Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Vinicius Henrique Aurichio

Deformações quase-integráveis do modelo de Bullough-Dodd

São Carlos

2014

Vinicius Henrique Aurichio

Deformações quase-integráveis do modelo de Bullough-Dodd

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira

Versão Original

São Carlos

2014

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Aurichio, Vinicius Henrique
Deformações quase-integráveis do modelo de Bullough-Dodd / Vinicius Henrique Aurichio; orientador Luiz Agostinho Ferreira -- São Carlos, 2014.
87 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Integrabilidade. 2. Quase integrabilidade. 3. Bullough-Dodd. I. Ferreira, Luiz Agostinho, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Vinícius Henrique Auríchio

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 26/06/2014

Comissão Julgadora

Prof(a). Dr(a). Luiz Agostinho Ferreira

Instituição: IFSC/USP

Prof(a). Dr(a). José Francisco Gomes

Instituição: UNESP/São Paulo

Prof(a). Dr(a). Paulo Afonso Faria da Veiga

Instituição: ICMC/USP

AGRADECIMENTOS

Recentemente, li os agradecimentos escritos por vários de meus colegas em suas dissertações de mestrado e suas teses de doutorado. Ainda assim, não sei por onde começar a listar todos os que me apoiaram e acreditaram em mim. Cada uma dessas pessoas deixou uma marca muito profunda em quem sou hoje e têm parte no presente trabalho de mestrado. Felizmente, tive muitos amigos e, por isso mesmo, será impossível citá-los todos nominalmente. Se você, caro amigo, não vir seu nome nesses agradecimentos, não fique triste. Não gosto menos de você, só quis poupar os leitores de uma tediosa e longa lista fadada a deixar pessoas de fora.

Começo agradecendo a meus pais por todo o apoio que me deram. Desde criança, até hoje, sei que posso contar com vocês para qualquer grande mudança que eu deseje fazer em minha vida. É inútil tentar por em palavras o quanto os considero. Vó Jandira, vó Isa, tio Mário e tia Vera, vocês sempre foram os parentes mais próximos de mim nessa nossa grande família. Obrigado por tudo.

Agradeço também a meu orientador, Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira. Ao longo dos últimos três anos, entre iniciação científica e mestrado, tive o prazer de poder conversar com você sobre diversos assuntos - relacionados ou não à Física. Isto muito me engrandeceu como pessoa e pesquisador. Sempre preocupado em fazer ciência de qualidade, nunca deixou de se preocupar com o aprendizado de seus alunos nas aulas de graduação. E isso tudo enquanto organizava o próximo Ciências 19h. Essa sua paixão pelo tripé universitário - pesquisa, ensino e extensão - foi o que me levou a querer trabalhar com você e não com algum outro teorista de campos.

Dentre os professores que marcaram profundamente minha graduação e pós-graduação, destaco: Daniel Augusto Turolla Vanzella, Djalma Mirabelli Redondo, Francisco Castilho Alcaraz, Francisco Eduardo Gontijo Guimarães, Leonardo Paulo Maia, Lidério Citrangulo Ioriatti Júnior, Luiz Nunes de Oliveira, Máximo Siu Li, Miled Hassan Youssef Moussa, Paulo Barbeitas Miranda e Tereza Cristina da Rocha Mendes. Sua animação e seu amor pela Física que nos ensinavam são tamanhos que tornavam até aquela aula de segunda-feira, 8h00, algo empolgante.

Antes mesmo de chegar aqui, já havia quem visse um físico em potencial naquele garoto do Ensino Médio da cidade de São José dos Campos. Édy Carlos Monteiro, também formado no IFSC, incentivou-me muito a estudar Física ainda no 2º colegial. Apresentou-me ao IYPT, um

torneio de Física diferente das tradicionais olimpíadas, e me incentivou a criar meus primeiros modelos físicos para resolver os problemas. Com sua ajuda aprendi Cálculo I e II antes de chegar na Universidade, o que foi fundamental para meu bom aproveitamento desde o começo do curso.

Continuo essa lista citando um grupo que me acompanhou por treze anos de minha infância e adolescência. Dos cinco aos dezoito anos, vivi no Edifício Tambaú. Ainda hoje, apesar da distância, mantemos contato e nos encontramos esporadicamente para uma partida de futebol e falar besteira.

Ainda em minha juventude, três nomes se destacam. Letícia Fais, Maria Cecília Martins e Vitor Tomita. As intermináveis conversas que tive com cada um de vocês foram muito importantes para mim. Obrigado.

Entrando na faculdade a lista aumenta (e muito). Resumidamente, agradeço a todos os membros da família AFLS de kung-fu, aos muitos membros do $GT \mid \psi\rangle$, aos membros do grupo "SPAM" e aos membros do grupo "Galera do Cinema". Cada um desses grupos de amigos me proporcionou horas impagáveis de diversão e me auxiliaram a trilhar os árduos caminhos da vida acadêmica de maneira mais divertida.

O grupo de pesquisa ficou quieto demais com a saída de meu colega de sala, Gabriel Luchini Martins. Foram muitas as horas em que ele, David Foster, Pawel Kilmas e eu passamos discutindo Física, mulheres e a física das mulheres em nossa sala.

Thereza Cury Fortunato e Marta Maria Troiano Cury, obrigado por me tornar parte de sua família.

André Smaira, Paulo Matias e Raimundo de Araújo Pereira Santos, sem vocês não seria metade do programador que sou hoje. Obrigado.

Joseana dos Santos Soares (para sempre McGyver), foram muitas as noites de metal, gordices e coisas aleatórias. Obrigado.

Júlio Cesar Chinelato de Souza (o inconfundível Panceta), quantos não foram os almoços, jantares e lasanhas da madrugada? Obrigado.

E por último a mais importante. Krissia de Zawadzki. Você conseguiu me tolerar por mais tempo que qualquer outra pessoa que não meus pais. Cuida dos dois gatos durante minha ausência. Faz comidas deliciosas. Obriga-me a estudar. Gosta de desenhar. Gosta de mim. Não poderia pedir companheira melhor. Obrigado.

We know a lot of things, but what we don't know is a lot more.

Edward Witten

Esta dissertação foi financiada pela FAPESP.

RESUMO

AURICHIO, V. H. *Deformações quase-integráveis do modelo de Bullough-Dodd*. 2014. 87 p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

Esta dissertação investiga uma particular deformação do modelo de Bullough-Dodd. Não se sabe se tais deformações são ou não integráveis, ainda que nossas simulações numéricas apresentem soluções solitônicas. Exploramos o conceito de quase-integrabilidade em mais esse contexto e mostramos um argumento analítico para a quase-conservação das cargas (isto é, as cargas variam com o tempo, mas seus valores inicial e final são os mesmos). Mesmo quando o argumento analítico não pode fazer previsões, nossas simulações mostram que as cargas apresentam o mesmo comportamento. Isso sugere que as deformações consideradas são integráveis e ainda há espaço para explorá-las.

Palavras-chave: Integrabilidade. Quase integrabilidade. Bullough-Dodd.

ABSTRACT

AURICHIO, V. H. *Bullough-Dodd's model quasi-integrable deformations*. 2014. 87 p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

This dissertation investigates a particular deformation of the Bullough-Dodd model. It's unknown if such deformations are integrable or not, yet they present solitonic solutions which were obtained through numerical simulations. We further explore the concept of quasi-integrability in this context, showing analiticaly that at least for some sets of parameters, the charges are quasi-conserved (i.e. the charges vary over time, but it's initial and final values are the same). Even when the analitical argument can't predict what happens, our simulations show the same charge behaviour. This suggests that those deformations are integrable and can be further explored.

Keywords: Integrability. Quasi-integrability. Bullough-Dodd.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Distribuição de energia entre os modos normais obtidos por Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou. Ao contrário do que acreditava Fermi, a energia se concentra no primeiro modo normal após aproximadamente 160 ciclos do primeiro modo normal. 23

Figura 2.2 - Resultados numéricos apresentados por Zabusky e Kruskal em seu artigo. Eles deram o nome de sólitons aos morros formados com o passar do tempo, pois estes eram fracamente interagentes e não se dispersavam, parecendo-se, portanto, com partículas livres. 24

Figura 3.1 - Gráfico das partes real (ϕ_R) e imaginária (ϕ_I) do campo de interesse (ϕ) para dois valores do parâmetro ξ. 30

Figura 3.2 - Os mapas de cores ilustram a amplitude das partes real (V_R) e imaginária (V_I) e o módulo ($|V|$) do potencial (3.21). Três trajetórias exemplo são mostradas em branco. 33

Figura 5.1 - Discretização do eixo x. Cada ponto $x_i = (i - N/2) * dx$, onde $N + 1$ é o número total de pontos da discretização e dx o espaço entre dois pontos consecutivos. 50

Figura 6.1 - Soluções exemplo para o modelo não deformado. Essas curvas foram obtidas através do método de minimização e são idênticas às soluções analíticas correspondentes. Na legenda, $\phi_R - \xi = 0.7$ indica que a curva azul tracejada é a parte real do campo ϕ com parâmetro ξ valendo 0.7. 56

Figura 6.2 - Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = -1$ obtidas através do método de minimização. Esse é um importante teste para nosso modelo, pois $\epsilon = -1$ corresponde ao modelo de sine-Gordon complexo. As curvas obtidas são idênticas às soluções analíticas correspondentes. 57

Figura 6.3 - Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = 1$ obtidas através do método de minimização. Esse é o primeiro dos modelos mostrados que não tem representação de curvatura nula conhecida (não sabemos sequer se uma existe). Apesar disso, apresenta soluções solitônicas. 58

Figura 6.4 - Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = 2$ obtidas através do método de minimização. Note a estrutura interna da solução. 58

Figura 6.5 - Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = 1/2$ obtidas através do método de minimização. 59

Figura 6.6 - Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = -1/2$ obtidas através do método de minimização. 59

Figura 6.7 - Colisão simulada entre sólitons do modelo integrável. Em $t = 70$ os sólitons estão afastados e ainda não há interação. Em $t = 160$ a interação se inicia com a deformação dos sólitons. Em $t = 320$ a colisão resultou na troca de posições dos sólitons. 61

Figura 6.8 - Colisão simulada entre sólitons do modelo de sine-Gordon ($\epsilon = -1$). A deformação das soluções durante a interação é muito clara nesse caso. . 62

Figura 6.9 - Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = 1$. 63

Figura 6.10 -Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = 2$. 63

Figura 6.11 -Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = -1/2$. Por serem mais extensos a interação entre os sólitons se inicia antes que nos modelos apresentados até então. 64

Figura 6.12 -Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = 1/2$. 65

Figura 6.13 -Carga $Q^{(5)}$ calculada para o modelo $\epsilon = 1$ para dois pares de parâmetros. 65

Figura 6.14 -Para comparação, carga $Q^{(5)}$ calculada para o modelo $\epsilon = 1$ calculada com mais dois pares de parâmetros. 66

SUMÁRIO

1 Introdução **19**

2 Um pouco de história **21**

2.1 John Scott Russell 21

2.2 Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou 22

2.3 Zabusky e Kruskal 23

2.4 Bullough e Dodd 24

2.5 Outras teorias integráveis 25

3 O modelo de Bullough-Dodd **27**

3.1 Apresentação do modelo 27

3.2 Curvatura nula 28

3.3 Soluções do modelo 29

3.4 Outra interpretação 30

3.4.1 Análogo mecânico 31

3.4.2 Vácuos do potencial 34

4 Quase integrabilidade e anomalias **37**

4.1 Deformações do modelo de Bullough-Dodd 37

4.2 Curvatura nula com potenciais deformados 39

4.3 Mudança de gauge 39

4.4 Condição de invariância 42

4.5 O argumento de paridade 43

4.5.1 Paridade da solução de dois sólitons 43

4.5.2 Efeito da paridade sobre a anomalia 46

5 Cálculo Numérico **49**

5.1 Método de Euler 49

5.2 Método de Runge-Kutta de quarta ordem 51

5.3 Descida sobre o gradiente 53

6 Resultados numéricos **55**

6.1 Campos para vários ϵ 55

6.2 Algumas colisões 60

6.3 Anomalias 60

7 Conclusões **67**

REFERÊNCIAS **69**

Apêndice A – Álgebra dos operadores **73**

A.1 Álgebra sl(2) twisted 73

A.2 O kernel da álgebra 74

A.3 Álgebra na base $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}$ 75

A.4 Realização matricial da álgebra 76

A.5 Representação de peso máximo 77

Apêndice B – Solução do modelo **79**

B.1 Método de *dressing* 79

B.2 Setor $N = 1$ 85

B.3 Setor $N = 2$ 87

Capítulo 1

Introdução

Ignorance is never better than knowledge. Enrico Fermi

Como físicos, buscamos entender as leis que regem a natureza observando seus fenômenos. Nem sempre podemos descrever com exatidão os processos observados e lançamos mão de teorias fenomenológicas e teorias efetivas. Em ambos os casos, tentamos capturar o efeito conjunto da ação de todas as leis subjacentes em um conjunto de equações e parâmetros aos quais interpretamos de forma conveniente a nosso entendimento.

Richard Feynman comparou o trabalho do cientista a uma pessoa observando um jogo de xadrez para aprender as regras. Nossa capacidade de descrever o funcionamento do jogo depende tanto de coletar informações corretas (saber onde cada peça está a cada jogada) quanto de ter a chance de observar todas as jogadas possíveis (nem todo jogo de xadrez inclui um roque*). Se em algum momento nossas regras dizem que não podemos fazer peças desaparecer (porque isso ainda não aconteceu) e ocorre uma captura (uma peça sai de jogo), não observamos algo que viola as regras do xadrez, mas sim o conjunto de regras conhecidas até aquele momento.

Nós temos uma vantagem sobre o observador do jogo de xadrez. Podemos forçar jogadas para observarmos os movimentos mais raros. É o que fazemos, por exemplo, no LHC. Colisões tão energéticas quanto as lá produzidas não são comuns em nossos laboratórios†. Ainda assim, podemos forçá-las a acontecer em um ambiente em que podemos observar as consequências daquele movimento e inferir as regras através das consequências.

Teorias integráveis são parte de nossa tentativa de entender as regras da natureza. É comum obter teorias integráveis como teorias efetivas no estudo de campos quânticos e clássicos. Como exemplo, podemos citar a equação de Gross-Pitaevskii. Quando consideramos um sistema de N bósons, apenas colisões de dois corpos pontuais e que a função de onda total é o

*Movimento de xadrez em que a torre e o rei passam um sobre o outro.

†Apesar de frequentes em ambientes siderais, onde não podemos medir com precisão.

produto tensorial das funções de onda de cada partícula, mostra-se que cada função de onda é solução da equação de Gross-Pitaevskii. Também importante, sua versão unidimensional sem potencial externo é a chamada de equação não linear de Schrödinger (NLS). A equação NLS é exatamente integrável, mas uma grande aproximação *a priori* para o problema de gases de bósons. Podemos buscar um ajuste ainda mais fino entre teoria e experimento. Poderíamos considerar estados emaranhados, ou colisões intermediadas por potenciais com maior alcance. Em (1), porém, optou-se por considerar colisões de 3, 4,... N corpos por meio de uma deformação na equação. O parâmetro ϵ introduzido permite que o efeito dessas colisões seja considerado de uma maneira tratável analiticamente.

Outro modelo integrável é o modelo de Bullough-Dodd, definido pela equação

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = e^{-2\phi} - e^{\phi}, \tag{1.1}$$

onde $\phi = \phi_R + i\phi_I$ é um campo complexo. A equação (1.1) apresenta sólitons como solução.

Nessa dissertação introduzimos um parâmetro ϵ no modelo de Bullough-Dodd para tentar torná-lo mais aplicável e para investigar a relação entre este modelo e o modelo de sine-Gordon. Assim, a equação de interesse é

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = e^{-(2+\epsilon)\phi} - e^{\phi}. \tag{1.2}$$

Note que para $\epsilon = -1$ e $\phi_R = 0$ recuperamos o modelo de sine-Gordon. Assim como em (1), essa deformação é tratável analiticamente no contexto de quase-integrabilidade. Mostramos que existem infinitas cargas quase-conservadas, isto é, cargas que tem os mesmos valores inicial e final, mas variam para tempos intermediários. Mostraremos um argumento analítico que garante que para alguns valores dos parâmetros isso é verdade, além de evidência numérica que as cargas são quase-conservadas mesmo quando o argumento analítico não vale.

Mostraremos que para o modelo deformado apresentar sólitons temos que ter ϵ racional. Mostraremos, também, indícios de que toda a classe de modelos estudada é integrável.

Capítulo 2

Um pouco de história

Teorias integráveis têm uma história bastante interessante, de modo que vale ocuparmos as primeiras páginas dessa dissertação discorrendo sobre o que aconteceu desde sua descoberta até os dias atuais. Neste capítulo descreveremos como um trabalho esquecido por quase um século se tornou a base de toda uma área de estudos.

2.1 John Scott Russell

Em 1834, John Scott Russell, reconhecido engenheiro naval, assistiu a um fenômeno que o impressionou. Seus contemporâneos tomaram aquilo como mera curiosidade, mas Russell dedicou várias horas de seu tempo explorando esse fenômeno em um tanque de seis metros construído em seu quintal.(2) Veja o que ele descreveu:

> I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation.

Anos mais tarde, esse fenômeno ficou conhecido em hidrodinâmica como onda solitária. Após os trabalhos iniciais de Scott Russell, Lord Rayleigh (3) e Boussinesq (4) também investigaram o movimento das ondas em canais estreitos. Mas foi o artigo publicado por Diederik Johannes Korteweg e Gustav De Vries (5) que levou a fama. Nesse artigo, aparece pela terceira

vez* a conhecida equação de KdV. Não por acaso, o artigo possui mais de 2000 citações. Um bom resumo dessa parte da história pode ser encontrado na referência (6), que conta com uma sucinta e completa bibliografia.

2.2 Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou

Já em 1953, Enrico Fermi, John Pasta e Stanislaw Ulam trabalhavam no problema da ergodicidade.(7) Aproveitando o potencial oferecido pelo desenvolvimento dos primeiros computadores nos laboratórios de Los Alamos, os três cientistas - auxiliados por Mary Tsingou, que programou o computador - fizeram o primeiro experimento numérico de que se tem notícia. Eles não estavam apenas efetuando cálculos longos e complexos, estavam explorando um fenômeno físico com o auxílio de um computador.

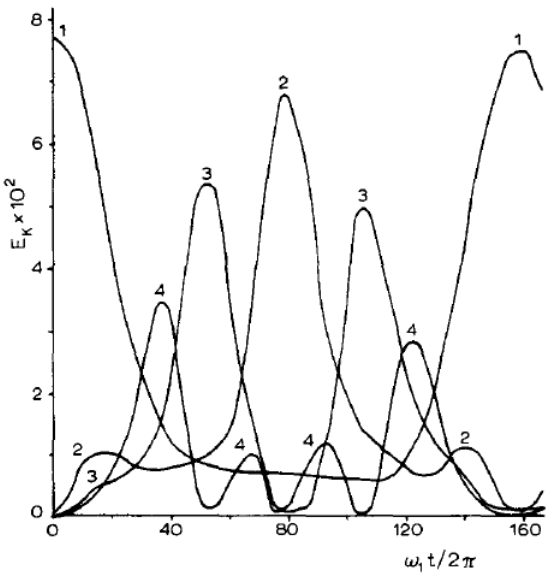
Fermi acreditava que, se uma não linearidade fosse adicionada a uma rede de osciladores harmônicos, a energia se distribuiria igualmente por entre todos os modos normais e o sistema exploraria todo o espaço de fase. Surpreendentemente, após algum tempo de simulação, a energia voltou quase integralmente ao primeiro modo normal - onde havia sido colocada inicialmente. Na figura (2.1) encontra-se reproduzido o resultado original.

Ainda sem entender os resultados, Fermi falece em 1954. Pasta e Ulam publicaram as observações em um documento interno de Los Alamos em 1955, pois não queriam publicar em uma revista sem a já impossível revisão de Fermi. Por dez anos, até a publicação da coleção de trabalhos de Fermi (8), em 1965, o problema continuou quase desconhecido.

Um maravilhoso artigo de revisão do problema de Fermi-Pasta-Ulam devido a Joseph Ford (9), em 1992, explica com bastante detalhe a solução mais aceita para o problema. Mas, mais importante que a solução, conta também a primeira tentativa de explicar o fenômeno, devida a Zabusky e Kruskal.

*A primeira vez foi no artigo de Boussinesq e a segunda vez foi na tese de doutorado de De Vries, no ano anterior

Figura 2.1 – Distribuição de energia entre os modos normais obtidos por Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou. Ao contrário do que acreditava Fermi, a energia se concentra no primeiro modo normal após aproximadamente 160 ciclos do primeiro modo normal.



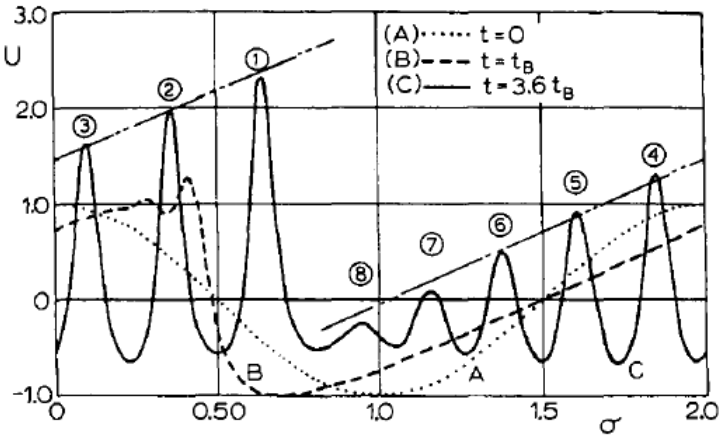
Fonte: FERMI (7)

2.3 Zabusky e Kruskal

Buscando resolver o paradoxo, Norman J. Zabusky e Martin D. Kruskal (10) tomaram o limite do contínuo no problema de Fermi-Pasta-Ulam e obtiveram a equação de Kortweg-de Vries (KdV). Suas simulações numéricas geraram objetos semelhantes a partículas fracamente interagentes, às quais eles dão o nome de sólitons. Seus resultados são mostrados na figura (2.2). Eles associaram a periodicidade do fenômeno observado em 1955 à formação dos sólitons. Por não se dispersarem, eles poderiam se rearranjar após algum tempo na configuração original. Apesar de a explicação ser incompleta, os resultados foram muito além do propósito original. Com esse trabalho de quatro páginas, Zabusky e Kruskal ressucitaram a equação de KdV e, consequentemente, os trabalhos de Russel. Ressucitar, aliás, é a palavra escolhida pelo próprio Kruskal para descrever o ocorrido, como mostra a passagem a seguir, proferida durante a comemoração dos 100 anos da publicação original de Kortweg-de Vries: "I, together with professor Norman Zabusky, was the person, who more than anyone else, resuscitated the Korteweg-de Vries equation after its long period of, if not oblivion, at least neglect."

