

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física de São Carlos

Ramisés Martins da Silva

# Expansão perturbativa para fenômenos a tempos curtos

São Carlos

2016



Ramisés Martins da Silva

# Expansão perturbativa para fenômenos a tempos curtos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Física Básica  
Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef  
Moussa

Versão Original

São Carlos  
2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Ramisés Martins da  
Expansão perturbativa para fenômenos a tempos  
curtos / Ramisés Martins da Silva; orientador Miled  
Hassan Youssef Moussa -- São Carlos, 2016.  
61 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,  
Universidade de São Paulo, 2016.

1. Sistemas quânticos abertos. 2. Decoerência. 3.  
Superradiância. 4. Fenômenos a tempos curtos. 5.  
Expansão perturbativa. I. Moussa, Miled Hassan  
Youssef, orient. II. Título.

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Ramisés Martins da Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 27/10/2016

Comissão Julgadora

Dr(a). Miled Hassan Youssef Moussa

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Celso Jorge Villas Bôas

Instituição: (UFSCar/São Carlos)

Dr(a). Edson Vernek

Instituição: (UFU/Uberlândia)



# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço à minha família por sempre me apoiar em todos os momentos da minha vida, especialmente meu pai, com quem sempre tive uma conexão maior e que sempre me ajudou mais do que ninguém.

Agradeço também, em especial, à Vivi que, por tanto tempo, me suportou e esteve ao meu lado a todo momento, a você meu sincero amor, respeito e amizade. Não posso me esquecer de agradecer a minha cachorra (Lalá) por alegrar meus dias.

Agradeço ao meu orientador Miled, por me receber de braços abertos e por ser tantas vezes simpático e disposto a me ajudar. Agradeço ao Pedro por me ajudar tanto nesse trabalho e ser uma das peças fundamentais para sua realização. Agradeço também ao Flávio, Hugo e Guilherme por me ajudarem no domínio da ferramenta de escrita (Latex).

Agradeço a todos que colaboraram de alguma forma ao meu desenvolvimento pessoal e intelectual, a todos os meus amigos e professores em particular.

Obrigado à USP e ao IFSC pela oportunidade e pelo suporte. E ao CNPQ pelo financiamento do meu projeto.





*"Você deve apreciar os pequenos desvios ao máximo. Porque é neles onde você vai encontrar as coisas mais importantes do que o que você quer."* - Yoshihiro Togashi



# RESUMO

SILVA, R. M. *Expansão perturbativa para fenômenos a tempos curtos*. 2016. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

Fenômenos que ocorrem a tempos curtos em sistemas quânticos abertos são caracterizados por possuírem um tempo característico de uma ordem muito menor que o tempo de relaxação do sistema. Como exemplos podemos citar o efeito de decoerência, que em resumo tenta explicar como a natureza quântica de um sistema é perdida ao longo da interação com o ambiente e o fenômeno de superradiância, onde estuda-se como alguns sistemas emitem um pulso energético muito rápido gerando um pico de intensidade fino localizado muito antes da relaxação do sistema. O objetivo desse trabalho é não só estudar esses fenômenos mas como apresentar uma técnica alternativa para a quantificação das medidas associadas e de seus tempos característicos. A técnica apresentada se baseia em fazer uma expansão perturbativa no tempo para o operador densidade a partir de uma equação mestra quântica e com seu uso calcular grandezas físicas relevantes a fenômenos que ocorrem a tempos curtos. A simplicidade da técnica e seu uso abrangente são os principais fatores motivadores deste trabalho.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas quânticos abertos. Decoerência. Superradiância. Fenômenos a tempos curtos. Expansão perturbativa.



# ABSTRACT

SILVA, R. M. *Perturbative expansion for short-time phenomena*. 2016. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

Short-time phenomena in open quantum systems are characterized by having a characteristic time of a much lower order than the relaxation time of the system. As examples we can mention the effect of decoherence, which in summary tries to explain how the quantum nature of a system is lost along the interaction with the environment and the superradiance phenomenon, where is studied how some systems emit a very fast energy pulse generating a peak of fine intensity located long before the relaxation of the system. The aim of this work is not only study these phenomena but to present an alternative technique for quantifying the associated measures and their characteristic times. The presented technique is based on making a perturbative expansion in time for the density operator from a quantum master equation and use it to calculate physical quantities relevant to phenomena occurring at short times. The simplicity of the technique and its widespread use are the main motivating factors of this work.

**KEYWORDS:** Open quantum systems. Decoherence. Superradiance. Short-time phenomena. Perturbative expansion.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	15
<b>2</b>	<b>Conceitos fundamentais</b>	17
2.1	O formalismo de operador densidade . . . . .	17
2.2	Evolução temporal do operador densidade . . . . .	19
2.2.1	Hipótese de acoplamento fraco . . . . .	20
2.2.2	Aproximação Markoviana . . . . .	21
2.3	A equação mestra para o oscilador harmônico . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Decoerência quântica</b>	25
3.1	O modelo de Caldeira-Legget e a perda de coerência . . . . .	25
3.2	Expansão perturbativa para perda de coerência . . . . .	28
3.2.1	O defeito de idempotência e a entropia quântica . . . . .	28
3.2.2	Descrição do sistema . . . . .	29
3.2.3	Acoplamento súbito . . . . .	31
3.2.4	Estado inicial puro do subsistema de interesse . . . . .	31
3.3	Exemplo: retornando ao modelo de Caldeira-Leggett . . . . .	32
3.4	Exemplo: o estado de gato na representação de estados coerentes . . . . .	33

<b>4 Superradiância</b>	37
4.1 A equação mestra para um sistema de partículas de spin $1/2$ . . . . .	37
4.2 A equação mestra para um subsistema de partículas . . . . .	38
4.3 A aproximação de campo médio . . . . .	39
4.4 O pulso superradiante . . . . .	40
<b>5 Método alternativo para cálculo de fenômenos que ocorrem a tempos curtos</b>	43
5.1 Perda de coerência . . . . .	43
5.2 O pulso superradiante . . . . .	45
5.3 O pulso superradiante sem a aproximação de campo médio . . . . .	47
<b>6 Conclusões e perspectivas</b>	51
<b>Referências</b>	52
<b>APÊNDICE A - ALGORITMO PARA CÁLCULO DA INTENSIDADE VIA APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO</b>	55
<b>APÊNDICE B - ALGORITMO PARA CÁLCULO DA INTENSIDADE VIA OPERADORES COLETIVOS</b>	57



# Capítulo 1

## Introdução

Em mecânica quântica, sistemas quânticos abertos são definidos, de forma geral, quando consideramos diversos subsistemas interagentes e queremos avaliar a dinâmica de apenas um deles. Usualmente tudo o que não é parte do sistema de interesse é considerado como ambiente e como nenhum sistema quântico é completamente isolado de seus arredores podemos dizer que todo sistema quântico é aberto. Como consequência há sempre a presença de dissipação e perda de informação.<sup>1</sup>

Técnicas desenvolvidas no contexto de sistemas quânticos abertos se mostraram úteis em diversos campos da física como cosmologia,<sup>2</sup> matéria condensada,<sup>3</sup> óptica quântica,<sup>4</sup> física de partículas<sup>5</sup> e teoria de medida quântica.<sup>6</sup>

Uma das dificuldades no estudo de sistemas quânticos abertos é que, muitas vezes, o formalismo atual nos leva a complicações matemáticas devido aos numerosos graus de liberdade presentes em problemas que envolvem sistemas interagentes com o ambiente. Diante desse impasse é justificável a busca de métodos que facilitem o cálculo de medidas desejadas que normalmente só são obtidas com aproximações físicas e extensa manipulação algébrica. Com isso em mente, buscamos neste trabalho expor particularmente dois fenômenos que ocorrem a tempos curtos e desenvolver uma técnica relativamente simples para estimativa de suas correspondentes medidas e tempos característicos.

Um dos fenômenos estudados aqui é a perda de coerência,<sup>7</sup> também conhecido como decoerência quântica ou simplesmente decoerência. A decoerência está presente em todos os sistemas quânticos abertos pois significa a perda de informação para o ambiente e é res-

ponsável pela transição do caráter quântico para o clássico. O conceito de decoerência tem sido um objeto ativo de pesquisa e debate desde 1980 devido à sua importância não só para efeitos práticos como para a interpretação da mecânica quântica.<sup>8</sup> Além de apresentarmos conceitualmente, mostraremos uma técnica para o cálculo de tempos de decoerência baseada no conceito de entropia quântica, ou pureza.<sup>9</sup>

O outro fenômeno estudado é o de superradiância, ou emissão de pulso superradiante, e se consiste essencialmente na emissão espontânea coletiva de um pulso eletromagnético que se origina de um sistema, moderadamente denso, composto de vários átomos(ou moléculas) de dois níveis.<sup>10,11</sup> O pulso energético é emitido em um tempo de ordem bem menor que o tempo de relaxação do sistema, o que caracteriza o efeito como de tempo curto. Abordaremos como esse problema se dá em um sistema composto por um conjunto de partículas de spin  $1/2$ .

Após a exposição desses fenômenos desenvolveremos uma técnica, baseada em uma expansão para tempos curtos, para o cálculo de grandezas físicas que caracterizem esses fenômenos e seus respectivos tempos característicos.

# Capítulo 2

## Conceitos fundamentais

Neste capítulo discutiremos o formalismo do operador densidade em mecânica quântica de sistemas interagentes tal como desenvolveremos uma equação mestra para o operador densidade de um sistema acoplado a um reservatório térmico. O formalismo de equação mestra foi desenvolvido por Louissel<sup>12</sup> e possui ampla literatura na área.<sup>6,13,14</sup> Uma dedução alternativa, baseada na idéia de operadores de projeção, é dada por Gardiner.<sup>4</sup>

### 2.1 O formalismo de operador densidade

A teoria quântica é capaz de prever os resultados de uma medida e valores médios de observáveis a partir do conhecimento do estado em que o sistema de interesse se encontra. De maneira conveniente, escrevemos um estado  $|\psi\rangle$  utilizando a base de auto-estados comum aos observáveis que particularmente estamos interessados:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\phi_k\rangle. \quad \langle\phi_j|\phi_k\rangle = \delta_{j,k} \quad (2.1.1)$$

Uma vez que possamos repetidas vezes preparar o sistema de interesse em qualquer superposição coerente de tais auto-estados, obteremos os respectivos auto-valores com probabilidade de ocorrência  $|c_k|^2$ . Tais características constituem a máxima informação possível acerca de um sistema quântico, o que faz com que estados como 2.1.1 sejam conhecidos como puros e

possuam dinâmica governada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.1.2)$$

onde  $H$  é o hamiltoniano do problema e  $\hbar$  é a constante de Planck.<sup>15</sup> Em sistemas quânticos abertos não há garantia de que as variáveis envolvidas durante a preparação do vetor de estado comutam entre si, o que conseqüentemente provoca incerteza sobre a medida dos observáveis de interesse.<sup>16,17</sup> Para caracterizar esta informação incompleta, associamos probabilidades  $p_n$  à estados puros  $|\psi_n\rangle$ , que são normalizados mas não necessariamente ortogonais, constituindo assim um "ensemble" (conjunto) de estados quânticos. Caso deseja-se calcular o valor esperado de um certo observável  $\mathbb{O}$ , é necessário ponderar a contribuição de cada um dos estados do ensemble:

$$\langle \mathbb{O} \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | \mathbb{O} | \psi_n \rangle. \quad \sum_n p_n = 1 \quad (2.1.3)$$

Quando um sistema físico não pode ser descrito através de um único  $|\psi\rangle$ , dizemos que o mesmo se encontra em uma mistura estatística de estados quânticos.<sup>18</sup> Para a descrição completa e coerente com a condição estatística de alguns sistemas quânticos, utilizamos o operador densidade.<sup>19</sup> Note que o estado puro é um caso particular, onde apenas um micro-estado possui probabilidade não nula. A escolha arbitrária de uma base nos permite dar ao operador densidade uma representação matricial em  $|\phi_k\rangle$ ,

$$\langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle = \sum_n p_n c_i^{(n)} c_j^{*(n)}, \quad (2.1.4)$$

onde os elementos diagonais ( $i = j$ ) são positivos definidos e recebem o nome de populações. Esses elementos são interpretados como a probabilidade do sistema ser encontrado em um dos auto-estados do conjunto de observáveis que define a base. A assinatura quântica da superposição de estados se apresenta por meio dos elementos não-diagonais ( $i \neq j$ ), ou coerências.<sup>20</sup> De 2.1.4 percebe-se claramente que  $\rho$  é hermitiano e que a probabilidade é conservada, ou seja  $\text{Tr}\{\rho\} = 1$ . Esta nova ferramenta traz consigo toda a informação sobre o

ensemble de estados puros, facilitando o cálculo do valor esperado do observável  $\mathbb{O}$ :

$$\langle \mathbb{O} \rangle = \text{Tr}\{\mathbb{O}\rho\}. \quad (2.1.5)$$

Uma mistura estatística é diferente de uma superposição de estados, que por si só gera um estado puro. Falaremos sobre medidas de pureza posteriormente no trabalho. Quanto à evolução temporal, se cada estado do ensemble evolui temporalmente segundo 2.1.2, então teremos a seguinte equação dinâmica (conhecida como equação de Von Neumann) para o operador densidade:

