

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Jorge Augusto Salgado Salhani

Modelando *brainstorming* com sistemas quadro-negro

São Carlos

2021



**Jorge Augusto Salgado Salhani**

**Modelando *brainstorming* com sistemas quadro-negro**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. José Fernando Fontanari

**Versão corrigida**  
**(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)**

**São Carlos**  
**2021**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Salhani, Jorge Augusto Salgado  
Modelando brainstorming com sistemas quadro-negro /  
Jorge Augusto Salgado Salhani; orientador José Fernando  
Fontanari - versão corrigida -- São Carlos, 2021.  
95 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,  
Universidade de São Paulo, 2021.

1. Modelo baseado em agentes. 2. Sobrecarga de  
informação. 3. Modelos cooperativos. 4. Inteligência  
coletiva. 5. Sistemas quadro-negro. I. Fontanari, José  
Fernando, orient. II. Título.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor José Fernando Fontanari, cuja orientação, supervisão e ajuda foram cruciais para o desenvolvimento teórico e prático desta dissertação. Aqui reforço minha profunda gratidão à sua compreensão a respeito dos meus esforços em concluir o curso de mestrado em paralelo ao curso de ciências da computação no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC - USP).

Ao doutor Sandro Martinelli Reia pelos esforços conjuntos, pelo apoio pessoal e profissional e pela didática para me ensinar diversos conceitos de computação e estatística, sem os quais os resultados aqui apresentados não existiriam.

À Universidade de São Paulo (USP) pela infraestrutura administrativa, técnica e educacional.

Ao Instituto de Física de São Carlos (IFSC - USP), em particular à seção de Pós-Graduação, ao Serviço de Biblioteca e Informação (SBI) e à Seção Técnica de Informática (Scinfor), que sempre disponibilizaram atendimento e serviços impecáveis.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), cujo financiamento pelo Programa de Excelência Acadêmica (Proex) permitiu minha dedicação exclusiva ao desenvolvimento desta dissertação.

A todas as pessoas, amigos, amigas e familiares que sempre estiveram presentes ao meu lado, pelo incentivo e constante suporte.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.



*“Você é uma linda flor, e eu amo te ver crescer”*

*Jake - Hora de Aventura*

*(personagem fictício)*



## RESUMO

SALHANI, J. A. S. **Modelando *brainstorming* com sistemas quadro-negro.** 2021. 95p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Os sistemas quadro-negro são modelos computacionais de trabalho em grupo que incorporam a noção popular de *brainstorming*, na qual especialistas (agentes) escrevem ideias promissoras (dicas) para resolver um dado problema em um quadro negro central ao qual todos os membros do grupo têm acesso. Usaremos esse ambiente cooperativo para resolver problemas discretos de satisfação de restrições muito simples, as charadas cripto-aritméticas. Uma charada cripto-aritmética é uma operação algébrica (adição, por exemplo) em que os dígitos dos números são representados por letras, de modo que cada letra represente um dígito único, e o objetivo é encontrar a correspondência dígito-letra que torna a operação soma válida pelas regras da aritmética. As dicas exibidas no quadro-negro são correspondências parciais dígito-letra que tornam a soma módulo 10 dos dígitos das colunas individuais correta. Os resultados mostram que o sistema quadro-negro sempre é mais eficiente do que a busca cega, onde os agentes geram atribuições dígito-letra aleatórias até encontrarem a solução da charada. Como no caso de um único agente o quadro-negro pode ser usado como uma memória externa para armazenar as dicas descobertas, podemos usar os sistemas quadro-negro para estudar as vantagens da cooperação, ou seja, de formar equipes com dois ou mais agentes. Encontramos que a vantagem da cooperação é maior quando as charadas são desafiadoras (têm mais letras distintas e menos soluções) ou quando o tamanho do quadro é muito restrito, o que limita o seu uso como memória externa dos agentes. Entretanto, mostramos que o aumento da equipe não resulta necessariamente em melhora de desempenho, o que aponta a existência de um tamanho de grupo que otimiza o desempenho do sistema quadro-negro. Um resultado contraintuitivo de nosso modelo é a melhora do desempenho da equipe para quadros limitados, que não tem capacidade de exibir todas as dicas possíveis, evidenciando nesse contexto restrito a questão da sobrecarga de informação que afeta a resolução de problemas no mundo real.

**Palavras-chave:** Modelo baseado em agentes. Sobrecarga de informação. Modelos cooperativos. Inteligência coletiva. Sistemas quadro-negro.



## ABSTRACT

SALHANI, J. A. S. **Modeling brainstorming with blackboard systems**. 2021. 95p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Blackboard systems are computational models of group work that incorporate the popular notion of brainstorming, in which experts (agents) write promising ideas (hints) to solve a given problem on a central blackboard to which all group members have access. We will use this cooperative environment to solve very simple discrete constraint satisfaction problems, viz., crypto-arithmetic riddles. A crypto-arithmetic riddle is an algebraic operation (addition, for example) in which the digits of the numbers are represented by letters, so that each letter represents a single digit, and the goal is to find the digit-letter correspondence that makes the operation sum valid under the rules of the arithmetic. The hints displayed on the blackboard are partial digit-letter matches that make the sum modulo 10 of the digits of the individual columns correct. The results show that the blackboard system is always more efficient than the blind search, where agents generate random digit-letter assignments until they find the solution to the puzzle. Since in the case of a single agent the blackboard can be used as an external memory to store the discovered hints, we can use the blackboard systems to study the advantages of cooperation, i.e., of forming teams with two or more agents. We found that the advantage of cooperation is greater when the riddles are challenging (they have more distinct letters and fewer solutions) or when the size of the blackboard is very restricted, which limits its use as an external memory for the agents. However, we have shown that increasing the team size does not necessarily result in an improved performance, which points to the existence of a group size that optimizes the performance of the blackboard system. A counterintuitive result of our model is the improvement of the team's performance for limited blackboards that do not have enough space to display all possible hints, highlighting in this restricted context the issue of information overload that affects problem-solving in the real world.

**Keywords:** Agent-based model. Information overload. Cooperative models. Collective intelligence. Blackboard systems.



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Histogramas do número de variantes da charada *WHT* que exhibe o número de dicas  $H$  (painel esquerdo) e o número de soluções  $S$  (painel direito). Os histogramas foram elaborados com as 45360 permutações da charada original. As larguras das barras são  $\Delta H = 1$  e  $\Delta S = 1$ . . . . . 35
- Figura 2 – Gráfico de dispersão mostrando o número de dicas  $H$  e o número de soluções  $S$  para as 45360 permutações da charada *WHT*. Os símbolos azuis representam os valores médios de  $S$  para  $H$  fixo. A curva azul é o ajuste linear  $\bar{S} = f(H) = \alpha H + \beta$  com  $\alpha = -0.09$  e  $\beta = 105.96$ . . . . . 36
- Figura 3 – Histogramas do número de variantes da charada *SMM* que exhibe o número de dicas  $H$  (painel esquerdo) e o número de soluções  $S$  (painel direito). Os histogramas foram elaborados com 79770 permutações aleatórias distintas da charada original que representam apenas 0.06% do espaço de permutações das letras da charada original. As larguras das barras são  $\Delta H = 5$  e  $\Delta S = 5$ . . . . . 37
- Figura 4 – Gráfico de dispersão mostrando o número de dicas  $H$  e o número de soluções  $S$  para 57031 permutações aleatórias distintas da charada *SMM*. Os símbolos azuis representam os valores médios de  $S$  para  $H$  fixo. A curva azul é o ajuste linear  $\bar{S} = f(H) = \alpha H + \beta$  com  $\alpha = -0.02$  e  $\beta = 25.12$ . . . . . 38
- Figura 5 – Histogramas do número de variantes da charada *DGR* que exhibe o número de dicas  $H$  (painel esquerdo) e o número de soluções  $S$  (painel direito). Os histogramas foram elaborados com 19106 permutações aleatórias distintas da charada original que representam apenas cerca de  $10^{-6}\%$  do espaço de permutações das letras da charada original. As larguras das barras são  $\Delta H = 5$  e  $\Delta S = 1$ . . . . . 39
- Figura 6 – Gráfico de dispersão mostrando o número de dicas  $H$  e o número de soluções  $S$  para 8015 permutações aleatórias distintas da charada *DGR*. Os símbolos azuis representam os valores médios de  $S$  para  $H$  fixo. A curva azul é o ajuste linear  $\bar{S} = f(H) = \alpha H + \beta$  com  $\alpha = 0.005$  e  $\beta = 7.04$ . . . . . 40
- Figura 7 – Fluxo do processo de atualização do quadro por cada um dos  $M$  agentes separado em 4 condicionais centrais. Após todos os  $M$  agentes serem escolhidos e atualizarem o quadro, temos  $t = 1$ . Caso ao menos um deles seja responsável por resolver a charada, armazenamos  $t^* = 1$  e concluímos esta amostragem. Caso contrário, inicializamos a dinâmica de busca. . . . . 43

Figura 8 – Fluxo do processo da dinâmica de busca separado em 2 condicionais centrais. No momento em que um agente é responsável por solucionar a charada, armazenamos o tempo de busca $t^* = t$ e finalizamos nossa dinâmica. . . . .	45
Figura 9 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ (painel esquerdo) e uso médio do quadro negro ao término da busca $\langle H^* \rangle$ (painel direito) para a charada <i>DGR</i> como funções do tamanho máximo do quadro-negro $B$ para números de agentes $M = 1, 10$ e $100$ como indicado. A inserção amplia a região em torno ao desempenho ótimo do grupo, cujo custo computacional $\langle C \rangle$ é mínimo. . . . .	48
Figura 10 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ (painel esquerdo) e número médio de dicas exibidas no quadro negro no início da dinâmica $\langle H_i \rangle$ (painel direito) para a charada <i>DGR</i> como funções do número de agentes $M$ para quadros de tamanho $B = 1, 10, 100$ e $351$ como indicado. A inserção amplia a região $1 < M < 40$ . . . . .	50
Figura 11 – Fração média de movimentos elementares e de assimilações como função do número de agentes $M$ para a charada <i>DGR</i> com quadros de tamanho $B = 1$ (painel esquerdo) e $B = 10$ (painel direito). . . . .	51
Figura 12 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ (painel esquerdo) e uso médio do quadro negro $\langle H^* \rangle$ (painel direito) ao término da busca para a charada <i>SMM</i> como funções do tamanho máximo do quadro-negro $B$ para números de agentes $M = 1, 10$ e $100$ como indicado. A inserção amplia a região em torno ao desempenho ótimo do grupo. . . . .	54
Figura 13 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ (painel esquerdo) e número médio de dicas exibidas no quadro negro no início da dinâmica $\langle H_i \rangle$ (painel direito) para a charada <i>SMM</i> como funções do número de agentes $M$ para quadros de tamanho $B = 1, 10, 100$ e $506$ como indicado. A inserção amplia a região $1 < M < 40$ . . . . .	56
Figura 14 – Fração média de movimentos elementares e de assimilações como função do número de agentes $M$ para a charada <i>SMM</i> com quadros de tamanho $B = 1$ (painel esquerdo) e $B = 10$ (painel direito). . . . .	57
Figura 15 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ (painel esquerdo) e uso médio do quadro negro ao término da busca $\langle H^* \rangle$ (painel direito) para a charada <i>WHT</i> como funções do tamanho máximo do quadro-negro $B$ para números de agentes $M = 1, 10$ e $100$ como indicado. A inserção amplia a região de quadros pequenos. . . . .	59

Figura 16 – Histograma relativo ao número de ocorrências em que uma dada solução $S_i$ , com $i = 0, 1, 2, \dots, 65$ , é encontrada para $M = 1$ (painel à esquerda) e $M = 10$ (painel à direita) relativos aos tamanhos de quadro $B = 1, 10$ e $100$ para a charada $WHT$ , conforme a legenda. Vale lembrar que existem $S = 66$ soluções para a charada $WHT$ . . . . .	61
Figura 17 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ (painel esquerdo) e número médio de dicas exibidas no quadro negro no início da dinâmica $\langle H_i \rangle$ (painel direito) para a charada $WHT$ como funções do número de agentes $M$ para quadros de tamanho $B = 1, 10, 100$ e $234$ como indicado. A inserção amplia a região $1 < M < 100$ . . . . .	63
Figura 18 – Fração média de movimentos elementares e de assimilações como função do número de agentes $M$ para a charada $WHT$ com quadros de tamanho $B = 1$ (painel esquerdo) e $B = 10$ (painel direito). . . . .	64
Figura 19 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ em função do tamanho relativo do quadro $B/B_{max} \leq 1$ (painel à esquerda) para $M = 10$ e em função do tamanho da equipe $M$ (painel à direita) para $B = 10$ . Lembramos que $B_{max} = 351, 506$ e $234$ para as charadas $DGR, SMM$ e $WHT$ , respectivamente. . . . .	65
Figura 20 – Grafos mostrando as relações de independência (à esquerda) e de cooperação (à direita) entre as $H = 351$ dicas da charada $DGR$ . Cada nó representa uma das dicas e sua cor indica a coluna a que pertence. Apenas a maior componente do grafo das relações de cooperação é mostrado. Todas as dicas associadas às colunas $A + A = E$ e $O + E = O$ não contribuem para essa componente. . . . .	76
Figura 21 – Grafos mostrando as relações de independência (à esquerda) e de cooperação (à direita) entre as $H = 506$ dicas da charada $SMM$ . Cada nó representa uma das dicas e sua cor indica a coluna a que pertence. Apenas a maior componente do grafo das relações de cooperação é mostrado. A dica $(M, 0)$ não contribui para essa componente. . . . .	78
Figura 22 – Grafos mostrando as relações de independência (à esquerda) e de cooperação (à direita) entre as $H = 234$ dicas da charada $WHT$ . Cada nó representa uma das dicas e sua cor indica a coluna a que pertence. Apenas a maior componente do grafo das relações de cooperação é mostrado. As 18 dicas associadas à coluna $O + O = E$ não contribuem para essa componente. . . . .	79
Figura 23 – Custo computacional médio $\langle C \rangle$ (à esquerda) e número de dicas exibidas no quadro ao final da busca $\langle H^* \rangle$ (à direita) como funções da razão $B/H$ para quatro variantes da charada $DGR$ com $H = 288$ e $S$ como indicado. . . . .	84

- Figura 24 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 351$  (mesmo número de dicas da charada original) e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número  $S$  de soluções de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 28$ . . . . . 85
- Figura 25 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 540$  e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número  $S$  de soluções de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 28$ . . . . . 85
- Figura 26 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 666$  e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 9$ . . . . . 86
- Figura 27 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 792$  e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 16$ . . . . . 86
- Figura 28 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *SMM* com  $H = 191$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 3$  e  $S = 198$ . . . . . 87
- Figura 29 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *SMM* com  $H = 317$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 2$  e  $S = 180$ . . . . . 88
- Figura 30 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *SMM* com  $H = 380$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 132$ . . . . . 89

Figura 31 – Curvas de custo $\langle C \rangle$ (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca $\langle H^* \rangle$ (à direita) em relação à razão $B/H$ para variantes de <i>SMM</i> com $H = 506$ . A cada variante temos associado um número de soluções $S$ de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são $S = 1$ e $S = 28$ . . . . .	90
Figura 32 – Curvas de custo $\langle C \rangle$ (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca $\langle H^* \rangle$ (à direita) em relação a $B/H$ com $H = 45$ para 100 variantes do problema original <i>WHT</i> . A cada variante temos associado um número de soluções $S$ e àquelas com mesmo $S$ atribuímos mesma coloração (conforme a legenda). . . . .	90
Figura 33 – Curvas de custo $\langle C \rangle$ (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca $\langle H^* \rangle$ (à direita) em relação à razão $B/H$ para variantes de <i>WHT</i> com $H = 108$ . A cada variante temos associado um número $S$ de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são $S = 2$ e $S = 180$ . . . . .	91
Figura 34 – Curvas de custo $\langle C \rangle$ (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca $\langle H^* \rangle$ (à direita) em relação a $B/H$ com $H = 171$ para 100 variantes do problema original <i>WHT</i> . A cada variante temos associado um número $S$ de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são $S = 24$ e $S = 960$ . . . . .	91
Figura 35 – Curvas de custo $\langle C \rangle$ (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca $\langle H^* \rangle$ (à direita) em relação a $B/H$ com $H = 234$ para 100 variantes do problema original <i>WHT</i> . A cada variante temos associado um número $S$ de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são $S = 38$ e $S = 105$ . . . . .	92
Figura 36 – Curvas de custo $\langle C \rangle$ (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca $\langle H^* \rangle$ (à direita) em relação a $B/H$ com $H = 360$ para 100 variantes do problema original <i>WHT</i> . A cada variante temos associado um número $S$ de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são $S = 20$ e $S = 200$ . . . . .	92
Figura 37 – Influência do número de amostras $\mathcal{A}$ sobre a estimativa do custo computacional médio $\langle C \rangle$ para a charada <i>DGR</i> . . . . .	93
Figura 38 – Influência do número de amostras $\mathcal{A}$ sobre a estimativa do custo computacional médio $\langle C \rangle$ para a charada <i>SMM</i> . . . . .	94
Figura 39 – Influência do número de amostras $\mathcal{A}$ sobre a estimativa do custo computacional médio $\langle C \rangle$ para a charada <i>WHT</i> . . . . .	95



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades centrais que caracterizam uma determinada charada cripto aritmética. Aqui apresentamos, em ordem, o número de letras, o número de letras únicas, o número de soluções $S$ , o número de dicas totais $H$ e de dicas corretas $H_c$ , o tamanho do espaço de estados $\mathcal{N}$ e o número de variantes para as charadas $DGR$ , $SMM$ e $WHT$ . . . . .	40
--	----



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

*DGR*      *DONALD + GERALD = ROBERT*

*SMM*      *SEND + MORE = MONEY*

*WHT*      *WOW + HOT = TEA*



## LISTA DE SÍMBOLOS

$S$	Número de soluções de uma dada charada cripto-aritmético
$H$	Número de dicas presentes em uma dada charada cripto-aritmética
$H_c$	Número de dicas corretas de um dado problema cripto aritmético
$B$	Tamanho do quadro-negro disponível para o armazenamento de dicas distintas
$B_{max}$	Tamanho máximo de um quadro-negro, igual ao número de dicas distintas de uma charada cripto-aritmética
$M$	Número de agentes em uma equipe
$t$	Tempo transcorrido ao longo da busca por solução da charada
$\Delta t$	Incremento temporal igual a $1/M$
$t^*$	Tempo computado no fim da busca, quando uma solução é encontrada
$\langle t^* \rangle$	Tempo médio de busca
$\mathcal{A}$	Número de amostras independentes
$\langle t_{bc}^* \rangle$	Tempo médio de busca utilizando algoritmo de busca cega
$\mathcal{N}$	Número total de atribuições dígito-letra de uma charada
$q$	razão entre $S$ e $\mathcal{N}$
$\langle C \rangle$	Custo computacional médio
$\langle H_i \rangle$	Número médio de dicas no quadro-negro ao início da dinâmica em $t = 1$
$\langle H^* \rangle$	Número médio de dicas no quadro-negro quando uma solução é encontrada em $t = t^*$



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	CHARADAS CRIPTO-ARITMÉTICAS	31
2.1	A família da charada <i>WHT</i>	32
2.2	A família da charada <i>SMM</i>	35
2.3	A família da charada <i>DGR</i>	37
3	O SISTEMA QUADRO-NEGRO	41
4	BRAINSTORMING	47
4.1	A charada <i>DGR</i>	47
4.2	A charada <i>SMM</i>	53
4.3	A charada <i>WHT</i>	58
4.4	Comparando as diferentes charadas	64
5	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICES	73
	APÊNDICE A – O ESPAÇO DE DICAS	75
	APÊNDICE B – BUSCA CEGA	81
	APÊNDICE C – ANÁLISE DE ROBUSTEZ	83
C.1	Variantes da charada <i>DGR</i>	83
C.2	Variantes da charada <i>SMM</i>	87
C.3	Variantes da charada <i>WHT</i>	88
	APÊNDICE D – INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE AMOSTRAS	93



## 1 INTRODUÇÃO

A tecnologia moderna, particularmente o ramo que desenvolve as interfaces entre hardware, software e pessoa, tem contribuído enormemente para o aumento da nossa produtividade como pesquisadores e produzido avanços quase que inimagináveis na Ciência e na Tecnologia, concretizando assim a profecia feita pelo visionário pioneiro da computação Doug Engelbart na década de 60.<sup>1</sup> Pode-se argumentar que os inúmeros pacotes de software capazes de resolver problemas complexos de matemática e estatística, softwares de visualização de dados, processadores de textos, etc. que hoje são literalmente extensões de nossas mentes, contribuem para aumentar a nossa inteligência. De fato, se inteligência for medida pela capacidade e rapidez de resolver problemas, uma definição certamente bem adequada para o meio científico-tecnológico, torna-se difícil rebater esse argumento.

Devemos lembrar, entretanto, que a inteligência de uma pessoa (medida pelo fator g obtido através de uma extensa bateria de testes que exploram as mais diversas habilidades cognitivas) tem uma forte componente genética (em torno de 50%), sendo o restante determinado durante o desenvolvimento infantil.<sup>2</sup> Desse modo, não há muito o que um adulto possa fazer para aumentar a sua inteligência, limitando o crescimento do elemento que, por enquanto, ainda é o mais importante da tríade hardware-software-pessoa. Uma forma, quase que involuntária, amplamente utilizada de se contornar esse obstáculo é considerar o trabalho em equipe. Apesar disso, só muito recentemente mediu-se o fator g de um grupo de pessoas usando os mesmos testes empregados para determinar o fator g de um indivíduo particular.<sup>3</sup> Os resultados indicam que o fator g de grupos de 3 e 5 indivíduos é independente daqueles de seus membros e muda conforme a personalidade e o gênero dos membros. Por exemplo, encontrou-se uma correlação positiva entre o número de integrantes mulheres e o fator g dos grupos. Isso abre a possibilidade de produzirmos um aumento efetivo da inteligência do grupo se descobirmos a sua composição e organização ótimas.

Essa é uma linha de pesquisa de extrema relevância se lembrarmos que a força de trabalho dos países desenvolvidos é formada hoje majoritariamente por pessoas que ‘resolvem’ problemas (por exemplo, exploram novas e velhas fontes de energia, planejam fármacos, desenvolvem software, criptografam informações, projetam foguetes, etc.) e que de alguma forma processam informação em equipe.<sup>4</sup> Nesse aspecto, vale observar que uma hipótese comumente aceita é a de que um grupo de pessoas trabalhando juntas na solução de um problema seja capaz de resolvê-lo de forma mais rápida que as mesmas pessoas trabalhando de forma independente, embora saibamos muito pouco sobre o ganho quantitativo advindo da cooperação ou sobre os princípios básicos que fazem a cooperação ser mais eficiente que o trabalho independente.<sup>5, 6</sup> A investigação dessas questões num

contexto bastante limitado é o objeto de estudo dessa dissertação que generaliza a proposta visionária de Engelbart<sup>1</sup> de que o ‘poder neural’ (visto agora como a inteligência do grupo e não a inteligência individual) é o recurso mais importante a ser explorado para o desenvolvimento científico e tecnológico.

Para isso, é desejável um modelo mínimo da solução de problemas em grupo que nos permita investigar as vantagens do trabalho cooperativo e produzir conclusões precisas, mesmo que válidas apenas no âmbito do modelo. Os sistemas cooperativos tipo quadro-negro, que são hoje uma ferramenta básica nos kits de Inteligência Artificial, são inspirados na visão popular de uma força-tarefa como um grupo de especialistas discutindo um problema e escrevendo as ideias promissoras em um quadro-negro ao qual todos os membros do grupo tem acesso.<sup>7</sup> Assim, o sistema quadro-negro pode ser pensado como um grupos de especialistas numa situação de *brainstorming* que pode ser modelada computacionalmente usando uma abordagem baseada em agentes com relativa facilidade.<sup>6, 8, 9</sup>

É importante esclarecer desde já o que entendemos por cooperação no contexto computacional que será o tema dessa dissertação. A cooperação ocorre quando agentes em um grupo (força-tarefa) trocam informação ou dicas enquanto buscam a solução de um problema em comum. Podemos pensar esses agentes como implementações de processos de busca independentes, executados em processadores separados, tal que em alguma etapa do processo dá-se a troca de dicas.<sup>6</sup> As dicas trocadas entre os agentes não são necessariamente corretas, no sentido de serem úteis para a solução do problema, mas a aceitação de uma dica altera a busca executada pelo agente receptor. Um exemplo bastante conhecido de busca cooperativa são os algoritmos genéticos onde os membros da população trocam partes de seus cromossomos a fim de gerar membros mais adaptados ao ambiente externo.<sup>10, 11</sup> Naturalmente, os algoritmos genéticos, embora cooperativos, não são adequados para modelar a solução de problemas por forças-tarefas. Já os algoritmos culturais baseados no mecanismo social de imitação dos indivíduos mais bem sucedidos,<sup>12</sup> menos conhecidos mas tão ou mais eficientes que os algoritmos genéticos,<sup>13</sup> são mais apropriados para descrever a solução coletiva de problemas.<sup>14</sup> Entretanto, assim como nos algoritmos genéticos, os algoritmos culturais fazem uso explícito de uma função custo, que essencialmente mede quão boa é a solução proposta por cada indivíduo. Em geral, esse tipo de informação não existe na prática, onde os elementos com valor são as ‘ideias promissoras’ ou dicas. Felizmente, como veremos, os sistemas quadro-negro utilizam-se apenas desses elementos.

Apesar da facilidade de concepção e implementação de sistemas quadro-negro, um obstáculo para se modelar o processo de *brainstorming* é a escolha do problema a ser resolvido que deve possibilitar a identificação das dicas a serem comunicadas com um mínimo de ambiguidade. Nessa dissertação vamos usar charadas cripto-aritméticas<sup>15, 16</sup> que são excelentes exemplos de problemas discretos de satisfação de restrições.<sup>17</sup> Por

exemplo, para resolvermos a charada cripto-aritmética  $AB + AC = DE$  devemos encontrar qual é a relação biunívoca (mapa) entre as 5 letras  $A, B, C, D$  e  $E$  e os 10 dígitos  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  e  $9$  que torna a operação soma válida pelas regras da aritmética. Para essa charada, o espaço de estados corresponde às  $10!/5! = 30240$  possíveis atribuições dígito-letra (ou estados) que devem satisfazer dois tipos de restrições: (a) o resultado da soma deve ser correto e (b) as letras à esquerda das palavras ( $A$  e  $D$ , no exemplo) não podem tomar o valor  $0$ . O estado  $A = 1, B = 3, C = 4, D = 2, E = 7$  resolve a charada pois  $13 + 14 = 27$ . Aliás essa charada tem exatamente 120 soluções, que podem ser determinadas através da enumeração e teste exaustivo dos 30240 estados. Já o estado  $A = 4, B = 1, C = 5, D = 3, E = 6$  não satisfaz a primeira restrição pois  $41 + 45 \neq 36$ . Entretanto, podemos dizer que esse estado está parcialmente correto já que a soma da coluna  $B + C = E$  (ou seja,  $1 + 5 = 6$ ) está correta. Vamos então definir uma dica como a associação parcial dígito-letra tal que a soma módulo 10 de uma dada coluna seja correta. É claro que, excetuando-se a coluna mais à direita, a nossa definição de dica deve levar em conta a possibilidade de um fator 1 extra na soma de uma dada coluna, devido a soma da coluna imediatamente a sua direita, ou seja,  $A = 2, D = 5$  é uma dica para a coluna  $A + A = D$ . No Capítulo 2 dessa dissertação apresentamos um estudo detalhado de algumas charadas cripto-aritméticas clássicas ( $DONALD + GERALD = ROBERT$ ,  $WOW + HOT = TEA$  e  $SEND + MORE = MONEY$ ) e, em particular, caracterizamos a interação entre as diferentes dicas no apêndice A.

Uma forma de encontrar a solução de uma charada cripto-aritmética é realizar uma busca no espaço de estados da charada. Por busca entendemos que a cada etapa um novo estado é gerado, através de alguma prescrição específica, e testado se satisfaz todas as restrições. Essa é a maneira padrão utilizada para se resolver problemas quando não há um algoritmo para se construir a solução do problema. Partindo de um estado qualquer, o movimento elementar de exploração do espaço de estados dá-se pela escolha aleatória de uma letra que aparece na charada, por exemplo, a letra  $A$  da charada  $AB + AC = DE$ , e de um dígito aleatório, por exemplo, o dígito  $0$ . Vamos supor que nosso estado pré-movimento seja tal que  $A = 9$ . Se o dígito  $0$  não estiver associado a nenhuma outra letra da charada, então o novo estado é o estado com a associação  $A = 0$  combinada com as outras associações dígito-letra do estado pré-movimento elementar. Se o dígito  $0$  já estiver associado a outra letra da charada, digamos a letra  $E$ , então o novo estado é o o estado com as associações  $A = 0$  e  $E = 9$  combinadas com as outras associações dígito-letra do estado pré-movimento elementar. Nesse caso, ocorre apenas uma troca entre os dígitos associados às letras  $A$  e  $E$ . É claro que a repetição desse processo eventualmente irá produzir um estado que satisfaz todas as restrições e, portanto, resolve a charada.