Com a equação de KdV surgem métodos para sua solução (11); o principal deles, o método do espalhamento inverso, passa a ser empregado em outros modelos não lineares como o modelo de sine-Gordon (12) e a equação não linear de Schrödinger (13), por exemplo.

Figura 2.2 – Resultados numéricos apresentados por Zabusky e Kruskal em seu artigo. Eles deram o nome de sólitons aos morros formados com o passar do tempo, pois estes eram fracamente interagentes e não se dispersavam, parecendo-se, portanto, com partículas livres.



Fonte: ZABUSKY (10)

Com isso, o interesse em resolver exatamente as teorias em sua forma não linear se reacende (14), sendo que certas soluções passam a ser interpretadas como partículas da teoria.

2.4 Bullough e Dodd

Dentre os muitos que estudavam as propriedades dessas teorias não lineares estavam R. K. Bullough e R. K. Dodd. Estavam interessados, em particular, no estudo das chamadas teorias multi sine-Gordon no contexto proposto por Ablowitz et al (15), o que os levou a estudar equações da forma

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = F(\phi). \tag{2.1}$$

Bullough e Dodd procuravam funções $F(\phi)$ para que (2.1) tivesse infinitas cargas polinomiais conservadas (16) e conseguem mostrar que a equação

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = e^{\phi} - e^{-2\phi} \tag{2.2}$$

possuia cargas conservadas não triviais. O modelo definido por essa equação recebeu o nome de seus descobridores, passando a ser chamado de modelo de Bullough-Dodd.

Zhiber e Shabat (17) também encontram a equação de Bullough-Dodd. Seguindo uma linha de raciocínio semelhante, buscavam condições para que o grupo gerado pelas soluções

da equação (2.1) fosse não trivial.

2.5 Outras teorias integráveis

Muitas outras teorias integráveis surgiram desde a década de 1960. Dentre elas, podemos citar os compactons (18) – sólitons com suporte compacto –, instantons (19) – pseudopartículas que surgem por um instante de tempo –, modelo sigma, modelo sigma não linear, modelo de Skyrme e modelo de Skyrme-Faddeev (20–22) – relacionados a física de partículas elementares – , além de muitos outros.

Russell observando uma onda estranha nos canais da Escócia, Kortweg-De Vries redescobrindo a equação de Boussinesq, Zabusky e Kruskal tentando resolver o problema deixado por Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou; foi assim, quase que por acidente, que a área de sistemas integráveis se tornou o que é hoje.

Capítulo 3

O modelo de Bullough-Dodd

Neste capítulo, apresentarei o modelo de partida do presente trabalho. Estamos interessados em estudar deformações do modelo de Bullough-Dodd e para interpretar os resultados obtidos é fundamental entender certas propriedades das soluções desse modelo. Além disso, mostramos uma maneira mais intuitiva de se obter soluções numéricas. Esta maneira permite obter resultados importantes quando estudamos o modelo deformado.

3.1 Apresentação do modelo

O modelo de Bullough e Dodd (16) é uma teoria de campos relativística descrita pela equação de movimento

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = -e^{\phi} + e^{-2\phi}. \tag{3.1}$$

Nessa equação, c é a velocidade da luz (que doravante valerá 1) e ϕ é o campo estudado. Nota-se que se ϕ puder assumir valores complexos a transformação $\phi \to \phi + 2in\pi,\ n \in \mathbb{N}$ deixa a equação invariante, sendo assim uma simetria discreta. Tal simetria leva ao surgimento de vácuos degenerados, possibilitando a existência de cargas topológicas não triviais definidas por

$$Q_{top} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ j^0 = \frac{1}{2\pi}\left[\phi_I(x=\infty) - \phi(x=-\infty)\right], \tag{3.2}$$

com

$$j^{\mu} = \frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\phi_I}{\partial x^{\nu}}, \tag{3.3}$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é antissimétrico, $\epsilon^{01} = 1$, $x^0 = t$ e $x^1 = x$.

Essa carga topológica nos revela o número de sólitons subtraído do número de anti-sólitons presentes no sistema.

Podemos descrever esse sistema através da lagrangeana

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - e^{\phi} - \frac{1}{2}e^{-2\phi}\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\phi}\partial^\mu\bar{\phi} - e^{\bar{\phi}} - \frac{1}{2}e^{-2\bar{\phi}}\right), \tag{3.4}$$

onde $\bar{\phi}$ é o complexo conjugado do campo ϕ.

Na lagrangeana (3.4), λ é um parâmetro livre. Três valores são especialmente interessantes. Com $\lambda = 0$ eliminamos o campo complexo conjugado $\bar{\phi}$. Com $\lambda = \pm 1$ obtemos uma lagrangeana real/imaginária pura. A lagrangeana nos permite identificar claramente um potencial ($V(\phi, \bar{\phi})$) para o modelo, definido por:

$$V(\phi, \bar{\phi}) = \left(e^{\phi} + \frac{1}{2}e^{-2\phi}\right) + \lambda\left(e^{\bar{\phi}} + \frac{1}{2}e^{-2\bar{\phi}}\right). \tag{3.5}$$

As equações de movimento obtidas a partir da lagrangeana (3.4) são:

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = -e^{\phi} + e^{-2\phi} \tag{3.6}$$

$$\partial_t^2\bar{\phi} - \partial_x^2\bar{\phi} = -e^{\bar{\phi}} + e^{-2\bar{\phi}}. \tag{3.7}$$

É claro que a equação (3.6) é a própria equação do modelo de Bullough-Dodd mostrada em (3.1) com $c = 1$. Ainda assim, obtemos a equação (3.7). Como as equações (3.6) e (3.7) se relacionam por uma simples conjugação, esta não acrescenta nada à dinâmica dos campos. Porém, é interessante notar que a família de lagrangeanas a um parâmetro (3.4) gera a mesma equação de movimento (3.1) independentemente do parâmetro λ. Para simplificar os cálculos, usaremos apenas $\lambda = 0$.

3.2 Curvatura nula

Outra forma de representar o modelo que nos será bastante útil é através de uma representação de curvatura nula. Para isso, usaremos as coordenadas de cone de luz e as derivadas neste sistema, definidas como:

$$x_{\pm} \equiv \frac{t \pm x}{2} \qquad \partial_{\pm} = \partial_t \pm \partial_x \qquad \partial_+\partial_- = \partial_t^2 - \partial_x^2. \tag{3.8}$$

Introduzimos, assim, os potenciais

$$A_+ = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\phi}T_3^0 + e^{-2\phi}L_{-2}^{1/2}, \tag{3.9}$$

$$A_- = -\partial_-\phi T_3^0 + \frac{\sqrt{2}}{2}T_-^0 + L_2^{-1/2},$$

sendo a álgebra dos operadores T_m^n, $L_m^{n+1/2}$ definida no apêndice A.1.

A equação de movimento pode então ser obtida calculando-se a curvatura

$$F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-]. \tag{3.10}$$

Usando os potenciais (3.9), obtemos

$$F_{+-} = -(\partial_+ \partial_- \phi + e^{\phi} - e^{-2\phi}) T_3^0. \tag{3.11}$$

A curvatura (3.11) se anula quando vale a equação de movimento (3.6). Esse fato permite que se calcule as cargas conservadas do modelo e suas soluções.

3.3 Soluções do modelo

Encontrar soluções analíticas para esse modelo requer calculos extensos. Nessa seção, mostraremos apenas os principais resultados, sendo o procedimento completo deixado para o apêndice B.

Utilizando o método de *dressing* (23–25), podemos colocar a equação (3.6) em uma forma bilinear. Encontramos que se resolvermos as equações

$$\begin{aligned} \tau_0 \partial_+ \partial_- \tau_0 - \partial_+ \tau_0 \, \partial_- \tau_0 &= \beta \left(\tau_1^2 - \tau_0^2 \right) \\ \tau_1 \partial_+ \partial_- \tau_1 - \partial_+ \tau_1 \, \partial_- \tau_1 &= \beta \left(\tau_0 \, \tau_1 - \tau_1^2 \right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

podemos encontrar soluções de (3.6) como

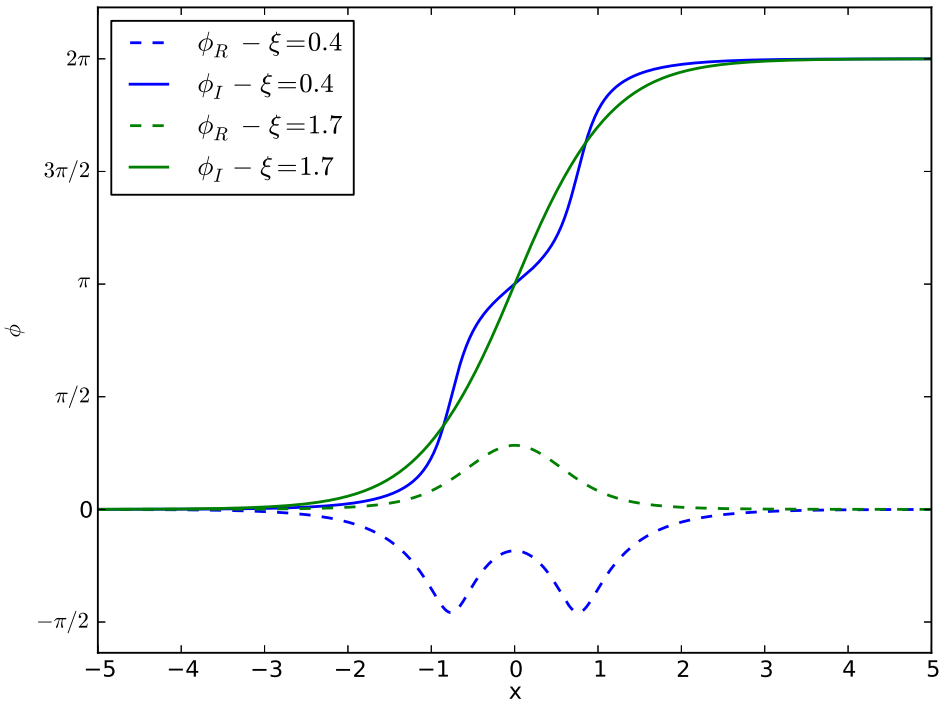
$$\phi = \phi_R + i\phi_I = \ln \frac{\tau_0}{\tau_1}, \tag{3.13}$$

onde também introduzimos os campos reais ϕ_R e ϕ_I, que são, respectivamente, as partes real e imaginária do campo ϕ.

A solução que nos interessa nesse momento é a de um sóliton. Sua expressão é mostrada a seguir em termos dos campos ϕ_R e ϕ_I e encontra-se ilustrada na figura (3.1).

$$\begin{aligned} \phi_R &= \frac{1}{2} \ln \left[1 + 3 \frac{(1 - 2\cosh(\sqrt{3}x)\cos\xi)}{(\cosh(\sqrt{3}x) + \cos\xi)^2} \right] \\ \phi_I &= \mathrm{ArcTan} \left[\frac{3\sinh(\sqrt{3}x)\sigma \sin\xi}{((\cosh(\sqrt{3}x) + \cos\xi)^2 - 3(1 + \cosh(\sqrt{3}x)\cos\xi)} \right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Figura 3.1 – Gráfico das partes real (ϕ_R) e imaginária (ϕ_I) do campo de interesse (ϕ) para dois valores do parâmetro ξ.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O parâmetro $\sigma = \pm 1$ determina se a solução é um sóliton ($\sigma \sin \xi < 0$) ou um anti-sóliton ($\sigma \sin \xi > 0$). Note que a solução é degenerada através do parâmetro real constante $\xi \in [0, 2\pi)$. Para todo $\xi \neq 0, \pi$ a solução tem a mesma energia e é regular. Além disso, vale notar que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\phi_I(x)}{\phi_R(x)} = \tan \xi \tag{3.15}$$

(3.14) é uma solução estática, sendo possível obter um sóliton viajando com velocidade constante através de um *boost* de Lorentz. Outras soluções de (3.12) são descritas no apêndice B.

3.4 Outra interpretação

Apesar de poderosa, a matemática envolvida no cálculo das soluções (3.14) é por demais técnica. Nesta seção, mostraremos uma maneira mais intuitiva de se encontrar as soluções. Essa maneira não permite encontrar as expressões analíticas, como o procedimento detal-

hado no apêndice B, mas possibilita interpretar o sistema estudado através de objetos mais familiares, tais como particulas, forças e potenciais.

3.4.1 Análogo mecânico

Se buscamos apenas soluções de um sóliton estáticas (isto é, independentes do tempo t), podemos simplificar (3.6) e escrever

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = -e^{-2\phi} + e^{\phi}, \tag{3.16}$$

ou, separando as partes real e imaginária,

$$\frac{d^2\phi_R}{dx^2}(x) = -e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I) + e^{\phi_R}\cos\phi_I \tag{3.17}$$

$$\frac{d^2\phi_I}{dx^2}(x) = e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I) + e^{\phi_R}\sin\phi_I. \tag{3.18}$$

Se identificamos x como tempo e os campos ϕ_R e ϕ_I como coordenadas, temos a Segunda Lei de Newton para uma partícula de coordenadas ϕ_R, ϕ_I. Existem duas grandezas conservadas nesse sistema que são facilmente obtidas a partir da hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_R}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_I}{dx}\right)^2 + e^{\phi_R}\cos\phi_I + \frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I)\\ +i\left[\frac{d\phi_R}{dx}\frac{d\phi_I}{dx} + e^{\phi_R}\sin\phi_I - \frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I)\right],\end{aligned} \tag{3.19}$$

obtida da lagrangeana (3.4) com $\lambda = 0$.

Como $d\mathcal{H}/dt = \partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, temos que a hamiltoniana (3.19) é conservada. Temos ainda que $\mathcal{H}$ é complexa e as partes real e imaginária devem se conservar separadamente. Ou seja,

$$\begin{aligned}E_R = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_R}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_I}{dx}\right)^2 + e^{\phi_R}\cos\phi_I + \frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I)\\ E_I = \frac{d\phi_R}{dx}\frac{d\phi_I}{dx} + e^{\phi_R}\sin\phi_I - \frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I),\end{aligned} \tag{3.20}$$

sendo essas as duas quantidades conservadas.

Note que podemos encontrar o potencial

$$V(\phi_R, \phi_I) = V_R + iV_I = \frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I) + e^{\phi_R}\cos\phi_I$$
$$+i\left[-\frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I) + e^{\phi_R}\sin\phi_I\right] \tag{3.21}$$

a partir de (3.19). Como esperado, esse potencial é equivalente ao apresentado em (3.5) com $\lambda = 0$.

Na figura (3.2) são mostradas algumas trajetórias da partícula sobre o potencial V.

As trajetórias apresentadas foram encontradas a partir de (3.14), mas podem também ser encontradas a partir de (3.20). Para isso, temos que eliminar a dependência no parâmetro x e encontrar a equação da trajetória no plano de coordenadas ϕ_R e ϕ_I. Uma breve manipulação algébrica de (3.20) nos permite escrever

$$\alpha \equiv E_R - V_R \qquad \beta \equiv E_I - V_I$$
$$\frac{d\phi_R}{dx} = \sigma\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha} \tag{3.22}$$
$$\frac{d\phi_I}{dx} = \sigma\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}, \tag{3.23}$$

sendo $\sigma = \pm 1$.

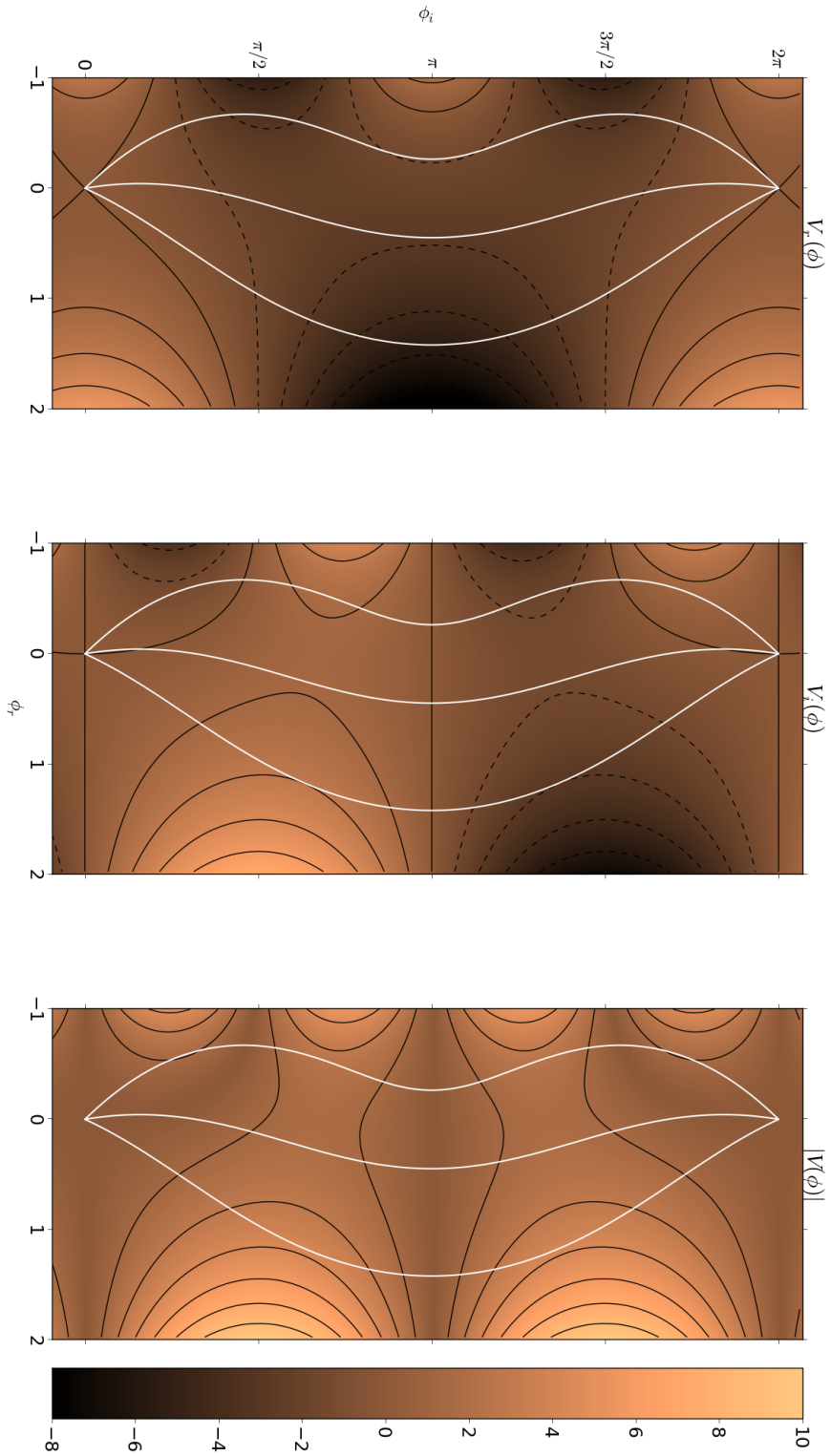
Calculando a razão entre (3.22) e (3.23), obtemos

$$\frac{d\phi_R}{d\phi_I} = \frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}}. \tag{3.24}$$

Para integrar (3.24) no caso de sólitons é conveniente tomar a condição inicial em $\phi_I = \pi$ em vez de usar o valor de ϕ_R em $\phi_I = 0$. Isso porque, quando integramos trajetórias solitônicas, conforme $\phi_I \to 0^+$, α, $\beta \to 0$, fazendo com que o lado direito de (3.24) se torne indeterminado.

Vemos na figura (3.2) que podemos interpretar o resultado (3.15) como a condição inicial da partícula em seu movimento, isto é, a direção inicial do movimento. Vemos, também, que os pontos $\phi_R = \phi_I = 0$ e $\phi_R = 0$, $\phi_I = 2\pi$ possuem alguma estrutura. Como será mostrado a seguir, esses pontos são vácuos do potencial V.

Figura 3.2 – Os mapas de cores ilustram a amplitude das partes real (V_R) e imaginária (V_I) e o módulo ($|V|$) do potencial (3.21). Três trajetórias exemplo são mostradas em branco.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.2 Vácuos do potencial

Sólitons conectam vácuos de seus potenciais. Por isso é importante estudarmos a estrutura de vácuos de nosso potencial.

