1}{p}\right)}\sum_{j=1}^{+\infty}(2^j)^{\lambda-n(s_1-1)-s_1\delta}.
\end{aligned}
$$

Assumindo que $\lambda < n(s_1-1)+s_1\delta$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \lesssim r^{\lambda+n\left(1-\frac{s_1}{p}\right)}$$

- Para $r \leqslant 1$, devemos provar que:

i) $\displaystyle\int_{B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1}dx \leqslant Cr^{n\left[\rho\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)+s_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]}$;

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \leqslant Cr^{\rho\lambda+n\left[\rho\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)+s_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]}$.

Com efeito:

$$\begin{aligned}\int_{B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1}dx &= \int_{B(z,r^\rho)} \chi_{B(z,r^\rho)}(x)|Ta(x)|^{s_1}dx \\ &\leqslant \|\chi_{B(z,r^\rho)}\|_{(\frac{s_2}{s_1})'}\||Ta|^{s_1}\|_{\frac{s_2}{s_1}} = |B(z,r^\rho)|^{1-\frac{s_1}{s_2}}\|Ta\|^{s_1}_{L^{s_2}},\end{aligned}$$

então pela limitação $T: L^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\int_{B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1}dx \lesssim |B(z,r^\rho)|^{1-\frac{s_1}{s_2}}\|a\|^{s_1}_{L^q} \leqslant |B(z,r^\rho)|^{1-\frac{s_1}{s_2}}|B(z,r)|^{s_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)},$$

logo

$$\int_{B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1}dx \lesssim (r^\rho)^{n\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)}r^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)s_1} = r^{n\left[\rho\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)+s_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]}.$$

Agora vamos estimar o outro termo. Desde que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx = 0$, $supp\ a \subset B(z,r)$ e $\mathbb{R}^n\backslash B(z,r^\rho) \subset \mathbb{R}^n\backslash B(z,r)$ temos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,r^\rho)} \left|\int_{B(z,r)} [K(x,y)-K(x,z)]\,a(y)dy\right|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \\ &\quad= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{C_j(z,r^\rho)} \left|\int_{B(z,r)} [K(x,y)-K(x,z)]\,a(y)dy\right|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \\ &\quad\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}\left\{\left[\int_{C_j(z,r^\rho} \left(\int_{B(z,r)} |K(x,y)-K(x,z)||a(y)||x-z|^{\frac{\lambda}{s_1}}dy\right)^{s_1}dx\right]^{\frac{1}{s_1}}\right\}^{s_1},\end{aligned}$$

então pela desigualdade de Minkoswky generalizada temos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx \\ &\quad\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}\left\{\int_{B(z,r)}\left[\int_{C_j(z,r^\rho)} |K(x,y)-K(x,z)|^{s_1}|a(y)|^{s_1}|x-z|^{\lambda}dx\right]^{\frac{1}{s_1}}dy\right\}^{s_1}\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}\left\{\int_{B(z,r)}\left[\int_{C_j(z,r^\rho)}|K(x,y)-K(x,z)|^{s_1}dx\right]^{\frac{1}{s_1}}(2^j r^\rho)^{\frac{\lambda}{s_1}}|a(y)|dy\right\}^{s_1},$$

então pela condição D_{s_1} temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,r^\rho)}|Ta(x)|^{s_1}|x-z|^\lambda dx\\
&\qquad\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}(2^j r^\rho)^\lambda\left\{\int_{B(z,r)}|a(y)||C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}dy\right\}^{s_1}\\
&\qquad\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}(2^j r^\rho)^\lambda\left(|C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}\right)^{s_1}|B(z,r)|^{s_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\\
&\qquad\lesssim \sum_{j=1}^{+\infty}(2^j r^\rho)^\lambda\left(|C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}\right)^{s_1}r^{s_1 n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\\
&\qquad\lesssim \sum_{j=1}^{+\infty}(2^j r^\rho)^\lambda\left[(2^j r^\rho)^{\frac{n}{s_1}-n+\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}\right]^{s_1}r^{s_1 n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\\
&\qquad= r^{\rho\lambda+n\left[s_1+s_1\frac{\delta}{n}-s_1\rho\left(1-\frac{1}{s_1}+\frac{\delta}{n\sigma}\right)-\frac{s_1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{+\infty}(2^j)^{\lambda-n(s_1-1)-s_1\frac{\delta}{\sigma}},
\end{aligned}$$

a convergência é garantida pois $0<\sigma\leqslant 1, \lambda<n(s_1-1)+s_1\delta$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,r^\rho)}|Ta(x)|^{s_1}|x-z|^\lambda dx \lesssim r^{\rho\lambda+n\left[s_1+s_1\frac{\delta}{n}-s_1\rho\left(1-\frac{1}{s_1}+\frac{\delta}{n\sigma}\right)-\frac{s_1}{p}\right]}.$$

Para provar a desigualdade uniforme, precisamos que

$$\rho\lambda+n\left[s_1+s_1\frac{\delta}{n}-s_1\rho\left(1-\frac{1}{s_1}+\frac{\delta}{n\sigma}\right)-\frac{s_1}{p}\right]=\rho\lambda+n\left[\rho\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)+s_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right],$$

isto é valido se, e somente se, $\rho \doteq \dfrac{n\left(1-\frac{1}{q}\right)+\delta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\frac{\delta}{\sigma}}$.

De iii) temos que:

$$\begin{aligned}
n(1-\sigma)\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\leqslant\beta &\Leftrightarrow (1-\sigma)\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\leqslant\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}\\
&\Leftrightarrow 1-\frac{1}{s_2}+\sigma\left(\frac{1}{s_2}-1\right)+\frac{1}{s_2}\leqslant\frac{1}{q}\\
&\Leftrightarrow 1-\frac{1}{q}\leqslant\sigma\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\\
&\Leftrightarrow n\left(1-\frac{1}{q}\right)+\delta\leqslant n\sigma\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta\\
&\Leftrightarrow \rho=\frac{n\left(1-\frac{1}{q}\right)+\delta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\frac{\delta}{\sigma}}\leqslant\sigma.
\end{aligned}$$

Para que $Ta(x)$ seja $(p,\rho,q,\lambda,s_2,s_1)$-molécula precisamos agora que:

$$0<p,\rho<1<q<s_2<+\infty, 1\leqslant s_1<+\infty, s_1\leqslant s_2.$$

Escolhemos λ tal que

$$n\left(\frac{s_1}{p}-1\right)<\lambda\leqslant n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{ns_1}{1-\rho}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s}\right)=n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{s_1}{1-\rho}\beta,$$

para isso devemos ter que $n\left(\frac{s_1}{p}-1\right)<n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{s_1\beta}{1-\rho}$, como

$$\begin{aligned}
n\left(\frac{s_1}{p}-1\right)<n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{s_1\beta}{1-\rho} &\Leftrightarrow \frac{s_1}{p}-1<\frac{s_1}{s_2}-1+\frac{s_1\beta}{n(1-\rho)}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{p}<\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n(1-\rho)}\doteq\frac{1}{p_0}\\
&\Leftrightarrow p_0<p,
\end{aligned}$$

o qual permite a escolha de λ (escolhemos no interior). Lembrando que para a convergência de uma série assumimos que $\lambda<n(s_1-1)+s_1\delta$, como

$$\begin{aligned}
&n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{s_1\beta}{1-\rho}\leqslant n(s_1-1)+s_1\delta\\
&\Leftrightarrow n\left(1-\frac{s_2}{s_1}\right)+\frac{s_2\beta}{1-\rho}\leqslant n\left(s_2-\frac{s_2}{s_1}\right)+s_2\delta\\
&\Leftrightarrow \frac{s_2\beta}{1-\rho}\leqslant n(s_2-1)+s_2\delta\\
&\Leftrightarrow s_2\beta\leqslant\left[n(s_2-1)+s_2\delta\right](1-\rho)\\
&\Leftrightarrow \rho\left[n(s_2-1)+s_2\delta\right]\leqslant n(s_2-1)+s_2\delta-s_2\beta\\
&\Leftrightarrow \rho\leqslant\frac{n(s_2-1)+s_2\delta-s_2\beta}{n(s_2-1)+s_2\delta}\\
&\Leftrightarrow \frac{n\left(1-\frac{1}{q}\right)+\delta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\frac{\delta}{\sigma}}\leqslant\frac{n(s_2-1)+s_2\delta-s_2\beta}{n(s_2-1)+s_2\delta}=\frac{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta-\beta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta}\\
&\Leftrightarrow \frac{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta-\beta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\frac{\delta}{\sigma}}\leqslant\frac{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta-\beta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta}\\
&\Leftrightarrow n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta\leqslant n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\frac{\delta}{\sigma}\text{ pois } n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)-\beta>0\\
&\Leftrightarrow \delta\leqslant\frac{\delta}{\sigma}\\
&\Leftrightarrow \sigma\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Logo pela escolha de λ temos

$$\lambda<n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{s_1\beta}{1-\rho}\leqslant n(s_1-1)+s_1\delta.$$