No cenário de busca coletiva considerado nessa dissertação, vamos supor que cada agente seja capaz de executar o movimento elementar de modo que cada um deles pode, em princípio, encontrar a solução da charada. Vamos supor, também, que a busca coletiva

seja interrompida quando um dos agentes encontra uma das possíveis soluções da charada. No caso da busca coletiva cega, em que os agentes exploram o espaço de estados de modo independente gerando um estado aleatório a cada atualização, sabemos que o tempo para encontrar a solução diminui com o inverso do número de agentes, se esse número for muito menor que o total de estados no espaço de busca.<sup>18</sup> Nosso interesse é descobrir se e como a cooperação entre os agentes melhora o desempenho da busca coletiva em relação, por exemplo, ao desempenho da busca coletiva cega. A introdução da cooperação entre os agentes requer a adição de novas possibilidades de atualização de seus estados. O esquema que usaremos envolve a superposição de duas novas ações – a escrita e a assimilação de dicas no quadro-negro – ao movimento elementar. Desse modo, os agentes podem incorporar em seus estados associações dígito-letras parcialmente corretas que são exibidas no quadro negro de acesso público. No Capítulo 3 descrevemos em detalhe o processo de atualização de cada agente, mas aqui desejamos apenas enfatizar que além do movimento elementar, que pode ser visto como a produção criativa de novas associações, há a possibilidade de cópia da solução parcial de outros agentes, que indica a utilização de informação conhecida. Um aspecto interessante desse esquema de cooperação é que podemos controlar a informação disponível aos agentes por meio da limitação do tamanho do quadro-negro. A ideia é que ao utilizar o quadro-negro, o espaço de busca seja reduzido consideravelmente. Por exemplo, na charada  $AB + AC = DE$  há 72 dicas associadas a coluna  $B + C = E$  e 18 dicas associadas a coluna  $A + A = D$  (9 dessas dicas vem da possibilidade  $1 + A + A = D$ ), de modo que o espaço original de 30240 estados reduz-se a escolha das 90 dicas expostas no quadro.

A medida natural de desempenho do grupo de agentes é o tempo que o grupo leva para encontrar a solução da charada cripto-aritmética, onde entendemos por tempo o número total de atualizações realizadas em todos os agentes. Entretanto, a fim de compararmos charadas com diferentes número de estados e de soluções, bem como grupos compostos por diferentes números de agentes, é conveniente definirmos o custo computacional da busca como a razão entre o tempo que o grupo leva para encontrar a solução usando o sistema quadro-negro e o tempo que um grupo de agentes independentes, onde cada agente produz um estado aleatório a cada atualização, leva para encontrar a solução. Desse modo, o tempo de busca é medido em relação ao tempo de busca do algoritmo busca cega. No Apêndice B apresentamos a derivação analítica da distribuição dos tempos de busca desse algoritmo. O Capítulo 4 descreve como o custo computacional varia com a charada, com o número de agentes e com o tamanho do quadro-negro. É evidente já para a charada  $AB + AC = DE$  que as letras em si não apresentam qualidade semântica. De fato, sua resolução pela dinâmica de agentes utilizando quadro-negro é idêntica caso considerássemos a charada  $EC + EG = HT$ , mas diferente caso alterássemos as suas posições, por exemplo para  $BA + AC = DE$ . Dizemos que a troca de posição das letras caracteriza charadas da mesma família da charada original. Por conta disso, no apêndice C explicitamos como o

---

custo computacional varia conforme consideramos charadas da mesma família daquelas originalmente estudadas de modo a avaliar a robustez de nossos resultados e conclusões. Também no sentido da avaliação de robustez, no apêndice D mostramos que o número de amostras (buscas) independentes que utilizamos na obtenção de nossos resultados é suficiente para que as flutuações estatísticas possam ser desprezadas.

No corpo da dissertação avaliaremos em detalhes cada um dos resultados que obtivemos em relação aos efeitos da cooperatividade proporcionada pela dinâmica de *brainstorming* com quadro-negro, mas apontemos aqui nossos resultados mais notáveis. Em nossos estudos encontramos que a otimização do desempenho de grupo é mais expressiva em contextos onde o problema a ser resolvido é complexo demais para um único agente com capacidade de execução limitada. De fato, sistemas colaborativos com múltiplos agentes são conhecidamente eficientes<sup>12, 19, 20</sup> para tarefas cuja colaboração entre áreas especializadas é crucial, tal como no diagnóstico médico.<sup>21</sup> No entanto, curiosamente, o aumento do número de pessoas nas equipes especializadas não necessariamente melhora seu desempenho, evidenciando a existência de um tamanho de grupo que otimiza o desempenho coletivo.<sup>22, 23</sup> Uma das descobertas mais interessantes e contraintuitivas que emerge de nosso modelo refere-se ao problema da sobrecarga de informação. Nesse contexto temos que a limitação de informação disponível pelo quadro-negro aos agentes resulta em melhores desempenhos coletivos, pois garante diversidade de conhecimento enquanto evita o efeito de sobrecarga de informação.<sup>24, 25</sup> Quando a informação é limitada, incentivamos os agentes a buscarem soluções não apenas por meio de mecanismos de reprodução de conhecimento (cópia de informação), mas também via processos criativos (movimento elementar), que são determinantes na resolução de problemas reais.<sup>26, 27</sup>



## 2 CHARADAS CRIPTO-ARITMÉTICAS

Charadas cripto-aritméticas como

$$DONALD + GERALD = ROBERT \quad (2.1)$$

são problemas de satisfação de restrição em que a tarefa é encontrar uma atribuição dígito-letra biunívoca de modo que os números inteiros representados pelas palavras sejam somados corretamente.<sup>15</sup> Em particular, na charada (2.1), a qual iremos nos referir daqui em diante como charada *DGR*, há  $10!$  diferentes atribuições dígito-letra ou estados que compõem o espaço de estados em que a busca ocorre. Entretanto, apenas um estado satisfaz às restrições que  $D \neq 0$ ,  $G \neq 0$ ,  $R \neq 0$  e que a soma (2.1) seja satisfeita, a saber,  $A = 4$ ,  $B = 3$ ,  $D = 5$ ,  $E = 9$ ,  $G = 1$ ,  $L = 8$ ,  $N = 6$ ,  $O = 2$ ,  $R = 7$ ,  $T = 0$ , que é a única solução da charada *DGR*. Esse tipo de charada cripto-aritmética em que as letras formam palavras da língua inglesa e sua composição forma frases significativas são denominadas charadas alfabéticas e foram popularizados na década de 1930 pelo jornal belga de matemática recreativa *Sphinx*.<sup>16</sup>

É claro que, sob a perspectiva dos algoritmos que resolvem charadas cripto-aritméticas, o significado das palavras e das frases formadas é irrelevante. Nesse aspecto é interessante estudar as propriedades da família de charadas *DGR* composta por todas as variantes distintas dessa charada, obtidas pelas permutações das letras. Há duas propriedades de interesse que, acreditamos, permitem inferir a dificuldade de uma charada cripto-aritmética. A primeira é simplesmente o número de soluções da charada e a segunda é a estrutura de seu espaço de dicas.

O número de soluções  $S$  de uma charada cripto-aritmética é obtido através da enumeração e teste de todos os seus estados. Como mencionado no capítulo 1, dicas consistem de atribuições dígito-letra que somam módulo 10 corretamente em cada coluna da charada. Tal escolha se justifica devido à analogia com as estratégias usadas por humanos para resolver essas charadas, já que a enumeração dos estados é impossível sem o uso de um computador.<sup>28</sup> Assim, a atribuição  $N = 3$ ,  $R = 2$ ,  $B = 5$  corresponde a uma dica associada à segunda coluna (da esquerda para a direita iniciando a contagem a partir da coluna 0 que é a coluna mais a esquerda) da charada *DGR*. Nessa dissertação vamos representar as dicas utilizando um vetor linha. A dica em questão é representada pelo vetor  $(2, 3, 2, 5)$ , onde a primeira componente representa a coluna à qual a dica pertence e as outras componentes indicam os dígitos atribuídos às letras que aparecem na coluna da dica. Essa definição de dicas é fundamental para a construção do sistema quadro-negro, como veremos no capítulo 3.

Do total de dicas  $H$  de uma charada particular, apenas uma fração são subconjuntos

de atribuições corretas. Vamos nos referir a essas dicas como dicas corretas e representar seu número por  $H_c$ . Por exemplo, no caso da charada  $DGR$  temos  $H = 351$  e  $H_c = 6$ . A dica usada como exemplo no parágrafo anterior  $(2, 3, 2, 5)$  não é uma dica correta. Já a dica  $(0, 5, 1, 7)$  que corresponde a atribuição  $D = 5, G = 1, R = 7$  é uma dica correta. Recordemos que, com exceção das dicas associadas à coluna mais a direita da charada, deve-se levar em conta a possibilidade de um fator 1 extra na soma de uma dada coluna vindo da soma da coluna imediatamente a sua direita.

É interessante que o espaço formado pelas  $H$  dicas de uma charada particular exhibe uma estrutura não-trivial uma vez que as dicas podem interagir entre si. Em particular, duas dicas podem ser independentes, cooperativas, competitivas e cooperativa-competitivas. Por exemplo, na charada  $DGR$  as dicas  $(0, 1, 2, 3)$  e  $(1, 4, 0, 4)$ , que correspondem às atribuições  $D = 1, G = 2, R = 3$  e  $O = 4, E = 0, O = 4$ , são independentes pois não têm nenhum dígito em comum. Já as dicas  $(0, 1, 2, 3)$  e  $(2, 4, 3, 7)$ , que correspondem às atribuições  $D = 1, G = 2, R = 3$  e  $N = 4, R = 3, B = 7$ , são cooperativas pois o dígito 3 está presente em ambas e está associado a mesma letra,  $R$  no caso. As dicas  $(1, 4, 0, 4)$  e  $(2, 4, 3, 7)$ , que correspondem às atribuições  $O = 4, E = 0, O = 4$  e  $N = 4, R = 3, B = 7$ , são competitivas pois atribuem o dígito 4 a letras diferentes,  $O$  e  $N$  no caso. Finalmente, as dicas  $(0, 1, 2, 3)$  e  $(0, 1, 3, 4)$ , que correspondem às atribuições  $D = 1, G = 2, R = 3$  e  $D = 1, G = 3, R = 4$  são cooperativa-competitivas pois o dígito 1 está presente em ambas e está associado a mesma letra ( $D$ , no caso) mas o dígito 3 é atribuído à letras diferentes ( $R$  e  $G$ , respectivamente). É claro que um estado só pode exibir pares de dicas independentes e/ou cooperativas. No Apêndice A utilizamos grafos para facilitar a visualização dessas interações.

Além de caracterizar as variantes da charada  $DGR$  de acordo com o número de soluções e de dicas, neste capítulo vamos considerar também a charada  $WHT$  definida pelas restrições

$$WOW + HOT = TEA, \quad (2.2)$$

$W \neq 0, H \neq 0$  e  $T \neq 0$ , bem como a charada  $SMM$  definida pelas restrições

$$SEND + MORE = MONEY, \quad (2.3)$$

$S \neq 0$  e  $M \neq 0$ . Serão essas três charadas (e suas variantes) que usaremos para testar a eficiência do sistema quadro-negro no capítulo seguinte. Vamos começar pela charada  $WHT$  que é a mais simples das três charadas, no sentido de conter menos letras.

## 2.1 A família da charada $WHT$

Como a charada  $WHT$  tem seis letras distintas, o espaço de estados compreende  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$  atribuições dígito-letra distintas. Através da enumeração e teste de todos esses estados constatamos que essa charada tem  $S = 66$  soluções.

Para calcularmos o número de dicas  $H$  devemos considerar cada uma das colunas da soma (2.2) separadamente. Começemos pela coluna 2,  $W + T = A$ , lembrando que a soma das colunas é módulo 10. Como a atribuição do dígito à letra  $A$  é determinada univocamente pelas atribuições dos dígitos às letras  $W$  e  $T$ , devemos nos concentrar apenas nessas atribuições. Já que nem  $W$  e nem  $T$  podem tomar o valor 0 (pois teríamos o mesmo dígito associado às letras  $T$  e  $A$  ou às letras  $W$  e  $A$ , o que não é possível), o número de dicas associadas a essa coluna é simplesmente  $9 \times 8 = 72$ . Consideremos agora a coluna 1. Nesse caso devemos levar em conta duas possibilidades. Na primeira, não há um fator 1 vindo da soma da coluna 2 e a soma a ser considerada é  $O + O = E$ . Novamente, o dígito 0 não pode ser atribuído à letra  $O$  de modo que temos 9 dicas associadas a essa possibilidade. Na segunda, há um fator 1 vindo da soma da coluna 2 e a soma a ser considerada é  $1 + O + O = E$ . Nesse caso, o dígito 0 pode ser atribuído à letra  $O$  mas não o dígito 9 pois nesse caso teríamos  $O = E = 9$  o que não é possível, pois a correspondência entre letras e dígitos deve ser biunívoca. Ficamos então com 9 dicas associadas a essa segunda possibilidade. Finalmente consideremos a coluna 0 que também tem duas possibilidades, a saber,  $W + H = T$  e  $1 + W + H = T$ . Há  $9 \times 8 = 72$  dicas associadas a primeira possibilidade, pois o dígito 0 não pode ser atribuído nem à letra  $W$  nem à letra  $H$  uma vez que isso implica em  $H = T$  ou  $W = T$ . Também há  $9 \times 8 = 72$  dicas associadas a segunda possibilidade, pois agora nem  $W$  nem  $H$  podem estar associados ao dígito 9, já que, por exemplo,  $10 + H = H = T$  numa soma módulo 10. O total de dicas é, portanto,  $H = 72 + 9 + 9 + 72 + 72 = 234$ . Naturalmente, é muito mais fácil implementarmos uma rotina computacional que produz imediatamente o número de dicas de uma charada particular do que repetir esse cálculo tedioso em todos os casos. Já o número de dicas corretas  $H_c$  só pode ser obtido conhecendo-se todas as soluções da charada e enumerando as dicas de cada solução. No caso da charada  $WHT$  encontramos  $H_c = 91$ .

Nosso interesse aqui é estudar a família da charada  $WHT$ , ou seja, as charadas que são obtidas permutando-se as 9 letras (incluindo repetições) da charada original. Por exemplo, as charadas  $HWT + ATO = EWO$  e  $TEA + HOT = WOW$  pertencem a família  $WHT$ . Chamaremos *variantes* as permutações da charada original. Embora essas permutações preservem o número de letras totais e o número de letras repetidas elas resultam em charadas muito distintas no que se refere ao número de soluções e de dicas. Nesse aspecto, é instrutivo determinar o quão típica é a charada original  $WHT$  em comparação com os membros da sua família, embora a razão de estudarmos essas permutações seja entender como o número de soluções e de dicas correlaciona-se com a dificuldade da charada na perspectiva do sistema quadro-negro, como veremos no capítulo 4 em conjunto com o apêndice C.

O primeiro desafio é determinar o número de charadas da família  $WHT$ . O número de permutações distintas das 9 letras (incluindo repetições) é simplesmente  $9!/(2!2!2!) = 45360$ . O problema é que muitas dessas permutações produzem charadas idênticas quando

o significado das palavras é ignorado, que é o caso do ponto de vista dos algoritmos de busca. Por exemplo, a variante  $WOW + AOT = THE$  onde apenas as letras que não se repetem são permutadas é idêntica a charada original. O mesmo vale para a charada  $TOT + HOW = WEA$  onde fazemos permutação de duas letras que se repetem uma vez. Se levarmos isso em conta o número de charadas distintas da família  $WHT$  passa a ser  $45360/(3!3!) = 1260$  pois há 3 letras ( $H$ ,  $E$  e  $A$ ) que não se repetem e 3 letras ( $W$ ,  $O$  e  $T$ ) que se repetem uma única vez. Entretanto, devido a dificuldade de gerar ou mesmo identificar essas 1260 charadas, nessa dissertação vamos considerar as 45360 permutações da charada original. Assim, a família da charada  $WHT$  é composta pelas permutações das 9 letras da charada da equação (2.2).

Na figura 1 mostramos os histogramas do número de variantes da charada  $WHT$  que exibem  $H$  dicas (painel esquerdo) e  $S$  soluções (painel direito). Lembramos que a charada  $WHT$  apresenta  $H = 234$  e  $S = 66$ . Todas as 45360 variantes foram consideradas na elaboração desses histogramas. A citar, temos que 30% das variantes ou, em número absoluto, 13608 variantes, não apresentam solução ( $S = 0$ ) e 1.4% delas, ou 648 variantes, apresentam o mesmo número de soluções da charada original, ou seja,  $S = 66$ . O número médio de soluções, considerando-se apenas as charadas solúveis, é  $\bar{S} = 70.3$ . Assim, podemos dizer que a charada original  $WHT$  é uma charada típica da família  $WHT$ . Também é importante enfatizar que 30% das permutações não resultam em charadas cripto-aritméticas, uma vez que tais charadas devem ter solução. Esse resultado confirma que a posição das letras é importante na determinação das propriedades das charadas cripto-aritméticas. Por exemplo, encontramos 24 variantes com  $S = 960$ , sendo  $HTW + EWO = ATO$  uma dessas variantes. Observando essa charada, vemos que caso a letra  $W$  corresponda ao valor 0, o único vínculo que resta para tornar a solução válida é encontrar 3 dígitos distintos para  $H$ ,  $E$ ,  $A$  de modo que  $H + E = A$ . O mesmo acontece para as outras variantes com esse número grande de soluções, como em  $HOW + ATO = ETW$  quando a letra  $O$  assume o valor 0.

Na figura 2 mostramos o gráfico de dispersão de  $H$  e  $S$  para as 45360 permutações da charada  $WHT$ . Os dados indicam que, em média, o número de soluções de uma variante não é influenciado pelo número de dicas. Isso pode ser melhor verificado por meio do coeficiente de correlação de Pearson, cujo valor é  $\rho = -0.27$  com valor- $p$  igual a 0.61, ou seja, há uma probabilidade de 61% de obtermos esse valor, ou mesmo um valor mais extremo, de  $\rho$  sob a hipótese de que  $S$  e  $H$  são independentes. Assim, há um forte indício de que  $S$  não sofre influência de  $H$  (e vice-versa), visto que o alto valor- $p$  representa uma alta chance de ocorrência ao acaso de correlação entre essas variáveis. A regressão linear  $\bar{S} = \alpha H + \beta$  (linha azul) foi obtida ao considerarmos o número médio de soluções para um valor fixo de dicas  $H$ . Os valores dos parâmetros de ajuste são  $\alpha = -0.09$  e  $\beta = 105.96$ . Vale observar que o coeficiente linear  $\alpha$  seria muito próximo a zero não fosse pelas 24 variantes com 960 soluções.

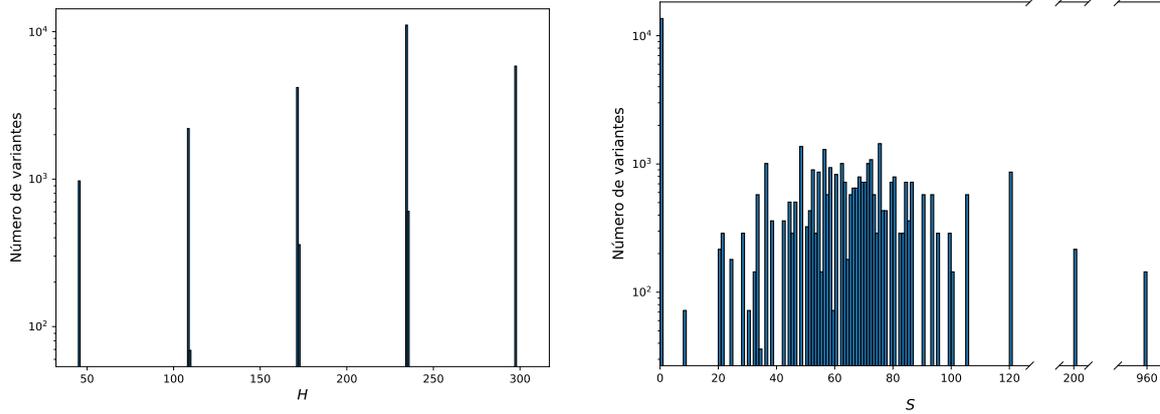


Figura 1 – Histogramas do número de variantes da charada *WHT* que exibe o número de dicas  $H$  (painel esquerdo) e o número de soluções  $S$  (painel direito). Os histogramas foram elaborados com as 45360 permutações da charada original. As larguras das barras são  $\Delta H = 1$  e  $\Delta S = 1$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 2.2 A família da charada *SMM*

Consideremos agora a charada *SMM* que contém oito letras distintas. Por conta disso, existem  $10!/2! = 1814400$  associações dígito-letra distintas, das quais apenas uma corresponde à solução da charada, a saber,  $S = 9$ ,  $E = 5$ ,  $N = 6$ ,  $D = 7$ ,  $M = 1$ ,  $O = 0$ ,  $R = 8$ ,  $Y = 2$ .

O número de dicas  $H$  pode ser calculado de forma análoga à apresentada na seção anterior analisando cada coluna separadamente. Dado que a coluna de índice 0 é representado apenas pela letra  $M$ , consideramos como dicas válidas as atribuições  $M = 0$  e  $M = 1$ , resultando em 2 dicas. Como todas as demais colunas são compostas de letras distintas (a citar, temos a coluna de índice 1 dada por  $S + M = O$ , seguida por  $E + O = N$  com índice 2, e finalizando com as somas  $N + R = E$  e  $D + E = Y$ , respectivas aos índices 3 e 4), vale as justificativas levantadas anteriormente para a charada *WHT*. Todas elas carregam 72 dicas em duplicata devido ao fator 1 vindo da coluna à esquerda com exceção da coluna de índice 4. Portanto, temos  $3 \times (72 \times 2) + 72 + 2 = 506$  dicas. Além disso, uma vez que  $S = 1$  temos  $H_c = 5$ . Esses valores  $H$  e  $H_c$  foram verificados por meio de busca exaustiva.

Na figura 3 mostramos os histogramas do número de variantes do charada *SMM* original com o número de dicas  $H$  (painel à esquerda) e o número de soluções  $S$  (painel à direita). Diferentemente da família da charada *WHT* que contém um número de variantes tratável, a charada *SMM* tem  $13!/(3!2!2!2!) \approx 10^8$  variantes, sendo portanto

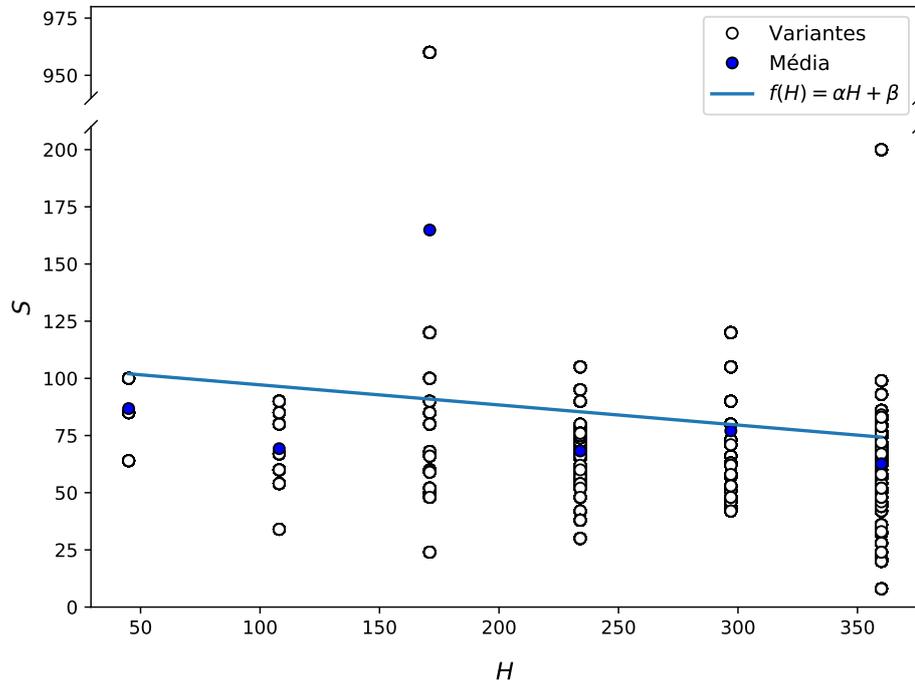


Figura 2 – Gráfico de dispersão mostrando o número de dicas  $H$  e o número de soluções  $S$  para as 45360 permutações da charada  $WHT$ . Os símbolos azuis representam os valores médios de  $S$  para  $H$  fixo. A curva azul é o ajuste linear  $\bar{S} = f(H) = \alpha H + \beta$  com  $\alpha = -0.09$  e  $\beta = 105.96$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

computacionalmente inviável analisar todas os membros de sua família. Lembramos que muitas das variantes consideradas produzem charadas idênticas em decorrência da permutação das letras sem repetições ( $S, D, R, Y$ ) e das letras que se repetem uma vez ( $N, M, O$ ). Por conta do grande número de variantes, para a figura 3 geramos 79770 permutações aleatórias distintas das letras que compõem a charada  $SMM$ .

Nesse subconjunto do espaço de permutações, observamos que 28.5% das variantes não têm solução e 0.5% delas têm apenas uma solução como a charada original. O número médio de soluções excluindo-se as variantes sem solução é  $\bar{S} = 22.4$  o que indica a charada original não representa uma charada típica de sua família. Entre as variantes válidas (ou seja, com  $S \neq 0$ ) consideradas, o maior número de variantes com o mesmo número de soluções apresenta  $S = 12$ , com 3171 configurações. Por outro lado, quando consideramos o número de dicas observamos que  $H = 506$  (como a charada original) agrega o maior número de variantes, com 43.9% das configurações com  $S \neq 0$ . Similarmente ao resultado obtido na análise da charada  $WHT$ , aqui também encontramos charadas com um número enorme soluções:  $S = 1440$  referente ao problema  $SOMN + REEE = YDOMN$ , por

exemplo. Essa charada exibe a mesma estrutura das variantes da família *WHT* com  $S = 960$ , pois caso  $E$  corresponda a 0, o único vínculo que valida a charada recai sobre  $Y$  e  $S + R = D$ .

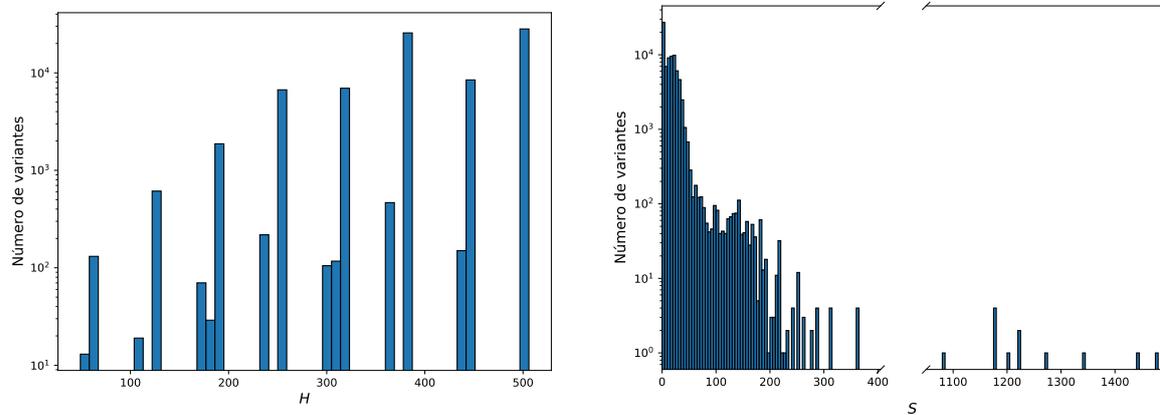


Figura 3 – Histogramas do número de variantes da charada *SMM* que exibe o número de dicas  $H$  (painel esquerdo) e o número de soluções  $S$  (painel direito). Os histogramas foram elaborados com 79770 permutações aleatórias distintas da charada original que representam apenas 0.06% do espaço de permutações das letras da charada original. As larguras das barras são  $\Delta H = 5$  e  $\Delta S = 5$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 4 mostra que, em média, o número de soluções de uma variante não é influenciado pelo número de dicas, similarmente ao resultado encontrado no estudo da família da charada *WHT*. A justificativa para isto decorre da fraca correlação de Pearson dos dados coletados dada pelo coeficiente  $\rho = 0.1$  com valor- $p$  igual a 0.68. A regressão linear obtida ao considerarmos a média de  $S$  (para um valor fixo  $H$ ),  $\bar{S} = \alpha H + \beta$  produz os parâmetros de ajuste  $\alpha = 0.007$  e  $\beta = 22.4$ .

### 2.3 A família da charada *DGR*

Por fim analisemos a família da charada *DGR* que contém 10 letras distintas. Seu extenso uso na literatura<sup>12, 9</sup> decorre desse fato, visto que apresenta o maior número de letras possível para que todos os 10 dígitos (de 0 a 9) possam ser usados. Portanto, temos  $10! = 3628800$  estados ou associações dígito-letra distintas. Como já mencionado, a charada *DGR* original tem apenas uma solução.