Como temos um potencial complexo, calculamos as derivadas das partes real e imaginária de (3.21) separadamente. Veja:

$$\frac{\partial V_R}{\partial \phi_R} = \frac{\partial V_I}{\partial \phi_I} = -e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I) + e^{\phi_R}\cos\phi_I \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial V_R}{\partial \phi_I} = -\frac{\partial V_I}{\partial \phi_R} = -e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I) - e^{\phi_R}\sin\phi_I. \tag{3.26}$$

Como era esperado, valem as igualdades de Cauchy-Riemann. Calculamos também as segundas derivadas do potencial, tomando

$$\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_R^2} = \frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_I^2} = 2e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I) + e^{\phi_R}\cos\phi_I \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_R^2} = -\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_I^2} = -2e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I) + e^{\phi_R}\sin\phi_I. \tag{3.28}$$

Usando (3.25) e (3.26), temos que as condições para um extremo são:

$$e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I) - e^{\phi_R}\cos\phi_I = 0 \tag{3.29}$$

$$e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I) + e^{\phi_R}\sin\phi_I = 0. \tag{3.30}$$

As soluções simultâneas de (3.29) e (3.30) são:

$$(\phi_R, \phi_I) = (0, 2n\pi) \qquad e \qquad (\phi_R, \phi_I) = \left(0, \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right), \tag{3.31}$$

sendo n um inteiro.

Usando os vácuos (3.31) e as equações (3.27) e (3.28), obtemos

$$\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_R^2} = \frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_I^2} = 3 \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_R^2} = -\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_I^2} = 0, \tag{3.33}$$

para $(\phi_R, \phi_I) = (0, 2n\pi)$, e

$$\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_R^2} = \frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_I^2} = -\frac{3}{2} \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_R^2} = -\frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_I}{\partial \phi_I^2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{3.35}$$

para $(\phi_R, \phi_I) = \left(0, \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$.

Isso significa que todos os pontos extremos são pontos sela. Como visto, porém, isso não impossibilita a existência de soluções solitônicas.

Podemos agora nos perguntar quais desses vácuos podem ser conectados por um sóliton. Para termos um sóliton, quando $x \to \pm\infty$, $d\phi_R/dx = d\phi_I/dx \to 0$. Isso significa que quando a solução se aproxima dos vácuos, as quantidades conservadas são simplesmente

$$\begin{aligned} E_R &= e^{\phi_R}\cos\phi_I + \frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\cos(2\phi_I) = V_R \\ E_I &= e^{\phi_R}\sin\phi_I - \frac{1}{2}e^{-2\phi_R}\sin(2\phi_I) = V_I. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Calculando os valores de E_R e E_I sobre os vácuos obtemos

$$E_R = \frac{3}{2} \qquad E_I = 0, \qquad \text{para } (\phi_R, \phi_I) = (0, 0) \tag{3.37}$$

$$E_R = -\frac{3}{4} \qquad E_I = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad \text{para } (\phi_R, \phi_I) = \left(0, \pm\frac{2\pi}{3}\right). \tag{3.38}$$

Como E_R e E_I são quantidades conservadas, não é possível conectar quaisquer dois vácuos. Na verdade, só é possível conectar vácuos que distam de múltiplos inteiros de $2\pi I$. Apesar de não ter encontrado um argumento analítico para isso, a integração numérica de um sóliton conectando os vácuos $(0, 2\pi/3)$ e $(0, 8\pi/3)$ gerou singularidades. Isso indica que só existem sólitons do tipo mostrado em (3.14).

Capítulo 4

Quase integrabilidade e anomalias

Vamos finalmente ao objeto de estudo desse trabalho. Vamos analisar as consequências de alterar o potencial dado em (3.5) e obter o máximo de informação possível analiticamente.

4.1 Deformações do modelo de Bullough-Dodd

Definimos o potencial deformado $V^{(\epsilon)}(\phi)$

$$V^{(\epsilon)}(\phi) = V_R^{(\epsilon)} + iV_I^{(\epsilon)} = e^{\phi} + \frac{1}{2+\epsilon}e^{-(2+\epsilon)\phi}. \tag{4.1}$$

A escolha dessa deformação específica visou dois objetivos. Primeiro, buscou-se um potencial em que pudéssemos utilizar o argumento de paridade explorado em (1, 26). Segundo, essa escolha de potencial permite transitar entre os modelos de sine-Gordon e Bullough-Dodd variando o parâmetro ϵ de -1 a zero, além de corresponder a uma particula livre quando $\epsilon = -3$.

Considerando a lagrangeana (3.4) com o potencial (4.1) e $\lambda = 0$, obtemos a equação de movimento

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = -e^{\phi} + e^{-(2+\epsilon)\phi}. \tag{4.2}$$

Agora podemos nos perguntar como essa deformação afeta a estrutura de vácuos do potencial e quais as implicações dessas mudanças para as soluções solitônicas.

Repetindo a análise descrita na seção (3.4.2), obtemos que os extremos do potencial são:

$$(\phi_R, \phi_I) = \left(0, \frac{2n\pi}{3+\epsilon}\right), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Calculando a derivada segunda do potencial, obtemos

$$\frac{\partial^2 V_R^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R^2} = \frac{\partial^2 V_I^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_R^{(\epsilon)}}{\partial \phi_I^2} = (2+\epsilon)e^{-(2+\epsilon)\phi_R}\cos\left((2+\epsilon)\phi_I\right) + e^{\phi_R}\cos\phi_I \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^2 V_I^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R^2} = -\frac{\partial^2 V_R^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_I^{(\epsilon)}}{\partial \phi_I^2} = -(2+\epsilon)e^{-(2+\epsilon)\phi_R}\sin\left((2+\epsilon)\phi_I\right) + e^{\phi_R}\sin\phi_I. \tag{4.5}$$

Substituindo os vácuos (4.3) em (4.4) e (4.5), temos

$$\frac{\partial^2 V_R^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R^2} = \frac{\partial^2 V_I^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_R^{(\epsilon)}}{\partial \phi_I^2} = \cos\left(\frac{2n\pi}{3+\epsilon}\right) + (2+\epsilon)\cos\left(\frac{2+\epsilon}{3+\epsilon}2n\pi\right) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 V_I^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R^2} = -\frac{\partial^2 V_R^{(\epsilon)}}{\partial \phi_R \partial \phi_I} = -\frac{\partial^2 V_I^{(\epsilon)}}{\partial \phi_I^2} = \sin\left(\frac{2n\pi}{3+\epsilon}\right) - (2+\epsilon)\sin\left(\frac{2+\epsilon}{3+\epsilon}2n\pi\right). \tag{4.7}$$

Temos também as quantidades conservadas

$$\begin{aligned} E_R^{(\epsilon)} &= e^{\phi_R}\cos\phi_I + \frac{1}{2+\epsilon}e^{-(2+\epsilon)\phi_R}\cos((2+\epsilon)\phi_I) = V_R^{(\epsilon)} \\ E_I^{(\epsilon)} &= e^{\phi_R}\sin\phi_I - \frac{1}{2+\epsilon}e^{-(2+\epsilon)\phi_R}\sin((2+\epsilon)\phi_I) = V_I^{(\epsilon)}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

que, nos vácuos, valem

$$E_R^{(\epsilon)} = \cos\left(\frac{2n\pi}{3+\epsilon}\right) + \frac{1}{2+\epsilon}\cos\left(\frac{2+\epsilon}{3+\epsilon}2n\pi\right) \tag{4.9}$$

$$E_I^{(\epsilon)} = \sin\left(\frac{2n\pi}{3+\epsilon}\right) - \frac{1}{2+\epsilon}\sin\left(\frac{2+\epsilon}{3+\epsilon}2n\pi\right). \tag{4.10}$$

Nem os vácuos, nem as equações (4.6) e (4.7), nem as quantidades conservadas (4.9) e (4.10) fornecem informações quanto a quais vácuos devem ser conectados. Considerando o contexto de teoria de perturbação que pretendemos explorar, é tentador conectar os vácuos $(0,0)$ e $(0, \frac{6\pi}{3+\epsilon})$, pois com $\epsilon = 0$ retomamos os vácuos do modelo não deformado. Isto, porém, não é válido em geral. Como mostraremos mais adiante em detalhes, a escolha dos vácuos a serem conectados está vinculada à escolha de ϵ.

4.2 Curvatura nula com potenciais deformados

Podemos alterar os potenciais da conexão (3.9) obtendo

$$\tilde{A}_+ = -2\left(e^{\phi} + \frac{1}{2+\epsilon}e^{-(2+\epsilon)\phi}\right)b_1 + \left(e^{\phi} - e^{-(2+\epsilon)\phi}\right)F_1 \tag{4.11}$$

$$\tilde{A}_- = -\partial_-\phi F_0 + b_{-1}, \tag{4.12}$$

onde F_n e b_n são elementos da base conveniente (definida em (A.2)) que usaremos daqui para frente.

Como consequência, a curvatura (3.10) para o modelo deformado é

$$F_{+-} = -(\partial_+\partial_-\phi + e^{\phi} - e^{-(2+\epsilon)\phi})F_0 - X\partial_-\phi F_1, \tag{4.13}$$

onde definimos

$$X \equiv \epsilon\frac{3+\epsilon}{2+\epsilon}e^{-(2+\epsilon)\phi}. \tag{4.14}$$

Note que não podemos mais anular completamente a curvatura. Temos que, quando vale a equação de movimento (4.2), a curvatura assume o valor $F_{+-} = -X\partial_-\phi F_1$.

4.3 Mudança de gauge

Sabemos que a transformação de gauge

$$\begin{aligned} a_\pm &= g\tilde{A}_\pm g^{-1} - \partial_\pm g g^{-1} \\ F_{+-} &\to f_{+-} = gF_{+-}g^{-1} \\ g &= exp\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\zeta_n F_n + \chi_n b_n)\right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

deixa as equações de movimento invariantes.

Podemos escolher g de modo a eliminar a componente em F de $\tilde{A}_-$. Para isso escolhemos um elemento do grupo da forma

$$g = exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\zeta_n F_n\right). \tag{4.16}$$

Usando esse g obtemos a_-

$$\begin{aligned} a_- =& \sqrt{3} b_{-1} \\ &+ (\sqrt{3}\zeta_1 - \partial_- \phi) F_0 \\ &+ (\sqrt{3}\zeta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^2 - \zeta_1 \partial_- \phi - \partial_- \zeta_1) F_1 + (2\zeta_1 \partial_- \phi - \sqrt{3}\zeta_1^2) b_1 \\ &+ (\sqrt{3}\zeta_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^3 - \zeta_2 \partial_- \phi + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_1^2 \partial_- \phi - \partial_- \zeta_2) F_2 \\ &+ .... \end{aligned} \tag{4.17}$$

Note que podemos escrever

$$\begin{aligned} & a_-^{(-1)} = b_{-1} \\ & a_-^{(0)} = -\left[b_{-1} \, , \, \zeta_1 F_1 \right] - \omega \, \partial_- \phi \, F_0 \\ & a_-^{(1)} = -\left[b_{-1} \, , \, \zeta_2 F_2 \right] + \frac{1}{2} \left[\left[b_{-1} \, , \, \zeta_1 F_1 \right] , \, \zeta_1 F_1 \right] - \partial_- \phi \left[\zeta_1 F_1 \, , \, F_0 \right] - \partial_- \left(\zeta_1 F_1 \right) \\ & \vdots \end{aligned} \tag{4.18}$$

sendo que

$$a_- = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_-^{(n)}. \tag{4.19}$$

Podemos então determinar ζ de modo a eliminar as componentes em F como pretendíamos. Com isso obtemos os valores a seguir.

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \partial_- \phi \\ \zeta_2 &= \frac{1}{6}((\partial_- \phi)^2 + 2\partial_-^2 \phi) \\ \zeta_3 &= \frac{1}{36\sqrt{3}}(-5(\partial_- \phi)^3 + 18 \partial_- \phi \partial_-^2 \phi + 12 \partial_-^3 \phi) \\ &... \quad . \end{aligned}$$

Ao encontrarmos todos os valores ζ_n, temos fixada uma transformação de gauge. Apli-

camos então a transformação a $\tilde{A}_+$ para obter

$$\begin{aligned} a_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(-e^{\phi} + \gamma e^{-(2+\epsilon)\phi} - \partial^2_{+-}\phi)F_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(2e^{\phi} + \gamma e^{-(2+\epsilon)\phi})b_1 \\ -\frac{1}{3}(\partial_-\phi(2e^{\phi} + \gamma e^{-(2+\epsilon)\phi} + \partial^2_{+-}\phi) + \partial^3_{+--}\phi)F_2 \\ +\frac{1}{6\sqrt{3}}((\partial_-\phi)^2(-e^{\phi} + \gamma e^{-(2+\epsilon)\phi} + 3\partial_{+-}\phi) \\ -2\partial_-\phi\partial^3_{+--}\phi - 2((3e^{\phi} + 2\partial_{+-}\phi)\partial^2_{--}\phi + \partial^4_{+---}\phi))F_3 + ... \end{aligned} \tag{4.20}$$

Para encontrar a curvatura transformada só precisamos calcular

$$gF_1g^{-1} = \sum_{N=1}^{+\infty} \alpha^{(N)} b_N + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta^{(n)} F_n, \tag{4.21}$$

sendo g o mesmo de (4.16). Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} = 0 \\ \alpha^{(5)} = 4\left(\partial_-\phi\right)^2\left(\partial^2_-\phi\right) - 4\left(\partial^2_-\phi\right)^2 - 2\left(\partial_-\phi\right)\left(\partial^3_-\phi\right) - 2\left(\partial^4_-\phi\right), \end{aligned} \tag{4.22}$$

e não precisamos calcular os valores de $\beta^{(n)}$ para os próximos passos.

Usamos agora as relações dadas em (A.4) para mostrar que o comutador da expressão (3.10) não gera termos em $\mathcal{B}$. O termo a_- foi construído para conter apenas termos em $\mathcal{B}$. O termo a_+ tem componentes sobre toda a álgebra $\mathcal{A}$. Mas o comutador $[\mathcal{B}, \mathcal{A}] \in \mathcal{F}$. Portanto, se focarmos nossa atenção apenas nas componentes na direção $\mathcal{B}$ não precisamos calcular o comutador. Podemos agora calcular as cargas quasi-conservadas. Lembrando que

$$a_\pm = \frac{a_t \pm a_x}{2} \tag{4.23}$$

$$\partial_+ a^{(b)}_- - \partial_- a^{(b)}_+ = f^{(b)}_{+-} \to \partial_t a^{(b)}_x - \partial_x a^{(b)}_t = \frac{1}{2} f^{(b)}_{+-}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(b)}_{+-} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_-\phi X \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{(6n\pm1)} b_{6n\pm1} \\ Q = \int_{-\infty}^{\infty} a^{(b)}_x dx = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(6n\pm1)} b_{6n\pm1} \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$Q^{(6n\pm1)}(t) - Q^{(6n\pm1)}(-\infty) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_-\phi X \alpha^{(6n\pm1)}, \tag{4.25}$$

onde denotamos como $a^{(b)}_i$ os termos a_i quando desconsideradas as componentes nas direções F_n. Cada $Q^{(6n\pm1)}$ é individualmente uma carga quasi-conservada.

4.4 Condição de invariância

Todos os cálculos mostrados até agora são válidos para qualquer valor de ϵ. Mostraremos agora que nem todos os valores são interessantes por não possuirem soluções solitônicas.

Para esse fim, basta exigirmos que a equação de movimento (4.2) tenha uma simetria discreta associada a ela. Essa simetria é necessária para a existência de infinitos vácuos degenerados, possibilitando a existência de (anti-)sólitons.

Tomamos então $\phi = \tilde{\phi} + \chi$, sendo $\tilde{\phi}$ o novo campo e χ uma constante, e substituimos em (4.2):

$$\partial_t^2 \tilde{\phi} - \partial_x^2 \tilde{\phi} = -e^{\tilde{\phi}+\chi} + e^{-(2+\epsilon)(\tilde{\phi}+\chi)}. \tag{4.26}$$

As funções $e^{\tilde{\phi}+\chi}$ e $e^{-(2+\epsilon)(\tilde{\phi}+\chi)}$ são linearmente independentes para qualquer $\epsilon \neq -3$ e, por isso, devem ser invariantes separadamente. Isto é,

$$\begin{aligned} -e^{\tilde{\phi}+\chi} + e^{-(2+\epsilon)(\tilde{\phi}+\chi)} &\equiv -e^{\tilde{\phi}} + e^{-(2+\epsilon)\tilde{\phi}} \\ -e^{\tilde{\phi}}\left(e^{\chi}-1\right) + e^{-(2+\epsilon)\tilde{\phi}}\left(e^{-(2+\epsilon)\chi}-1\right) &\equiv 0 \\ \iff \left(e^{\chi}-1\right) = 0 \quad &\text{e} \quad \left(e^{-(2+\epsilon)\chi}-1\right) = 0 \qquad (4.27) \\ \chi = 2q\pi I \quad &\text{e} \quad (2+\epsilon)\chi = 2p\pi I \\ &\Rightarrow \epsilon = \frac{p}{q} - 2,\ p,q \in \mathbb{Z}. \qquad (4.28) \end{aligned}$$

Como visto em (4.28), para que (4.2) seja invariante por uma translação discreta, ϵ deve ser um número racional. Considerando, convenientemente, $\epsilon = (p-2q)/q$, com mdc $(p,q) = 1$, podemos reescrever (4.2).

$$\begin{aligned} \partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi &= -e^{\phi} + e^{-\left(2+\frac{p-2q}{q}\right)\phi} \\ \phi \to q\phi \qquad & x,t \to \sqrt{q}x, \sqrt{q}t \\ \partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi &= -e^{q\phi} + e^{-p\phi}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

(4.29) é um subconjunto da familia de modelos a dois parâmetros estudada por Bullough e Dodd em seu trabalho. (16) O fato de ϵ ser racional implica que nosso objetivo original de deformar continuamente o modelo de Bullough-Dodd no modelo de Sine-Gordon não pode ser atingido, pois apesar de pertencerem a uma mesma familia de modelos, não há um mapa contínuo entre os modelos.

4.5 O argumento de paridade

Nesta seção, mostraremos um argumento analítico que diz que a anomalia se anula para certos valores dos parâmetros. Isso será feito em duas etapas. Primeiro, mostraremos que determinados parâmetros tornam a solução de dois sólitons um autoestado da transformação de paridade. Depois, mostraremos que este fato implica que a anomalia se anula assintoticamente.

4.5.1 Paridade da solução de dois sólitons

Como mostrado no apêndice B, a solução da equação de hirota (3.12) no setor de dois sólitons é ($z_i = \omega_i\, z_i'$), seguindo que

$$\begin{aligned}
\tau_0 = \quad & 1 - 4\,a_1\,e^{\Gamma_1} - 4\,a_2\,e^{\Gamma_2} + a_1^2\,e^{2\,\Gamma_1} + a_2^2\,e^{2\,\Gamma_2} \\
+ \quad & 8\,a_1\,a_2\,\frac{2\,z_1^4 - z_1^2\,z_2^2 + 2\,z_2^4}{(z_1+z_2)^2\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)}\,e^{\Gamma_1+\Gamma_2} \\
- \quad & 4\,a_1^2\,a_2\,\frac{(z_1-z_2)^2\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)}{(z_1+z_2)^2\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)}\,e^{2\,\Gamma_1+\Gamma_2} \\
- \quad & 4\,a_1\,a_2^2\,\frac{(z_1-z_2)^2\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)}{(z_1+z_2)^2\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)}\,e^{\Gamma_1+2\,\Gamma_2} \\
+ \quad & a_1^2\,a_2^2\,\frac{(z_1-z_2)^4\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)^2}{(z_1+z_2)^4\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)^2}\,e^{2\,\Gamma_1+2\Gamma_2} \\
\tau_1 = \quad & 1 + 2\,a_1\,e^{\Gamma_1} + 2\,a_2\,e^{\Gamma_2} + a_1^2\,e^{2\,\Gamma_1} + a_2^2\,e^{2\,\Gamma_2} \\
+ \quad & 4\,a_1\,a_2\,\frac{z_1^4 + 4\,z_1^2\,z_2^2 + z_2^4}{(z_1+z_2)^2\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)}\,e^{\Gamma_1+\Gamma_2} \\
+ \quad & 2\,a_1^2\,a_2\,\frac{(z_1-z_2)^2\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)}{(z_1+z_2)^2\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)}\,e^{2\,\Gamma_1+\Gamma_2} \\
+ \quad & 2\,a_1\,a_2^2\,\frac{(z_1-z_2)^2\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)}{(z_1+z_2)^2\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)}\,e^{\Gamma_1+2\,\Gamma_2} \\
+ \quad & a_1^2\,a_2^2\,\frac{(z_1-z_2)^4\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)^2}{(z_1+z_2)^4\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)^2}\,e^{2\,\Gamma_1+2\Gamma_2},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

sendo que

$$\Gamma_i = \sqrt{3}\,\left(z_i\,x_+ - \frac{x_-}{z_i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}\,\left[\cos\theta_i\,(x - v_i\,t) + i\,\sin\theta_i\left(c\,t - \frac{v_i}{c}\,x\right)\right], \tag{4.31}$$

parametrizamos $z_i = e^{-\alpha_i + i\,\theta_i}$ e definimos $v_i = c\,\tanh\alpha_i$.

Definimos agora $a_i\,e^{\Gamma_i} \equiv e^{W_i}$, com

$$W_i \equiv \Lambda_i + i\,\Omega_i \tag{4.32}$$

e

$$\Lambda_i = \frac{\sqrt{3}\,\cos\theta_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}\,(x - v_i\,t) + \rho_i \qquad\qquad \Omega_i = \frac{\sqrt{3}\,\sin\theta_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}\left(c\,t - \frac{v_i}{c}\,x\right) + \xi_i. \tag{4.33}$$

Note que a solução de dois sólitons tem 8 parâmetros reais: v_i, θ_i, ρ_i e ξ_i, com $i = 1, 2$.