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho(t)]. \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Evolução temporal do operador densidade

Queremos analisar a dinâmica de um sistema (será dado um tratamento de caráter mais geral até que seja necessário atribuir especificidade quanto ao sistema de interesse) acoplado a um reservatório, o hamiltoniano total é da forma

$$H = H_S + H_R + H_I, \quad (2.2.1)$$

onde  $H_S$  e  $H_R$  são, respectivamente, os hamiltonianos de evolução livre do sistema e do reservatório e  $H_I$  o hamiltoniano que descreve a interação do sistema com o reservatório. O operador densidade total  $\rho(t)$  na representação de Schrödinger, satisfaz 2.1.6. É conveniente tratarmos o problema na representação de interação<sup>6</sup>, assim podemos, sem consequências para a dinâmica, nos preocupar apenas com a interação do sistema com o reservatório e evitar a manipulação da parte de evolução livre do hamiltoniano total. Para isso devemos definir o operador unitário

$$U_0 = e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (2.2.2)$$

onde  $H_0 = H_S + H_R$ . A equação de movimento fica da forma

$$\frac{d\rho^{(I)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [V(t), \rho^{(I)}(t)], \quad (2.2.3)$$

sendo  $\rho^{(I)}(t) = U_0^\dagger(t)\rho(t)U_0(t)$  o operador densidade total na representação de interação e  $V(t) = U_0^\dagger(t)H_I(t)U_0(t)$ . Integrando 2.2.3 vem

$$\rho^{(I)}(t) = \rho^{(I)}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 [V(t_1), \rho^{(I)}(t_1)]. \quad (2.2.4)$$

Lembrando que queremos analisar a dinâmica do operador densidade reduzido do sistema de interesse, devemos traçar parcialmente o operador densidade total sobre os graus de liberdade do reservatório, isto é, queremos obter  $\rho_S^{(I)}(t) = \text{Tr}_R\{\rho^{(I)}(t)\}$  porém para os sistemas estudados neste trabalho,  $V(t)$  é tal que

$$\text{Tr}_R\{V(t)\rho^{(I)}(t)\} = 0. \quad (2.2.5)$$

Substituindo a 2.2.3 em 2.2.4, decorre

$$\rho^{(I)}(t) = \rho^{(I)}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 [V(t_1), \rho^{(I)}(0)] + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [V(t_1), [V(t_2), \rho^{(I)}(t_2)]] \quad (2.2.6)$$

e portanto conseguimos uma dinâmica reduzida de segunda ordem contornando o impasse apresentado por 2.2.5.

### 2.2.1 Hipótese de acoplamento fraco

Estamos interessados na situação em que as dimensões do reservatório são muito maiores que a do sistema de forma que seu operador densidade não sofre distúrbios significativos, isto é, a hipótese de acoplamento fraco<sup>1</sup> em que o operador densidade total pode ser escrito como

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_R(0), \quad (2.2.7)$$

em que  $\rho_R(t) \approx \rho_R(0) = \rho_R$  é o operador densidade reduzido do reservatório. Substituindo 2.2.7 em 2.2.6 e traçando sobre os graus de liberdade do reservatório obtemos

$$\frac{d\rho_S^{(I)}(t)}{dt} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R\{V(t), [V(t_1), \rho_S^{(I)}(t_1) \otimes \rho_R]\}, \quad (2.2.8)$$

onde encontraremos as correlações entre os modos do reservatório (presentes em  $V$ ) nos tempos  $t$  e  $t_1$ , vindas do traço parcial sobre o duplo comutador no integrando.

## 2.2.2 Aproximação Markoviana

Uma vez que a interação é assumida fraca, a taxa com que o operador densidade varia, na representação de interação, é muito menor do que a taxa de variação dos operadores do reservatório, os quais evoluem de acordo com  $H_R$ . Portanto podemos dizer que o fator  $\rho_S^{(I)}(t_1)$  muda de forma insignificante no tempo necessário para que as funções de correlação do reservatório se anulem. Neste caso podemos fazer a aproximação

$$\rho_S^{(I)}(t_1) \rightarrow \rho_S^{(I)}(t), \quad (2.2.9)$$

conhecida como aproximação de Born-Markov<sup>1,21</sup> uma vez que dela resulta uma equação diferencial de primeira ordem para o operador densidade reduzido do sistema, ou seja, o conhecimento de  $\rho_S^{(I)}(t)$  em um dado instante é suficiente para a sua determinação em todos os instantes posteriores. Voltando a 2.2.8 ficamos com

$$\frac{d\rho_S^{(I)}(t)}{dt} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R \{V(t), [V(t_1), \rho_S^{(I)}(t) \otimes \rho_R]\}, \quad (2.2.10)$$

e com isso devemos agora especificar nosso sistema de interesse pois precisamos de mais informação sobre como se dá a interação entre o sistema e o reservatório.

## 2.3 A equação mestra para o oscilador harmônico

Queremos estudar como se dá a dinâmica de um sistema composto por um oscilador harmônico acoplado a um reservatório térmico. O hamiltoniano total é

$$H = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \hbar g_k (ab_k^\dagger + a^\dagger b_k), \quad (2.3.1)$$

onde  $a(a^\dagger)$  é o operador de aniquilação(criação) do oscilador que tem uma frequência característica  $\omega_0$  e  $b_k(b_k^\dagger)$  é o operador de aniquilação(criação) do  $k$ -ésimo modo do reservatório que tem  $\omega_k$  como respectiva frequência e  $g_k$  como constante de acoplamento com o oscilador. Passando o hamiltoniano de interação para a representação de interação ficamos com

$$V(t) = \hbar(a\Gamma^\dagger(t)e^{-i\omega_0 t} + a^\dagger\Gamma(t)e^{i\omega_0 t}), \quad (2.3.2)$$

onde definimos

$$\Gamma(t) = \sum_k g_k b_k e^{-i\omega_k t}. \quad (2.3.3)$$

Substituindo 2.3.2 em 2.2.10 geramos as seguintes integrais

$$I_1 = \int_0^t dt_1 \langle \Gamma(t)\Gamma(t_1) \rangle e^{i\omega_0(t+t_1)}, \quad (2.3.4)$$

$$I_2 = \int_0^t dt_1 \langle \Gamma^\dagger(t)\Gamma^\dagger(t_1) \rangle e^{-i\omega_0(t+t_1)}, \quad (2.3.5)$$

$$I_3 = \int_0^t dt_1 \langle \Gamma(t)\Gamma^\dagger(t_1) \rangle e^{i\omega_0(t-t_1)}, \quad (2.3.6)$$

$$I_4 = \int_0^t dt_1 \langle \Gamma^\dagger(t)\Gamma(t_1) \rangle e^{-i\omega_0(t-t_1)}. \quad (2.3.7)$$

Nos resta descobrir as médias das correlações do reservatório, para isso devemos analisar o operador densidade do reservatório, que para nossos estudos assumiremos como um banho térmico descrito por

$$\rho_R = \frac{e^{-H_R/k_B T}}{\text{Tr}_R\{e^{-H_R/k_B T}\}}, \quad (2.3.8)$$

onde  $k_B$  e  $T$  são, respectivamente, a constante de Boltzmann e a temperatura do reservatório.

Reescrevendo 2.3.8:

$$\rho_R = \frac{e^{-H_R/k_B T}}{\text{Tr}\{e^{-H_R/k_B T}\}} = \prod_k \sum_{n_k} p_{n_k} |n_k\rangle \langle n_k|, \quad (2.3.9)$$

onde

$$p_{n_k} = (1 - e^{-\hbar\omega_k/k_B T}) e^{-n_k \hbar\omega_k/k_B T} \quad (2.3.10)$$



e  $|n_k\rangle$  é auto-estado do operador  $b_k^\dagger b_k$  com respectivo auto-valor  $n_k$ . Voltando às médias das correlações

$$\begin{aligned}\langle b_i b_j \rangle_R &= \text{Tr}_R \left\{ \prod_k \sum_{n_k} p_{n_k} |n_k\rangle \langle n_k| b_i b_j \right\} = \prod_k \sum_{n_k} \sum_{m_l} \langle m_l | p_{n_k} |n_k\rangle \langle n_k | b_i b_j | m_l \rangle \\ &= \prod_k \sum_{n_k} \sum_{m_l} p_{n_k} \langle m_l | n_k \rangle \langle n_k | b_i b_j | m_l \rangle = \prod_k \sum_{n_k} p_{n_k} \langle n_k | b_i b_j | n_k \rangle \\ &= \prod_k \sum_{n_k} p_{n_k} \sqrt{n_k(n_k+1)} \langle n_{k+1} | n_{k-1} \rangle \delta_{ik} \delta_{jk} = 0\end{aligned}\quad (2.3.11)$$

e analogamente

$$\langle b_i^\dagger b_j^\dagger \rangle_R = 0, \quad (2.3.12)$$

$$\langle b_i^\dagger b_j \rangle_R = \prod_k \sum_{n_k} p_{n_k} \langle n_k | b_i^\dagger b_j | n_k \rangle = \prod_k \sum_{n_k} p_{n_k} n_k \langle n_{k-1} | n_{k-1} \rangle \delta_{ik} \delta_{jk} = \bar{n}_i \delta_{ij}, \quad (2.3.13)$$

$$\langle b_i b_j^\dagger \rangle_R = (1 + \bar{n}_i) \delta_{ij}. \quad (2.3.14)$$

Vamos agora assumir que a densidade de modos do reservatório seja suficientemente grande para que se aproxime do contínuo. Tomando-se então o limite

$$\sum_k \{ \dots \} \rightarrow \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega) \{ \dots \}, \quad (2.3.15)$$

sendo  $D(\omega)$  a densidade de modos do reservatório, os termos que precisamos calcular se tornam integrais triplas e todos possuem estruturas semelhantes. Como exemplo, o primeiro deles (2.3.4) fica

$$I_1 = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} D(\omega_1) \int_0^\infty \frac{d\omega_2}{2\pi} D(\omega_2) g(\omega_1) g(\omega_2) \langle b(\omega_1) b(\omega_2) \rangle e^{-i(\omega_1 t + \omega_2 t_1)} e^{i\omega_0(t+t_1)} \quad (2.3.16)$$

e a presença da exponencial fortemente oscilante faz com que a contribuição das funções de  $\omega$ , seja relevante para  $\omega \sim \omega_0$ , podemos então fatorá-las, resultando em

$$I_1 = 0, \quad (2.3.17)$$

$$I_2 = 0, \quad (2.3.18)$$

$$I_3 = \frac{\gamma}{2}(1 + \bar{n}), \quad (2.3.19)$$

$$I_4 = \frac{\gamma}{2}\bar{n}, \quad (2.3.20)$$

onde

$$\bar{n} = \bar{n}(\omega_0) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} - 1} \quad (2.3.21)$$

é o número médio de excitações correspondente a frequência  $\omega_0$ , distribuição conhecida como de Bose-Einstein,<sup>6,22</sup> e

$$\gamma = D^2(w_0)g^2(w_0) \quad (2.3.22)$$

é a taxa de atenuação ou relaxação devido às interações microscópicas com o banho térmico. Com as integrais calculadas podemos voltar à dinâmica do operador densidade, encontrando, finalmente, a equação mestra na forma de Lindblad<sup>1</sup> para o oscilador harmônico:

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2a\rho_S a^\dagger - a^\dagger a \rho_S - \rho_S a^\dagger a) + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2a^\dagger \rho_S a - a a^\dagger \rho_S - \rho_S a a^\dagger). \quad (2.3.23)$$

Podemos ainda retornar à representação de Schrödinger fazendo uso do operador unitário definido em 2.2.2, a equação mestra fica

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho_S] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2a\rho_S a^\dagger - a^\dagger a \rho_S - \rho_S a^\dagger a) + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2a^\dagger \rho_S a - a a^\dagger \rho_S - \rho_S a a^\dagger) \quad (2.3.24)$$

e recuperamos o termo de Von Neumann (evolução livre).