O número total de variantes na família *DGR* é  $18!/(3!3!2!2!2!) \approx 10^{12}$ , pois das 18 letras duas se repetem duas vezes ( $D, R$ ) e quatro se repetem uma vez ( $O, A, L, E$ ). Assim como nas famílias *WHT* e *SMM* discutidas anteriormente, não vamos considerar o fato que permutações distintas podem produzir charadas idênticas. Os membros da família

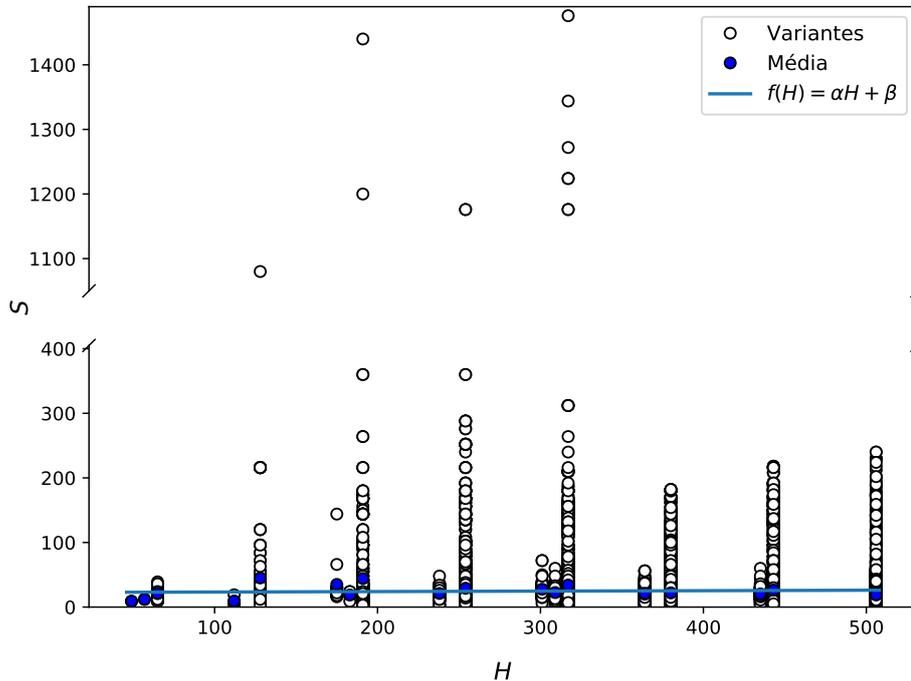


Figura 4 – Gráfico de dispersão mostrando o número de dicas  $H$  e o número de soluções  $S$  para 57031 permutações aleatórias distintas da charada  $SMM$ . Os símbolos azuis representam os valores médios de  $S$  para  $H$  fixo. A curva azul é o ajuste linear  $\bar{S} = f(H) = \alpha H + \beta$  com  $\alpha = -0.02$  e  $\beta = 25.12$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

$DGR$  serão então as variantes obtidas pelas permutações distintas das 18 letras. Devido ao grande número de variantes, vamos considerar apenas um subconjunto reduzido do espaço de permutações. Em particular, nessa análise usaremos 19106 permutações distintas (variantes) geradas aleatoriamente.

A figura 5 mostra o número de variantes de acordo com o número de dicas  $H$  (painel esquerdo) e de soluções  $S$  (painel direito). Encontramos que 57.4% das variantes não tem solução e que que 12.5% tem apenas uma solução como a charada  $DGR$  original. O número médio de solução das charadas válidas é  $\bar{S} = 2.89$ . Portanto  $DGR$  representa uma charada típica dentre as variantes de sua família no que diz respeito ao número de soluções. A variante com o maior número de soluções encontrada na nossa amostragem,  $TANORR + BDARLD = EGEOLD$ , apresenta  $S = 384$ . Já para o número de dicas, apenas 0.7% das variantes tem o mesmo número de dicas da charada original, ou seja,  $H = 351$ . Dentre as variantes consideradas,  $H = 666$  é o número de dicas com maior ocorrência, representando 32.9% das variantes.

Na figura 6 apresentamos o gráfico de dispersão para as 19106 variantes da charada *DGR* em relação ao número de dicas  $H$  e de soluções  $S$ . Note a presença de resultados similares aos obtidos no estudo das famílias *WHT* e *SMM*, indicando que  $S$  não apresenta correlação significativa com  $H$ . Nele desconsideramos aquelas que não apresentam solução e portanto utilizamos apenas 8015 variantes. Novamente, podemos mensurar esta inexpressiva correlação via o coeficiente de Pearson  $\rho = -0.35$  com valor- $p$  igual a 0.14. A regressão linear obtida para o número médio de soluções  $\bar{S} = \alpha H + \beta$  (para um valor fixo  $H$ ) produz os parâmetros  $\alpha = 0.005$  e  $\beta = 7.04$ .

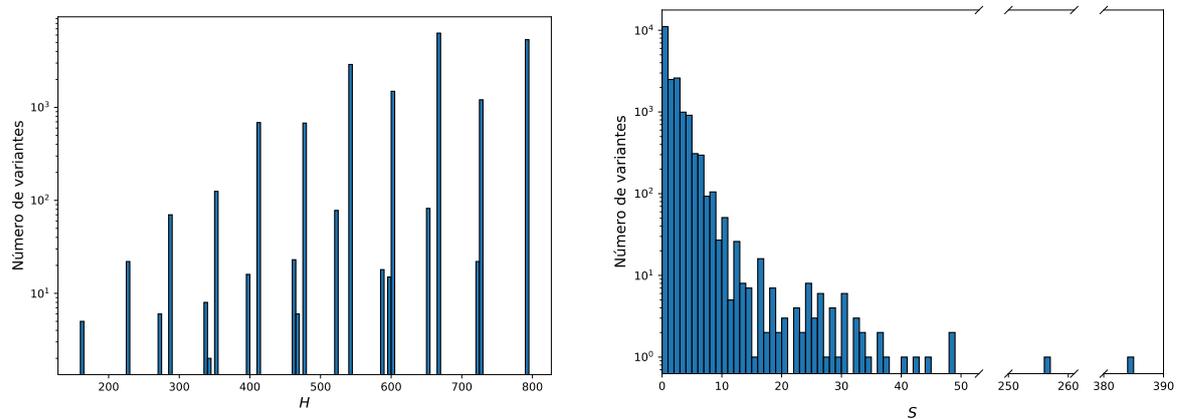


Figura 5 – Histogramas do número de variantes da charada *DGR* que exhibe o número de dicas  $H$  (painel esquerdo) e o número de soluções  $S$  (painel direito). Os histogramas foram elaborados com 19106 permutações aleatórias distintas da charada original que representam apenas cerca de  $10^{-6}\%$  do espaço de permutações das letras da charada original. As larguras das barras são  $\Delta H = 5$  e  $\Delta S = 1$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Concluindo, esses resultados mostram que a posição das letras numa charada cripto-aritmética, e não apenas o seu número e repetições, tem uma enorme influência no número de soluções e de dicas da charada. Nesse sentido, vale a pena ressaltar que a permutação aleatória das letras de uma charada válida tem quase 60% de chance de produzir variantes sem solução no caso da charada *DGR*.

Sumarizamos algumas das propriedades importantes das nossas charadas na tabela 1. Para as charadas *DGR*, *SMM* e *WHT* indicamos o número de letras, o número de letras únicas, o número de soluções  $S$ , o número de dicas totais  $H$  e de dicas corretas  $H_c$ , o tamanho do espaço de estados  $\mathcal{N}$  e o número de variantes.

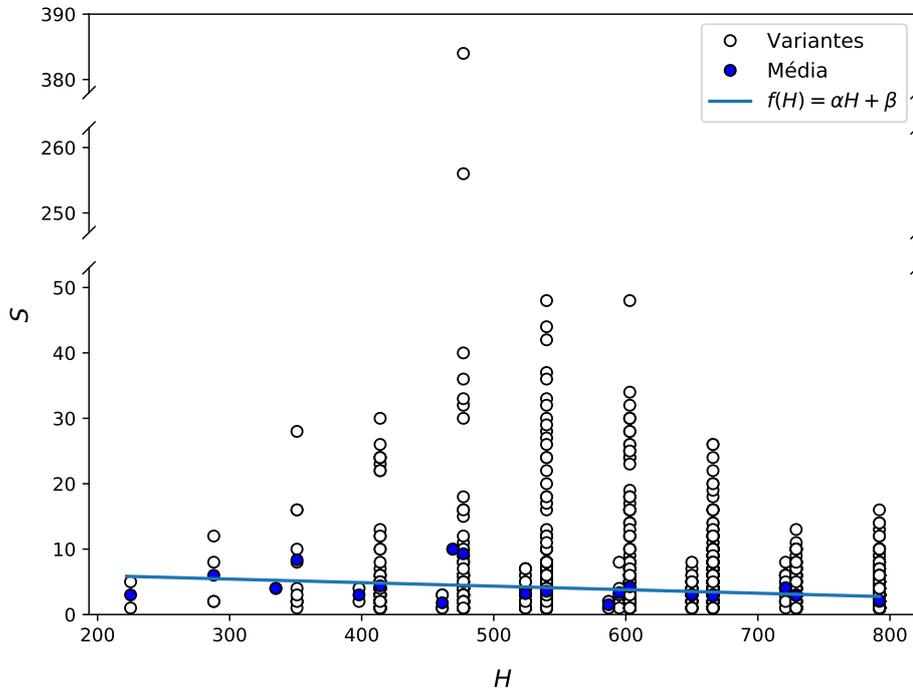


Figura 6 – Gráfico de dispersão mostrando o número de dicas  $H$  e o número de soluções  $S$  para 8015 permutações aleatórias distintas da charada  $DGR$ . Os símbolos azuis representam os valores médios de  $S$  para  $H$  fixo. A curva azul é o ajuste linear  $\bar{S} = f(H) = \alpha H + \beta$  com  $\alpha = 0.005$  e  $\beta = 7.04$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 1 – Propriedades centrais que caracterizam uma determinada charada cripto aritmética. Aqui apresentamos, em ordem, o número de letras, o número de letras únicas, o número de soluções  $S$ , o número de dicas totais  $H$  e de dicas corretas  $H_c$ , o tamanho do espaço de estados  $\mathcal{N}$  e o número de variantes para as charadas  $DGR$ ,  $SMM$  e  $WHT$ .

Charada	Letras	Letras únicas	$S$	$H$	$H_c$	$\mathcal{N}$	Variantes
$DGR$	18	10	1	351	6	$10!$	$18!/(3!3!2!2!2!)$
$SMM$	13	8	1	506	5	$10!/2!$	$13!/(3!2!2!2!)$
$WHT$	9	6	66	234	91	$10!/4!$	$9!/(2!2!2!)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3 O SISTEMA QUADRO-NEGRO

Neste capítulo apresentaremos a descrição do sistema de agentes que exploram o espaço de estados de problemas cripto-aritméticos utilizando o esquema colaborativo do quadro-negro.

Como o nome indica, o quadro-negro representa um painel de acesso público onde a informação sobre a charada a ser resolvida é exposta e onde os agentes podem tanto escrever suas dicas como adquirir dicas que desconheçam. Concretamente, o quadro-negro consiste simplesmente em uma lista de dicas. Definiremos  $B$  como o tamanho do quadro, que limita o número de dicas que podem ser expostas. Desta forma,  $B$  representa um parâmetro de controle da informação disponível ao grupo. Como vamos impor que o quadro-negro exiba apenas dicas não repetidas, para uma charada com  $H$  dicas a escolha  $B = B_{max} = H$  representa de fato um quadro irrestrito que, quando cheio, expõe de forma permanente todas as dicas possíveis. Caso contrário ( $0 < B < H$ ), temos restrição e, em algum sentido, uma filtragem não centralizada da informação que será exposta publicamente. Lembramos que o objetivo principal dessa dissertação é estudar como a restrição da informação exposta no quadro afeta o desempenho do sistema quadro-negro.

Cada agente é representado por um vetor linha com dez componentes  $(d_1, \dots, d_{10})$  onde cada componente pode assumir um dos dez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Um agente válido deve ter todas as componentes diferentes, ou seja, os agentes válidos são gerados pelas permutações das componentes do vetor (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Vamos também representar as charadas por um vetor linha  $(l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_{10})$  onde  $n$  é o número de letras distintas que aparecem na charada, as componentes  $l_1, \dots, l_n$  representam cada uma dessas letras e as componentes  $l_{n+1}, \dots, l_{10}$  são associadas ao símbolo neutro  $-$ . Por exemplo, a charada *WHT* e suas variantes que têm  $n = 6$  são representadas pelo vetor linha  $(W, O, H, T, E, A, -, -, -, -)$ . Assim, o agente  $(1, 5, 3, 6, 2, 0, 4, 7, 9, 8)$  carrega as seguintes associações dígito-letra:  $W = 1, O = 5, H = 3, T = 6, E = 2$  e  $A = 0$ . Os dígitos 4, 7, 9 e 8 não são utilizados nessa associação. Já a charada *SMM* e suas variante que têm  $n = 8$  letras distintas são representadas pelo vetor linha  $(S, E, N, D, M, O, R, Y, -, -)$ . O mesmo agente anterior carrega agora as seguintes associações dígito-letra:  $S = 1, E = 5, N = 3, D = 6, M = 2, O = 0, R = 4$  e  $Y = 7$ . Os dígitos 9 e 8 não são utilizados por esse agente nessa associação. Finalmente, a charada *DGR* e suas variantes que têm  $n = 10$  letras distintas são representadas pelo vetor linha  $(D, O, N, A, L, G, E, R, B, T)$ . Para essa família de charadas, nosso agente carrega as seguintes associações dígito-letra:  $D = 1, O = 5, N = 3, A = 6, L = 2, G = 0, E = 4, R = 7, B = 9$  e  $T = 8$ . Essa representação é útil pois torna a implementação do movimento elementar independente do número de letras distintas das charadas.

O processo de busca inicia-se com a geração dos  $M$  agentes no tempo  $t = 0$  que irão compor a equipe cuja tarefa é resolver uma charada particular. Esses agentes são selecionados aleatoriamente com reposição no espaço dos  $10!$  agentes válidos distintos. A eles é disposto um quadro-negro vazio de tamanho  $B$ . Primeiramente, verificamos se os agentes selecionados resolvem a charada e, simultaneamente, verificamos a presença de dicas em cada agente e atualizamos o quadro-negro. Este processo dá-se da seguinte forma: o agente em questão separa todas suas dicas e verifica quais delas são novas, ou seja, não estão sendo exibidas no quadro, e quais dicas do quadro são diferentes das suas. Em seguida, o agente escolhe aleatoriamente uma de suas dicas novas. Caso o quadro não esteja cheio, ou seja, o número de dicas exibidas seja menor que  $B$ , a dica nova escolhida é adicionada ao quadro. Por outro lado, caso o quadro-negro esteja cheio, o agente escolhe aleatoriamente uma das dicas diferentes exibidas no quadro e a substitui pela sua dica nova. Caso não haja nenhuma dica diferente das suas no quadro, uma situação comum para quadros muito pequenos, o agente escolhe arbitrariamente uma das dicas do quadro-negro para ser substituída pela dica nova. Esse é o processo de escrita no quadro que só acontece se o agente tiver dicas novas. Nesse estágio já podemos observar que no caso de  $B_{max} = H$ , o processo de escrita termina no momento em que todas as dicas  $H$  da charada são exibidas. Já no caso  $B < H$ , o processo de escrita sempre está ativo devido à substituição de dicas. A hipótese de que a dica a ser substituída (ou seja, apagada do quadro) deve diferir das dicas do agente personaliza um comportamento sectário, pois o agente valoriza dicas iguais às suas (e portanto não devem ser substituídas) em detrimento das demais. Apesar de interessante como justificativa *a posteriori*, essa dinâmica de atualização não produz resultados expressivamente distintos de outras escolhas.<sup>14</sup> Em seguida selecionamos um outro agente e repetimos o processo de verificação de solução da charada e atualização do quadro. Para cada agente escolhido incrementamos a variável  $t$  pelo fator  $\Delta t = 1/M$ . Deste modo, ao final do processo de inicialização dos  $M$  agentes e do quadro-negro contabilizamos  $t = 1$ . Caso algum dos agentes tenha encontrado a solução, finalizamos a busca e determinamos o tempo de busca como  $t^* = 1$ . O processo de inicialização do quadro pode ser resumido no fluxograma apresentado na figura 7.

O fluxo da figura 7 é separado em 4 condicionais centrais e segue as seguintes etapas: estabelecemos nosso tempo  $t = 0$ , selecionamos nosso primeiro agente  $m = 1$  e (1) verificamos se o agente apresenta alguma dica. Caso afirmativo, (2) analisamos se alguma delas é considerada uma dica nova e as separamos. Em seguida, (3) avaliamos se o quadro está completo. Caso exista ao menos um espaço disponível, a dica selecionada é adicionada ao quadro. Subsequentemente verificamos se o agente é capaz de resolver a charada, armazenamos este estado em uma variável e selecionamos o próximo agente, voltando ao passo (1) e incrementando a variável  $m$  em uma unidade. Em ambos os casos (1) e (2), caso o agente não possua dicas ou não possua dicas novas, verificamos se é capaz de resolver a charada e selecionamos um novo agente. Por outro lado, caso o quadro

esteja cheio no passo (3), (4) verificamos se há dicas diferentes. Caso positivo, o agente deve substituir pela sua dica escolhida uma das dicas diferentes. Caso contrário, a dica do quadro a ser substituída é escolhida aleatoriamente. Em ambos os casos, verificamos também se o agente soluciona a charada e selecionamos o próximo agente. Por fim, após verificarmos todos os agentes ( $m = M$ ), atualizamos nosso tempo para  $t = 1$  e concluímos a busca com  $t^* = 1$ , caso algum agente tenha resolvido a charada, ou inicializamos a busca caso contrário.

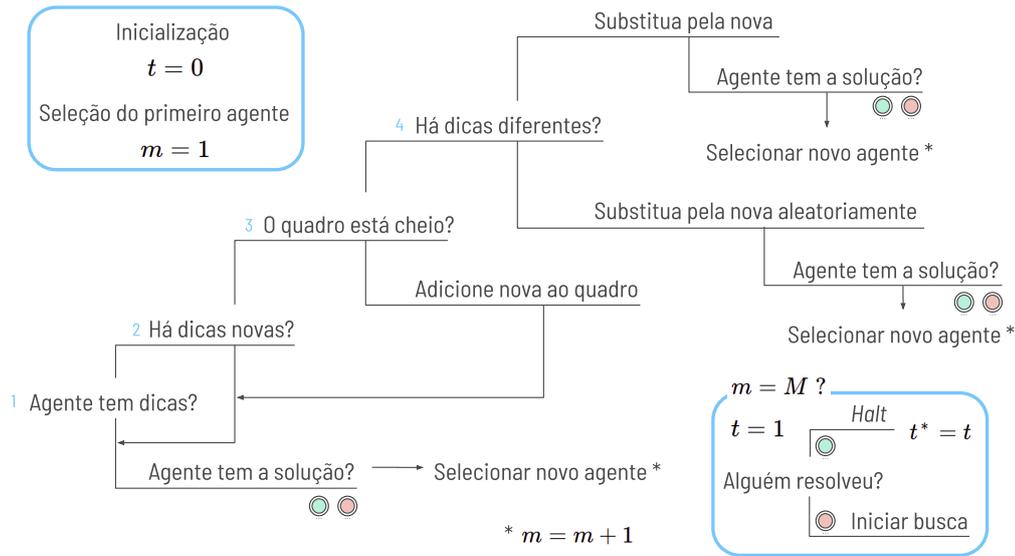


Figura 7 – Fluxo do processo de atualização do quadro por cada um dos  $M$  agentes separado em 4 condicionais centrais. Após todos os  $M$  agentes serem escolhidos e atualizarem o quadro, temos  $t = 1$ . Caso ao menos um deles seja responsável por resolver a charada, armazenamos  $t^* = 1$  e concluímos esta amostragem. Caso contrário, inicializamos a dinâmica de busca.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Caso a solução não seja encontrada no processo de inicialização descrito acima, iniciamos então a dinâmica de busca cooperativa, que passamos a descrever agora. A cada incremento de tempo  $\Delta t = 1/M$  selecionamos aleatoriamente um dos  $M$  agentes. A primeira ação do agente selecionado é a leitura do quadro-quadro: o agente escolhe aleatoriamente uma das dicas exibidas no quadro-negro. Há agora duas possibilidades.

Primeiro, o agente já tem a dica selecionada. Nesse caso ele a ignora e executa um movimento elementar. Esse movimento é executado também no caso altamente improvável do quadro estar vazio. Lembramos que no movimento elementar o agente escolhe aleatoriamente uma letra da charada e um dígito entre 0 e 9 e realiza a atribuição dígito-letra. Como descrito na seção 1, isso envolve um rearranjo de dígitos para manter a correspondência biunívoca entre dígitos e letras. Vale a pena repetir a descrição do movimento elementar

usando a notação dessa seção. Como exemplo, consideremos a charada  $WHT$ , cuja representação é  $(W, O, H, T, E, A, -, -, -, -)$ , e o agente selecionado  $(1, 5, 3, 6, 2, 0, 4, 7, 9, 8)$ . Esse agente então escolhe aleatoriamente uma das  $n = 6$  letras, digamos a letra  $H$ , e um dos dez dígitos, digamos o dígito 8. (Note que os símbolos neutros  $-$  nunca são escolhidos no movimento elementar.) O movimento elementar requer que o agente exiba a associação  $H = 8$ . Isso é efetuado simplesmente trocando-se as posições do dígito 3 (que estava associado a letra  $H$ ) e do dígito 8 no vetor que representa o agente. Assim, após o movimento elementar, nosso agente passa a ser representado pelo vetor  $(1, 5, 8, 6, 2, 0, 4, 7, 9, 3)$ . Como esse novo estado pode conter dicas novas, o agente verifica suas dicas e, caso agora tenha uma ou mais dicas que não estejam exibidas no quadro, ele executa o processo de escrita descrito anteriormente, atualizando o quadro.

Segundo, o agente não tem a dica selecionada. Nesse caso, o agente realiza um movimento que denominamos assimilação, sendo esse o principal resultado da cooperatividade proporcionada pelo quadro-negro. A assimilação envolve a redistribuição de até seis dígitos, uma vez que leva em conta nossa definição de dicas contendo três letras. Como exemplo, tomemos o problema  $DGR$  cuja representação é o vetor  $(D, O, N, A, L, G, E, R, B, T)$ , embora devamos lembrar que esse processo se aplica as demais charadas de forma imediata. Consideremos que o agente  $(9, 6, 3, 7, 8, 1, 4, 2, 5, 0)$  tenha escolhido do quadro a dica  $(1, 2, 0, 2)$ , que representa as associações  $O = 2, E = 0, O = 2$ . As associações digito-letra desse agente devem ser rearranjadas de forma a assimilar a dica mantendo a biunivocidade do mapeamento digito-letra. Logo, teremos as seguintes alterações:  $R = 2 \rightarrow R = 6$  (que deve ser lido como ‘a letra  $R$ , anteriormente associada ao dígito 2, passa a ser associada ao dígito 6’),  $O = 6 \rightarrow O = 2, T = 0 \rightarrow T = 4, E = 4 \rightarrow E = 0$ . Assim, após a assimilação da dica o agente passa a ser representado pelo vetor  $(9, 2, 3, 7, 8, 1, 0, 6, 5, 4)$  que contém a dica  $(1, 2, 0, 2)$  como esperado. Realizada a assimilação, atualizamos o quadro com potenciais dicas novas (processo de escrita) geradas no processo de rearranjo dos dígitos e verificamos se a solução da charada foi encontrada.

Os processos de escolha de um agente, realização dos movimentos elementar ou assimilação e atualização do quadro são repetidos (com incremento temporal de  $\Delta t = 1/M$  toda vez que um agente é selecionado) até que uma solução da charada seja encontrada. Nesse momento a busca é interrompida e o tempo de busca  $t^*$  é determinado. A dinâmica de busca pode ser resumida no fluxograma apresentado na figura 8, análogo ao ao como apresentamos a inicialização do quadro na figura 7.

O fluxo da figura 8 é separado em 2 condicionais centrais e segue as seguintes etapas: ao início deste processo temos  $t = 1$  e selecionamos aleatoriamente um dos nossos  $M$  agentes. Em seguida, (1) verificamos se o quadro-negro possui ao menos uma dica. Caso negativo, o agente realiza um movimento elementar. Caso contrário, selecionamos uma dica aleatoriamente. Em seguida, (2) avaliamos se o agente já possui a dica selecionada.

Caso negativo, ele deve realizar um movimento de assimilação. Caso contrário, realiza um movimento elementar. Em sequência a cada movimento realizado, verificamos se o agente é capaz de solucionar a charada. Caso afirmativo, finalizamos a busca e armazenamos o tempo  $t^* = t$ . Caso contrário, este agente deve atualizar o quadro-negro conforme o fluxo mostrado anteriormente na figura 7, incrementamos nosso tempo em  $\Delta t = 1/M$  e selecionamos aleatoriamente um novo agente que deve submeter-se a este mesmo fluxo de busca.

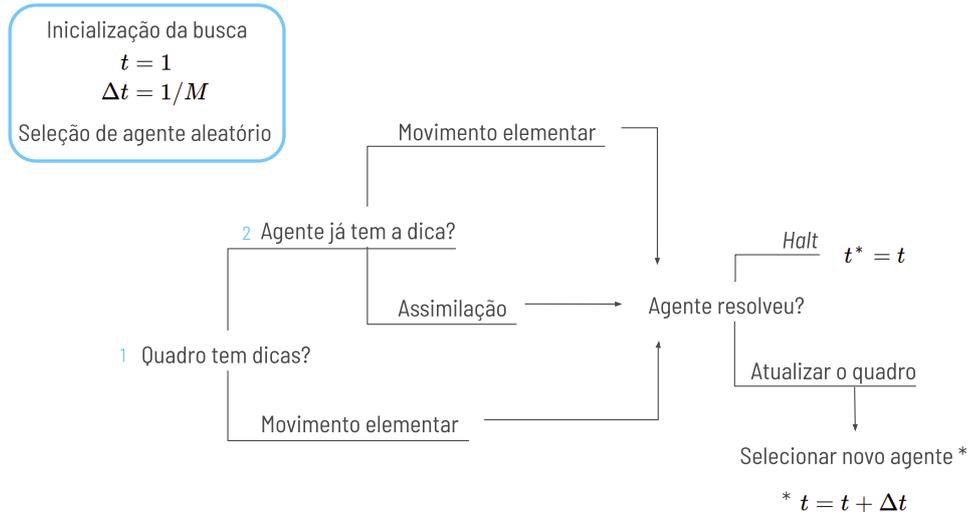


Figura 8 – Fluxo do processo da dinâmica de busca separado em 2 condicionais centrais. No momento em que um agente é responsável por solucionar a charada, armazenamos o tempo de busca  $t^* = t$  e finalizamos nossa dinâmica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O foco dessa dissertação é o estudo da dependência do desempenho do sistema quadro-negro medido pelo tempo de busca  $t^*$  com relação aos dois únicos parâmetros de controle do modelo, a saber, o número de agentes  $M$  e o tamanho do quadro  $B$ . Como  $t^*$  é uma variável aleatória determinada pelas múltiplas escolhas aleatórias realizadas ao longo da busca pela solução da charada, vamos considerar o seu valor médio  $\langle t^* \rangle$  calculado usando tipicamente  $\mathcal{A} = 10^4$  buscas independentes. Mais especificamente,

$$\langle t^* \rangle = \frac{1}{\mathcal{A}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{A}} t_{\alpha}^*. \quad (3.1)$$

onde o índice  $\alpha$  representa uma busca particular. Para uma charada específica, o tempo médio de busca  $\langle t^* \rangle$  é função apenas dos parâmetros de controle  $M$  e  $B$ . Vale mencionar que a escolha de  $\mathcal{A} = 10^4$  buscas é suficiente para a convergência dos resultados, sem que haja grandes oscilações da média. Apresentamos o efeito do número de amostras sobre a média dos resultados obtidos no apêndice D.

Entretanto,  $\langle t^* \rangle$  adquire mais valor como medida de desempenho do sistema quadro-negro se puder ser comparado com algum padrão de desempenho. Nessa dissertação usaremos como padrão de comparação o tempo de busca médio da busca cega dado pela equação (B.3) do Apêndice B,

$$\langle t_{bc}^* \rangle = \frac{1}{1 - (1 - q)^M}, \quad (3.2)$$

onde  $q = S/\mathcal{N}$  sendo  $S$  o número de soluções e  $\mathcal{N}$  o número de atribuições dígito-letra possíveis. Por exemplo,  $q = 1/10!$  para a charada *DGR*,  $q = 1/(10!/2!)$  para a charada *SMM* e  $q = 66/(10!/4!)$  para a charada *WHT*. Assim, definimos o custo computacional da busca como a razão entre esses tempos de busca médios,

$$\langle C \rangle = \frac{\langle t^* \rangle}{\langle t_{bc}^* \rangle}. \quad (3.3)$$

No caso mais realístico e interessante onde o número de agentes é muito menor que o número de estados, ou seja,  $M \ll \mathcal{N}$ , temos  $\langle t_{bc}^* \rangle \approx 1/Mq$  de modo que o custo computacional retoma a forma usada comumente na literatura,  $\langle C \rangle \approx Mq\langle t^* \rangle$ .<sup>9, 12</sup>

Um aspecto importante da definição do custo computacional como uma razão entre dois tempos de busca médios é que podemos comparar diretamente os resultados obtidos para diferentes charadas cripto-aritméticas, tal como apresentado ao fim do capítulo 4, onde comparamos os desempenhos para as charadas *WHT*, *SMM* e *DGR* em função dos parâmetros  $B$  e  $M$ . Isso também é particularmente relevante na análise da robustez e generalidade das três charadas discutidas nessa dissertação, onde variamos somente a posição das letras, gerando assim diversas variantes do problema original, como visto no capítulo anterior. Os resultados dessa análise são descritos no apêndice C.

Além do custo computacional  $\langle C \rangle$  introduzido acima, vamos considerar também o número de dicas presentes no quadro imediatamente após a inicialização ( $H_{t=1}$ ) e no fim da busca ( $H_{t=t^*}$ ). Respectivamente utilizaremos como notação  $H_i$  e  $H^*$  para estas medidas. Como essas grandezas são variáveis aleatórias, realizamos médias sobre  $\mathcal{A}$  buscas independentes de modo a obter as grandezas médias  $\langle H_i \rangle$  e  $\langle H^* \rangle$  que, para uma charada específica, são funções apenas de  $M$  e  $B$ . Essas grandezas nos permitem apreciar a frequência do uso do quadro-negro pelos agentes.

Conforme mencionado, os processos de leitura e escrita de dicas no quadro-negro imitam o processo de *brainstorming* de forças-tarefas reais. No capítulo seguinte apresentaremos os resultados das simulações do sistema quadro-negro que nos permitirão determinar como o custo computacional e o uso do quadro negro dependem dos parâmetros de controle do modelo.