Introduzimos agora as quantidades

$$\begin{aligned} e^{\Delta(v_i,\theta_i) + i\,\delta(v_i,\theta_i)} &\equiv \frac{(z_1 - z_2)^2\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)}{(z_1 + z_2)^2\,(z_1^2 + z_1\,z_2 + z_2^2)} \\ c_0\,(v_i,\theta_i) &\equiv \frac{2\,z_1^4 - z_1^2\,z_2^2 + 2\,z_2^4}{(z_1 - z_2)^2\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)} \\ c_1\,(v_i,\theta_i) &\equiv \frac{z_1^4 + 4\,z_1^2\,z_2^2 + z_2^4}{(z_1 - z_2)^2\,(z_1^2 - z_1\,z_2 + z_2^2)}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \tau_0 = \;& 1 - 4\,e^{W_1} - 4\,e^{W_2} + e^{2\,W_1} + e^{2\,W_2} \\ + \;& e^{W_1+W_2+\Delta+i\delta}\left[8\,c_0 - 4\,e^{W_1} - 4\,e^{W_2} + e^{W_1+W_2+\Delta+i\delta}\right] \\ \tau_1 = \;& 1 + 2\,e^{W_1} + 2\,e^{W_2} + e^{2\,W_1} + e^{2\,W_2} \\ + \;& e^{W_1+W_2+\Delta+i\delta}\left[4\,c_1 + 2\,e^{W_1} + 2\,e^{W_2} + e^{W_1+W_2+\Delta+i\delta}\right]. \end{aligned}$$

Note que Λ_i são combinações lineares de x e t. Introduzimos agora as novas coordenadas de espaço e tempo

$$X_+ \equiv \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Delta \qquad\qquad X_- \equiv \Lambda_1 - \Lambda_2. \tag{4.35}$$

Vale notar que, enquanto $v_1 \neq v_2$, essas são coordenadas independentes. De fato, pode-se checar que se $v_1 = v_2$ a solução de dois sólitons se reduz a de um sóliton. Adicionalmente, introduzimos

$$\Omega_+ \equiv \Omega_1 + \Omega_2 + \delta \qquad\qquad \Omega_- \equiv \Omega_1 - \Omega_2 \tag{4.36}$$

e

$$W_+ \equiv X_+ + i\,\Omega_+ = W_1 + W_2 + \Delta + i\,\delta \qquad W_- \equiv X_- + i\,\Omega_- = W_1 - W_2. \tag{4.37}$$

Assim,

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(W_+ + W_- - \Delta - i\,\delta\right) \qquad W_2 = \frac{1}{2}\left(W_+ - W_- - \Delta - i\,\delta\right). \tag{4.38}$$

Portanto,

$$\frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{2\,\cosh W_+ + 8\,c_0 - 4\,e^{W_1}\,\left(1 + e^{-W_+}\right) - 4\,e^{W_2}\,\left(1 + e^{-W_+}\right) + e^{2\,W_1 - W_+} + e^{2\,W_2 - W_+}}{2\,\cosh W_+ + 4\,c_1 + 2\,e^{W_1}\,\left(1 + e^{-W_+}\right) + 2\,e^{W_2}\,\left(1 + e^{-W_+}\right) + e^{2\,W_1 - W_+} + e^{2\,W_2 - W_+}},$$

e, assim,

$$\frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{\cosh W_+ + 4\,c_0 - 8\,e^{-\frac{1}{2}(\Delta + i\,\delta)}\,\cosh\left(\frac{W_+}{2}\right)\,\cosh\left(\frac{W_-}{2}\right) + e^{-(\Delta + i\,\delta)}\,\cosh W_-}{\cosh W_+ + 2\,c_1 + 4\,e^{-\frac{1}{2}(\Delta + i\,\delta)}\,\cosh\left(\frac{W_+}{2}\right)\,\cosh\left(\frac{W_-}{2}\right) + e^{-(\Delta + i\,\delta)}\,\cosh W_-}. \tag{4.39}$$

Como Ω_i e, portanto, $\Omega_\pm$ são funções lineares de x e t, e consequentemente funções lineares de $X_\pm$, podemos escrever

$$\Omega_\pm = \omega_\pm + \gamma_\pm, \tag{4.40}$$

com $\omega_\pm$ sendo funções lineares homogêneas de $X_\pm$, isto é,

$$\omega_\pm = d_\pm^+\,X_+ + d_\pm^-\,X_-, \tag{4.41}$$

sendo que $\gamma_\pm$ são constantes.

Como $\Omega_\pm$ depende dos parâmetros ξ_i, $i = 1, 2$, podemos usar $\gamma_\pm$ como os parâmetros livres da solução de dois sólitons. Os 8 parâmetros reais da solução de dois sólitons são, então, v_i, θ_i, ρ_i, com $i = 1, 2$ e $\gamma_\pm$.

Considere agora a transformação de paridade espaço-temporal

$$P: \qquad (X_+\,,\,X_-) \to (-X_+\,,\,-X_-)\,. \tag{4.42}$$

Temos que

$$\cosh\left(\alpha W_\pm\right) = \quad \cosh\left(\alpha X_\pm\right)\,\cos\left(\alpha\left(\omega_\pm + \gamma_\pm\right)\right) + i\,\sinh\left(\alpha X_\pm\right)\,\sin\left(\alpha\left(\omega_\pm + \gamma_\pm\right)\right),$$

para alguma constante α. Como sob P, $\omega_\pm \to -\omega_\pm$, temos que

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha W_\pm) \to\ & \cosh(\alpha X_\pm)\cos(\alpha(\omega_\pm - \gamma_\pm)) + i\sinh(\alpha X_\pm)\sin(\alpha(\omega_\pm - \gamma_\pm)) \\ =\ & \cosh(\alpha X_\pm)\cos(\alpha(\omega_\pm + \gamma_\pm) - 2\alpha\gamma_\pm) \\ +\ & i\sinh(\alpha X_\pm)\sin(\alpha(\omega_\pm + \gamma_\pm) - 2\alpha\gamma_\pm)\,. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad 2\,\alpha\,\gamma_\pm = (2n_\pm + 1)\,\pi \quad \text{então} \qquad \cosh(\alpha W_\pm) \to -\cosh(\alpha W_\pm) \\ &\text{se} \quad 2\,\alpha\,\gamma_\pm = 2n_\pm\,\pi \quad \text{então} \qquad \cosh(\alpha W_\pm) \to +\cosh(\alpha W_\pm)\,, \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde $n_\pm$ são inteiros.

Queremos que $\frac{\tau_0}{\tau_1}$ seja um autoestado da transformação de paridade, ou no máximo transforme em alguma coisa proporcional a seu complexo conjugado. No entanto, os termos constantes $4\,c_0$ e $2\,c_1$ em (4.39) não se alteram sob P, e não têm nenhuma relação obvia com outros termos para z_1 e z_2 arbitrários. Assim, a única possibilidade plausível é ter o denominador e o numerador em (4.39) invariantes sob P separadamente. Isso implica que $\cosh W_\pm$ devem ser invariantes sob P, e $\cosh\left(\frac{W_\pm}{2}\right)$ podem ou não mudar de sinal sob P. Então, se tomamos $\gamma_\pm = n_\pm\,\pi$, segue que $\cosh W_\pm$ são invariantes sob P. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} &\cosh\left(\frac{W_\pm}{2}\right) \to \quad +\cosh\left(\frac{W_\pm}{2}\right) \qquad \text{se ambos } n_+ \text{ e } n_- \text{ são inteiros pares} \\ &\cosh\left(\frac{W_\pm}{2}\right) \to \quad -\cosh\left(\frac{W_\pm}{2}\right) \qquad \text{se ambos } n_+ \text{ e } n_- \text{ são inteiros ímpares.} \end{aligned} \tag{4.45}$$

A afirmação final é:

A quantidade $\frac{\tau_0}{\tau_1}$ é par sob a paridade P, definida em (4.42), se as fases $\gamma_\pm$ satisfazem $\gamma_\pm = 2\,m_\pm\,\pi$ ou $\gamma_\pm = (2\,m_\pm + 1)\,\pi$, para inteiros arbitrários $m_\pm$.

4.5.2 Efeito da paridade sobre a anomalia

Assumimos agora que temos uma solução de dois sólitons invariante sob a transformação de paridade

$$P: \qquad (\tilde{x}\,,\,\tilde{t}) \to (-\tilde{x}\,,\,-\tilde{t}) \qquad \tilde{x} = x - x_\Delta \qquad \tilde{t} = t - t_\Delta, \tag{4.46}$$

onde os valores de x_Δ e t_Δ dependem dos parâmetros da solução e

$$P(\phi) = \phi, \tag{4.47}$$

quando aplicamos P na solução ϕ.

Usamos também o seguinte automorfismo de ordem dois da álgebra

$$\Sigma(b_{6n\pm1}) = -b_{6n\pm1} \qquad \Sigma(F_{6n+j}) = (-1)^j\, F_{6n+j} \qquad j = 0,1,2,3,4,5 \tag{4.48}$$

e introduzimos a transformação composta

$$\Omega \equiv P\,\Sigma. \tag{4.49}$$

Suscede que A_- dado em (4.12) satisfaz

$$\Omega(A_-) = -A_-. \tag{4.50}$$

De (4.18) temos que

$$\Omega\left(a_-^{(0)}\right) = [\,b_{-1}\,,\,\Omega(\zeta_1 F_1)\,] + \omega\,\partial_-\phi\,F_0, \tag{4.51}$$

e, então,

$$(1+\Omega)\,a_-^{(0)} = -\,[\,b_{-1}\,,\,(1-\Omega)(\zeta_1 F_1)\,]\,. \tag{4.52}$$

Mas temos que o lado esquerdo tem que ser uma combinação de b_N's e o lado direito dos F_n's pois é um comutador com b_{-1}. Portanto, ambos os lados devem se anular e, como nada além dos b_N's comuta com b_{-1}, temos que

$$(1+\Omega)\,a_-^{(0)} = 0 \qquad (1-\Omega)(\zeta_1 F_1) = 0. \tag{4.53}$$

Agora que $\zeta_1 F_1$ é par sob Ω, temos de (4.18) que

$$(1+\Omega)\,a_-^{(1)} = -\,[\,b_{-1}\,,\,(1-\Omega)(\zeta_2 F_2)\,]\,. \tag{4.54}$$

Usando os mesmos argumentos, temos que

$$(1+\Omega)\,a_-^{(1)} = 0 \qquad (1-\Omega)(\zeta_2 F_2) = 0. \tag{4.55}$$

Continuando esse argumento, temos que todos $\zeta_n \mathcal{F}_n$'s são pares sob Ω e, portanto,

$$\Omega\left(g\right) = g. \tag{4.56}$$

Usamos agora a forma traço na álgebra de loop como

$$\mathrm{Tr}\left(\star\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\lambda}{\lambda} \, \mathrm{tr}\left(\star\right), \tag{4.57}$$

onde tr é o traço usual das matrizes 3×3 *.

Então, obtemos que

$$\mathrm{Tr}\left(b_N \, b_M\right) = \delta_{N+M,0} \qquad\qquad \mathrm{Tr}\left(b_N \, F_n\right) = 0, \tag{4.58}$$

e então, de (4.21)

$$\alpha^{(N)} = \mathrm{Tr}\left(b_{-N} \, g \, F_1 \, g^{-1}\right). \tag{4.59}$$

Como o traço é invariante sob Σ, temos

$$\alpha^{(N)} = \mathrm{Tr}\left(b_{-N} \, \Sigma\left(g\right) \, F_1 \, \Sigma\left(g^{-1}\right)\right), \tag{4.60}$$

então,

$$P\left(\alpha^{(N)}\right) = \mathrm{Tr}\left(b_{-N} \, \Omega\left(g\right) \, F_1 \, \Omega\left(g^{-1}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(b_{-N} \, g \, F_1 \, g^{-1}\right) = \alpha^{(N)}, \tag{4.61}$$

e $\alpha^{(N)}$ é par sob a paridade P. Pode-se verificar de (4.22) que $\alpha^{(5)}$ é de fato par.

Se o potencial deformado $V^{(\epsilon)}$ é par sob P, então X, definido em (4.14), é par sob P. De fato, como ϕ é par sob P segue que todo funcional de ϕ será par. Como $\partial_- \phi$ é ímpar sob P, segue que o integrando de (4.25) é ímpar sob P. Portanto,

$$\int_{-\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0} d\tilde{t} \int_{-\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_0} d\tilde{x} \, \partial_- \phi \, X \, \alpha^{(N)} = 0, \tag{4.62}$$

onde $\tilde{x}_0$ e $\tilde{t}_0$ são valores escolhidos para $\tilde{x}$ e $\tilde{t}$ respectivamente, isto é, estamos integrando sobre um retângulo centrado em $(x_\Delta \, , \, t_\Delta)$. Assim, as cargas satisfazem uma simetria especular

$$Q^{(N)}\left(\tilde{t}_0\right) = Q^{(N)}\left(-\tilde{t}_0\right), \tag{4.63}$$

para qualquer $\tilde{t}_0$.

*Há um isomorfismo entre a álgebra $A_2^{(2)}$ que utilizamos a álgebra das matrizes mostrada em (A.4)

Capítulo 5

Cálculo Numérico

Neste capítulo, abordaremos os métodos de integração numérica utilizados nas simulações. Foram dois os métodos utilizados: Euler e Runge-Kutta de quarta ordem.

5.1 Método de Euler

Este é um método perigoso. As condições para convergência e estabilidade são muito sensíveis e frequentemente resultam em soluções sem sentido. Dito isso, devo dizer, também, que só o utilizei porque, após inúmeros testes, o método se mostrou adequado ao modelo, além de muito mais rápido.

O método consiste na discretização mais simples das derivadas temporais presentes nas equações de movimento. Ilustraremos o uso do método com duas equações de movimento úteis à solução do problema:

$$\partial_t \psi = \partial_x^2 \psi + F(\psi, t) \tag{5.1}$$

$$\partial_t^2 \psi = \partial_x^2 \psi + G(\psi, \partial_t \psi, \partial_x \psi, t). \tag{5.2}$$

As funções $F(\psi, t)$ e $G(\psi, \partial_t \psi, \partial_x \psi, t)$ são arbitrárias.

Passamos à discretização das equações (5.1) e (5.2). Escolhemos trabalhar com a forma mais simples de discretização: pontos igualmente espaçados ao longo do eixo x. Fazemos a identificação

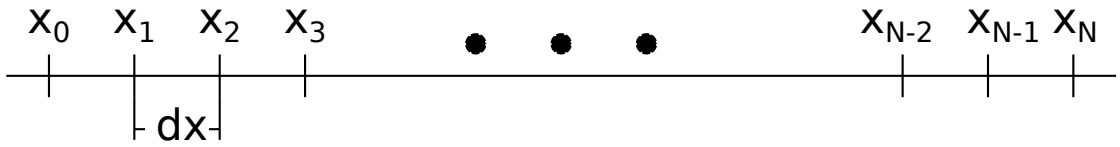
$$x_i = (i - N/2) * dx \qquad \psi_i(t) = \psi(x_i, t) \qquad i \in 0, 1, ..., N, \tag{5.3}$$

onde dx é o espaço entre dois pontos consecutivos no eixo x (ver figura (5.1)).

Precisamos definir, também, as condições de contorno. Usaremos que

$$\psi_0(t) = y_0(t) \qquad \psi_N(t) = y_N(t). \tag{5.4}$$

Figura 5.1 – Discretização do eixo x. Cada ponto $x_i = (i - N/2) * dx$, onde $N+1$ é o número total de pontos da discretização e dx o espaço entre dois pontos consecutivos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazemos, agora, a primeira aproximação. Em vez de resolver as equações de movimento (5.1) e (5.2), escrevemos as equações

$$\frac{d\psi_i}{dt}(t) = \partial_x^2\psi(x_i,t) + F(\psi_i(t),t) \tag{5.5}$$

$$\frac{d^2\psi_i}{dt^2}(t) = \partial_x^2\psi(x_i,t) + G(\psi_i(t),\partial_t\psi(x_i,t),\partial_x\psi(x_i,t),t), \tag{5.6}$$

onde $i \in 1, 2, ..., N-1$, pois já assumimos que ψ_0 e ψ_N são as condições de contorno.

Note que temos que definir o que significa $\partial_x^2\psi(x_i,t)$, $\partial_x\psi(x_i,t)$ e $\partial_t\psi(x_i,t)$, pois a variável ψ foi substituida por seu valor nos pontos x_i. Usaremos que

$$\partial_x^2\psi(x_i,t) \equiv \frac{\psi_{i+1}(t) - 2\psi_i(t) + \psi_{i-1}(t)}{dx^2} + \mathcal{O}(dx^2) \tag{5.7}$$

$$\partial_x\psi(x_i,t) \equiv \frac{\psi_{i+1}(t) - \psi_{i-1}(t)}{2dx} + \mathcal{O}(dx^2) \tag{5.8}$$

$$\partial_t\psi(x_i,t) \equiv \frac{d\psi_i}{dt}(t), \tag{5.9}$$

onde $\mathcal{O}(a)$ significa que a ordem dominante do erro é a.

Nas equações (5.7) e (5.8) usamos a aproximação de diferenças finitas centrais; o método de Euler consiste em aplicar o mesmo tipo de aproximação às derivadas temporais, isto é,

$$\frac{d\psi_i}{dt}(t) \equiv \frac{\psi_i(t+dt) - \psi_i(t)}{dt} + \mathcal{O}(dt) \tag{5.10}$$

$$\frac{d^2\psi_i}{dt^2}(t) \equiv \frac{\psi_i(t+dt) - 2\psi_i(t) + \psi_i(t-dt)}{dt^2} + \mathcal{O}(dt^2), \tag{5.11}$$

onde dt é o passo temporal utilizado na integração.

A equação (5.10) é uma aproximação de diferença finita a frente e a equação (5.11) é a mesma aproximação usada na equação (5.7), mas aplicada à discretização do tempo.

De (5.5), (5.7) e (5.10) podemos escrever

$$\frac{\psi_i(t+dt) - \psi_i(t)}{dt} = \frac{\psi_{i+1}(t) - 2\psi_i(t) + \psi_{i-1}(t)}{dx^2} + F(\psi_i(t),t). \tag{5.12}$$

Isolando o termo $\psi_i(t+dt)$, obtemos

$$\psi_i(t+dt) = \left(\frac{\psi_{i+1}(t) - 2\psi_i(t) + \psi_{i-1}(t)}{dx^2} + F(\psi_i(t), t)\right) * dt + \psi_i(t). \tag{5.13}$$

A equação (5.13) fornece uma maneira de obter os valores do campo em um tempo $t+dt$ a partir dos valores do campo no tempo t. Esse é o método de Euler aplicado à equação (5.1). De forma similar, usando (5.6), (5.7) e (5.11), obtemos

$$\psi_i(t+dt) = \left(\frac{\psi_{i+1}(t) - 2\psi_i(t) + \psi_{i-1}(t)}{dx^2} + G(\psi, t)\right) * dt^2 + 2\psi_i(t) - \psi_i(t-dt), \tag{5.14}$$

onde simplificamos a notação da função G.

Note que $\psi_i(t+dt)$ depende dos valores do campo ψ nos tempos t e $t-dt$, mas a condição inicial de uma equação de segunda ordem normalmente envolve $\psi(t=0)$ e $d\psi/dt(t=0)$. Para resolver isso usaremos o método de Runge-Kutta, explicado na seção seguinte.

Para que (5.13) e (5.14) convirjam, dx e dt devem obedecer certas restrições. No caso mais simples, em que $F(\psi, t) = 0$ e $G(\psi, \partial_t\psi, \partial_x\psi, t) = 0$, a condição é*

$$dt \leq \frac{dx^2}{2}. \tag{5.15}$$

Como o método é muito sensível a erros numéricos, a igualdade é descartada. Quando as funções F e G não são triviais a análise deve ser mais cuidadosa e feita caso a caso. Uma condição que funcionou bem nesse trabalho foi $dt = dx^2/3$.

5.2 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

O método descrito a seguir é um dos mais conhecidos e utilizados para a integração numérica de equações diferenciais. Em 1895, Carl Runge (28) introduz a familia à qual o método pertence. Poucos anos depois, em 1901, Martin Wilhelm Kutta (29) descreveu o esquema de integração de quarta ordem (isto é, com $\mathcal{O}(dt^4)$) utilizado no presente trabalho.

Trata-se de um método de integração explícito bastante estável, preciso e confiável. Ele é aplicável a equações de primeira ordem e, como queremos usá-lo para integrar a equação (5.6), precisaremos de alguns passos adicionais.

*Ver (27), por exemplo.

Podemos transformar uma equação diferencial de segunda ordem em duas equações diferenciais de primeira ordem de diversas maneiras. Utilizaremos a mais simples. Definindo $u_i = d\psi_i/dt$, temos

$$\frac{du_i}{dt}(t) = \partial_x^2\psi(x_i,t) + G(\psi_i(t), u_i(t), \partial_x\psi(x_i,t), t) = A_{u_i}(\mathbf{X},t) \tag{5.16}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt}(t) = u_i(t) = A_{\psi_i}(\mathbf{X},t) \tag{5.17}$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X},t), \tag{5.18}$$

sendo que $\mathbf{A} = (A_{\psi_0}, ..., A_{\psi_N}, A_{u_0}, ..., A_{u_N})$, $\mathbf{X} = (\psi_0, ..., \psi_N, u_0, ..., u_N)$.

Com essas definições podemos descrever o método.

Conhecidos os valores $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$:

- Calcule $\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{A}(\mathbf{X},t)$
- Calcule $\boldsymbol{k_2} = \boldsymbol{A}(\mathbf{X} + \boldsymbol{k_1}dt/2, t + dt/2)$
- Calcule $\boldsymbol{k_3} = \boldsymbol{A}(\mathbf{X} + \boldsymbol{k_2}dt/2, t + dt/2)$
- Calcule $\boldsymbol{k_4} = \boldsymbol{A}(\mathbf{X} + \boldsymbol{k_3}, t + dt)$
- Calcule $\boldsymbol{k_f} = (\boldsymbol{k_1} + 2\boldsymbol{k_2} + 2\boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{k_4})/6$
- Calcule $\mathbf{X}(t + dt) = \mathbf{X}(t) + dt\boldsymbol{k_f}$

O último passo nos dá os valores de $\mathbf{X}$ no tempo $t + dt$ conhecidos apenas os valores no instante t.