Note que

$$\begin{aligned}
p_0 \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{p_0} &= \frac{1}{s_2} + \frac{\beta}{n(1-\rho)} \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{s_2} \leqslant \frac{\beta}{n(1-\rho)} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{s_2}}{\frac{\beta}{n}} \leqslant \frac{1}{1-\rho} \\
&\Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{s_2}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}} \leqslant \frac{1}{1-\rho} \Leftrightarrow 1-\rho \leqslant \frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}}{1-\frac{1}{s_2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{q}+\frac{1}{s_2}}{1-\frac{1}{s_2}} \leqslant \rho \\
&\Leftrightarrow \frac{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)} \leqslant \frac{n\left(1-\frac{1}{q}\right)+\delta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\frac{\delta}{\sigma}} \\
&\Leftrightarrow \frac{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}{\sigma} \leqslant n\left(1-\frac{1}{s_2}\right) \\
&\Leftrightarrow n\left(1-\frac{1}{q}-\sigma+\frac{\sigma}{s_2}\right) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow n\left(1-\frac{1}{s_2}-\frac{\beta}{n}-\sigma+\frac{\sigma}{s_2}\right) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)(1-\sigma) \leqslant \beta.
\end{aligned}$$

Agora mostremos a propriedade (M5) da molécula, isto é

$$\int_{\mathbb{R}^n} Ta(x)x^\alpha dx = 0, \ \forall\ |\alpha| \leqslant N_p = \left\lfloor n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right\rfloor,$$

desde que $a(x)$ é um $(p,+\infty)$-átomo, então $a \in L^2_{c,N_p}$ e pela hipótese satisfaz

$$\int Ta(x)x^\alpha dx =< T^*(x^\alpha), a >= 0, \ \forall\ |\alpha| \leqslant \lfloor\delta\rfloor,$$

portanto se mostramos que $N_p \leqslant \lfloor\delta\rfloor$ temos a propriedade.

Desde que $N_p \leqslant N_{p_0}$, só temos que mostrar que $N_{p_0} \leqslant \lfloor\delta\rfloor$ o qual é válido pois:

$$\begin{aligned}
& n\left(\frac{1}{p_0}-1\right) \leqslant \delta \\
&\qquad \Leftrightarrow \frac{1}{p_0} \leqslant \frac{n+\delta}{n} \\
&\qquad \Leftrightarrow \frac{1}{s_2} + \frac{\beta}{n(1-\rho)} \leqslant \frac{n+\delta}{n} \\
&\qquad \Leftrightarrow \frac{1}{s_2} - 1 - \frac{\delta}{n} + \frac{\beta}{n(1-\rho)} \leqslant 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow \frac{\beta}{n(1-\rho)} \leqslant 1 - \frac{1}{s_2} + \frac{\delta}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\frac{\beta}{n}}{1-\frac{1}{s_2}+\frac{\delta}{n}} \leqslant 1-\rho \\
&\Leftrightarrow \rho \leqslant 1-\frac{\frac{\beta}{n}}{1-\frac{1}{s_2}+\frac{\delta}{n}} = \frac{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta-\beta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta} \\
&\Leftrightarrow \rho \leqslant \frac{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}\right)}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta} = \frac{n\left(1-\frac{1}{q}\right)+\delta}{n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)+\delta} \\
&\Leftrightarrow \delta \leqslant \frac{\delta}{\sigma} \\
&\Leftrightarrow \sigma \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Similarmente temos $n\left(\dfrac{1}{p_0}-1\right) < \delta \Leftrightarrow \sigma < 1$.

Agora abordemos o caso $2 < s_1 < +\infty$, e T^* satisfazendo iii). Informamos que na prova do Teorema 4.2.5, as teses deste Teorema 4.0.1 não são utilizadas, então podemos usar a sequência da prova.

Se $r > 1$:

Desde que $1 \leqslant s_1$ e $K(x,y)$ satisfaz a condição D_{s_1} , então $K(x,y)$ satisfaze a condição D_1, logo as hipóteses do Teorema 4.2.5 são satisfeitas. Assim $T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ é contínua. Pelo Teorema da interpolação temos que $T : L^{s_1}(\mathbb{R}^n) \to L^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo, pois $2 < s_1 < +\infty$ e $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é contínuo. Logo

$$\begin{aligned}
\int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} dx \lesssim \|a\|_{L^{s_1}}^{s_1} &= \int_{B(z,r)} |a(x)|^{s_1} dx \\
&\leqslant \|a\|_{L^\infty}^{s_1} |B(z,r)| \leqslant |B(z,r)|^{-\frac{s_1}{p}} |B(z,r)|,
\end{aligned}$$

assim a propriedade (M1) é provada, pois

$$\int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} dx \leqslant r^{n\left(1-\frac{s_1}{p}\right)}.$$

Para demonstrar (M2), (M3), (M4) e (M5) segue-se no caso $1 \leqslant s_1 \leqslant 2$, pois não foi necessário a desigualdade $1 < s_1 \leqslant 2$. □

Observação 4.2.1. No caso $1 \leqslant s_1 \leqslant 2$, a demonstração

$$\int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^{s_1} dx \leqslant \|\chi_{B(z,2r)}\|_{(\frac{2}{s_1})'} \||Ta|^{s_1}\|_{\frac{2}{s_1}} \cdots \lesssim r^{n\left(1-\frac{s_1}{p}\right)},$$

usa a desigualdade $1 \leqslant \dfrac{2}{s_1}$. Quando $2 < s_1$ isto não é satisfeito, o qual a continuidade de $T : L^{s_1}(\mathbb{R}^n) \to L^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ resolve o problema.

Observação 4.2.2. No ambos casos, mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,r^\rho)} |Ta(x)|^{s_1} |x-z|^\lambda \lesssim r^{\rho\lambda + n\left[s_1 + s_1\frac{\delta}{n} - s_1\rho\left(1-\frac{1}{s_1}+\frac{\delta}{n\sigma}\right) - \frac{s_1}{p}\right]} \sum_{j=0}^{+\infty} (2^j)^{\lambda - n(s_1-1) - s_1\frac{\delta}{\sigma}}.$$

Se tentamos trocar ρ por σ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,r^\sigma)} |Ta(x)|^{s_1}|x-z|^\lambda \lesssim r^{\sigma\lambda+n\left[s_1\left(1-\frac{1}{p}\right)-s_1\sigma\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\right]}\sum_{j=0}^{+\infty}(2^j)^{\lambda-n(s_1-1)-s_1\frac{\delta}{\sigma}},$$

assim se desejamos tentar mostrar que $Ta(x)$ é uma $(p,\sigma,q,\lambda,s_2,s_1)$-molécula precisamos

$$\begin{aligned}
\sigma\lambda+n\left[s_1\left(1-\frac{1}{p}\right)-s_1\sigma\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\right] &= \sigma\lambda+n\left[\sigma\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)+s_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]\\
s_1\left(1-\frac{1}{p}\right)-s_1\sigma+\sigma &= \sigma\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)+s_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\\
s_1-s_1\sigma &= -\sigma\frac{s_1}{s_2}+s_1\frac{1}{q}=-\sigma\frac{s_1}{s_2}+s_1\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right)\\
1-\sigma &= -\frac{\sigma}{s_2}+\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\\
n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)(1-\sigma) &= \beta.
\end{aligned}$$

Também precisamos que escolher λ tal que

$$n\left(\frac{s_1}{p}-1\right)<\lambda\leqslant n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{ns_1}{1-\sigma}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}\right),$$

pois o Lema 4.1.7 usa a primeira desigualdade (estamos substituindo $t=s_1$) para a convergência da série

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|d_j|^p\leqslant\sum_{j=0}^{+\infty}(2^j)^{-\frac{\lambda p}{s_1}+n\left(1-\frac{p}{s_1}\right)}.$$

Mas apresenta o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&n\left(\frac{s_1}{p}-1\right)<n\left(\frac{s_1}{s_2}-1\right)+\frac{ns_1}{1-\sigma}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}\right)\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{p}<\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s_2}\right)\frac{1}{1-\sigma}+\frac{1}{s_2}=\frac{\beta}{n(1-\sigma)}+\frac{1}{s_2}=1-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2}=1\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{p}<1\\
&\Leftrightarrow 1<p.
\end{aligned}$$

Uma observação extra é que $p_0=1$.

Observação 4.2.3. Todo operador T fortemente singular de Calderón-Zygmund satisfaz as hipóteses do Teorema 4.0.1 para $0<\delta\leqslant 1$, $0<\sigma<1$ e $s_2=2$, pois a condição D_{s_1} é satisfeita para $1\leqslant s_1\leqslant+\infty$. $\dfrac{1}{p_0}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\beta\left(\frac{\delta}{\sigma}+\frac{n}{2}\right)}{n\left(\frac{\delta}{\sigma}-\delta+\beta\right)}$ e $\lfloor\delta\rfloor=0$. Logo o Teorema 4.0.1 é uma generalização do seguinte Teorema dado por [1].