## 4 BRAINSTORMING

Cada charada oferece uma dificuldade distinta ao grupo de agentes que busca por uma de suas soluções. O número total de letras, o número de letras que se repetem, suas posições relativas, o número de colunas, o número de soluções e o número de dicas são propriedades particulares de uma charada que, em princípio, podem influenciar a eficiência do sistema quadro-negro. Nos capítulos anteriores, apresentamos as charadas cripto-aritméticas e o sistema quadro-negro separadamente, neste capítulo vamos juntar esses elementos e estudar o *brainstorming* dos agentes para resolver as charadas. Dividiremos nossa análise por charada, agregando conclusões decorrentes das charadas *WHT* e *SMM* a resultados da charada *DGR*, costumeiramente mais estudada que as demais,<sup>8, 9, 12, 14</sup> e com a qual iniciaremos nosso estudo.

Nosso foco principal será determinar o comportamento do custo computacional médio  $\langle C \rangle$  e do número médio de dicas presentes no quadro-negro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  com os dois parâmetros de controle do sistema-quadro negro, a saber, o número de agentes  $M$  e o tamanho do quadro  $B$ . Cada ponto nas figuras exibidas neste capítulo representa a média sobre  $\mathcal{A} = 10^4$  buscas independentes. Essa amostragem é suficiente (evidente no apêndice D) para que a barra de erro da estimativa dos valores médios  $\langle C \rangle$  e  $\langle H^* \rangle$  seja menor que o tamanho dos símbolos usados nas figuras.

### 4.1 A charada *DGR*

Apresentamos na figura 9 as relações do custo computacional  $\langle C \rangle$  (painel à esquerda) e do número de dicas presentes no quadro quando uma solução é encontrada  $\langle H^* \rangle$  (painel à direita) com o tamanho do quadro  $B \leq B_{max}$  para números distintos de agentes  $M = 1, 10$  e  $100$ . Lembramos que para a charada *DGR* temos  $B_{max} = 351$ , que corresponde ao número total de dicas daquela charada, como discutido no capítulo 2. Notamos que as curvas para os diferentes valores de  $M$  assemelham-se qualitativamente exibindo um custo mínimo para  $0 < B < B_{max}$  que depende de  $M$ . Em particular, para  $M = 1$  o valor mínimo do custo computacional  $\langle C \rangle_{min} = 0.017$  ocorre para  $B = 19$ . Já para  $M = 10$  temos  $\langle C \rangle_{min} = 0.01$  para  $B = 11$  e para  $M = 100$  temos  $\langle C \rangle_{min} = 0.015$  para  $B = 12$ . Além disso, já para valores intermediários de  $B$  não se percebe influência alguma do tamanho da equipe  $M$  no custo computacional. Para  $B = B_{max}$  temos  $\langle C \rangle = 0.101$ . Vemos, portanto, que o sistema quadro-negro pode ser até 100 vezes mais eficiente que a busca cega na solução da charada *DGR*. Ao analisarmos o uso do quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$ , observamos que todo o quadro é utilizado, ou seja,  $\langle H^* \rangle = B$ , independentemente do número de agentes  $M$ , de modo que  $\langle H^* \rangle$  é pouco informativo nesse caso. Nossos resultados são consistentes com a literatura.<sup>14</sup>

Intuitivamente, esperamos que o desempenho coletivo ( $M > 1$ ) não apresente muita disparidade em relação ao desempenho individual ( $M = 1$ ), uma vez que as equipes são compostas por agentes capazes de solucionar a charada sozinhos. Essa, aliás, é uma das limitações de nosso modelo de *brainstorming*, uma vez que, em geral, problemas do mundo real não podem ser solucionados por integrantes do grupo individualmente, pois falta-lhes o conhecimento para entender certos aspectos do problema. De todo modo, observamos na figura 9 que o custo computacional e o uso do quadro são muito similares nos casos  $M = 1$  e  $M > 1$ . Ressaltamos que para  $M = 1$  o quadro-negro opera como a memória do agente que lhe permite acessar informações úteis passadas.<sup>9, 14</sup> Nesse caso, o parâmetro  $B$  indica a capacidade de memorização do agente que varia de extrema limitação ( $B = 1$ ) à memorização completa ( $B = B_{max} = 351$ ).

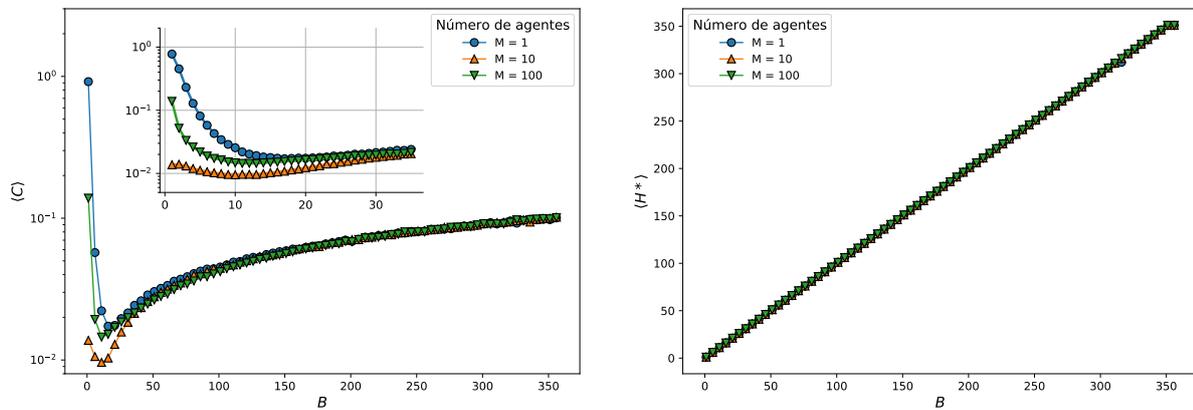


Figura 9 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel esquerdo) e uso médio do quadro negro ao término da busca  $\langle H^* \rangle$  (painel direito) para a charada *DGR* como funções do tamanho máximo do quadro-negro  $B$  para números de agentes  $M = 1, 10$  e  $100$  como indicado. A inserção amplia a região em torno ao desempenho ótimo do grupo, cujo custo computacional  $\langle C \rangle$  é mínimo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato, a comparação entre os casos  $M = 1$  e  $M > 1$  na figura 9 revela que a cooperação é relevante apenas no caso em que a informação à disposição de cada agente individualmente é muito restrita: é no regime de  $B$  pequeno que o grupo desempenha significativamente melhor que o agente solitário. Esse é um resultado muito interessante pois, em um certo sentido, corrobora o senso comum de que o trabalho em equipe faz sentido quando a realização da tarefa exige mais do que um único agente pode oferecer. Ao limitarmos de forma extrema a memória dos agentes, fazendo  $B = 1$  por exemplo, tornamos a tarefa muito difícil para o agente solitário, mas não para o grupo cuja eficiência chega a ser 100 vezes superior à do agente solitário. Por outro lado, se tornarmos os agentes mais poderosos aumentando suas memórias, então a cooperação torna-se irrelevante, embora

nunca seja prejudicial, ao contrário do mundo real que apresenta fenômenos como a loucura das massas<sup>29</sup> e o pensamento de grupo.<sup>30</sup> Curiosamente veremos ao fim deste capítulo que o fenômeno de pensamento de grupo emerge deste sistema quando disponibilizamos quadros limitados ( $B = 1$ ) para equipes grandes ( $10^2 < M < 10^3$ ).

Embora o entendimento da utilidade da cooperação seja o principal resultado revelado pela figura 9, outro resultado surpreendente é a existência de um tamanho de quadro que otimiza o desempenho do sistema quadro-negro. Para os dados da figura, quadros no intervalo  $10 < B < 20$  resultam nos melhores desempenhos para todos os tamanhos de equipe considerados. Isso é surpreendente, pois esperávamos que quanto maior fosse o quadro, ou seja, quanto mais informação os agentes recebessem, melhor seria o desempenho do sistema. Uma possível explicação para esse resultado intrigante e com potencial uso prático é que a limitação do tamanho do quadro pode resultar na melhora da qualidade das dicas nele presentes, ou seja, a probabilidade de que um quadro de tamanho  $B < B_{max}$  exiba dicas corretas é maior do que a prevista quando  $B$  dicas aleatórias são exibidas no quadro.<sup>14</sup> A razão um tanto sutil para o viés para as dicas corretas é que sempre que um agente assimila uma dica do quadro, ele realoca até seis dígitos de sua atribuição dígito-letra original. Ao fazer isso, é muito provável que elimine quaisquer dicas anteriores que carregue, exceto se essas dicas (ou seja, a dica copiada do quadro e as dicas que já são parte da atribuição do agente) forem dicas corretas. Nesse sentido, dicas corretas são insensíveis ao rearranjo radical de dígitos resultante da assimilação de outra dica correta do quadro e isso explica sua maior frequência no quadro-negro.<sup>14</sup>

Conquanto a figura 9 já revele uma dependência não monotônica do custo computacional  $\langle C \rangle$  com o número de agentes  $M$ , pois o desempenho do grupo com  $M = 10$  agentes é superior ao de grupos com  $M = 1$  e  $M = 100$  agentes, a figura 10 revela a grande complexidade dessa dependência. Essa figura mostra as variações de  $\langle C \rangle$  (painel à esquerda) e do número médio de dicas exibidas no quadro no início da dinâmica  $\langle H_i \rangle$  (painel à direita) com o número de agentes  $M$ . Como mencionado anteriormente, o número médio de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  não é informativo para a charada *DGR* pois  $\langle H^* \rangle = B$  independente do valor de  $M$ . De fato, a análise de  $\langle H_i \rangle$  mostra que para quadros pequenos ou para equipes grandes o quadro fica cheio (ou seja,  $\langle H_i \rangle = B$ ) já no estágio inicial da busca.

Para quadros grandes (por exemplo,  $B = 100$  e  $B = B_{max} = 351$ ), o custo computacional médio é praticamente independente do tamanho da equipe  $M$ , como já tínhamos observado em nossa análise da figura 9, mas a figura 10 ilustra esse fato de modo muito mais claro. Quadros com tamanhos tão elevados permitem a escrita de um número muito maior de dicas que aquelas necessárias para resolver a charada (que são 6 no caso *DGR*) e que aquelas presentes em um agente (que são 6 também, relativas a cada uma das colunas da charada). Dessa forma, é grande a chance de que a dica selecionada seja

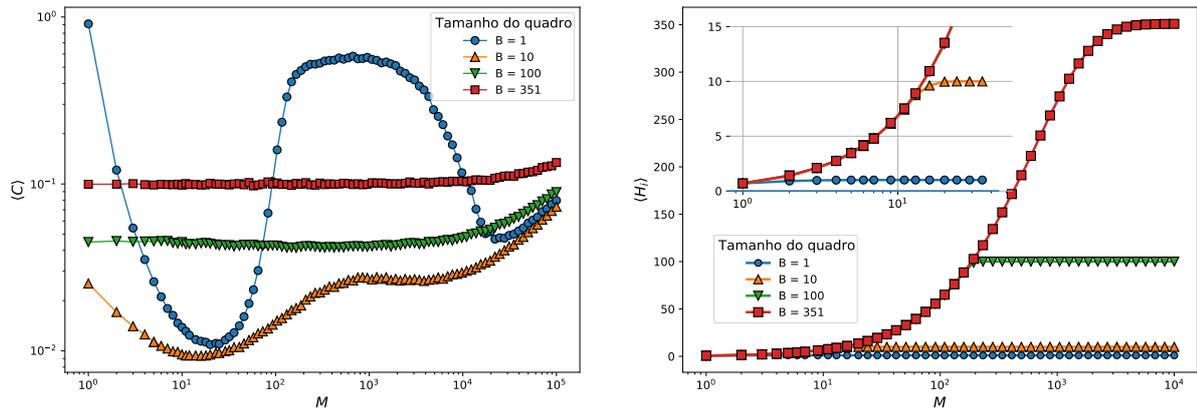


Figura 10 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel esquerdo) e número médio de dicas exibidas no quadro negro no início da dinâmica  $\langle H_i \rangle$  (painel direito) para a charada *DGR* como funções do número de agentes  $M$  para quadros de tamanho  $B = 1, 10, 100$  e  $351$  como indicado. A inserção amplia a região  $1 < M < 40$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

distinta daquelas presentes no agente, fazendo com que a assimilação de dicas do quadro seja a ação preferencial do agente. Essa dinâmica torna-se análoga a uma busca cega onde o espaço de escolhas tem tamanho  $B$  e são realocados até 6 dígitos a cada assimilação. Lembramos que na busca cega usual, descrita no apêndice B, o espaço de escolhas é o espaço das  $10!$  atribuições dígito-letras. Para  $B = B_{max}$  essa diminuição do espaço de busca é capaz de reduzir em 10 vezes o custo computacional em relação à busca cega usual. Nessa linha, esperamos que diminuindo  $B$ , diminuamos o espaço de escolhas e, portanto, melhoramos o desempenho do sistema quadro-negro. Isso é exatamente o que observamos na figura 10 para  $B = 100$  que apresenta o mesmo comportamento de  $B = B_{max}$ , mas com custo computacional menor. Entretanto, uma redução mais extrema do tamanho do quadro, como nos casos  $B = 10$  e  $B = 1$ , gera outros efeitos além da simples redução do espaço de escolhas já que a forma da curva  $\langle C \rangle$  vs.  $M$  muda completamente.

Para quadros pequenos (por exemplo,  $B = 1$  e  $B = 10$ ), observamos máximos e mínimos bastante acentuados. Em particular, para  $B = 1$  o mínimo global do custo  $\langle C \rangle_{min} = 0.011$  ocorre para  $M = 18$ . Já para  $B = 10$  o mínimo global  $\langle C \rangle_{min} = 0.009$  ocorre em  $M = 12$ . Vale notar que para  $B = 1$  forma-se um quase platô no intervalo  $148 < M < 3053$  onde  $\langle C \rangle$  varia de 0.4 a 0.58, sendo o valor máximo atingido para  $M = 673$ . Ainda, notemos que para os valores de  $M$  que otimizam o desempenho, a busca já começa com o quadro cheio. Vamos discutir com mais profundidade a dependência um tanto complexa do custo computacional com o tamanho da equipe para  $B = 1$  ao final da

seção.

Novamente, comparando o desempenho de um agente solitário ( $M = 1$ ) com o da equipe ( $M > 1$ ) na figura 10 podemos apreciar o benefício da cooperação para a solução das charadas. Como já tínhamos observado, para quadros grandes o uso de uma equipe é irrelevante ou até mesmo prejudicial, caso a equipe seja muito grande. A estratégia cooperativa é uma boa escolha para quadros e equipes pequenas.

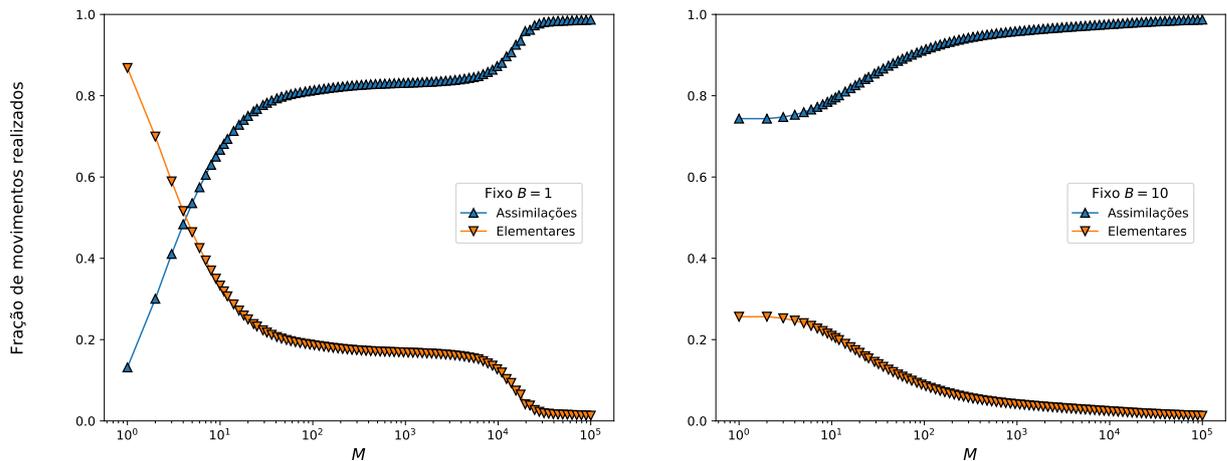


Figura 11 – Fração média de movimentos elementares e de assimilações como função do número de agentes  $M$  para a charada  $DGR$  com quadros de tamanho  $B = 1$  (painel esquerdo) e  $B = 10$  (painel direito).

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 11 mostra a fração média de movimentos elementares e de assimilações realizadas pelos agentes durante a busca para os tamanhos de quadro  $B = 1$  (painel à esquerda) e  $B = 10$  (painel à direita) quando o número de agentes  $M$  varia. Lembramos que, como a cada passo de tempo uma dessas ações deve ocorrer com certeza, a soma do número de movimentos elementares e do número de assimilações iguala o tempo de busca. Assim, para cada busca obtemos o número de movimentos elementares e dividimos esse número pelo tempo de busca. Essa é a fração de movimentos elementares para uma busca particular. O resultado apresentado na figura é a média dessa fração sobre  $\mathcal{A} = 10^4$  buscas independentes. Observamos que o número de movimentos elementares supera as assimilações apenas para  $B = 1$  e  $M < 4$ . Na situação de pior desempenho, ou seja, no máximo global do custo computacional ( $B = 1$  e  $M = 1$ ), os movimentos elementares representam 87% das ações totais. Já para  $B = 1$  e  $M = 18$ , onde o custo computacional atinge o valor mínimo para esse tamanho de quadro, o cenário altera-se drasticamente com 74% das ações sendo assimilações de dicas expostas no quadro-negro. É curioso

que essa proporção é aproximadamente mantida para  $B = 10$  e  $M = 12$ , onde o custo computacional é mínimo.

Com os resultados da figura 11 podemos tentar entender o efeito complexo do aumento do número de agentes no custo computacional para  $B = 1$ , mostrado no painel esquerdo da figura 10. Essa é provavelmente a situação mais interessante a ser estudada sob a perspectiva da cooperação, pois suas vantagens e desvantagens são muito mais aparentes do que em quadros maiores. De fato, nesse caso é a equipe e não o quadro que atua como memória ou repositório de dicas e, sob a perspectiva de um agente específico, o único modo dele obter dicas novas (além do movimento elementar, é claro) é através da cópia das dicas descobertas pelos outros membros da equipe. Daí a diminuição inicial do custo computacional e o aumento do número de assimilações quando a equipe cresce a partir de  $M = 1$ . O problema é que como os agentes assimilam cada vez mais frequentemente dicas do quadro eles tornam-se mais similares em termos das atribuições dígito-letra que codificam. Essa perda de diversidade da equipe leva a exposição recorrente das mesmas dicas no quadro de modo que o aumento da equipe passa a ser desvantajoso, já que agentes distintos codificam atribuições dígito-letra iguais ou muito similares. Isso resulta na região de crescimento e estabilização do custo computacional observada na figura 10. Podemos inferir que os agentes são realmente muito similares nessa região pelo fato da fração média de movimentos elementares ficar em torno de 20% como mostrado na figura 11. Isso significa que em 20% das ações, o agente escolhe uma dica do quadro que ele já carrega. Ora, se a dicas fossem colocadas no quadro de forma aleatória, ou seja, se não houvesse correlação alguma entre as atribuições dígito-letra dos  $M$  agentes, então a probabilidade desse evento seria, na melhor das hipóteses (supondo que o agente carregue 6 dicas, o que é bastante improvável)  $6/351 = 0.02$ . Conclui-se daí que os agentes são correlacionados. Já para equipes muito grandes ( $M > 10^3$ ), a diversidade inicial da equipe é tão grande que o mecanismo de redução da diversidade baseado na cópia da dica única exposta no quadro não tem efeito. Isso ocorre também porque o sistema encontra a solução muito rapidamente em termos de tempo absoluto, de modo que simplesmente não há tempo para aquele mecanismo atuar. O resultado é uma equipe diversa, como comprovado pelo fato de praticamente não observarmos movimentos elementares, ou seja, os agentes quase sempre encontram uma dica diferente exposta no quadro e realizam a sua assimilação. Para  $B = 10$ , temos os mesmos mecanismos e efeitos, embora muito mais atenuados pois o quadro maior garante uma disponibilidade maior de dicas distintas.

A semelhança entre a curva do custo computacional para  $B = 1$  exibida na figura 10 e as curvas do custo computacional para o algoritmo de busca aprendizado por imitação é notável.<sup>18</sup> Nesse algoritmo, que coincidentemente foi proposto originalmente para resolver charadas cripto-aritméticas,<sup>12</sup> os agentes copiam partes da atribuição dígito-letra do agente mais apto, chamado agente modelo. Observe que nesse caso precisamos atribuir um valor para cada uma das possíveis associações dígito-letra a fim de determinarmos o agente

mais apto, que pode mudar a cada iteração. No aprendizado por imitação é fácil entender o mecanismo de diminuição da diversidade da equipe, já que o processo de imitação do agente modelo torna os agentes mais similares entre si. Os platôs com custo computacional alto são consequências do aprisionamento da equipe em mínimos locais da função que atribui valor às associações dígito-letra e só ocorrem quando a equipe perde diversidade. No mundo real, esse fenômeno é conhecido como pensamento de grupo<sup>30</sup> e é uma das principais razões por que grupos deliberativos (ou seja, que realizam *brainstorming*) podem produzir resultados desastrosos.<sup>31</sup>

Concluindo a análise da charada *DGR*, devemos notar que no estudo do algoritmo de busca aprendizado por imitação observa-se uma forte dependência do custo computacional com o problema específico a ser resolvido que, por sua vez, determina a rugosidade da função que atribui valores aos estados dos agentes (veja, por exemplo, a figura 8 do estudo do modelo NK<sup>32</sup> usando o algoritmo do aprendizado por imitação<sup>18</sup>). Nesse sentido, podemos esperar que charadas distintas resultem em curvas de custo computacional bastante distintas. Embora no sistema quadro-negro não haja atribuição de valores aos estados dos agentes (essa é uma das vantagens desses sistemas), a sinergia entre as dicas resulta em buscas com características muito diversas como veremos a seguir.

## 4.2 A charada *SMM*

Tratemos agora dos resultados obtidos para a charada *SMM*. Na figura 12 apresentamos as curvas de custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel à esquerda) e do número médio de dicas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (painel à direita) contra o tamanho do quadro  $B \leq B_{max}$  para o número de agentes  $M = 1, 10$  e  $100$ . Lembramos que  $B_{max} = 506$  corresponde ao número total de dicas da charada *SMM*. Notamos a presença de um custo mínimo para todas as curvas que são praticamente insensíveis às variações do tamanho da equipe  $M$  já para valores intermediários de  $B$ . Em particular, para  $B = B_{max}$  temos  $\langle C \rangle \approx 0.148$  para os valores de  $M$  considerados. Destacamos que para  $M = 1$  o custo computacional médio mínimo associado é igual a  $\langle C \rangle_{min} = 0.069$  e ocorre em  $B = 11$ . Para  $M = 10$ ,  $\langle C \rangle_{min} = 0.041$  em  $B = 5$ , e para  $M = 100$ ,  $\langle C \rangle_{min} = 0.042$  em  $B = 18$ . Já para os valores de custo computacional máximo anteriores aos mínimos globais, equipes de tamanho  $M = 1$  e  $10$  tomam valores respectivos de  $\langle C \rangle_{max} = 0.9$  e  $0.061$  e ambos ocorrem em  $B = 1$ . Já para  $M = 100$  encontramos  $\langle C \rangle_{max} = 0.124$  em  $B = 5$ . Tal como observado no estudo da charada *DGR*, ao final da dinâmica temos o completo uso do quadro-negro  $\langle H^* \rangle = B$  independentemente do número de agentes  $M$ , fazendo desse resultado pouco informativo.

A princípio, ressaltamos os resultados de *SMM* concordantes com *DGR*. Na figura 12 notamos que o desempenho individual ( $M = 1$ ) e coletivo ( $M > 1$ ) resultam em curvas qualitativamente similares. Além disso apreciamos que a limitação da informação confere

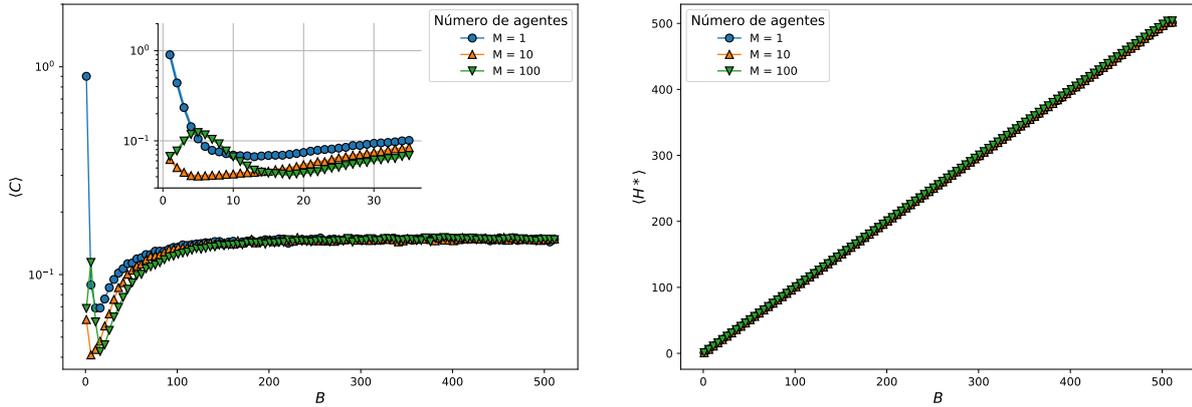


Figura 12 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel esquerdo) e uso médio do quadro negro  $\langle H^* \rangle$  (painel direito) ao término da busca para a charada *SMM* como funções do tamanho máximo do quadro-negro  $B$  para números de agentes  $M = 1, 10$  e  $100$  como indicado. A inserção amplia a região em torno ao desempenho ótimo do grupo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

à dinâmica seu melhor desempenho e também que sua otimização escala de modo não monotônico com o número de agentes  $M$ , visto que o desempenho para  $M = 10$  agentes supera os demais ( $M = 1$  e  $M = 100$ ). Para ambientes cooperativos ( $M > 1$ ) cuja restrição da informação disponível é máxima (com  $B = 1$ ), o ganho de desempenho aumenta em até 30 vezes comparado à dinâmica individual ( $M = 1$ ), onde o quadro-negro opera como a memória do agente. Isso reforça o resultado obtido para *DGR*, pois evidencia que o trabalho em equipe melhora o desempenho quando um único agente é limitado em sua capacidade de execução. Lembramos que a capacidade de execução corresponde a limitação de memória dada por  $B = 1$ . Por outro lado, quando os agentes são individualmente mais competentes ( $M = 1$  e altos valores de  $B$ ), a cooperação torna-se irrelevante, embora sempre benéfica para a resolução do problema quando comparada à busca cega, uma vez que  $\langle C \rangle < 1$  para todos os valores de  $M$  e  $B$ .

Norteados pelas discussões apresentadas no estudo da charada *DGR*, aqui também notamos o surgimento de desempenhos ótimos do sistema para  $5 \leq B < 20$ . As justificativas para a limitação de informação são análogas às aquelas apresentadas para *DGR* quanto à qualidade das dicas presentes no quadro, porém algumas nuances devem ser apontadas. Ao compararmos as figuras 9 e 12 uma distinção muito interessante que notamos é que para a charada *SMM* o custo computacional médio torna-se praticamente independente do tamanho do quadro para  $B < B_{max}$ . Por exemplo, na figura 12 vemos que isso ocorre para  $B \approx 200$ , que corresponde a um quadro que permite a exibição de somente 39.5% do

número total de dicas. Esse resultado difere do encontrado na charada *DGR*, no painel esquerdo da figura 9, onde o custo computacional médio aumenta visivelmente com o aumento de  $B$  até o quadro atingir o tamanho máximo  $B_{max} = 351$ . A comparação entre essas figuras permite-nos concluir que o sistema quadro-negro é mais eficiente na solução da charada *DGR* do que na solução da charada *SMM*. Naturalmente essa eficiência é medida em relação ao desempenho da busca cega: para a charada *DGR* o ganho em relação à busca cega pode chegar a um fator 100, enquanto que para a charada *SMM* esse ganho pode chegar a um fator 30 apenas.

Com a figura 12 já notamos alterações das curvas de custo computacional em decorrência da variação do tamanho das equipes  $M$ , mas é na figura 13 que descobrimos as maiores diferenças entre as dinâmicas colaborativas para resolução das charadas *SMM* e *DGR*. Exibimos na figura 13 as relações entre o custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel à esquerda) e do número médio de dicas escritas no quadro no início da dinâmica  $\langle H_i \rangle$  (painel à direita) em relação ao número de agentes  $M$ . Em ambos os gráficos, evidenciamos as curvas para distintos tamanhos de quadro  $B = 1, 10, 100, B_{max}$ , onde  $B_{max} = 506$  para a charada *SMM*. Notamos a existência de máximos e mínimos globais com grande destaque nas curvas para quadros de tamanhos bastante restritos ( $B = 1$  e  $B = 10$ ). Em particular, para  $B = 1$  temos o custo computacional médio mínimo  $\langle C \rangle_{min} = 0.057$  e máximo  $\langle C \rangle_{max} = 0.903$  nos pontos  $M = 25$  e  $M = 1$ , respectivamente. Já para  $B = 10$ , temos  $\langle C \rangle_{min} = 0.041$  e  $\langle C \rangle_{max} = 0.542$  nos pontos  $M = 16$  e  $M = 1072$ , respectivamente. Para a relação com  $\langle H_i \rangle$  vale notar que o quadro-negro já está completo ao início da busca quando seu tamanho é pequeno e também caso o número de agentes  $M$  seja grande ( $M \geq 10^4$ ), tal como observado no estudo da charada *DGR*.