Resta ainda determinar a condição inicial adequada, pois, como veremos a seguir, conseguimos obter o valor de nosso campo de interesse $\phi(x, t = 0)$ para um sóliton estático, mas não temos informação sobre a derivada temporal de um sóliton em movimento. Devemos lembrar, então, que (3.1) é invariante por transformações de Lorentz, o que nos permite encontrar uma relação simples entre a derivada temporal e a derivada espacial do campo ϕ. Para um sóliton viajando com velocidade constante, temos que $\phi = \phi((x - vt)/\sqrt{1 - v^2})$. Considerando velocidades pequenas, podemos aproximar a configuração espacial de um sóliton em movimento pela configuração espacial de um sóliton estático

$$\phi((x - vt)/\sqrt{1 - v^2}) \approx \phi(x). \tag{5.19}$$

Além disso,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -v\frac{\partial\phi}{\partial x}. \tag{5.20}$$

Ou seja, conhecida a configuração inicial do sóliton estático, podemos obter a derivada temporal usando a aproximação (5.19) e a relação (5.20). Com isso, podemos usar o método de Runge-Kutta para obter o valor do campo no tempo dt, necessário para usar o método de Euler.

5.3 Descida sobre o gradiente

Precisamos encontrar uma solução estática para que possamos usar os métodos descritos para evoluir a equação de movimento. Para isso, usaremos o método de descida sobre o gradiente (em inglês, *gradient descent method*). Esse método é capaz de encontrar a configuração do campo com a menor energia dada a condição de contorno e, como sugere o nome, utiliza-se do gradiente do funcional da ação para atingir o mínimo local de forma bastante rápida.

Genericamente, para um campo $\psi = \psi(x)$, o método se resume a resolver a equação

$$\partial_\tau \psi = -\nabla_\psi E(\psi(x)), \tag{5.21}$$

onde $E(\psi)$ é o funcional energia que queremos minimizar e o operador ∇_ψ é o gradiente com relação a ψ, definido a partir de

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \lim_{\delta \to 0} \frac{E(\psi + \delta\alpha) - E(\psi)}{\delta} = \nabla_\psi E(\psi) \cdot \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\nabla_\psi E(\psi)\right)(x)\alpha(x)dx, \tag{5.22}$$

dada uma função $\alpha(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\alpha(x)dx = 1. \tag{5.23}$$

Se pudermos escrever nosso funcional na forma

$$E\left[\psi(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\psi, \partial_x \psi)dx, \tag{5.24}$$

conseguimos encontrar facilmente a expressão para o gradiente.

Expandindo $E(\psi + \delta\alpha)$ e trabalhando os termos (já assumindo que (5.24) seja válida), obtemos

$$(\nabla_\psi E)(x) = \left[\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\partial_x \psi)}\right]. \tag{5.25}$$

Como o gradiente indica a direção de máximo crescimento do funcional, a equação envolve $-\nabla_\psi S$, o que leva ao decrescimo do funcional a cada passo temporal. O tempo τ sobre o qual

integramos é artificial. Ele nos dá uma parametrização sobre as configurações intermediárias do campo, mas não tem sentido físico nesse método.

Aplicando isso a nosso problema, temos

$$E\left[\phi(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + e^{\phi} + \frac{1}{2+\epsilon}e^{-(2+\epsilon)\phi}dx \tag{5.26}$$

$$(\nabla_{\phi}E)(x) = e^{\phi} - e^{-(2+\epsilon)\phi} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{5.27}$$

$$\partial_{\tau}\phi = -\nabla_{\phi}E = -e^{\phi} + e^{-(2+\epsilon)\phi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}. \tag{5.28}$$

A equação (5.28) é equivalente a (5.1) e pode ser integrada através do método de Euler. O resultado será uma solução estática da equação de movimento que respeita as condições de contorno fornecidas ao método.

Apesar de correta, essa demonstração não nos dá pistas sobre a física por trás do método. Assim, apresento uma segunda derivação, que é menos formal, mas mais intuitiva que a primeira. Considere a equação de movimento (4.2) com um termo de dissipação adicional $\gamma\partial_t\phi$

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = -e^{\phi} + e^{-(2+\epsilon)\phi} - \gamma\partial_t\phi. \tag{5.29}$$

Quando $\gamma \to +\infty$, o termo de segunda derivada temporal se torna muito menor que o termo em primeira derivada e pode ser desprezado. Fazendo a mudança de variáveis $\tau = t/\gamma$ reobtemos (5.28). Essa interpretação nos permite dizer que (5.28) esconde um mecanismo de dissipação, como esperado de um método que reduz a energia do sistema.

Capítulo 6

Resultados numéricos

Neste capítulo, mostraremos os resultados obtidos quando combinamos tudo o que foi discutido até o momento. Começamos ilustrando as soluções que surgem quando utilizamos o método da descida sobre o gradiente para vários valores de ϵ. Depois, mostramos algumas colisões entre sólitons obtidos dessa maneira. Finalmente, mostramos os resultados do cálculo numérico da anomalia.

6.1 Campos para vários ϵ

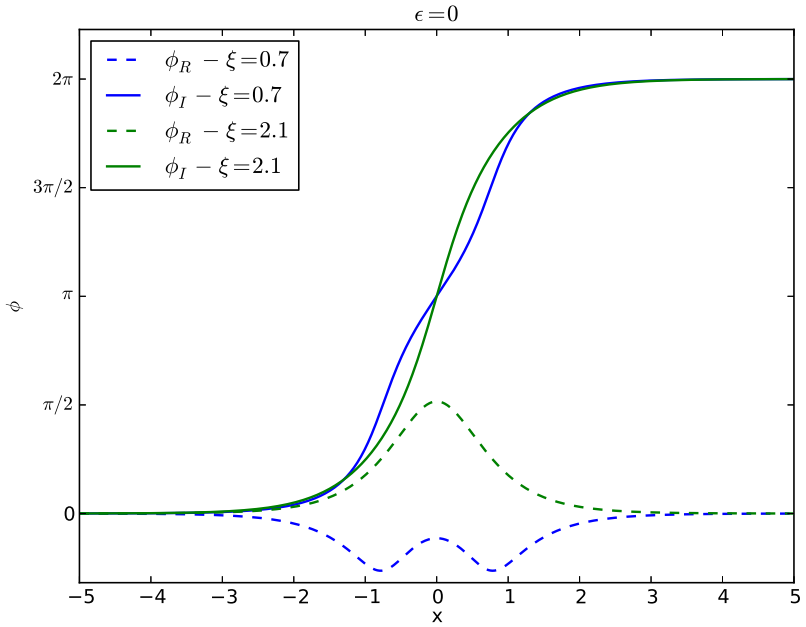
Utilizamos o método da descida sobre o gradiente para obter soluções do modelo deformado para vários valores de ϵ. Assim como o modelo de Bullough-Dodd, todas as deformações apresentam degenerescência em um parâmetro. Como não sabemos a dependência exata das soluções com esse parâmetro, utilizamos como semente do método de minimização uma solução do modelo não deformado e nomeamos o resultado usando o valor do parâmetro no campo semente. Assim, se iniciamos o método de minimização para $\epsilon = 1$ usando a solução do modelo de Bullough-Dodd com $\xi = 0.7$, o resultado da minimização será considerado a solução do modelo $\epsilon = 1$ com parâmetro $\xi = 0.7$. Nas simulações, $x_{max} = -x_{min} = 12.5$ correspondendo a 2501 pontos igualmente espaçados em intervalos de $dx = 0.01$.

Quando buscamos soluções para os modelos $\epsilon = \pm 0.5$, optamos por manter a equação (4.2) sem reescalas. Assim, as soluções conectam os vácuos $(0, 0)$ e $(0, 4\pi)$. Para iniciar o método nesses casos usamos soluções do modelo não deformado multiplicando apenas a parte imaginária por 2.

Em (6.1), temos o campo para o modelo não deformado calculado para dois valores de ξ. Pudemos ajustar a curva analítica àquela obtida pelo método de minimização com um ajuste quase perfeito ($R^2 \approx 1$), sendo ξ o único parâmetro livre. Esse resultado não é surpreendente, pois a semente para o método foi uma versão pouco modificada da curva analítica. De fato, a mudança foi forçada às bordas para que o campo assumisse os valores $\phi(x_{min}) = 0$ e

$\phi(x_{max}) = 2\pi i$. Isso serve para mostrar que o método de descida sobre o gradiente não gera soluções discrepantes das esperadas.

Figura 6.1 – Soluções exemplo para o modelo não deformado. Essas curvas foram obtidas através do método de minimização e são idênticas às soluções analíticas correspondentes. Na legenda, $\phi_R - \xi = 0.7$ indica que a curva azul tracejada é a parte real do campo ϕ com parâmetro ξ valendo 0.7.



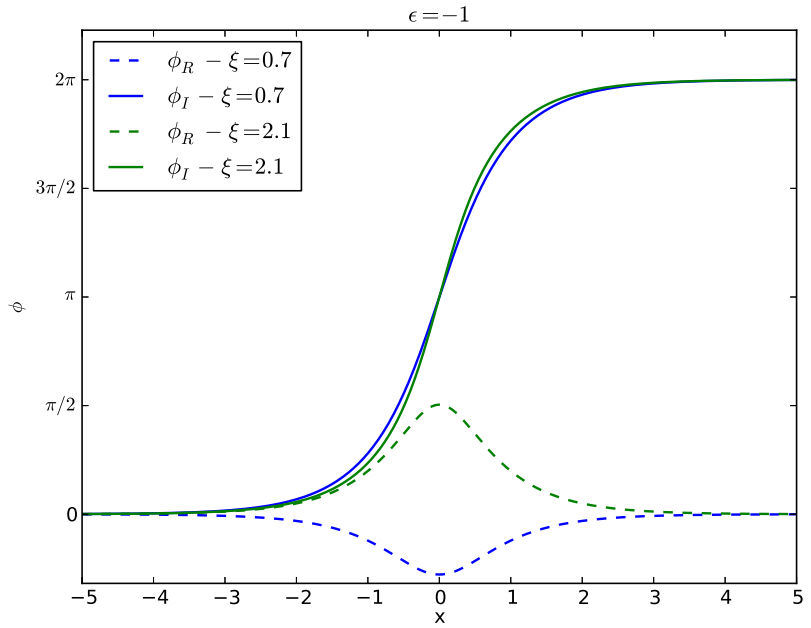
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em (6.2), mostramos o campo gerado pela minimização do modelo com $\epsilon = -1$, correspondente ao modelo de sine-Gordon complexo. Soluções analíticas desse modelo são conhecidas e uma comparação quantitativa foi possível por meio do parâmetro livre das soluções solitônicas do modelo. Novamente houve grande concordancia entre os resultados analíticos e numéricos. Vale ressaltar que partimos de um solução do modelo de Bullough-Dodd e obtivemos uma solução concordante com a analítica.

Em (6.3), mostramos os campos obtidos numericamente para $\epsilon = 1$. Esse é o primeiro modelo apresentado cujas soluções analíticas não são conhecidas. Podemos identificar um padrão nas soluções. Para $\epsilon = -1$, quando $\xi = 0.7$ a parte real do campo apresenta um único mínimo; para $\epsilon = 0$, dois mínimos; para $\epsilon = 1$, três mínimos; para $\epsilon = 2$ (figura (6.4)), quatro mínimos. Lembrando que o expoente deformado é $-(2+\epsilon)$, temos uma relação direta entre o número de mínimos e o expoente. Além disso, para todos esses valores de ϵ, $q = 1$ ($\epsilon = p/q - 2$) e a parte real para $\xi = 2.1$ apresenta um único máximo.

É interessante notar que todas as configurações obtidas com valores inteiros de ϵ estão concentradas no intervalo de $x \approx -3$ a $x \approx 3$.

Figura 6.2 – Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = -1$ obtidas através do método de minimização. Esse é um importante teste para nosso modelo, pois $\epsilon = -1$ corresponde ao modelo de sine-Gordon complexo. As curvas obtidas são idênticas às soluções analíticas correspondentes.



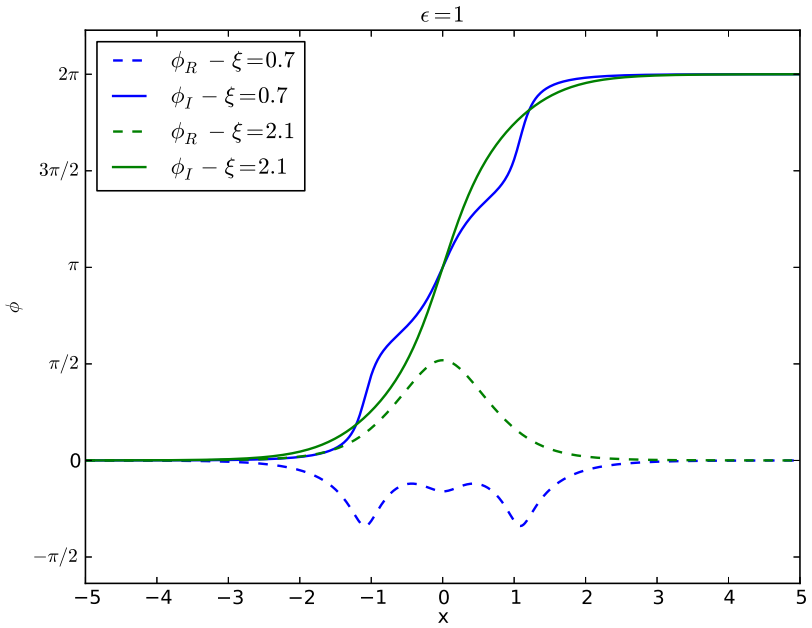
Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, tomando $\epsilon = \pm 1/2$ vemos que as soluções apresentam algumas diferenças marcantes se comparadas àquelas obtidas com valores inteiros de ϵ. A solução está concentrada num intervalo que se estende de $x \approx -4$ a $x \approx 4$. Lembrando que quando reescalamos o modelo em (4.29) o fator de reescala no espaço era $\sqrt{q}$ e que para $\epsilon = \pm 1/2$ temos $q = 2$, podemos relacionar o tamanho dos intervalos, pois $3\sqrt{2} \approx 4$.

Interessantemente, quando $\epsilon = 1/2$ $(p = 5,\ q = 2)$, temos 5 mínimos na parte real para $\xi = 0.7$ e 2 máximos quando $\xi = 2.1$. Para $\epsilon = -1/2$ $(p = 3,\ q = 2)$, temos 3 mínimos e 2 máximos, respectivamente.

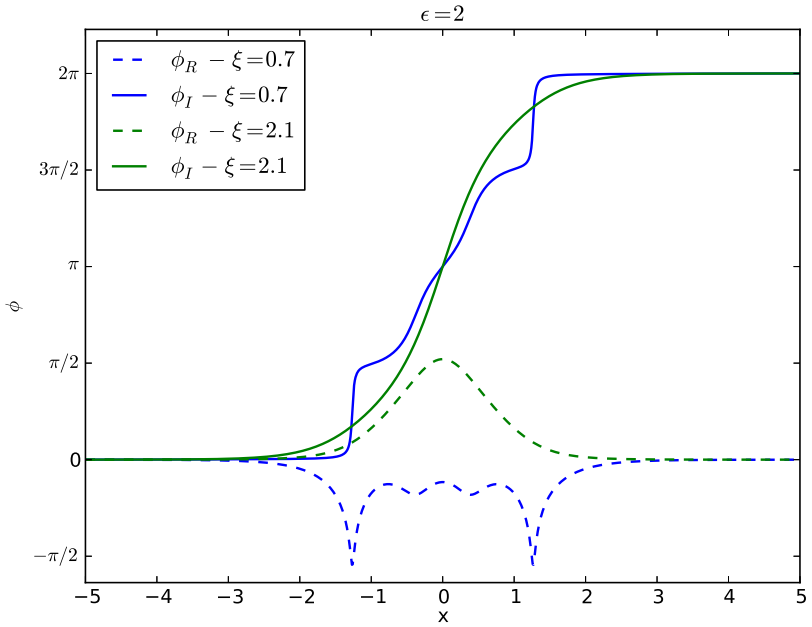
A escolha dos parâmetros $\xi = 0.7$ e $\xi = 2.1$ foi proposital. Lembrando da interpretação de ξ como o ângulo que determina a direção inicial do movimento no espaço (ϕ_R, ϕ_I), há uma distinção entre as regiões com $\phi_R < 0$ $(0 < \xi < \pi/2)$ e $\phi_R > 0$ $(\pi/2 < \xi < \pi)$. Em cada uma das regiões, o termo dominante para a dinâmica do campo é um. Para $\phi_R > 0$, e^{ϕ} domina sobre $e^{-(2+\epsilon)\phi}$ e o inverso ocorre para $\phi_R < 0$.

Figura 6.3 – Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = 1$ obtidas através do método de minimização. Esse é o primeiro dos modelos mostrados que não tem representação de curvatura nula conhecida (não sabemos sequer se uma existe). Apesar disso, apresenta soluções solitônicas.



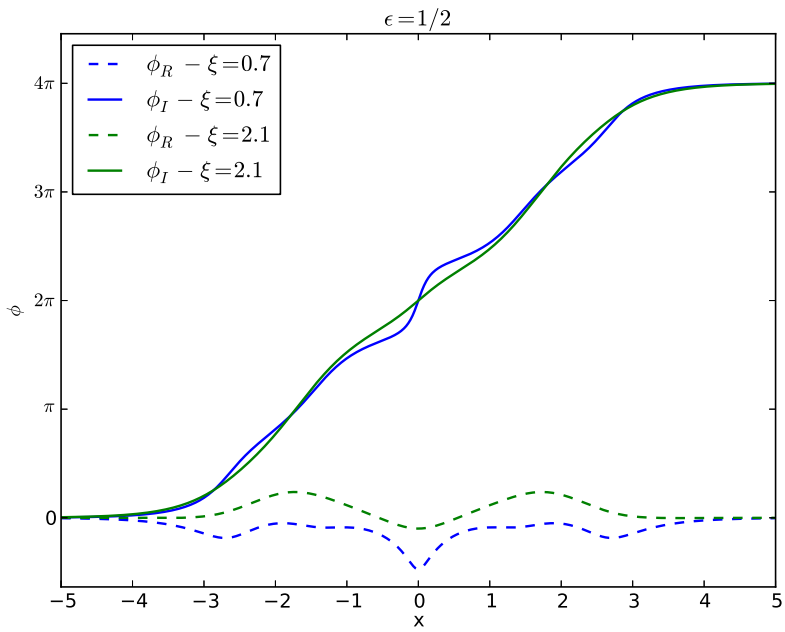
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.4 – Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = 2$ obtidas através do método de minimização. Note a estrutura interna da solução.



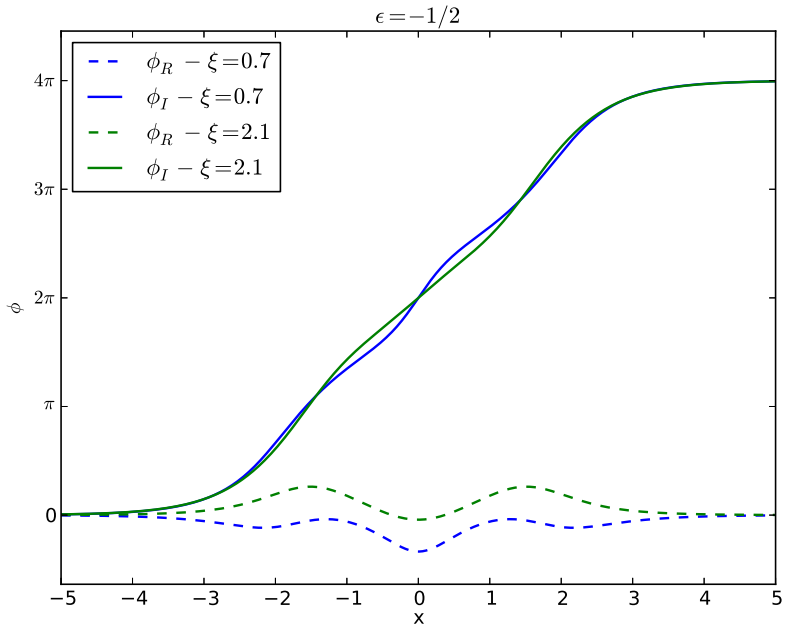
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.5 – Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = 1/2$ obtidas através do método de minimização.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.6 – Soluções exemplo para o modelo $\epsilon = -1/2$ obtidas através do método de minimização.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Algumas colisões

Uma vez calculadas as soluções numéricas de um modelo, podemos fundir duas delas e colidi-las. Os resultados são mostrados nos gráficos a seguir, onde mostramos apenas a parte real dos campos. Observamos que a interação foi repulsiva em todos os modelos. Sendo assim, em nenhum momento as soluções se cruzaram umas sobre as outras.

Em todas as colisões, os parâmetros utilizados foram $v_1 = -v_2 = 0.02$, $\xi_1 = 0.9$, $\xi_2 = 1.9$, sendo que o índice 1 refere-se ao sóliton da esquerda e 2 se refere ao sóliton da direita. Em $t = 0$ os sólitons estavam sobre as posições ± 6.5. A rede de pontos era composta por 5001 pontos espaçados por $dx = 0.01$ e o passo temporal foi de $dt = dx^2/3 \approx 3 * 10^{-5}$. Além disso, absorvemos a radiação gerada nas colisões por meio de um termo de atrito viscoso nas bordas.