Teorema 4.2.4. *Seja T um operador fortemente singular de Calderón-Zygmund tal que $T^*(1) = 0$. Seja $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} + \frac{\beta\left(\frac{\delta}{\sigma} + \frac{n}{2}\right)}{n\left(\frac{\delta}{\sigma} - \delta + \beta\right)}$. Entao, se $1 \geqslant p > p_0$, T se estende a um operador contínuo de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$.*

Outro resultado obtido por C. Vasconcelos e T. Picon no artigo é o seguinte.

Teorema 4.2.5. *Seja T um operador como no Teorema 4.0.1 que satisfaz i) e iii) desse Teorema e com a condição D_1, assuma também que iii) é satisfeito pelo operador T^*. Então T é contínuo de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $BMO(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, se demonstramos que existe uma constante $C > 0$ tal que para toda bola aberta $\forall B \subset \mathbb{R}^n$ existe a_B tal que

$$\sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |Tf(x) - a_B|dx \leqslant C\|f\|_\infty,$$

acabamos, pois

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|Tf\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \sup_B \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|B|}\int_B |Tf(x) - a|dx \\ &\leqslant \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |Tf(x) - a_B|dx \leqslant C\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Seja $B \doteq B(z,r) \subset \mathbb{R}^n$ bola arbitraria:

- Se $r \leqslant 1$:
  Definimos

  $$f_1 \doteq f\chi_{B(z,2r^\sigma)} \quad \text{e} \quad f_2 \doteq f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,2r^\sigma)},$$

  claramente $f = f_1 + f_2$. Desde que $T^* : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ é limitado, temos que: $T : L^{s_2'}(\mathbb{R}^n) \to L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ é limitado, além disso, $\frac{1}{s_2'} = 1 - \frac{1}{s_2}$ e $\frac{1}{q'} = \frac{1}{s_2'} - \frac{\beta}{n}$.
  Desde que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $supp(f_1) \subset B(z, 2r^\sigma)$, temos que $f_1 \in L^{s_2'}(\mathbb{R}^n)$, disso Tf_1 está bem definido em $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$. Logo usando a limitação de $T : L^{s_2'}(\mathbb{R}^n) \to L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ temos que

  $$\begin{aligned}\int_{B(z,r)} |Tf_1(x)|dx &\leqslant |B(z,r)|^{\frac{1}{q}}\|Tf_1\|_{L^{q'}} \\ &\lesssim |B(z,r)|^{\frac{1}{q}}\|f_1\|_{L^{s_2'}} \lesssim |B(z,r)|^{\frac{1}{q}+\frac{\sigma}{s_2'}}\|f\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

  assim

  $$\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |Tf_1(x)|dx \lesssim |B(z,r)|^{\frac{1}{q}+\frac{\sigma}{s_2'}-1}\|f\|_{L^\infty}$$

  como

  $$\frac{1}{q} + \frac{\sigma}{s_2'} - 1 = \frac{\beta}{n} + \frac{1}{s_2} + \sigma - \frac{\sigma}{s_2} - 1$$

$$= \frac{\beta}{n} - (1-\sigma)\left(1 - \frac{1}{s_2}\right) \geqslant 0, \qquad \textbf{hipótese (iii)}$$

e $r \leqslant 1$, logo temos

$$\frac{1}{B(z,r)} \int_{B(z,r)} |Tf_1(x)| dx \leqslant C\|f\|_{L^\infty} \tag{4.12}$$

Agora trabalhamos f_2:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) - K(z,y)||f_2(y)|dy &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,2r^\sigma)} |K(x,y) - K(z,y)||f(y)|dy \\
&\leqslant \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r^\sigma)} |K(x,y) - K(z,y)|dy \\
&\leqslant \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r^\rho)} |K(x,y) - K(z,y)|dy,
\end{aligned}$$

a última desigualdade é válida, pois $r \leqslant 1, \rho \leqslant \sigma$. Usando a condição D_1 temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) - K(z,y)||f_2(y)|dy &\lesssim \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |C_j(z,r^\rho)|^{\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma}\right)} 2^{-j\frac{\delta}{\rho}} \\
&\lesssim \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} (2^j r^\rho)^{\delta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma}\right)} 2^{-j\frac{\delta}{\rho}} \\
&= \|f\|_{L^\infty} r^{\rho\delta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma}\right)} \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j\frac{\delta}{\sigma}} \\
&\leqslant \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j\frac{\delta}{\sigma}} \lesssim \|f\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

na última linha foi usado denovo $r \leqslant 1, \rho \leqslant \sigma$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |Tf_2(x) - Tf_2(z)|dx &= \frac{1}{B(z,r)} \int_{B(z,r)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (K(x,y) - K(z,y)) f_2(y) dy \right| dx \\
&\leqslant \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) - K(z,y)||f_2(y)|dydx \\
&\lesssim \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} \|f\|_{L^\infty} dx = \|f\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{1}{B(z,r)} \int_{B(z,r)} |Tf_2(x) - Tf_2(z)| dx \lesssim \|f\|_{L^\infty} \tag{4.13}$$

Definamos $a_B \doteq Tf_2(z)$, logo

$$\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |Tf(x) - a_B| dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |Tf_1(x) + (Tf_2(x) - Tf_2(z))|dx \\
&\leqslant \frac{1}{B(z,r)}\int_{B(z,r)} |Tf_1(x)|dx + \frac{1}{B(z,r)}\int_{B(z,r)} |Tf_2(x) - Tf_2(z)|dx \\
&\leqslant C\|f\|_{L^\infty},
\end{aligned}
$$

na última desigualdade usamos (4.12) e (4.13).

- Se $r > 1$: Definimos novamente

$$f = f\chi_{B(z,r)} + f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,r)} \doteq f_1 + f_2,$$

claramente $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, logo pela limitação de $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ temos $Tf_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ além disso,

$$
\begin{aligned}
\int_{B(z,r)} |Tf_1(x)|dx &\leqslant |B(z,r)|^{\frac{1}{2}}\|Tf_1\|_{L^2} \\
&\lesssim |B(z,r)|^{\frac{1}{2}}\|f_1\|_{L^2} \\
&\leqslant |B(z,r)|^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^\infty}|B(z,r)|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Então

$$\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |Tf_1(x)|dx \lesssim \|f\|_{L^\infty} \tag{4.14}$$

Agora trabalhemos f_2:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) - K(z,y)||f_2(y)|dy &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,r)} |K(x,y) - K(z,y)||f(y)|dy \\
&\leqslant \|f\|_{L^\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(z,y)|dy \\
&\lesssim \|f\|_{L^\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j\delta} \lesssim \|f\|_{L^\infty},
\end{aligned}
$$

a última linha é justificada pela condição D_1, então

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |Tf_2(x) - Tf_2(z)|dx &\leqslant \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)}\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) - K(z,y)||f_2(y)|dydx \\
&\lesssim \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} \|f\|_{L^\infty}dx = \|f\|_{L^\infty},
\end{aligned}
$$

assim

$$\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |Tf_2(x) - Tf_2(z)|dx \lesssim \|f\|_{L^\infty} \tag{4.15}$$

Definamos novamente $a_B \doteq Tf_2(z)$, usando (4.14) e (4.15) temos:

$$\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |Tf(x) - a_B|dx \leqslant C\|f\|_{L^\infty}.$$

Portanto para $r > 0$, temos

$$\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)}|Tf(x)-a_B|dx \leqslant C\|f\|_{L^\infty}.$$

$\square$

4.3 Limitação em espaços de Hardy com peso

Nesta seção a função ω será não negativa e mensurável. A função ω é de classe A_1 se existe uma constante $C > 0$ tal que para cada bola $B \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(y)dy \leqslant C\omega(x), \quad \text{em quase todo ponto } x \in B.$$

Claramente se denotamos $\omega(E) \doteq \displaystyle\int_E \omega(x)dx$ temos que cada $E \subset B$ mensurável satisfaz $|E|\omega(B) \leqslant C|B|\omega(E)$ pois

$$|E|\frac{\omega(B)}{|B|} = \int_E \frac{1}{|B|}\int_B \omega(y)dydx \leqslant \int_E C\omega(x)dx = C\omega(E).$$

Por exemplo:

- $w \equiv 1$ é de classe A_1 .
- Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \geqslant 0$, $g \neq 0$ em quase todo ponto e g limitada. Então a função $\omega(x) = Mg(x)$ é de classe A_1 (ver [31]).