Começemos com a análise dos casos em que o tamanho do quadro é grande, ou seja,  $B = 100$  e  $B = B_{max} = 506$ . Aqui temos que o custo computacional é praticamente independente do tamanho do grupo. Análogo aos resultados obtidos para *DGR* (conforme a figura 10), quadros que exibem um grande número de dicas podem apresentar mais dicas diferentes daquelas que um agente particular já possui (lembramos que um agente pode carregar no máximo 5 dicas no caso *SMM*), garantindo preferência à ação de assimilação. Este cenário é similar à busca cega, com redução do espaço de  $10!/2$  possibilidades para  $B$  e rearranjo de até 6 associações dígito-letra ao invés de apenas duas via movimento elementar. Quando consideramos  $B = B_{max}$  reduzimos em aproximadamente 9 vezes o custo computacional em relação à busca cega. Ao reduzirmos o tamanho do quadro, mantendo um tamanho elevado que permita a predominância da assimilação de dicas do quadro, o espaço de busca também diminui e, em consequência, melhoramos o desempenho da força tarefa. Este resultado é claro quando comparamos as curvas de  $B = 100$  e  $B = B_{max}$ , de modo que a primeira tem custo computacional menor que a última. Este resultado é idêntico ao que observamos no estudo da charada *DGR*, embora a diferença seja menos expressiva para a charada *SMM*.

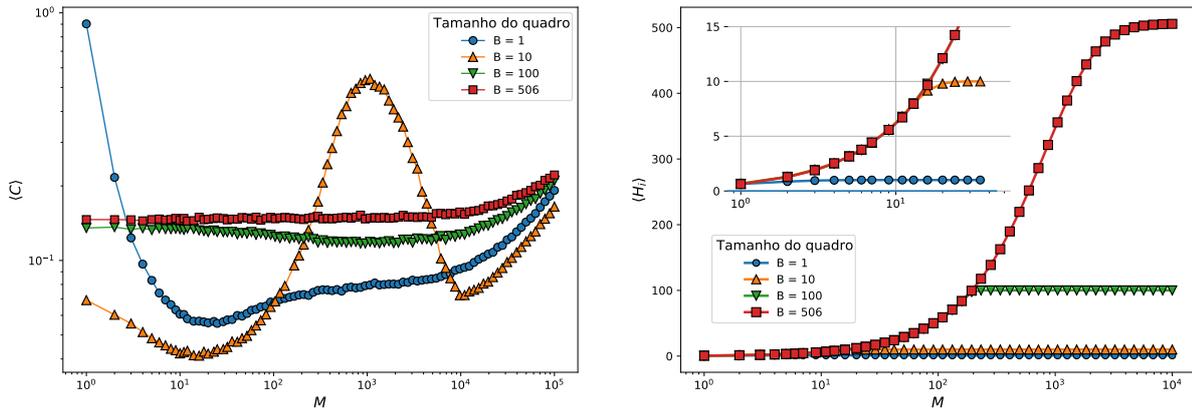


Figura 13 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel esquerdo) e número médio de dicas exibidas no quadro negro no início da dinâmica  $\langle H_i \rangle$  (painel direito) para a charada *SMM* como funções do número de agentes  $M$  para quadros de tamanho  $B = 1, 10, 100$  e  $506$  como indicado. A inserção amplia a região  $1 < M < 40$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, quando os quadros são restritos ( $B = 1$  e  $B = 10$ ) as curvas do custo computacional na figura 13 ganham complexidade e para esses valores de  $B$  é evidente as similaridades e diferenças com as curvas  $\langle C \rangle$  vs  $M$  para a charada *DGR* (conforme a figura 10). Nesses resultados o que mais nos fascina é a semelhança qualitativa entre as curvas com  $B = 1$  para *DGR* e  $B = 10$  para *SMM*, e entre as curvas com  $B = 10$  para *DGR* e  $B = 1$  para *SMM*. Na tentativa de compreendermos esses resultados inesperados, apresentamos na figura 14 a fração média de movimentos elementares e de assimilações realizadas pelos agentes durante a busca para quadros de tamanho  $B = 1$  e  $B = 10$  em relação ao número de agentes  $M$ . (Relembramos que ao final de cada busca o número de movimentos elementares somado ao número de assimilações dá o tempo de busca.) Nessa figura notamos que o número de movimentos elementares supera as assimilações apenas para sistemas com quadro-negro restrito ( $B = 1$ ) e com poucos agentes ( $M < 5$ ).

Considerando a curva para  $B = 1$  na figura 14, observamos que o agente solitário ( $M = 1$ ) corresponde ao máximo global do custo computacional, indicando portanto o pior desempenho. Nesse caso, o número de assimilações representa apenas 16.3% dos movimentos realizados. Já para  $M = 25$ , o desempenho da equipe é ótimo com o número de assimilações dado por 70.3% das ações totais. O que encontramos novamente corrobora o senso comum de que equipes com mais de um membro, mas não muito grandes, apresentam melhores desempenhos, pois o aumento do número de agentes é responsável por diversificar as dicas da equipe como um todo. Conforme o número de agentes aumenta ( $M > 25$ ) a taxa

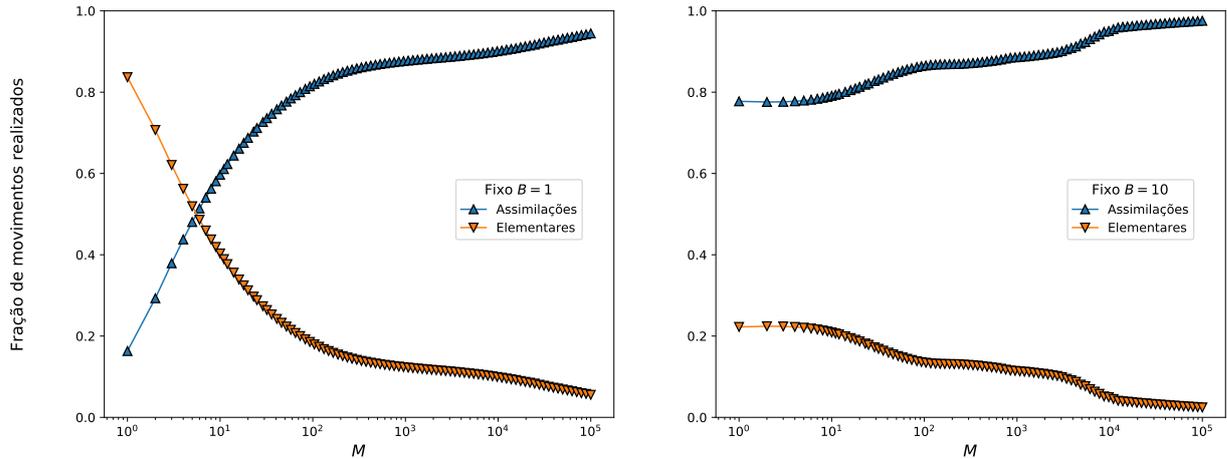


Figura 14 – Fração média de movimentos elementares e de assimilações como função do número de agentes  $M$  para a charada  $SMM$  com quadros de tamanho  $B = 1$  (painel esquerdo) e  $B = 10$  (painel direito).

Fonte: Elaborada pelo autor.

de assimilações estabiliza-se em torno de 85% para valores de  $M$  tais que  $10^2 < M < 10^4$ , fazendo com que a dica única (pois  $B = 1$ ) seja assimilada por todo o grupo. Lembramos que o movimento elementar apenas ocorre caso o agente selecionado já apresente a dica aleatoriamente escolhida do quadro-negro e, dado que 29.7% das ações são movimentos elementares para o melhor desempenho da equipe ( $M = 25$ ) e este percentual reduz-se monotonicamente, é razoável inferirmos que equipes maiores apresentem membros progressivamente menos diversos. Como resultado, o desempenho coletivo é prejudicado. Esta análise é análoga à que apresentamos para a charada  $DGR$ , o que reforça o efeito cooperativo que encontramos em ambos os cenários.

Quando aumentamos o tamanho do quadro para  $B = 10$ , a taxa de assimilações na situação em que o custo computacional é máximo, que ocorre em  $M = 1024$ , é de 88.8%. Já para equipes com  $M = 16$  membros, que corresponde ao desempenho ótimo para esse tamanho de quadro, a taxa de assimilações corresponde a 80.5% das ações totais. A explicação da existência destes valores de mínimo e máximo globais segue análoga à que apresentamos no parágrafo anterior. Devemos, no entanto, compreender o motivo pelo qual os efeitos negativos da colaboração são mais agravados para  $B = 10$  do que para  $B = 1$ , ao contrário do que ocorre na charada  $DGR$ . Uma das hipóteses levantadas decorre da relação de influência que as dicas de  $DGR$  e  $SMM$  apresentam entre si. Quando as dicas têm grande influência sobre as demais, a redução do espaço disponível no quadro-negro diminui a chance de que a dica assimilada pelo agente destrua as dicas que o agente já possui em seu vetor de associações. De fato, conforme constatamos no apêndice A, as

dicas associadas à charada *SMM* são mais influentes entre si do que as dicas associadas à charada *DGR*, portanto quando assimiladas é grande o potencial de destruição daquelas já presentes no agente que a selecionou do quadro. Por conta disso, embora os efeitos de pensamento de grupo prejudiquem equipes grandes solucionando a charada *SMM* com quadros de tamanho  $B = 1$ , a piora de desempenho é ainda mais expressiva para quadros com  $B = 10$  onde, além do pensamento de grupo, a maior diversidade de dicas no quadro inviabiliza a manutenção de informações úteis carregadas por cada indivíduo da equipe devido seu caráter destrutivo.

Tal como pudemos concluir no estudo da charada *DGR*, os resultados aqui obtidos reforçam que além da importância do sistema de quadro-negro para a dinâmica colaborativa, devemos reconhecer que a relação entre as dicas para cada problema cripto aritmético é responsável pela presença de nuances muito interessantes e relevantes no desdobramento das buscas. Veremos a seguir a charada *WHT*, cujos resultados somam-se a essas conclusões de modo bastante curioso.

### 4.3 A charada *WHT*

Nesta seção estudaremos a dinâmica de *brainstorming* no sistema de quadro-negro aplicada à resolução da charada *WHT*. Na figura 15 apresentamos o custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel à esquerda) e o uso médio do quadro ao fim da busca  $\langle H^* \rangle$  (painel à direita) em relação ao tamanho do quadro-negro  $B \leq B_{max}$  para números distintos de agentes  $M = 1, 10$  e  $100$ . Vale lembrar que  $B_{max} = 234$  para a charada *WHT*. Curiosamente, notamos não apenas a presença de um custo máximo para quadros pequenos ( $1 \leq B < 15$ ) para todas as curvas, mas também uma queda monótona a partir desse ponto de máximo, com comportamento estável aproximadamente para  $B > 25$  (melhor visualizado na inserção da figura 15). Esses resultados são bastante distintos daqueles encontrados para as charadas *DGR* e *SMM*. Destacamos os valores de custo computacional médio mínimo  $\langle C \rangle_{min} = 0.188$  para  $M = 1$ ,  $\langle C \rangle_{min} = 0.119$  para  $M = 10$  e  $\langle C \rangle_{min} = 0.128$  para  $M = 100$ . Em contrapartida, o custo médio computacional máximo para  $M = 1$  é igual a  $\langle C \rangle_{max} = 0.821$  e ocorre em  $B = 1$ . Para  $M = 10$ , temos  $\langle C \rangle_{max} = 0.227$  em  $B = 3$ . Já para  $M = 100$ , temos  $\langle C \rangle_{max} = 0.165$  em  $B = 2$ . Quando analisamos o uso médio do quadro quando a busca por uma solução se encerra  $\langle H^* \rangle$  e uma dentre as  $S = 66$  soluções é encontrada, inesperadamente notamos que a partir de um dado valor de  $B$  não são escritas novas dicas no quadro, mesmo com o aumento do seu espaço disponível. De fato, o uso médio do quadro tende para os valores constantes  $\langle H^* \rangle = 23.97$  para equipes de tamanho  $M = 1$ ,  $\langle H^* \rangle = 23.86$  para  $M = 10$  e, enfim,  $\langle H^* \rangle = 55.65$  para  $M = 100$ .

Inicialmente, tratemos dos resultados similares àqueles obtidos para as charadas *DGR* e *SMM*. Na figura 15 fica evidente que o desempenho individual ( $M = 1$ ) e coletivo ( $M > 1$ ) são qualitativamente similares, concretizando mais uma vez nossas expectativas

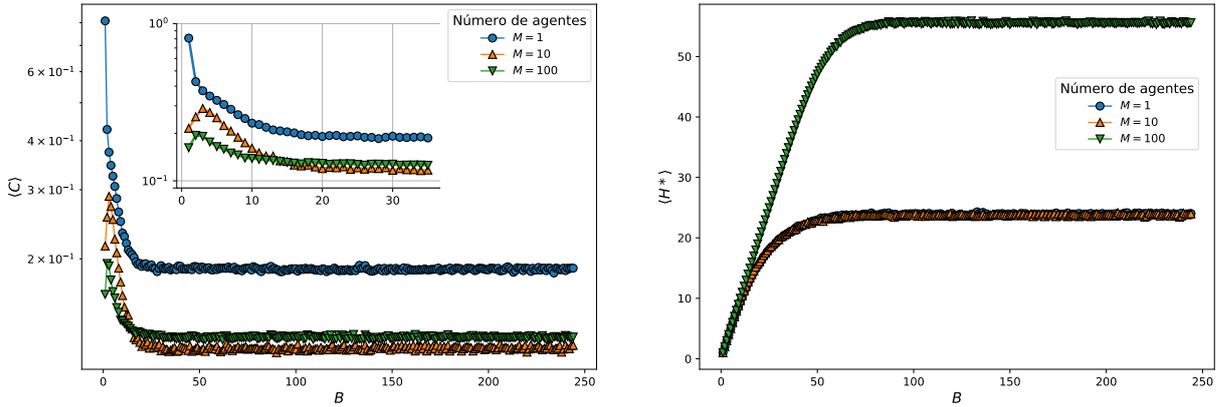


Figura 15 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel esquerdo) e uso médio do quadro negro ao término da busca  $\langle H^* \rangle$  (painel direito) para a charada *WHT* como funções do tamanho máximo do quadro-negro  $B$  para números de agentes  $M = 1, 10$  e  $100$  como indicado. A inserção amplia a região de quadros pequenos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de que equipes compostas por agentes individualmente capazes de resolver a charada proposta apresentem curvas de desempenho semelhantes tanto para  $M = 1$  quanto para  $M > 1$ . Ademais, verificamos a melhora significativa do desempenho em até 9 vezes quando aumentamos o tamanho de equipes (de  $M = 1$  para  $M = 100$ , por exemplo) compostas por agentes limitados em sua capacidade de execução ( $B = 1$ ). No entanto as similaridades cessam quando percebemos que a não-monotonicidade da otimização do desempenho em relação ao tamanho da equipe  $M$  ocorre a partir de  $B \geq 15$ , onde equipes de tamanho  $M = 10$  tem melhor desempenho que aquelas cujos tamanhos são demasiadamente pequenos ( $M = 1$ ) ou grandes ( $M = 100$ ), ao contrário do que obtivemos para as demais charadas (cujo resultado análogo ocorre já para  $B \geq 1$ ). Outro fato curioso e distinto do que obtivemos para as charadas *SMM* e *DGR* diz respeito à redução do quadro-negro. Limitar a quantidade de informação disponível aos agentes para *WHT* não resulta em ganhos de desempenho quando comparados a quadros onde  $B = B_{max}$ . Além disso, não há convergência para o mesmo valor de custo computacional  $\langle C \rangle$  conforme aumentamos o valor de  $B$  para tamanhos de equipe distintos, tal como encontramos no estudo estudo das charadas *DGR* e *SMM*. A seguir, analisaremos nossos resultados com novas perspectivas sobre a dinâmica de quadro-negro.

Em primeiro lugar, discutiremos a relação entre  $\langle H^* \rangle$  vs.  $B$  mostrada na figura 15 (painel direito). Os melhores desempenhos ocorrem conforme aumentamos o tamanho disponível no quadro-negro, embora nestas situações os quadros não sejam, em média,

completamente utilizados. Esse resultado é muito interessante, pois expressa de modo não intuitivo a dependência da utilização do quadro-negro de acordo com o número de soluções presentes na charada. Recordemos que a charada *WHT* apresenta  $S = 66$  enquanto *SMM* e *DGR* contém apenas  $S = 1$  solução. Como a busca é finalizada quando uma das soluções é encontrada, caso  $S > 1$  uma dica pode estar associada a mais de uma solução. Evidentemente se as soluções estivessem associadas apenas a dicas distintas teríamos um total de  $H_c = 66 \times 3 = 198$  dicas corretas ao invés de  $H_c = 91$ , tal como encontrado para esta charada, de modo que assimilar uma dica do quadro permite ao agente aproximar-se de mais de uma das soluções possíveis. De fato, este resultado é consistente para todas as charadas, e tal conclusão pode ser melhor avaliada no apêndice C, onde o incremento no número de soluções em cada família de charadas permite a resolução sem que o quadro-negro esteja necessariamente completo. Com auxílio das figuras 16 e 17 discutiremos como o número de soluções  $S > 1$  pode afetar a dinâmica, mas neste momento voltemos nossa atenção à comparação das curvas de uso do quadro ao término da busca para  $M = 1$  e  $M = 10$  na figura 15. Nosso pior cenário (onde o custo computacional é maior) ocorre quando a equipe é composta por um único agente. Neste caso obtemos o melhor desempenho quando apenas 10.2% do quadro é utilizado, já que o uso completo resultaria em  $\langle H^* \rangle = 234$  caso  $B = B_{max} = 234$ . Este percentual é inalterado quando aumentamos nossa equipe para  $M = 10$  e sofre um grande incremento quando  $M = 100$  (cujo melhor desempenho utiliza cerca de 23.8% do quadro). Portanto existe um tamanho de quadro ótimo com aproximadamente  $B = 20$  capaz de armazenar o menor número de dicas necessárias e suficientes para auxiliar os agentes na resolução da charada, a partir do qual o desempenho da equipe é independente do aumento do tamanho do quadro-negro disponível. A utilização reduzida do espaço total de quadros grandes indica que uma das soluções é encontrada antes mesmo dos agentes encontrarem todas as informações úteis (dicas) associadas à charada.

Observemos agora a relação entre  $\langle C \rangle$  vs.  $B$  na figura 15 (painel esquerdo). É razoável pensarmos que a diversidade proporcionada pelo aumento da equipe resulte em melhores desempenhos. De fato, isso é o que observamos, pois o custo computacional para  $M = 1$  sempre supera os valores de custo caso  $M = 10$ . Este efeito persiste quando incrementamos a equipe para  $M = 100$ , porém é válido apenas para  $1 < B < 15$ . Isso porque, como sabemos que para a charada *WHT* existe um tamanho de quadro-negro  $B < B_{max}$  além do qual os agentes não aproveitam o espaço disponível para escrever suas dicas, para  $15 \leq B \leq B_{max}$  a diversidade dos  $M = 100$  agentes é responsável por adicionar dicas desnecessárias ao quadro, que estabilizará seu uso em  $\langle H^* \rangle = 55.65$  (conforme o painel à direita na figura 15), e prejudicará o desempenho da equipe. Neste cenário ( $15 \leq B \leq B_{max}$ ) resgatamos a similaridade com a performance dos grupos para as demais charadas, onde o desempenho para  $M = 10$  é melhor do que para  $M = 1$  e  $M = 100$ .

Novas perspectivas bastante interessantes levam em conta o número de soluções

$S > 1$  para charada *WHT*. É notável que na figura 15 (painel à esquerda) as curvas de custo computacional médio não convergem para um mesmo valor conforme o tamanho do quadro disponível aproxima-se de seu valor máximo  $B_{max}$ , tal como ocorre para as demais charadas estudadas. Isso ocorre porque a média  $\langle C \rangle$  não discrimina entre soluções encontradas. De fato, quando diferenciamos cada uma das soluções dentre as  $\mathcal{A} = 10^4$  amostras consideradas, concluímos que cada solução apresenta uma chance única de ser encontrada, como expomos na figura 16. Nela separamos no eixo horizontal cada uma das  $S = 66$  soluções representadas por  $S_i$ , tal que  $i = 0, 1, 2, \dots, 65$ , e seu número respectivo de ocorrências no eixo vertical. Não surpreendentemente, para um agente solitário ( $M = 1$ ) pouco competente ( $B = 1$ ) as diferentes soluções têm a mesma probabilidade de serem encontradas, como esperaríamos obter para a busca cega. Por outro lado, quando esse agente solitário é mais competente quanto à sua capacidade de memorização ( $B = 10$  e  $B = 100$ ), algumas soluções são encontradas com frequência até duas vezes maior que outras. A preferência por algumas soluções também ocorre quando consideramos equipes mais numerosas ( $M = 10$ , no painel à direita na figura 16), mesmo quando o quadro-negro é limitado ( $B = 1$ ), reforçando o efeito já observado de que, neste último caso, a equipe (e não o quadro) é quem armazena as dicas do grupo. Embora ainda não sejam claros os motivos pelos quais uma solução possa ser mais facilmente acessada em comparação às demais, nossos resultados são importantes para a compreensão de problemas cuja solução não é única. Provavelmente, as soluções encontradas com mais frequência sejam aquelas que compartilhem o maior número de dicas.

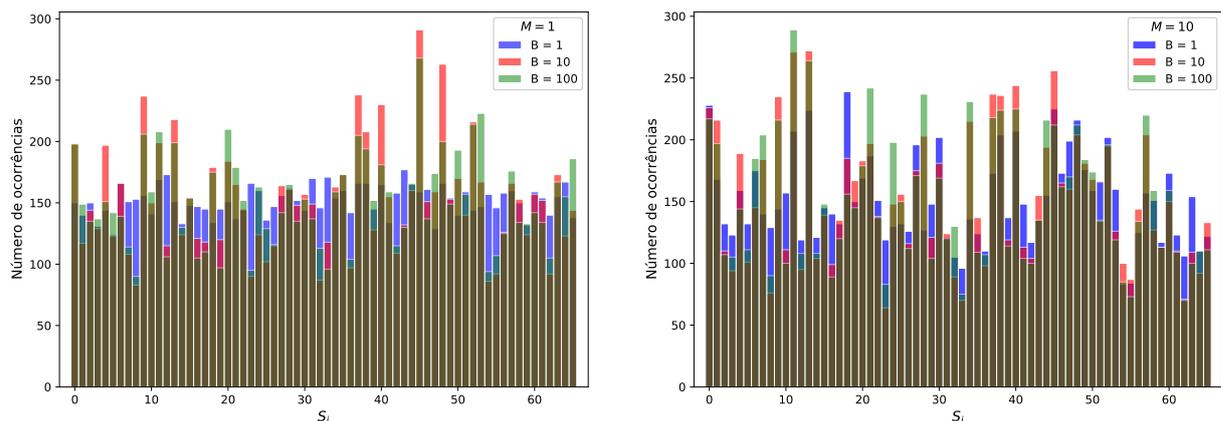


Figura 16 – Histograma relativo ao número de ocorrências em que uma dada solução  $S_i$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, 65$ , é encontrada para  $M = 1$  (painel à esquerda) e  $M = 10$  (painel à direita) relativos aos tamanhos de quadro  $B = 1, 10$  e  $100$  para a charada *WHT*, conforme a legenda. Vale lembrar que existem  $S = 66$  soluções para a charada *WHT*.

A complexidade da dinâmica *brainstorming* na charada *WHT* é melhor avaliada por meio da figura 17, que agrega os resultados mais interessantes e díspares daqueles que obtivemos até então. Nela apresentamos as curvas de custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel à esquerda) e do número médio de dicas escritas no quadro ao início da dinâmica  $\langle H_i \rangle$  (painel à direita) em relação ao número de agentes  $M$  para a charada *WHT*. Em ambos os gráficos evidenciamos as curvas para tamanhos de quadro  $B = 1, 10, 100$  e  $B_{max}$ , onde  $B_{max} = 234$ . Notamos que as curvas não apresentam máximos e mínimos muito evidentes e distintos, diferentemente das charadas *DGR* e *SMM*, conforme mostrado nas figuras 10 e 13, respectivamente. Em particular, para  $B = 1$  temos custo computacional médio mínimo  $\langle C \rangle_{min} = 0.164$  e máximo  $\langle C \rangle_{max} = 0.809$ , nos pontos  $M = 104$  e  $M = 1$ , respectivamente. Para  $B = 10$ , temos  $\langle C \rangle_{min} = 0.129$  e  $\langle C \rangle_{max} = 0.232$ , ordenadamente nos pontos  $M = 41$  e  $M = 1$ . Já para  $B = 100$  e  $B = B_{max} = 234$  os resultados são bastante coerentes com  $\langle C \rangle_{min} = 0.128$  para  $M = 41$  e  $\langle C \rangle_{max} = 0.232$  para  $M = 1$ . Consideramos esses valores de máximo e mínimo para  $1 \leq M \leq 200$ , visto que aproximadamente para  $M > 200$  o custo computacional torna-se praticamente independente do tamanho do quadro  $B$  e cresce monotonicamente com  $M$  até que seja alcançado o valor  $\langle C \rangle = 1$ , que indica que o desempenho do sistema quadro-negro iguala-se ao da busca cega. Notemos que na relação entre o uso médio do quadro ao início da dinâmica  $\langle H_i \rangle$ , o regime onde  $B = B_{max}$  já está completo caso o número de agentes  $M$  seja grande ( $M \geq 10^4$ ), similar ao que ocorre para *DGR* e *SMM*. Para quadros restritos, no painel direito da figura 17 destacamos as curvas para  $B = 1$  e  $B = 10$  no intervalo de  $1 \leq M \leq 100$ . Fica evidente que para  $B = 10$  e  $B = 100$  o quadro é completo ao início da dinâmica apenas para  $M = 30$  e  $M = 400$ , respectivamente.

A redução do custo computacional com o aumento do número de integrantes na equipe  $M$  a partir de  $M = 1$  é um resultado já familiar. A diversidade do conhecimento que advém do incremento de  $M$  faz os grupos mais capacitados na resolução das charadas propostas. Esse efeito é bastante evidente para quadros limitados ( $B = 1$ ). Além disso, quando consideramos  $M \geq 10^4$ , o custo tende a  $\langle C \rangle = 1$ , fazendo do sistema quadro-negro equivalente à busca cega como já observado, já que as chances são grandes de que um dos agentes dentre os  $M$  considerados já contenha a solução da charada, restando a nós a sorte de escolhê-lo. Curiosamente caso aumentemos o número de agentes de  $M = 1$  para  $20 < M < 100$ , aproximadamente, obtemos desempenhos coletivos ainda melhores. Nas charadas *DGR* e *SMM*, equipes com tamanhos pertencentes a este intervalo apresentam desempenho progressivamente pior devido ao ganho de similaridade entre agentes. Aqui este efeito não é diferente, porém as consequências são contrárias devido ao grande número de soluções. Ao recordarmos que uma dica pode estar associada a mais de uma solução, o problema associado à similaridade entre os agentes é compensado pela variedade do espaço de soluções. Como resultado, o aumento de agentes ( $1 \leq M \leq 200$ , aproximadamente) é sempre benéfico na performance cooperativa. Esse resultado apenas deixa de valer quando

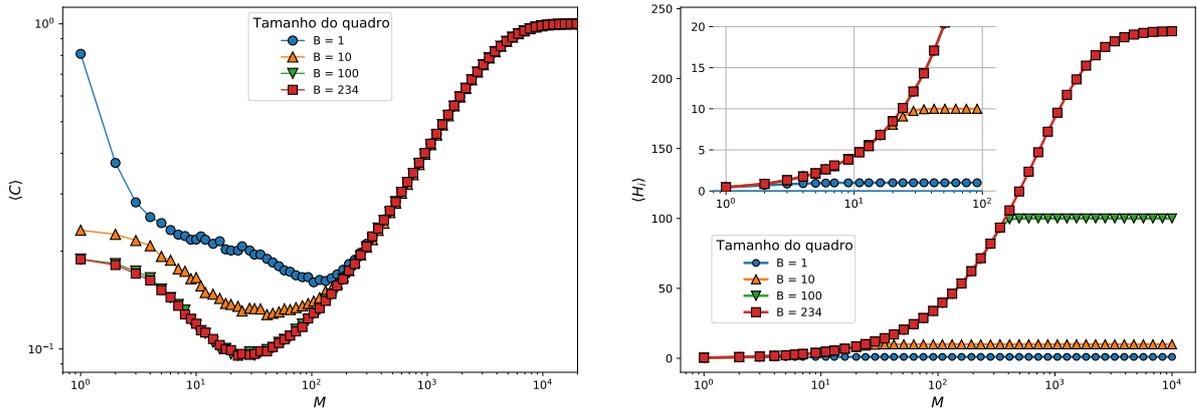


Figura 17 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (painel esquerdo) e número médio de dicas exibidas no quadro negro no início da dinâmica  $\langle H_i \rangle$  (painel direito) para a charada *WHT* como funções do número de agentes  $M$  para quadros de tamanho  $B = 1, 10, 100$  e  $234$  como indicado. A inserção amplia a região  $1 < M < 100$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

as equipes são excessivamente grandes ( $200 < M < 10^4$ ), pois nesse caso os agentes deixam de ser similares e tornam-se idênticos em grande parte, onde temos duplicação de trabalho.<sup>9</sup> A fim de tornar mais clara essas afirmações, apresentamos na figura 18 a fração média sobre as  $\mathcal{A} = 10^4$  amostras de movimentos elementares e de assimilações executadas pelos agentes para quadros de tamanho  $B = 1$  (painel à esquerda) e  $B = 10$  (painel à direita). Note que o número de assimilações supera o número de movimentos elementares apenas para  $M \leq 7$  e  $B = 1$  e que, caso  $M \geq 200$ , mais de 95% das ações resultam da escolha de dicas do quadro que o agente não possui e, portanto, deverá assimilá-las. Em consequência, temos uma equipe com  $M$  agentes progressivamente mais similares, tal como asseguramos. Essas análises são válidas para todas as curvas consideradas (isto é, para  $B = 10, 100$  e  $B = B_{max} = 234$ ), porém com efeitos mais brandos.