Novamente, começamos com o modelo não deformado. Na figura (6.7), temos o campo em três instantes de tempo. Em $t = 70$, os sólitons estão se aproximando para a colisão e ainda interagem fracamente. Seu movimento é praticamente o mesmo de sólitons livres. Quando $t = 160$, os sólitons estão próximos o bastante para a força de interação ser importante em sua dinâmica. Nesse momento podemos dizer que a colisão está em curso. Por fim, em $t = 320$, a colisão já terminou e os sólitons se afastam quase sem interação. Podemos ver que a interação promoveu a troca da forma dos sólitons (os valores ξ_1 e ξ_2).

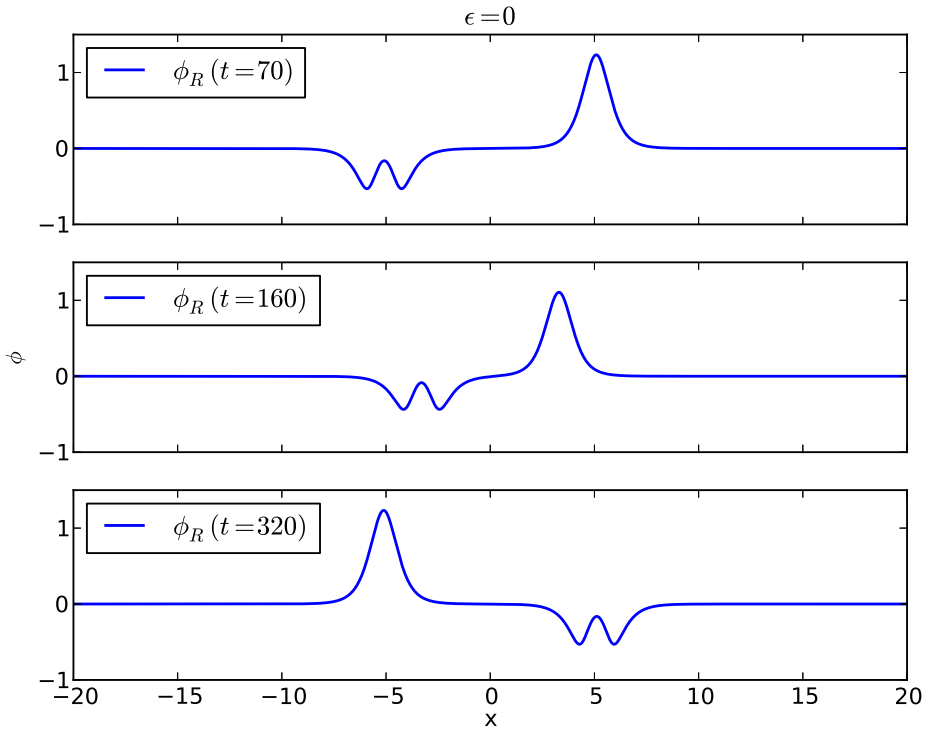
O mesmo comportamento é observado nos modelos $\epsilon = -1$ (figura (6.8)), $\epsilon = 1$ (figura (6.9)), e $\epsilon = 2$ (figura (6.10)).

Nas colisões com $\epsilon = \pm 1/2$ (figuras (6.11) e (6.12)), vemos que em $t = 160$ os sólitons estão no fim da colisão (e não no começo, como as anteriores). Isso acontece pelo maior tamanho efetivo, promovendo a interação mais cedo que nos demais casos.

6.3 Anomalias

Nas figuras (6.13) e (6.14), mostramos o resultado da integração numérica da carga $Q^{(5)}$ - definida em (4.25) - para o modelo $\epsilon = 1$. Não mostramos para os demais modelos pois são todos equivalentes. Além dos resultados mostrados aqui, calculamos essa carga para todos os pares (ξ_1, ξ_2), $\xi_i \in \{0.6, 0.7, \ldots, 2.1\}$, $i = 1, 2$. Podemos ver que durante a colisão o valor da carga se altera, mas, ao fim, retorna para o valor original. Os valores dos parâmetros,

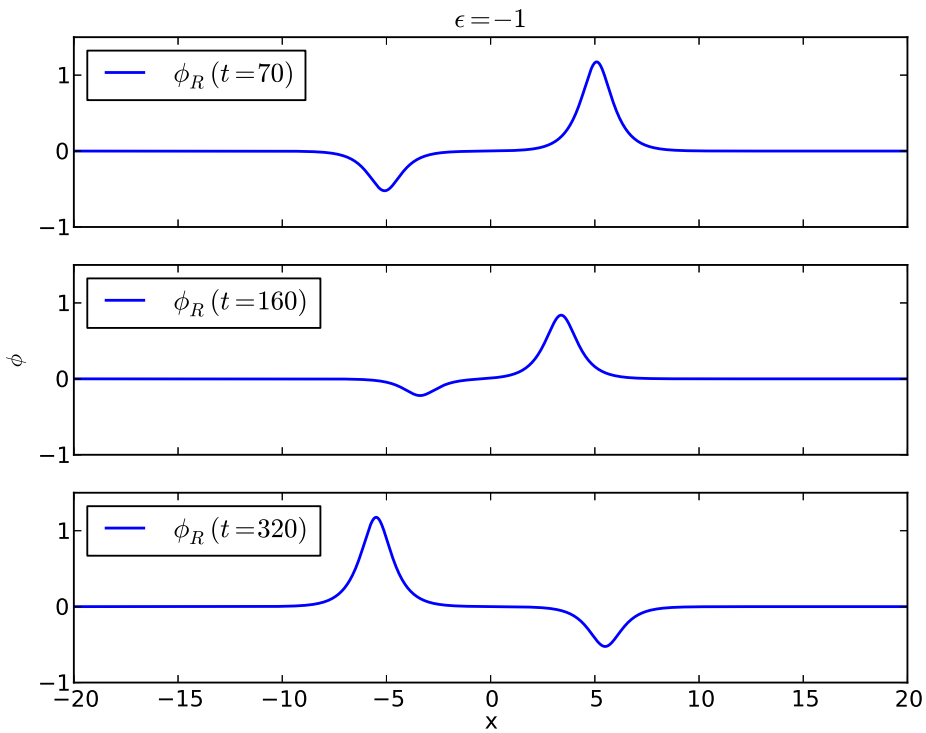
Figura 6.7 – Colisão simulada entre sólitons do modelo integrável. Em $t = 70$ os sólitons estão afastados e ainda não há interação. Em $t = 160$ a interação se inicia com a deformação dos sólitons. Em $t = 320$ a colisão resultou na troca de posições dos sólitons.



Fonte: Elaborada pelo autor.

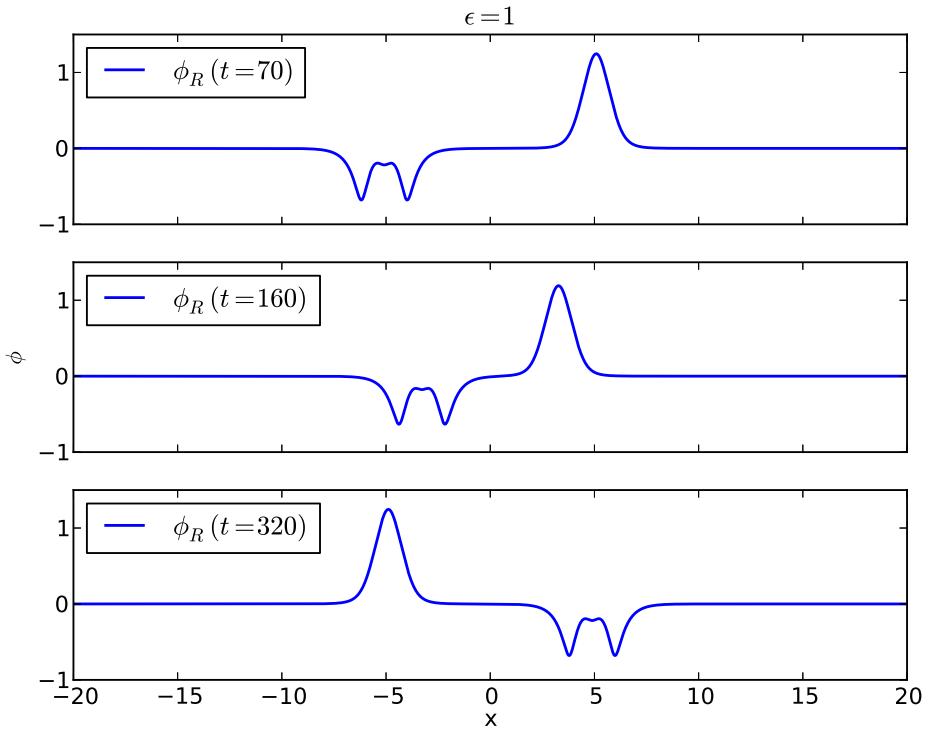
porém, não são aqueles previstos pelo argumento de paridade descrito na seção (4.5). Dessa forma, a anomalia se anula independente do argumento de paridade, indicando a existência de outras simetrias não triviais.

Figura 6.8 – Colisão simulada entre sólitons do modelo de sine-Gordon ($\epsilon = -1$). A deformação das soluções durante a interação é muito clara nesse caso.



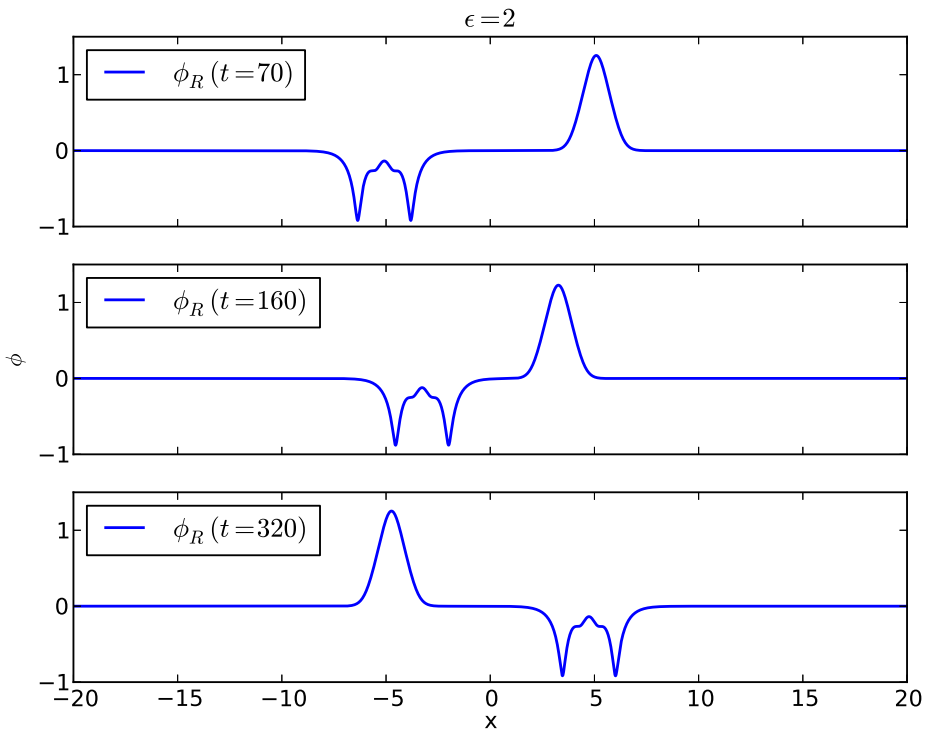
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.9 – Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = 1$.



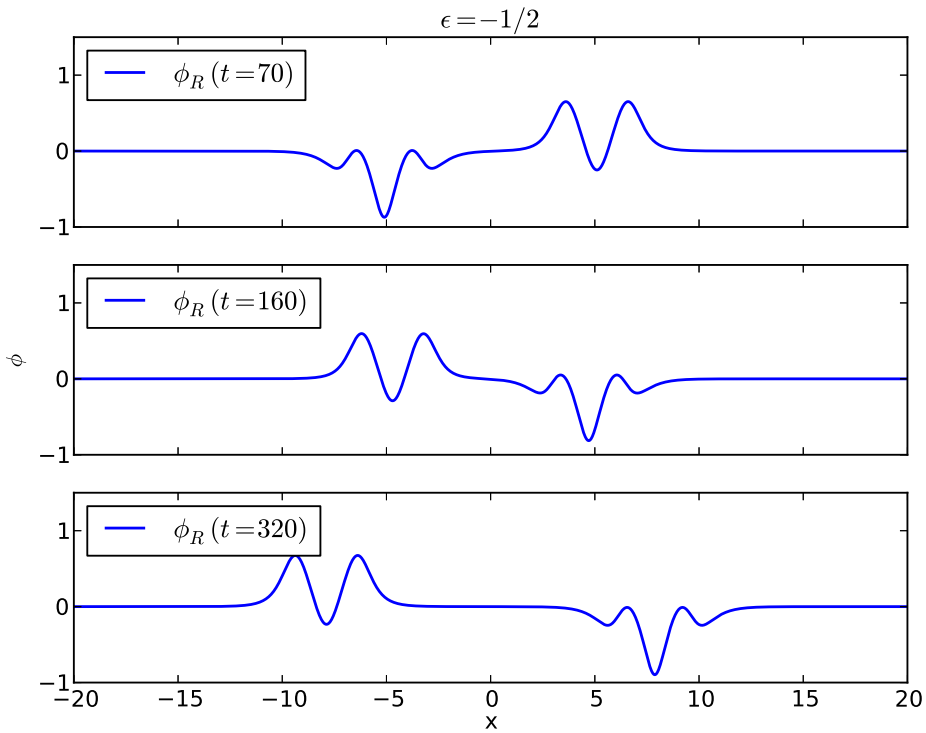
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.10 – Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = 2$.



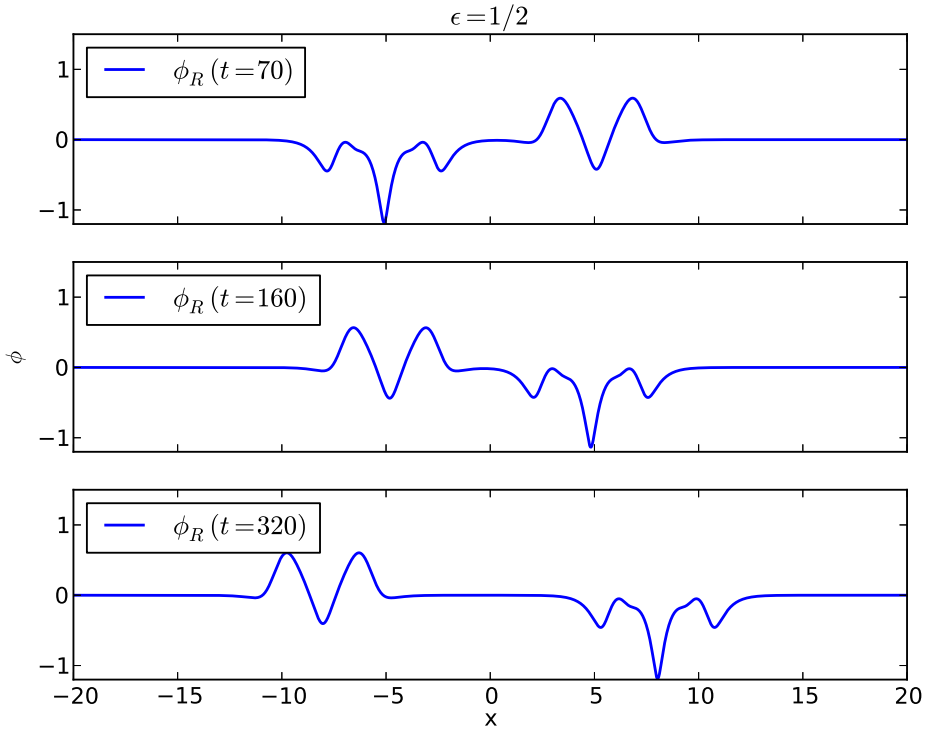
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.11 – Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = -1/2$. Por serem mais extensos a interação entre os sólitons se inicia antes que nos modelos apresentados até então.



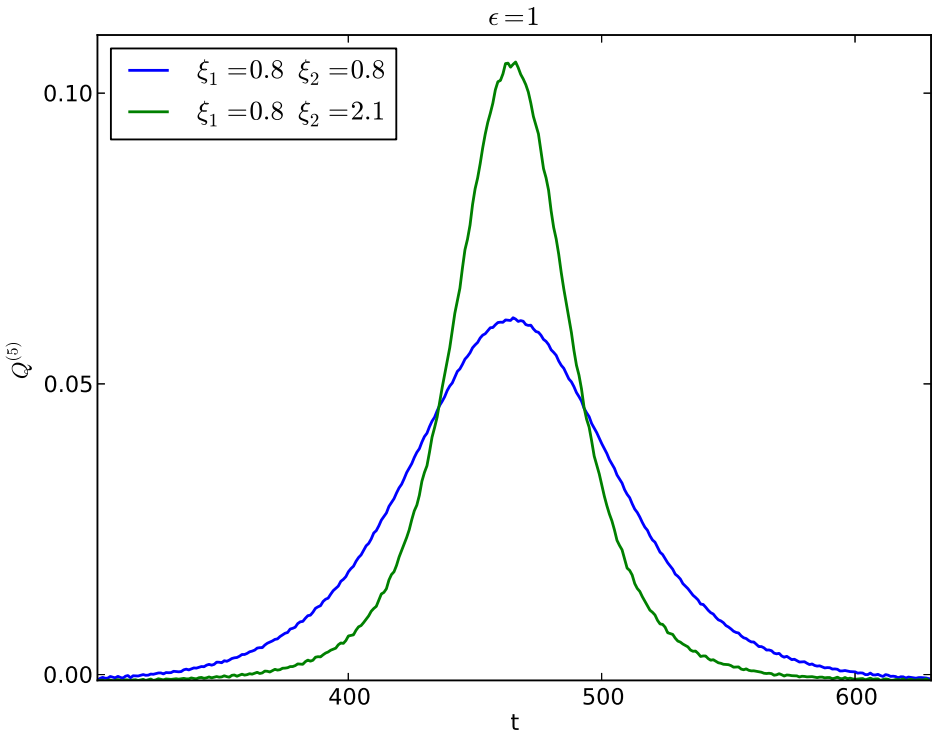
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.12 – Colisão simulada entre sólitons do modelo $\epsilon = 1/2$.



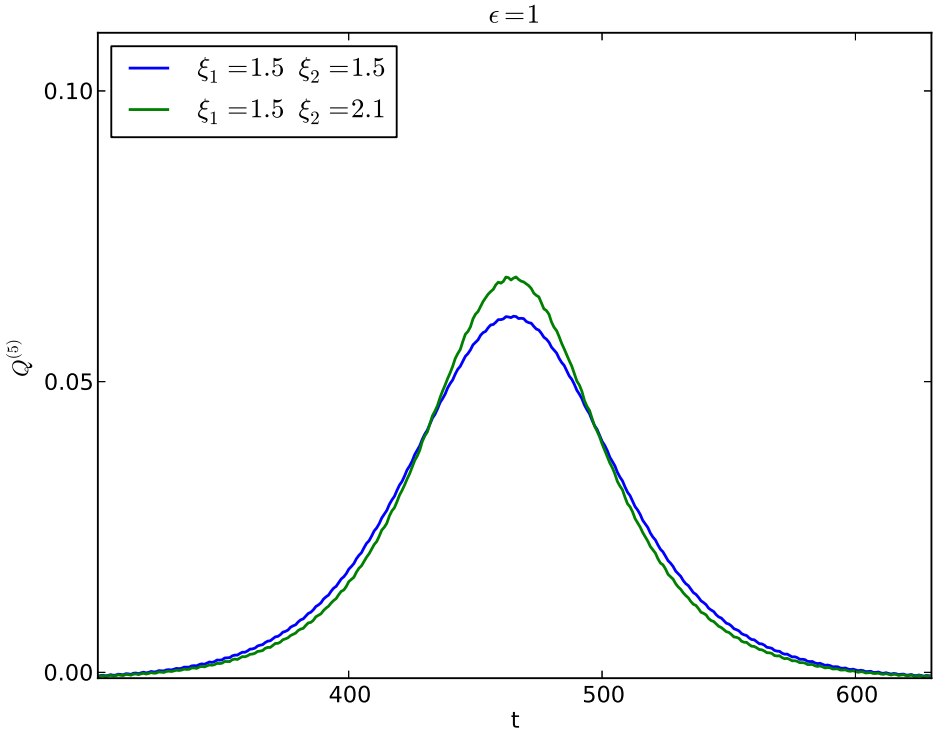
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.13 – Carga $Q^{(5)}$ calculada para o modelo $\epsilon = 1$ para dois pares de parâmetros.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6.14 – Para comparação, carga $Q^{(5)}$ calculada para o modelo $\epsilon = 1$ calculada com mais dois pares de parâmetros.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 7

Conclusões

Estudamos como uma deformação do modelo de Bullough-Dodd afeta suas propriedades através da perspectiva das teorias quase-integráveis. Buscamos, com isso, entender quais os parâmetros levam à conservação assintótica das cargas.

Introduzimos o trabalho com uma visão geral do que são teorias integráveis e como o modelo estudado se insere no contexto geral. Deformações próximas ao modelo exatamente integrável podem ser mais úteis que o modelo perfeito, sendo importante estudá-las. Assim pudemos explicitar o objetivo desta dissertação: estudar uma deformação.

No segundo capítulo, demos uma perspectiva histórica das teorias integráveis. Contamos quais os papeis de Russel, Lord Rayleigh, Boussinesq, Korteweg, De Vries, Fermi, Pasta, Ulam, Tsingou, Zabusky, Kruskal, Bullough e Dodd, cada qual a seu tempo, no desenvolvimento de toda uma área do conhecimento.

No capítulo (3), descrevemos o modelo de Bullough-Dodd, objeto central deste trabalho. Mostramos como é possível encontrar soluções analíticas (através de uma representação de curvatura nula) e que elas dependem de um parâmetro livre. Além disso, usamos uma analogia mecânica para entender melhor a estrutura do potencial. Essa analogia permite encontrar mais duas quantidades conservadas utilizadas no capítulo seguinte.