# Capítulo 3

## Decoerência quântica

Desenvolvimentos experimentais recentes,<sup>23</sup> bem como a análise de modelos com eles relacionados<sup>24</sup> indicam que o conhecimento da escala de tempo (geralmente muito curta) no qual o processo de decoerência ocorre pode ser de grande valor. Neste capítulo vamos introduzir o conceito de decoerência quântica<sup>7</sup> e apresentar um método,<sup>9</sup> baseado em uma expansão perturbativa para tempos curtos, para determinarmos sua escala de tempo.

### 3.1 O modelo de Caldeira-Legget e a perda de coerência

No contexto de sistemas quânticos abertos analisamos problemas em que os sistemas de interesse não evoluem de forma unitária mas interagem com o ambiente. Essa interação leva o sistema a perder informação rapidamente, principalmente sobre as correlações entre os estados (correspondente aos elementos fora da diagonal do operador densidade), fenômeno esse que chamamos de perda de coerência ou simplesmente decoerência. Uma vez que as correlações entre os estados desaparecem podemos dizer que o sistema não mais se encontra em uma superposição de estados e cada medida pode ser vista como um evento independente, com consequências que podem ser exploradas separadamente, isto é, a estatística envolvendo os possíveis resultados de uma medida se torna de natureza clássica pois após a perda de coerência não é possível a transição de probabilidade de um estado para outro.

Como um exemplo de decoerência analisaremos um caso simples de uma partícula na posição  $x$  interagindo com um campo escalar usando o modelo de Caldeira-Leggett.<sup>3</sup> Consideraremos apenas o regime de altas temperaturas onde apenas efeitos de excitações térmicas do campo o qual a partícula está submetida são levados em conta e efeitos de flutuações do vácuo são negligenciados. Neste caso o operador densidade da partícula na representação de posição ( $\rho = \rho(x, x')$ ) evolui segundo a equação mestra

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - \gamma(x - x') \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) \rho - \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2} (x - x')^2 \rho \quad (3.1.1)$$

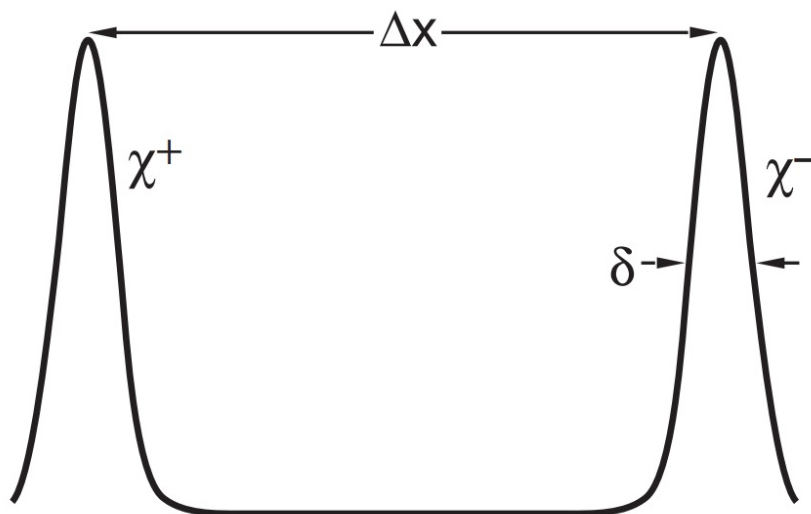
onde  $H$  é o hamiltoniano da partícula,  $\gamma$  é a taxa de relaxação do sistema,  $T$  é a temperatura,  $m$  é a massa da partícula e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Não iremos analisar 3.1.1 a fundo, apenas notar que a equação se divide naturalmente em três termos, cada um responsável por um aspecto diferente da dinâmica da partícula. O primeiro termo corresponde a evolução livre (termo de Von Neumann), o segundo representa a dissipação devido a interação com o campo escalar que causa um decréscimo da energia e momento médios da partícula e o último termo é responsável pelas flutuações que levam ao movimento browniano.

Para exemplificarmos de forma clara vamos considerar aqui um estado inicial para a partícula que é dado por uma superposição coerente de duas gaussianas, também conhecido como "estado de gato" (referência ao "gato de Schrödinger"), dado por  $\psi(x) = (\chi^+(x) + \chi^-(x)) / \sqrt{2}$ , onde as gaussianas são

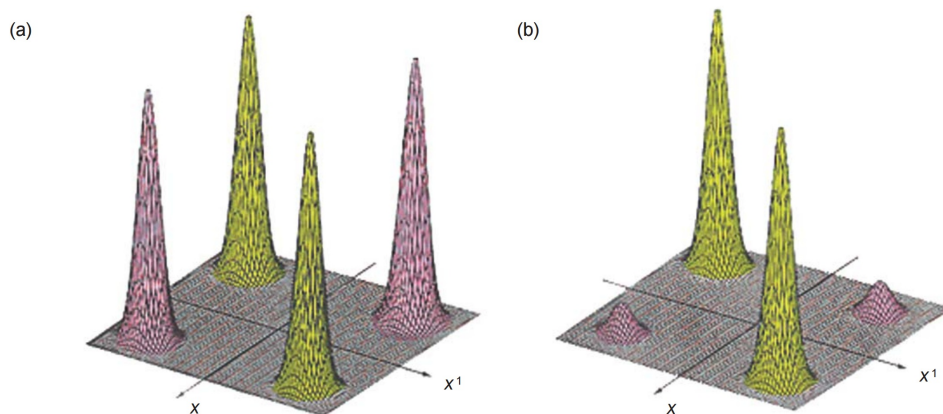
$$\chi^\pm = \exp \left[ -\frac{(x \pm \frac{\Delta x}{2})^2}{4\delta^2} \right]. \quad (3.1.2)$$

Para o caso de separação grande ( $\Delta x \gg \delta$ ), o operador densidade correspondente da partícula  $\rho(x, x') = \psi(x)\psi^*(x')$  tem quatro picos: Dois na diagonal definida por  $x = x'$  e dois fora da diagonal onde  $x$  e  $x'$  são muito diferentes (Figura 3.2). A coerência quântica acontece devido aos termos fora da diagonal e, portanto, para calcularmos o tempo de decoerência nos basta analisar o tempo que eles levam para desaparecerem.

De 3.1.1 podemos concluir que o que rege o comportamento dos picos fora da diagonal do operador densidade é o último termo pois  $(x - x')$  é grande o suficiente para a omissão dos



**Figura 3.1-** Um "estado de gato".  
 Fonte: ZUREK.<sup>7</sup>



**Figura 3.2-** Evolução temporal do operador densidade para o estado de gato. Em (a) temos o operador densidade inicial sendo que os picos verdes correspondem aos elementos diagonais e representam, portanto, as duas possíveis posições da partícula e os picos vermelhos existem devido a coerência quântica. A existência dos picos vermelhos demonstra que a partícula não está em nenhuma das possíveis posições mas sim em uma superposição coerente delas. Em (b) o operador densidade já evoluiu a um estado em que o ambiente causou uma perda significativa de coerência no sistema. Maior decoerência resultaria em um operador densidade com elementos diagonais apenas e poderia, portanto, ser considerado como uma distribuição clássica de probabilidade.

Fonte: ZUREK.<sup>7</sup>

termos de menor ordem, logo as coerências ( $\rho_c$ ) evoluem da forma

$$\rho_c(t) = \rho_c(0) \exp\left(\frac{-2m\gamma k_B T}{\hbar^2} (\Delta x)^2 t\right) \quad (3.1.3)$$

e possuem um tempo característico (tempo de decoerência)

$$\tau_D = \frac{\hbar^2}{2m\gamma k_B T (\Delta x)^2}, \quad (3.1.4)$$

que pode ser reescrito como

$$\tau_D = \gamma^{-1} \left( \frac{\hbar}{(\Delta x) \sqrt{2mk_b T}} \right)^2 = \tau_R \left( \frac{\lambda_{dB}}{\Delta x} \right)^2, \quad (3.1.5)$$

onde  $\lambda_{dB} = \hbar/(2mk_b T)^{-1/2}$  é o comprimento de onda térmico de de Broglie e o tempo de decoerência  $\tau_D$  é tipicamente muito menor do que o tempo de relaxação do sistema  $\tau_R = \gamma^{-1}$ . Como exemplo, para um sistema a uma temperatura  $T = 300$  kelvins com massa  $m = 1$  grama e separação  $\Delta x = 1$  centímetro,  $\tau_D/\tau_R \approx 10^{-40}$ . Logo mesmo com um tempo de relaxação da ordem da idade do universo (aproximadamente  $10^{17}$  segundos) a coerência quântica seria destruída em  $\tau_D \approx 10^{-23}$  segundo. Para sistemas microscópicos, entretanto, o tempo de decoerência é suficientemente grande, em alguns casos até maior que o tempo de relaxação, para caracterização deles como quânticos.

## 3.2 Expansão perturbativa para perda de coerência

### 3.2.1 O defeito de idempotência e a entropia quântica

Uma forma alternativa<sup>25</sup> de calcular o tempo de decoerência de um sistema é a partir da entropia quântica<sup>26</sup> que é dada por

$$S(t) = -\text{Tr}\{\rho \ln \rho\}, \quad (3.2.1)$$

ou a partir do defeito de idempotência, chamado também de entropia de primeira ordem ou entropia linear,<sup>9,27-29</sup>

$$s(t) = 1 - \text{Tr}\{\rho^2\}. \quad (3.2.2)$$

Ambas as expressões são independentes de bases de estados, possuem um mínimo nos estados puros e efetivamente descrevem um grau de "pureza" do sistema. Qualquer desvio de um estado puro leva a um desvio do valor mínimo, 0, para ambas as medidas,

$$S_{\text{estado puro}} = s_{\text{estado puro}} = 0. \quad (3.2.3)$$

É importante ressaltar que as medidas entrópicas descritas são válidas para o cálculo da perda de coerência de um sistema quando o mesmo evoluiu pouco além de seu estado inicial, caracterizando-as como boas quantificadoras de decoerência para tempos curtos.<sup>30</sup>

### 3.2.2 Descrição do sistema

Consideremos um sistema quântico fechado composto por dois subsistemas interagentes. O hamiltoniano do sistema pode ser descrito como

$$H = H_1 + H_2 + H_I, \quad (3.2.4)$$

onde  $H_1$  e  $H_2$  são os hamiltonianos dos subsistemas 1 e 2 respectivamente e  $H_I$  é o hamiltoniano de interação entre eles. O estado do sistema é descrito pelo operador densidade  $\rho(t)$ , que evolui, na representação de Schrödinger, da forma

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)]. \quad (3.2.5)$$

Usaremos como medida de pureza a expansão perturbativa do defeito de idempotência do subsistema 2

$$s(t) = 1 - \text{Tr}_2 \left\{ \rho_2^2(0) + \dot{\rho}_2^2(0)t + \frac{1}{2!} \ddot{\rho}_2^2(0)t^2 + \dots \right\}, \quad (3.2.6)$$

onde  $\rho_2(t)$  é seu operador densidade reduzido

$$\rho_2(t) = \text{Tr}_1 \{ \rho(t) \}. \quad (3.2.7)$$

Visto que buscamos tempos de decoerência que são muito curtos podemos considerar até a segunda ordem da expansão

$$\delta(t) = s(0) - \frac{1}{\tau_1}t - \frac{1}{\tau_2^2}t^2, \quad (3.2.8)$$

onde:

$$\frac{1}{\tau_1} = \text{Tr}_2 \{ \dot{\rho}_2^2(0) \} = 2 \langle \dot{\rho}_2(0) \rangle_{\rho_2(0)}, \quad (3.2.9)$$

e:

$$\frac{1}{\tau_2^2} = \frac{1}{2!} \text{Tr}_2 \{ \ddot{\rho}_2^2(0) \} = \text{Tr}_2 \{ \dot{\rho}_2^2(0) \} + \langle \ddot{\rho}_2(0) \rangle_{\rho_2(0)} \quad (3.2.10)$$

Usando do fato do sistema 1 + 2 ser fechado, podemos dizer que o hamiltoniano total é conservado, logo se derivarmos a 3.2.5 no tempo obtemos:

$$\ddot{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} [H(t), [H(t), \rho(t)]], \quad (3.2.11)$$

ficando portanto com

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{2}{i\hbar} \langle \text{Tr}_1 \{ [H, \rho(0)] \} \rangle_{\rho_2(0)}, \quad (3.2.12)$$

e

$$\frac{1}{\tau_2^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \left( \text{Tr}_2 \left\{ \left( \text{Tr}_1 \{ [H, \rho(0)] \} \right)^2 \right\} + \left\langle \text{Tr}_1 \left\{ [H, [H, \rho(0)]] \right\} \right\rangle_{\rho_2(0)} \right). \quad (3.2.13)$$