Finalmente, consideremos na figura 17 (no painel à esquerda) os maiores quadros, ou seja  $B = 100$  e  $B = B_{max} = 234$ , onde o custo computacional mínimo ocorre em  $M = 41$ . Ambos apresentam custo computacional  $\langle C \rangle$  visivelmente dependente da variável  $M$ , diferentemente daqueles observados para *DGR* e *SMM*, conforme as figuras 10 e 13, em ordem. Esse resultado corrobora nossas conclusões de que tanto a redução do espaço de possibilidades da busca cega proporcionada pelo quadro-negro como também a diversidade conferida pelos  $M = 41$  agentes em conjunto à variedade das  $S = 66$  soluções garantem a dependência não trivial entre  $\langle C \rangle$  e  $M$ .

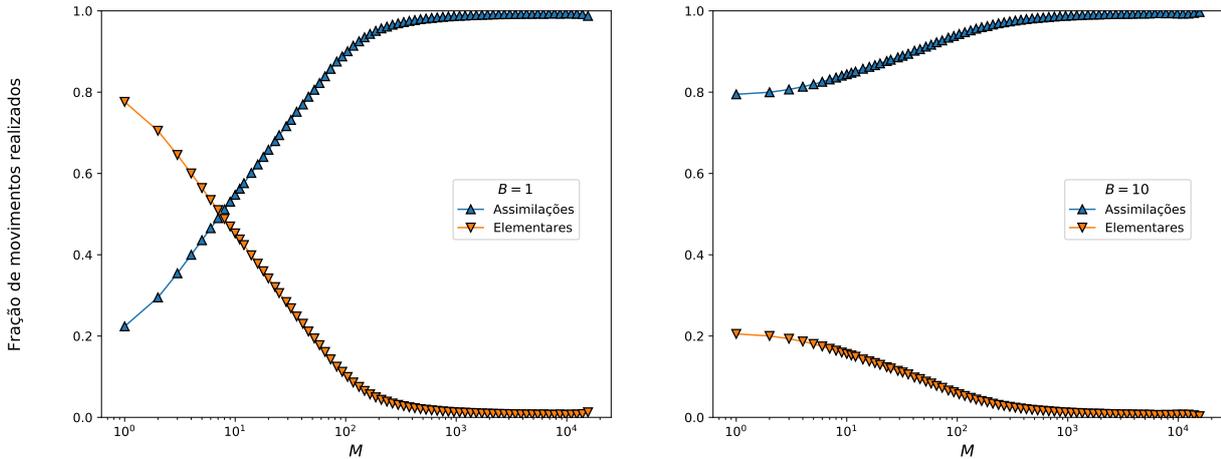


Figura 18 – Fração média de movimentos elementares e de assimilações como função do número de agentes  $M$  para a charada  $WHT$  com quadros de tamanho  $B = 1$  (painel esquerdo) e  $B = 10$  (painel direito).

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.4 Comparando as diferentes charadas

Para finalizar nosso estudo da dinâmica de *brainstorming* vamos comparar o desempenho do sistema quadro-negro para as três charadas estudadas. Embora o número de atribuições dígito-letra seja muito diferente para cada uma dessas charadas, essa comparação faz sentido pois nosso custo computacional é relativo ao desempenho da busca cega na mesma charada. Na figura 19 apresentamos nossos resultados mais representativos para o custo computacional médio  $\langle C \rangle$  das três charadas consideradas. No painel esquerdo mostramos o custo em função da fração  $0 < B/B_{max} \leq 1$  já que  $B_{max}$  difere em cada uma das charadas. Especificamente,  $B_{max} = 351, 506$  e  $234$  para as charadas  $DGR, SMM$  e  $WHT$ , respectivamente. O número de agentes nesse painel é fixo em  $M = 10$ . Já o painel direito mostra o custo em função do número de agentes  $M$  para quadros de tamanho  $B = 10$ .

Inicialmente analisemos na figura 19 o comportamento das curvas  $\langle C \rangle$  vs.  $B/B_{max}$ . Chama a atenção a notável similaridade qualitativa entre os desempenhos das equipes na busca pela solução das charadas  $DGR$  e  $SMM$ . Para ambas charadas, a limitação do quadro representa um fator importante na otimização do desempenho das equipes, sendo o ganho em relação à busca cega mais expressivo para a charada  $DGR$ , que apresenta em média ganho aproximadamente 4 vezes maior do que no caso da charada  $SMM$ , considerando os parâmetros que otimizam os desempenhos. Esse resultado curioso decorre não apenas devido às diferenças características das charada quanto ao número de letras

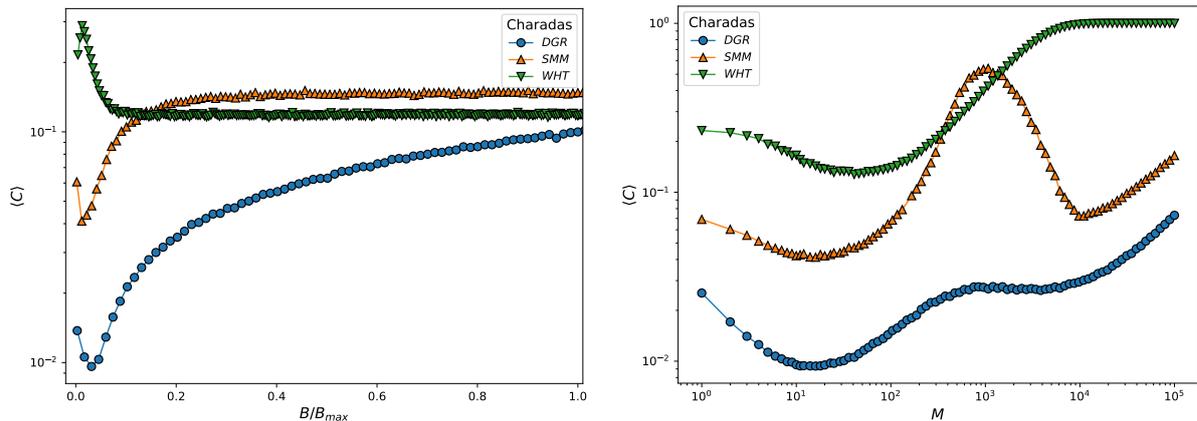


Figura 19 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  em função do tamanho relativo do quadro  $B/B_{max} \leq 1$  (painel à esquerda) para  $M = 10$  e em função do tamanho da equipe  $M$  (painel à direita) para  $B = 10$ . Lembramos que  $B_{max} = 351, 506$  e  $234$  para as charadas  $DGR, SMM$  e  $WHT$ , respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

repetidas e posição das letras, conforme discutido nos capítulos 2, 3 e 4, mas também devido aos tamanhos distintos do espaço de atribuições dígito-letra das charadas.

De fato, caso associemos a dificuldade de uma charada à probabilidade  $q = S/\mathcal{N}$  de encontrar a solução usando tentativa e erro, ou seja, usando a busca cega com  $M = 1$  (veja capítulo 3) temos que as charadas  $WHT, SMM$  e  $DGR$ , em ordem, apresentam dificuldade crescente. Nesse sentido, como o espaço de atribuições dígito-letra da charada  $SMM$  é duas vezes menor do que o da charada  $DGR$ , a charada  $SMM$  é mais fácil de ser solucionada usando a busca cega. Em outras palavras, a busca cega é mais eficiente na solução de  $SMM$  do que de  $DGR$ . Como o custo computacional é relativo ao desempenho da busca cega, que já é bom no caso de  $SMM$ , a inclusão da cooperação e memória proporcionada pela dinâmica de *brainstorming* não melhora muito mais esse desempenho. Por isso o custo computacional de  $SMM$  é maior do que para  $DGR$ . Em outras palavras, em relação ao desempenho da busca cega, o uso da dinâmica de *brainstorming* é mais vantajoso para a charada  $DGR$  do que para a charada  $SMM$ , embora em termos absolutos a busca seja mais demorada para  $DGR$  do que para  $SMM$ . Resumindo, a dinâmica de *brainstorming* proporciona melhores resultados relativos à busca cega quanto maior for a dificuldade dessa busca para solucionar a charada.

Para a charada  $WHT$  os resultados são mais díspares. Em equipes cujo quadro-negro disponível apresenta  $B/B_{max} > 0.15$  (e portanto  $B > 35$ , pois  $B_{max} = 234$ ) a resolução da charada  $SMM$  apresenta maior custo computacional do que para a charada  $WHT$ . Caso  $B \leq 35$ , a relação entre dificuldade e desempenho relativo apresentada

no parágrafo anterior continua válida, uma vez que a charada *WHT* apresenta baixa dificuldade, com bom desempenho já para a busca cega. Em particular, no caso  $M = 1$  são necessárias em média apenas 2291 tentativas para encontrar a solução usando a busca cega, de modo que o ganho obtido com a dinâmica de *brainstorming* não é muito expressivo. Por exemplo, para que tivéssemos um ganho análogo ao obtido para o menor custo computacional da charada *DGR* com  $M = 1$ , a dinâmica de *brainstorming* deveria encontrar a solução para *WHT* com apenas  $2291 \times 10^{-2} \approx 23$  movimentos.

Com a figura 19, comparemos agora os resultados obtidos para  $\langle C \rangle$  vs.  $M$ . Nela obtemos resultados que corroboram nossas conclusões a respeito da relação entre charadas mais difíceis e menores valores de custo computacional. De fato, com exceção à região de máximo global para a charada *SMM*, para  $B = 10$  a dificuldade da charada é diretamente proporcional à melhora do desempenho coletivo na resolução das charadas independentemente do tamanho da equipe, visto que o custo computacional médio é consistentemente menor para a charada *DGR* do que para as demais charadas. O mesmo ocorre para a curva associada à charada *WHT*, a qual exhibe os maiores valores de custo computacional. Desse modo a dinâmica de *brainstorming* mostra-se vantajosa quanto mais improvável for a resolução de uma charada por tentativa e erro, o que nos ajuda a aprofundar nossa compreensão a respeito da importância de ambientes colaborativos na resolução de problemas complexos.

## 5 CONCLUSÃO

A proposta dos sistemas quadro-negro como ferramenta de busca na Inteligência Artificial<sup>7</sup> deve-se, muito provavelmente, à visão popular da dinâmica de *brainstorming* em que especialistas trocam ideias sobre possíveis abordagens para resolver um problema e escrevem as linhas de investigação promissoras e dificuldades em um quadro negro. O modelo de *brainstorming* costuma ser parte fundamental da organização de empresas que se utilizam das chamadas metodologias ágeis, conceitualizadas nas décadas de 1980 e 1990, para a gestão de projetos.<sup>33, 34</sup> Essas metodologias têm sido amplamente utilizadas na gestão de projetos difíceis de serem planejados com muita antecedência<sup>35</sup> ou que envolvem soluções tecnológicas, cuja entrega rápida de serviços e produtos é essencial.<sup>36, 37</sup> Em particular, os métodos ágeis são muito utilizados nas áreas de desenvolvimento de *softwares*.<sup>33, 38</sup>

Nossos resultados reforçam o potencial da dinâmica de *brainstorming* como ferramenta em propostas inovadoras, pois incentiva a criatividade de cada membro enquanto viabiliza a troca de informação entre eles. De fato, a inovação apoia-se na reutilização de tecnologias já existentes associadas a novas propostas que as aprimoram,<sup>39</sup> referidos como mecanismos de cópia e criação, respectivamente. A cópia de informação selecionada por cada membro do grupo deve ser preferencial mas associada ao processo criativo individual, evitando que os membros prendam-se a imitações exaustivas enquanto simultaneamente evitam buscar soluções via tentativa e erro. Caso os agentes apresentem comportamento unicamente imitativo, suprimimos sua capacidade individual de julgamento e impomos um consenso coletivo<sup>29, 30</sup> capaz de levá-los apenas a soluções subótimas do problema.<sup>12</sup> Por outro lado, se permitirmos somente ações criativas não há colaboração, e a busca por soluções dá-se essencialmente por tentativa e erro (busca cega). Em termos de busca por soluções em um dado espaço de possibilidades, esses mecanismos são conhecidos como *exploitation-exploration*.<sup>40</sup> É interessante observar que essa dicotomia das estratégias de busca é observada no comportamento forrageador de animais que pode ser bem descrito por voos de Lévy<sup>41, 42</sup> onde a descoberta de novas fontes de alimento está associada a grandes saltos, enquanto que a exploração está associada ao movimento limitado a vizinhança próxima do animal.<sup>43, 44</sup> Mais recentemente, mostrou-se que padrões de mobilidade humana bem como o padrões de busca mentais em sites de jogos de azar online são também bem descritos por voos de Lévy.<sup>41</sup>

Em cenários do mundo real, é provável que nenhum dos membros da equipe seja capaz de resolver o problema sozinho, caso contrário, seu trabalho individual seria a forma mais barata de realizar a tarefa.<sup>9</sup> De fato, dada a importância de processos criativos na resolução de problemas<sup>26, 27</sup> associada à diversidade do grupo<sup>4, 22, 23, 31</sup> é

inevitável que o uso de um único especialista não seja a melhor opção para executar tarefas complexas. Enfatizando que as decisões coletivas não necessariamente são melhores que as de indivíduos solitários, fato já expresso no Teorema do Júri de Condorcet,<sup>45</sup> é evidente a existência de tamanhos ótimos para equipes diversificadas com trabalho colaborativo, embora ressaltemos que há situações em que a similaridade de pensamento coletivo seja preferível.<sup>46</sup> Processos de tomada de decisões em busca de soluções para problemas reais são complexos, e sua transcrição fidedigna em simulações computacionais é inviável, senão impossível. Um dos motivos que as tornam complexas é a presença de um grande número de soluções parciais potencialmente conflituosas, de modo que a triagem de informações torna-se importante. De fato, quando pessoas são expostas a uma grande variedade de opções, a sobrecarga informacional<sup>24, 25</sup> prejudica a capacidade de escolha, resultando no fenômeno conhecido como sobrecarga de opções.<sup>47, 48</sup> Este efeito é evidente em nossos resultados, onde a limitação do número de dicas escritas no quadro-negro frequentemente associa-se a um melhor desempenho da equipe, em particular para as charadas mais difíceis.

Nosso estudo utiliza o sistema quadro-negro como modelo de *brainstorming* numa formulação bastante simplificada da complexidade do mundo real.<sup>8</sup> Apesar das suas muitas limitações, o modelo computacional utilizado produz resultados surpreendentes que se assemelham aos observados nos estudos de grupos humanos descritos brevemente nos parágrafos anteriores. Ressaltamos o benefício acentuado da cooperação em charadas difíceis, o efeito complexo do tamanho do grupo no desempenho coletivo e a vantagem de se limitar a quantidade de informação disponível aos membros da equipe. Como possíveis desdobramentos de nosso estudo, mencionamos a restrição do potencial de exploração dos agentes, de modo que sejam incapazes de solucionar o problema sozinhos. Essa restrição pode ser feita ao limitar o acesso de cada agente a um subconjunto do espaço de possibilidades, tornando a cooperação obrigatória para a conclusão da tarefa. Outra alteração de interesse considera a presença de um agente controlador que opera restringindo porções do quadro-negro acessíveis a cada agente, tal como controles de acesso em bancos de dados corporativos. Podemos, também, adicionar membros mal intencionados nas equipes que fornecem informações falsas aos demais, descrevendo a situação paradoxal de que embora o problema seja resolvido em equipe, as promoções são individuais. Esses são apenas alguns vislumbres interessantes que garantem ótimas perspectivas no potencial uso do sistema de quadro-negro para análise de dinâmicas coletivas.

## REFERÊNCIAS

- 1 ENGELBART, D. C. *Augmenting human intellect: a conceptual framework*. Menlo Park: SRI, 1962. Report AFOSR-3223. Disponível em: <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0289565.pdf>. Acesso em: 07 maio 2021.
- 2 DEARY, I. J. *Intelligence: a very short introduction*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2001.
- 3 WOOLLEY, A. W.; CHABRIS, C. F.; PENTLAND, A.; MALONE, N. H. T. Evidence for a collective intelligence factor in the performance of human groups. *Science*, v. 333, n. 6004, p. 686–688, 2010.
- 4 PAGE, S. E. *The difference: how the power of diversity creates better groups, firms, schools, and societies*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2007.
- 5 HUBERMAN, B. A. The performance of cooperative processes. *Physica D*, v. 42, n. 1-3, p. 38–47, 1990.
- 6 HOGG, T.; HUBERMAN, B. A. Better than the best: *the power of cooperation*. In: NADEL, L.; STEIN, D. (ed.). *1992 Lectures in complex systems*. Reading: Addison-Wesley, 1993. p. 165-184. (SFI Studies in the sciences of complexity, V).
- 7 CORKILL, D. D. Blackboard systems. *Artificial Intelligence Review*, v. 100, n. 6, p. 40–47, 1988.
- 8 CLEARWATER, S.; HOGG, T.; HUBERMAN, B. A. Cooperative problem solving. *Science*, v. 254, n. 5035, p. 1181–1183, 1991.
- 9 FONTANARI, J. F. Reputation blackboard systems. *Cognitive Systems Research*, v. 50, p. 29–35, 2018. DOI: 10.1016/j.cogsys.2018.03.008.
- 10 HOLLAND, J. *Adaptation in natural and artificial systems*. Cambridge, MA: MIT Press, 1992.
- 11 GOLDBERG, D. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- 12 FONTANARI, J. F. Imitative learning as a connector of collective brains. *PLoS ONE*, v. 9, n. 10, p. e110517, 2014.
- 13 REIA, S. M.; AQUINO, L. F.; FONTANARI, J. F. The surprising little effectiveness of cooperative algorithms in parallel problem solving. *European Physical Journal B*, v. 93, n. 7, p. 140, 2020.
- 14 REIA, S. M.; AMADO, A. C.; FONTANARI, J. F. Agent-based models of collective intelligence. *Physics of Life Reviews*, v. 31, n. 3, p. 1–12, 2019.
- 15 HUNTER, J. A. *Mathematical brain teasers*. New York: Dover, 1976.
- 16 AVERBACH, B.; CHEIN, O. *Problem solving through recreational mathematics*. San Francisco: Freeman, 1980.

- 17 TSANG, E. *Foundations of constraint satisfaction*. New York: Academic Press, 1993.
- 18 FONTANARI, J. F. Exploring NK fitness landscapes using imitative learning. *European Physical Journal B*, v. 4, p. 251, 2015. DOI: 10.1140/epjb/e2015-60608-1.
- 19 PERC, M.; JORDAN, J.; RAND, D. G.; WANG, Z.; BOCCALETTI, S.; SZOLNOKI, A. Statistical physics of human cooperation. *Physics Reports*, v. 687, p. 1–51, 2017. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.05.004.
- 20 NOWAK, M.; HIGHFIELD, R. *Supercooperators: altruism, evolution, and why we need each other to succeed*. New York, NY: Simon & Schuster, 2011.
- 21 KURVERS, R. H. J. M.; HERZOG, S. M.; HERTWIG, R. Boosting medical diagnostics by pooling independent judgments. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 113, n. 31, p. 8777–8782, 2016.
- 22 BARCELO, H.; CAPRARO, V. Group size effect on cooperation in one-shot social dilemmas. *Scientific Reports*, v. 5, n. 7937, 2015. DOI: <https://doi-org.ez67.periodicos.capes.gov.br/10.1038/srep07937>.
- 23 ISAAC, R. M.; WALKER, J. M.; WILLIAMS, A. W. Group size and the voluntary provision of public goods: experimental evidence utilizing large groups. *Journal of Public Economics*, v. 54, n. 1, p. 1–36, 1994.
- 24 SIMPSON, C.; PRUSAK, L. Troubles with information overload—moving from quantity to quality in information provision. *International Journal of Information Management*, v. 15, n. 6, p. 413–425, 1995.
- 25 EDMUNDS, A.; MORRIS, A. The problem of information overload in business organisations: a review of the literature. *International Journal of Information Management*, v. 20, n. 1, p. 17–28, 2000.
- 26 LAZAR, L. The cognitive neuroscience of design creativity. *Journal of Experimental Neuroscience*, SAGE Publications, v. 12, p. 1179069518809664, 2018. DOI: 10.1177/1179069518809664.
- 27 AKIN, Ö.; AKIN, C. On the process of creativity in puzzles, inventions, and designs. *Automation in Construction*, v. 7, n. 2, p. 123–138, 1998.
- 28 SIMON, H. A.; NEWELL, A. Human problem solving: the state of the theory in 1970. *American Psychologist*, v. 26, n. 2, p. 145–159, 1971.
- 29 MACKAY, C. *Extraordinary popular delusions and the madness of crowds*. London: Richard Bentley, 1841.
- 30 JANIS, I. *Groupthink: psychological studies of policy decisions and fiascoes*. Boston: Houghton Mifflin, 1982.
- 31 SUNSTEIN, C. *Infotopia: how many minds produce knowledge*. New York: Oxford University Press, 2006.
- 32 KAUFFMAN, S.; WEINBERGER, E. The NK model of rugged fitness landscapes and its application to maturation of the immune response. *Journal of Theoretical Biology*, v. 141, n. 2, p. 211–245, 1989.

- 
- 33 FOWLER, M. The agile manifesto. *Software Development*, v. 9, n. 8, p. 28–35, 2001.
- 34 SUTHERLAND, J. V. *Business object design and implementation: Oops!95* workshop proceedings 16 October 1995. Austin, Texas: Springer Science & Business Media, 2012.
- 35 SCHWABER, K. *Agile project management with Scrum*. Washington, USA: Microsoft Press, 2004.
- 36 PMI. *A guide to the project management body of knowledge (PMBOK guide)*. 6th ed. Newtown Square, Pennsylvania: PMI, 2017.
- 37 KNAPP, J. *Sprint: how to solve big problems and test new ideas in just five days*. New York, NY: Simon Schuster, 2016.
- 38 DINGSØYR, T.; NERUR, S.; BALIJEPALLY, V.; MOE, N. B. A decade of agile methodologies: towards explaining agile software development. *Journal of Systems and Software*, v. 85, n. 6, p. 1213–1221, 2012.
- 39 AMABILE, T. M. A model of creativity and innovation in organizations. *Research in Organizational Behavior*, v. 10, n. 1, p. 123–167, 1988.
- 40 COHEN, J. D.; MCCLURE, S. M.; YU, A. J. Should i stay or should i go? how the human brain manages the trade-off between exploitation and exploration. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, v. 362, n. 1481, p. 933–942, 2007.
- 41 GUO, Q.; COZZO, E.; ZHENG, Z.; MORENO, Y. Lévy random walks on multiplex networks. *Scientific Reports*, v. 6, n. 37641, 2016. DOI: <https://doi-org.ez67.periodicos.capes.gov.br/10.1038/srep37641>.
- 42 VISWANATHAN, G.; AFANASYEV, V.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S. Lévy flights in random searches. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, v. 282, n. 1, p. 1–12, 2000.
- 43 VISWANATHAN, G. M.; AGANASYEV, V.; MURPHY, E. J.; PRINCE, P. A.; STANLEY, H. E. Lévy flight search patterns of wandering albatrosses. *Nature*, v. 381, n. 6581, p. 413–415, 1996.
- 44 VISWANATHAN, G. M. Fish in lévy-flight foraging. *Nature*, v. 465, p. 1018–1019, 2010. DOI: [10.1038/4651018a](https://doi.org/10.1038/4651018a).
- 45 AUSTEN-SMITH, D.; BANKS, J. S. Information aggregation, rationality, and the condorcet jury theorem. *American Political Science Review*, Cambridge University Press, v. 90, n. 1, p. 34–45, 1996.
- 46 FONTANARI, J. F. When more of the same is better. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 113, n. 2, p. 28009, 2016.
- 47 KAPLAN, B. A.; REED, D. D. Decision processes in choice overload: a product of delay and probability discounting? *Behavioural Processes*, v. 97, p. 21–24, 2013.
- 48 CHERNEV, A.; BÖCKENHOLT, U.; GOODMAN, J. Choice overload: a conceptual review and meta-analysis. *Journal of Consumer Psychology*, v. 25, n. 2, p. 333–358, 2015.

49 FRUCHTERMAN, T. M. J.; REINGOLD, E. M. Graph drawing by force-directed placement. *Software: practice and experience*, v. 21, n. 11, p. 1129–1164, 1991.

## **Apêndices**



## APÊNDICE A – O ESPAÇO DE DICAS

O espaço de dicas de uma dada charada cripto-aritmética é o conjunto de todas as  $H$  dicas da charada. Como já mencionado, as dicas associam-se aos pares em uma relação complexa de cooperação, competição ou independência. Duas dicas são ditas independentes se não exibem dígitos em comum. As dicas cooperativas, por outro lado, devem exibir pelo menos um dígito que esteja associado à mesma letra, sem que haja conflitos entre as outras associações dígito-letra. Caso contrário temos a situação de competitividade discutida no capítulo 2. Nesse apêndice vamos explorar a representação do espaço de dicas através de grafos. Entretanto, iremos restringir nosso estudo somente às dicas cooperativas e independentes.

Os vértices (ou nós) de cada grafo representam as dicas e as arestas representam as interações cooperativa ou de independência. Adicionalmente, escolhemos destacar os nós de acordo com a coluna da qual determinada dica faz parte. Assim, temos 3 cores distintas para os nós da charada *WHT*, 5 para a charada *SMM* e 6 para a charada *DGR*. Para facilitar o entendimento da relação entre cor e coluna, cada dica será escrita como uma tupla contendo dois elementos. O primeiro indica as três letras da coluna a qual a dica se refere. O segundo, os três dígitos associados a cada letra. Dessa forma, utilizando como exemplo a charada *DGR*, podemos reescrever a dica  $(0, 1, 2, 3)$ , em notação apresentada no capítulo 2, como  $(DGR, 123)$ , pois o dígito 0 na primeira notação refere-se à coluna  $D + G = R$ .

É importante mencionar que para gerar os grafos exibidos neste apêndice utilizamos o algoritmo de desenho de grafos direcionados à força de Fruchterman-Reingold a fim de determinar a posição relativa de cada nó.<sup>49</sup> Esse algoritmo associa aos nós um campo de força de atração e repulsão. Os mínimos locais desses potenciais ocorrem quando nós densamente conectados são localizados no centro do grafo minimizando assim o cruzamento de arestas.

Para a charada *DGR* apresentamos os grafos na figura 20. As arestas representam as relações de independência (painel à esquerda) e de cooperação (painel à direita) entre as  $H = 351$  dicas. Nas relações de independência, todas as 351 dicas estão presentes no grafo e notamos que dicas das colunas  $D + G = R$  e  $N + R = B$  apresentam menor centralidade que as demais. Quando consideramos as relações cooperativas, apenas 314 dicas fazem parte da maior componente do grafo. Chamamos maior componente o maior subconjunto de vértices conectados presentes no grafo. As 37 dicas restantes referem-se às colunas  $A + A = E$  e  $O + E = O$ , que não interagem com as demais colunas (já que as letras  $A, E, O$  não fazem parte das outras colunas) e formam pequenas componentes de colaboração entre si (totalizando 18 dicas) ou se apresentam como nós isolados (19 dicas restantes). Os pequenos subgrafos estão

centrados nas dicas ( $AAE, 449$ ) (ligada às dicas  $\{(OEO, 898), (OEO, 797), (OEO, 696), (OEO, 595), (OEO, 393), (OEO, 292), (OEO, 191), (OEO, 090)\}$ ) e ( $AAE, 550$ ) (que ligue-se às dicas  $\{(OEO, 909), (OEO, 808), (OEO, 707), (OEO, 606), (OEO, 404), (OEO, 303), (OEO, 202), (OEO, 101)\}$ ). Escolhemos explicitar essas conexões já que a figura 20 mostra apenas a maior componente do grafo colaborativo.