No quarto capítulo, introduzimos a deformação de interesse no modelo de Bullough-Dodd. Nomeamos as deformações a partir do valor de seu parâmetro (ϵ). Por meio de uma rotação na álgebra, encontramos as cargas quase conservadas. É importante lembrar que as cargas não são invariantes de gauge e que sua conservação ou não também depende da álgebra utilizada. Além disso, mostramos que o valor do parâmetro (ϵ) não pode ser qualquer, tendo que ser um número racional para que obtenhamos sólitons como soluções do novo modelo. Por fim, através da observação da paridade da solução, argumentamos que deve existir um conjunto de parâmetros para os quais a anomalia se anula.

No capítulo (5), explicamos os métodos numéricos utilizados para as simulações. Transformamos o problema de resolver uma equação diferencial parcial no problema de resolver um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas. Para isso, discretizamos o problema

gerando equações acopladas através de suas derivadas. Foram necessários métodos para a integração numérica de equações diferenciais de primeira e segunda ordem. Ambos os métodos descritos (Euler e Runge-Kutta de quarta ordem) se aplicam à solução do problema, sendo que para a evolução temporal das soluções preferiu-se o método de Euler por gerar resultados quantitativamente semelhantes, mas com menos tempo de computação.

No sexto e último capítulo, exibimos os resultados obtidos através das simulações feitas com os métodos introduzidos no capítulo anterior. As soluções numéricas obtidas para modelos exatamente integráveis concordaram com suas contrapartes analíticas, sugerindo que os métodos utilizados para a integração foram adequados.

As colisões simuladas mostraram um intrincado mecanismo de colisão. Os sólitons nunca se superpõem completamente (a interação é repulsiva), mas se olharmos apenas em tempos muito anteriores e muito posteriores ao momento da colisão podemos imaginar que eles passam um sobre o outro. Isso porque a interação inverte os valores dos parâmetros internos, ou seja $\xi_1 \to \xi_2$ e $\xi_2 \to \xi_1$.

Apesar de parecer contraditório, o argumento analítico desenvolvido no capítulo (4) não é incompatível com os resultados observados. O argumento afirma que para aqueles parâmetros a carga se conserva assintoticamente, mas não exclui a possibilidade de a carga se conservar quando os parâmetros são outros. De fato, a quase conservação das cargas de forma independente dos parâmetros previstos é uma forte indicação de que toda a família de modelos estudada é exatamente integrável. Assim, obtivemos como principal resultado que os modelos da forma $\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = -e^{p\phi} + e^{-q\phi}$, $p, q \in \mathbb{N}$ provavelmente são integráveis.

Com isso, podemos concluir que cumprimos nossos objetivos inicias. Estudamos de maneira bastante completa o modelo de Bullough-Dodd e as implicações de o alterarmos.

REFERÊNCIAS

1 FERREIRA, L.; LUCHINI, G.; ZAKRZEWSKI, W. J. The concept of quasi-integrability for modified non-linear Schrodinger models. *Journal of High Energy Physics*, v. 1209, p. 103, 2012. doi: 10.1007/JHEP09(2012)103.

2 RUSSELL, J. S. *Report on waves*: fourteenth meeting of the british association for the advancement of sciences. London: John Murray, v. 311, p. 311–363, 1845.

3 RAYLEIGH, L. On waves. *Philosophical Magazine*, v. 1, n. 5, p. 257–279, 1876.

4 BOUSSINESQ, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide continu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 2, n. 17, p. 55–108, 1872.

5 KORTEWEG, D. J.; DE VRIES, G. Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, v. 39, n. 240, p. 422–443, 1895.

6 DE JAGER, E. M. *On the origin of the Korteweg-de Vries equation.* Disponível em:<http://arxiv.org/abs/math/0602661>. Acesso em: 15 de maio de 2014.

7 FERMI, E.; PASTA, J.; ULAM, S. *Studies of nonlinear problems*. California: Los Alamos Scientific Laboratory, 1955. Report LA-1840.

8 FERMI, E.; SEGRÈ, E. *Collected papers*. Ilinois: University of Chicago Press, 1965.

9 FORD, J. The fermi-pasta-ulam problem: paradox turns discovery. *Physics Reports*, v. 213, n. 5, p. 271–310, 1992.

10 ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interaction of "solitons"in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, v. 15, p. 240–243, 1965.

11 GARDNER, C. S.; GREENE, J. M.; KRUSKAL, M. D.; MIURA, R. M. Method for solving the korteweg-devries equation. *Physical Review Letters*, v. 19, p. 1095–1097, 1967.

12 ABLOWITZ, M. J.; KAUP, D.; NEWELL, A.; SEGUR, H. Method for solving the sine-gordon equation. *Physical Review Letters*, v. 30, n. 25, p. 1262, 1973.

13 SHABAT, A.; ZAKHAROV, V. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics JETP*, v. 34, n. 1, p. 62–69, 1972.

14 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. M. *Topological solitons*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

15 ABLOWITZ, M. J.; KAUP, D. J.; NEWELL, A. C.; SEGUR, H. Nonlinear-evolution equations of physical significance. *Physical Review Letters*, v. 31, n. 2, p. 125–127, 1973.

16 DODD, R.; BULLOUGH, R. Polynomial conserved densities for the sine-gordon equations. *Proceedings of the Royal Society of London. A:* mathematical and physical sciences, v. 352, n. 1671, p. 481–503, 1977.

17 ZHIBER, A.; SHABAT, A. Klein-gordon equations with a nontrivial group. *Soviet Physics Doklady*, v. 24, p. 607, 1979.

18 ROSENAU, P.; HYMAN, J. M. Compactons: solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, v. 70, p. 564–567, 1993.

19 BELAVIN, A. A.; POLYAKOV, A. M.; SCHWARTZ, A.; TYUPKIN, Y. S. Pseudoparticle solutions of the yang-mills equations. *Physics Letters B*, v. 59, n. 1, p. 85–87, 1975.

20 GELL-MANN, M.; LÉVY, M. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento*, v. 16, n. 4, p. 705–726, 1960. doi: 10.1007/BF02859738.

21 SKYRME, T. H. R. A unified field theory of mesons and baryons. *Nuclear Physics*, v. 31, n. 1, p. 556–569, 1962.

22 FADDEEV, L.; NIEMI, A. J. Partial duality in su(2) yang-mills theory. *Physics Letters B*, v. 449, n. 3, p. 214–218, 1999.

23 SEMENOV-TIAN-SHANSKY, M. A. Dressing transformations and poisson group actions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, v. 21, n. 6, p. 1237–1260, 1985.

24 BABELON, O.; BERNARD, D. Dressing transformations and the origin of the quantum group symmetries. *Physics Letters B*, v. 260, n. 1, p. 81–86, 1991.

25 BABELON, O.; BERNARD, D.; TALON, M. *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

26 FERREIRA, L.; ZAKRZEWSKI, W. J. Numerical and analytical tests of quasi-integrability in modified Sine-Gordon models. *Journal of High Energy Physics*, v. 1401, p. 58, 2014. doi: 10.1007/JHEP01(2014)058.

27 AMES, W. *Numerical methods for partial differential equations*. Florida: Academic Press, 1992.

28 RUNGE, C. Ueber die numerische auflösung von differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, v. 46, n. 2, p. 167–178, 1895. doi: 10.1007/BF01446807.

29 KUTTA, W. Beitrag zür näherungsweisen integration totaler differentialgleichungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, v. 46, p. 435–453, 1901.

30 BABELON, O.; BONORA, L. Conformal affine sl(2) toda field theory. *Physics Letters B*, v. 244, n. 2, p. 220–226, 1990.

31 ARATYN, H.; FERREIRA, L.; GOMES, J.; ZIMERMAN, A. Kac-moody construction of toda type field theories. *Physics Letters B*, v. 254, n. 3, p. 372–380, 1991.

32 CONSTANTINIDIS, C.; FERREIRA, L.; GOMES, J.; ZIMERMAN, A. Connection between the affine and conformal affine toda models and their hirota solution. *Physics Letters B*, v. 298, n. 1, p. 88–94, 1993.

33 ZAKHAROV, V. E.; SHABAT, A. B. Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. ii. *Functional Analysis and Its Applications*, v. 13, n. 3, p. 166–174, 1979.

34 DATE, E.; JIMBO, M.; KASHIWARA, M.; MIWA, T. Transformation groups for soliton equations-euclidean lie algebras and reduction of the kp hierarchy. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, v. 18, p. 1077–1110, 1982.

35 DATE, E.; JIMBO, M.; MIWA, T. Method for generating discrete soliton equations. i. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 51, n. 4116-4124, p. 4125–4131, 1982.

36 I OLIVE, D.; V SAVELIEV, M.; WR UNDERWOOD, J. On a solitonic specialisation for the general solutions of some two-dimensional completely integrable systems. *Physics Letters B*, v. 311, n. 1, p. 117–122, 1993.

37 GODDARD, P.; OLIVE, D. Kac-moody and virasoro algebras in relation to quantum physics. *International Journal of Modern Physics A*, v. 01, n. 02, p. 303–414, 1986. doi: 10.1142/S0217751X86000149.

APÊNDICE *A*

Álgebra dos operadores

A.1 Álgebra sl(2) twisted

$$
\begin{aligned}
&[T_3^m, T_3^n] = 2m\delta_{m+n,0}C \\
&[T_+^n, T_+^m] = [T_-^n, T_-^m] = [L_k^{n+1/2}, L_k^{m+1/2}] = 0 \\
&[T_+^m, T_-^n] = 2T_3^{n+m} + 4m\delta_{m+n,0}C \\
&[T_3^n, T_\pm^m] = \pm T_\pm^{n+m} \\
&[T_\pm^n, L_k^{m+1/2}] = \sqrt{6 - k(k \pm 1)}L_{k\pm1}^{n+m+1/2} \\
&[T_3^n, L_k^{m+1/2}] = kL_k^{n+m+1/2} \\
&[L_k^{n+1/2}, L_{-k}^{m+1/2}] = (-1)^k \left(\frac{k}{2}T_3^{n+m+1} + (n+1/2)\delta_{n+m+1,0}C\right) \\
&[L_0^{n+1/2}, L_{\pm1}^{m+1/2}] = -\frac{\sqrt{6}}{4}T_\pm^{n+m+1} \\
&[L_0^{n+1/2}, L_{\pm2}^{m+1/2}] = 0 \\
&[L_1^{n+1/2}, L_{-2}^{m+1/2}] = \frac{1}{2}T_-^{n+m+1} \\
&[L_{-1}^{n+1/2}, L_2^{m+1/2}] = \frac{1}{2}T_+^{n+m+1} \\
&[L_1^{n+1/2}, L_2^{m+1/2}] = 0 \\
&[L_{-1}^{n+1/2}, L_{-2}^{m+1/2}] = 0 \\
&[D, T_j^m] = mT_j^m \\
&[D, L_p^{m+1/2}] = \left(m + \frac{1}{2}\right) L_p^{m+1/2} \\
&Q \equiv T_3^0 + 6D
\end{aligned}
$$

O operador D mede o índice superior, enquanto Q é o operador gradação. C é o termo central da álgebra e comuta com todos os operadores.

A.2 O kernel da álgebra

Quando eliminamos o termo central C, a álgebra possui um kernel abeliano $\mathcal{B}$ sob a ação adjunta do elemento constante $\frac{\sqrt{2}}{2}T_-^0 + L_2^{-1/2}$. O restante da álgebra é descrito por elementos do conjunto $\mathcal{F}$ tal que a álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{F}$ e $\mathcal{B} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Para auxiliar a encontrar o kernel, vale notar que a álgebra é graduada. Para encontrar o grau de um operador basta calcular $[Q, A] = nA$; sendo A um operador qualquer, n é o grau do operador A. Isso permite dividir os operadores de acordo com o seu grau. A seguir os operadores foram reunidos de acordo com o seu grau. Como seriam infinitos os conjuntos, estão reunidos os operadores com graus congruentes módulo 6:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \{T_3^n\} \\
\mathcal{G}_1 &= \{T_+^n, L_{-2}^{n+1/2}\} \\
\mathcal{G}_2 &= \{L_{-1}^{n+1/2}\} \\
\mathcal{G}_3 &= \{L_0^{n+1/2}\} \\
\mathcal{G}_4 &= \{L_1^{n+1/2}\} \\
\mathcal{G}_5 &= \{T_-^{n+1}, L_2^{n+1/2}\}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Com essa gradação é válido que $[\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_m] \in \mathcal{G}_{n+m \mod 6}$. Pelas regras de comutação mostradas em (A.1) vemos que nenhum gerador por si só faz parte do kernel abeliano. Buscamos então combinações de geradores com mesma gradação. Um possível par de geradores para o kernel $\mathcal{B}$ é dado em (A.2) e (A.3).

$$b_{6n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_+^n + \frac{1}{\sqrt{3}} L_{-2}^{n+1/2} \right) \tag{A.2}$$

$$b_{6n-1} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_-^n + \frac{1}{\sqrt{3}} L_2^{n-1/2} \right) \tag{A.3}$$

É fácil mostrar que $[b_{6n\pm1}, b_{6m\pm1}] = [b_{6n+1}, b_{6m-1}] = 0$. Para construir a base do subespaço $\mathcal{F}$ vamos considerar que $F_{6n} \equiv (-1)^n T_3^n \in \mathcal{F}$. Sabemos que $F_{6(n+m)+1} \equiv [b_{6n+1}, T_3^m] \in \mathcal{G}_1$ e $F_{6n+1} \neq b_{6n+1}$. Isso significa que $F_{6n+1} \in (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}_1)$. Prosseguindo com esse raciocinio obtemos as relações mostradas no apêndice (A.3). Note que valem as relações mostradas em

(A.4).

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{B},\mathcal{B}] &= 0 \\
[\mathcal{B},\mathcal{F}] &\in \mathcal{F} \\
[\mathcal{F},\mathcal{F}] &\in \mathcal{A}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Essas relações permitem avanços analíticos significativos.

A.3 Álgebra na base $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}$

$$
\begin{aligned}
[b_{6n+1}, F_{6m+d}] &= F_{6(n+m)+1+d} \\
[b_{6n-1}, F_{6m+d}] &= F_{6(n+m)+1+d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{6n} &= (-1)^n T_3^n \\
F_{6n+1} &= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_+^n - \frac{2}{\sqrt{3}} L_{-2}^{n+1/2} \right) \\
F_{6n+2} &= (-1)^n \sqrt{2} L_{-1}^{n+1/2} \\
F_{6n+3} &= -(-1)^n \sqrt{2} L_0^{n+1/2} \\
F_{6n+4} &= (-1)^n \sqrt{2} L_1^{n+1/2} \\
F_{6n+5} &= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_-^{n+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} L_2^{n+1/2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[F_{6n}, F_{6m+1}] = 2b_{6(n+m)+1} - F_{6(n+m)+1} && [F_{6n}, F_{6m+2}] = -F_{6(n+m)+2} \\
&[F_{6n}, F_{6m+3}] = 0 && [F_{6n}, F_{6m+4}] = F_{6(n+m)+4} \\
&[F_{6n}, F_{6m+5}] = -(2b_{6(n+m)+5} - F_{6(n+m)+5}) && [F_{6n+1}, F_{6m+2}] = -F_{6(n+m)+3} \\
&[F_{6n+1}, F_{6m+3}] = -F_{6(n+m)+4} && [F_{6n+1}, F_{6m+4}] = 2b_{6(n+m)+5} \\
&[F_{6n+1}, F_{6m+5}] = F_{6(n+m+1)} && [F_{6n+2}, F_{6m+3}] = -(2b_{6(n+m)+5} + F_{6(n+m)+5}) \\
&[F_{6n+2}, F_{6m+4}] = F_{6(n+m+1)} && [F_{6n+2}, F_{6m+5}] = 2b_{6(n+m+1)+1} \\
&[F_{6n+3}, F_{6m+4}] = -(2b_{6(n+m+1)+1} + F_{6(n+m)+1}) && [F_{6n+3}, F_{6m+5}] = F_{6(n+m+1)+2} \\
&[F_{6n+4}, f_{6m+5}] = -F_{6(n+m+1)+3}
\end{aligned}
$$

A.4 Realização matricial da álgebra

Podemos descrever a álgebra usando as matrizes

$$
\begin{aligned}
b_{6n+1} &= (-\lambda)^n \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
b_{6n-1} &= (-\lambda)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\lambda}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \\
F_{6n} &= (-\lambda)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
F_{6n+1} &= (-\lambda)^n \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
F_{6n+2} &= (-\lambda)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \\
F_{6n+3} &= -(-\lambda)^n \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
F_{6n+4} &= (-\lambda)^n \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
F_{6n+5} &= (-\lambda)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Com isso, valem as mesmas relações de comutação anteriormente mostradas.

A.5 Representação de peso máximo

Uma representação de peso máximo de $\mathcal{G}$ é tal que possui um estado de peso máximo $\mid \lambda \rangle$ satisfazendo

$$\mathcal{G}_n \mid \lambda \rangle = 0 \qquad \langle \lambda \mid \mathcal{G}_{-n} = 0 \qquad \text{for} \quad n > 0 \tag{A.6}$$

Os estados de peso máximo das duas representações fundamentais de $A_2^{(2)}$ satisfazem

$$\begin{aligned} T_3^0 \mid \lambda_0 \rangle &= 0 & T_3^0 \mid \lambda_1 \rangle &= \frac{1}{2} \mid \lambda_1 \rangle \\ C \mid \lambda_0 \rangle &= 2 \mid \lambda_0 \rangle & C \mid \lambda_1 \rangle &= \mid \lambda_1 \rangle \end{aligned} \tag{A.7}$$

APÊNDICE *B*

Solução do modelo

B.1 Método de *dressing*

Para encontrar as soluções do modelo precisamos, primeiro, complicá-lo. Consideramos uma extensão conforme do modelo de Bullough-Dodd seguindo o exposto em (30–32). A Lagrangeana para essa extensão é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi\partial^\mu\eta + 3\partial_\mu\eta\partial^\mu\nu - \left(e^{\phi+\eta} + \frac{1}{2}e^{-2\phi+\eta}\right), \tag{B.1}$$

sendo as equações de movimento

$$\begin{aligned} \partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi &= -e^\eta\left(e^\phi - e^{-2\phi}\right) \\ \partial_t^2\eta - \partial_x^2\eta &= 0 \\ \partial_t^2\nu - \partial_x^2\nu &= -\frac{1}{2}e^{-2\phi+\eta} \end{aligned} \tag{B.2}$$

e os novos potenciais dados por

$$\begin{aligned} A'_+ &= -B\Lambda_+B^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\phi+\eta}T_3^0 + e^{-2\phi+\eta}L_{-2}^{1/2}, \\ A'_- &= -\partial_-BB^{-1} + \Lambda_- = -(\partial_-\phi T_3^0 + \partial_-\eta Q + \partial_-\nu C) + \Lambda_-, \end{aligned} \tag{B.3}$$

com

$$\Lambda_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}T_+^0 + L_{-2}^{1/2} \qquad \Lambda_- = \frac{\sqrt{2}}{2}T_-^0 + L_2^{-1/2} \tag{B.4}$$

e

$$B = e^{\phi T_3^0 + \eta Q + \nu C} \tag{B.5}$$

Note que podemos recuperar os potenciais (3.9) a partir dos potenciais (B.3) tomando $\eta = 0$ e eliminando o termo central C. Repetindo o cálculo de (3.11) usando os novos potenciais obtemos:

$$F'_{+-} = (\partial_+\partial_-\phi + e^{\phi+\eta} - e^{-2\phi+\eta})T_3^0 + (\partial_+\partial_-\eta)Q + (\partial_+\partial_-\nu + \frac{1}{2}e^{-2\phi+\eta})C \tag{B.6}$$

As equações de movimento (B.2) anulam a curvatura (B.6).

A curvatura nula (B.6) é invariante sob transformações de gauge da forma: $A_\mu \to g\, A_\mu\, g^{-1} - \partial_\mu g\, g^{-1}$. A transfomação de *dressing* (23–24, 33–35) é um tipo especial de transformação que constitui um mapa entre soluções de (B.6). Usaremos uma solução de vácuo para alimentar o método e construir a órbita correspondente sob a ação do grupo de transformação de dressing. A solução de vácuo escolhida de (B.2) é (com n inteiro e β constante)

$$\phi^{\rm vac} = \frac{i\,2\,\pi\,n}{3} \qquad \eta^{\rm vac} = \frac{i\,4\,\pi\,n}{3} + \ln\beta \qquad \nu^{\rm vac} = -\frac{\beta}{2}\,x_+\,x_- + \gamma_+\,(x_+) + \gamma_-\,(x_-) \tag{B.7}$$

Os potenciais calculados nas condições de (B.7) valem

$$\begin{aligned} A_+^{'\rm vac} &= -\beta\,\Lambda_+ \\ A_-^{'\rm vac} &= \Lambda_- + \frac{\beta}{2}\,x_+\,C - \partial_-\gamma_-\,C \end{aligned} \tag{B.8}$$

e, assim, podem ser escritos como

$$A_\mu^{'\rm vac} = -\partial_\mu \Psi_{\rm vac}\,\Psi_{\rm vac}^{-1}, \tag{B.9}$$

onde

$$\Psi_{\rm vac} = e^{\beta\,x_+\,\Lambda_+}\,e^{-x_-\,\Lambda_-}\,e^{\gamma_-(x_-)\,C}, \tag{B.10}$$

sendo que $\Lambda_\pm$ foi definido em (B.4).

Tomamos agora um elemento constante do grupo (h) que permite a decomposição gaussiana

$$\Psi_{\rm vac}\,h\,\Psi_{\rm vac}^{-1} = G_-\,G_0\,G_+ \tag{B.11}$$

onde G_-, G_0 e G_+ são elementos do grupo obtidos pela exponenciação dos geradores de $A_2^{(2)}$ com graus negativos, zero e positivos respectivamente, tomada a gradação principal definida por Q, como mostrado em (A.2).