Definição 4.3.1. Dizemos que ω satisfaz a desigualdade Holder Reversa para $1 < t < +\infty$ se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^t(x)dx\right)^{\frac{1}{t}} \leqslant \frac{C}{|B|}\int_B \omega(x)dx,$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ e denotamos a este conjunto de funções como RH_t. Note que se $\omega \in RH_t$, então $\omega \in RH_s$ para todo $1 < s < t$. Com efeito, pela desigualdade de Hölder para $\dfrac{t}{s} > 1$ temos

$$\begin{aligned}\int_B \omega^s(x)dx = \int_B \omega^s(x)\chi_B(x)dx &\leqslant \left(\int_B \omega^t(x)dx\right)^{\frac{s}{t}}\left(\int_B \chi_B^{(\frac{t}{s})'}(x)dx\right)^{1-\frac{s}{t}}\\ &= \left(\int_B \omega^t(x)dx\right)^{\frac{s}{t}}|B|^{1-\frac{s}{t}},\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^s(x)dx\right)^{\frac{1}{s}} = |B|^{-\frac{1}{s}}\left(\int_B \omega^s(x)dx\right)^{\frac{1}{s}} &\leqslant |B|^{-\frac{1}{s}}\left(\int_B \omega^t(x)dx\right)^{\frac{1}{t}}|B|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}}\\ &\leqslant \frac{C}{|B|}\int_B \omega(x)dx.\end{aligned}$$

Exemplos podem ser obtidos em ([31], Capítulo IV).

Definição 4.3.2. Denotamos ao espaço de Lebesgue com peso como $L^p_\omega(\mathbb{R}^n) \doteq L^p(\mathbb{R}^n, \omega(x)dx)$ ao conjunto de funções mensuráveis tais que

$$\|f\|_{L^p_\omega} \doteq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Definição 4.3.3. Seja $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$. Definimos o espaço de Hardy com peso ao conjunto das distribuições $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $M_\phi f \in L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ Denotamos este espaço como $\mathbf{H}^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ e definimos o funcional

$$\|f\|_{\mathbf{H}^p_\omega} \doteq \|M_\phi f\|_{L^p_\omega}.$$

Definição 4.3.4. Seja $0 < p \leqslant 1$ e $\omega \in A_1$ (de classe A_1). Dizemos que uma função mensurável $a(x)$ é $(\omega, p, +\infty)$-átomo se existir $B(z,r) \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\textit{supp } (a) \subset B(z,r), \ \|a\|_{L^\infty} \leqslant \omega(B(z,r))^{-\frac{1}{p}} \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^n} a(x)x^\alpha dx = 0,$$

para todo multi-índice $|\alpha| \leqslant N_p = \left\lfloor n(\frac{1}{p} - 1)\right\rfloor$.

Agora mencionemos ligeiramente o Teorema de Decomposição Atômica para o espaço de Hardy com peso [27]. Se $\omega \in A_1$ e $f \in \mathbf{H}^p_\omega(\mathbb{R}^n)$, então existe ao menos uma sequência de coeficientes $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ e $(\omega, p, +\infty)$-átomos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $f = \displaystyle\sum_j \lambda_j a_j$ no qual a convergência é na norma $\mathbf{H}^p_\omega(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\inf \left\{ \left(\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \simeq \|f\|_{\mathbf{H}^p_\omega}$ no qual o ínfimo é tomado sobre todas as representações atômicas de f. A recíproca desta afirmação também é válido.

Teorema 4.3.5. *Seja $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear limitado como no Teorema 4.0.1. Então, T pode ser estendido a um operador limitado de $\mathbf{H}^p_\omega(R^n)$ em $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ para $p_0 \leqslant p \leqslant 1$ com p_0 definido como no Teorema 4.0.1, no qual $\omega \in A_1 \cap RH_d$, $d = \max\left\{\dfrac{s}{s-p}, \dfrac{s_1}{p(s_1-1)}\right\}$, $s = \min\{2, s_2\}$. Além disso, se $s_1 = 1$ a condição é valida só para $p_0 \leqslant p < 1$ e $d = \dfrac{1}{1-p}$.*

Demonstração. Se demonstramos que qualquer $a(x)$ $(\omega, p, +\infty)$-átomo satisfaz

$$\|Ta\|^p_{L^p_\omega} \lesssim 1,$$

acabamos, pois dada $f \in \mathbf{H}^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ e uma representação arbitraria $f = \sum \lambda_j a_j$ temos que

$$\int_{R^n} |Tf|^p \omega dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum |\lambda_j||Ta_j|\right)^p \omega dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \sum |\lambda|^p |Ta_j|^p \omega dx \leqslant \sum |\lambda_j|^p \int_{\mathbb{R}^n} |Ta_j|^p w dx \\
&\lesssim |\lambda_j|^p,
\end{aligned}
$$

logo passando sobre o ínfimo de todas as representações:

$$
\int_{R^n} |Tf|^p \omega dx \lesssim \inf \sum |\lambda_j|^p \simeq \|f\|^p_{\mathbf{H}^p_\omega},
$$

assim

$$
\|Tf\|_{L^p_\omega} \lesssim \|f\|_{\mathbf{H}^p_\omega}.
$$

Portanto vamos a verificar a propriedade, seja $B(z,r) \supset supp(a)$

- Se $r > 1$:

$$
\begin{aligned}
\|Ta\|^p_{L^p_\omega} &= \int_{B(z,2r)} |Ta(x)|^p \omega(x) dx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j(z,r)} |Ta(x)|^p \omega(x) dx \\
&\doteq I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Fazemos a conta para I_1, pela desigualdade de Hölder para $\dfrac{2}{p}$ temos,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |Ta(x)|^p \chi_{B(z,2r)} \omega(x) dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Ta(x)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{B(z,r)} \omega(x)^{\frac{2}{2-p}} dx \right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\lesssim \|a\|^p_2 \left[\frac{1}{|B(z,2r)|} \int_{B(z,2r)} \omega(x)^{\frac{2}{2-p}} dx \right]^{1-\frac{p}{2}} |B(z,2r)|^{1-\frac{p}{2}},
\end{aligned}
$$

a última desigualdade é justificada pela limitação de $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$. Desde que $\omega \in RH_d$ e $1 \leqslant \dfrac{2}{2-p} \leqslant \dfrac{s}{s-p} \leqslant d$, então $\omega \in RH_{\frac{2}{2-p}}$ e assim

$$
\begin{aligned}
I_1 &\lesssim \|a\|^p_2 \frac{1}{|B(z,2r)|} \int_{B(z,2r)} \omega(x) dx |B(z,2r)|^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leqslant \|a\|^p_\infty |B(z,r)|^{\frac{p}{2}} \frac{\omega(B(z,2r))}{|B(z,2r)|} |B(z,2r)|^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leqslant \frac{\omega(B(z,2r))}{\omega(B(z,r))} |B(z,r)|^{\frac{p}{2}} |B(z,2r)|^{-\frac{p}{2}} \\
&\lesssim \frac{|B(z,2r)|}{|B(z,r)|} |B(z,r)|^{\frac{p}{2}} |B(z,2r)|^{-\frac{p}{2}},
\end{aligned}
$$

a última desigualdade é justificada, pois $\omega \in A_1$, portanto

$$
I_1 \lesssim 1.
$$

Fazemos a conta para I_2, lembrando que $supp(a) \subset B(z,r)$, temos

$$
I_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r)} |Ta(x)|^p \omega(x) dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r)} \left| \int_{B(z,r)} K(x,y) a(y) dy \right|^p \omega(x) dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r)} \left(\int_{B(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)||a(y)|dy \right)^p \omega(x)dx \\
&\leqslant \|a\|_\infty^p \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r)} \left(\int_{B(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|dy \right)^p \omega(x)dx \\
&\leqslant \omega(B(z,r))^{-1} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r)} \left(\int_{B(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}} dy \right)^p dx,
\end{aligned}
$$

usando a desigualdade de Hölder para $\dfrac{1}{p}$ temos,

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant \omega(B(z,r))^{-1} \sum_{j=1}^{+\infty} &\left(\int_{C_j(z,r)} \left[\int_{B(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}} dy \right] dx \right)^p \\
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{C_j(z,r)}(x)^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p},
\end{aligned}
$$

assim pela, igualdade de Fubini temos

$$
I_2 \leqslant \omega(B(z,r))^{-1} \sum_{j=1}^{+\infty} |C_j(z,r)|^{1-p} \left(\int_{B(z,r)} \int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}} dxdy \right)^p \tag{4.16}
$$

Agora trabalhemos a integral interior, pela desigualdade de Hölder para s_1 temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|\omega^{\frac{1}{p}} dx \\
&\qquad \leqslant \left(\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|^{s_1} dx \right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\int_{C_j(z,r)} \omega^{\frac{s_1}{p(s_1-1)}} dx \right)^{1-\frac{1}{s_1}} \\
&\qquad \lesssim |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_1}-1} 2^{-j\delta} \left(\int_{C_j(z,r)} \omega(x)^{\frac{s_1}{p(s_1-1)}} dx \right)^{\frac{s_1-1}{s_1}} \\
&\qquad \leqslant |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_1}-1} 2^{-j\delta} \left(\int_{B(z,2^{j+1}r)} \omega(x)^{\frac{s_1}{p(s_1-1)}} dx \right)^{\frac{p(s_1-1)}{s_1} \frac{1}{p}} \\
&\qquad = |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_1}-1} 2^{-j\delta} \left\{ \left[\frac{1}{|B(z,2^{j+1}r)|} \int_{B_{j+1}} \omega(x)^{\frac{s_1}{p(s_1-1)}} dx \right]^{\frac{p(s_1-1)}{s_1}} \right\}^{\frac{1}{p}} |B_{j+1}|^{1-\frac{1}{s_1}},
\end{aligned}
$$

desde que $1 \leqslant \dfrac{s_1}{p(s_1-1)} \leqslant d$ temos $\omega \in RH_{\frac{s_1}{p(s_1-1)}}$, logo