### 3.2.3 Acoplamento súbito

Vamos considerar o caso em que os subsistemas estão inicialmente descorrelacionados, isto é, uma situação de acoplamento súbito

$$\rho(0) = \rho_1(0) \otimes \rho_2(0), \quad (3.2.14)$$

com essa condição 3.2.12 e 3.2.13 ficam, respectivamente

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{2}{i\hbar} \left( \text{Tr}_2 \{ \rho_2(0) \langle H \rangle_{\rho_1(0)} \rho_2(0) \} - \text{Tr}_2 \{ \rho_2^2(0) \langle H \rangle_{\rho_1(0)} \} \right) = 0, \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2\tau_2^2} &= \left\langle \rho_2(0) \langle H \rangle_{\rho_1(0)}^2 \right\rangle_{\rho_2(0)} - \left\langle \langle H \rangle_{\rho_1(0)} \rho_2(0) \langle H \rangle_{\rho_1(0)} \right\rangle_{\rho_2(0)} \\ &\quad - \left\langle \rho_2(0) \langle H^2 \rangle_{\rho_1(0)} \right\rangle_{\rho_2(0)} + \text{Tr}_1 \{ \text{Tr}_2 \{ \rho_2(0) H \rho_1(0) \rho_2(0) H \} \}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

### 3.2.4 Estado inicial puro do subsistema de interesse

A consideração final a ser feita é de que o subsistema em análise parte de um estado inicial puro, essa hipótese contribui não apenas para a simplificação da expressão correspondente ao tempo característico  $\tau_2$  como também reafirma o uso do defeito de idempotência como medida de decoerência neste caso. Teremos, portanto,

$$\rho_2(0) = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (3.2.17)$$

e 3.2.16 fica

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2\tau_2^2} &= \langle \psi | \langle H \rangle_{\rho_1(0)}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \langle H \rangle_{\rho_1(0)} | \psi \rangle^2 - \langle \psi | \langle H^2 \rangle_{\rho_1(0)} | \psi \rangle \\ &\quad + \langle \langle \psi | H | \psi \rangle^2 \rangle_{\rho_1(0)}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Substituindo 3.2.4 em 3.2.18 chegamos, finalmente, a

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2\tau^2} = & \langle \langle H_I \rangle_{\rho_1(0)}^2 \rangle_{\rho_2(0)} - \langle \langle H_I \rangle_{\rho_1(0)} \rangle_{\rho_2(0)}^2 - \langle \langle H_I^2 \rangle_{\rho_1(0)} \rangle_{\rho_2(0)} \\ & + \langle \langle H_I \rangle_{\rho_2(0)}^2 \rangle_{\rho_1(0)}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

O tempo característico de decoerência, segundo 3.2.19, é portanto dependente apenas do hamiltoniano de interação e dos estados iniciais dos dois subsistemas.

### 3.3 Exemplo: retornando ao modelo de Caldeira-Leggett

Vamos agora aplicar essa teoria para o exemplo feito no começo do capítulo. Consideremos, novamente, uma partícula (subsistema 2) submetida a um potencial, no nosso caso harmônico, acoplada linearmente com um banho térmico modelado como um conjunto de várias partículas submetidas, cada uma, a seu potencial harmônico (subsistema 1) a uma temperatura  $T$ . O hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \sum_k \left[ \frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2}m_k\omega_k^2x_k^2 \right] + x \sum_k c_k x_k, \quad (3.3.1)$$

onde  $p$  é o momento linear da partícula,  $m$  a sua massa,  $\omega_0$  a frequência natural de ressonância do potencial harmônico e  $x$  o deslocamento da partícula a partir da fonte do potencial;  $p_k$ ,  $m_k$ ,  $\omega_k$  e  $x_k$  os respectivos dos modos do banho térmico e  $c_k$  as constantes de acoplamento. Vamos considerar como estado inicial

$$\rho(0) = \left( \prod_k \frac{e^{-\beta H_k}}{Z_k} \right) \otimes |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (3.3.2)$$

sendo  $\beta$  o fator usual de Boltzman,  $H_k$  e  $Z_k$  o hamiltoniano e a função de partição para o  $k$ -ésimo oscilador do reservatório, respectivamente, e  $|\psi\rangle$  o estado inicial do sistema de interesse.

Calculando os termos em 3.2.19 obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2\tau^2} = -(\Delta x)^2 \sum_k \left( \frac{\hbar c_k^2}{2m_k \omega_k} \coth \left( \frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right), \quad (3.3.3)$$

sendo  $\Delta x$  a mesma separação do exemplo anterior. Para um regime de altas temperaturas, podemos afirmar que

$$\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) = \frac{2}{\beta\hbar\omega}, \quad \frac{\beta\hbar\omega_k}{2} \ll 1 \quad (3.3.4)$$

e portanto 3.3.3 fica

$$\frac{\hbar^2}{2\tau_2^2} = -\frac{(\Delta x)^2}{\beta} \sum_k \left( \frac{c_k^2}{m_k \omega_k^2} \right). \quad (3.3.5)$$

Tomando o limite para o contínuo

$$\sum_k \{...\} \rightarrow \int_0^\infty d\omega D(\omega) \{...\} \quad (3.3.6)$$

onde  $D(\omega)$  é a densidade de modos do reservatório e com as suposições usuais sobre dissipação ômica<sup>4</sup>

$$\frac{D(\omega)c_w^2}{m_w \omega^2} = \frac{\eta}{2}; \omega < 1/\tau_2, \quad (3.3.7)$$

$$\frac{D(\omega)c_w^2}{m_w \omega^2} = 0; \omega > 1/\tau_2, \quad (3.3.8)$$

sendo  $\eta$  o coeficiente de fricção associado, chegamos a

$$\frac{\hbar^2}{\tau_2^2} = -\frac{(\Delta x)^2 \eta}{\beta} \frac{1}{\tau_2}. \quad (3.3.9)$$

O coeficiente  $\eta$  pode ser escrito em função da taxa de decaimento  $\gamma$ , que para um reservatório ômico é constante<sup>3</sup>,  $\eta = 2m\gamma$ . Substituindo em 3.3.9, finalmente obtemos o resultado usual (3.1.5)

$$|\tau_2| = \tau_D = \gamma^{-1} \left( \frac{\hbar}{(\Delta x) \sqrt{2mk_b T}} \right)^2. \quad (3.3.10)$$

## 3.4 Exemplo: o estado de gato na representação de estados coerentes

Alternativamente, podemos resolver o problema de decoerência para o estado de gato usando a representação de estados coerentes. Para isso, vamos primeiro reescrever nosso hamiltoniano

de interação em termos dos operadores de aniquilação e criação, isto é,

$$H_I = \sum_k \hbar g_k (ab_k^\dagger + a^\dagger b_k). \quad (3.4.1)$$

Considerando o mesmo estado inicial de 3.3.2 e calculando os termos em 3.2.19 chegamos a

$$\frac{1}{2\tau_2^2} = \langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle \sum_k \sum_{k'} \left( g_k g_{k'} (1 + \bar{n}_k) \delta_{kk'} \right) + \langle \psi | a a^\dagger | \psi \rangle \sum_k \sum_{k'} \left( g_k g_{k'} \bar{n}_k \delta_{kk'} \right). \quad (3.4.2)$$

Passando 3.4.2 para o contínuo e simplificando ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau_2^2} &= \langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle \int d\omega D^2(\omega) g^2(\omega) (1 + \bar{n}(\omega)) \\ &+ \langle \psi | a a^\dagger | \psi \rangle \int d\omega D^2(\omega) g^2(\omega) \bar{n}(\omega). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Fazendo as aproximações de que as distribuições  $\gamma(\omega)$  e  $\bar{n}(\omega)$  são constantes e de valores  $\gamma(\omega) = \gamma(\omega_0) = \gamma$  e  $\bar{n}(\omega) = \bar{n}(\omega_0) = \bar{n}$  até uma frequência suficientemente alta  $1/\tau_2$  e nulas a partir deste limiar, vem que

$$\frac{1}{\tau_2} = 2\gamma(\bar{n} + 1) \langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle + 2\gamma\bar{n} \langle \psi | a a^\dagger | \psi \rangle. \quad (3.4.4)$$

Agora nos basta calcular as médias dos operadores em 3.4.4, para isso devemos definir o estado inicial do sistema  $|\psi\rangle$  e portanto falar sobre a representação de estados coerentes. Um estado coerente  $|\alpha\rangle$  é definido como sendo o único autoestado do operador aniquilação  $a$  associado ao autovalor  $\alpha$ , isto é,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.4.5)$$

Como  $a$  não é hermitiano,  $\alpha$  em geral é um número complexo e é válido que  $\langle \alpha | a^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$ .

Além disso, podemos notar que os estados coerentes não são ortonormais entre si, de fato

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2 - 2\beta^* \alpha)} \neq \delta(\alpha - \beta). \quad (3.4.6)$$

Na representação de estados coerentes, o estado de gato pode ser escrito da forma

$$|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (3.4.7)$$

onde  $N$  é um fator de normalização e vale

$$N = \sqrt{\frac{1}{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})}}. \quad (3.4.8)$$

Notando que  $aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$  e calculando os termos de 3.4.4 chegamos a

$$\frac{1}{\tau_2} = 2\gamma(\bar{n} + 1)|\alpha|^2 \frac{(1 - e^{-2|\alpha|^2})}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})} + 2\gamma\bar{n} \left( |\alpha|^2 \frac{(1 - e^{-2|\alpha|^2})}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})} + 1 \right) \quad (3.4.9)$$

e no limite em que  $\alpha$  é suficientemente grande (separação grande) obtemos o resultado usual para o tempo de decoerência<sup>31</sup>

$$\tau_2 = \tau_D = \frac{\tau_R}{2(|\alpha|^2 + 2|\alpha|^2\bar{n} + \bar{n})}, \quad (3.4.10)$$

onde  $\tau_R = \gamma^{-1}$  é o tempo de relaxação. Note que não é trivial a estimativa do tempo de decoerência encontrado  $\tau_D$  quando consideramos um reservatório à temperaturas diferentes do zero absoluto. Para levarmos em conta os efeitos de difusão do estado quântico no cálculo do tempo de decoerência devemos partir, como desenvolvido nas referências<sup>31,32</sup> de uma expressão da forma

$$\frac{1}{\tau_D} = \frac{1}{\tau_{T=0K}} + \frac{1}{\tau_{T\neq 0K}}. \quad (3.4.11)$$

No entanto, a partir da técnica aqui considerada nenhuma construção do tipo se faz necessária.



# Capítulo 4

## Superradiância

O fenômeno de superradiância foi previsto teoricamente em 1954<sup>33</sup> e foi observado experimentalmente pela primeira vez em 1973.<sup>34</sup> Este fenômeno consiste essencialmente na emissão espontânea coletiva de um pulso eletromagnético que se origina de um sistema composto de partículas de dois níveis. O objetivo deste capítulo é analisar, com base em outros trabalhos,<sup>10,11</sup> a intensidade emitida pelo sistema descrito e caracterizar a ordem de tempo em que o mesmo ocorre.