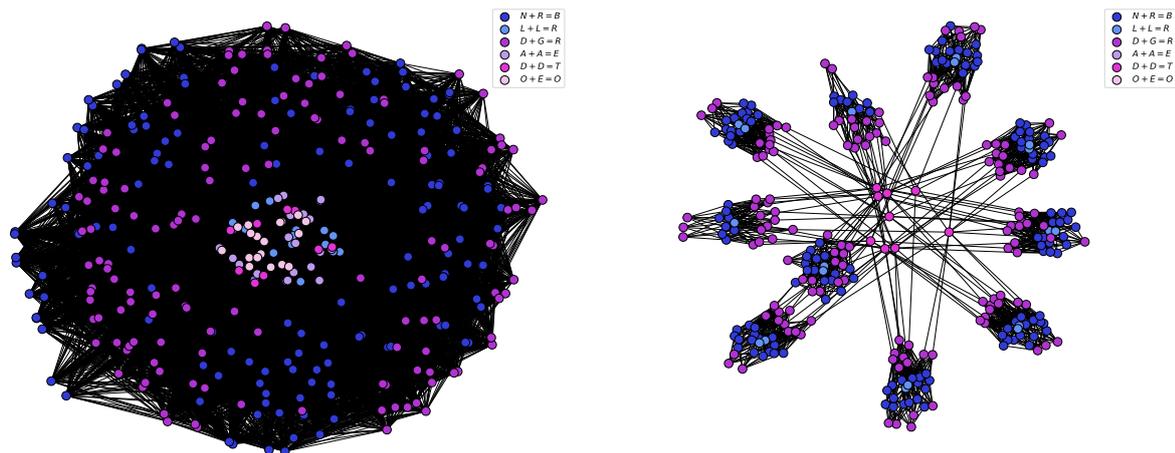


Figura 20 – Grafos mostrando as relações de independência (à esquerda) e de cooperação (à direita) entre as  $H = 351$  dicas da charada  $DGR$ . Cada nó representa uma das dicas e sua cor indica a coluna a que pertence. Apenas a maior componente do grafo das relações de cooperação é mostrado. Todas as dicas associadas às colunas  $A + A = E$  e  $O + E = O$  não contribuem para essa componente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com as relações de independência para  $DGR$  percebemos que as dicas menos centrais são aquelas associadas à soma  $D + G = R$  e  $N + R = B$  como por exemplo as dicas ( $DGR, 123$ ) e ( $NRB, 572$ ). Por serem dicas que exibem três letras distintas e, portanto, três dígitos distintos, o número das demais dicas que não apresentam dígitos em comum com elas é muito reduzido, o que resulta em nós menos conectados. As dicas associadas a essas colunas são, portanto, mais influentes na destruição de outras associações corretas. Em outras palavras, quanto menos central for uma dica no grafo das relações de independência, mais central ela será nos grafos das relações de cooperação e competição. Por outro lado, as dicas referentes às colunas  $O + E = O$ ,  $A + A = E$ ,  $L + L = R$ ,  $D + D = T$  são centrais e apresentam caráter menos destrutivo sobre outras dicas. Dado que cada uma das letras é repetida um número fixo de vezes, sua repetição em uma mesma coluna reduz sua aparição nas demais. Com isso, reduz-se também o número de dicas distintas que apresentem associações de dígito conflitantes. Logo, são colunas menos influentes na destruição de outras associações potencialmente corretas.

Quando analisamos as relações cooperativas para a charada *DGR* (painel direito da figura 20) observamos uma redução do número de dicas que efetivamente ligam-se às demais. De fato, das  $H = 351$  dicas, 37 não fazem parte da maior componente, formando pequenas componentes ou nós isolados. No que diz respeito à maior componente, notamos a formação de agrupamentos em torno de dicas da coluna  $L + L = R$  devido à ocorrência da letra  $R$  em duas outras colunas como em  $N + R = B$  e  $D + G = R$ . Enquanto o grafo das relações de independência nos permite distinguir (via posição ou centralidade dos nós) entre dicas com maior ou menor caráter interativo, o grafo das relações cooperativas nos mostra a dificuldade da busca de soluções da charada em nível humano. Por nível humano compreendemos um processo de busca elaborado que considera não somente a procura de soluções parciais para o problema, mas também um caráter seriado, onde uma solução parcial precede ou sucede outra. Esta dificuldade pode ser compreendida da seguinte forma: como a presença de letras comuns ocorre apenas entre duas ou três dicas (já que o maior número de repetições é 3 para as letras  $D$  e  $R$ ), um caminho lógico de descoberta da solução pode ser traçado escolhendo uma dica da coluna  $D + D = T$  (nós mais centrais no grafo de colaboração da figura 20), seguidos da escolha de nós associados às dicas da coluna  $D + G = R$ ,  $N + R = B$  e, por fim, de nós representantes da coluna  $L + L = R$ . Caso todos resultem em somas válidas, resta apenas a escolha de valores das colunas faltantes ( $A + A = E$  e  $O + E = O$ ). Charadas mais fáceis, como *SMM* e *WHT*, não apresentam uma sequência de busca tão bem definida.

Os grafos associados ao espaço de dicas da charada *SMM* são mostrados na figura 21. Como antes, temos as relações de independência (painel à esquerda) e de cooperação (painel à direita) entre as  $H = 506$  dicas. Como no caso da charada *DGR*, o grafo das relações de independência envolve todas as dicas. Já o grafo das relações de cooperação mostra apenas a maior componente que tem  $H = 505$  dicas. Apenas a dica  $(M, 0)$  fica de fora da maior componente pois, além da coluna 0,  $M$  aparece na coluna  $S + M = O$  apenas e a atribuição  $M = 0$  não gera uma dica válida, já que teríamos  $S = O$ .

Esses grafos são bastante distintos dos da charada *DGR*. Por exemplo, notamos a ausência de dicas centrais nas relações de independência para a charada *SMM*. Isso acontece porque nessa charada nenhuma coluna apresenta repetição de letras e, portanto, todas as dicas apresentam a mesma influência sobre as demais, uma vez que alterações em qualquer letra (com exceção para  $S, D, R, Y$ , com apenas uma ocorrência) imediatamente altera ao menos uma outra coluna. Para as relações de cooperação notamos que as dicas relativas a coluna  $S + M = O$  exibem menor centralidade, em oposição às dicas associadas a coluna  $N + R = E$ , que exibem maior centralidade. Já as dicas associadas às colunas  $D + E = Y$  e  $E + O = N$  mesclam-se em regiões visualmente próximas. Essa configuração ocorre devido à conexão das colunas  $S + M = O$  e  $N + R = E$ , que não têm letras comuns, mediada pelas colunas  $D + E = Y$  e  $D + E = Y$  através das letras  $E$  e  $O$ . É curioso notarmos que, dessa forma, a resolução serial em nível humano é menos viável para a

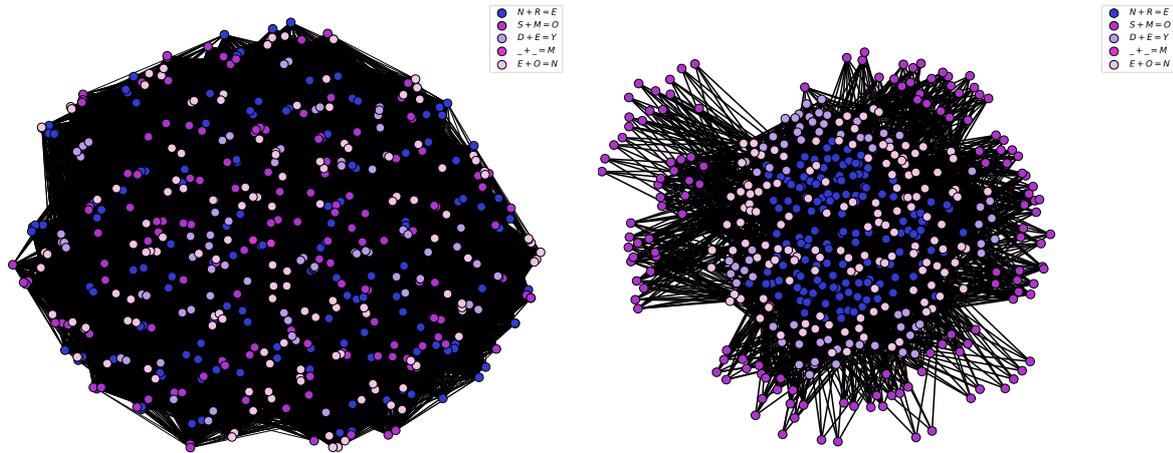


Figura 21 – Grafos mostrando as relações de independência (à esquerda) e de cooperação (à direita) entre as  $H = 506$  dicas da charada *SMM*. Cada nó representa uma das dicas e sua cor indica a coluna a que pertence. Apenas a maior componente do grafo das relações de cooperação é mostrado. A dica  $(M, 0)$  não contribui para essa componente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

charada *SMM* do que para a charada *DGR*.

Finalmente, na figura 22 mostramos os grafos associados ao espaço de dicas da charada *WHT*. Analogamente às charadas *DGR* e *SMM*, mostramos as relações de independência (painel à esquerda) e de cooperatividade (painel à direita) entre as  $H = 234$  dicas posicionadas no plano segundo o algoritmo de Fruchterman-Reingold.<sup>49</sup> As relações de independência reúnem todas as dicas, com ordem crescente de centralidade para as dicas associadas às colunas  $W + H = T$ ,  $W + T = A$  e  $O + O = E$ . As dicas associadas a coluna  $O + O = E$  têm maior centralidade por causa das letras repetidas, de modo que sua influência sobre as demais dicas é menor. Quando consideramos as relações cooperativas, apenas 216 dicas fazem parte da maior componente mostrada na figura. As 18 dicas restantes são referentes à coluna  $O + O = E$  e formam nós isolados.

Notemos que para a charada *WHT* a coluna  $O + O = E$  não está verdadeiramente vinculada às demais, uma vez que não apresenta letras em comum com elas, de modo que a relação de independência é completa. No que concerne à cooperação, o espalhamento equilibrado das dicas associadas às colunas  $W + H = T$  e  $W + T = A$  é facilmente compreensível, já que essas colunas têm duas letras em comum, diferindo apenas no número de dicas (lembramos que para  $W + H = T$  temos 144 dicas e para  $W + T = A$  temos 72 dicas).

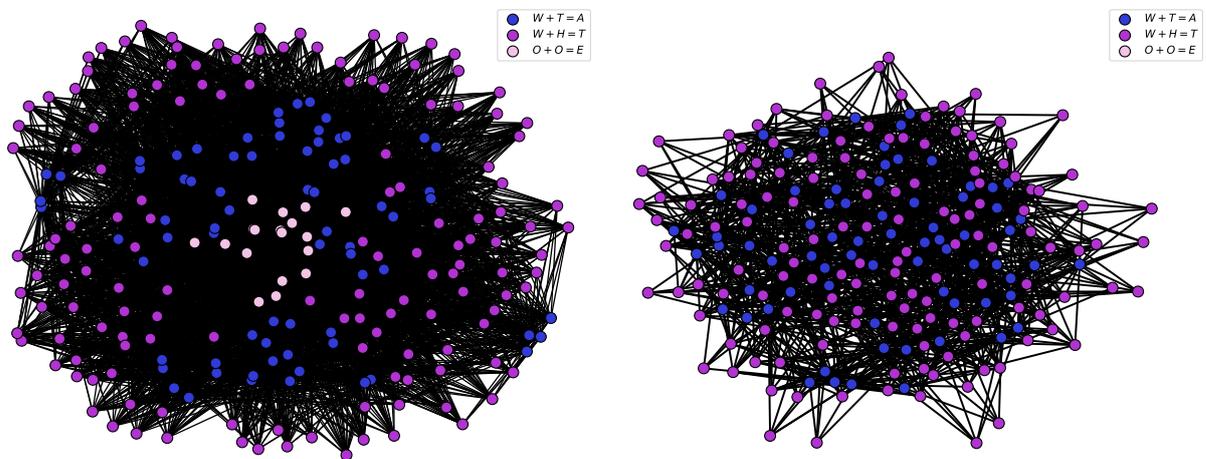


Figura 22 – Grafos mostrando as relações de independência (à esquerda) e de cooperação (à direita) entre as  $H = 234$  dicas da charada  $WHT$ . Cada nó representa uma das dicas e sua cor indica a coluna a que pertence. Apenas a maior componente do grafo das relações de cooperação é mostrado. As 18 dicas associadas à coluna  $O + O = E$  não contribuem para essa componente.

Fonte: Elaborada pelo autor.



## APÊNDICE B – BUSCA CEGA

Neste apêndice, derivamos a distribuição de probabilidade dos tempos de busca de um grupo de  $M$  agentes independentes no caso de cada agente explorar o espaço de estados de uma dada charada cripto-aritmética gerando atribuições dígito-letra aleatoriamente.

Começemos com o caso de um único agente ( $M = 1$ ). A cada passo de tempo esse agente produz uma nova atribuição dígito-letra aleatória e a probabilidade de que essa atribuição seja uma das soluções da charada é  $q = S/\mathcal{N}$ , onde  $S$  é o número de soluções e  $\mathcal{N}$  é o número de atribuições possíveis. Lembremos que  $S = 1$  e  $\mathcal{N} = 10!$  para a charada *DGR*,  $S = 66$  e  $\mathcal{N} = 10!/4!$  para a charada *WHT*, e  $S = 1$  e  $\mathcal{N} = 10!/2!$  para a charada *SMM*. Assim, a probabilidade de que o agente encontre a solução no tempo  $t^*$  é

$$P_1(t^*) = (1 - q)^{t^*-1} q, \quad (\text{B.1})$$

que é uma distribuição geométrica com probabilidade de sucesso igual a  $q$ . Podemos interpretar essa equação como a probabilidade do agente não encontrar uma solução em  $t^* - 1$  tentativas vezes a probabilidade de encontrar uma solução na tentativa subsequente. Aqui, usamos o subscrito 1 em  $P_1(t^*)$  para indicar que  $M = 1$ .

No caso de  $M$  agentes realizando a busca cega em paralelo, basta considerarmos que os  $M$  agentes não devem encontrar a solução nas  $t^* - 1$  tentativas, cuja probabilidade é simplesmente  $[(1 - q)^M]^{t^*-1}$ , e que pelo menos um agente deve encontrar a solução na tentativa subsequente, cuja probabilidade é  $1 - (1 - q)^M$ . Daí

$$P_M(t^*) = (1 - q)^{M(t^*-1)} [1 - (1 - q)^M] \quad (\text{B.2})$$

que é uma distribuição geométrica com probabilidade de sucesso  $1 - (1 - q)^M$ . O valor médio dessa distribuição é

$$\langle t^* \rangle = \sum_{t^*=1}^{\infty} t^* P_M(t^*) = \frac{1}{1 - (1 - q)^M} \approx \frac{1}{1 - \exp(-qM)} \quad (\text{B.3})$$

onde fizemos a hipótese que  $q = S/\mathcal{N} \ll 1$ . Nessa dissertação usaremos  $\langle t^* \rangle$  como escala para o valor médio do tempo de busca do sistema quadro-negro. No limite mais realístico e interessante onde o número de agentes é muito menor que o número de estados, ou seja,  $M \ll \mathcal{N}$ , temos

$$\langle t^* \rangle \approx \frac{1}{Mq} = \frac{\mathcal{N}}{MS}, \quad (\text{B.4})$$

de modo que o tempo médio de busca é inversamente proporcional ao número de agentes e ao número de soluções da charada. Outro limite de interesse é quando há um excesso de agentes, ou seja,  $M \gg \mathcal{N}$ . Nesse caso temos  $\langle t^* \rangle \approx 1 + \exp(-Mq)$  o que significa que, em média, a solução é encontrada já na primeira tentativa.



## APÊNDICE C – ANÁLISE DE ROBUSTEZ

Como descrevemos no capítulo 2, a cada uma das charadas originais *DGR*, *SMM* e *WHT* associamos um conjunto de charadas variantes obtidas das permutações das posições das letras das charadas originais. Neste apêndice vamos investigar como o custo computacional médio  $\langle C \rangle$  e o uso médio do quadro  $\langle H^* \rangle$  são alterados quando os agentes tentam resolver as variantes das charadas originais. Lembramos que  $\langle C \rangle$  é a razão entre o tempo médio de busca do sistema quadro-negro e o tempo médio de busca da busca cega, enquanto que  $\langle H^* \rangle$  é o número médio de dicas exibidas no quadro quando uma solução é encontrada. Os parâmetros de controle do modelo são o número de agentes  $M$  e o tamanho do quadro  $B$ , i.e., o número máximo de dicas que podem ser exibidas nele. A dependência de  $\langle C \rangle$  e  $\langle H^* \rangle$  com os parâmetros  $M$  e  $B$  está resumida nas figuras 15, 12 e 9 para as charadas originais. Neste apêndice vamos fixar o número de agentes  $M = 10$  e variar apenas o tamanho do quadro  $B$ .

Como as diferentes variantes têm números distintos de dicas  $H$  e soluções  $S$ , vamos usar a razão  $B/H$  para poder comparar os resultados. Assim,  $B/H = 1$  corresponde ao quadro infinito, qualquer que seja a charada considerada. Para cada uma das três famílias de charadas, separamos aleatoriamente um máximo de 100 variantes que apresentem um mesmo número de dicas  $H$ . Justificamos essa escolha, em detrimento da alternativa de fixarmos o número de soluções  $S$ , por conta das variantes de todas as famílias apresentarem uma variação do número de dicas  $H$  muito menor que a do número de soluções  $S$ , como é evidente nos histogramas das figuras 1, 3 e 5. Cada ponto nas figuras exibidas neste apêndice é resultado da média sobre  $\mathcal{A} = 10^3$  buscas independentes. Apesar da redução de um fator 10 em relação ao número de buscas usado na seção 4, onde utilizamos  $\mathcal{A} = 10^4$ , argumentamos no apêndice D que o custo computacional médio é muito pouco afetado pela escolha  $\mathcal{A} \geq 10^3$ .

### C.1 Variantes da charada DGR

Na família da charada *DGR*, selecionamos variantes com  $H = 288, 351, 540, 666, 792$  que são ou as mais frequentes no subconjunto das 19106 variantes mostradas na figura 5 ou então as que definem o menor e o maior valor de  $H$ , como  $H = 288$  e  $H = 792$ . Na figura 23 mantivemos fixo  $H = 288$  e obtivemos quatro variantes tais que  $S > 0$ . Notamos que duas delas apresentam o mesmo número de soluções ( $S = 2$ ) e que apenas a charada  $ALLODN + ARDOGT = ERDRBE$  possui curva de custo qualitativamente distinta da charada original *DGR*.

Na figura 24 fixamos  $H = 351$  e obtivemos 11 variantes que apresentam números de solução  $S = 1, 2, 3, 4, 8, 10, 16, 28$  e optamos por representá-las em um espectro contínuo de

intensidade da cor vermelha, apresentada na barra lateral. Cores mais intensas representam problemas com mais soluções. Além disso, como um dado número  $S$  pode estar associado a mais de uma variante (por exemplo, temos 2 variantes com  $S = 28$ ), representamos a curva média de todas as variantes com um mesmo número de soluções por uma linha contínua e o intervalo de confiança da média por meio da zona sombreada ao seu entorno. Notamos que os resultados são bastante coerentes (i.e., possuem qualitativamente o mesmo formato de curva) quando comparados às curvas de custo para a charada original *DGR* (veja a figura 9), independente do número de soluções. Também notamos que o aumento do número de soluções  $S$  aproxima a curva  $\langle H^* \rangle$  qualitativamente daquelas dadas para *WHT* (veja figura 15) e variantes (veja figuras 32 a 36).

Optamos pela mesma representação em espectro contínuo de intensidade de cor vermelha em  $S$  para variantes com  $H = 540$ ,  $H = 666$  e  $H = 792$ , exibidas nas figuras 25, 26 e 27, respectivamente. Para  $H = 540$ , encontramos 33 variantes com números de soluções  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 28$ . Os resultados corroboram a universalidade da curva de custo computacional para a charada *DGR* original, com resultado mais díspar para a variante *ETADOL + DLRABE = ONRDRG*, com  $S = 28$ , que embora apresente um mínimo global, o mesmo não é tão expressivo quanto o original e outras variantes consideradas. Já para  $H = 666$  selecionamos 18 variantes com soluções  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 9$ , e encontramos que todas apresentam curvas de custo características similares à charada original. E por fim, para  $H = 792$  selecionamos 50 variantes com soluções  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16$ , e encontramos que em grande parte apresentam curvas de custo características similares à charada original, com exceção para *RLOOEA + AEDTLD = NRBDRG*, com  $S = 16$ .

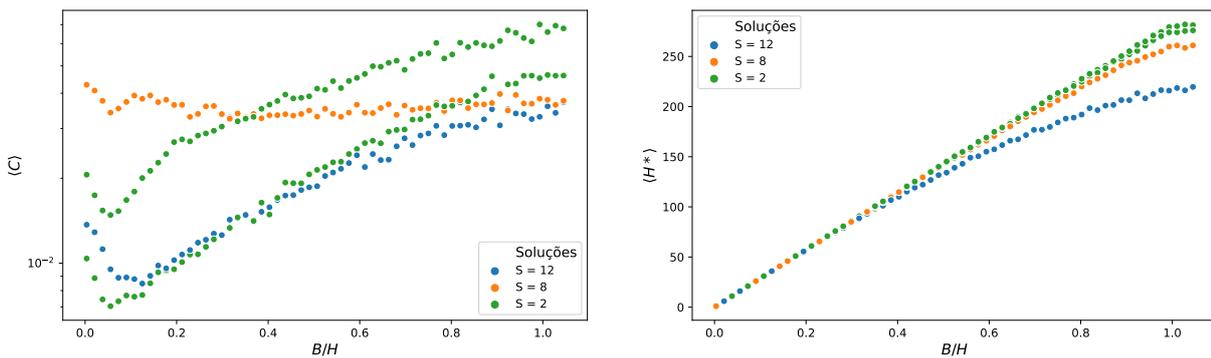


Figura 23 – Custo computacional médio  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) como funções da razão  $B/H$  para quatro variantes da charada *DGR* com  $H = 288$  e  $S$  como indicado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

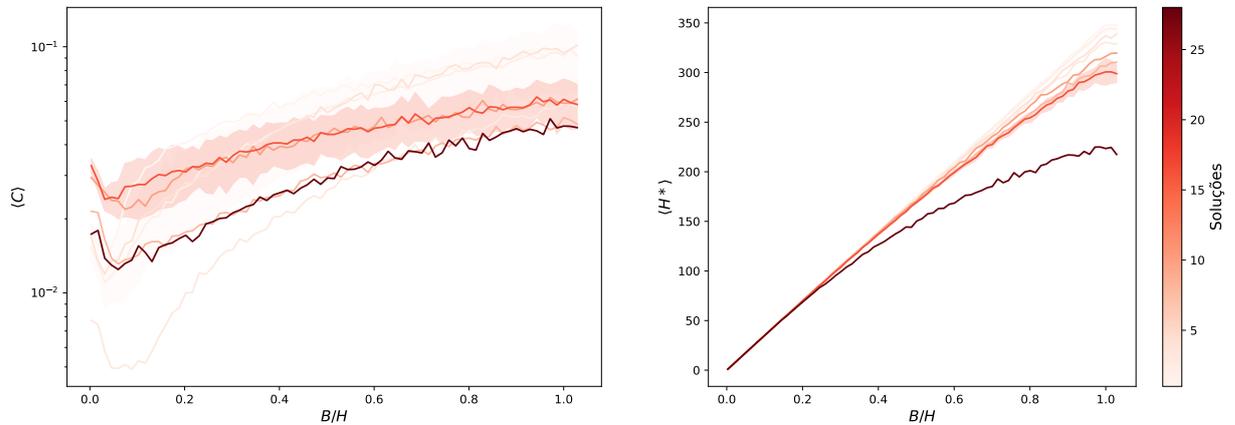


Figura 24 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 351$  (mesmo número de dicas da charada original) e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número  $S$  de soluções de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 28$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

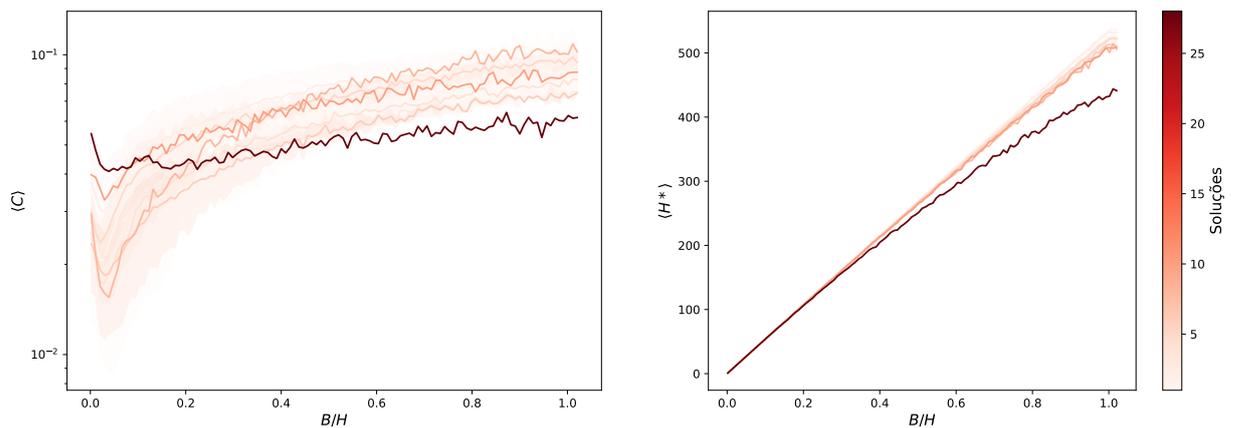


Figura 25 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 540$  e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número  $S$  de soluções de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 28$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

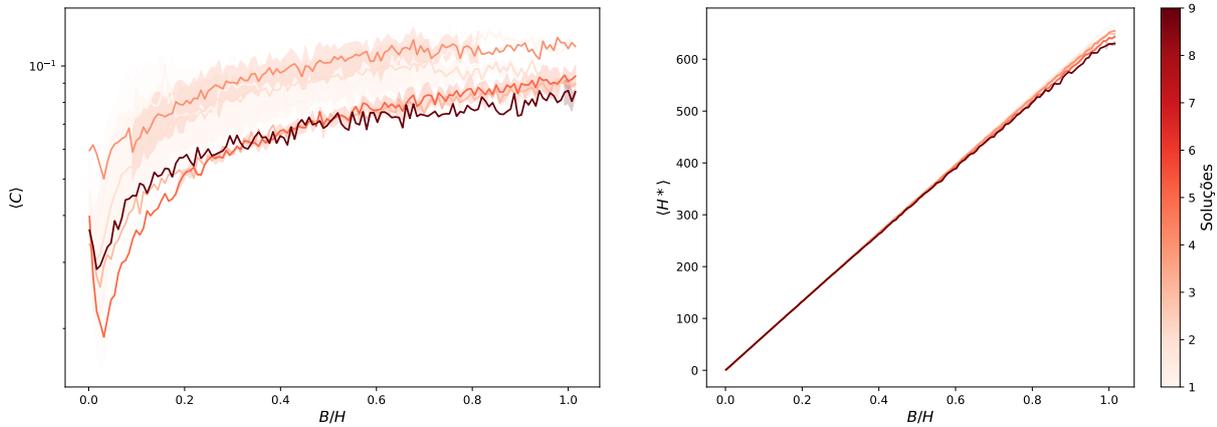


Figura 26 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 666$  e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 9$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

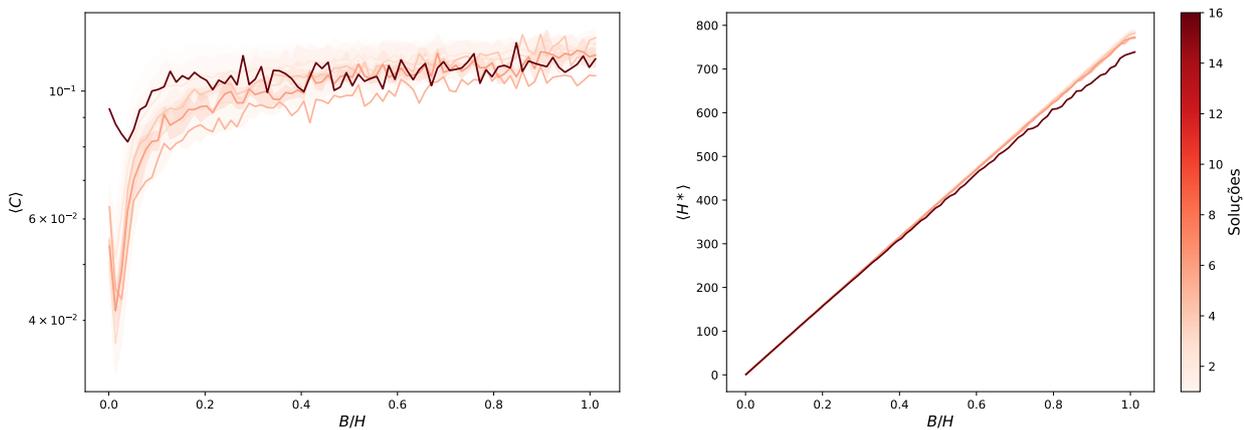


Figura 27 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *DGR* com  $H = 792$  e  $S > 0$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com intensidade de cor conforme a barra na lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 16$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

## C.2 Variantes da charada SMM

Para a charada *SMM* selecionamos variantes com número de dicas  $H = 191, 317, 380, 506$ , escolhidas para abranger aquelas charadas mais frequentes no histograma da figura 3. Na figura 28 mantivemos fixo  $H = 191$  e obtivemos 76 variantes caracterizadas por  $S = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 30, 39, 42, 48, 60, 96, 102, 144, 174, 198$ . Por conta do grande número de  $S$  distintos, variantes com o mesmo número de soluções são representadas pela mesma intensidade de cor vermelha no espectro contínuo indicado pela barra lateral na figura.

Para a figura 29 fixamos  $H = 317$  e consideramos 99 variantes com  $S = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 17, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 36, 40, 48, 51, 60, 144, 180$ . Na figura 30, temos 100 variantes com  $H = 380$  e  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 26, 28, 33, 132$ . Já para a figura 31, temos 68 variantes com  $H = 506$  e  $S = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28$ . Em paralelo à análise de variantes para *DGR*, concluímos desses resultados que o número de soluções apresenta forte influência na forma tanto das curvas de custo  $\langle C \rangle$  quanto de uso médio do quadro ao fim da dinâmica  $\langle H^* \rangle$ . Charadas com elevado número de soluções  $S$  não apresentam mínimo global expressivo na curva do custo  $\langle C \rangle$  contra  $B/H$  e exibem um platô na curva de  $\langle H^* \rangle$  contra  $B/H$ , indicando que não é necessário o preenchimento completo do quadro para que uma das soluções seja encontrada.