Introduzimos o elemento

$$\Psi_h \equiv G_0^{-1}\,G_-^{-1}\,\Psi_{\rm vac}\,h = G_+\,\Psi_{\rm vac} \tag{B.12}$$

e os potenciais transformados

$$A_\mu^h \equiv -\partial_\mu \Psi_h\,\Psi_h^{-1} \tag{B.13}$$

Como A_μ^h é puro gauge, ele resolve a equação de curvatura nula (B.6). Além disso, como Ψ_h pode ser escrito de duas formas diferentes como função de $\Psi_{\rm vac}$, é garantido que A_μ^h tem

a mesma estrutura de graus que os potenciais (B.3). De fato, (B.12) e (B.13) implicam que

$$A^h_\mu = G_+ A'^{\rm vac}_\mu G_+^{-1} - \partial_\mu G_+ G_+^{-1} \tag{B.14}$$

$$= \left(G_0^{-1} G_-^{-1}\right) A'^{\rm vac}_\mu \left(G_0^{-1} G_-^{-1}\right)^{-1} - \partial_\mu \left(G_0^{-1} G_-^{-1}\right) \left(G_0^{-1} G_-^{-1}\right)^{-1} \tag{B.15}$$

A equação (B.14) implica que A^h_μ tem componentes com graus maiores ou iguais que os de $A^{\rm vac}_\mu$. Por outro lado, (B.15) implica que A^h_μ tem compontes com graus menores ou iguais àqueles de $A^{\rm vac}_\mu$. Como (B.11) e (B.12) garantem que as duas relações são verdadeiras, segue que A^h_μ tem a mesma estrutura de graus que $A'^{\rm vac}_\mu$ e, por isso, a mesma estrutura dos potenciais (B.3). Por construção A^h_μ é dado explicitamente em termos das coordenadas de cone de luz coordinates $x_\pm$. Podemos então igualar A^h_μ a (B.3) para obter as soluções para os campos do modelo associadas à escolha de h. Isso é, encontrar um ponto na orbita de soluções do vácuo (B.7). Para encontrar a solução explicita, fazemos o seguinte. De (B.8) e (B.15) temos que

$$A^h_- = -\partial_- G_0^{-1} G_0 - G_0^{-1} \partial_- G_-^{-1} G_- G_0 + \frac{\beta}{2} x_+ C - \partial_- \gamma_- C + G_0^{-1} G_-^{-1} \Lambda_- G_- G_0 \tag{B.16}$$

sendo que a componente de grau nulo é

$$\left(A^h_-\right)_0 = - \partial_- G_0^{-1} G_0 + \frac{\beta}{2} x_+ C - \partial_- \gamma_- C$$

$$= - \partial_- \left(e^{-\frac{\beta}{2} x_+ x_- C + \gamma_- C} G_0^{-1}\right) \left(G_0 \, e^{\frac{\beta}{2} x_+ x_- C - \gamma_- C}\right) \tag{B.17}$$

Comparando (B.17) com a componente de grau nulo de A_- em (B.3), obtemos

$$\partial_- B \, B^{-1} = \partial_- \left(e^{-\frac{\beta}{2} x_+ x_- C + \gamma_- C} G_0^{-1}\right) \left(G_0 \, e^{\frac{\beta}{2} x_+ x_- C - \gamma_- C}\right) \tag{B.18}$$

Novamente de (B.8) e (B.15), temos que

$$A^h_+ = -\partial_+ G_0^{-1} G_0 - G_0^{-1} \partial_+ G_-^{-1} G_- G_0 + G_0^{-1} G_-^{-1} \left(-\beta \Lambda_+\right) G_- G_0 \tag{B.19}$$

e sua componente com grau 1 é

$$\left(A^h_+\right)_1 = G_0^{-1} \left(-\beta \Lambda_+\right) G_0 \tag{B.20}$$

Comparando (B.20) com a componente de grau 1 de A_+ na equação (B.3), temos que

$$B \, \Lambda_+ \, B^{-1} = G_0^{-1} \left(\beta \Lambda_+\right) G_0 \tag{B.21}$$

Assim,

$$G_0\, B\, \Lambda_+\, (G_0\, B)^{-1} = \beta\, \Lambda_+ = e^{\ln \beta\, Q}\, \Lambda_+\, e^{-\ln \beta\, Q} \tag{B.22}$$

Portanto

$$G_0\, B\, e^{-\ln \beta\, Q} = e^{i\frac{2\pi}{3}k\left(T_3^0+2\,Q\right)+f(x_+,x_-)\,C} \tag{B.23}$$

porque $e^{i\frac{2\pi}{3}k\left(T_3^0+2\,Q\right)+f(x_+,x_-)\,C}$, com k inteiro e f arbitrario, é o grupo de estabilidade de Λ_+.

Agora, partindo de (B.18) obtemos que

$$B = e^{-\frac{\beta}{2}x_+x_-C+\gamma_-\,C}\, G_0^{-1}\, g_0\,(x_+) \tag{B.24}$$

onde $g_0\,(x_+)$ é um elemento do subgrupo de grau zero em função apenas de x_+. De (B.23) e (B.24) obtemos

$$G_0 = B^{-1}\, e^{i\frac{2\pi}{3}k\left(T_3^0+2\,Q\right)+\ln\beta\,Q-\frac{\beta}{2}x_+x_-C+\gamma_-(x_-)\,C+\alpha_+(x_+)\,C} \tag{B.25}$$

com B identificado com o elemento do grupo (B.5), isto é, $B = e^{\phi\,T_3^0+\eta\,Q+\nu\,C}$.

Note que quando o elemento constante do grupo h em (B.10) é a unidade, então a transformação de dressing se torna a identidade e temos que $G_{0,\pm} = 1$. Então, os campos devem assumir os valores de vácuo (B.7) e devemos ter $k = n$ e $\alpha_+ = \gamma_+$. Além disso, note que das relações de comutação do apêndice (A.1), o operador D e, portanto, o Q nunca são produzidos pelo comutador de nenhum par de geradores da álgebra. Note que $\Psi_{\rm vac}$, dado em (B.10), não envolve Q. Ainda mais, se escolhemos h, em (B.11), de forma que independa de Q (como exponenciais dos autovetores de $\Lambda_\pm$), então $G_{0,\pm}$ não pode envolver Q. Consequentemente, em todas as transformações de dressing dessa forma temos

$$\eta = i\frac{4\,\pi}{3}\,n + \ln\beta \tag{B.26}$$

para que G_0 seja independente de Q. Assim, o campo η não sai do estado de vácuo, i.e. $\eta = \eta_{\rm vac}$. Logo

$$\begin{aligned} G_0 = & \quad e^{-\phi\,T_3^0-\nu\,C}\, e^{i\frac{2\pi}{3}n\,T_3^0-\frac{\beta}{2}x_+x_-C+\gamma_-(x_-)\,C+\gamma_+(x_+)\,C} \\ = & \quad e^{-\left(\phi-i\frac{2\pi}{3}n\right)T_3^0-\left(\nu+\frac{\beta}{2}x_+x_--\gamma_-(x_-)-\gamma_+(x_+)\right)C} \end{aligned} \tag{B.27}$$

Para obter a solução explicita para os campos, precisamos usar a representação de peso máximo da álgebra $A_2^{(2)}$ e introduzir as funções tao de Hirota como o valor esperado de (B.11). Ou seja

$$\tau_\lambda \equiv \langle\, \lambda \mid \Psi_{\rm vac}\, h\, \Psi_{\rm vac}^{-1} \mid \lambda\,\rangle = \langle\, \lambda \mid G_0 \mid \lambda\,\rangle \tag{B.28}$$

onde, na segunda igualdade, usamos o fato que o estado de peso máximo $\mid \lambda\,\rangle$ satisfaz (A.6),

e, então, $G_+ \mid \lambda\rangle = \mid \lambda\rangle$, e $\langle\lambda \mid G_- = \langle\lambda \mid$.

Usaremos duas representações como essa para introduzir duas funções tao. Primeiramente, τ_0, associada à escolha $\mid \lambda\rangle \equiv \mid \lambda_0\rangle$, e τ_1, associada à escolha $\mid \lambda\rangle \equiv \mid \lambda_1\rangle \otimes \mid \lambda_1\rangle$, onde $\mid \lambda_0\rangle$ e $\mid \lambda_1\rangle$ são definidas em (A.5). Então, de (B.27), (B.28) e (A.7), temos que

$$\tau_0 = e^{-2\left(\nu + \frac{\beta}{2} x_+ x_- - \gamma_-(x_-) - \gamma_+(x_+)\right)} \qquad \tau_1 = e^{-\left(\phi - i\frac{2\pi n}{3}\right) - 2\left(\nu + \frac{\beta}{2} x_+ x_- - \gamma_-(x_-) - \gamma_+(x_+)\right)} \tag{B.29}$$

ou, de forma equivalente,

$$\tilde{\phi} \equiv \phi - i\frac{2\pi n}{3} = \ln\frac{\tau_0}{\tau_1} \qquad \tilde{\nu} \equiv \nu + \frac{\beta}{2} x_+ x_- - \gamma_-(x_-) - \gamma_+(x_+) = -\frac{1}{2}\ln\tau_0 \tag{B.30}$$

Substituindo nas equações de movimento (B.2) (com $\eta = i\frac{4\pi n}{3} + \ln\beta$) obtemos as equações para $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\nu}$ como

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_-\tilde{\phi} &= -\beta\, e^{-2\tilde{\phi}}\left(e^{3\tilde{\phi}} - 1\right) \\ \partial_+\partial_-\tilde{\nu} &= -\frac{\beta}{2}\left(e^{-2\tilde{\phi}} - 1\right) \end{aligned} \tag{B.31}$$

Substituindo as funções tao, obtém-se as equações de Hirota

$$\begin{aligned} \tau_0\partial_+\partial_-\tau_0 - \partial_+\tau_0\,\partial_-\tau_0 &= \beta\left(\tau_1^2 - \tau_0^2\right) \\ \tau_1\partial_+\partial_-\tau_1 - \partial_+\tau_1\,\partial_-\tau_1 &= \beta\left(\tau_0\,\tau_1 - \tau_1^2\right) \end{aligned} \tag{B.32}$$

Note que β pode ser eliminado por uma transformação de reescala $x^\mu \to x^\mu/\sqrt{\beta}$.
As soluções da órbita do vácuo (B.7) em que estamos interessados são aquelas obtidas pelo procedimento de especialização solitônica (36). Escolhemos o elemento h do grupo como um produto de exponenciais de autovetores dos operadores $\Lambda_p m$ definidos em (B.4), ou seja:

$$h = \prod_{j=1}^{N} e^{V_j} \qquad [\,\Lambda_\pm\,,\,V_j\,] = \beta_j^{(\pm)}\,V_j \tag{B.33}$$

Com isso, usando a definição (B.10), temos

$$\tau_\lambda = \langle\lambda \mid \Psi_{\rm vac}\,h\,\Psi_{\rm vac}^{-1} \mid \lambda\rangle = \langle\lambda \mid \prod_{j=1}^{N} e^{e^{\Gamma_j}\,V_j} \mid \lambda\rangle \tag{B.34}$$

com $\Gamma_j = \beta_j^{(+)} x_+ - \beta_j^{(-)} x_-$. O inteiro N define o setor N-soliton da solução.

Para o caso $N = 1$, obtemos uma solução viajando com velocidade constante. Se $\mid \lambda\rangle$ pertence a uma representação integrável (37), os operadores V_j são nilpotentes e as expo-

nenciais e^{V_j} truncam em alguma ordem finita. Isso explica o truncamento nas funções tao de Hirota.

Os autovetores de $\Lambda_\pm$ com autovalores não nulos são

$$V^{(\omega)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}\, V_n^{(\omega)} \tag{B.35}$$

com

$$\begin{aligned}
V_{6n}^{(\omega)} &= T_3^n - \frac{1}{3}\,\delta_{n,0}\, C \\
V_{6n+1}^{(\omega)} &= -\,\omega^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,T_+^n - 2\,L_{-2}^{n+1/2}\right) \\
V_{6n+2}^{(\omega)} &= \omega^{-2}\,\sqrt{2}\,L_{-1}^{n+1/2} \\
V_{6n+3}^{(\omega)} &= \omega^{-3}\,\sqrt{2}\,L_0^{n+1/2} \\
V_{6n+4}^{(\omega)} &= \omega^{-4}\,\sqrt{2}\,L_1^{n+1/2} \\
V_{6n+5}^{(\omega)} &= -\,\omega^{-5}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,T_-^{n+1} - 2\,L_2^{n+1/2}\right)
\end{aligned} \tag{B.36}$$

onde $\omega^6 = -1$. Pode-se checar que

$$\left[\,\Lambda_\pm\,,\, V_n^{(\omega)}\,\right] = \omega^{\pm 1}\,\sqrt{3}\,V_{n\pm 1}^{(\omega)} \tag{B.37}$$

e, assim,

$$\left[\,\Lambda_\pm\,,\, V^{(\omega)}(z)\,\right] = \sqrt{3}\;(\omega\, z)^{\pm 1}\;V^{(\omega)}(z) \tag{B.38}$$

Assim, os autovalores dependem do produto de um parâmetro complexo z e de uma raiz sexta de -1. Apesar disso, não há degenerescência, pois $V^{(\omega)}(z) = V^{(\omega\gamma)}(z\gamma^{-1})$, com $\gamma^6 = -1$.

A dependência em z dos autovalores vem da ação de um grupo de um parâmetro atuando sobre os autovetores. Da equação (B.37) é imediato que

$$\left[\,\Lambda_\pm\,,\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{(\omega)}\right] = \omega^{\pm 1}\,\sqrt{3}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{(\omega)}. \tag{B.39}$$

Como $\Lambda_\pm$ e $V_n^{(\omega)}$ são autovetores do operador gradação, isto é, $[\,Q\,,\,\Lambda_\pm\,] = \pm\Lambda_\pm$ e $\left[\,Q\,,\,V_n^{(\omega)}\,\right] = n\,V_n^{(\omega)}$, temos que

$$V^{(\omega)}(z) = e^{-\ln z\, Q}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{(\omega)}\right) e^{\ln z\, Q} \tag{B.40}$$

e, assim, basta conjugar a equação (B.39) com $e^{-\ln z\, Q}$ para obter (B.37).

Para encontrar a solução final pelo método de *dressing* precisaríamos calcular os valores esperados de operadores V_j nos estados de peso máximo $\mid \Lambda \rangle$ (veja (B.34). Em vez disso, utilizaremos um método híbrido. Agora que temos as equações de Hirota (B.32), usaremos o ansatz

$$\tau_\lambda = 1 + \sum_{j=1}^{N} \delta_j^\lambda \, e^{\Gamma_j} + \sum_{j \geq i=1}^{N} \delta_{i,j}^\lambda \, e^{\Gamma_i + \Gamma_j} + \dots \tag{B.41}$$

onde $\delta_j^\lambda = \langle \lambda \mid V_j \mid \lambda \rangle$, $\delta_{i,j}^\lambda \sim \langle \lambda \mid V_i V_j \mid \lambda \rangle$ etc.

Com isso podemos determinar os coeficientes δ_j^λ, $\delta_{i,j}^\lambda$ resolvendo um sistema de equações não lineares. Os coeficientes são determinados a menos de um fator de reescala, pois a normalização dos autovetores V_j não é fixada.

B.2 Setor $N = 1$

Resolvendo as equações (B.32), tomando $\beta = 1$, com o ansatz (B.41) com $N = 1$, obtemos a solução

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 - 4\, a\, e^{\Gamma} + a^2\, e^{2\Gamma} \\ \tau_1 &= \left(1 + a\, e^{\Gamma}\right)^2 \end{aligned} \tag{B.42}$$

Fazendo $z\omega \to z$, temos

$$\Gamma = \sqrt{3}\left(z x_+ - \frac{x_-}{z}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-v^2}} \left(\cos\theta (x - vt) + i \sin\theta \, (ct - vx)\right) \tag{B.43}$$

onde usamos $z = e^{-\alpha + i\theta}$ e definimos $v = \tanh\alpha$.

Escrevendo $a = e^{\beta + i\xi}$ e definindo $\tilde{\Gamma} \equiv \Gamma + \beta + i\xi \equiv \Gamma_R + i\Gamma_I$, onde

$$\Gamma_R = \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) + \beta \qquad \Gamma_I = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx) + \xi \tag{B.44}$$

Então, usando (B.30) e (B.42), com $\phi = \phi_R + i\phi_I$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_R &= \frac{1}{2} \ln \left[1 + 3 \frac{(1 - 2\cosh\Gamma_R \cos\Gamma_I)}{(\cosh\Gamma_R + \cos\Gamma_I)^2} \right] \\ \phi_I &= \mathrm{ArcTan} \left[\frac{3 \sinh\Gamma_R \sin\Gamma_I}{(\cosh\Gamma_R + \cos\Gamma_I)^2 - 3(1 + \cosh\Gamma_R \cos\Gamma_I} \right] \end{aligned} \tag{B.45}$$

Temos os seguintes tipos particulares de soluções (manteremos $v = 0$, pois podemos

recuperá-lo por uma transformação de Lorentz):

1. Dois tipos de soluções reais ($\phi_I = 0$), ambas singulares:

   (a) Para $\cos\theta = \pm 1$, $\xi = 0$, $\beta = 0$,

$$\phi_R = \frac{1}{2}\ln\left[1 + 3\frac{(1 - 2\cosh\left(\sqrt{3x}\right))}{\left(\cosh\left(\sqrt{3}x\right) + 1\right)^2}\right] \tag{B.46}$$

e assim, $\phi_R \to -\infty$ para $x = \pm\,\mathrm{ArcCosh}(2)/\sqrt{3}$.

   (b) Para $\sin\theta = \pm 1$, $\xi = 0$, $\beta = 0$,

$$\phi_R = \frac{1}{2}\ln\left[1 + 3\frac{(1 - 2\cos\left(\sqrt{3t}\right))}{\left(\cos\left(\sqrt{3}t\right) + 1\right)^2}\right] \tag{B.47}$$

que é singular sempre que $t = (2n+1)\pi/\sqrt{3}$.

2. A solução estática de um sóliton é obtida quando $\cos\theta = \epsilon = \pm 1$, $\beta = 0$, $\xi \neq 0, \pi$. Assim

$$\begin{aligned}\phi_R &= \frac{1}{2}\ln\left[1 + 3\frac{(1 - 2\cosh(\sqrt{3}x)\cos\xi)}{(\cosh(\sqrt{3}x) + \cos\xi)^2}\right] \\ \phi_I &= \mathrm{ArcTan}\left[\frac{3\sinh(\sqrt{3}x)\sigma\sin\xi}{((\cosh(\sqrt{3}x) + \cos\xi)^2 - 3(1 + \cosh(\sqrt{3}x)\cos\xi)}\right]\end{aligned} \tag{B.48}$$

A carga topológica Q_{top} dessa solução é dada pelo sinal de $-\sigma\sin\xi$, sendo que $\sigma = \pm 1$. Para $Q_{top} = 1$, pode-se verificar que ϕ_I varia continuamente entre 0 e 2π quando x varia de $-\infty$ a $+\infty$ e que $\phi_R \to 0$ para $x \to \pm\infty$.

3. Usando $\omega \equiv \sin\theta$ e $\beta = \xi = 0$, temos que $\Gamma_R = \sqrt{3(1-\omega^2)}x$ e $\Gamma_I = \sqrt{3}\omega t$. Essa solução oscila entre as possíveis formas de (B.48) e se torna singular sempre que $t = n\pi/(\sqrt{3}\omega)$. Nesses instantes, a carga topológica muda de sinal.

B.3 Setor $N = 2$

Novamente resolvendo as equações (B.32), tomando $\beta = 1$, com o ansatz (B.41) com $N = 2$, obtemos a solução

$$\begin{aligned}\tau_0 = 1 &- 4a_1 e^{\Gamma_1} - 4a_2 e^{\Gamma_2} + a_1^2 e^{2\Gamma_1} + a_2^2 e^{2\Gamma_2} \\ &+8a_1a_2 \frac{2z_1^4 - z_1^2 z_2^2 + 2z_2^4}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)} e^{\Gamma_1+\Gamma_2} \\ &-4a_1^2a_2 \frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)} e^{2\Gamma_1+\Gamma_2} \\ &-4a_1a_2^2 \frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)} e^{\Gamma_1+2\Gamma_2} \\ &+a_1^2a_2^2 \frac{(z_1-z_2)^4(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)^2}{(z_1+z_2)^4(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)^2} e^{2\Gamma_1+2\Gamma_2}\end{aligned} \tag{B.49}$$

$$\begin{aligned}\tau_1 = 1 &+ 2a_1 e^{\Gamma_1} + 2a_2 e^{\Gamma_2} + a_1^2 e^{2\Gamma_1} + a_2^2 e^{2\Gamma_2} \\ &+4a_1a_2 \frac{z_1^4 + 4z_1^2 z_2^2 + z_2^4}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)} e^{\Gamma_1+\Gamma_2} \\ &+2a_1^2a_2 \frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)} e^{2\Gamma_1+\Gamma_2} \\ &+2a_1a_2^2 \frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)} e^{\Gamma_1+2\Gamma_2} \\ &+a_1^2a_2^2 \frac{(z_1-z_2)^4(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)^2}{(z_1+z_2)^4(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)^2} e^{2\Gamma_1+2\Gamma_2}\end{aligned} \tag{B.50}$$

onde usamos $z_i\omega \to z_i$,

$$\Gamma_i = \sqrt{3}\left(z_i x_+ - \frac{x_-}{z_i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-v^2}}\left(\cos\theta_i(x - v_i t) + i\sin\theta_i(t - v_i x)\right) \tag{B.51}$$

e $v_i = \tanh\alpha_i$.