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_j(z,r)} |K(x,y) - K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}} dx \\
&\qquad\qquad \lesssim |C_j(z,r)|^{\frac{1}{s_1}-1} 2^{-j\delta} \left[\frac{1}{|B_{j+1}|} \int_{B_{j+1}} \omega(x)dx \right]^{\frac{1}{p}} |B_{j+1}|^{1-\frac{1}{s_1}}
\end{aligned}
$$

$$= 2^{-j\delta}\left(\frac{|B_{j+1}|}{|C_j(z,r)|}\right)^{1-\frac{1}{s_1}} |B_{j+1}|^{-\frac{1}{p}}\omega(B_{j+1})^{\frac{1}{p}},$$

logo substituindo em (4.16) temos:

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \omega(B(z,r))^{-1}\sum_{j=1}^{+\infty}|C_j(z,r)|^{1-p}\left(\int_{B(z,r)} 2^{-j\delta}\left(\frac{|B_{j+1}|}{|C_j(z,r)|}\right)^{1-\frac{1}{s_1}} |B_{j+1}|^{-\frac{1}{p}}\omega(B_{j+1})^{\frac{1}{p}}dy\right)^p \\
&\leqslant \omega(B(z,r))^{-1}\sum_{j=1}^{+\infty}|C_j(z,r)|^{1-p}|B(z,r)|^p\left(\frac{|B_{j+1}|}{|C_j(z,r)|}\right)^{p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)} |B_{j+1}|^{-1}\omega(B_{j+1})2^{-j\delta p} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\omega(B_{j+1})}{\omega(B(z,r))}|C_j(z,r)|^{1-p-p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)}|B(z,r)|^p|B_{j+1}|^{p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)-1}2^{-j\delta p} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{|B_{j+1}|}{|B(z,r)|}|C_j(z,r)|^{1-p-p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)}|B(z,r)|^p|B_{j+1}|^{p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)-1}2^{-j\delta p},
\end{aligned}$$

a última desigualdade é justificada, pois $\omega \in A_1$, logo

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \sum_{j=1}^{+\infty}|C_j(z,r)|^{1-p-p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)}|B(z,r)|^{p-1}|B_{j+1}|^{p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)}2^{-j\delta p} \\
&\simeq \sum_{j=1}^{+\infty}|B_{j+1}|^{1-p-p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)}|B(z,r)|^{p-1}|B_{j+1}|^{p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)}2^{-j\delta p}, \qquad |B_{j+1}| \simeq |C_j| \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}|B_{j+1}|^{1-p}|B(z,r)|^{p-1}2^{-j\delta p} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty}2^{jn(1-p)}|B(z,r)|^{1-p}|B(z,r)|^{p-1}2^{-j\delta p} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}(2^j)^{(n-p(n+\delta))} \lesssim 1,
\end{aligned}$$

desde que $\left[\dfrac{n}{n+\delta} < p_0 \Leftrightarrow \rho < \sigma\right]$, temos a última desigualdade justificada pois $\dfrac{n}{n+\delta} < p_0 \leqslant p$. Portanto

$$\|Ta\|^p_{L^p_\omega} = I_1 + I_2 \lesssim 1 + 1 \lesssim 1.$$

- Se $r \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\|Ta\|^p_{L^p_\omega} &= \int_{B(z,2r^\rho)}|Ta(x)|^p\omega(x)dx + \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{C_j(z,r^\rho)}|Ta(x)|^p\omega(x)dx \\
&\doteq I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Fazemos a conta para I_3, pela desigualdade de Hölder para $\dfrac{s_2}{p}$ e pela limitação de $T : L^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
I_3 &\leqslant \|Ta\|_{s_2}^p \left(\int_{B(z,2r^\rho)} \omega(x)^{\frac{s_2}{s_2-p}} dx\right)^{1-\frac{p}{s_2}} \\
&\lesssim \|a\|_q^p \left[\frac{1}{|B(z,2r^\rho)|}\int_{B(z,2r^\rho)} \omega(x)^{\frac{s_2}{s_2-p}} dx\right]^{1-\frac{p}{s_2}} |B(z,2r^\rho)|^{1-\frac{p}{s_2}},
\end{aligned}$$

desde que $1 \leqslant \dfrac{s_2}{s_2-p} \leqslant \dfrac{s}{s-p} \leqslant d$ temos $\omega \in RH_{\frac{s_2}{s_2-p}}$, então

$$\begin{aligned}
I_3 &\lesssim \|a\|_q^p \left[\frac{1}{|B(z,2r^\rho)|}\int_{B(z,2r^\rho)} \omega(x) dx\right] |B(z,2r^\rho)|^{1-\frac{p}{s_2}} \\
&\leqslant \|a\|_\infty^p \frac{|B(z,r)|^{\frac{p}{q}}}{|B(z,2r^\rho)|} \omega(B(z,2r^\rho))|B(z,2r^\rho)|^{1-\frac{p}{s_2}} \\
&\lesssim \frac{\omega(B(z,2r^\rho))}{\omega(B(z,r))} |B(z,r)|^{\frac{p}{q}} |B(z,2r^\rho)|^{-\frac{p}{s_2}} \\
&\lesssim \frac{|B(z,2r^\rho)|}{|B(z,r)|} |B(z,r)|^{\frac{p}{q}} |B(z,2r^\rho)|^{-\frac{p}{s_2}},
\end{aligned}$$

a última desigualdade é válida, pois $\omega \in A_1$, logo

$$\begin{aligned}
I_3 &\lesssim |B(z,r)|^{\frac{p}{q}-1} |B(z,2r^\rho)|^{1-\frac{p}{s_2}} \\
&\lesssim r^{n\left(\frac{p}{q}-1\right)} r^{np\left(1-\frac{p}{s_2}\right)} = r^{n\left[\frac{p}{q}-1+\rho\left(1-\frac{p}{s_2}\right)\right]}.
\end{aligned}$$

Para que $I_3 \lesssim 1$ precisamos que $\dfrac{p}{q} - 1 + \rho\left(1 - \dfrac{p}{s_2}\right) \geqslant 0$, como

$$\frac{p}{q} - 1 + \rho\left(1 - \frac{p}{s_2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \rho \geqslant \rho_1 \doteq \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\frac{p}{s_2}} = \frac{1 - p\left(\frac{1}{s_2} + \frac{\beta}{n}\right)}{1-\frac{p}{s_2}}.$$

Agora fazemos a conta para I_4:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r^\rho)} |Ta(x)|^p \omega(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r^\rho)} \left|\int_{B(z,r)} K(x,y)a(y)dy\right|^p \omega(x)dx \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r^\rho)} \left(\int_{B(z,r)} |K(x,y)-K(x,z)||a(y)|dy\right)^p \omega(x)dx, \quad \int a dx = 0 \\
&\leqslant \|a\|_\infty^p \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{C_j(z,r^\rho)} \left(\int_{B(z,r)} |K(x,y)-K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}} dy\right)^p dx \\
&\leqslant \|a\|_\infty^p \sum_{j=1}^{+\infty} |C_j(z,r^\rho)|^{1-p} \left(\int_{C_j(z,r^\rho)} \int_{B(z,r)} |K(x,y)-K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}} dydx\right)^p,
\end{aligned}$$

a última desigualdade é justificada pela desigualdade de Hölder para $\dfrac{1}{p}$, logo

$$I_4 \leqslant \omega(B(z,r))^{-1}\sum_{j=1}^{+\infty}|C_j(z,r^\rho)|^{1-p}\left(\int_{B(z,r)}\int_{C_j(z,r^\rho)}|K(x,y)-K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}}dxdy\right)^p \tag{4.17}$$