### 4.1 A equação mestra para um sistema de partículas de spin 1/2

Consideremos agora um sistema composto de  $N$  partículas que não interagem entre si ou, porque sua densidade é muito baixa, interações diretas podem ser negligenciadas, mas que estão juntas o suficiente para que o banho térmico as enxergue da mesma maneira. Neste caso o hamiltoniano é dado por

$$H = \sum_{i=0}^N \hbar \frac{\omega_0}{2} \sigma_0(i) + \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \sum_{i=0}^N \hbar g_k (\sigma_-(i) b_k^\dagger + \sigma_+(i) b_k), \quad (4.1.1)$$

onde  $\sigma_0(i)$ ,  $\sigma_+(i)$  e  $\sigma_-(i)$  são os operadores de spin da a partícula  $i$  que tem  $\omega_0$  como frequência de transição entre seus dois estados. Vamos definir aqui os seguintes operadores

coletivos:

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \sigma_0(i), \quad S_{\pm} = \sum_{i=1}^N \sigma_{\pm}(i), \quad (4.1.2)$$

que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[S_0, S_{\pm}] = \pm 2S_{\pm}, \quad (4.1.3)$$

$$[S_+, S_-] = S_0. \quad (4.1.4)$$

Substituindo 4.1.2 em 4.1.1 vem que

$$H = \hbar \frac{\omega_0}{2} S_0 + \sum_k \hbar \omega_k b_k^{\dagger} b_k + \sum_k \hbar g_k (S_- b_k^{\dagger} + S_+ b_k). \quad (4.1.5)$$

O processo para obtermos a equação mestra a partir daqui é idêntico ao do oscilador harmônico, portanto nos basta fazer a substituição dos operadores  $a$  e  $a^{\dagger}$  por  $S_+$  e  $S_-$  em 2.3.23, isto é,

$$\frac{d\rho_N}{dt} = \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) (2S_- \rho_N S_+ - S_+ S_- \rho_N - \rho_N S_+ S_-) + \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2S_+ \rho_N S_- - S_- S_+ \rho_N - \rho_N S_- S_+), \quad (4.1.6)$$

onde  $\rho_N$  é o operador densidade coletivo que representa todas as partículas do nosso sistema. Com o uso do operador unitário definido em 2.2.2 podemos passar 4.1.6 para a representação de Schrödinger, segue

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_N}{dt} = & -i \frac{\omega_0}{2} [S_0, \rho_N] + \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) (2S_- \rho_N S_+ - S_+ S_- \rho_N - \rho_N S_+ S_-) + \\ & \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2S_+ \rho_N S_- - S_- S_+ \rho_N - \rho_N S_- S_+). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

## 4.2 A equação mestra para um subsistema de partículas

Nosso intuito agora é deduzir de 4.1.7 equações mestras para conjuntos de número menor de partículas ( $K$ ), um equivalente quântico da hierarquia de equações Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon<sup>35,36</sup> da teoria cinética clássica. Para reduzirmos nosso operador densidade de  $N$  partículas  $\rho_N$  a um operador densidade de  $K$  partículas ( $K < N$ ) devemos traçar sobre os



$(N - K)$  graus de liberdade restantes do sistema, isto é,

$$\rho_K = Tr_{K+1, \dots, N}(\rho_N) \quad (4.2.1)$$

e, analogamente, a equação de movimento de  $\rho_K$  é obtida traçando sobre os mesmos graus de liberdade a equação mestra (4.1.7), obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_K}{dt} = & -i\frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^K [\sigma_0(i), \rho_K] - (N - K) \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^K ([\sigma_+(i), Tr_{K+1}(\sigma_-(K+1)\rho_{K+1})] + \text{h.c.}) - \\ & \frac{\gamma}{2} \sum_{i, i'=1}^K ((\bar{n} + 1)[\sigma_+(i), \sigma_-(i')\rho_K] + \bar{n}[\sigma_-(i), \sigma_+(i')\rho_K] + \text{h.c.}), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

onde h.c. representa o hermitiano conjugado da correspondente parte restante nos parênteses. É importante notar que a equação mestra para o operador densidade reduzido para  $K$  partículas depende do operador densidade de  $K + 1$  partículas e assim em diante até  $K = N$  o que caracteriza uma hierarquia de equações, portanto para que possamos simplificar o problema devemos fazer algum tipo de aproximação que quebre essa hierarquia.

### 4.3 A aproximação de campo médio

Nosso intuito é resolver a dinâmica de uma partícula representativa do sistema, para isso devemos descorrelacionar a equação mestra para uma partícula ( $K = 1$ ) do operador densidade reduzido de duas partículas  $\rho_2$ . Um argumento físico plausível para um sistema diluído de partículas é de que correlações de altas ordens entre as partículas podem ser desprezadas. Isto é atingido quando escrevemos

$$\rho_2(1, 2) = \rho_1(2) \otimes \rho_1(2), \quad (4.3.1)$$

onde os índices 1 e 2 estão presentes apenas para diferenciar as duas partículas, agora uma partícula genérica é assumida estar em um campo médio produzido por todas as outras partículas. Dessa aproximação conhecida como de campo médio ou de Hartree, usada em física

atômica e de matéria condensada,<sup>37–39</sup> decorre que a dinâmica do sistema pode ser fatorizada e a partir de uma partícula representativa e da sua evolução podemos dizer como o sistema se comporta. Substituindo, portanto, 4.3.1 em 4.2.2 chegamos à equação mestra para nossa partícula modelo

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -i[H_{ef}, \rho_1] - \frac{\gamma}{2}((\bar{n} + 1)[\sigma_+, \sigma_- \rho_1] + \bar{n}[\sigma_-, \sigma_+ \rho_1] + \text{h.c.}), \quad (4.3.2)$$

onde o hamiltoniano efetivo para uma partícula é identificado como

$$H_{ef} = \hbar \frac{\omega_0}{2} \sigma_0 + i\hbar \frac{(N-1)\gamma}{2} [\langle \sigma_+ \rangle \sigma_- - \langle \sigma_- \rangle \sigma_+]. \quad (4.3.3)$$

Encontramos, no segundo termo do hamiltoniano efetivo, a forma da interação da partícula representativa com o campo médio originado das  $(N-1)$  outras partículas. Nesta representação a estrutura de Lindblad permanece a mesma (segundo termo de 4.3.2), no entanto, o hamiltoniano absorve termos não lineares.

## 4.4 O pulso superradiante

Nossa intenção agora é analisar a energia média das partículas  $(N\hbar\omega_0\langle\sigma_0\rangle/2)$  em função do tempo para entender como o sistema evolui em um primeiro momento. Visto que procuramos um fenômeno de tempo curto, muito menor que o tempo de relaxação do sistema  $(\gamma^{-1})$ , podemos considerar a evolução devido ao hamiltoniano efetivo (termo de Von Neuman) apenas. Neste caso, podemos notar que

$$\frac{d\langle\sigma_0\rangle}{dt} = \frac{d(\text{Tr}(\sigma_0\rho_1))}{dt} = \text{Tr}\left(\sigma_0 \frac{d\rho_1}{dt}\right). \quad (4.4.1)$$

Substituindo 4.3.2 em 4.4.1 chegamos a

$$\frac{d\langle\sigma_0\rangle}{dt} = -2(N-1)\gamma\langle\sigma_+\rangle\langle\sigma_-\rangle, \quad (4.4.2)$$

equação esta que pode ser resolvida uma vez que reconhecemos a quantidade

$$J^2 = 4\langle\sigma_+\rangle\langle\sigma_-\rangle + \langle\sigma_0\rangle^2 \quad (4.4.3)$$

como uma constante de movimento. A equação 4.4.2 se torna separável e diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\langle\sigma_0\rangle}{dt} = -(N-1)\frac{\gamma}{2}(J^2 - \langle\sigma_0\rangle^2), \quad (4.4.4)$$

cuja solução é

$$\langle\sigma_0(t)\rangle = -J \tanh\left((N-1)\frac{\gamma}{2}Jt - \tanh^{-1}\left(\frac{\langle\sigma_0(0)\rangle}{J}\right)\right). \quad (4.4.5)$$

Para simplificarmos a notação e a análise vamos considerar um estado inicial geral puro do tipo

$$\rho_1(0) = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (4.4.6)$$

com

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\downarrow\rangle, \quad (4.4.7)$$

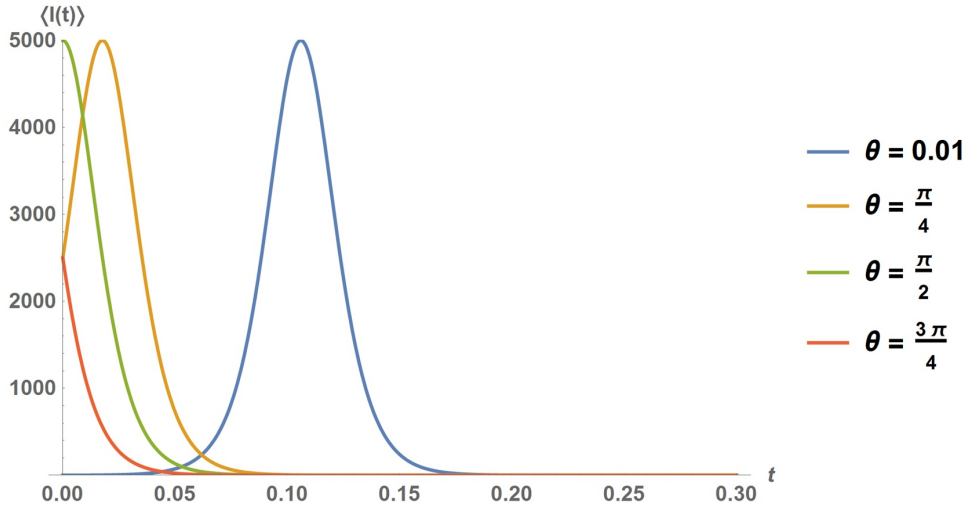
onde  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  são os auto-estados do operador  $\sigma_0$  com respectivos auto-valores 1 e  $-1$ . É importante notar que o estado inicial da partícula modelo serve como uma amostra representativa do estado inicial de todo o nosso sistema, logo, para o operador densidade  $\rho_1(0)$  descrito temos o equivalente de  $N \cos^2(\theta/2)$  partículas com estado inicial excitado e  $N \sin^2(\theta/2)$  partículas com estado inicial fundamental. Com isso  $J = 1$  e  $A = \tanh^{-1}(\cos(\theta))$ , logo 4.4.5 fica

$$\langle\sigma_0(t)\rangle = -\tanh\left((N-1)\frac{\gamma}{2}t - \tanh^{-1}(\cos(\theta))\right). \quad (4.4.8)$$

A partir disso podemos derivar a equação para a intensidade média emitida por todo o sistema pela relação

$$\langle I(t) \rangle = -\hbar N \frac{\omega_0}{2} \frac{d\langle\sigma_0(t)\rangle}{dt}, \quad (4.4.9)$$

visto que segundo as nossas aproximações todas as partículas enxergam o mesmo campo e se comportam da mesma maneira. Fazendo a aproximação  $(N-1) \rightarrow N$  e explicitando 4.4.9



**Figura 4.1-** Cuvas de intensidade para diversos estados iniciais do sistema,  $\gamma = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $N = 100$ .  
Fonte: Elaborada pelo autor

ficamos com

$$\langle I(t) \rangle = \hbar \left( \frac{N}{2} \right)^2 \gamma \omega_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t - t_0}{\tau_c} \right), \quad (4.4.10)$$

onde

$$\tau_c = \frac{2}{\gamma N}, \quad t_0 = \frac{2}{\gamma N} \tanh^{-1} (\cos(\theta)). \quad (4.4.11)$$

Isso caracteriza o efeito como de pequena duração comparado ao tempo de relaxação e ressalta as diferenças entre o pulso superradiante e uma emissão espontânea incoerente de várias partículas, isto é, segundo 4.4.10 a intensidade do pulso é proporcional a  $N^2$  e não a  $N$  como é esperado de um decaimento espontâneo. O motivo disso é que as partículas emitem coerentemente devido as correlações entre seus momentos de dipolo, que só se desenvolvem se a duração do processo de emissão,  $\tau_c$ , é muito menor que o tempo de decaimento espontâneo das partículas e do tempo de relaxação dos próprios momentos de dipolo. Na Fig.4.1 estão representados pulsos de sistemas idênticos a não ser por seus estados iniciais. Podemos concluir que o pulso superradiante é um processo de emissão espontânea transiente, no qual a ordenação dos dipolos evolui de uma total desordem em  $t = 0$  (presente nas curvas para  $\theta = 0.01$  e  $\theta = \pi/4$ ), passa por máxima ordem a um tempo característico  $t_0$  (nas curvas já citadas e estado inicial para a curva  $\theta = \pi/2$ ), que é um tempo de atraso, e depois vai para um estado desordenado de equilíbrio (presente em todas as curvas, para  $\theta = 3\pi/4$  é a única etapa presente).

# Capítulo 5

## Método alternativo para cálculo de fenômenos que ocorrem a tempos curtos

Neste capítulo será desenvolvido um método alternativo para o cálculo de fenômenos que ocorrem a tempos curtos baseado em uma expansão perturbativa para a grandeza física a ser calculada e para o operador densidade.

O método essencialmente se consiste em, partindo de uma equação mestra dada para o sistema em análise, substituir todas as dependências do operador densidade  $\rho$  por sua expansão temporal em torno de  $t = 0$  e assim encontrar equações para os coeficientes da expansão de  $\rho$ . Com isso podemos calcular os coeficientes da expansão da média de um operador arbitrário  $\mathcal{O}$  que se dá como  $\text{Tr}\{\rho\mathcal{O}\}$ . Seu desenvolvimento ficará claro nos seguintes exemplos.