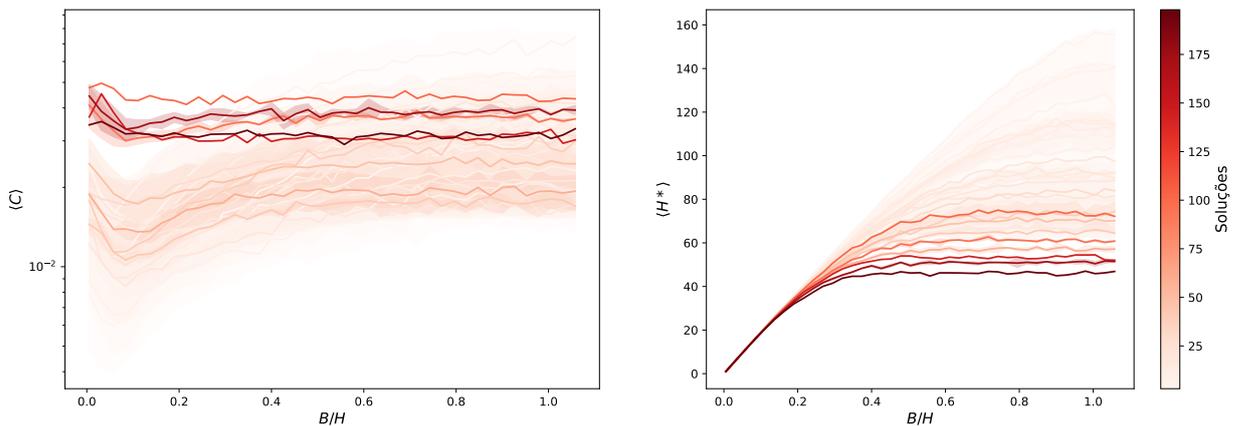


Figura 28 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *SMM* com  $H = 191$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 3$  e  $S = 198$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

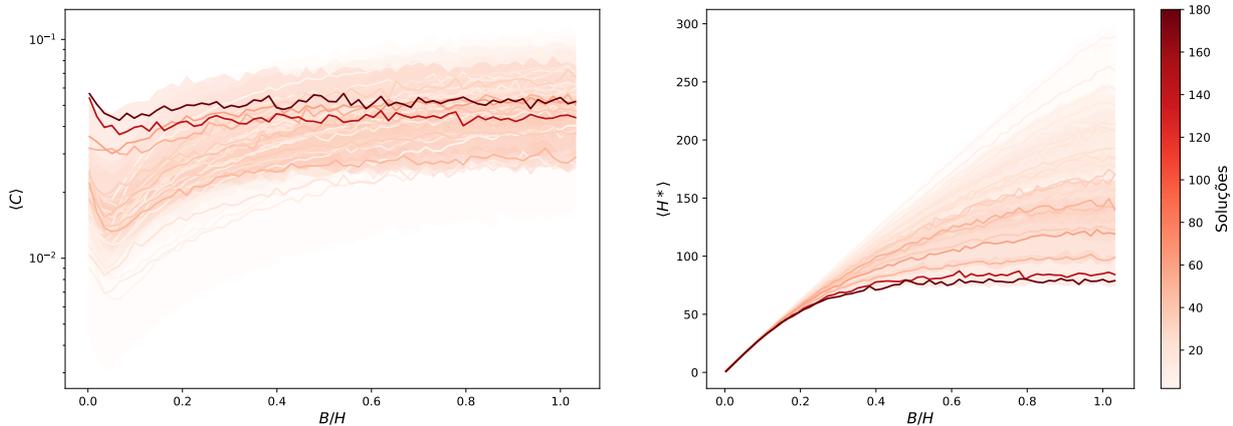


Figura 29 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *SMM* com  $H = 317$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 2$  e  $S = 180$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

### C.3 Variantes da charada WHT

Para a charada *WHT* selecionamos variantes que apresentam número de dicas  $H = 45, 108, 171, 234, 360$  escolhidas para abranger aquelas charadas mais frequentes no histograma da figura 1.

Para a figura 32 mantivemos fixo  $H = 45$  e obtivemos 100 variantes com  $S = 64, 85, 100$ . Na figura 33 fixamos  $H = 108$  e obtivemos também 100 variantes, desta vez com  $S = 34, 54, 60, 67, 80, 85, 90$ . Quando fixamos  $H = 171$  obtemos os resultados mostrados na figura 34, onde temos 100 variantes com  $S = 24, 48, 50, 52, 59, 66, 68, 80, 85, 90, 100, 120, 960$ . Aqui vale evidenciar a similaridade da curva para  $S = 960$  com as curvas para variantes da charada *SMM* que apresentam grande número de soluções (por exemplo, as curvas com  $S = 180$  na figura 29). Na figura 35 fixamos  $H = 234$  (número de dicas igual à da charada original *WHT*) e consideramos 100 variantes com  $S = 38, 42, 48, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 80, 90, 95, 105$ . Por fim, na figura 36 fixamos  $H = 360$  e consideramos também 100 variantes com  $S = 20, 21, 28, 32, 33, 36, 44, 45, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 57, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 82, 83, 84, 86, 93, 99, 200$ .

Da análise de todas as variantes das charadas originais, concluímos que, embora algumas variantes apresentem curvas qualitativamente distintas das demais (as saber, variantes de *WHT* com  $H = 171$  e  $S = 960$ ; variantes de *SMM* com  $H = 380$  e

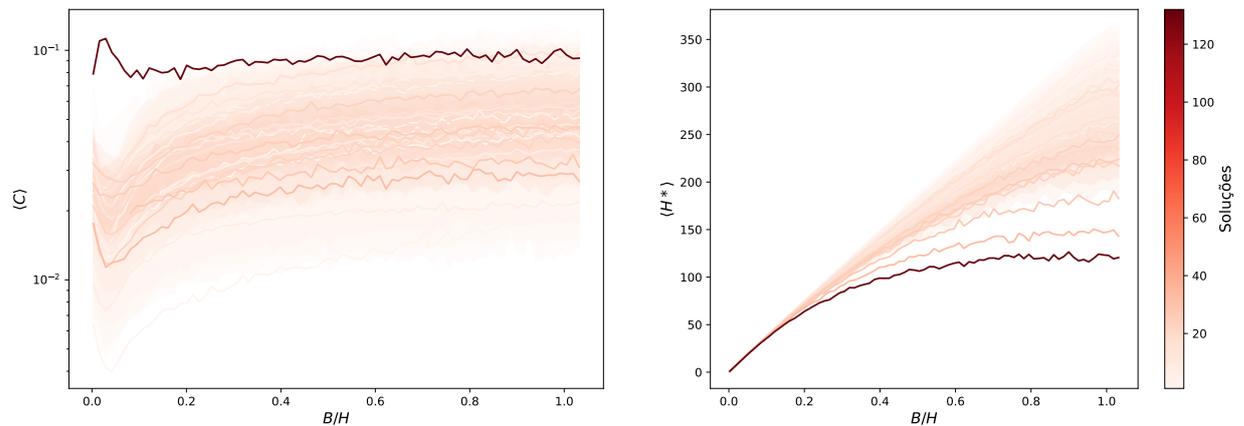


Figura 30 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *SMM* com  $H = 380$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 132$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

$S = 132$ ; variantes *DGR* com  $H = 288$  e  $S = 8$ ), os valores de  $S$  e  $H$  influenciam apenas quantitativamente os valores das grandezas  $\langle C \rangle$  e  $\langle H^* \rangle$ . Dessa forma, podemos afirmar que os resultados apresentados nas figuras 9, 12 e 15 são robustos, ou seja, são qualitativamente invariantes quando escolhemos charadas dentro de uma mesma família.

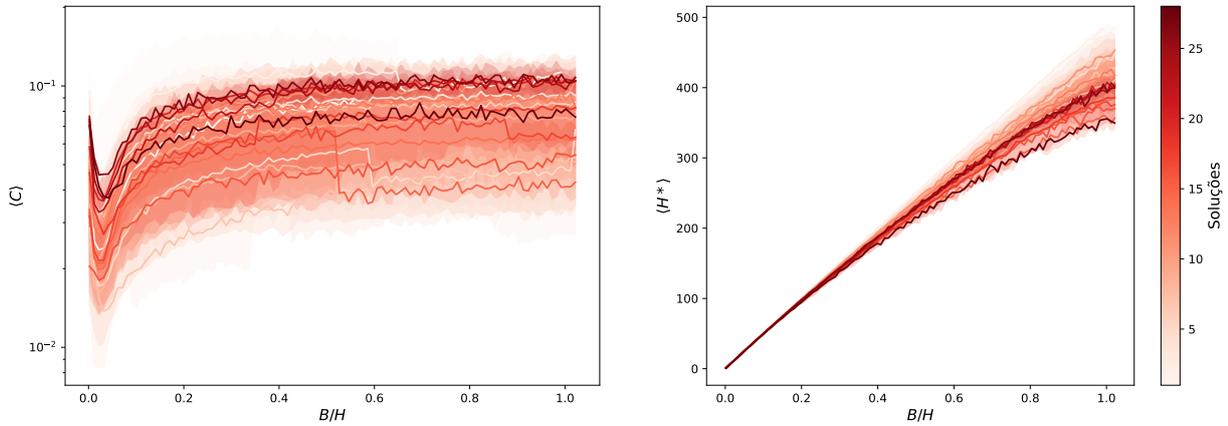


Figura 31 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de *SMM* com  $H = 506$ . A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 1$  e  $S = 28$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

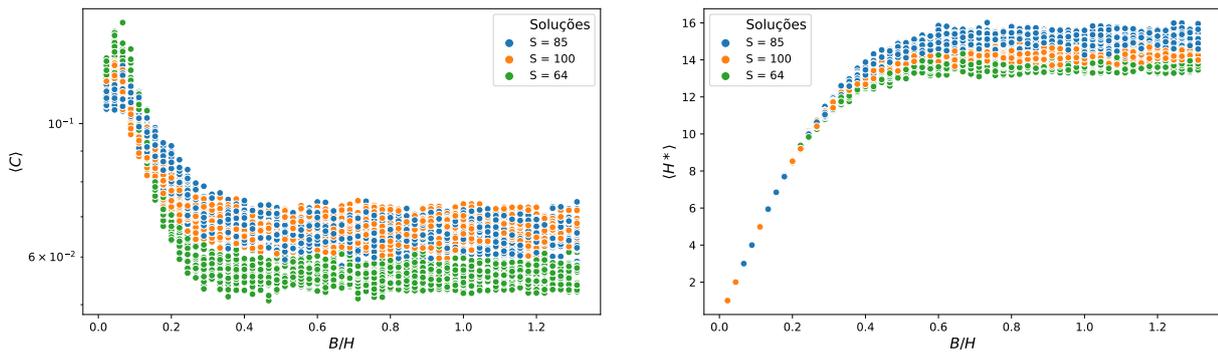


Figura 32 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação a  $B/H$  com  $H = 45$  para 100 variantes do problema original *WHT*. A cada variante temos associado um número de soluções  $S$  e àquelas com mesmo  $S$  atribuímos mesma coloração (conforme a legenda).

Fonte: Elaborada pelo autor.

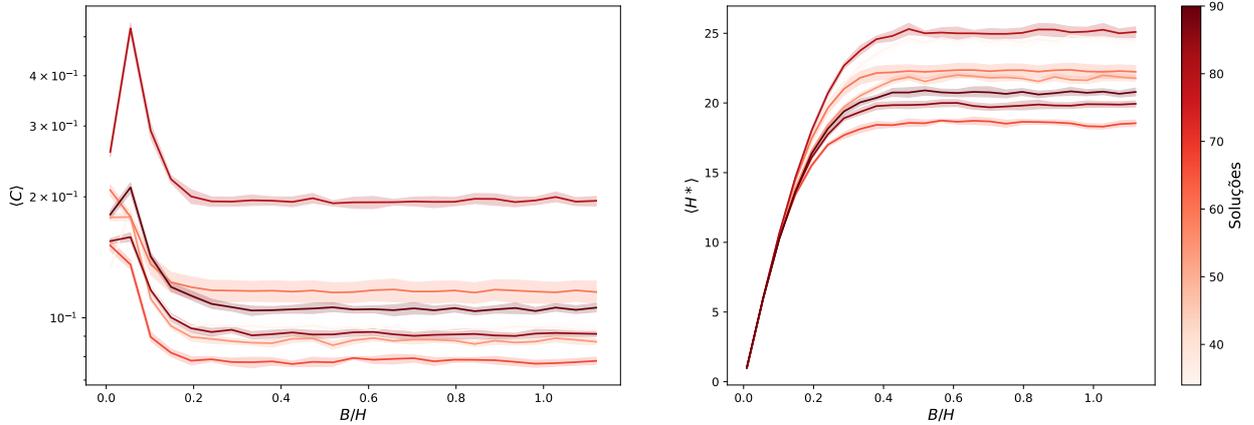


Figura 33 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação à razão  $B/H$  para variantes de  $WHT$  com  $H = 108$ . A cada variante temos associado um número  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 2$  e  $S = 180$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

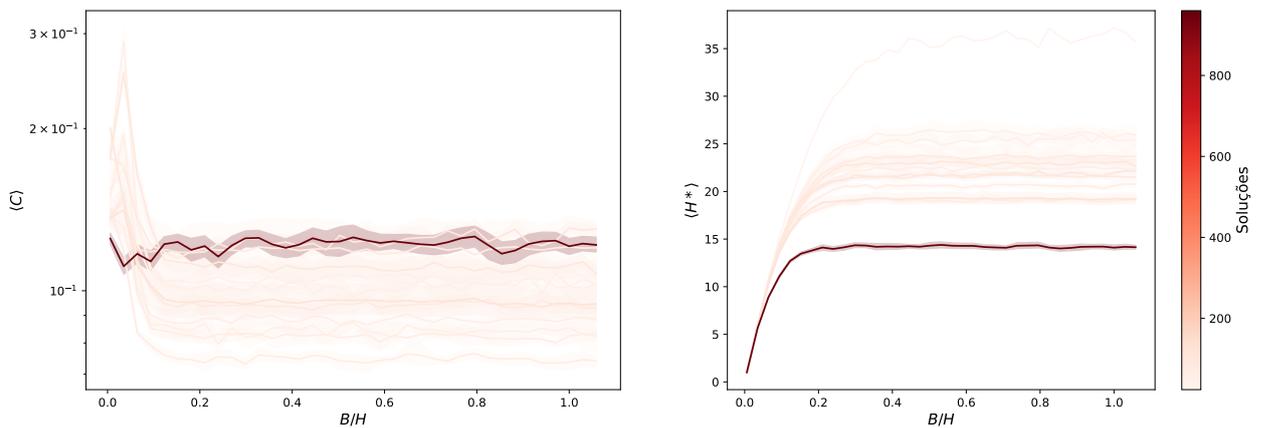


Figura 34 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação a  $B/H$  com  $H = 171$  para 100 variantes do problema original  $WHT$ . A cada variante temos associado um número  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 24$  e  $S = 960$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

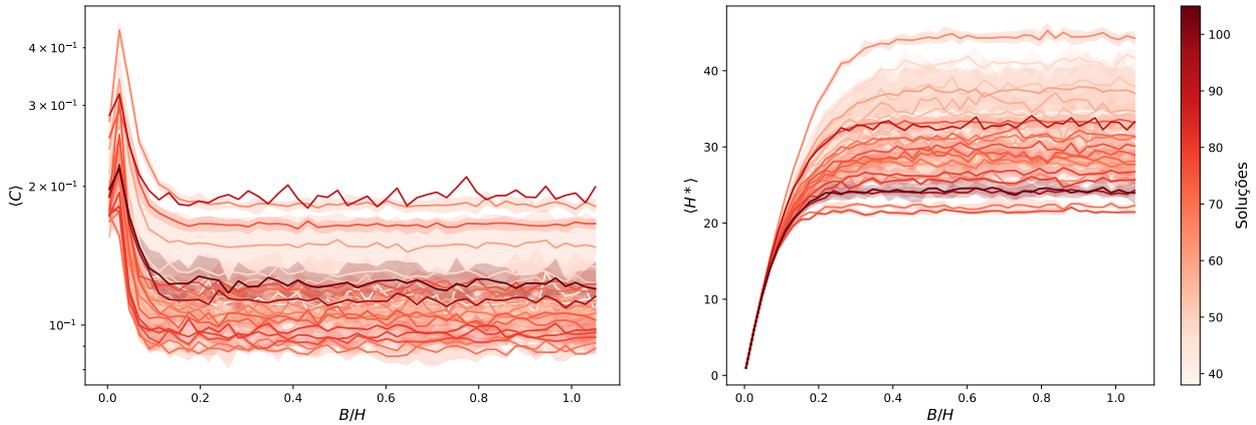


Figura 35 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação a  $B/H$  com  $H = 234$  para 100 variantes do problema original *WHT*. A cada variante temos associado um número  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 38$  e  $S = 105$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

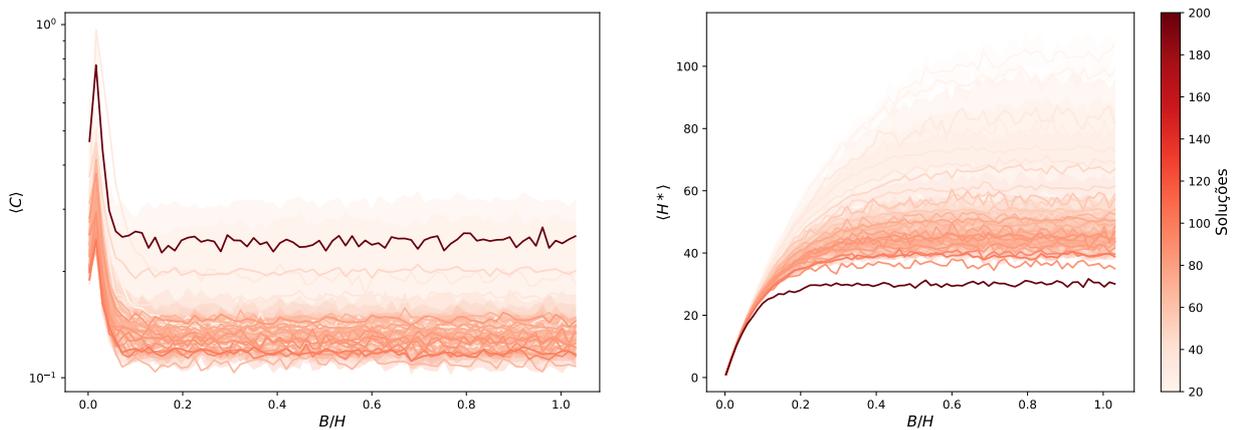


Figura 36 – Curvas de custo  $\langle C \rangle$  (à esquerda) e do número de dicas exibidas no quadro ao final da busca  $\langle H^* \rangle$  (à direita) em relação a  $B/H$  com  $H = 360$  para 100 variantes do problema original *WHT*. A cada variante temos associado um número  $S$  de acordo com a intensidade de cor conforme a barra lateral direita, cujos limites são  $S = 20$  e  $S = 200$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

## APÊNDICE D – INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE AMOSTRAS

Neste apêndice vamos investigar o efeito do número de amostras  $\mathcal{A}$  sobre a estimativa do custo computacional médio  $\langle C \rangle$ . Usaremos os parâmetros de controle  $B = 1, 10, 100, H$  e  $M = 1, 10, 10^2, 10^3$ , onde  $H$  depende da charada:  $H = 351$  para a charada *DGR*,  $H = 506$  para a charada *SMM* e  $H = 234$  para a charada *WHT*.

As figuras 37, 38 e 39 mostram a dependência de  $\langle C \rangle$  com  $\mathcal{A}$  para as charadas *DGR*, *SMM* e *WHT*, respectivamente. Notamos que a partir de  $\mathcal{A} = 10^3$  o valor do custo computacional médio não é mais afetado pelo aumento do número de amostras. Dessa forma justificamos as escolhas  $\mathcal{A} = 10^4$  no capítulo 4 e  $\mathcal{A} = 10^3$  no apêndice C.

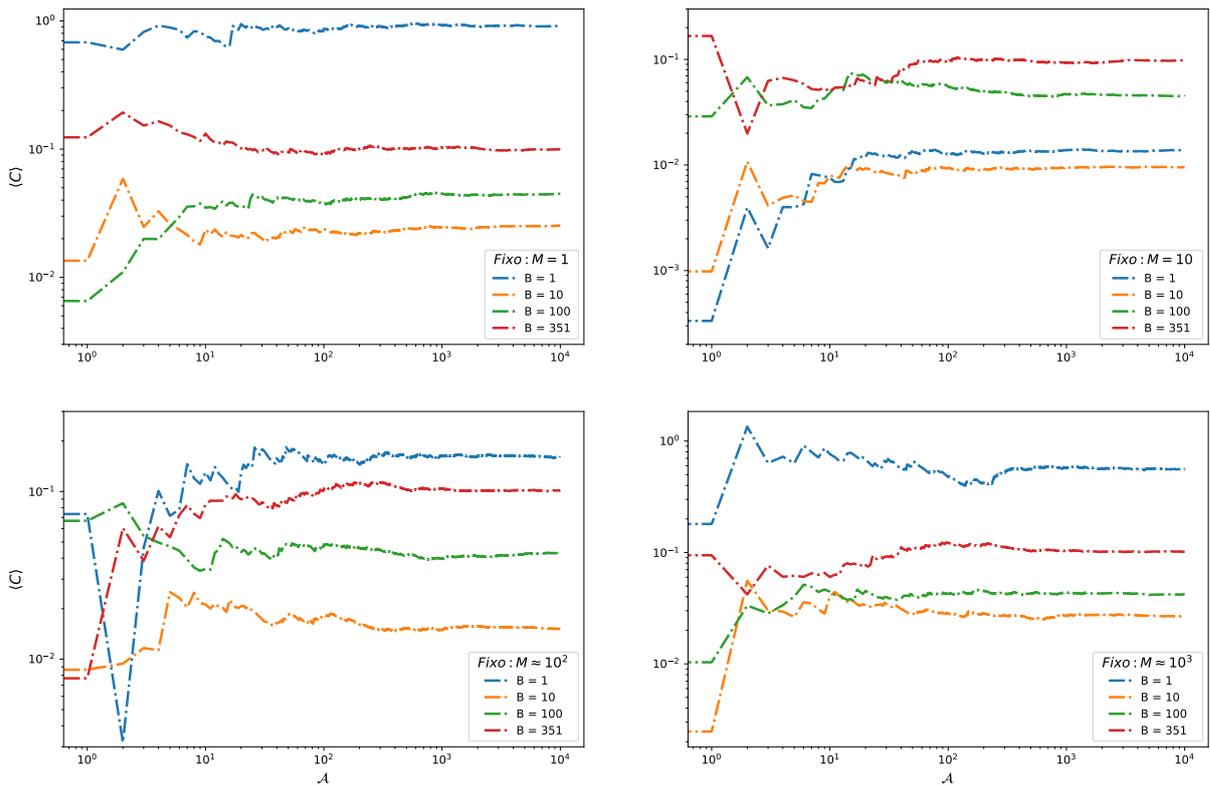


Figura 37 – Influência do número de amostras  $\mathcal{A}$  sobre a estimativa do custo computacional médio  $\langle C \rangle$  para a charada *DGR*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

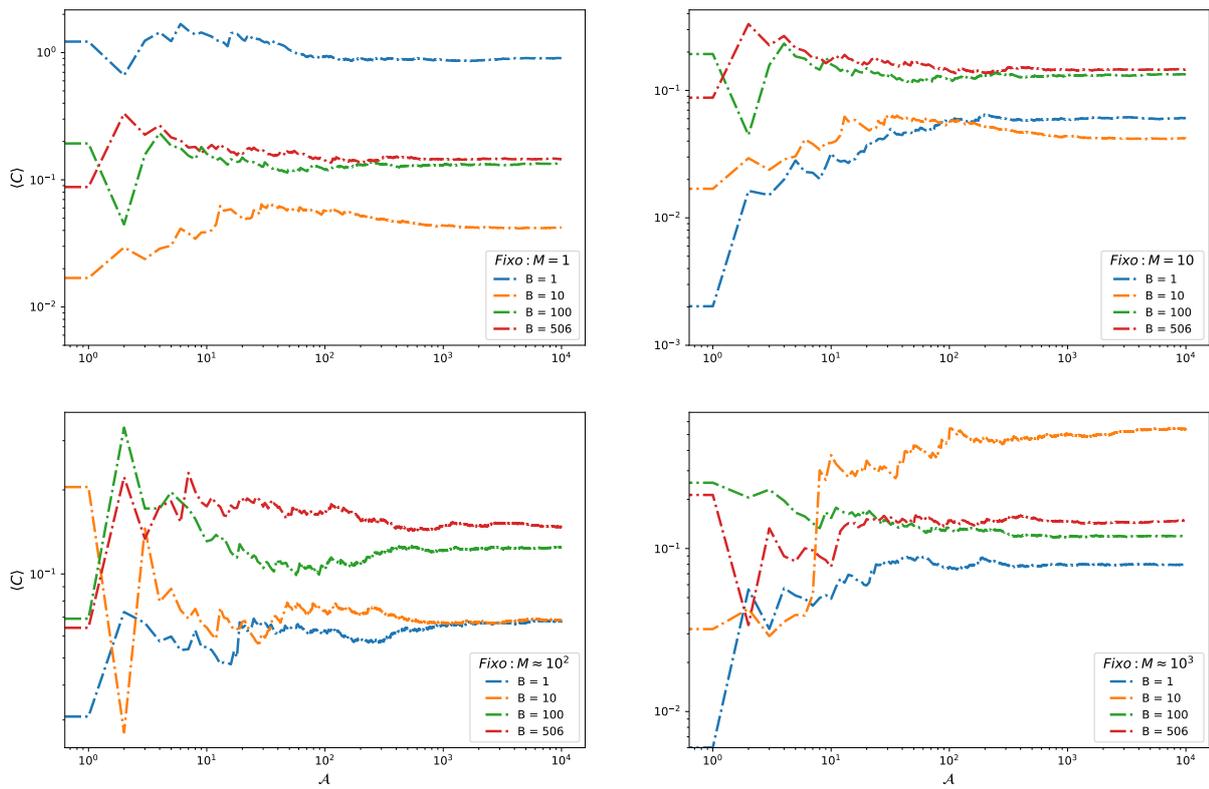


Figura 38 – Influência do número de amostras  $\mathcal{A}$  sobre a estimativa do custo computacional médio  $\langle C \rangle$  para a charada *SMM*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

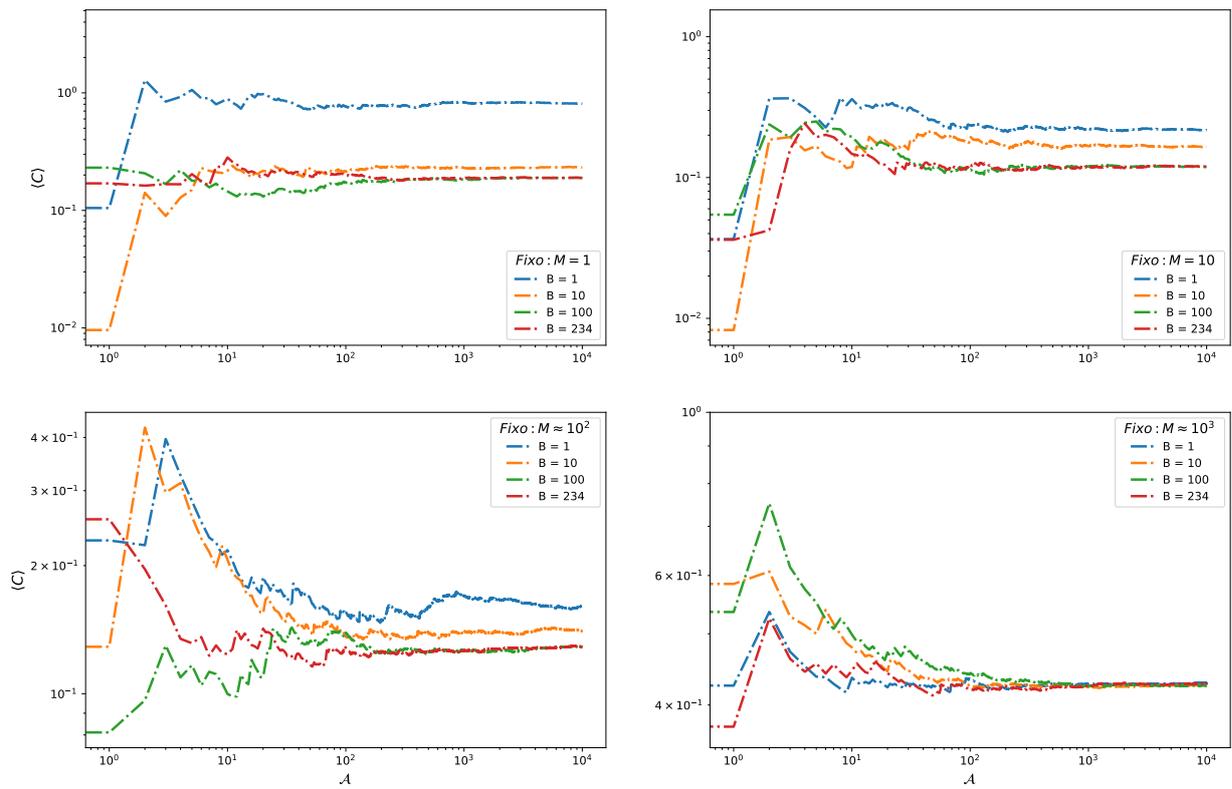


Figura 39 – Influência do número de amostras  $\mathcal{A}$  sobre a estimativa do custo computacional médio  $\langle C \rangle$  para a charada *WHT*.

Fonte: Elaborada pelo autor.