Na integral interior usamos a desigualdade de Hölder para s_1, logo

$$\begin{aligned}
&\int_{C_j(z,r^\rho)}|K(x,y)-K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}}dx\\
&\quad\leqslant\left(\int_{C_j(z,r^\rho)}|K(x,y)-K(x,z)|^{s_1}dx\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(\int_{C_j(z,r^\rho)}\omega(x)^{\frac{s_1}{p(s_1-1)}}dx\right)^{1-\frac{1}{s_1}}\\
&\quad\lesssim|C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}\left[\int_{B(z,2^{j+1}r^\rho)}\omega(x)^{\frac{s_1}{p(s_1-1)}}dx\right]^{1-\frac{1}{s_1}}\\
&\quad=|C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}\left[\frac{1}{|B(z,2^{j+1}r^\rho)|}\int_{B(z,2^{j+1}r^\rho)}\omega(x)^{\frac{s_1}{p(s_1-1)}}dx\right]^{\frac{p(s_1-1)}{s_1}\frac{1}{p}}\\
&\quad\quad|B(z,2^{j+1}r^\rho)|^{1-\frac{1}{s_1}}\\
&\quad\lesssim|C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}\left[\frac{1}{|B(z,2^{j+1}r^\rho)|}\int_{B(z,2^{j+1}r^\rho)}\omega(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}|B(z,2^{j+1}r^\rho)|^{1-\frac{1}{s_1}}
\end{aligned}$$

a segunda desigualdade é justificada pela condição D_{s_1} e a última desigualdade pelo $\omega \in RH_{\frac{s_1}{p(s_1-1)}}$, logo

$$\begin{aligned}
&\int_{C_j(z,r^\rho)}|K(x,y)-K(x,z)|\omega(x)^{\frac{1}{p}}dx\\
&\qquad\lesssim|C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}|B(z,2^{j+1}r^\rho)|^{1-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{p}}\omega(B(z,2^{j+1}r^\rho))^{\frac{1}{p}}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Portanto substituindo em (4.17) temos

$$\begin{aligned}
I_4 &\lesssim\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\int_{B(z,r)}|C_j(z,r^\rho)|^{\frac{1}{s_1}-1+\frac{\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}|B(z,2^{j+1}r^\rho)|^{1-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{p}}\omega(B(z,2^{j+1}r^\rho))^{\frac{1}{p}}2^{-j\frac{\delta}{\rho}}dy\right)^p\\
&\qquad\omega(B(z,r))^{-1}|C_j(z,r^\rho)|^{1-p}\\
&=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\omega(B(z,2^{j+1}r^\rho))}{\omega(B(z,r))}|C_j(z,r^\rho)|^{1-p+\frac{p}{s_1}-p+\frac{\delta p}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}|B(z,2^{j+1}r^\rho)|^{p-\frac{p}{s_1}-1}|B(z,r)|^p2^{-j\frac{\delta p}{\rho}}\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{|B(z,2^{j+1}r^\rho)|}{|B(z,r)|}|C_j(z,r^\rho)|^{1-2p+\frac{p}{s_1}+\frac{\delta p}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}|B(z,2^{j+1}r^\rho)|^{p-\frac{p}{s_1}-1}|B(z,r)|^p2^{-j\frac{\delta p}{\rho}}
\end{aligned}$$

a última desigualdade é justificada pois $\omega \in A_1$. Logo

$$I_4\lesssim\sum_{j=1}^{+\infty}|B(z,r)|^{p-1}|C_j(z,r^\rho)|^{1-p+\frac{p\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)}\left(\frac{|B(z,2^{j+1}r^\rho)|}{|C_j(z,r^\rho)|}\right)^{p\left(1-\frac{1}{s_1}\right)}2^{-jp\frac{\delta}{\rho}}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \sum_{j=1}^{+\infty} |B(z,r)|^{p-1} |C_j(z,r^\rho)|^{1-p+\frac{p\delta}{n}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)} 2^{-jp\frac{\delta}{\rho}} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{+\infty} r^{n(p-1)} (2^j)^{n(1-p)+p\delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sigma}\right)} r^{\rho n(1-p)+p\delta\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)} 2^{-jp\frac{\delta}{\rho}} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} r^{-\rho\left[n(p-1)+p\frac{\delta}{\sigma}\right]+p\delta+n(p-1)} (2^j)^{\left[n-p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)\right]},
\end{aligned}$$

desde que $n-p(n+\delta)<0$ temos que $n-p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)<0$ pois $0<\sigma\leqslant 1$, logo

$$I_4 \lesssim r^{-\rho\left[n(p-1)+p\frac{\delta}{\sigma}\right]+p\delta+n(p-1)}.$$

Para que $I_4 \lesssim 1$ precisamos que $-\rho\left[n(p-1)+p\dfrac{\delta}{\sigma}\right]+p\delta+n(p-1)\geqslant 0$, mas

$$\begin{aligned}
-\rho\left[n(p-1)+p\frac{\delta}{\sigma}\right]+p\delta+n(p-1)\geqslant 0 &\Leftrightarrow p(\delta+n)-n \geqslant \rho\left[p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}-n\right)\right] \\
&\Leftrightarrow \rho \leqslant \rho_2 \doteq \frac{p(\delta+n)-n}{p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)-n}.
\end{aligned}$$

Note que $\rho_2 \leqslant \sigma$. Assim temos que provar duas cotas para ρ, isto é $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$.

$$\begin{aligned}
\rho_1 \leqslant \rho_2 &\Leftrightarrow \frac{1-p\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right)}{1-\frac{p}{s_2}} \leqslant \frac{p(n+\delta)-n}{p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)-n} \\
&\Leftrightarrow \left[1-p\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right)\right]\left[p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)-n\right] \leqslant [p(n+\delta)-n]\left[1-\frac{p}{s_2}\right] \\
&\Leftrightarrow p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)-n-p^2\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right)\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)+pn\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right) \\
&\leqslant p(n+\delta)-p^2\frac{(n+\delta)}{s_2}-n+\frac{np}{s_2} \\
&\Leftrightarrow p\left(n+\frac{\delta}{\sigma}+\frac{n}{s_2}+\beta\right)-p^2\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right)\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)\leqslant p\left(n+\delta+\frac{n}{s_2}\right)-p^2\frac{(n+\delta)}{s_2} \\
&\Leftrightarrow 0\leqslant p^2\left[\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right)\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)-\frac{(n+\delta)}{s_2}\right]+p\left(n+\delta+\frac{n}{s_2}-n-\frac{\delta}{\sigma}-\frac{n}{s_2}-\beta\right) \\
&\Leftrightarrow 0\leqslant p\left[\left(\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\right)\left(n+\frac{\delta}{\sigma}\right)-\frac{(n+\delta)}{s_2}\right]+\left(\delta-\frac{\delta}{\sigma}-\beta\right) \\
&\Leftrightarrow \beta+\frac{\delta}{\sigma}-\delta\leqslant p\left[\frac{n}{s_2}+\frac{\delta}{\sigma s_2}+\beta+\frac{\beta\delta}{n\sigma}-\frac{n}{s_2}-\frac{\delta}{s_2}\right] \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{p}\leqslant\frac{\frac{\delta}{\sigma s_2}+\beta+\frac{\beta\delta}{n\sigma}-\frac{\delta}{s_2}}{\beta+\frac{\delta}{\sigma}-\delta},
\end{aligned}$$

mas

$$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{s_2}+\frac{\beta}{n}\frac{\left[\frac{\delta}{\sigma}+n\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\right]}{\left(\frac{\delta}{\sigma}-\delta+\beta\right)}\leqslant\frac{\frac{\delta}{\sigma s_2}+\beta+\frac{\beta\delta}{n\sigma}\frac{\delta}{s_2}}{\beta+\frac{\delta}{\sigma}-\delta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{s_2} \leqslant \frac{\frac{\delta}{\sigma s_2} + \beta + \frac{\beta\delta}{n\sigma} - \frac{\delta}{s_2} - \frac{\beta\delta}{n\sigma} - \beta + \frac{\beta}{s_2}}{\beta + \frac{\delta}{\sigma} - \delta}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{\frac{\delta}{\sigma} - \delta + \beta - \beta - \frac{\delta}{\sigma} + \delta}{\left(\beta + \frac{\delta}{\sigma} - \delta\right) s_2} = 0,$$

então

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_0} \leqslant \frac{\frac{\delta}{\sigma s_2} + \beta + \frac{\beta\delta}{n\sigma} - \frac{\delta}{s_2}}{\beta + \frac{\delta}{\sigma} - \sigma},$$

logo

$$\rho_1 \leqslant \rho_2.$$

Portanto podemos escolher $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$ sem impor alguma restrição extra que $p_0 \leqslant p \leqslant 1$, assim

$$\|Ta\|_{L^p_\omega}^p \lesssim 1.$$

□

Note que podemos trocar a hipótese $\omega \in A_1 \cap RH_d$ por $\omega \in A_1 \cap RH_{d_0}$, no qual $d_0 = \max\left\{\frac{s}{s-1}, \frac{s_1}{p_o(s_1-1)}\right\}$ pois $\frac{s}{s-p} \leqslant \frac{s}{s-1}$ e $\frac{s_1}{p_0(s_1-1)} \leqslant \frac{s_1}{p(s_1-1)}$.

Corolário 4.3.6. *Seja $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ linear continuo como no Teorema 4.0.1. Então T poder ser estendido a um operador limitado de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p_0 \leqslant p \leqslant 1$ com p_0 dado no Teorema 4.0.1.*

Demonstração. Para $\omega \equiv 1$, temos $\omega \in A_1 \cap RH_r, \forall r \geqslant 1 \quad (\omega(B) = |B|)$ particularmente $\omega \in A_1 \cap RH_d$ então, T poder ser estendido a um operador limitado de $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p_0 \leqslant p \leqslant 1$. □

Capítulo 5

Apêndice

Neste capítulo vamos apresentar alguns detalhes técnicos utilizados em algumas demonstrações do texto.