### 5.1 Perda de coerência

Partiremos da equação mestra, na representação de Schrödinger, para o operador densidade de um oscilador harmônico (2.3.24):

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho_S] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2a\rho_S a^\dagger - a^\dagger a\rho_S - \rho_S a^\dagger a) + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2a^\dagger\rho_S a - a a^\dagger\rho_S - \rho_S a a^\dagger). \quad (5.1.1)$$

Por simplicidade faremos a mudança na notação  $\rho_S \rightarrow \rho$ . Expandindo o operador densidade no tempo em torno de  $t = 0$ , isto é,

$$\rho(t) = \rho(0) + \dot{\rho}(0)t + \frac{1}{2!}\ddot{\rho}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{\rho}(0)t^3 + \dots \quad (5.1.2)$$

e substituindo em 5.1.1 ficamos com

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(0) + \ddot{\rho}(0)t + \frac{1}{2!}\dddot{\rho}(0)t^2 + \dots = & -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho(0) + \dot{\rho}(0)t + \frac{1}{2!}\ddot{\rho}(0)t^2 + \dots] + \\ & \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)[2a\rho(0)a^\dagger + 2a\dot{\rho}(0)a^\dagger t + 2a\frac{1}{2!}\ddot{\rho}(0)a^\dagger t^2 + \dots - \\ & a^\dagger a\rho(0) - a^\dagger a\dot{\rho}(0)t - a^\dagger a\frac{1}{2!}\ddot{\rho}(0)t^2 + \dots - \\ & \rho(0)a^\dagger a - \dot{\rho}(0)a^\dagger a t - \frac{1}{2!}\ddot{\rho}(0)a^\dagger a t^2 + \dots] + \\ & \frac{\gamma}{2}\bar{n}[\dots]. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Igualando os termos de mesma ordem em  $t$  encontramos

$$\begin{aligned} \rho^{(l+1)}(0) = & -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho^{(l)}(0)] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2a\rho^{(l)}(0)a^\dagger - a^\dagger a\rho^{(l)}(0) - \rho^{(l)}(0)a^\dagger a) + \\ & \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2a^\dagger \rho^{(l)}(0)a - aa^\dagger \rho^{(l)}(0) - \rho^{(l)}(0)aa^\dagger), \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

onde  $\rho^{(l)}(0)$  representa a  $l$ -ésima derivada temporal de  $\rho$  tomada em  $t=0$ . Estes termos são suficientes para calcularmos o defeito de idempotência 3.2.2, que se só levarmos em conta a dependência em primeira ordem em  $t$  pode ser escrito como

$$\delta(t) = s(0) - \frac{1}{\tau_1}t, \quad (5.1.5)$$

onde  $s(0) = 0$  para um estado inicial puro e

$$\frac{1}{\tau_1} = 2\langle \dot{\rho}(0) \rangle_{\rho(0)} = 2\text{Tr}\{\rho(0)\dot{\rho}(0)\}. \quad (5.1.6)$$

Desenvolvendo 5.1.6 com auxílio de 5.1.4 vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1} = & -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}\{\rho(0)H\rho(0) - \rho^2(0)H\} + \gamma(\bar{n} + 1) \text{Tr}\{2\rho(0)a\rho(0)a^\dagger - \rho(0)a^\dagger a\rho(0) - \\ & \rho^2(0)a^\dagger a\} + \gamma\bar{n} \text{Tr}\{2\rho(0)a^\dagger \rho(0)a - \rho(0)aa^\dagger \rho(0) - \rho^2(0)aa^\dagger\}. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Notando que para um estado inicial puro,  $\rho(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$ , temos que  $\rho^2(0) = \rho(0)$  e usando da propriedade cíclica do traço podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1} = & 2\gamma(\bar{n} + 1) [\langle\psi|a|\psi\rangle\langle\psi|a^\dagger|\psi\rangle - \langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle] + \\ & 2\gamma\bar{n} [\langle\psi|a^\dagger|\psi\rangle\langle\psi|a|\psi\rangle - \langle\psi|aa^\dagger|\psi\rangle]. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Para um estado de gato  $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$  as médias de  $a$  e  $a^\dagger$  são nulas restando somente

$$\frac{1}{\tau_1} = -2\gamma(\bar{n} + 1) \langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle - 2\gamma\bar{n} \langle\psi|aa^\dagger|\psi\rangle, \quad (5.1.9)$$

que em módulo é equivalente a equação anteriormente encontrada 3.4.4, logo encontramos o mesmo tempo característico de decoerência para  $\alpha$  suficientemente grande, isto é

$$|\tau_1| = \tau_D = \frac{\tau_R}{2(|\alpha|^2 + 2|\alpha|^2\bar{n} + \bar{n})}. \quad (5.1.10)$$

Vale lembrar que analogamente à técnica de expansão perturbativa apresentada no Capítulo 3, aqui não precisamos de considerações como a 3.4.11 para o cálculo do tempo de decoerência para temperaturas diferentes do zero absoluto.

## 5.2 O pulso superradiante

Podemos, analogamente, encontrar o tempo característico para o pulso superradiante. Partindo da equação mestra 4.3.2 para a partícula representativa, isto é

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_{ef}, \rho] - \frac{\gamma}{2} ((\bar{n} + 1)[\sigma_+, \sigma_- \rho] + \bar{n}[\sigma_-, \sigma_+ \rho] + \text{h.c.}), \quad (5.2.1)$$

onde a mudança de notação  $\rho_1 \rightarrow \rho$  foi feita por simplicidade. Iremos considerar, assim como feito no Capítulo 4, apenas a evolução proveniente do hamiltoniano efetivo  $H_{ef}$ , pois procuramos uma expansão para tempos curtos. Devido a não linearidade da equação as equações das derivadas de  $\rho$  tomadas em  $t = 0$  dependem de todas as suas ordens anteriores, isto é,  $\rho^{(l)}(0)$  é função de  $\rho^{(k)}(0)$  para todo  $0 \leq k < l$ . As três primeiras derivadas ficam:

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(0) = & -i\frac{\omega}{2}[\sigma_0, \rho(0)] + \\ & (N-1)\frac{\gamma}{2}\left(\text{Tr}\{\sigma_+\rho(0)\}[\sigma_-, \rho(0)] - \text{Tr}\{\sigma_-\rho(0)\}[\sigma_+, \rho(0)]\right), \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}(0) = & -i\frac{\omega}{2}[\sigma_0, \rho^{(1)}(0)] + \\ & (N-1)\frac{\gamma}{2}\left(\text{Tr}\{\sigma_+\rho(0)\}[\sigma_-, \rho^{(1)}(0)] - \text{Tr}\{\sigma_-\rho(0)\}[\sigma_+, \rho^{(1)}(0)] + \right. \\ & \left. \text{Tr}\{\sigma_+\rho^{(1)}(0)\}[\sigma_-, \rho(0)] - \text{Tr}\{\sigma_-\rho^{(1)}(0)\}[\sigma_+, \rho(0)]\right), \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(3)}(0) = & -i\frac{\omega}{2}[\sigma_0, \rho^{(2)}(0)] + \\ & (N-1)\frac{\gamma}{2}\left(\text{Tr}\{\sigma_+\rho(0)\}[\sigma_-, \rho^{(2)}(0)] - \text{Tr}\{\sigma_-\rho(0)\}[\sigma_+, \rho^{(2)}(0)] + \right. \\ & 2\text{Tr}\{\sigma_+\rho^{(1)}(0)\}[\sigma_-, \rho^{(1)}(0)] - 2\text{Tr}\{\sigma_-\rho^{(1)}(0)\}[\sigma_+, \rho^{(1)}(0)] + \\ & \left. \text{Tr}\{\sigma_+\rho^{(2)}(0)\}[\sigma_-, \rho(0)] - \text{Tr}\{\sigma_-\rho^{(2)}(0)\}[\sigma_+, \rho(0)]\right). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

As equações ficam extensas, mas com auxílio de um algoritmo feito no "Mathematica"<sup>40</sup> (sistema algébrico computacional) disponível no "APÊNDICE A", facilmente calculamos esses termos. Em seguida, podemos quantificar a intensidade do pulso para tempos curtos dada pela equação

$$\langle I(t) \rangle = -N\hbar\frac{\omega_0}{2}\text{Tr}\{\sigma_0\rho(t)\} = -N\hbar\frac{\omega_0}{2}\text{Tr}\left\{\sigma_0\left(\rho(0) + \dot{\rho}(0)t + \frac{1}{2!}\ddot{\rho}(0)t^2 + \dots\right)\right\}, \quad (5.2.5)$$

logo, substituindo os termos e fazendo a aproximação  $N-1 \rightarrow N$  chegamos a

$$\langle I(t) \rangle = \hbar\omega_0\gamma\left(\frac{N}{2}\right)^2 f(t) \quad (5.2.6)$$



onde

$$f(t) = \sin^2(\theta) \left( 1 + \gamma N \cos(\theta)t + \frac{(\gamma N)^2}{8} (1 + 3 \cos(2\theta)) t^2 \right) + \mathcal{O}(t^3). \quad (5.2.7)$$

De 5.2.6 podemos identificar que o tempo característico de duração do pulso  $\tau_c$  é da ordem de  $\gamma^{-1}N^{-1} = \tau_R/N$  se constatarmos que a intensidade total emitida deve ser proporcional a energia total máxima e inversamente proporcional a  $\tau_c$ , isto é  $I \propto \hbar N \omega_0 / \tau_c$ . Este resultado já caracteriza o pulso como superradiante que é identificado por ocorrer muito mais rapidamente do que a emissão espontânea. Ainda se expandimos 4.4.10 em torno de  $t = 0$  e considerarmos os três primeiros termos da expansão encontramos novamente 5.2.6 o que valida o resultado.

### 5.3 O pulso superradiante sem a aproximação de campo médio

Podemos ir além e quantificar a intensidade do pulso superradiante diretamente da equação mestra com os operadores coletivos devido a simplicidade da técnica. Primeiramente vamos representar o estado inicial coletivo como

$$|\psi_N\rangle = |j, m\rangle, \quad (5.3.1)$$

onde  $j = N/2$  é o índice que representa o momento angular total do sistema e  $|j, m\rangle$  é auto-estado do operador  $S_0$  com respectivo auto-valor  $m$  ( $-j \leq m \leq j$ ) que é o índice que representa o momento angular associado a direção do campo (responsável pela energia do sistema), ou seja

$$S_0|j, m\rangle = m|j, m\rangle. \quad (5.3.2)$$

Além disso, as equações para os operadores  $S_-$  e  $S_+$ , por construção, ficam

$$S_+|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j, m+1\rangle, \quad (5.3.3)$$

$$S_-|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle. \quad (5.3.4)$$

Novamente, fazendo o procedimento de expansão da equação mestra 4.1.7 em torno de  $t = 0$ , podemos escrever as equações para as derivadas de  $\rho_N$  tomadas em zero

$$\begin{aligned} \rho_N^{(l)}(0) = & -i\frac{\omega_0}{2}[S_0, \rho_N^{(l-1)}(0)] + \\ & \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2S_- \rho_N^{(l-1)}(0)S_+ - S_+ S_- \rho_N^{(l-1)}(0) - \rho_N^{(l-1)}(0)S_+ S_-) + \\ & \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2S_+ \rho_N^{(l-1)}(0)S_- - S_- S_+ \rho_N^{(l-1)}(0) - \rho_N^{(l-1)}(0)S_- S_+), \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

onde se substituirmos  $\rho_N(0) = |\psi_N\rangle\langle\psi_N|$  encontramos equações em termos de  $j$ ,  $m$  e dos estados  $|j, k\rangle$ ,  $-N/2 \leq k \leq N/2$ . Em posse das derivadas tomadas em zero podemos calcular a quantidade que nos interessa, no caso, a intensidade do pulso dada por

$$\begin{aligned} \langle I(t) \rangle = & -\hbar\omega_0 \frac{d(\text{Tr}\{S_0(\rho(0) + \dot{\rho}(0)t + \frac{1}{2!}\ddot{\rho}(0)t^2 + \dots)\})}{dt} \\ = & -\hbar\omega_0 \text{Tr}\left\{S_0\dot{\rho}(0) + S_0\ddot{\rho}(0)t + \frac{1}{2}S_0\ddot{\rho}(0)t^2\right\} + \mathcal{O}(t^3). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Com o auxílio de outro algoritmo, presente no "APÊNDICE B", calculamos (com a aproximação  $N - 1 \rightarrow N$ ) os termos de  $\langle I(t) \rangle$  para  $j = N/2$  e  $m = N \cos(\theta)/2$ :

$$\langle I(t) \rangle = I_0 + I_1 t + I_2 t^2 + \mathcal{O}(t^3), \quad (5.3.7)$$

sendo

$$I_0 = \frac{1}{4}\gamma\omega\hbar N (N \sin^2(\theta) + 2 \cos(\theta) + 4\bar{n} \cos(\theta) + 2), \quad (5.3.8)$$

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{4}\gamma^2\omega\hbar N \left\{ N^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + 2N (\cos(\theta) + (2\bar{n} + 1) \cos(2\theta)) - \right. \\ & \left. 4((2\bar{n}^2 + 2\bar{n} + 1) \cos(\theta) + 2\bar{n} + 1) \right\} \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

e

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{32}\gamma^3\omega\hbar N \left\{ N^3 \sin^2(\theta) (3 \cos(2\theta) + 1) + \right. \\ & 2N^2 (4 \cos(2\theta) - (2\bar{n} + 1) \cos(\theta) + 5(2\bar{n} + 1) \cos(3\theta)) - \\ & 4N ((26\bar{n}^2 + 26\bar{n} + 11) \cos(2\theta) + 6\bar{n}^2 + 16(2\bar{n} + 1) \cos(\theta) + 6\bar{n} + 5) + \\ & \left. 32(5\bar{n}^2 + (2\bar{n}^3 + 3\bar{n}^2 + 5\bar{n} + 2) \cos(\theta) + 5\bar{n} + 2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Se consideramos de  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$  apenas os termos de maior ordem em  $N$  para cada um recuperamos o resultado anterior 5.2.6 o que não só valida o resultado como é evidência de que a aproximação de campo médio e a consideração da evolução do sistema apenas segundo  $H_{ef}$  são consistentes. Além disso, por meio de 5.3.7, recuperamos a dependência em  $\bar{n}$  que pode ser de interesse para sistemas de altas temperaturas. Essa dependência desaparece quando resolvemos o problema via aproximação de campo médio devido a estar sempre em termos de ordem menor em  $N$ .



# Capítulo 6

## Conclusões e perspectivas

Vimos neste trabalho que mesmo em problemas não tão complexos precisamos fazer considerações físicas, além da modelagem do banho térmico, para obtermos resultados, como é o caso do cálculo do tempo de decoerência para o estado de gato na representação de estados coerentes em que 3.4.11 deve ser levada em conta, ou mesmo o caso de superradiância em que a aproximação de campo médio para análise da dinâmica de uma partícula representativa se faz necessária.

A técnica aqui apresentada, por sua simplicidade, se mostra capaz de limitar as considerações físicas àquelas feitas para encontrar a equação mestra do sistema que serve como ponto de partida para expandimos temporalmente as médias dos operadores desejados.

Quanto à técnica de expansão perturbativa para perda de coerência, apresentada no Capítulo 3, devemos ressaltar que esta é útil para o cálculo de  $\text{Tr}\{\rho^2\}$  que é uma medida de pureza, usada para o cálculo de decoerência. O que o método desenvolvido neste trabalho se difere é que embora necessite de uma equação mestra, o que pode ser visto como um ponto negativo comparativamente à outra técnica, ele é mais abrangente. Em outras palavras, a técnica aqui apresentada mostra-se de grande flexibilidade, pois a partir dela podemos calcular a média de qualquer operador  $\mathbb{O}$  a tempos curtos através da expansão de  $\text{Tr}\{\rho\mathbb{O}\}$ .

As perspectivas desse trabalho são estudar mais fenômenos que ocorrem a tempos curtos que são de difícil manipulação algébrica, trazendo resultados aproximados para dadas escalas de tempo que podem ser suficientes para observação de comportamentos físicos a uma primeira análise.

# Referências

- 1 BREUER, H. P.; PETRUCCIONE, F. *The theory of open quantum systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- 2 GELL-MANN, M.; HARTLE, J. B. Classical equations for quantum systems. *Physical Review D*, v. 47, n. 8, p. 3345–3382, 1993.
- 3 CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J. Quantum tunnelling in a dissipative system. *Annals of Physics*, v. 149, n. 2, p. 374–456, 1983.
- 4 GARDINER, C. W. *Quantum noise*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- 5 ELZE, H.-T. Quantum decoherence, entropy and thermalization in strong interactions at high energy. (i). noisy and dissipative vacuum effects in toy models. *Nuclear Physics B*, v. 436, n. 1-2, p. 213–264, 1995.
- 6 WALLS, D.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- 7 ZUREK, W. H. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Physics Today*, v. 44, n. 10, p. 36–44, 1991.
- 8 SCHLOSSHAUER, M. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 76, p. 1267–1305, 2004. doi: 10.1103/RevModPhys.76.1267.
- 9 KIM, J. I. et al. Perturbative expansion for coherence loss. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 2, p. 207–210, 1996.
- 10 PRATAVIERA, G. A.; MIZRAHI, S. S. Many-particle sudarshan-lindblad equation: mean-field approximation, nonlinearity and dissipation in a spin system. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 36, n. 4, p. 1–11, 2014.
- 11 MEWES, M. A.; MIZRAHI, S. S. Pulsed superradiant emission from a magnetic dipole system. *International Journal of Modern Physics B*, v. 7, n. 12, p. 2353, 1993.

- 12 LOUISSEL, W. H. *Quantum optics*. New York: Academic Press, 1970.
- 13 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.
- 14 ORSZAG, M. *Quantum optics*. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- 15 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. San Francisco: Addison Wesley, 2010.
- 16 COHEN-TANNOUJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum mechanics*. New York: Wiley, 1977.
- 17 MERZBACHER, E. *Quantum mechanics*. New York: John Wiley Sons, 1998.
- 18 BALIAN, E. *From microphysics to macrophysics: methods and applications of statistical physics*. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- 19 BLUM, K. *Density matrix theory and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- 20 OLIVEIRA, I. et al. *Nmr quantum information processing*. Amsterdam: Elsevier Science Technology Books, 2007.
- 21 REICHL, L. E. *A modern course of statistical physics*. New York: Wiley, 2009.
- 22 CARMICHAEL, H. *Statistical methods in quantum optics 1: master equations and fokker-planck equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- 23 BLAIR, D. G. *The detection of gravitational waves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- 24 ZAGURY, N.; DE TOLEDO PIZA, A. F. R. Large correlation effects of small perturbations by preselection and postselection of states. *Physical Review A*, v. 50, n. 4, p. 2908–2914, 1994.
- 25 FEDICHKIN, L.; FEDOROV, A.; PRIVMAN, V. Measures of decoherence. *Proceedings of SPIE*, v. 5105, p. 243–254, 2003. doi: 10.1117/12.486792.
- 26 VON NEUMANN, J. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1983.
- 27 ZUREK, W. H.; HABIB, S.; PAZ, J. P. Coherent states via decoherence. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 9, p. 1187–1190, 1993.

- 28 RETAMAL, J. C.; ZAGURY, N. Stability of quantum states under dissipation. *Physical Review A*, v. 63, n. 3, p. 032106, 2001.
- 29 LICHTNER, P. C.; GRIFFIN, J. J. Evolution of a quantum system: lifetime of a determinant. *Physical Review Letters*, v. 37, n. 23, p. 1521–1524, 1976.
- 30 PRIVMAN, V. Initial decoherence of open quantum systems. *Journal of Statistical Physics*, v. 110, n. 3-6, p. 957–970, 2003.
- 31 LORENZEN, F. et al. Quantum system under the actions of two counteracting baths: a model for the attenuation-amplification interplay. *Physical Review A*, v. 80, n. 6, p. 062103, 2009.
- 32 PONTE, M. A.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Temperature effects on a network of dissipative quantum harmonic oscillators: collective damping and dispersion processes. *Journal of Physics A: mathematical and theoretical*, v. 42, n. 36, 2009. doi: 10.1088/1751-8113/42/36/365304.
- 33 DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical Review*, v. 93, p. 99–110, 1954. doi: 10.1103/PhysRev.93.99.
- 34 SKRIBANOWITZ, N. et al. Observation of dicke superradiance in optically pumped hf gas. *Physical Review Letters*, v. 30, n. 8, p. 309–312, 1973.
- 35 LIBOFF, R. L. *Kinetic theory*. New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- 36 MCQUARRIE, D. A. *Statistical mechanics*. New York: Harper, 1976.
- 37 GASIOROWICS, S. *Quantum physics*. New York: Wiley, 2003.
- 38 EISBERG, R.; RESNICK, R. *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. New York: Wiley, 1985.
- 39 ANTUNES, A. et al. Método de hartree-fock: dois exemplos analiticamente solúveis. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 21, n. 2, p. 221–232, 1999.
- 40 Wolfram Research. *Mathematica*. Champaign: Wolfram Research, Inc., 2016.



# APÊNDICE A - ALGORITMO PARA CÁLCULO DA INTENSIDADE VIA APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

Segue o código comentado construído para cálculo dos primeiros termos da expansão temporal da intensidade do pulso superradiante via campo médio.

$\theta \in \text{Reals}; \phi \in \text{Reals}; \omega \in \text{Reals}; n_a \in \text{Reals}; \gamma \in \text{Reals};$

(\* $\theta$  e  $\phi$  são correspondentes ao estado inicial

$|\psi\rangle = \text{Cos}(\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\text{Sin}(\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle$ .\*)

(\* $\omega = \omega_0$ , frequência característica da partícula representativa.\*)

(\* $n_a = N$ .Número de átomos.\*)

(\* $\gamma$  é a taxa de relaxação.\*)

(\*Definição do operador densidade inicial  $\rho_0 = \rho(t=0)$ \*)

$\rho_0 = \begin{matrix} \text{Cos}[\theta/2]^2 & E^{(-i\phi)}\text{Sin}[\theta/2]\text{Cos}[\theta/2] \\ E^{(i\phi)}\text{Sin}[\theta/2]\text{Cos}[\theta/2] & \text{Sin}[\theta/2]^2 \end{matrix}; \text{MatrixForm}[\rho_0]$

$\left( \begin{matrix} \text{Cos}[\frac{\theta}{2}]^2 & e^{-i\phi}\text{Cos}[\frac{\theta}{2}]\text{Sin}[\frac{\theta}{2}] \\ e^{i\phi}\text{Cos}[\frac{\theta}{2}]\text{Sin}[\frac{\theta}{2}] & \text{Sin}[\frac{\theta}{2}]^2 \end{matrix} \right)$

(\*Definição de  $\sigma_0$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_x$ .\*)

$\sigma_0 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}; \sigma_y = \begin{matrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{matrix}; \sigma_x = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix};$

(\*Definição de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ .\*)

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}I\sigma_y; \sigma_- = \frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}I\sigma_y;$$

(\*Cálculo\_da\_primeira\_derivada\_do\_operador\_densidade\_tomada\_em\_t = 0,

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{dt}(t = 0)*)$$

$$c_0 = \sigma_0 \cdot \rho_0 - \rho_0 \cdot \sigma_0; d_0 = \sigma_- \cdot \rho_0 - \rho_0 \cdot \sigma_-; a_0 = \sigma_+ \cdot \rho_0 - \rho_0 \cdot \sigma_+; (*Comutadores_necessários*)$$

$$\rho_1 = \frac{-I\omega}{2}c_0 + (n_a - 1) \frac{\gamma}{2} (\text{Tr}[\sigma_+ \cdot \rho_0] d_0 - \text{Tr}[\sigma_- \cdot \rho_0] a_0); (*Cálculo_de_\rho_1*)$$

$$\rho_1 = \text{Simplify}[\rho_1]; (*Simplificação*)$$

(\*Cálculo\_da\_segunda\_derivada\_do\_operador\_densidade\_tomada\_em\_t = 0,

$$\rho_2 = \frac{d^2\rho}{dt^2}(t = 0)*)$$

$$c_1 = \sigma_0 \cdot \rho_1 - \rho_1 \cdot \sigma_0; d_1 = \sigma_- \cdot \rho_1 - \rho_1 \cdot \sigma_-; a_1 = \sigma_+ \cdot \rho_1 - \rho_1 \cdot \sigma_+; (*Comutadores_necessários*)$$

$$\rho_2 = \frac{-I\omega}{2}c_1 + (n_a - 1) \frac{\gamma}{2} (\text{Tr}[\sigma_+ \cdot \rho_0] d_1 - \text{Tr}[\sigma_- \cdot \rho_0] a_1$$

$$+ \text{Tr}[\sigma_+ \cdot \rho_1] d_0 - \text{Tr}[\sigma_- \cdot \rho_1] a_0); (*Cálculo_de_\rho_2*)$$

$$\rho_2 = \text{Simplify}[\rho_2]; (*Simplificação*)$$

(\*Cálculo\_da\_terceira\_derivada\_do\_operador\_densidade\_tomada\_em\_t = 0,

$$\rho_3 = \frac{d^3\rho}{dt^3}(t = 0)*)$$

$$c_2 = \sigma_0 \cdot \rho_2 - \rho_2 \cdot \sigma_0; d_2 = \sigma_- \cdot \rho_2 - \rho_2 \cdot \sigma_-; a_2 = \sigma_+ \cdot \rho_2 - \rho_2 \cdot \sigma_+; (*Comutadores_necessários*)$$

$$\rho_3 = \frac{-I\omega}{2}c_2 + (n_a - 1) \frac{\gamma}{2} (\text{Tr}[\sigma_+ \cdot \rho_0] d_2 - \text{Tr}[\sigma_- \cdot \rho_0] a_2 + 2\text{Tr}[\sigma_+ \cdot \rho_1] d_1$$

$$- 2\text{Tr}[\sigma_- \cdot \rho_1] a_1 + \text{Tr}[\sigma_+ \cdot \rho_2] d_0 - \text{Tr}[\sigma_- \cdot \rho_2] a_0); (*Cálculo_de_\rho_3*)$$

$$\rho_3 = \text{Simplify}[\rho_3]; (*Simplificação*)$$

(\*Cálculo\_da\_intensidade\_do\_pulso\_ < I(t) > = -\hbar \cdot n\_a \cdot \frac{\omega}{2} \frac{d\langle \sigma\_0 \rangle}{dt} \*)