5.1 Estimativas e lemas técnicos

Definição 5.1.1. Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $0 < \gamma < 1$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é ponto de γ-densidade global de G se

$$\gamma \leqslant \frac{|B(x,r) \cap G|}{|B(x,r)|}, \qquad \forall\, r > 0.$$

Também definimos o conjunto $G^* \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é ponto de } \gamma\text{- densidade global de } G\}$.

Observe que G^* é fechado. Com efeito, seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset G^*$ tal que $x_k \longrightarrow x$. Pelo Teorema 1.1.8 temos que todo $r > 0$ satisfaz

$$\gamma \leqslant \frac{|B(x_k,r) \cap G|}{|B(x_k,r)|} = \frac{1}{c_n r^n}\int_G \chi_k(x)dx \longrightarrow \frac{1}{|B(x,r)|}\int_G \chi_B(x)dx = \frac{|B(x,r) \cap G|}{|B(x,r)|},$$

em que χ_k e χ_B são respectivamente as funções características de $B(x_k,r)$ e de $B(x,r)$. A convergência segue pelo Teorema da Convergência Dominada uma vez que verifiquemos que as hipóteses desse Teorema são satisfeitas para a função χ_k. De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos $x_0 \in B(x,r)$ ou $x \notin B(x,r)$. Se $x_0 \in B(x,r)$, tomemos $\varepsilon = r - |x_0 - x| > 0$, logo de $x_k \longrightarrow x$ existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_\varepsilon$ temos $|x - x_k| < \varepsilon$. Daí

$$|x_0 - x_k| \leqslant |x_0 - x| + |x - x_k| < |x_0 - x| + r - |x_0 - x| = r,$$

o qual $x_0 \in B(x_k,r)$, isto é $\chi_k(x_0) = 1 = \chi_B(x_0)$ para todo $k \geqslant k_\varepsilon$ e assim $\chi_k \longrightarrow \chi_B$ em $B(x_0,r)$. Se $x_0 \notin B(x,r)$ (podemos supor x_0 fora da fronteira pois esse conjunto possui medida nula), tomemos $\varepsilon = |x_0 - x| - r > 0$ então $|x_k - x_0| \geqslant |x_0 - x| - |x_k - x| > |x_0 - x| - \varepsilon = r$ para $k \geqslant k_\varepsilon$ o qual $x_0 \notin \overline{B(x_k,r)}$ isto é $\chi_k(x_0) = 0 = \chi_B(x_0)$ para $k \geqslant k_\varepsilon$ e assim $\chi_k \longrightarrow \chi_B$ em quase todo ponto em $B(x_0,r)^c$. Logo de ambos casos temos $\chi_k \longrightarrow \chi_B$ em quase todo ponto. Agora vamos justificar a outra hipótese, de $x_k \longrightarrow x$ existe $A > 0$ tal que $|x_k - x| \leqslant A$ o qual $B(x_k,r) \subset B(x, A + r)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ pois se $|x_k - y| < r$ temos $|x - y| \leqslant |x - x_k| + |x_k - y| < A + r$. Logo $\chi_k \leqslant \chi_{B(x.A+r)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e como $\displaystyle\int_G \chi_{B(x,A+r)}(x)dx < +\infty$ a hipótese é verificada. Isto verifica as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada e portanto $x \in G^*$ pois é ponto de γ-densidade global de G. Assim mostramos que toda sequência $x_k \longrightarrow x$ de pontos $x_k \in G^*$ temos que $x \in G^*$, isto é G^* é fechado.

Observação 5.1.2. Como G é fechado, temos $G^* \subset G$, pois se existe $z \in G^*$ tal que $z \notin G = \overline{G}$, então existe $r > 0$ tal que $B(z,r) \cap G = \varnothing$, ou seja, z não é ponto de γ-densidade global de G, que é um absurdo.

Agora, defina $\mathcal{A} = G^c$ e $\mathcal{A}^* = (G^*)^c$. Da observação acima, temos $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Além disso, vale o seguinte resultado:

Lema 5.1.3. *Existe $C = C_\gamma > 0$ tal que $|\mathcal{A}^*| \leqslant C_\gamma |\mathcal{A}|$.*

Demonstração. De fato,

$$x \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \exists\, r > 0;\ \frac{|B(x,r) \cap G|}{|B(x,r)|} < \gamma \Leftrightarrow \exists\, r > 0;\ \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{A}|}{|B(x,r)|} > 1 - \gamma,$$

pois como $G \cup \mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, temos $|B(x,r) \cap G| = |B(x,r)| - |B(x,r) \cap \mathcal{A}|$.
Daí,

$$\gamma > \frac{|B(x,r) \cap G|}{|B(x,r)|} = 1 - \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{A}|}{|B(x,r)|},$$

ou seja,

$$\frac{|B(x,r) \cap \mathcal{A}|}{|B(x,r)|} > 1 - \gamma.$$

Equivalentemente, existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_{\mathcal{A}}(y) dy > 1 - \gamma$$

e assim

$$\mathcal{M}(\chi_{\mathcal{A}})(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_{\mathcal{A}}(y) dy > 1 - \gamma.$$

Consequentemente,

$$|\mathcal{A}^*| \leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n :\ \mathcal{M}(\chi_{\mathcal{A}})(x) > 1 - \gamma\}|.$$

Entretanto, desde que o operador de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ é fraco $(1,1)$, temos

$$|\mathcal{A}^*| \leqslant \frac{c(n)}{1-\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{A}}(x) dx = \frac{c(n)}{1-\gamma} |\mathcal{A}|,$$

provando o lema com $C_\gamma := \dfrac{c(n)}{1-\gamma}$. □

Definição 5.1.4. Seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ e $L > 0$. Definimos as funções

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+1}_+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (y,t) &\longmapsto F(y,t) \doteq (f * \phi_t)(y), \\ F^{\varepsilon,L} : \mathbb{R}^{n+1}_+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (y,t) &\longmapsto F^{\varepsilon,L}(y,t) \doteq (f * \phi_t)(y)\frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L}. \end{aligned}$$

e também para $a > 0$ considere as seguintes funções maximais

$$F_a^*(x) \doteq \sup_{(y,t)\in\Gamma_a(x)} |F(y,t)|$$

no qual $\Gamma_a(x) \doteq \{(y,t) \in \mathbb{R}^n : \ |x-y| < at\}$ e

$$F_a^{*,\varepsilon,L}(x) \doteq \sup_{(y,t)\in\Gamma_a^\varepsilon(x)} |F^{\varepsilon,L}(y,t)|.$$

no qual $\Gamma_a^\varepsilon(x) \doteq \{(y,t) \in \mathbb{R}^n : \ |x-y| < at, \ t < \varepsilon^{-1}\}$.

Proposição 5.1.5. *Para cada $a > 0$, as funções F_a^* e $F_a^{*,\varepsilon,L}$ são semi-contínuas inferiormente, isto é, para todo $\lambda \geqslant 0$ os conjuntos*

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \ F_a^*(x) > \lambda\},$$

e

$$A_\lambda^{\varepsilon,L} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ F_a^{*\varepsilon,L}(x) > \lambda\right\}$$

são abertos.

Demonstração. Sejam $\lambda \geqslant 0$, $x \in A_\lambda$. Pela definição de $F_a^*(x)$ existe $(y_0,t_0) \in \Gamma_a(x)$ tal que $|F(y_0.t_0)| > \lambda$. Tomemos $\delta = at_0 - |x-y_0|$ e mostremos que $B(x,\delta) \subset A_\lambda$. Com efeito, para $u \in B(x,\delta)$ temos

$$|u-y_0| \leqslant |u-x| + |x-y_0| < \delta + |x-y_0| = at_0,$$

isto é $(y_0,t_0) \in \Gamma_a(u)$, Logo $F_a^*(u) \geqslant |F(y_o,t_0)| > \lambda$, e assim $u \in A_\lambda$. Portanto A_λ é aberto para todo $\lambda \geqslant 0$.

Para demonstrar que $A_\lambda^{\varepsilon,L}$ é aberto, trocamos $\Gamma_a(x)$ por $\Gamma_a^\varepsilon(x)$, $F(x)$ por $F^{\varepsilon,L}(x)$, $F_a^*(x)$ por $F_a^{*,\varepsilon,L}(x)$ e a mesma demonstração segue. □

Proposição 5.1.6. *Se $b \leqslant a$ então para todo $\lambda > 0$ temos*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F_a^*(x) > \lambda\}| \leqslant c_{a,b} \left|\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F_b^*(x) > \lambda\}\right|, \tag{5.1}$$

no qual $c_{a,b} = c_n \left(\frac{a+b}{b}\right)^n$ e c_n é uma constante que depende apenas da dimensão n.