(\*Termo\_de\_ordem\_0\*)

$$i_0 = -\hbar n_a \frac{\omega}{2} \text{Simplify}[\text{Tr}[\sigma_0 \cdot \rho_1]]$$

$$\frac{1}{4} \gamma \omega \hbar \text{Sin}[\theta]^2 (-1 + n_a) n_a$$

(\*Termo\_de\_ordem\_1\*)

$$i_1 = -\hbar n_a \frac{\omega}{2} \text{FullSimplify}[\text{Tr}[\sigma_0 \cdot \rho_2]]$$

$$\frac{1}{4} \gamma^2 \omega \hbar \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta]^2 (-1 + n_a)^2 n_a$$

(\*Termo\_de\_ordem\_2\*)

$$i_2 = -\hbar n_a \frac{\omega}{2} \text{FullSimplify} \left[ \frac{\text{Tr}[\sigma_0 \cdot \rho_3]}{2} \right]$$

$$\frac{1}{32} \gamma^3 \omega \hbar (1 + 3\text{Cos}[2\theta]) \text{Sin}[\theta]^2 (-1 + n_a)^3 n_a$$

# APÊNDICE B - ALGORITMO PARA CÁLCULO DA INTENSIDADE VIA OPERADORES COLETIVOS

Segue o código comentado construído para cálculo dos primeiros termos da expansão temporal da intensidade do pulso superradiante diretamente da equação mestra com os operadores coletivos.

```
(*Definições_de_regras_de_associação_e_atuação_de_operadores
_nos_estados_do_tipo_|j, m > *)
SetAttributes[CenterDot, Flat];
ruletr =
{
(*Regra para o traço*)
Tr[Ket[a_, b_] · Bra[c_, d_]] :→
0/;UnsameQ[a, c]||UnsameQ[b, d],
Tr[Ket[j_, m_] · Bra[j_, m_]] :→ 1,
Tr[(n_Ket[a_, b_] · Bra[c_, d_])] :→ nTr[Ket[a, b] · Bra[c, d]]
};
applyoperators =
{
(*Propriedades_associativas*)
A_ · (n_Ket[a_, b_] · Bra[c_, d_]) :→ n(A · Ket[a, b] · Bra[c, d]),
```

$$(n\_Ket[a\_ , b\_ ] \cdot Bra[c\_ , d\_ ]) \cdot A\_ \rightarrow n(Ket[a, b] \cdot Bra[c, d] \cdot A),$$

(\*Propriedades\_ associativas\*)

$$A\_ \cdot (n\_Ket[j\_ , m\_ ]) \rightarrow n(A \cdot Ket[j, m]),$$

$$(n\_Bra[j\_ , m\_ ]) \cdot A\_ \rightarrow (Bra[j, m] \cdot A)n,$$

(\*Propriedades\_ associativas\*)

$$(n1\_Ket[a\_ , b\_ ]) \cdot (n2\_Bra[c\_ , d\_ ]) \rightarrow n1n2Ket[a, b] \cdot Bra[c, d],$$

$$(n1\_Ket[a\_ , b\_ ]) \cdot Bra[c\_ , d\_ ] \rightarrow n1Ket[a, b] \cdot Bra[c, d],$$

$$Ket[a\_ , b\_ ] \cdot (n2\_Bra[c\_ , d\_ ]) \rightarrow n2Ket[a, b] \cdot Bra[c, d],$$

(\*Ação\_ dos\_ operadores\*)

$$S_0 \cdot Ket[j\_ , m\_ ] \rightarrow mKet[j, m],$$

$$Bra[j\_ , m\_ ] \cdot S_0 \rightarrow mBra[j, m],$$

$$S_+ \cdot Ket[j\_ , m\_ ] \rightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}Ket[j, m+1],$$

$$Bra[j\_ , m\_ ] \cdot S_+ \rightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}Bra[j, m-1],$$

$$S_- \cdot Ket[j\_ , m\_ ] \rightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}Ket[j, m-1],$$

$$Bra[j\_ , m\_ ] \cdot S_- \rightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}Bra[j, m+1]$$

};

$j \in \text{Reals};$

$m \in \text{Reals};$

$n_a \in \text{Reals};$

$\gamma \in \text{Reals};$

$\omega \in \text{Reals};$

$n \in \text{Reals};$

$\theta \in \text{Reals};$

(\*j\_ e\_ m\_ são\_ correspondentes\_ ao\_ estado\_ inicial\_ |j, m > .\*)

(\* $\omega = \omega_0$ , frequência\_ característica\_ da\_ partícula\_ representativa.\*)

(\* $n_a = N$ .Número\_ de\_ átomos.\*)

(\* $\gamma$  é\_ a\_ taxa\_ de\_ relaxação.\*)

(\* $n = \bar{n}(\omega_0)$  é\_ o\_ número\_ médio\_ de\_ excitações\_ correspondente\_ a\_  $\omega_0$ .)

(\* $\theta$  é\_ correspondente\_ ao\_ estado\_ inicial\_ em\_ que\_  $m = \frac{n_a}{2} \text{Cos}[\theta]$ .)

(\*Definindo\_o\_estado\_inicial\_ρ<sub>0</sub> = ρ(0) = |ψ⟩⟨ψ|.\*)

Ket [ψ<sub>0</sub>] = Ket[j, m]; Bra [ψ<sub>0</sub>] = Bra[j, m];

ρ<sub>0</sub> = Ket [ψ<sub>0</sub>] · Bra [ψ<sub>0</sub>];

(\*Cálculo\_da\_primeira\_derivada\_do\_operador\_densidade\_tomada\_em\_t = 0,

ρ<sub>1</sub> =  $\frac{d\rho}{dt}(t = 0)$ \*)

ρ<sub>1</sub> =  $-(n + 1)\frac{\gamma}{2} (S_+ \cdot S_- \cdot \rho_0 - 2S_- \cdot \rho_0 \cdot S_+ + \rho_0 \cdot S_+ \cdot S_-) -$

$n\frac{\gamma}{2} (S_- \cdot S_+ \cdot \rho_0 - 2S_+ \cdot \rho_0 \cdot S_- + \rho_0 \cdot S_- \cdot S_+) // .applyoperators;$

(\*Cálculo\_da\_segunda\_derivada\_do\_operador\_densidade\_tomada\_em\_t = 0,

ρ<sub>2</sub> =  $\frac{d^2\rho}{dt^2}(t = 0)$ \*)

ρ<sub>2</sub> =  $-(n + 1)\frac{\gamma}{2} (\text{Distribute} [\text{CenterDot} [S_+ \cdot S_-, \text{Expand} [\rho_1]]])$

—

2Distribute[CenterDot[

Distribute [CenterDot [S<sub>-</sub>, Expand [ρ<sub>1</sub>]]], S<sub>+</sub>]

+Distribute [CenterDot [Expand [ρ<sub>1</sub>], S<sub>+</sub> · S<sub>-</sub>]]) —

$n\frac{\gamma}{2} (\text{Distribute} [\text{CenterDot} [S_- \cdot S_+, \text{Expand} [\rho_1]])$

—

2Distribute[CenterDot[

Distribute [CenterDot [S<sub>+</sub>, Expand [ρ<sub>1</sub>]]], S<sub>-</sub>]

+Distribute [CenterDot [Expand [ρ<sub>1</sub>], S<sub>-</sub> · S<sub>+</sub>]]) //.

applyoperators;

(\*Cálculo\_da\_terceira\_derivada\_do\_operador\_densidade\_tomada\_em\_t = 0,

ρ<sub>3</sub> =  $\frac{d^3\rho}{dt^3}(t = 0)$ \*)

ρ<sub>3</sub> =  $-(n + 1)\frac{\gamma}{2} (\text{Distribute} [\text{CenterDot} [S_+ \cdot S_-, \text{Expand} [\rho_2]])$

—

2Distribute[CenterDot[

Distribute [CenterDot [S<sub>-</sub>, Expand [ρ<sub>2</sub>]]], S<sub>+</sub>]

+Distribute [CenterDot [Expand [ρ<sub>2</sub>], S<sub>+</sub> · S<sub>-</sub>]]) —

$n\frac{\gamma}{2} (\text{Distribute} [\text{CenterDot} [S_- \cdot S_+, \text{Expand} [\rho_2]])$

—

```

2Distribute[CenterDot[
Distribute [CenterDot [S+, Expand [ρ2]]] , S-]]
+Distribute [CenterDot [Expand [ρ2] , S- · S+]] // .
applyoperators;
(*Cálculo_da_intensidade_do_pulso_ < I(t) >= -ħ.ω d<S0>*)
e1 = Distribute [CenterDot [S0, Expand [ρ1]]] ;
e1 = e1//.applyoperators;
e1 = Distribute [Tr [e1]] //.ruletr;
e1 = Simplify [e1] ;
i0 = -ħωe1
(j + j2 + m(1 - m + 2n)) γωħ
e2 = Distribute [CenterDot [S0, Expand [ρ2]]] ;
e2 = e2//.applyoperators;
e2 = Distribute [Tr [e2]] //.ruletr;
e2 =  $\frac{e_2}{2}$ ;
e2 = Simplify [e2] ;
i1 = -ħω2e2
-2(j(1 - m + 2n) + j2(1 - m + 2n) + m(1 + m2 + 2n + 2n2 - 2m(1 + 2n))) γ2ωħ
e3 = Distribute [CenterDot [S0, Expand [ρ3]]] ;
e3 = e3//.applyoperators;
e3 = Distribute [Tr [e3]] //.ruletr;
e3 =  $\frac{e_3}{6}$ ;
e3 = Simplify [e3] ;
i2 = -ħω3e3
-(2j3 + j4 - j2(3 + 4m2 + 10n + 10n2 - 8m(1 + 2n))
-2j(2 + 2m2 + 5n + 5n2 - 4m(1 + 2n)) + m(3m3 - 10m2(1 + 2n) + m(11 + 26n + 26n2)
-2(2 + 5n + 3n2 + 2n3))γ3ωħ
(*Colocando_o_estado_inicial_em_termos_de_θ*)
j =  $\frac{n_a}{2}$ ; m =  $\frac{n_a}{2}\text{Cos}[\theta]$ ;

```

**Simplify [ $i_0$ ]**

$$\frac{1}{4}\gamma\omega\hbar n_a (2 + 2\text{Cos}[\theta] + 4n\text{Cos}[\theta] + \text{Sin}[\theta]^2 n_a)$$

**Simplify [ $i_1$ ]**

$$\frac{1}{4}\gamma^2\omega\hbar n_a (-4(1 + 2n + (1 + 2n + 2n^2)\text{Cos}[\theta]) + 2(\text{Cos}[\theta] + (1 + 2n)\text{Cos}[2\theta]))n_a \\ + \text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\theta]^2 n_a^2)$$

**Simplify [ $i_2$ ]**

$$\frac{1}{32}\gamma^3\omega\hbar n_a (32(2 + 5n + 5n^2 + (2 + 5n + 3n^2 + 2n^3)\text{Cos}[\theta]) \\ - 4(5 + 6n + 6n^2 + 16(1 + 2n)\text{Cos}[\theta] + (11 + 26n + 26n^2)\text{Cos}[2\theta])n_a \\ + 2(-(1 + 2n)\text{Cos}[\theta] + 4\text{Cos}[2\theta] + 5(1 + 2n)\text{Cos}[3\theta])n_a^2 + (1 + 3\text{Cos}[2\theta])\text{Sin}[\theta]^2 n_a^3)$$

(\*Considerando apenas os termos de maior ordem em  $n_a$  para cada termo da intensidade\*)

**Simplify [Coefficient [ $i_0, n_a, 2$ ]]**

$$\frac{1}{4}\gamma\omega\hbar\text{Sin}[\theta]^2$$

**Simplify [Coefficient [ $i_1, n_a, 3$ ]]**

$$\frac{1}{4}\gamma^2\omega\hbar\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\theta]^2$$

**Simplify [Coefficient [ $i_2, n_a, 4$ ]]**

$$\frac{1}{32}\gamma^3\omega\hbar(1 + 3\text{Cos}[2\theta])\text{Sin}[\theta]^2$$