Considere $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ F_b^*(x) > \lambda\}$. Afirmamos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ F_a^*(x) > \lambda\} \subseteq (G^*)^c \tag{5.2}$$

no qual G^* é o conjunto dos pontos de $\gamma-$densidade de $O^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \ F_b^*(x) \leqslant \lambda\}$ para algum $0 < \gamma < 1$. De fato, seja $x \in \{z \in \mathbb{R}^n : \ F_a^*(z) > \lambda\}$. Então pela definição de $F_a^*(x)$ temos que existe $(y,t) \in \Gamma_a(x)$ tal que $|F(y,t)| > \lambda$. Para mostrar que $x \in (G^*)^c$ temos que mostrar que x não é ponto de γ-densidade global de G. Note que

i) $B(y, bt) \subset \mathcal{O}$, pois de $u \in B(y, bt)$ temos $|u - y| < bt$ isto é $(y, t) \in \Gamma_b(u)$. Daí, $F_b^*(u) \geqslant |F(y, t)| > \lambda$. Logo, $u \in \{z \in \mathbb{R}^n : F_b^*(z) > \lambda\}$.

ii) $B(y, bt) \subset B(x, (a + b)t)$, pois para $z \in B(y, bt)$, temos $|z - y| < bt$ e com isso

$$|z - x| \leqslant |z - y| + |y - x| < bt + at = (b + a)t,$$

isto é, $z \in B(x, (a + b)t)$.

De (i) e (ii), temos $B(y, bt) \subset B(x, (a + b)t) \cap \mathcal{O}$. Então

$$\frac{|B(x, (a + b)t) \cap \mathcal{O}|}{|B(x, (a + b)t)|} \geqslant \frac{|B(y, bt)|}{|B(x, (a + b)t)|} = \frac{b^n}{(a + b)^n}.$$

Assim como o argumento anterior, obtemos

$$\frac{|B(x, (a + b)t) \cap \mathcal{O}^c|}{|B(x, (a + b)t)|} \leqslant 1 - \frac{b^n}{(a + b)^n} < 1.$$

Agora, basta tomar $\gamma := 1 - \dfrac{b^n}{2(a + b)^n}$ tal que $1 - \dfrac{b^n}{(a + b)^n} < \gamma < 1$. Com essa escolha de γ, temos que x não é ponto de γ-densidade global de G, ou seja $x \in (G^*)^c$.

A demonstração da Proposição 5.1.6 segue diretamente de (5.2) e do Lema 5.1.3 com a escolha de γ anterior e assim

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : F_a^*(x) > \lambda\}| \leqslant (G^*)^c \leqslant \frac{c_n}{1 - \gamma} |\{x \in \mathbb{R}^n : F_b^*(x) > \lambda\}| \\
= 2c_n \frac{(a + b)^n}{b^n} |\{x \in \mathbb{R}^n : F_b^*(x) > \lambda\}|.
\end{aligned}$$

Renomeando a constante c_n segue o resultado.

Observação 5.1.7. Note que na demonstração da Proposição 5.1.6 não fez uso da formula explicita $F(y, t) = (f * \phi_t)(y)$, apenas propriedades do supremo no conjunto $\Gamma_a(x)$. Além disso se agregamos a condição $t < \varepsilon^{-1}$ em i) e ii) a conclusão desses itens também são satisfeitas. Então podemos trocar F por $F^{\varepsilon,L}$, F_a^* por $F_a^{*,\varepsilon,L}$, F_b^* por $F_b^{*,\varepsilon,L}$, Γ_a por Γ_a^ε e Γ_b por Γ_b^ε e assim temos o seguinte resultado:

Proposição 5.1.8. *Se $b \leqslant a$ então para todo $\lambda > 0$ temos*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : F_a^{*,\varepsilon,L}(x) > \lambda\right\}\right| \leqslant c_{a,b} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : F_b^{*,\varepsilon,L}(x) > \lambda\right\}\right|, \tag{5.3}$$

no qual $c_{a,b} = c_n \left(\frac{a+b}{b}\right)^n$ e c_n é uma constante que depende apenas da dimensão n.

Como consequência das proposições anteriores podemos enunciar as seguintes estimativas:

Corolário 5.1.9. *Para cada $a \geqslant 1$ são válidas as seguintes estimativas*

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)^p dx \leqslant c(n, p)(1 + a)^n \int_{\mathbb{R}^n} F_1^* f(x) dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^{*,\varepsilon,L}(x)^p dx \leqslant c(n, p)(1 + a)^n \int_{\mathbb{R}^n} F_1^{*,\varepsilon,L} f(x) dx.$$

Demonstração. Tomando $b = 1$ na Proposição 5.1.6, utilizando a notação de função de distribuição, segue que

$$\begin{aligned} a_{F_a^*}(\lambda) := |\{x \in \mathbb{R}^n : \ F_a^*(x) > \lambda\}| &\leqslant c_n(1+a)^n \, |\{x \in \mathbb{R}^n : \ F_1^*(x) > \lambda\}| \\ &= c_n(1+a)^n a_{F_1^*}(\lambda). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)^p dx = \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} a_{F_a^*}(\lambda) d\lambda &\leqslant c_n(1+a)^n \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} a_{F_1^*}(\lambda) d\lambda \\ &= c_n(1+a)^n \int_{\mathbb{R}^n} F_1^*(x)^p dx. \end{aligned}$$

e assim segue o resultado. O mesmo argumento é válido, utilizando a Proposição 5.1.8, trocando os respectivos F^* por $F^{*,\varepsilon,L}$. $\square$

Bibliografia

[1] J. Álvarez e M. Milman, *H^p continuity properties of Calderón-Zygmund-type operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 118 (1986), no. 1, 63–79.

[2] J. Álvarez e M. Milman, *Vector valued inequalities for strongly singular Calderón-Zygmund operators*, Revista Matemática Iberoamericana 2 (1986), 405–426.

[3] A. Bonami, J. Feuto e S. Grellier, *Endpoint for the div-curl lemma in Hardy spaces*, Publ. Mat., 54(2):341–358, 2010.

[4] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Universitext. Springer,* New York, 2011.

[5] D. Burkholder, R. Gundy e M. Silverstein, *A maximal function characterization of the class* $\mathbf{H}^p$, Trans. Amer. Math. Soc., 157:137-153, 1971.

[6] R. Coifman, *A real variable characterization of* $\mathbf{H}^p$, Studia Math., 51:269-274, 1974.

[7] R. Coifman e Y. Meyer, *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1997.

[8] R. Coifman e G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*,Bull. Amer. Math. Soc., 83(4):569-645, 1977.

[9] A. Calderon e A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., 88:85-139, 1952.

[10] P. L. Duren, *Theory of* $\mathbf{H}^p$ *spaces*, Pure and Applied Mathematics., Vol.38. Academic Press, New York-London, 1970.

[11] C. Fefferman e E. Stein, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math., 124:9-36, 1970.

[12] C. Fefferman, *Characterizations of bounded mean oscillation*, Bull. Amer. Math. Soc., 77:587-588, 1971.

[13] C. Fefferman e E. Stein, $\mathbf{H}^p$ *spaces of several variables*, Acta Math., 129(3-4):137-193, 1972.

[14] G. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd Edition, New York: Jhon Wiley e Sons, 1999.

[15] D. Goldberg, *A Local Version of Real Hardy Spaces*, Duke Mathematical Journal, v. 46, p. 27-41, 1979.

[16] G. Hardy, *The mean value of the modulus of an analytic function*, Proceedings of the London Mathematical Society, s2 14(1):269-277, 1915.

[17] T. Hebeler, *Teoria das distribuições e seus espaços topológicos*, Monografia de Conclusão de Curso. Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B, DM UFSCar (2010).

[18] I. Hirschman, *On multiplier transformations*, Duke Mathematical Journal 26 (1959), no. 2, 221–242.

[19] J. Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[20] F. John e L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math, 14:415-426, 1961.

[21] R. Latter, *A characterization of* $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$ *in terms of atoms*, Studia Math., 62(1):93-101, 1978.

[22] Y. Meyer, *Ondelettes et operateurs, II. Operateurs de Calderón-Zygmund*, Actualités Mathématiques, Hermann, 1990.

[23] Y. Meyer e R. Coifman, *Wavelets, Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1997.

[24] F. Riesz, *Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniqueset des fonctions analytiques*, Szeged Varosi Nyomda es Konyvkiado, 1922.

[25] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, *McGraw-Hill,* Third Edition, 1987.

[26] E. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[27] J. Strömberg e A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces,* Lectures Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1989.

[28] T. Picon e C. Vasconcelos, *On the continuity of strongly singular Calderón-Zygmund-type operator on Hardy spaces*, Integral Equations and Operator theory, v. 95, p. 1-30, 2023.

[29] S. Wainger, *Special trigonometric series in k dimensions*, Memoirs of the American Mathematical Society, no. 59, Amer Mathematical Society, 1965

[30] Q. Yang, L. Yan e D. Deng, *On Hörmander condition*, Chinese Science Bulletin 42 (1997), no. 16, 1341–1345.

[31] J. García-Cuerva e J. de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, Annals of Discrete Mathematics, no. Nº 116, North-Holland, 1985.

[32] M. Taibleson e G. Weiss, *The molecular characterization of certain Hardy spaces*, Astérisque, no. 77, Société Mathématique de France, 1980, pp. 67–149.